НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Л.Д. ГОГОЛАДЗЕ

О СИЛЬНОМ СУММИРОВАНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Научный руководитель
доктор физико-математических наук Л.В.Жижиашвили

Т б и л и с и- 1969.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с сильным суммированием простых и двойных рядов Фурье и сопряженных к ним тригонометрических рядов.

Здесь мы дадим краткий обзор содержания отдельных глав, так как в каждой главе даются достаточные сведения о состоянии исследуемого вопроса и связанных с ним ранее известных результатов.

Первая глава " О сильном суммировании простых тригонометрических рядов" состоит из двух параграфов. В первом параграфе приведены некоторые определения и известные утверждения, которые используются в дальнейшем. Во втором параграфе рассматривается (T,P) суммируемость простых тригонометрических рядов Фурье, когда исходная функция $f(x) \in C[-\pi,\pi]$. Доказана

<u>Теорема I.</u> Пусть $f(x) \in C(F)$; $T=(a_{nk})$ - регулярная положительная треугольная матрица, элементы которого удовлетворяют условию (1;2.6). Тогда существует функция $\tau(n)\uparrow\infty$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \left| S_k(x,f) - f(x) \right|^{\tau(n)} \right\}^{\frac{1}{\tau(n)}} \right\|_C = 0.$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что для любой функции $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ существует $\rho(n)\uparrow\infty$, зависящее от $E_n(f)$, такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| S_k(x,f) - f(x) \right|^{\rho(n)} \right\}^{\frac{1}{\rho(n)}} \right\|_C = 0.$$

Затем доказываются (см. теорема 2 и замечания к этой теореме) справедливость следующих утверждений:

а) Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$, $f(t)$ неубывающая функция и $f(0)>0$. Если при некотором $\tau>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[E_n(f)]^{\tau}}{f(n)} < +\infty,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x,f)-f(x)|^{\tau}}{f(n)} \qquad (*)$$

сходится равномерно.

в) Если же

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[E_n(f)]}{f(n)} = +\infty,$$

то существует $f_0(x) \in C[-\pi,\pi]$, для которого $E_n(f_0) \le E_n(f)$, однако при некотором $x_0 \in [-\pi,\pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x_0,f_0)-f_0(x_0)|^{\tau}}{f(n)} = +\infty.$$

Показано, что если $f(x)$ и $\bar{f}(x) \in C[-\pi,\pi]$ и ряд (*) равномерно сходится, то сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)|}{f(n)}$$

можно гарантировать лишь почти всюду на $[-\pi,\pi]$.

Отметим также, что из теоремы 2 вытекают основные утверждения М.Кинукава [28].

В этой же главе доказана теорема 3, являющаяся аналогом теоремы 2 в пространстве $L[-\pi,\pi]$.

Вторая глава "Сходимость и суммируемость двойных тригонометрических рядов" состоит из двух параграфов. В первом параграфе обобщаются основные утверждения § 2 первой главы на случай функции двух переменных. В частности, установлено (см. лемма 5) следующее неравенство

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\varphi(i,k)}\left|S_{ik}(x,y,f)-f(x,y)\right|^{2}\le C_1(2)\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\varphi(i,k)}\left[E_{ik}(f)\right]^{2}.$$

Из этого соотношения вытекают интересные следствия, относящиеся равномерной (T,P) суммируемости двойных рядов Фурье функции $f(x,y)\in C(R)$. Далее исследуется вопрос об аналоге теоремы I. Оказалось, что справедлива

Теорема 4. Пусть $f(x,y)\in C(R)$ и $T=(a_{mnik})$ регулярная положительная треугольная матрица, удовлетворяющая условиям (2;I. 26). Тогда существует $\tau(m,n)\uparrow\infty$ такое, что

$$\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty}\left\|\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\left|S_{ik}(x,y,f)-f(x,y)\right|^{\tau(m,n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}}\right\|_C=0.$$

На примере показано, что в последнем соотношении λ - предел нельзя заменить обычным двойным пределом.

Затем рассматривается вопрос (H,P) суммируемости двойных рядов Фурье в отдельных точках или почти всюду. В связи с этим исправляются ошибки (см. теорема 5) Н.Т. Ней [I5]. Потом доказывается ряд лемм (некоторые из них имеют и самостоятельный интерес), на основе которых устанавливается

<u>Теорема 6</u>. Если $f(x,y)\in L\ln^{+}L$, $\bar{f}_j(x,y)\in L\ln^{+}L$ $(j=1,2)$, то для любого $r>0$, почти для всех $(x,y)\in R$

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left|S_{ik}(x,y,f)-f(x,y)\right|^{r}=0,$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left|\bar{S}_{ik}^{(j)}(x,y,f)-\bar{f}_j(x,y)\right|^{r}=0 \quad (j=1,2,3).$$

В частности, если $f(x,y)\in L(\ln^{+}L)^{2}$, то имеют место утверждения теоремы 6.

Во втором параграфе главы 2 рассматриваются вопросы суммируемости методами A^{*} и (C,α,β) $\alpha,\beta>-1$ двойных тригонометрических рядов. Теоремы 7 и 8 существенно обобщают соответствующий результат А. Зигмунда [29], а теорема 9 уточняет одну теорему Л.В.Жижиашвили (см. [22] стр.173)

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю, докт.физ.-математических наук Л.В.Жижиашвили за постоянное внимание и обсуждение вопросов.

ГЛАВА I

О СИЛЬНОМ СУММИРОВАНИИ ПРОСТЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

§ I. Некоторые определения и вспомогательные утверждения

Как обычно, через $L^p[-\pi,\pi]$, $1\le p<\infty$ обозначим множество всех измеримых 2π – периодических функций, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx < +\infty .$$

Под $L^\infty[-\pi,\pi]\equiv C[-\pi,\pi]$ будем предполагать класс всех 2π-периодических непрерывных функций. Через $\|f\|_{L_p}$ обозначим величину

$$\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} ,$$

причем

$$\|f\|_{L_\infty} \equiv \|f\|_C \equiv \max_{|x|\le\pi} |f(x)| .$$

Если $f(x)\in L[-\pi,\pi]$, то символом $\sigma(f)$ обозначим тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$\sigma(f)\equiv \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) , \qquad (I;\ I.I)$$

где

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx .$$

Символом $\bar{\mathfrak{S}}(f)$ обозначим сопряженный тригонометрический ряд ряда (I; I.I), т.е.

$$\bar{\mathfrak{S}}(f) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(-b_k \cos kx + a_k \sin kx\right). \qquad \text{(I; I.2)}$$

Как обычно, через $S_k(x,f)$ и $\bar{S}_k(x,f)$ будем обозначать частные суммы, соответственно, рядов (I;I.I) и (I;I.2), а символом $\bar{f}(x)$ сопряженную функцию функции $f(x)$, т.е.

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\,tg\,\frac{t}{2}}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\,tg\,\frac{t}{2}}\,dt. \qquad \text{(I;I.3)}$$

Далее, через $E_k^{(p)}(f)$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x) \in L^p[-\pi,\pi]$, $1 \le p \le \infty$ тригонометрическими полиномами порядка $\le k$ (см. [I], стр. 49), причем будем предполагать, что $E_k^{(\infty)}(f) \equiv E_k(f)$.

Пусть $T = (a_{nk})$ треугольная положительная матрица. Ряд (I; I.I) называется (см. , например [2]) (T, p) суммируемым в точке $x_0 \in [-\pi,\pi]$ к значению $f(x_0)$, если

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \left| S_k(x_0,f) - f(x_0) \right|^p = 0, \qquad p>0. \qquad \text{(I; I.4)}$$

В том случае, когда $a_{nk} = \frac{1}{n+1}$ получается (H, p) суммируемость (см. [I], стр. 488).

Пусть теперь $R = [-\pi,\pi; -\pi,\pi]$ и функция $f(x,y)$ периодическая с периодом 2π относительно каждой из переменных x и y. Символом $L^p(R)$, $1\le p<\infty$ будем обозначать множество всех измеримых функций $f(x,y)$, для которых

$$\iint_R |f(x,y)|^p\,dx\,dy<+\infty,$$

причем и здесь будем считать, что $L^\infty(R)\equiv C(R)$, $\|f\|_{L^p}=\left\{\frac{1}{4\pi^2}\iint_R |f(x,y)|^p dx dy\right\}^{\frac{1}{p}}$ при $1\le p<\infty$ и $\|f\|_{L^\infty}=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=\|f\|_C$. Далее, через $E^{(p)}_{mn}(f)$, $E^{(\infty)}_{mn}(f)\equiv E_{mn}(f)$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x,y)\in L^p(R)$ тригонометрическими полиномами порядка $\le m$ относительно x и порядка $\le n$ относительно y (см. [3], стр.44).

Положим $f(x,y)\in L(R)$. Через $G(f)$ будем обозначать двойной тригонометрический ряд Фурье функции $f(x,y)$, а символами $\bar{G}(f,x)$, $\bar{G}(f,y)$, $\bar{G}(f,x,y)$ - соответственно сопряженные тригонометрические ряды по переменному x, по переменному y и по совокупности переменных x и y, т.е.

$$G(f)\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}\left(a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+\right.$$
$$\left.+c_{mn}\cos mx\sin ny+d_{mn}\sin mx\sin ny\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}(x,y),\quad \lambda_{mn} \qquad (I;I.5)$$

$$\bar{G}(f,x)\equiv\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{mn}\left(-b_{mn}\cos mx\cos ny+a_{mn}\sin mx\cos ny-\right.$$
$$\left.-d_{mn}\cos mx\sin ny+c_{mn}\sin mx\sin ny\right)=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}B_{mn}(x,y),\quad \lambda_{mn} \qquad (I;I.6)$$

$$\tilde{G}(f,y) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} \big(- b_{mn} \cos mx \cos ny - d_{mn} \sin mx \cos ny + a_{mn} \cos mx \sin ny + b_{mn} \sin mx \sin ny \big) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}(x,y), \qquad (I;I.7)$$

$$\tilde{G}(f,x,y) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn} \big(d_{mn} \cos mx \cos ny - c_{mn} \sin mx \cos ny - b_{mn} \cos mx \sin ny + a_{mn} \sin mx \sin ny \big) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{mn}(x,y), \qquad (I;I.8)$$

где

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4} & m=n=0, \\ \frac{1}{2} & m=0\ n>0;\ n=0,\ m>0, \\ 1 & m>0\ n>0, \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{mn}(f) &= \frac{1}{\pi^2} \iint_R f(x,y) \cos mx \cos ny \, dx\,dy, \quad b_{mn}(f) = \frac{1}{\pi^2} \iint_R f(x,y) \sin mx \cos ny \, dx\,dy, \\ c_{mn}(f) &= \frac{1}{\pi^2} \iint_R f(x,y) \cos mx \sin ny \, dx\,dy, \quad d_{mn}(f) = \frac{1}{\pi^2} \iint_R f(x,y) \sin mx \sin ny \, dx\,dy. \end{aligned} \right\} (*)$$

Будем предполагать, что выражения $A_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$, $B_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$, $C_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ и $\mathcal{D}_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ обозначают (C,α,β), $\alpha,\beta>-1$ средние, соответственно, рядов (I;I.5)- (I;I.8), т.е.

$$A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)=\frac{1}{A^{\alpha}_{m}A^{\beta}_{n}}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}A^{\alpha}_{m-i}A^{\beta}_{n-k}A_{ik}(x,y), \qquad (I;I.9)$$

где

$$A^{\alpha}_{m}=\frac{(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+m)}{m!}, \qquad \alpha\neq-1,\ \alpha\neq-2\ \ldots\ldots$$

(Аналогично определяются и $B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)$, $C^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)$, $\mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)$. Иногда будут использованы и следующие обозначения:

$$A^{(0,0)}_{mn}(x,y)=S_{mn}(x,y,f), \qquad B^{(0,0)}_{mn}(x,y)=\bar{S}^{(1)}_{mn}(x,y,f),$$

$$C^{(0,0)}_{mn}(x,y)=\bar{S}^{(2)}_{mn}(x,y,f), \qquad \mathcal{D}^{(0,0)}_{mn}(x,y)=\bar{S}^{(3)}_{mn}(x,y).$$

Как обычно, через $\bar{f}_1(x,y)$, $\bar{f}_2(x,y)$ и $f_3(x,y)$ обозначим, соответственно, сопряженные функции для $f(x,y)$ по переменному x, по переменному y и по совокупности переменных x и y, которые определяются следующими соотношениями:

$$\bar{f}_1(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(x+t,y)-f(x-t,y)}{2\,tg\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x+t,y)-f(x-t,y)}{2\,tg\frac{t}{2}}\,dt, \qquad (I;I.10)$$

$$\bar{f}_2(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x,y+s)-f(x,y-s)}{2\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\,ds =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\lim_{\eta\to 0+}\int_{\eta}^{\pi}\frac{f(x,y+s)-f(x,y-s)}{2\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\,ds\,, \qquad \text{(I; I.II)}$$

$$\bar{f}_3(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{4\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\,dt\,ds =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \eta\to 0+}}\int_{\varepsilon}^{\pi}\int_{\eta}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{4\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\,dt\,ds\,, \qquad \text{(I; I.I2)}$$

где

$$\Delta(x,y,t,s,f) = f(x+t,y+s) - f(x+t,y-s) - f(x-t,y+s) + f(x-t,y-s)\,.$$

Рассмотрим теперь регулярную матрицу $T = (a_{mnik})$, где $a_{mnik} > 0$ и $a_{mnik} = 0$, если $i > m$ или $k > n$ *). Ряд (I;I.5) назывaем (T,p) суммируемым в точке $(x_0,y_0) \in R$ к значению $f(x_0,y_0)$, если

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik}\left|A_{ik}^{(0,0)}(x_0,y_0) - f(x_0,y_0)\right|^p = 0\,; \qquad \text{(I; I.I3)}$$

когда

$$a_{mnik} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \qquad \text{тогда} \quad (T,p) \equiv (H,p)\,.$$

---

*) Четырехмерную матрицу, удовлетворяющую приведенным здесь условиям, в дальнейшем будем называть положительной треугольной матрицей.

Пусть $f(z_1, z_2)$, $z_1 = r_1 e^{ix}$, $z_2 = r_2 e^{iy}$ определена в единичном бицилиндре $|z_j| < 1$ $(j = 1, 2)$. Говорят, что функция $f(z_1, z_2)$ регулярна (см. [4], стр. 475) в единичном бицилиндре, если

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} z_1^m z_2^n \qquad (I;\ I.I4)$$

и ряд, стоящий в правой части равенства (I; I.I4) абсолютно сходится при $|z_j| < 1$ $(j = 1, 2)$.

Регулярную функцию называют (см. [4], стр. 475) функцией класса H_p, $p > 0$, если

$$\iint_R |f(r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy})|^p \, dx\, dy \le A(f) < \infty$$

при любых $r_j < 1$ $(j = 1, 2)$, где $A(f)$ положительная константа, зависящая лишь от функции $f(z_1, z_2)$.

Кроме этого, будут также использованы неравенства Гельдера (см. [I], стр. 32), Минковского (см. [I], стр. 35), преобразования Абеля (см. [I], стр. I7), Харди (см. [5], стр. 35); теорема Фубини (см. [I], стр. 44) и следующие (см. [I], стр. 3I) числовые неравенства:

$$|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p), \quad p > 1, \qquad (I;\ I.I5)$$

$$|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p, \quad 0 < p \le 1. \qquad (I.I.I6)$$

§ 2 (T,p) Суммируемость простых тригонометрических рядов Фурье

Известно (см. [I], стр. 493), что если $f(x)\in C[-\pi,\pi]$, то соотношение (I;I.4) при $a_{nk}=\frac{1}{n+1}$ выполняется равномерно относительно $x\in[-\pi,\pi]$,т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|S_k(x,f)-f(x)|^p\right\|_C=0. \qquad (I;2.I)$$

Известно также (см. [I] ,стр. 483), что если имеет место (I; 2.I), то оно справедливо и для всех $p'<p$; иначе говоря, (H,p) суммируемость влечет (H,p') суммируемость. Исходя из этого, Грюнвальдом (см. [I], стр. 50I) был поставлен вопрос: можно ли найти такую функцию $p(n)$,что $p(n)\uparrow\infty$,но все же

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|S_k(x,f)-f(x)|^{p(n)}\right\|_C=0, \qquad (I;2.2)$$

для любой функции $f(x)\in C[-\pi,\pi]$.

П. Туран [6] показал,что если $p(n)\uparrow^{\infty}$ как угодно медленно,то можно построить функцию $f(x)\in C[-\pi,\pi]$ такую, что при некотором $x_0\in[-\pi,\pi]$ соотношение (I;2.2.) уже не имеет места.

Д. Кралик [7] для заданного $p(n)=\bar{\bar{o}}(\ln n)$ нашел класс функций, для которых в отдельных точках или равномерно на некотором множестве $E\subset[-\pi,\pi]$ выполняется следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|S_k(x,f)-f(x)|^{p(n)}\right\}^{\frac{1}{p(n)}}=0. \qquad (I;2,3)$$

Л.Лейндлер [8] показал, что утверждения Д.Кралика справедливы и для следующего выражения

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \left| S_k(x,f) - f(x) \right|^{p(n)} \right\}^{\frac{1}{p(n)}}, \qquad (I;2.4)$$

если $T=(a_{nk})$ положительная треугольная регулярная матрица, для которой при некотором $\tau > 1$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_{nk}^{\tau} \right\}^{\frac{1}{\tau}} \le K\, n^{\frac{1-\tau}{\tau}} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \qquad (I;2.5)$$

где K - абсолютная положительная константа.

Пусть $T=(a_{nk})$ положительная треугольная регулярная матрица, для которой

$$a_{nk+1} \le a_{nk} \quad \text{при любом} \quad n. \qquad (I;2.6)$$

Возникает вопрос: можно ли для каждой функции $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ найти $p(n)\uparrow\infty$, зависящее от $f(x)$, для которого

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_{nk} \left| S_k(x,f) - f(x) \right|^{p(n)} \right\}^{\frac{1}{p(n)}} \right\|_C = 0.$$

Далее, ряд авторов занимались вопросами сходимости или расходимости следующих рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(x,f) - f(x)}{k}, \qquad (I;2.7)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| S_k(x,f) - f(x) \right|}{k}. \qquad (I;2.8)$$

В частности, П.Л.Ульянов [9] показал, что существует функция $f(x)\in C[-\pi,\pi]$ с равномерно сходящимся рядом Фурье, для которой ряд (I;2.7) расходится в каждой точке (см.также [I0]). Спрашивается: какие наименьшие условия, наложенные на $E_n(f)$, гарантируют равномерную сходимость следующего ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|S_k(x,f)-f(x)|^p}{\varphi(k)}, \qquad (I.2.9)$$

где $\varphi(t)$ – неубывающая функция и $\varphi(0)>0$, а p – некоторое фиксированное положительное число.

В этом параграфе доказываются теоремы, которые, в частности, дают ответы на вышепоставленные вопросы.

Сначала покажем, что справедлива

<u>Лемма</u> I. П у с т ь $f(x)\in C[-\pi,\pi]$ и $\|f\|_C=M$. Т о г д а д л я л ю б о г о $\tau>0$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=k-1}^{2k-2}\frac{|S_i(x,f)|^{p}}{\varphi(i)} \le C(\tau)\,\varphi(k-1)^{-1}\cdot M^{2}, \qquad (I;2.I0)$$

г д е $\varphi(t)$ – л ю б а я н е у б ы в а ю щ а я ф у н к ц и я и $\varphi(0)>0$, а $C(\tau)$ – п о л о ж и т е л ь н а я к о н с т а н т а, з а в и с я щ а я л и ш ь о т τ.

<u>Доказательство</u>. Пусть $k-1\le i\le 2k-2$. Так как

$$S_i(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(i+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt, \qquad (I;2.II)$$

то

$$|S_i(x,f)|\le\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\frac{1}{k}}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(i+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt\right| +$$

$$+\frac{1}{\pi}\Big|\int^{\pi} f(x+t)+f(x-t)$$

Принимая во внимание, что (см. например [I], стр.95)

$$\left.\begin{array}{ll} |\sin nt| \le n|t|, & \\ \sin t \ge \frac{2}{\pi} t, & 0 \le t \le \frac{\pi}{2}, \end{array}\right\} \qquad (I.2.I3)$$

согласно условию леммы, находим

$$J_1(x,i,k) \le \frac{1}{\pi} 2M \frac{\pi}{2}\left(2k-2+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{k} \le 2M; \qquad (I.2.I4)$$

ясно, что

$$J_2(x,i,k) \le \frac{1}{\pi}\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \sin it\,dt\right| + \frac{1}{\pi}\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}[f(x+t)-f(x-t)]\cos it\,dt\right| =$$

$$= J_2^{(1)}(x,i,k) + J_2^{(2)}(x,i,k). \qquad (I;2;I5)$$

Но так как $J_2^{(2)}(x,i,k) \le 2M$, то используя (I; 2.I2), (I;2.I4) и (I; 2.I5) будем иметь

$$\frac{1}{k}\sum_{i=k-1}^{2k-2}\frac{|S_i(x,f)|^2}{\varphi(i)} \le \frac{1}{k}\sum_{i=k-1}^{2k-2}\frac{|4M+J_2^{(1)}(x,i,k)|^2}{\varphi(i)}.$$

Отсюда в силу монотонности функции $\varphi(t)$ с применением неравенства Гёльдера, находим

$$\frac{1}{k}\sum_{i=k-1}^{2k-2}\frac{|S_i(x,f)|^2}{\varphi(i)} \le \frac{1}{k\,\underbrace{\varphi(k-1)}_{\varphi(2k-2)}}\, k^{1-\frac{2}{2+2}}\left(\sum_{i=k-1}^{2k-2}|4M+J_2^{(1)}(x,i,k)|^{2+2}\right)^{\frac{2}{2+2}}.$$

Последнее соотношение в силу (I;I.I5) и (I; I.I6) дает

$$\frac{1}{k}\sum_{i=k-1}^{2k-2}\frac{|S_i(x,f)|^2}{\varphi(i)} \le \frac{1}{k^{\frac{2}{2+2}}\varphi(k-1)}\left\{k^{\frac{2}{2+2}}2^{3\tau}M^2 + 2^2\left[\sum_{i=k-1}^{2k-2}|J_2^{(1)}(x,i,k)|^{2+2}\right]^{\frac{2}{2+2}}\right\} =$$

$$= \frac{2^{3\tau}M^2}{\varphi(k-1)} + \frac{2^2}{k^{\frac{2}{2+2}}\varphi(k-1)}\left\{\sum_{i=k-1}^{2k-2}|J_2^{(1)}(x,i,k)|^{2+2}\right\}^{\frac{2}{2+2}}. \qquad (I;2.I6)$$

Положим

$$\psi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{2\,tg\frac{t}{2}}, & \dfrac{1}{k} \le t \le \pi, \\ 0, & -\pi \le t < \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Ясно, что выражения $J_2^{(1)}(x,i,k)$ есть $\sin$ коэффициент функции $\psi_x(t)$. Тогда применяя теорему Хаусдорфа-Юнга (см. [I], стр. 2II), будем иметь

$$\left(\sum_{i=k-1}^{2k-2} \left|J_2^{(1)}(x,i,k)\right|^{r+2}\right)^{\frac{1}{r+2}} \le \left(\int_{\frac{1}{k}}^{\pi} \left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\,tg\frac{t}{2}}\right|^{\frac{r+2}{r+1}} dt\right)^{\frac{r+1}{r+2}}.$$

Отсюда, используя условия леммы и неравенства (I;2.I3) получаем

$$\left(\sum_{i=k-1}^{2k-2} \left|J_2^{(1)}(x,i,k)\right|^{r+2}\right)^{\frac{1}{r+2}} \le \pi M \left(\int_{\frac{1}{k}}^{\pi} \frac{dt}{t^{\frac{r+2}{r+1}}}\right)^{\frac{r+1}{r+2}} \le \pi M (r+1)^{\frac{r+1}{r+2}} k^{\frac{1}{r+2}}.$$

Последнее соотношение вместе с (2;I.I6) дает

$$\frac{1}{k}\sum_{i=k-1}^{3k-2} \frac{|S_i(x,f)|^r}{\varphi(i)} \le \frac{2^{3r} M^r}{\varphi(k-1)} + \frac{1}{\varphi(k-1)}\, 2^r \pi^r M^r (r+1)^{r\cdot\frac{r+1}{r+2}} \le$$

$$\le \frac{M^r}{\varphi(k-1)}\, 2^{3r+1} (r+1)^r = C(r) M^r \frac{1}{\varphi(k-1)},$$

где

$$C(r) = (r+1)^r\, 2^{3r+1} . \qquad \text{(I;2.I7)}$$

Лемма доказана.

Имеет место и

Лемма 2. Пусть $f(x)\in C[-\pi,\pi]$ и $\mathcal{f}(t)$ удовлетворяет условиям леммы I. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|S_k(x,f)-f(x)|^2}{\mathcal{f}(k)}\le C_1(\tau)\sum_{k=0}^{n}\frac{[E_k(f)]^2}{\mathcal{f}(k)}, \qquad (I;2.I8)$$

где $\tau>0$ а $C_1(\tau)$ положительная константа, зависящая лишь от τ.

Доказательство. Пусть $T_i(x)$ - полином наилучшего приближения для функции $f(x)$. Тогда, если $k-1\le i\le 2k-2$, то

$$|f(x)-S_i(x,f)|\le|f(x)-T_i(x)|+|S_i(x,f)-T_i(x)|\le$$

$$\le E_{k-1}(f)+|S_i(x,f-T_i)|. \qquad (I;2.I9)$$

Так как $\|f(x)-T_i(x)\|_C\le E_{k-1}(f)$, то используя (I; I.I5), (I;I.I6) и (I;2.I9), в силу леммы I будем иметь

$$\frac{1}{k}\sum_{i=k-1}^{2k-2}\frac{|S_i(x,f)-f(x)|^2}{\mathcal{f}(i)}\le 2^\tau\frac{[E_{k-1}(f)]^2}{\mathcal{f}(k-1)}+2^\tau C(\tau)\frac{[E_{k-1}(f)]^2}{\mathcal{f}(k-1)}\le$$

$$\le 2^{\tau+1}C(\tau)\frac{[E_{k-1}(f)]^2}{\mathcal{f}(k-1)}, \qquad (I;2.20)$$

2k-2

ибо согласно (I; 2.I7) $C(\tau)>1$. Положим, что

$$2^{m_0}-2<n\le 2^{m_0+1}-2.$$

Тогда используя (I;2.20), получим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|S_k(x,f)-f(x)|^r}{\rho(k)} \le \sum_{k=0}^{m_0} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} \sum_{i=2^k-1}^{2^{k+1}-2} \frac{|S_i(x,f)-f(x)|^r}{\rho(i)} \le$$

$$2^{r+1} C(r) \sum_{k=0}^{m_0} \frac{2^k [E_{2^k-1}(f)]^r}{\rho(2^{k+1}-1)} \le 2^{r+1} C(r) \frac{[E_0(f)]^r}{\rho(0)} +$$

$$+ 2^{r+1} C(r) \sum_{k=1}^{m_0} 2 \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{[E_i(f)]^r}{\rho(i)} \le 2^{r+2} C(r) \sum_{k=0}^{n} \frac{[E_k(f)]^r}{\rho(k)} =$$

$$= C_1(r) \sum_{k=0}^{n} \frac{[E_k(f)]^r}{\rho(k)},$$

где

$$C_1(r) = 2^{r+2} C(r). \qquad (I;2.2I)$$

Лемма доказана.

Замечание. Утверждение леммы 2 справедливо и в том случае, когда $r=r(n)$, $\rho(k)=\frac{1}{a_{nk}}$ для данного n, где a_{nk} удовлетворяет неравенству (I; 2.6), т.е. имеет место следующее соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} |S_k(x,f)-f(x)|^{r(n)} \le 2^{4r(n)+3} [r(n)+1]^{r(n)} \sum_{k=0}^{n} a_{nk} [E_k(f)]^{r(n)}, \qquad (I;2.22)$$

ибо согласно (I;2.I7) и (I;2.2I) $C_1(r) = 2^{4r+3}(r+1)^r$.

Отметим, что подобная лемма доказана в работе [2] (см.также [II]).

Пусть $F_n \downarrow 0$ любая последовательность. Следуя С.Б.Стечкину (см. [I2]) символом $C(F)$ обозначим множество функций $f(x) \in C[-\pi,\pi]$,для которых

Справедлива следующая

Теорема I. Пусть $f(x)\in C(F)$ и $T=(a_{nk})$ – регулярная положительная треугольная матрица, элементы которой удовлетворяют условию (I; 2.6). Тогда существует $\tau(n)\uparrow\infty$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\left\{\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\left|S_k(x,f)-f(x)\right|^{\tau(n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(n)}}\right\|_C=0. \qquad (I;2.24)$$

Доказательство. Согласно (I; 2.22), находим

$$\left\|\left\{\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\left|S_k(x,f)-f(x)\right|^{\tau(n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(n)}}\right\|_C\le$$

$$2^{4+\frac{3}{\tau(n)}}\left[\tau(n)+1\right]\left\{\sum_{k=0}^{n}a_{nk}\left[E_k(f)\right]^{\tau(n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(n)}}=\mathcal{T}(n) \qquad (I;2.25)$$

Исходя из того, что $T=(a_{nk})$ регулярная матрица и $F_k\downarrow 0$, заключаем

$$\sup_{i\ge n}\sum_{k=0}^{i}a_{ik}F_k=h_n\longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n\to\infty. \qquad (I.2.25')$$

Стало быть, $\frac{1}{h_n}\uparrow\infty$. Затем если $\tau_1(n)=\left(\ln\frac{1}{h_n}\right)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, то

$\tau(n)\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}h_n^{\frac{1}{\tau_1(n)}}\cdot\tau_1(n)=0. \qquad (I;2.26)$$

Далее, так как $F_k \downarrow 0$,то найдется такое K_0 ,что

$$F_k < 1, \quad \text{при} \quad k > K_0 . \tag{I;2.27}$$

В силу (I;2.23) и (I;2,6) имеем

$$\tau(n)\left\{\sum_{k=0}^{K_0} a_{nk}\left[E_k(f)\right]^{\tau(n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(n)}} \le$$

$$\le \tau(n) F_0 K_0^{\frac{1}{\tau(n)}} a_{n0}^{\frac{1}{\tau(n)}} \tag{I;2.28}$$

Пусть $\tau_2(n) = \inf_{i \ge n} \left(\ln \frac{1}{a_{i0}}\right)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$. Ясно, что $\tau_2(n) \uparrow \infty$

и

$$\lim_{n\to\infty} \tau_2(n)\, a_{n0}^{\frac{1}{\tau_2(n)}} = 0. \tag{I;2.29}$$

Тогда,если $\tau(n) = \min[\tau_1(n)\ \tau_2(n)]$,то легко проверить,что одновременно будут выполнены соотношения (I;2.26) и (I;2.29),т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left[h_n^{\frac{1}{\tau(n)}}\tau(n) + \tau(n)\cdot a_{n0}^{\frac{1}{\tau(n)}}\right] = 0. \tag{I;2.30}$$

С другой стороны,используя (I;I.16,(I;2.23) и (I;2.27) согласно (I;2.25),при $\tau(n) \ge 1$ будем иметь

$$\mathcal{T}(n) = 2^{4+\frac{3}{\tau(n)}}\left[\tau(n)+1\right]\left\{\sum_{k=0}^{K_0} a_{nk}\left[E_k(f)\right]^{\tau(n)} + \sum_{k=K_0+1}^{n} a_{nk}\left[E_k(f)\right]^{\tau(n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(n)}} \le$$

$$\le 2^{4+\frac{3}{\tau(n)}}\left[\tau(n)+1\right]\left(\left\{\sum_{k=0}^{K_0} a_{nk}\left[E_k(f)\right]^{\tau(n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(n)}} + \left\{\sum_{k=0}^{n} a_{nk} F_k\right\}^{\frac{1}{\tau(n)}}\right).$$

Отсюда в силу (I;2.25'),(I;2.28) и (I;2.30) находим

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}(n) = 0.$$

Тогда из (I;2.25) получаем (I;2.24).

Теорема доказана.

Имеет место и следующая

Теорема 2. Пусть $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ и $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям леммы I. Тогда для любого натурального $k \geq 1$ и $r>0$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{n=2k-1}^{\infty} \frac{|S_n(x,f)-f(x)|^r}{\varphi(n)} \right\|_C \leq C_1(r) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[E_n(f)]^r}{\varphi(n)} \qquad (I;2.31)$$

Доказательство. В силу неравенства (I;2.20) будем иметь

$$\sum_{n=2k-1}^{\infty} \frac{|S_n(x,f)-f(x)|^r}{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^n k-1}^{2^{n+1}k-2} \frac{|S_i(x,f)-f(x)|^r}{\varphi(i)} \leq$$

$$\leq 2^{r+1} C(r) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n k \frac{[E_{2^n k-1}(f)]^r}{\varphi(2^n k-1)} \leq 2^{r+2} C(r) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2^{n-1}k}^{2^n k-1} \frac{[E_i(f)]^r}{\varphi(i)} =$$

$$= C_1(r) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[E_n(f)]^r}{\varphi(n)},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[E_n(f)]^r}{\varphi(n)} < \infty, \qquad (I;2.32)$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x,f)-f(x)|^r}{\varphi(n)} \qquad (I;2.33)$$

сходится равномерно относительно $x \in [-\pi,\pi]$

Заметим, что для всего класса $C(F)$ справедливо следующее соотношение

$$\sum_{n=2k-1}^{\infty} \frac{[F_n]^2}{f(n)} \le \sup_{f\in C(F)} \left\| \sum_{n=2k-1}^{\infty} \frac{|S_n(x,f)-f(x)|^2}{f(n)} \right\|_C \le C_1(r) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[F_n]^2}{f(n)} . \quad (I;2.34)$$

В самом деле, правая часть неравенства (I;2.34) следует из (I;2.31) с применением (I;2.23); а справедливость левой части показывает следующий (см. [I2]) пример:

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_{n-1} - F_n) \cos nx ,$$

для которого

$$|f_0(0) - S_k(0,f_0)| = \sum_{n=k+1}^{\infty} (F_{n-1} - F_n) = F_k ,$$

$$E_k(f_0) \le F_k , \quad \text{т.е.} \quad f_0(x) \in C(F)$$

и

$$\left\| \sum_{n=2k-1}^{\infty} \frac{|S_n(x,f_0) - f_0(x)|^2}{f(n)} \right\|_C \ge \sum_{n=2k-1}^{\infty} \frac{[F_n]^2}{f(n)} .$$

Соотношение (I;2.34) показывает, что для всего класса $C(F)$ сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[F_n]^2}{f(n)}$$

является необходимым и достаточным условием равномерной сходимости ряда (I;2.33).

Пусть теперь $f(x)$ и $\bar{f}(x) \in C[-\pi,\pi]$ и ряд (I;2.33) равномерно сходится. Спрашивается: что можно сказать о сходимости следующего ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)|^2}{f(n)} \qquad (I;2.35)$$

Пример показывает, что равномерная сходимость ряда (I;2.33), вообще говоря, не влечет равномерную сходимость ряда (I; 2.35).

Действительно, пусть $\tau=1$, $f(n)=n+1$ и

$$f_1(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\ln^2(n+1)}.$$

Тогда

$$\bar{f}_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\ln^2(n+1)}.$$

Используя одну лемму Н.К.Бари [I3], будем иметь

$$E_n(f_1)\leq\frac{A}{\ln^2(n+1)},$$

где A - абсолютная положительная константа. Стало быть, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n(f_1)}{n+1}<\infty$ и в силу теоремы 2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|S_n(x,f_1)-f_1(x)|}{n+1}$ равномерно сходится. С другой стороны ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\bar{S}_n(0,f_1)-\bar{f}_1(0)|}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2(k+1)}=+\infty.$$

Этот пример показывает и тот факт, что условие (I;2.32), вообще говоря, не гарантирует равномерную сходимость ряда (I;2.35). Но нетрудно показать, что условие (I; 2.32) гарантирует сходимость ряда (I;2.35) почти всюду.

В самом деле, пусть $\tau>1$, тогда в силу теоремы (см. [I],

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)|^2 dx \le B(\tau)\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x,f)-f(x)|^2 dx. \qquad (I;2.36)$$

Далее,известно (см. [3] , стр. 339),что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x,f)-f(x)|^2 dx \le B_1(\tau)\left[E_n^{(\tau)}(f)\right]^2 . \qquad (I;2.37)$$

Тогда (I; 2.36) и (I; 2;37) дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)|^2 dx \le B_2(\tau)\left[E_n^{(\tau)}(f)\right]^2 \le B_3(\tau)\left[E_n(f)\right]^2 .$$

Отсюда, в силу условия (I;2.32) и теоремы Леви (см. [I4] стр. 49) находим,что ряд (I; 2,35) сходится почти всюду.

Если же $0<\tau\le 1$,то используя неравенство Гёльдера такими же рассуждениями,что было проделано при $\tau>1$, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)|^2 dx \le B_4(\tau)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\bar{S}_n(x,f)-\bar{f}(x)|^{\tau+1} dx\right)^{\frac{\tau}{\tau+1}} \le$$

$$\le B_5(\tau)\left[E_n(f)\right]^2 .$$

Теперь рассмотрим вопрос об аналоге теоремы 2 в смысле метрики $L[-\pi,\pi]$. Сначала убеждаемся,что справедлива следующая

Л е м м а 3. П у с т ь $f(x)\in L[-\pi,\pi]$ и $\varphi(t)$ у д о в л е т в о р я е т у с л о в и я л е м м ы I. Т о г д а

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{S_k(x,f)}{\varphi(k)}\right| dx \le C\,\|f\|_L \,\frac{n}{\varphi(n)} , \qquad (I;2.38)$$

где C - положительная абсолютная константа.

Доказательство. В силу (I; 2.II) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{S_k(x,f)}{\mathfrak{f}(k)}\right|dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\mathfrak{f}(k)}\int_0^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(k+\tfrac{1}{2})t\,dt\right|dx\le$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\mathfrak{f}(k)}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(k+\tfrac{1}{2})t\,dt\right|dx\ +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\mathfrak{f}(k)}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin(k-\tfrac{1}{2})t\,dt\right|dx=J_1(n,x)+J_2(n,x)\ .$$

(I;2.39)

В силу (I; 2.I3) ,применяя теорему Фубини, находим

$$J_1(n,x)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{k+\frac{1}{2}}{\mathfrak{f}(k)}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{n}}\left|f(x+t)+f(x-t)\right|dt\right]dx\le$$

$$\le\frac{n^2}{\mathfrak{f}(n)}\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+t)+f(x-t)\right|dx\,dt\le\frac{4\pi n}{\mathfrak{f}(n)}\|f\|_L\ .$$

(I;2.40)

Затем ясно

$$J_2(n,x)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\mathfrak{f}(k)}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\,tg\frac{t}{2}}\sin kt\,dt\right|dx\ +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\mathfrak{f}(k)}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]dt\right|dx=J_2^{(1)}(n,x)+J_2^{(2)}(n,x).$$

(I;2.4I)

Но нетрудно видеть,что

$$J_2^{(2)}(n,x)\le 2\pi\frac{n}{\mathfrak{f}(n)}\|f\|_L\ .$$

(I.2.42)

Далее, применяя преобразование Абеля, легко получим

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{\sin kt}{f(k)} \leq \frac{2\pi}{t} \frac{1}{f(n)}, \qquad 0<t<\pi .$$

Поэтому

$$J_2^{(1)}(n,x) \leq \frac{2}{f(n)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{|f(x+t)+f(x-t)|}{t \cdot 2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\, dt\, dx \leq$$

$$\leq \frac{2\pi}{f(n)} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \frac{dt}{t^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)+f(x-t)|\, dx \leq 2\pi^2 \frac{n}{f(n)} \|f\|_L . \qquad (I;2.43)$$

Тогда из (I; 2.39)-(I;2.43) вытекает (I;2.38).

Теперь убедимся, что справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $f(x) \in L[-\pi,\pi]$ и $f(t)$ удовлетворяет условиям леммы I. Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n^{(1)}(f)}{f(n)} < \infty, \qquad (I;2.44)$$

то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{S_k(x,f)-f(x)}{f(k)} \right| \qquad (I;2.45)$$

сходится почти всюду.

Доказательство. Пусть $T_i(x)$ полином наилучшего приближения функции $f(x)$ в метрике $L[-\pi,\pi]$ и $2^k \leq i < 2^{k+1}-1$.

Применяя лемму 3, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{S_i(x,f)-f(x)}{\varphi(i)}\right|dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}\left\{\frac{T_{2^k}(x)-f(x)}{\varphi(i)}+\frac{S_i(x,f-T_{2^k})}{\varphi(i)}\right\}\right|dx\leq$$

$$\leq\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{f(x)-T_{2^k}(x)}{\varphi(i)}\right|dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{S_i(x,f-T_{2^k})}{\varphi(i)}\right|dx\leq$$

$$\leq 2\pi\frac{2^k}{\varphi(2^k)}E_{2^k}^{(1)}(f)+C\frac{2^k}{\varphi(2^k)}E_{2^k}^{(1)}(f)=C_1\frac{2^k}{\varphi(2^k)}E_{2^k}^{(1)}(f);$$

Просуммировав это неравенство, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{S_i(x,f)-f(x)}{\varphi(i)}\right|dx\leq C_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k E_{2^k}^{(1)}(f)}{\varphi(2^k)}\leq$$

$$C_1\left(\frac{E_1^{(1)}(f)}{\varphi(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}2\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{E_i^{(1)}(f)}{\varphi(i)}\right)\leq$$

$$\leq 2C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{E_i^{(1)}(f)}{\varphi(i)}$$

Отсюда используя (I; 2.44), согласно теореме Леви (см. [I4], стр. 49) заключаем, что ряд (I.2; 45) почти всюду сходится.

Теорема доказана.

Нам неизвестно, влечет ли условие (I;2.44) сходимость почти всюду ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|S_k(x,f)-f(x)|}{\varphi(k)}.$$

ГЛАВА П

СХОДИМОСТЬ И СУММИРУЕМОСТЬ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

§ I. Сильное суммирование двойных тригонометрических рядов Фурье

Сначала докажем леммы, которые являются обобщениями лемм I и 2 первой главы на случай функции двух переменных.

Лемма 4. Пусть $f(x,y)\in C(R)$, $\|f\|_C = M$ и $\varphi(t,s)$ неубывающая функция относительно каждого переменного, причем $\varphi(0,0)>0$. Тогда для любого $\tau>0$

$$\frac{1}{ik}\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\frac{|S_{\mu\nu}(x,y,f)|^2}{\varphi(\mu,\nu)}\le C(\tau)M^2\frac{1}{\varphi(i-1,k-1)}, \qquad (2;I.I)$$

где $C(\tau)$ положительная константа, зависящая лишь от τ.

Доказательство. Пусть

$$\Delta(x,y,t,s,f)=f(x+t,y+s)-f(x+t,y-s)-f(x-t,y+s)+f(x-t,y-s), \qquad (2;I.2)$$

$i-1\le\mu\le 2i-2$, $k-1\le\nu\le 2k-2$. Так как

$$S_{\mu\nu}(x,y,f)=\frac{1}{\pi^2}\iint_R\frac{f(x+t,y+s)}{4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{s}{2}}\sin(\mu+\tfrac12)t\sin(\nu+\tfrac12)s\,dt\,ds, \qquad (2;I.3)$$

то

$$S_{\mu\nu}(x,y,f)\le\frac{1}{\pi^2}\Bigg[\Bigg|\int_0^{\frac1i}\int_0^{\frac1k}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{4\sin\frac t2\sin\frac s2}\sin(\mu+\tfrac12)t\sin(\nu+\tfrac12)s\,dt\,ds\Bigg| +$$

$$+\Bigg|\int^{\frac1i}\int^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{}\sin(\mu+\tfrac12)t\sin(\nu+\tfrac12)s\,dt\,ds\Bigg| +$$

$$\left|\int_0^{\frac{1}{k}}\int_{\frac{1}{i}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{s}{2}}\sin(\mu+\tfrac{1}{2})t\sin(\nu+\tfrac{1}{2})s\,dt\,ds\right|+$$

$$+\left|\int_{\frac{1}{i}}^{\pi}\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{s}{2}}\sin(\mu+\tfrac{1}{2})t\sin(\nu+\tfrac{1}{2})s\,dt\,ds\right|\Bigg]=\sum_{j=1}^{4}J_j(x,y,\mu,\nu,i,k). \quad (2;I.4)$$

Поэтому используя (I;I.I5) и (I;I6) , получаем

$$|S_{\mu\nu}(x,y,f)|^2\le 4^2\sum_{j=1}^{4}\left[J_j(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^2$$

Тогда опираясь на свойства функции $f(t,s)$,будем иметь

$$\frac{1}{ik}\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\frac{[S_{\mu\nu}(x,y,f)]^2}{f(\mu,\nu)}\le$$

$$\le 4^2\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{ik\,f(i-1,k-1)}\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_j(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^2. \quad (2;I.5)$$

Но нетрудно видеть,что

$$\left[J_1(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^2\le\frac{1}{\pi^{2\tau}}\left[\frac{1}{ik}4M\frac{\pi^2}{4}(2i-2+1)(2k-2+1)\right]^2\le 4^2M^2 \quad (2;I,6)$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера,находим

$$\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_2(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^2\le(ik)^{1-\frac{2}{\tau+2}}\left[\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}|J_2(x,y,\mu,\nu,i,k)|^{\tau+2}\right]^{\frac{2}{\tau+2}}=$$

$$=(ik)^{1-\frac{2}{\tau+2}}\left[\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left|\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{i}}\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{4\sin\frac{t}{2}\sin\frac{s}{2}}\sin(\mu+\tfrac{1}{2})t\sin(\nu+\tfrac{1}{2})s\,dt\,ds\right|^{\tau+2}\right]^{\frac{2}{\tau+2}}\le$$

$$\le(ik)^{1-\frac{2}{\tau+2}}\frac{1}{(2\pi)^{2\tau}}\ \times$$

$$\times\left\{\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[\int_0^{\frac{1}{i}}\left|\frac{\sin(\mu+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|\cdot\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{\sin\frac{s}{2}}\sin(\nu+\tfrac{1}{2})s\,ds\right|dt\right]^{\tau+2}\right\}^{\frac{2}{\tau+2}}. \quad (2;I.7)$$

Но

$$\sum^{2k-2}\left\{\int^{\frac{1}{i}}\frac{|\sin(\mu+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{t}{2}}\left|\left[\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{\mathrm{tg}\frac{s}{2}}\sin\nu s\,ds+\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\Delta(x,y,t,s,f)\cos\nu s\,ds\right]\right|dt\right\}^{\tau+2}\le$$

$$\leq 2^{r+2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[\int_0^{\frac{1}{i}}\frac{|\sin(\mu+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{t}{2}}\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\sin\nu s\,ds\right|dt\right]^{r+2}+$$

$$+2^{r+2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[\int_0^{\frac{1}{i}}\frac{|\sin(\mu+\frac{1}{2})t|}{\sin\frac{t}{2}}\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\Delta(x,y,t,s,f)\cos\nu s\,ds\right|dt\right]^{r+2}=$$

$$=P_1(x,y,\mu,\nu,i,k)+P_2(x,y,\mu,\nu,i,k). \qquad (2;I.8)$$

Легко проверить, что

$$P_2(x,y,\mu,\nu,i,k)\leq 2^{4r+8}\pi^{2r+4}M^{r+2}k. \qquad (2;I.9)$$

Затем, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$P_1(x,y,\mu,\nu,i,k)\leq 2^{r+2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[\int_0^{\frac{1}{i}}\left|\frac{\sin(\mu+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\right|^{\frac{r+2}{r+1}}dt\right]^{r+1}\times$$

$$\times\int_0^{\frac{1}{i}}\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\sin\nu s\,ds\right|^{r+2}dt\leq$$

$$\leq 2^{r+2}(2i)^{r+2}\cdot\pi^{r+2}\frac{1}{i^{r+1}}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\int_0^{\frac{1}{i}}\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\sin\nu s\,ds\right|^{r+2}dt=$$

$$=2^{2r+4}\pi^{r+2}\,i\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\int_0^{\frac{1}{i}}\left|\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,f)}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\sin\nu s\,ds\right|^{r+2}dt. \qquad (2;I.10)$$

Пусть теперь

$$A_{x,y,t}(s)=\begin{cases}\dfrac{\Delta(x,y,t,s,f)}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}}, & \frac{1}{k}\leq s\leq\pi,\\[2mm] 0, & -\pi\leq s<\frac{1}{k}.\end{cases}$$

Тогда выражение $\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,t)}{tg\frac{s}{2}}\sin\nu s\,ds$ -является $\sin$ - - коэффициентом функции $A_{x,y,t}(s)$.Стало быть,применяя теорему Хаусдорфа -Юнга (см. [I] ,стр. 2II), будем иметь

$$\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,t)}{tg\frac{s}{2}}\sin\nu s\,ds\right|^{\tau+2}\le\left[\int\limits_{\frac{1}{k}}^{\pi}\left|\frac{\Delta(x,y,t,s,t)}{tg\frac{s}{2}}\right|^{\frac{\tau+2}{\tau+1}}ds\right]^{\tau+1}\le$$

$$\le(4M)^{\tau+2}\pi^{\tau+2}\left[\int\limits_{\frac{1}{k}}^{\pi}s^{-\frac{\tau+2}{\tau+1}}ds\right]^{\tau+1}\le(4M)^{\tau+2}\pi^{\tau+2}(\tau+1)^{\tau+1}K. \qquad (2;I.II)$$

Значит , из (2; I.IO) с применением (2;I.II) вытекает

$$\varrho_{\tau}(x,y,\mu,\nu,i,k)\le 2^{4\tau+8}\pi^{3\tau+6}M^{\tau+2}(\tau+1)^{\tau+1}K. \qquad (2;I.I2)$$

Тогда, в силу (2; I.8),(2;I.9) и (2;I.I2) из (2;I.7) находим

$$\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_2(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^{\tau}\le(ik)^{1-\frac{\tau}{\tau+2}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{2\tau}}\left\{\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\left[2^{4\tau+8}\pi^{2\tau+4}M^{\tau+2}K+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\;2^{4\tau+8}\pi^{3\tau+6}M^{\tau+2}(\tau+1)^{\tau+1}K\right]\right\}^{\frac{\tau}{\tau+2}}\le iK(\tau+1)^{\tau}M^{\tau}\pi^{\tau}2^{2\tau+1}. \qquad (2;I.I3)$$

Совершенно аналогично можно получить,что

$$\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_3(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^{\tau}\le iK(\tau+1)^{\tau}M^{\tau}\pi^{\tau}2^{2\tau+1}. \qquad (2;I.I4)$$

Далее используя (I;I.I5) и (I;I.I6) ,будем иметь

$$\left[J_4(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^{\tau}\le 4^{\tau}\left\{\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{1}{k}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{i}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,t)}{4tg\frac{t}{2}\,tg\frac{s}{2}}\sin\mu t\sin\nu s\,dt\,ds\right|^{\tau}+\right.$$

$$+\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{1}{i}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s,t)}{4tg\frac{t}{2}}\sin\mu t\cos\nu s\,dt\,ds\right|^{\tau}+\left|\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{1}{i}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{\Delta(x,y,t,s)}{4tg\frac{s}{2}}\cos\mu t\sin\nu s\,dt\,ds\right|^{\tau}+$$

$$+\left|\frac{1}{\pi^2}\int^{\pi}\int^{\pi}\Delta(x,y,t,s,t)\cos\mu t\cos\nu s\,dt\,ds\right|^{\tau}=4^{\tau}\sum^{4}\left[T_{\nu}(\ldots)\right.\ldots\pi^{\tau} \qquad (2.I.I5)$$

Но

$$\left[J_{4}^{(4)}(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^{2}\le M^{2}. \qquad (2;I.16)$$

Затем, если

$$\Psi_{x,y}^{(1)}(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\Delta(x,y,t,s,1)}{4\,tg\frac{t}{2}\,tg\frac{s}{2}}, & \frac{1}{i}\le t\le\pi,\ \frac{1}{k}\le s\le\pi,\\ 0, & R-\left[\frac{1}{i},\pi;\frac{1}{k},\pi\right],\end{cases}$$

$$\Psi_{x,y}^{(2)}(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\Delta(x,y,t,s,1)}{4\,tg\frac{t}{2}}, & \frac{1}{i}\le t\le\pi,\ \frac{1}{k}\le s\le\pi,\\ 0, & R-\left[\frac{1}{i},\pi;\frac{1}{k},\pi\right],\end{cases}$$

$$\Psi_{x,y}^{(3)}(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\Delta(x,y,t,s,1)}{4\,tg\frac{s}{2}}, & \frac{1}{i}\le t\le\pi,\ \frac{1}{k}\le s\le\pi,\\ 0, & R-\left[\frac{1}{i},\pi;\frac{1}{k},\pi\right],\end{cases}$$

то нетрудно видеть, что $J_{4}^{(\alpha)}(x,y,\mu,\nu,i,k)$ $(\alpha=1,2,3)$ являются соответственно $|a_{\mu\nu}(\Psi^{(1)})|$, $|b_{\mu\nu}(\Psi^{(2)})|$ и $|c_{\mu\nu}(\Psi^{(3)})|$ (см. гл.I § I (*)) величинами. Тогда используя неравенство Гёльдера и теорему Хаусдорфа-Юнга для двойных тригонометрических рядов Фурье (см. напр., [I5]), находим

$$\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_{4}^{(1)}(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^{2}\le(ik)^{1-\frac{2}{2+2}}\left\{\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_{4}^{(1)}(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^{2+2}\right\}^{\frac{2}{2+2}}\le$$

$$\le(ik)^{1-\frac{2}{2+2}}\left\{\int_{\frac{1}{i}}^{\pi}\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\left|\frac{\Delta(x,y,t,s,1)}{4\,tg\frac{t}{2}\,tg\frac{s}{2}}\right|^{\frac{2+2}{2+1}}dt\,ds\right\}^{\frac{2+1}{2+2}2}\le(ik)^{1-\frac{2}{2+2}}M^{2}\pi^{2\tau}\times$$

$$\times\left[\int_{\frac{1}{i}}^{\pi}\frac{dt}{t^{\frac{2+2}{2+1}}}\right]^{\frac{2+1}{2+2}2}\left[\int_{\frac{1}{k}}^{\pi}\frac{ds}{s^{\frac{2+2}{2+1}}}\right]^{\frac{2+1}{2+2}2}\le\pi^{2\tau}M^{2}(\tau+1)^{2\tau}ik. \qquad (2;I.17)$$

Нетрудно теперь видеть, что справедливы и следующие оценки

$$\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_4^{(\alpha)}(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^2 \le \pi^{2r} M^2 (r+1)^{2r}\, ik \quad (\alpha=2,3) \qquad (2;I.I8)$$

Тогда используя (2;I.I5)-(2;I.I8) , будем иметь

$$\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\left[J_4(x,y,\mu,\nu,i,k)\right]^2 \le 4\pi^{2r} M^2 (r+1)^{2r}\, ik. \qquad (2;\ I.I9)$$

Затем из (2;I.5) с применением (2; I.6),(2.I.I3), (2;I,I4) и (2;I.I9) получим

$$\frac{1}{ik}\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\frac{|S_{\mu\nu}(x,y,f)|^2}{f(\mu,\nu)} \le \frac{4^{3r+3}}{f(i-1,k-1)} M^2 (r+1)^{2r} =$$

$$= C(r) M^2 \frac{1}{f(i-1,k-1)},$$

где $\qquad C(r) = 2^{6r+4}(r+1)^{2r}. \qquad$ (2; I,20)

Лемма доказана.

Справедлива и такая

<u>Лемма 5</u>. Пусть $f(x,y)\in C(R)$ и $f(t,s)$ удовлетворяют условиям леммы 4. Тогда для любого $r>0$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{|S_{ik}(x,y,f)-f(x,y)|^2}{f(i,k)} \le C_1(r)\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{[E_{ik}(f)]^2}{f(i,k)}, \qquad (2;I.2I)$$

где $C_1(r)$ положительная константа, зависящая лишь от r.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $T_{\mu\nu}(x,y)$ – полином наилучшего приближения функции $f(x,y)$ в метрике $C(R)$ и

$i-1 \le \mu \le 2i-2$, $k-1 \le \nu \le 2k-2$. Тогда

$$|f(x,y)-S_{\mu\nu}(x,y,f)| \le |f(x,y)-T_{\mu\nu}(x,y)| +$$

$$+|T_{\mu\nu}(x,y)-S_{\mu\nu}(x,y,f)| \le E_{i-1,k-1}(f) + |S_{\mu\nu}(x,y,T_{\mu\nu}-f)|. \qquad (2;I.22)$$

Так как $\|f(x,y)-T_{\mu\nu}(x,y)\|_C \le E_{i-1,k-1}(f)$, то используя (I;I.I5), (I;I.I6) и (2; I.22) , в силу леммы 4 будем иметь

$$\frac{1}{ik}\sum_{\mu=i-1}^{2i-2}\sum_{\nu=k-1}^{2k-2}\frac{|f(x,y)-S_{\mu\nu}(x,y,f)|^2}{\rho(\mu,\nu)} \le 2^{\tau}\frac{[E_{i-1,k-1}(f)]^2}{\rho(i-1,k-1)} +$$

$$+2^{\tau}C(\tau)\frac{[E_{i-1,k-1}(f)]^2}{\rho(i-1,k-1)} \le 2^{\tau+1}C(\tau)\frac{[E_{i-1,k-1}(f)]^2}{\rho(i-1,k-1)}, \qquad (2;I.23)$$

ибо согласно (2;I.20) $C(\tau)>1$. Если

$$2^{s_0}-2 < m \le 2^{s_0+1}-2, \qquad 2^{\delta_0}-2 < n \le 2^{\delta_0+1}-2,$$

то в силу (2; I.23) находим

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{|S_{ik}(x,y,f)-f(x,y)|^2}{\rho(i,k)} \le \sum_{i=0}^{s_0}\sum_{k=0}^{\delta_0}\frac{2^{i+k}}{2^{i+k}}\sum_{\mu=2^i-1}^{2^{i+1}-2}\sum_{\nu=2^k-1}^{2^{k+1}-2}\frac{|S_{\mu\nu}(x,y,f)-f(x,y)|^2}{\rho(\mu,\nu)} \le$$

$$\le 2^{\tau+1}C(\tau)\sum_{i=0}^{s_0}\sum_{k=0}^{\delta_0}2^{i+k}\frac{[E_{2^i-1,2^k-1}(f)]^2}{\rho(2^i-1,2^k-1)} = 2^{\tau+1}C(\tau)\Big\{\frac{[E_{0,0}(f)]^2}{\rho(0,0)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{s_0}2^i\frac{[E_{2^i-1,0}(f)]^2}{\rho(2^i-1,0)} + \sum_{k=1}^{\delta_0}2^k\frac{[E_{0,2^k-1}(f)]^2}{\rho(0,2^k-1)} + \sum_{i=1}^{s_0}\sum_{k=1}^{\delta_0}2^{i+k}\frac{[E_{2^i-1,2^k-1}(f)]^2}{\rho(2^i-1,2^k-1)} \le$$

$$\le 2^{\tau+1}C(\tau)\Big\{\frac{[E_{0,0}(f)]^2}{\rho(0,0)} + 2\sum_{i=1}^{s_0}\sum_{\mu=2^{i-1}}^{2^i-1}\frac{[E_{\mu,0}(f)]^2}{\rho(\mu,0)} + 2\sum_{k=1}^{\delta_0}\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{[E_{0,\nu}(f)]^2}{\rho(0,\nu)} +$$

$$+4\sum_{i=1}^{\delta_0}\sum_{k=1}^{\delta_0}\sum_{\mu=2^{i-1}}^{2^i-1}\sum_{\nu=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{[E_{\mu,\nu}(f)]^2}{\rho(\mu,\nu)}\le 2^{2+3}C(2)\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{[E_{ik}(f)]^2}{\rho(i,k)}= \qquad (2;I.24)$$

$$=C_1(2)\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{[E_{i,k}(f)]^2}{\rho(i,k)},$$

где ,согласно (2; I.20)

$$C_1(2)=2^{7z+7}(z+1)^{2z} \qquad (2;I.25)$$

Лемма доказана.

Следствие I. Пусть $T=(a_{mnik})$ регулярная положительная треугольная матрица, элементы которой удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} &a_{mni+1k}\le a_{mnik} && \text{для любых } m,n,k, \\ &a_{mnik+1}\le a_{mnik} && \text{для любых } m,n,i. \end{aligned} \qquad (2;I.26)$$

Тогда при любом $z>0$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\left|S_{ik}(x,y,f)-f(x,y)\right|^2\le C_1(z)\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\left[E_{ik}(f)\right]^2. \qquad (2;I.27)$$

Соотношение (I; 227) вытекает из утверждения (2;I.2I) леммы 5 если для данных m и n положим

$$\rho(ik)=\frac{1}{a_{mnik}}.$$

Следствие 2. Пусть $T=(a_{mnik})$ удовлетворяет условиям следствия I. Тогда для любого $z>0$ двойной ряд Фурье функции $f(x,y)\in C(R)$ равномерно суммируем ме-

Это утверждение вытекает из (2; I.27), если используем теорему Г.М.Робинсона [I6] (см. также [I7]).

В частности, если $f(x,y)\in C(R)$, то при любом $\tau>0$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}|S_{ik}(x,y,t)-f(x,y)|^{\tau}\right\|_C=0,$$

т.е. имеет место равномерная (H,p) суммируемость.

Так как и в случае двойных рядов (H,p) суммируемость влечет суммируемость (H,p') при $p'<p$ (см. стр. 12), то естественно возникает вопрос о сильной суммируемости двойных рядов Фурье с переменным показателем - $\tau(m,n)$. Ответ на этот вопрос даёт следующая более общая

Теорема 4. Пусть $f(x,y)\in C(R)$ и $T=(a_{mnik})$ регулярная положительная треугольная матрица, удовлетворяющая условиям (2.I.26). Тогда существует $\tau(m,n)\uparrow\infty$ *) такое, что

$$\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty}\left\|\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\,|S_{ik}(x,y,t)-f(x,y)|^{\tau(m,n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}}\right\|_C=0,$$

где символ $\lim\limits_{(m,n)_\lambda\to\infty}$ означает, что $m\to\infty$, $n\to\infty$ и $\frac{1}{\lambda}\le\frac{m+1}{n+1}\le\lambda$ для любого $\lambda\in[1,\infty)$.

Доказательство. Согласно (2;I.25) и (2;I.27) при $\tau=\tau(m,n)$ будем иметь

---

*) Под $\tau(m,n)\uparrow\infty$ подразумеваем, что $\tau(t,s)$ неубывающая функция относительно каждого переменного.

$$\left\| \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{mnik} \left| S_{ik}(x,y,t) - f(x,y) \right|^{r(m,n)} \right\}^{\frac{1}{r(m,n)}} \right\|_C \leq$$

$$\leq 2^{7+\frac{7}{r(m,n)}} \left[r(m,n)+1 \right]^2 \left\{ \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{mnik} \left[E_{ik}(t) \right]^{r(m,n)} \right\}^{\frac{1}{r(m,n)}} =$$

$$= \rho(m,n). \qquad (2;I.28)$$

Исходя из того, что $T=(a_{mnik})$ регулярная мартица и $\lim_{i,k\to\infty} E_{ik}(t)=0$, применением теоремы Робинсона [I6] (см. также [I7]) заключаем

$$\sup_{\substack{\mu \geq m \\ \nu \geq n}} \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{k=0}^{\nu} a_{\mu\nu ik} E_{ik}(t) = h_{mn} \to 0 \quad \text{при } m\to\infty, n\to\infty. \qquad (2;I.28')$$

Ясно, что $\frac{1}{h_{mn}} \uparrow \infty$. Затем, если $r_1(m,n) = \left(\ln \frac{1}{h_{mn}} \right)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, то

$$\lim_{m,n\to\infty} h_{mn}^{\frac{1}{r_1(m,n)}} r_1^2(m,n) = 0. \qquad (2;I.29)$$

Далее, в силу свойств $E_{ik}(t)$, будем иметь

$$E_{ik}(t) < 1 \quad \text{при} \quad i,k > N_0. \qquad (2;I.29')$$

Используя также (2;I.26), находим

$$r^2(m,n) \left\{ \sum_{i=0}^{N_0} \sum_{k=0}^{N_0} a_{mnik} \left[E_{ik}(t) \right]^{r(m,n)} \right\}^{\frac{1}{r(m,n)}} \leq$$

$$\leq r^2(m,n)\, E_{00}(t)\, N_0^{\frac{2}{r(m,n)}} \cdot \left(a_{mn00} \right)^{\frac{1}{r(m,n)}}. \qquad (2;I.30)$$

Пусть $r_2(m,n) = \inf_{\substack{\mu \geq m \\ \nu \geq n}} \left(\ln \frac{1}{a_{\mu\nu 00}} \right)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$. Ясно, что $r_2(m,n) \uparrow \infty$ и

$$\lim r_1^2(m,n) \left(a_{mn00} \right)^{\frac{1}{r_2(m,n)}} = 0. \qquad (2;I.31)$$

Таким же образом получаем

$$\tau^2(m,n)\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{N_0} a_{mnik}\left[E_{ik}(f)\right]^{\tau(m,n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \le$$

$$\le \tau^2(m,n) E_{00}(f) N_0^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \left\{\sum_{i=0}^{m} a_{mni0}\right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}}, \qquad (2;I.32)$$

$$\tau^2(m,n)\left\{\sum_{i=0}^{N_0}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik}\left[E_{ik}(f)\right]^{\tau(m,n)}\right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \le$$

$$\le \tau^2(m,n) E_{00}(f) N_0^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \left\{\sum_{k=0}^{n} a_{mn0k}\right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \qquad (2;I.33$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{0\le m<\infty}\sum_{i=0}^{m} a_{mni0} = \alpha_n, \quad \sup_{0\le n<\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{mn0k} = \beta_m, \\ &\max[\alpha_j, \beta_j] = \delta_j \qquad (j=1,2,\dots) \end{aligned}\right\} \qquad (2;I.34)$$

В силу теоремы Робинсона [I6] (см. также [I7]) из (2;I.34) вытекает

$$\delta_j \downarrow 0.$$

Тогда,если

$$\tau_3(m,n) = \left(\ln\frac{1}{\delta_m\delta_n}\right)^{\alpha}, \qquad 0<\alpha<1,$$

то

$$\lim_{(m,n)_\lambda\to\infty} \tau_3^2(m,n)\left\{\left[\sum_{i=0}^{m} a_{mni0}\right]^{\frac{1}{\tau_3(m,n)}} + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{k=0}^{n} a_{mn0k}\right]^{\frac{1}{\tau_3(m,n)}}\right\} = 0. \qquad (2;I.35\ )$$

'еперь положим

$$\tau(m,n) = \min\left[\tau_1(m,n),\ \tau_2(m,n),\ \tau_3(m,n)\right].$$

Легко проверить, что для $\tau(m,n)$ одновременно будут выполнены соотношения (2;I.29), (2;I.3I) и (2; I.35), т.е.

$$\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty} \tau^2(m,n)\left\{ h_{mn}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} + (a_{mn00})^{\frac{1}{\tau(m,n)}} + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{i=0}^{m} a_{mni0}\right]^{\frac{1}{\tau(m,n)}} + \left[\sum_{k=0}^{n} a_{mn0k}\right]^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \right\} = 0 \qquad (2;I.36)$$

С другой стороны, используя (2,I.29') согласно (2;I.28) при $\tau(m,n) \geq 1$ будем иметь

$$\rho(m,n) = [\tau(m,n)+1]^2\, 2^{7+\frac{7}{\tau(m,n)}} \left\{ \sum_{i=0}^{N_0}\sum_{k=0}^{N_0} a_{mnik}[E_{ik}(t)]^{\tau(m,n)} + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{N_0}\sum_{k=N_0+1}^{n} a_{mnik}[E_{ik}(t)]^{\tau(m,n)} + \sum_{i=N_0+1}^{m}\sum_{k=0}^{N_0} a_{mnik}[E_{ik}(t)]^{\tau(m,n)} +$$

$$\left. + \sum_{i=N_0+1}^{m}\sum_{k=N_0+1}^{n} a_{mnik}[E_{ik}(t)]^{\tau(m,n)} \right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \leq$$

$$\leq [\tau(m,n)+1]^2\, 2^{7+\frac{7}{\tau(m,n)}} \left(\left\{ \sum_{i=0}^{N_0}\sum_{k=0}^{N_0} a_{mnik}[E_{ik}(t)]^{\tau(m,n)} \right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} + \right.$$

$$+ \left\{ \sum_{i=0}^{N_0}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik}[E_{ik}(t)]^{\tau(m,n)} \right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} + \left\{ \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{N_0} a_{mnik}[E_{ik}(t)]^{\tau(m,n)} \right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} +$$

$$\left. + \left\{ \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik} E_{ik}(t) \right\}^{\frac{1}{\tau(m,n)}} \right).$$

тсюда в силу (2;I.28'), (2;I.30),(2;I.32),(2;I.33),(2;I.36) олучаем

$$\lim_{(m,n)_\lambda \to \infty} \rho(m,n) = 0.$$

Тогда согласно (2; I.28) витекает справедливость теоремы.

Замечание . Теорема 4 теряет силу, если вместо λ -предела возьмем обычный двойной предел.

В самом деле ,пусть

$$f(x,y)=\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2}{(i+1)^2}\cos ix\right\}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(k+1)^2}\cos ky\right\}.$$

Ясно, что $f(x,y)\in C(R)$ и

$$f(0,0)-S_{ik}(0,0,f)=\sum_{u=0}^{\infty}\frac{2}{(u+1)^2}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{2}{(v+1)^2}-\sum_{u=0}^{i}\frac{2}{(u+1)^2}\sum_{v=0}^{k}\frac{2}{(v+1)^2}\geq$$

$$\geq 4\left[\frac{1}{(i+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right].$$

Поэтому

$$\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\left|f(0,0)-S_{ik}(0,0,f)\right|^{r(m,n)}\right\}^{\frac{1}{r(m,n)}}>$$

$$>4\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\frac{1}{(i+1)^{2r(m,n)}}\right\}^{\frac{1}{r(m,n)}}>4\left(\sum_{k=0}^{n}a_{mn0k}\right)^{\frac{1}{r(m,n)}},$$

аналогично

$$\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\left|f(0,0)-S_{ik}(0,0,f)\right|^{r(m,n)}\right\}^{\frac{1}{r(m,n)}}>4\left(\sum_{i=0}^{m}a_{mni0}\right)^{\frac{1}{r(m,n)}}$$

Отсюда

$$\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{mnik}\left|f(0,0)-S_{ik}(0,0,f)\right|^{r(m,n)}\right\}^{\frac{1}{r(m,n)}}>$$

$$>2\left\{\left[\sum_{k=0}^{n}a_{mn0k}\right]^{\frac{1}{r(m,n)}}+\left[\sum_{i=0}^{m}a_{mni0}\right]^{\frac{1}{r(m,n)}}\right\}. \qquad (2;I.37)$$

Но в силу условия (2; I.26) и теоремы Робинсона [I6] (см. также [I7])

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik} > \frac{1}{2} \qquad \text{при достаточно больших } m \text{ и } n;$$

значит

$$m\sum_{k=0}^{n} a_{mn0k} \geq \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik} > \frac{1}{2},$$

$$n\sum_{i=0}^{m} a_{mni0} \geq \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik} > \frac{1}{2}.$$

Тогда из (2; I.37) вытекает

$$\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik}\left|S_{ik}(0,0,f)-f(0,0)\right|^{z(m,n)}\right\}^{\frac{1}{z(m,n)}} \geq$$

$$\geq 2^{1-\frac{1}{z(m,n)}}\left\{m^{-\frac{1}{z(m,n)}}+n^{-\frac{1}{z(m,n)}}\right\}.$$

Последнее неравенство показывает, что для любого $z(m,n)\to\infty$ при $m\to\infty$, $n\to\infty$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\left\{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik}\left|f(x,y)-S_{ik}(x,y,f)\right|^{z(m,n)}\right\}^{\frac{1}{z(m,n)}}\right\|_C \neq 0.$$

Этот же пример показывает (см. (2; I.37) , что и

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{mnik}\left|f(x,y)-S_{ik}(x,y,f)\right|^{z(m,n)}\right\|_C \neq 0.$$

Рассмотрим теперь вопрос (H,p) суммируемости в отдельных точках или почти всюду двойных тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов.

Пусть

$$\varphi_{x,y}(u,v)=f(x+u,y+v)+f(x+u,y-v)+f(x-u,y+v)+f(x-u,y-v)-4f(x,y)$$

и

$$\Phi^{(p)}_{x,y}(u,v)=\int_0^u\int_0^v|\varphi_{x,y}(\xi,\eta)|^p\,d\xi\,d\eta\,,\qquad (p\geq 1).$$

Hai-Tsin-Hsü [15] доказал (Теорема I): Если в точке $(x,y)\in R$

$$\Phi^{(p)}_{x,y}(u,v)=\bar{\bar{o}}(uv)\,,\quad p>1\,, \qquad (2;I.38)$$

то двойной ряд Фурье функции $f(x,y)\in L^p(R)$, (H,τ) суммируем в точке (x,y) при любом $\tau>0$.

Из этого утверждения он получает (см. теорема II), что $G(f)$ почти всюду (H,τ) суммируем при любом $\tau>0$,когда $f(x,y)\in L^p(R)$, $p>1$.

Но некоторые рассуждения H. T. Hsü ошибочны: Он опирается на тот факт (см. [15] лемма 2), что, если $f(x,y)\in L^p(R)$, $p>1$,то почти всюду

$$\int_0^h\int_0^k|f(x\pm u,y\pm v)-f(x,y)|^p=\bar{\bar{o}}(hk)$$

при $h,k\to 0$. Это утверждение не верно. Действительно, как показали Б.Иессен, И.Марцинкевич и А.Зигмунд [18] существует функция $\Psi(x,y)\in L(R)$, $\Psi(x,y)\geq 0$, для которой в каждой точке $(x,y)\in R$

$$\overline{\lim_{h,k\to 0}}\ \frac{1}{hk}\int_0^h\int_0^k \psi(x\pm u, y\pm v)\,du\,dv=\infty. \qquad (2;I.39)$$

Тогда, если $\alpha(x,y)=[\psi(x,y)]^{\frac{1}{p}}$, то

I) $\alpha(x,y)\in L^p(R)$.

2) $$\frac{1}{hk}\int_0^h\int_0^k |\psi^{\frac{1}{p}}(x\pm u,y\pm v)-\psi^{\frac{1}{p}}(x,y)|^p\,du\,dv\geq$$

$$\geq\frac{1}{hk}\left[\frac{1}{2^p}\int_0^h\int_0^k \psi(x\pm u,y\pm v)\,du\,dv-\int_0^h\int_0^k\psi(x,y)\,du\,dv\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^p}\frac{1}{hk}\int_0^h\int_0^k \psi(x\pm u,y\pm v)\,du\,dv-\psi(x,y), \qquad (2;I.40)$$

ибо в силу (I;I.I5)

$$|a-b|^p\geq\frac{|a|^p}{2^p}-|b|^p;$$

значит, используя (2; I.39), (2;I.40), находим

$$\int_0^h\int_0^k |\alpha(x\pm u,y\pm v)-\alpha(x,y)|^p\,du\,dv\neq \bar{\bar{o}}(hk)$$

почти для всех $(x,y)\in R$. Стало быть, лемма 2 из работы [I5] не верна. Тогда условие теоремы I работы [I5] можно гарантировать лишь на множестве меры нуль. Следовательно, теорема II работы [I5] не вытекает из теоремы I. Но повторяя в основном рассуждения H. T. Hsü (см. доказательство теоремы I [I5]) убеждаемся, что справедлива следующая

<u>Теорема 5</u>. Пусть $f(x,y)\in L^p(R)$, $1<p<\infty$. Если в

точке $(x_0,y_0)\in R$ при некотором $p'\in(1,p)$ выполняются следующие соотношения

а)

$$\lim_{h,\eta\to 0}\frac{1}{h\eta}\int_0^h\int_0^\eta|\varphi_{x_0,y_0}(u,v)|^{p'}du\,dv=0,$$

в)

$$\sup_{0<h\le\pi}\frac{1}{h}\int_0^h\int_0^\pi|\varphi_{x_0,y_0}(u,v)|^{p'}du\,dv=M_1(x_0,y_0)<+\infty,$$

с)

$$\sup_{0<\eta\le\pi}\frac{1}{\eta}\int_0^\pi\int_0^\eta|\varphi_{x_0,y_0}(u,v)|^{p'}du\,dv=M_2(x_0,y_0)<+\infty,$$

то при любом $\gamma>0$

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}|S_{ik}(x_0,y_0,f)-f(x_0,y_0)|^{\gamma}=0.$$

Замечание I. При доказательстве теоремы I Н.Т.Ияй (см. [I5] стр. 7I0) пользуется условиями в) и с), хотя они в условиях теоремы I не формулируются. Следует заметить, что из условия а) (см. также(2; I.38)), вообще говоря, не вытекают условия в) и с).

В самом деле, пусть

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & 0\le|x|\le\pi,\ -\pi\le y\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{|x|^{\frac{1}{p+1}}}, & 0<|x|\le\pi,\ \frac{\pi}{2}<y\le\pi,\\ 0, & x=0,\ \frac{\pi}{2}<y\le\pi,\end{cases}\qquad (2;I.4I)$$

и $f(x+2\pi,y)=f(x,y+2\pi)=f(x,y)$ для всех (x,y) .

Нетрудно видеть, что

I) $f(x,y)\in L^{q}(R)$, $0<q<p+1$,

2) $\lim\limits_{h,\eta\to 0}\frac{1}{h\eta}\int\limits_0^h\int\limits_0^{\eta}|\varphi_{0,0}(u,v)|^{p'}du\,dv=0$ при любом $p'\in(1,p)$,т.е. выполнено условие а) в точке $(0,0)$.

Однако, в силу (2; I.4I)

$$\int\limits_0^h\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{0,0}(u,v)|^{p'}du\,dv=4\int\limits_0^h\int\limits_0^{\pi}|f(u,v)|^{p'}du\,dv\geq$$

$$\geq\pi\int\limits_0^h u^{-\frac{p'}{p+1}}du=\frac{\pi(p+1)}{p+1-p'}\,h^{1-\frac{p'}{p+1}}.$$

Отсюда

$$\sup_{0<h\leq\pi}\frac{1}{h}\int\limits_0^h\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{0,0}(u,v)|^{p'}du\,dv=+\infty.$$

Замечание 2. Услоия а),в), и с) теоремы 5 выполняются почти всюду, если $f(x,y)\in L^{p}(R)$, $1<p<\infty$ (см. например, [I8], [I9] . Тогда используя теорему 5, можно заключить, что теорема II из работы [I5] всё же верна.

В дальнейшем нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $E\subset[a,b;a,b]$ - замкнутое множество и E_x , E_y проекции множества E соответственно на оси X и Y . Ясно что E_x и E_y замкнутые множества. Тогда $P=E_x\times E_y$ будет замкнутым множеством. Пусть теперь $\chi_1(t)$ и $\chi_2(s)$ являются соответственно расстояниями от точек $t\in[a,b]$ и $s\in[a,b]$ до множеств E_x и E_y , причем

$$\chi_1(t)=0,\quad t\bar{\in}[a,b];\quad \chi_2(s)=0,\quad s\bar{\in}[a,b].$$

Справедлива следующая

Лемма 6. Пусть $f(t,s)\in L[a,b;a,b]$. Тогда для любых $\lambda>0$, $\lambda'>0$ интеграл

$$J(\lambda,\lambda',x,y)=\int_a^b\int_a^b \frac{f(t,s)\,\chi_1^{\lambda}(t)\,\chi_2^{\lambda'}(s)}{|t-x|^{\lambda+1}\,|s-y|^{\lambda'+1}}\,dt\,ds \qquad (2;I.42)$$

абсолютно сходится почти для всех $(x,y)\in P$ и

$$\iint_P J(\lambda,\lambda',x,y)\,dx\,dy \le 4\lambda^{-1}\lambda'^{-1}\int_a^b\int_a^b |f(x,y)|\,dx\,dy \qquad (2;I.43)$$

Доказательство. Не нарушая общности можно предположить, что $f(x,y)\geq 0$. Ясно, что для доказательства леммы достаточно доказать справедливость соотношения (2; I.43). В силу теоремы Фубини

$$\iint_P J(\lambda,\lambda',x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_a^b f(t,s)\,\chi_1^{\lambda}(t)\,\chi_2^{\lambda'}(s)\,dt\,ds\iint_P \frac{dx\,dy}{|x-t|^{\lambda+1}|y-s|^{\lambda'+1}} \qquad (2;I.44)$$

Внешний интеграл можно считать распространенным лишь на множестве $Q=[a,b;a,b]-P$. Зафиксируем t из смежного интервала (α,β) множества E_x и s из смежного интеграла (γ,δ) множества E_y. Допустим, что t ближе к α а s к δ, тогда

$$\iint_P \frac{dx\,dy}{|t-x|^{\lambda+1}|s-y|^{\lambda'+1}} \le 4\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{dx}{|t-x|^{\lambda+1}}\int_{-\infty}^{\delta}\frac{dy}{|s-y|^{\lambda'+1}} = 4\lambda^{-1}\lambda'^{-1}(t-\alpha)^{-\lambda}(s-\delta)^{-\lambda'}=$$

$$=4\lambda^{-1}\lambda'^{-1}\chi_1^{-\lambda}(t)\,\chi_2^{-\lambda'}(s). \qquad (2;I.45)$$

Из (2; I.44) и (2;I.45) следует справедливость (2;I.43)

Лемма доказана.

Замечание. Приведенная лемма является распространением на случай функции двух переменных теоремы. И.Марцинкевича (см. [I4] , стр. 2I0); существует и другой аналог этой теоремы (см. [I4] , стр. 2I2).

Лемма 7. П у с т ь $f(x,y)\in L_1(K)$ и

$$U(r_1,x;r_2,y)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t,s)\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)\,dt\,ds}{(1-2r_1\cos(x-t)+r_1^2)(1-2r_2\cos(y-s)+r_2^2)}. \quad (2;I.46)$$

Е с л и

$$\left|\frac{1}{h\eta}\int_x^{x+h}\int_y^{y+\eta}f(t,s)\,dt\,ds\right|<M,\qquad |h|\le\pi,\ |\eta|\le\pi, \quad (2;I.47)$$

т о

$$U(r_1,x+h;r_2,y+\eta)\le K^2M\left(1+\frac{|h|}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{|\eta|}{\delta_2}\right), \quad (2;I.48)$$

$$\left|\int_0^{\eta}U(r_1,x+h;r_2,y+s)\,ds\right|\le K^2M\,|\eta|\left(1+\frac{|h|}{\delta_1}\right), \quad (2;I.49)$$

$$\left|\int_0^{h}U(r_1,x+t;r_2,y+\eta)\,dt\right|\le K^2M\,|h|\left(1+\frac{|\eta|}{\delta_2}\right), \quad (2;I.50)$$

$$\left|\int_0^{h}\int_0^{\eta}U(r_1,x+t;r_2,y+s)\,dt\,ds\right|\le K^2M\,|h|\,|\eta|, \quad (2;I.51)$$

г д е $\delta_1=1-r_1$, $\delta_2=1-r_2$, а K - а б с о л ю т н а я п о л о ж и т е л ь н а я к о н с т а н т а.

Доказательство. Положим

$$\frac{1}{\eta}\int_y^{y+\eta}f(u,v)\,dv=f_{y,\eta}(u).$$

В силу условия (2;I.47)

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f_{y,\eta}(u)\,du\right|<M,\qquad |h|\le\pi\qquad |\eta|$$

Тогда используя теорему Харди- Литтльвуда [20] (см.также [I4] ,стр. I68), будем иметь

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{y,\eta}(u)\,P(r_1,u-x-h)\,du\right| \le KM\left(1+\frac{|h|}{\delta_1}\right),$$

$$\left|\int_0^h\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{y,\eta}(u)\,P(r_1,u-x-t)\,du\right]dt\right| \le KM|h|,$$

т.е.

$$\left|\frac{1}{\eta}\int_y^{y+\eta}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u,v)\,P(r_1,u-x-h)\,du\right]dv\right| \le KM\left(1+\frac{h}{\delta_1}\right), \quad |\eta|\le\pi,$$

$$\left|\frac{1}{\eta}\int_y^{y+\eta}\left[\int_0^h\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u,v)\,P(r_1,u-x-t)\,du\,dt\right]dv\right| \le KM|h|, \quad |\eta|\le\pi.$$

Еще раз применяя вышеотмеченную теорему Харди-Литтльвуда, получим соотношения (2;I.48), (2;I.49),(2;I.50) и (2.I.5I)

Замечание, Если условие леммы (2;I.47) выполняется на замкнутом множестве E , $\mu E>0$, то аналогичным рассуждением получим

$$|U(r_1,x+h;r_2,y+\eta)| \le K^2M\left(1+\frac{\varkappa_1(x+h)}{\delta_1}\right)\left(1+\frac{\varkappa_2(y+\eta)}{\delta_2}\right), \qquad (2;I.48')$$

$$\left|\int_0^{\eta}U(r_1,x+h,r_2,y+s)\,ds\right| \le K^2M|\eta|\left(1+\frac{\varkappa_1(x+h)}{\delta_1}\right), \qquad (2.I.49')$$

$$\left|\int_0^{h}U(r_1,x+t,r_2,y+\eta)\,dt\right| \le K^2M|h|\left(1+\frac{\varkappa_2(y+\eta)}{\delta_2}\right), \qquad (2.I.50')$$

$$\left|\int_0^{h}\int_0^{\eta}U(r_1,x+t;r_2,y+s)\,dt\,ds\right| \le K^2M|h||\eta|, \qquad (2.I.5I')$$

где $\varkappa_1(t)$ и $\varkappa_2(s)$ ранее определенные функции для множества E (см. стр. 45).

Лемма 8. П у с т ь $a_{ik}\geq 0$, $q_j\geq 0\,(j=1,2)$. Е с л и

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(i+1)^{q_1}(k+1)^{q_2}a_{ik}=\bar{\bar{O}}\left(m^{q_1+1},n^{q_2+1}\right), \tag{2; I.52}$$

т о

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}a_{ik}=\bar{\bar{O}}(mn). \tag{2;I.53}$$

<u>Доказательство</u>. Положим

$$S_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}(i+1)^{q_1}(k+1)^{q_2}a_{ik}.$$

Покажем, что

$$\sup_{\substack{0\leq m<\infty\\ 0\leq n<\infty}}\frac{S_{mn}}{(m+1)^{q_1+1}(n+1)^{q_2+1}}=M<\infty. \tag{2;I.54}$$

В силу (2;I.52) существует N такое, что

$$\frac{S_{mn}}{(m+1)^{q_1+1}(n+1)^{q_2+1}}<1,\quad \text{когда } m,n>N .$$

Поэтому для доказательства (2;I.54) достаточно показать следующие соотношения

$$\sup_{0\leq n<\infty}\frac{S_{in}}{(i+1)^{q_1+1}(n+1)^{q_2+1}}=M_i<\infty \text{ для любого } (i=1,2,\dots N), \tag{2;I.55}$$

$$\sup_{0\leq m<\infty}\frac{S_{mk}}{(m+1)^{q_1+1}(k+1)^{q_2+1}}=M_k<\infty \text{ для любого } (k=1,2,\dots N). \tag{2;I.56}$$

Допустим противное, т.е., хотя бы одно из соотношений (2;I.55), (2;I.56) не выполнено. Для определенности предположим, что не выполнено (2;I.55). Это означает, существует такое $0 \le i_0 \le N$ и подпоследовательность $n_\nu \to \infty$, при $\nu \to \infty$, что

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_{i_0 n_\nu}}{(i_0+1)^{q_1+1}(n_\nu+1)^{q_2+1}} = \infty . \qquad (2;I.57)$$

Принимая во внимание, что S_{mn} неубывающая последовательность относительно m и n, в силу (2;I.57) находим

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_{m n_\nu}}{(n_\nu+1)^{q_2+1}} = \infty \quad , \text{ для любого } m > i_0 .$$

Отсюда легко получается, что найдется подпоследовательность $n_{\nu_m} \to \infty$, при $m \to \infty$ такоя, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{S_{m n_{\nu_m}}}{(m+1)^{q_1+1}(n_{\nu_m}+1)^{q_2+1}} = \infty .$$

А это противоречит условию леммы (2; I.52). Стало быть, соотношения (2;I.55)и (2;I.56) верны. Тогда имеет место и (2; I.54). Затем, если

$$2^{m_0}-1 < m \le 2^{m_0+1}, \quad 2^{n_0}-1 < n \le 2^{n_0+1} ,$$

то

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ik} \le \sum_{i=0}^{m_0}\sum_{k=0}^{n_0}\sum_{\mu=2^i-1}^{2^{i+1}}\sum_{\nu=2^k-1}^{2^{k+1}} a_{\mu\nu} \le$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m_0}\sum_{k=0}^{n_0} 2^{-iq_1} 2^{-kq_2} \sum_{\mu=2^i-1}^{2^{i+1}} \sum_{\nu=2^k-1}^{2^{k+1}} (\mu+1)^{q_1} (\nu+1)^{q_2} a_{\mu\nu}. \tag{2; I.58}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, сколь-угодно малое число. Согласно (2;I.52) существует такое N_1, что

$$\sum_{i=0}^{\alpha}\sum_{k=0}^{\beta} (i+1)^{q_1} (k+1)^{q_2} a_{ik} < \varepsilon \alpha^{q_1+1} \beta^{q_2+1}, \tag{2;I.59}$$

когда $\alpha > 2^{N_1}$, $\beta > 2^{N_1}$. Далее, в силу (2;I.58) имеем

$$\sum_{i=0}^{m_0}\sum_{k=0}^{n_0} a_{ik} \leq \sum_{i=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{n_0} 2^{-iq_1} 2^{-kq_2} \sum_{\mu=2^i-1}^{2^{i+1}} \sum_{\nu=2^k-1}^{2^{k+1}} (\mu+1)^{q_1} (\nu+1)^{q_2} a_{\mu\nu} +$$

$$+ \sum_{i=N_1+1}^{m_0}\sum_{k=0}^{N_1} 2^{-iq_1} 2^{-kq_2} \sum_{\mu=2^i-1}^{2^{i+1}} \sum_{\nu=2^k-1}^{2^{k+1}} (\mu+1)^{q_1} (\nu+1)^{q_2} a_{\mu\nu} +$$

$$+ \sum_{i=N_1+1}^{m_0}\sum_{k=N_1+1}^{n_0} 2^{-iq_1} 2^{-kq_2} \sum_{\mu=2^i-1}^{2^{i+1}} \sum_{\nu=2^k-1}^{2^{k+1}} (\mu+1)^{q_1} (\nu+1)^{q_2} a_{\mu\nu} =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 . \tag{2;I.60}$$

В силу (2;I.54)

$$J_1 \leq M \sum_{i=0}^{N_1}\sum_{k=0}^{n_0} 2^{-iq_1} 2^{-iq_2} 2^{(i+1)(q_1+1)} 2^{(k+1)(q_2+1)} \leq$$

$$\leq M 2^{q_1+q_2+2} 2^{N_1+1} 2^{n_0+1} \leq M 2^{q_1+q_2+2} 2^{N_1+1} n = \bar{\bar{O}}(mn) . \tag{2;I.6I}$$

Аналогично получим, что

$$J_2 = \bar{\bar{O}}(mn). \qquad (2;I.62)$$

Затем используя (2;I.59), находим

$$J_3 \le \varepsilon \sum_{i=m_1+1}^{m_0} \sum_{k=n_1+1}^{n_0} 2^{-iq_1} 2^{-kq_2} 2^{(i+1)(q_1+1)} 2^{(k+1)(q_2+1)} \le$$

$$\le \varepsilon 2^{q_1+q_2+4} mn. \qquad (2;I.63)$$

Согласно (2;I.61) - (2;I.63) из (2;I.60) вытекает справедливость леммы.

<u>Лемма 9.</u> Пусть $f(x,y) \in L \ln^+ L$, $T=(a_{mnik})$ положительная треугольная регулярная матрица и ряд (I;I.5) её ряд Фурье. Тогда почти всюду на R для любого $\tau > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \left| f(x,y) - A_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right|^{\tau} a_{mnik} = 0, \qquad (2;I.64)$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \left| \bar{f}_1(x,y) - B_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right|^{\tau} a_{mnik} = 0, \qquad (2;I.65)$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \left| \bar{f}_2(x,y) - C_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right|^{\tau} a_{mnik} = 0, \qquad (2;I.66)$$

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \left| \bar{f}_3(x,y) - D_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y) \right|^{\tau} a_{mnik} = 0, \qquad (2;I.67)$$

где (см. стр. 9) $A_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$, $B_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$, $C_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$ и $D_{ik}^{(\alpha,\beta)}(x,y)$

о б о з н а ч а ю т (C,α,β) $\alpha,\beta>0$ с р е д н и е, с о о т в е т с т в е н н о, р я д о в (I; I.5)-(I;18).

Доказательство. Известно, (см. [2I] , стр. 239), что в условиях леммы почти для всех $(x,y)\in R$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[f(x,y)-A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=0, \qquad (2;\ I.68)$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[\bar f_1(x,y)-B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=0, \qquad (2;I.69)$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[\bar f_2(x,y)-C^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=0, \qquad (2;I.70)$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[\bar f_3(x,y)-\mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=0. \qquad (2;I.71)$$

Нетрудно видеть, что почти всюду на R

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=$$

$$=f(x,y), \qquad (2;I.72)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=$$

$$=\bar f_1(x,y), \qquad (2;I.73)$$

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}C^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}C^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=$$

$$=\bar f_2(x,y). \qquad (2;I.74)$$

Справедливо также (см. [22] ,стр. I68),что

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right]= \qquad (2.I.75)$$

$$\bar f\ (\ldots)$$

почти для всех $(x,y)\in R$. Используя теорему В.Г.Челидзе (см. [5] стр. 17) из соотношений (2;I.68)-(2;I.71) и (2;I.72) - (2;I.75) получаем

$$\sup_{0\le m,n<\infty} |f(x,y)-A_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)| = \mathcal{N}_1(x,y)<\infty,$$

$$\sup_{0\le m,n<\infty} |\bar f_1(x,y)-B_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)| = \mathcal{N}_2(x,y)<\infty,$$

$$\sup_{0\le m,n<\infty} |\bar f_2(x,y)-C_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)| = \mathcal{N}_3(x,y)<\infty,$$

$$\sup_{0\le m,n<\infty} |\bar f_3(x,y)-D_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)| = \mathcal{N}_4(x,y)<\infty,$$

почти для всех $(x,y)\in R$. Тогда в силу (2;I.68)-(2;I.71) с применением теоремы Робинсона [I6] (см. и [I7]) получаем доказательство леммы.

Замечание. Часть этой леммы, относящаяся к соотношению (2;I.64) в случае, когда $a_{mnik}=\frac{1}{(m+1)(n+1)}$ другим путем была получена в работах [I5], [23].

Лемма IO. Пусть $f(x,y)\in L_1(R)$ и $\bar f_i(x,y)\in L(R)$ $(i=1,2)$.

Если

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x,s)\,ds=0, \quad \text{почти для всех } x\in[-\pi,\pi], \qquad (2;I.76)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t,y)\,dt=0, \quad \text{почти для всех } y\in[-\pi,\pi], \qquad (2;I.77)$$

то

а) $$\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\big[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\big]\big[P(r_2,y-s)+iQ(r_2,y-s)\big]\,dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R \big[\bar f_1(t,s)+\bar f_2(t,s)\big]P(r_1,x-t)\big[P(r_2,y-s)+iQ(r_2,y-s)\big]\,dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R \big[\bar f_1(t,s)+\bar f_2(t,s)\big]P(r_2,y-s)\big[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\big]\,dt\,ds=F_1(z_1,z_2),$$

$z_1=r_1e^{ix}$, $z_2=r_2e^{iy}$

в) $$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R f(t,s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]\left[P(r_2,y-s)-iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint\limits_R\left[\bar f_1(t,s)-\bar f_2(t,s)\right]P(r_1,x-t)\left[P(r_2,y-s)-iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint\limits_R\left[\bar f_1(t,s)-\bar f_2(t,s)\right]P(r_2,y-s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]dt\,ds=F_2(z_1,\bar z_2).$$

где $F_1(z_1,z_2)$ и $F_2(z_1,\bar z_2)$ – регулярные функции своих аргументов в единичном бицилиндре.

Доказательство. Принимая во внимание (2; I.77) и используя теорему В.И.Смирнова (см. например [I] ,стр. 583), находим Равенство М. Рисса, а не Смирнова

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,s)P(r_1,x-t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar f_1(t,s)Q(r_1,x-t)\,dt,$$

почти для всех $s\in[-\pi,\pi]$. Умножая последнее равенство на $\frac{1}{\pi}P(r_2,y-s)$ и интегрируя по s , будем иметь

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R f(t,s)P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds=-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R\bar f_1(t,s)Q(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds \quad (2;I.78)$$

Совершенно аналогично получается следующее равенство

$$\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R f(t,s)P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds=-\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R\bar f_2(t,s)P(r_1,x-t)Q(r_2,y-s)\,dt\,ds. \quad (2;I.79)$$

Затем,опираясь на вышеотмеченную теорему В.И.Смирнова, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,s)Q(r_1,x-t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar f_1(t,s)\overbrace{P(r_1,x-t)}^{\left(-P(r,x-t)-\frac{1}{2}\right)}dt \quad , \qquad (2;I.80)$$

$\pi \qquad = 0$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,s)\,Q(r_2,y-s)\,ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}_2(t,s)\,P(r_2,y-s)\,ds. \qquad (2;\ I.8I)$$

Умножая равенство (2; I.80) на $\frac{i}{\pi}P(r_2,y-s)$ и интегрируя по s , будем иметь

$$\frac{i}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\,Q(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dt\,ds =$$

$$= \frac{i}{\pi^2}\iint_R \bar{f}_1(t,s)\,P(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dt\,ds \qquad (2;\ I.82)$$

Затем умножая то же самое равенство на $-\frac{1}{\pi}Q(r_2,y-s)$ и интегрируя по s , находим

$$-\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\,Q(r_1,x-t)\,Q(r_2,y-s)\,dt\,ds =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\iint_R \bar{f}_1(t,s)\,P(r_1,x-t)\,Q(r_2,y-s)\,dt\,ds. \qquad (2;I.83)$$

Совершенно аналогично из равенства (2; I.8I) получаются следующие соотношения

$$\frac{i}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\,P(r_1,x-t)\,Q(r_2,y-s)\,dt\,ds =$$

$$= \frac{i}{\pi^2}\iint_R \bar{f}_2\,P(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dt\,ds, \qquad (2;I.84)$$

$$-\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\,Q(r_1,x-t)\,Q(r_2,y-s)\,dt\,ds =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}\iint_R \bar{f}_2(t,s)\,Q(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dt\,ds. \qquad (2;I.85)$$

Складывая равенства (2;I.78),(2;I.82),(2;I.84) и (2;I.85), получим

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]\left[P(r_2,y-s)+iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R\left[\bar f_1(t,s)+\bar f_2(t,s)\right]P(r_2,y-s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]dt\,ds. \quad (2;I.86)$$

Затем складывая соотношения (2;I.79),(2;I.82),(2;I.83) и (2;I.84) ,находим

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]\left[P(r_2,y-s)+iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R\left[\bar f_1(t,s)+\bar f_2(t,s)\right]P(r_1,x-t)\left[P(r_2,y-s)+iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds \quad (2;\ I.87)$$

В силу (2; I.86) и (2; I.87) следует справедливость пункта а). Далее, умножая равенство (2;I.84) и (2;I.85) на -1 и складывая их с (2;I.78) и (2;I.82), будем иметь

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]\left[P(r_2,y-s)-iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R\left[\bar f_1(t,s)-\bar f_2(t,s)\right]P(r_2,y-s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]dt\,ds. \quad (2;I.88)$$

Теперь умножая равенства (2;I.83) и (2;I.84) на -1 и складывая их с (2;I.79)и (2;I.82),находим

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]\left[P(r_2,y-s)-iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R\left[\bar f_1(t,s)-\bar f_2(t,s)\right]P(r_1,x-t)\left[P(r_2,y-s)-iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds. \quad (2;I.89)$$

Из (2; I.88) и (2;I.89) получаем справедливость пункта в)

Лемма доказана.

<u>Лемма II.</u> Если выполнены условия леммы IO, то

$$\left|\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1}\right| \le \frac{2}{\pi^2\delta_1}\iint\limits_R\left|\bar f_1(t,s)+\bar f_2(t,s)\right|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds, \qquad (2;I.90)$$

$$\left|\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1}\right| \le \frac{2}{\pi^2\delta_2}\iint\limits_R\left|\bar f_1(t,s)+\bar f_2(t,s)\right|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds, \qquad (2;I.9I)$$

$$\left|\frac{\partial^2 F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1\,\partial z_2}\right| \le \frac{4}{\pi^2\delta_1\delta_2}\iint\limits_R\left|\bar f_1(t,s)+\bar f_2(t,s)\right|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds, \qquad (2;I.92)$$

$$\left|\frac{\partial F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial z_1}\right| \le \frac{2}{\pi^2\delta_2}\iint\limits_R\left|\bar f_1(t,s)-\bar f_2(t,s)\right|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds, \qquad (2;I.93)$$

$$\left|\frac{\partial F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial \bar z_2}\right| \le \frac{2}{\pi^2\delta_2}\iint\limits_R\left|\bar f_1(t,s)-\bar f_2(t,s)\right|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds, \qquad (2;I.94)$$

$$\left|\frac{\partial^2 F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial z_1\,\partial \bar z_2}\right| \le \frac{4}{\pi^2\delta_1\delta_2}\iint\limits_R\left|\bar f_1(t,s)-\bar f_2(t,s)\right|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds. \qquad (2;I.95)$$

<u>Доказательство</u>. Используя формулу для производной аналитической функции (см. [24] , стр. 68), будем иметь

$$\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1} = \frac{r_1}{z_1}\,\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial r_1},$$

$$\frac{\partial F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial \bar z_2} = \frac{r_2}{z_2}\,\frac{\partial F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial r_2},$$

$$\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_2}=\frac{\partial F_1(z_1,z_2)}{\partial z_2}\,\frac{z_2}{z_2},$$

$$\frac{\partial F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial z_1}=\frac{z_1}{z_1}\,\frac{\partial F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial z_1},$$

$$\frac{\partial^2 F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1\,\partial z_2}=\frac{z_1}{z_1}\,\frac{z_2}{z_2}\,\frac{\partial^2 F_1(z_1,z_2)}{\partial z_1\,\partial z_2},$$

$$\frac{\partial^2 F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial z_1\,\partial \bar z_2}=\frac{z_1}{z_1}\,\frac{z_2}{z_2}\,\frac{\partial^2 F_2(z_1,\bar z_2)}{\partial z_1\,\partial z_2}.$$

Теперь используя соотношения а) и в) леммы 10 и учитывая, что (см. напр. [14] ,стр. 412)

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left[P(z,t)\pm iQ(z,t)\right]\right|\le\frac{2}{\delta}P(z,t),\qquad \delta=1-z,$$

получаем справедливость утверждений (2;I.90)-(2;I.95).

<u>Лемма 12. (основная)</u> . Пусть $f(x,y)\in L\ln^+L$, $\tilde f_j(x,y)\in L\ln^+L$ $(j=1,2)$ и

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x,s)\,ds=0$, почти для всех $x\in[-\pi,\pi]$,

$\int_{-\pi}^{\pi} f(t,y)\,dt=0$, почти для всех $y\in[-\pi,\pi]$.

Тогда для любого $z>0$ почти всюду на R

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \left|\bar f_1(x,y)+\bar f_2(x,y)-\bar S_{ik}^{(1)}(x,y,f)-\bar S_{ik}^{(2)}(x,y,f)\right|^2=0, \qquad (2;I.96)$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \left|f(x,y)-\bar f_3(x,y)+\bar S_{ik}^{(3)}(x,y,f)-S_{ik}(x,y,f)\right|^2=0. \qquad (2;I.97)$$

Доказательство. Положим $\Psi(t,s)=\bar f_1(x,y)+\bar f_2(x,y)$.
В силу условий леммы $\Psi(t,s)\in L(\ln^+ L)$, поэтому (см. [4], стр. 460) почти для всех $(x,y)\in R$

$$\sup_{\substack{|h|\le\pi\\ |\eta|\le\pi}} \frac{1}{h\eta}\int_x^{x+h}\int_y^{y+\eta} |\Psi(t,s)|\,dt\,ds = M(x,y) < +\infty. \qquad (2;I.98)$$

Теперь, пусть

$$E_m=\{(x,y): R \qquad M(x,y)\le m\}. \qquad (2;\ I.99)$$

Ясно, что множества E_m замкнуты и $\bigcup_{m=0}^{\infty}(E_m-E_{m-1})$ отличаются от R на множество меры нуль. Поэтому достаточно утверждение леммы проверить для каждого E_m-E_{m-1}. Зафиксируем m и пусть $(x_0,y_0)\in E_m-E_{m-1}=B_m$.

B_0

В силу условий (2;I.76),(2;I.77) нетрудно проверить, что

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left[A_{\mu\nu}(x_0,y_0)-D_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]+i\left[B_{\mu\nu}(x_0,y_0)+C_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]\right\} z_1^{\mu} z_2^{\nu} =$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\, e^{i\mu(x_0-t)}\, e^{i\nu(y_0-s)}\, z_1^{\mu} e^{i\mu x} z_2^{\nu} e^{i\nu y}\,dt\,ds =$$

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(x_0+t,y_0+s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]\left[P(r_2,y-s)+iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=F_{x_0,y_0}(Z_1,Z_2).$$

Отсюда используя пункт а) утверждения леммы IO, находим

$$F_{x_0,y_0}(Z_1,Z_2)=$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{\left[A_{\mu\nu}(x_0,y_0)-D_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]+i\left[B_{\mu\nu}(x_0,y_0)+C_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]\right\}Z_1^{\mu}Z_2^{\nu}=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R \Psi(x_0+t,y_0+s)P(r_1,x-t)\left[P(r_2,y-s)+iQ(r_2,y-s)\right]dt\,ds=$$

$$=\frac{i}{\pi^2}\iint_R \Psi(x_0+t,y_0+s)P(r_2,y-s)\left[P(r_1,x-t)+iQ(r_1,x-t)\right]dt\,ds. \qquad (2;I.I00)$$

Далее

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu\nu\left\{\left[A_{\mu\nu}(x_0,y_0)-D_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]+i\left[B_{\mu\nu}(x_0,y_0)+C_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]\right\}Z_1^{\mu}Z_2^{\nu}=$$

$$=Z_1Z_2\frac{\partial^2 F_{x_0,y_0}(Z_1,Z_2)}{\partial Z_1\partial Z_2}, \qquad (2;I.I0I)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu\left\{\left[A_{\mu\nu}(x_0,y_0)-D_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]+i\left[B_{\mu\nu}(x_0,y_0)+C_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]\right\}Z_1^{\mu}Z_2^{\nu}=$$

$$=Z_1\frac{\partial F_{x_0,y_0}(Z_1,Z_2)}{\partial Z_1}, \qquad (2;I.I02)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left\{\left[A_{\mu\nu}(x_0,y_0)-D_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]+i\left[B_{\mu\nu}(x_0,y_0)+C_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]\right\}Z_1^{\mu}Z_2^{\nu}=$$

$$=Z_2\frac{\partial F_{x_0,y_0}(Z_1,Z_2)}{\partial Z_2}. \qquad (2;I.I03)$$

Так как $\left|\left[A_{\mu\nu}(x_0,y_0)-D_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]+i\left[B_{\mu\nu}(x_0,y_0)+C_{\mu\nu}(x_0,y_0)\right]\right| \le$ $\le \iint\limits_R |f(t,s)|\,dt\,ds$,то выполняя в соотношениях (2;I.100)-(2;I.103)преобразование Харди (см. [25] , лемма 2) и используя теорему Хаусдорфа -Юнга (см. [15]), будем иметь

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} r_1^{q\mu} r_2^{q\nu}\left|\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\alpha\beta\left\{\left[A_{\alpha\beta}(x_0,y_0)-D_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\left[B_{\alpha\beta}(x_0,y_0)+C_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]\right\}\right|^q \le$$

$$\le\left\{r_1^p r_2^p \iint\limits_R\left|\frac{\partial^2 F_{x_0,y_0}(z_1,z_2)}{\partial z_1\,\partial z_2}\right|^p\frac{dx\,dy}{|1-z_1|^p\,|1-z_2|^p}\right\}^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left[J_1(r_1,r_2;x_0,y_0)\right]^{\frac{1}{p-1}}, \qquad (2;I.104)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} r_1^{q\mu} r_2^{q\nu}\left|\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\alpha\left\{\left[A_{\alpha\beta}(x_0,y_0)-D_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\left[B_{\alpha\beta}(x_0,y_0)+C_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]\right\}\right|^q \le$$

$$\le\left\{r_1^p \iint\limits_R\left|\frac{\partial F_{x_0,y_0}(z_1,z_2)}{\partial z_1}\right|^p\frac{dx\,dy}{|1-z_1|^p\,|1-z_2|^p}\right\}^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left[J_2(r_1,r_2,x_0,y_0)\right]^{\frac{1}{p-1}}, \qquad (2;I.105)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} r_1^{q\mu} r_2^{q\nu}\left|\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\beta\left\{\left[A_{\alpha\beta}(x_0,y_0)-D_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\left[B_{\alpha\beta}(x_0,y_0)+C_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]\right\}\right|^q \le$$

$$\le\left\{r_2^p \iint\limits_R\left|\frac{\partial F_{x_0,y_0}(z_1,z_2)}{\partial z_2}\right|\frac{dx\,dy}{|1-z_1|\,|1-z_2|}\right\}^{\frac{1}{p-1}}=$$

$$=\left[J_3(r_1,r_2,x_0,y_0)\right]^{\frac{1}{p-1}}, \quad 1<p\le 2,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \qquad (2;I.106)$$

Теперь, если будет установлено, что почти для всех $(x_0 y_0)\in B_m$

$$J_1(r_1,r_2,x_0,y_0)=\bar{\bar{O}}\left(\delta_1^{1-2p}\ \delta_2^{1-2p}\right), \qquad (2;I.I07)$$

$$J_2(r_1,r_2,x_0,y_0)=\bar{\bar{O}}\left(\delta_1^{1-2p}\ \delta_2^{1-p}\right), \qquad (2;I.I08)$$

$$J_3(r_1,r_2,x_0,y_0)=\bar{\bar{O}}\left(\delta_1^{1-p}\ \delta_2^{1-2p}\right) \text{ при } \delta_1,\delta_2\to 0, \qquad (2;I.I09)$$

то полагая $\delta_1=\frac{1}{m}$, $\delta_2=\frac{1}{n}$, в соотношениях (2;I.I04)-(2;I.I06) сохраняя только члены при $\mu\le m$, $\nu\le n$ и замечая, что для таких μ и ν $\left(1-\frac{1}{m}\right)^\mu>\frac{1}{2e}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^\nu>\frac{1}{2e}$ (при достаточно больших m и n), получим

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\Big|\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\alpha\beta\Big\{\left[A_{\alpha\beta}(x_0,y_0)-D_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]+$$
$$+i\left[B_{\alpha\beta}(x_0,y_0)+C_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]\Big\}\Big|^q=\bar{\bar{O}}\left(m^{q+1}n^{q+1}\right). \qquad (2;I.II0)$$

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\Big|\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\alpha\Big\{\left[A_{\alpha\beta}(x_0,y_0)-D_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]+$$
$$+i\left[B_{\alpha\beta}(x_0,y_0)+C_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]\Big\}\Big|^q=\bar{\bar{O}}\left(m^{q+1}n\right). \qquad (2;I.III)$$

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\Big|\sum_{\alpha=1}^{\mu}\sum_{\beta=1}^{\nu}\beta\Big\{\left[A_{\alpha\beta}(x_0,y_0)-D_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]+$$
$$+i\left[B_{\alpha\beta}(x_0,y_0)+C_{\alpha\beta}(x_0,y_0)\right]\Big\}\Big|^q=\bar{\bar{O}}\left(m\,n^{q+1}\right). \qquad (2;I.II2)$$

Отсюда с применением леммы 8 нетрудно убедиться, что

$$\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}\Big|\Big[S_{\mu\nu}(x_0,y_0,f)-S_{\mu\nu}^{(3)}(x_0,y_0,f)-A_{\mu\nu}^{(1,1)}(x_0,y_0)+D_{\mu\nu}^{(1,1)}(x_0,y_0)\Big]+$$
$$+i\Big[S^{(1)}(x_0,y_0)+S^{(2)}(x_0,y_0)-B^{(1,1)}(x_0,y_0)-C^{(1,1)}(x_0,y_0)\Big]\Big|^q=\bar{\bar{O}}(mn)$$

А из последнего соотношения используя лемму 9, получаем справедливость леммы при $r=q$. Теперь учитывая вложенность метода (H,r) ясно, что лемма будет верна для любого r, если p — достаточно близко к 1. Итак, для завершения доказательства леммы надо показать, что имеют место соотношения (2;I.I07)-(2;I.I09).

В силу леммы II из (2;I.I04) - (2;I.I06) вытекает

(применение леммы 11)

$$J_1(r_1,r_2;x_0,y_0) \le \frac{4^p r_1^p r_2^p}{\pi^{2p}\delta_1^p\delta_2^p}\iint\limits_R\left[\iint\limits_R|\psi(x_0+t,y_0+s)|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds\right]^p \times$$

$$\times\frac{dx\,dy}{|1-z_1|^p|1-z_2|^p} \le 4^p\delta_1^{-p}\delta_2^{-p}\iint\limits_R\frac{U^p(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{|1-z_1|^p|1-z_2|^p}\,dx\,dy, \qquad (2;I.II3)$$

$$J_2(r_1,r_2;x_0,y_0) \le 2^p\delta_1^{-p}\iint\limits_R\frac{U^p(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{|1-z_1|^p|1-z_2|^p}\,dx\,dy, \qquad (2;I.II4)$$

$$J_3(r_1,r_2;x_0,y_0) \le 2^p\delta_2^{-p}\iint\limits_R\frac{U^p(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{|1-z_1|^p|1-z_2|^p}\,dx\,dy, \qquad (2;I.II5)$$

где

$$U(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R|\psi(x_0+t,y_0+s)|P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds.$$

Займемся оценкой следующего интеграла

$$J_4(r_1,r_2,x_0,y_0) = \iint\limits_R\frac{U^p(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{|1-z_1|^p|1-z_2|^p}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_R|\psi(x_0+t,y_0+s)|\,dt\,ds\iint\limits_R\frac{U^{p-1}(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2} |\Psi(x_0+t, y_0+s)|\, dt\, ds \iint_R \frac{U^{p-1}(r_1, x_0+x; r_2, y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)} \times$$

$$\times P(r_1, x-t) P(r_2, y-s)\, dx\, dy + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2 \le |s| \le \pi} |\Psi(x_0+t, y_0+s)|\, dt\, ds \times$$

$$\times \iint_R \frac{U^{p-1}(r_1, x_0+x; r_2, y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)} P(r_1, x-t) P(r_2, y-s)\, dx\, dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{\delta_1 \le |t| \le \pi} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} |\Psi(x_0+t, y_0+s)|\, dt\, ds \iint_R \frac{U^{p-1}(r_1, x_0+x; r_2, y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)} \times$$

$$\times P(r_1, x-t) P(r_2, y-s)\, dx\, dy + \frac{1}{\pi^2} \int_{\delta_1 \le |t| \le \pi} \int_{\delta_2 \le |s| \le \pi} |\Psi(x_0+t, y_0+s)|\, dt\, ds \times$$

$$\times \iint_R \frac{U^{p-1}(r_1, x_0+x; r_2, y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)} P(r_1, x-t) P(r_2, y-s)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{4} J_4^j(r_1, r_2, x_0, y_0), \qquad (2;I.116)$$

где $\qquad \Delta(r,t) = 1 - 2r\cos t + r^2.$

В дальнейшем нам понадобятся хорошо известные неравенства (см. ,например, [4] ,стр. 278)

$$\Delta(r,t) \ge \delta^2, \qquad (\delta = 1 - r) \qquad (2;I.117)$$

$$\Delta(r,t) \ge \frac{4}{\pi^2} t^2, \qquad t > 0, \qquad (2;I.118)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{\Delta^{\alpha}(r,t)} \le A_\alpha \delta^{1-2\alpha}, \qquad \alpha > \frac{1}{2}, \qquad (2;I.119)$$

ричем A_α - положительная константа, зависящая лишь от α.

(τ,t) -невозрастающая функция относительно $t\in[0,\pi]$

$$P(\tau,t)\le\frac{\pi^2}{4}\delta t^{-2},\qquad |t|>0. \tag{2;I.I20}$$

еперь используя (2;I.II7), будем иметь

$$J_4^1(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le\frac{1}{\pi^2}\delta_1^{-p}\delta_2^{-p}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}|\Psi(x_0+t,y_0+s)|\,dt\,ds\,\times$$

$$\times\iint_R U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)\,P(\tau_1,x-t)\,P(\tau_2,y-s)\,dx\,dy$$

гюда ввиду того, что $0<p-1<1$ (см. (2;I.I06)) с применением

еравенства Иенсена (см., например, [26], стр. I82), (2;I.98),

2;I.99) и (2;I.48) получим

$$J_4^1(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le\delta_1^{-p}\delta_2^{-p}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}|\Psi(x_0+t,y_0+s)|\,U^{p-1}(\tau_1^2,x_0+t,\tau_2^2,y_0+s)\,dt\,ds\le$$

$$\le K^{2p}m^{p-1}\delta_1^{-p}\delta_2^{-p}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{-\delta_2}^{\delta_2}|\Psi(x_0+t,y_0+s)|\left(1+\frac{|t|}{\delta_1}\right)^{p-1}\left(1+\frac{|s|}{\delta_2}\right)^{p-1}dt\,ds\le$$

$$C_p m^p\delta_1^{1-p}\delta_2^{1-p}\,{}^{*)}. \tag{2;I.I2I}$$

Далее ясно, что

$$J_4^2(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\delta_1}^{\delta_1}\int_{\delta_2\le|s|\le\pi}|\Psi(x_0+t,y_0+s)|\,dt\,ds\int_{-\pi}^{\pi}\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}}\frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)}\,\times$$

$$\cdot P(\tau_1,x-t)\,P(\tau_2,y-s)\,dx\,dy+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\frac{|s|}{2}\le|y|\le\pi}\frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)}\,\times$$

$$\times\,P(\tau_1,x-t)\,P(\tau_2,y-s)\,dx\,dy=\sum_{j=1}^{2}J_4^{2,j}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0). \tag{2;I.I22}$$

---

*) В дальнейшем через C_p будем обозначать положительную константу, зависящую только от p и имеющую разные значения.

Сначала оценим интегралы, стоящие внутри фигуральных скобок. Используя (2;I.II7) свойство функции $P(r,t)$ и (2;I.I20) в силу вышеотмеченного неравенства Иенсена, находим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}} \frac{U^{p-1}(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)}\,P(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dx\,dy \le$$

$$\le \pi^3 \delta_2 s^{-2} \delta_1^{-p} \int_{|y|\le\frac{|s|}{2}} \frac{U^{p-1}(r_1^2,x_0+t;r_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)}\,dy .$$

Отсюда с применением неравенства Гёльдера, (2;I.49) и (2;I.II9) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}} \frac{U^{p-1}(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)}\,P(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dx\,dy \le$$

$$\le \pi^3 \delta_2 |s|^{-2} \delta_1^{-p} \left[\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}} U(r_1^2,x_0+t;r_2,y_0+y)\,dy\right]^{p-1} \left[\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}} \frac{dy}{\Delta^{\frac{p}{2(2-p)}}(r_2,y)}\right]^{2-p} \le$$

$$\le C_p \delta_1^{-p} \delta_2 |s|^{-2} m^{p-1} |s|^{p-1} \left[1+\frac{|t|}{\delta_1}\right]^{p-1} \delta_2^{\left(1-\frac{p}{2-p}\right)(2-p)} =$$

$$= C_p m^{p-1} \delta_1^{-p} \delta_2^{3-2p} |s|^{p-3} \left[1+\frac{|t|}{\delta_1}\right]^{p-1}. \qquad (2;I.I23)$$

Затем в силу (2;I.II7), (2;I.II8), неравенства Иенсена (см. , например, [26], стр. 182) и (2;I.48'), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{\frac{|s|}{2}\le|y|\le\pi} \frac{U^{p-1}(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)}\,P(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dx\,dy \le$$

$$\le C_p \delta_1^{-p} |s|^{-p} \iint_R U^{p-1}(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)\,P(r_1,x-t)\,P(r_2,y-s)\,dx\,dy \le$$

$$\le C_p \delta_1^{-p} |s|^{-p} U^{p-1}(r_1^2,x_0+t;r_2^2,y_0+s) \le C_p \delta_1^{-p} |s|^{-p} m^{p-1} \left(1+\frac{|t|}{\delta_1}\right)^{p-1} \left[1+\frac{x_2(y_0+s)}{\delta_2}\right]^{p-1}. \qquad (2;I.I24)$$

Теперь используя (2;I.I23), находим (см. 2;I.I22)

$$C_p m^{p-1} \delta_1^{-p} \delta_2^{3-2p} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2 \le |s| \le \pi} |\Psi(x_0+t, y_0+s)| \left(1+\frac{|t|}{\delta_1}\right)^{p-1} \frac{1}{|s|^{3-p}}\, dt\, ds \le$$

$$\le C_p m^{p-1} \delta_1^{-p} \delta_2^{3-2p} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2 \le |s| \le \pi} \frac{|\Psi(x_0+t, y_0+s)|}{|s|^{3-p}}\, dt\, ds. \qquad (2;I.I25)$$

Но

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2 \le |s| \le \pi} \frac{|\Psi(x_0+t, y_0+s)|}{|s|^{3-p}}\, dt\, ds =$$

$$= \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2}^{\pi} \frac{|\Psi(x_0+t, y_0+s)|}{|s|^{3-p}}\, dt\, ds +$$

$$+ \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{-\pi}^{-\delta_2} \frac{|\Psi(x_0+t, y_0+s)|}{|s|^{3-p}}\, dt\, ds. \qquad (2;I,I26)$$

Используя (2.I.98) и (2;I.99) интегрированием по частям, получим

$$\int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2}^{\pi} \frac{|\Psi(x_0+t, y_0+s)|}{s^{3-p}}\, dt\, ds = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \left\{ \int_0^s |\Psi(x_0+t, y_0+u)|\, du\; s^{p-3} \Big|_{\delta_2}^{\pi} \right\} dt +$$

$$+ (3-p) \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2}^{\pi} \left[\int_0^s |\Psi(x_0+t, y_0+u)|\, du \right] \frac{1}{s^{4-p}}\, dt\, ds \le$$

$$\le C_p \delta_1 \delta_2^{p-2} m. \qquad (2;I.I27)$$

Легко видеть, что аналогично можно оценить и первое слагаемое правой части соотношения (2;I.I26). Поэтому из (2;I.I25) - (2;I.I27) следует

$$J_4^{2,1}(r_1, r_2, x_0, y_0) \le C_p m^p \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p}. \qquad (2;I.I28\ )$$

Далее принимая во внимание (2;I.I24) с применением неравенства (I;I.I6) ,будем иметь (см. (2; I.I22))

$$J_4^{2,2}(z_1,z_2,x_0,y_0) \le C_p m^{p-1} \delta_1^{-p} \left\{ \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2 \le |s| \le \pi} \frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|s|^p} \left(1+\frac{|t|}{\delta_1}\right)^{p-1} dt\,ds + \right.$$

$$\left. + \delta_2^{1-p} \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_{\delta_2 \le |s| \le \pi} \frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|s|^p} \chi_2^{p-1}(y_0+s)\, dt\,ds \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} J_4^{2,2,j}(z_1,z_2,x_0,y_0). \qquad (2;I.I29)$$

Нетрудно убедиться,что интегрированием по частям,точно также , как в (2; I.I27), получим

$$J_4^{2,2,1}(z_1,z_2,x_0,y_0) \le C_p m^{p-1} \delta_1^{-p} \cdot \delta_1 \delta_2^{1-p} m = C_p m^p \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p}. \qquad (2;I.I30)$$

Пусть теперь

$$\sup_{|h| \le \pi} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\psi(t,s)|}{|y_0-s|^p} \chi_2^{p-1}(s)\, dt\,ds = \psi_1(x_0,y_0) < \infty \qquad (2;I.I3I)$$

Тогда ясно,что

$$J_4^{2,2,2}(z_1,z_2,x_0,y_0) \le C_p m^{p-1} \delta_1^{-p} \delta_2^{1-p} \int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\psi(t,s)|\,\chi_2^{p-1}(s)}{|y_0-s|^p}\, dt\,ds \le$$

$$\le C_p m^{p-1} \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} \psi_1(x_0,y_0). \qquad (2;I.I32)$$

Теперь из соотношений (2;I.I22),(2;I.I28)- (2;I.I30) и (2;I.I32), находим

$$J_4^{2}(z_1,z_2,x_0,y_0) \le C_p m^p \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} + C_p m^{p-1} \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} \psi_1(x_0,y_0). \qquad (2;I.I33)$$

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что

$$J_4^{3}(z_1,z_2,x_0,y_0) \le C_p m^p \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} + C_p m^{p-1} \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} \psi_2(x_0,y_0), \qquad (2:I,I34)$$

где

$$\psi_2(x_0,y_0)=\sup_{|\eta|\le\pi}\frac{1}{\eta}\int_{y_0}^{y_0+\eta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(t,s)|\chi_1^{p-1}(t)}{|x_0-t|^p}\,dt\,ds. \qquad (2;I.135)$$

Затем ясно, что

$$J_4^4(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\delta_1\le|t|\le\pi}\int_{\delta_2\le|s|\le\pi}|\psi(x_0+t,y_0+s)|\,dt\,ds\times$$

$$\Bigg[\int_{|x|\le\frac{|t|}{2}}\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}}\frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)}\,p(\tau_1,x-t)\,p(\tau_2,y-s)\,dx\,dy+$$

$$\int_{|x|\le\frac{|t|}{2}}\int_{\frac{|s|}{2}\le|y|\le\pi}\frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)}\,p(\tau_1,x-t)\,p(\tau_2,y-s)\,dx\,dy+$$

$$\int_{\frac{|t|}{2}\le|x|\le\pi}\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}}\frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)}\,p(\tau_1,x-t)\,p(\tau_2,y-s)\,dx\,dy+$$

$$\int_{\frac{|t|}{2}\le|x|\le\pi}\int_{\frac{|s|}{2}\le|x|\le\pi}\frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)}\,p(\tau_1,x-t)\,p(\tau_2,y-s)\,dx\,dy\Bigg]=$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{4}J_4^{4,\gamma}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0). \qquad (2;I.136)$$

Оценим интегралы, стоящие внутри квадратных скобок.

Используя свойство функции $p(\tau,t)$, (2;I.120), неравенство

Гёльдера и (2;I.51), находим

$$\int_{|x|\le\frac{|t|}{2}}\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}}\frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)}\,p(\tau_1,x-t)\,p(\tau_2,y-s)\,dx\,dy\le$$

$$\le\pi^4\,\delta_1|t|^{-2}\,\delta_2|s|^{-2}\left[\int_{|x|\le\frac{|t|}{2}}\int_{|y|\le\frac{|s|}{2}}U(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)\,dx\,dy\right]^{p-1}\times$$

$$\times \left[\int\limits_{|x|\le\frac{|t|}{2}} \int\limits_{|y|\le\frac{|s|}{2}} \Delta^{-\frac{p}{2(2-p)}}(\tau_1,x)\,\Delta^{-\frac{p}{2(2-p)}}(\tau_2,y)\,dx\,dy \right]^{2-p} \le$$

$$\le C_p m^{p-1} |t|^{p-3} |s|^{p-3} \delta_1^{3-2p} \delta_2^{3-2p} \qquad (2;\text{I}.\text{I}37)$$

Затем в силу свойства функции $P(\tau,t)$, (2;I.I20),(2;I.II8) неравенства Иенсена (см.,например, [26] ,стр. 182),Гёльдера и (2;I.49'),будем иметь

$$\int\limits_{|x|\le\frac{|t|}{2}} \int\limits_{\frac{|s|}{2}\le|y|\le\pi} \frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)} P(\tau_1,x-t)\,P(\tau_2,y-s)\,dx\,dy \le$$

$$\le \pi^4 \delta_1 |t|^{-2} |s|^{-p} \int\limits_{\frac{|s|}{2}\le y\le\pi} \left[\int\limits_{|x|\le\frac{|t|}{2}} U(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)\,dx \right]^{p-1} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{|x|\le\frac{t}{2}} \Delta^{-\frac{p}{2(2-p)}}(\tau_1,x) \right]^{2-p} P(\tau_2,y-s)\,dy \le$$

$$\le C_p \delta_1^{3-2p} |t|^{-2} |s|^{-p} \left[\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{|x|\le\frac{|t|}{2}} U(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)\,P(\tau_2,y-s)\,dx\,dy \right]^{p-1} \le$$

$$\le C_p \delta_1^{3-2p} |t|^{-2} |s|^{-p} \left[\int\limits_{|x|\le\frac{|t|}{2}} U(\tau_1,x_0+x;\tau_2^2,y_0+s)\,dx \right]^{p-1} \le$$

$$\le C_p m^{p-1} \delta_1^{3-2p} |t|^{p-3} |s|^{-p} \left[1 + \frac{\chi_2(y_0+s)}{\delta_2} \right]^{p-1} . \qquad (2;\text{I}.38)$$

Совершенно аналогично получаем,что

$$\int\limits_{\frac{|t|}{2}\le|x|\le\pi} \int\limits_{|y|\le\frac{|s|}{2}} \frac{U^{p-1}(\tau_1,x_0+x;\tau_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(\tau_2,y)} P(\tau_1,x-t)\,P(\tau_2,y-s)\,dx\,dy \le$$

$$\le C_p m^{p-1} \delta_2^{3-2p} |s|^{p-3} |t|^{-p} \left[1 + \frac{\chi_1(x_0+t)}{\delta_1} \right]^{p-1} . \qquad (2;\text{I}.39)$$

Далее, используя (2;I.II8) вышеотмеченное неравенство Иенсена и (2; I.48'), находим

$$\int\limits_{\leq|x|\leq\pi}\ \int\limits_{\frac{|s|}{2}\leq|y|\leq\pi}\frac{U^{p-1}(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)}{\Delta^{\frac{p}{2}}(r_1,x)\,\Delta^{\frac{p}{2}}(r_2,y)}P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dx\,dy\leq$$

$$\leq C_p|t|^{-p}|s|^{-p}\iint\limits_{R}U^{p-1}(r_1,x_0+x;r_2,y_0+y)P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dx\,dy\leq$$

$$\leq C_p|t|^{-p}|s|^{-p}U^{p-1}(r_1^2,x_0+t;r_2^2,y_0+s)\leq$$

$$\leq C_p m^{p-1}|t|^{-p}|s|^{-p}\left[1+\frac{\chi_1(x_0+t)}{\delta_1}\right]^{p-1}\left[1+\frac{\chi_2(y_0+s)}{\delta_2}\right]^{p-1}\qquad(2;I.I40)$$

Теперь используя (2; I.I37), будем иметь

$$J_{4}^{4,1}\leq C_p m^{p-1}\delta_1^{3-2p}\delta_2^{3-2p}\int\limits_{\delta_1\leq|t|\leq\pi}\ \int\limits_{\delta_2\leq|s|\leq\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|s|^{3-p}|t|^{3-p}}\,dt\,ds=$$

$$=C_p m^{p-1}\delta_1^{3-2p}\delta_2^{3-2p}\Bigg[\int\limits_{\delta_1}^{\pi}\int\limits_{\delta_2}^{\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|s|^{3-p}|t|^{3-p}}\,dt\,ds+$$

$$\int\limits_{-\pi}^{-\delta_1}\int\limits_{\delta_2}^{\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^{3-p}}\,dt\,ds+\int\limits_{\delta_1}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta_2}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^{3-p}}\,dt\,ds+$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{-\delta_1}\int\limits_{-\pi}^{-\delta_2}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^{3-p}}\,dt\,ds\Bigg].\qquad(2;I.I4I)$$

Нетрудно заметить, что все интегралы, стоящие в квадратных скобках, допускают одинаковые оценки. Рассмотрим, например, последнее слагаемое

$$\int_{-\pi}^{-\delta_1}\int_{-\pi}^{-\delta_2} \frac{|\psi(x_0+t, y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^{3-p}}\,dt\,ds = \int_{\delta_1}^{\pi}\int_{\delta_2}^{\pi} \frac{|\psi(x_0-t, y_0-s)|}{t^{3-p}\,s^{3-p}}\,dt\,ds\,.$$

Отсюда используя (2;I.98) и (2;I.99) интегрированием по частям, получим

$$\int_{\delta_1}^{\pi}\int_{\delta_2}^{\pi} \frac{|\psi(x_0-t, y_0-s)|}{t^{3-p}\,s^{3-p}}\,dt\,ds = \int_{\delta_1}^{\pi}\left[\int_0^s |\psi(x_0-t, y_0-v)|\,dv\, s^{p-3}\Big|_{\delta_2}^{\pi}\right]\frac{dt}{t^{3-p}} +$$

$$+(3-p)\int_{\delta_1}^{\pi}\int_{\delta_2}^{\pi}\left[\int_0^s |\psi(x_0-t, y_0-v)|\,dv\right]\frac{dt}{t^{3-p}}\,\frac{ds}{s^{4-p}} =$$

$$=\int_0^t\left[\int_0^s |\psi(x_0-u, y_0-v)|\,dv\, s^{p-3}\Big|_{\delta_2}^{\pi}\right]du\; t^{p-3}\Big|_{\delta_1}^{\pi} +$$

$$+(3-p)\int_{\delta_1}^{\pi}\left\{\int_0^t\left[\int_0^s |\psi(x_0-u, y_0-v)|\,dv\, s^{p-3}\Big|_{\delta}^{\pi}\right]du\right\}\frac{dt}{t^{4-p}} +$$

$$+(3-p)\int_0^t\left\{\int_{\delta_2}^{\pi}\left[\int_0^s |\psi(x_0-u, y_0-v)|\,dv\right]\frac{ds}{s^{4-p}}\right\}du\; t^{p-3}\Big|_{\delta_1}^{\pi} +$$

$$(3-p)^2\int_{\delta_1}^{\pi}\left(\int_0^t\left\{\int_{\delta_2}^{\pi}\left[\int_0^s |\psi(x_0-u, y_0-v)|\,dv\right]\frac{ds}{s^{4-p}}\right\}du\right)\frac{dt}{t^{4-p}} \le$$

$$\le C_p\, m\, \delta_1^{p-2}\,\delta_2^{p-2}. \qquad (2;I.I42)$$

А из последнего неравенства и соотношения (2; I.I4I), находим

$$J_4^{4,1}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0) \le C_p\, m^p\, \delta_1^{1-p}\,\delta_2^{1-p}. \qquad (2;I.I43)$$

Затем, в силу (2;I.I38) будем иметь

$$J_4^{4,2}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p m^{p-1}\delta_1^{3-2p}\int\limits_{\delta_1\le|x|\le\pi}\int\limits_{\delta_2\le|y|\le\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^p}\left[1+\frac{\chi_2(y_0+s)}{\delta_2}\right]^{p-1}dt\,ds.$$

Отсюда с применением (I;I.I6), получим

$$J_4^{4,2}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p m^{p-1}\delta_1^{3-2p}\left\{\int\limits_{\delta_1\le|x|\le\pi}\int\limits_{\delta_2\le|y|\le\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^p}dt\,ds+\right.$$

$$\left.+\delta_2^{1-p}\int\limits_{\delta_1\le|x|\le\pi}\int\limits_{\delta_2\le|y|\le\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^p}\chi_2^{p-1}(y_0+s)\,dt\,ds\right\}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2}J_4^{4,2,\nu}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0). \qquad (2;I.I44)$$

Легко заметить, что интегрированием по частям точно также, как в (2;I.I42) будем иметь

$$J_4^{4,2,1}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p m^{p-1}\delta_1^{3-2p}\delta_1^{p-2}\delta_2^{1-p}m=C_p m^p\delta_1^{1-p}\delta_2^{1-p} \qquad (2;I.I45)$$

Затем ясно, что

$$J_4^{4,2,2}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p m^{p-1}\delta_1^{3-2p}\delta_2^{1-p}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{\delta_1}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{t^{3-p}|s|^p}\chi_2^{p-1}(y_0+s)\,dt\,ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\pi}^{-\delta_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^{3-p}|s|^p}\chi_2^{p-1}(y_0+s)\,dt\,ds\right\} \qquad (2;I.I46)$$

Учитывая (2;I.I3I), интегрированием по частям находим

$$\int\limits_{\delta_1}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{t^{3-p}|s|^p}\chi_2^{p-1}(y_0+s)\,dt\,ds=$$

$$= \int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\psi(x_0+u,s)|}{|y_0-s|^p} \chi_2^{p-1}(s)\, du\, ds\ t^{p-3}\Big|_{\delta_1}^{\pi} +$$

$$+(3-p) \int_{\delta_1}^{\pi} \left[\int_0^t \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\psi(x_0+u,s)|}{|y_0-s|^p} \chi_2^{p-1}(s)\, du\, ds \right] \frac{dt}{t^{4-p}} \le$$

$$\le C_p\, \delta_1^{p-2}\, \psi_1(x_0,y_0). \qquad (2;I.I47)$$

Теперь замечая, что и второе слагаемое, стоящее в фигуральных скобках соотношения (2;I.I46) оценивается также, как и первое слагаемое (см. (2;I.I47) ,заключаем

$$J_4^{4,2,2}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0) \le C_p m^{p-1} \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} \psi_1(x_0,y_0). \qquad (2;I.I48)$$

Из (2;I.I44),(2;I.I45) и (2;I.I48) вытекает

$$J_4^{4,2}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0) \le C_p m^p \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} + C_p m^{p-1} \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} \psi_1(x_0,y_0). \qquad (2;I.I49)$$

Аналогичными рассуждениями, которыми была получена (2;I.I49) можно убедиться, что

$$J_4^{4,3}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0) \le C_p m^p \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} + C_p m^{p-1} \delta_1^{1-p} \delta_2^{1-p} \psi_2(x_0,y_0). \qquad (2;I.I50)$$

Далее, в силу (2;I.I40) с применением (I;I.I6), будем иметь

$$J_4^{4,4}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0) \le C_p m^{p-1} \int_{\delta_1\le|t|\le\pi} \int_{\delta_2\le|s|\le\pi} \frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^p|s|^p} \left[1+\frac{\chi_1(x_0+t)}{\delta_1}\right]^{p-1} \times$$

$$\times \left[1+\frac{\chi_2(y_0+s)}{\delta_2}\right]^{p-1} dt\, ds \le C_p m^{p-1} \left\{ \int_{\delta_1\le|t|\le\pi} \int_{\delta_2\le|s|\le\pi} \frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^p|s|^p} dt\, ds + \right.$$

$$+\delta_1^{1-p}\int\limits_{\delta_1\le|t|\le\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^p|s|^p}\chi_1^{p-1}(x_0+t)\,dt\,ds+\delta_2^{1-p}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{\delta_2\le|s|\le\pi}\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^p|s|^p}\times$$

$$\times\chi_2^{p-1}(y_0+s)\,dt\,ds+\delta_1^{1-p}\delta_2^{1-p}\iint\limits_R\frac{|\psi(x_0+t,y_0+s)|}{|t|^p|s|^p}\chi_1^{p-1}(x_0+t)\chi_2^{p-1}(y_0+s)\,dt\,ds\Big\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{4}J_4^{4,4;i}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\,. \qquad (2.I.I5I)$$

Теперь оценивая $J_4^{4,4;1}$ таким же путем, что было проделано при получении соотношения (2;I.I42), найдем

$$J_4^{4,4;1}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p m^p\delta_1^{1-p}\delta_2^{1-p}. \qquad (2;I.I52)$$

Нетрудно видеть также, что повторяя рассуждение проведенное в (2;I.I47), получим

$$J_4^{4,4;2}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p m^{p-1}\delta_1^{1-p}\delta_2^{1-p}\psi_2(x_0,y_0)\,, \qquad (2;I.I53)$$

$$J_4^{4,4;3}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p m^{p-1}\delta_1^{1-p}\delta_2^{1-p}\psi_1(x_0,y_0)\,. \qquad (2;I.I54)$$

Пусть теперь

$$\psi_3(x_0,y_0)=\iint\limits_R\frac{|\psi(t,s)|\chi_1^{p-1}(t)\chi_2^{p-1}(s)}{|x_0-t|^p|y_0-s|^p}\,dt\,ds<\infty \qquad (2;I.I55)$$

Тогда из (2;I.I5I) - (2;I.I55) , будем иметь

$$J_4^{4,4}(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)\le C_p\delta_1^{1-p}\delta_2^{1-p}m^{p-1}\big[m+\psi_1(x_0,y_0)+\psi_2(x_0,y_0)+\psi_3(x_0,y_0)\big]. \qquad (2;I.I56)$$

Из соотношений (2;I.II6), (2;I.I2I),(2; I.I33),(2;I.I34), (2;I.I36),(2;I.I4I),(2;I.I49),(2;I.I50)и(2;I.I56),находим

$$\frac{J_4(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)}{\delta_1^{1-p}\,\delta_2^{1-p}} \le C_p\left[m^p+m^{p-1}\psi_1(x_0,y_0)+m^{p-1}\psi_2(x_0,y_0)+m^{p-1}\psi_3(x_0,y_0)\right].$$

Отсюда и из соотношений (2;I.II5) - (2;I.II5) в силу (I;I.I6) получим

$$\left[\frac{J_1(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)}{\delta_1^{1-2p}\,\delta_2^{1-2p}}\right]^{\frac{1}{2p}} \le C_p\Big[m^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi_1^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)+ \qquad (2;I.I57)$$

$$+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi_2^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi_3^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)\Big],$$

$$\left[\frac{J_2(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)}{\delta_1^{1-2p}\,\delta_2^{1-p}}\right] \le C_p\Big[m^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)+ \qquad (2;I.I58)$$

$$+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi_2^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi_3(x_0,y_0)\Big],$$

$$\left[\frac{J_3(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)}{\delta_1^{1-p}\,\delta_2^{1-2p}}\right] \le C_p\Big[m^{\frac{1}{2}}+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)+$$

$$+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)+m^{\frac{p-1}{2p}}\psi_3(x_0,y_0)\Big].$$

(2;I.I59)

Теперь в силу (2;I.99), (I;I.I6) и теоремы Б.Иессена, И.Марцинкевича и А.Зигмунда (см. [I8], также [4], стр. 459), будем иметь

$$\iint_{B_m} m^{\frac{1}{2}}\,dx_0dy_0 \le \iint_{B_m}\left[M(x_0,y_0)+1\right]^{\frac{1}{2}}dx_0dy_0 \le 4\pi^2+$$

$$+\iint_R\left[M(x_0,y_0)\right]^{\frac{1}{2}}dx_0dy_0 \le A+A\left[\iint_R|\Psi(x_0,y_0)|\ln^+|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2;I.I60)$$

где A абсолютная положительная константа.

Далее используя неравенство Гёльдера (2;I.99),(I;I.I6), (2;I.I3I) известную теорему Харди- Литтльвуда (см. например, [I4], стр. 58) и теорему Марцинкевича (см., например, [I4], стр. 2I0), находим

$$\iint\limits_{B_m} m^{\frac{p-1}{2p}} \Psi_1^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)\,dx_0dy_0 \le \left[\iint\limits_{B_m} m^{\frac{p-1}{p}}\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[\iint\limits_{E_m} \Psi_1^{\frac{1}{p}}(x_0,y_0)\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2}} \le \left\{C_p + C_p\left[\iint\limits_R |\Psi(x_0,y_0)|\ln^+|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{p-1}{2p}}\right\}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{E_m^{(y)}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_1^{\frac{1}{p}}(x_0,y_0)\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2}} \le \left\{C_p + C_p\left[\iint\limits_R |\Psi(x_0,y_0)|\ln^+|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{p-1}{2p}}\right\}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{E_m^{(y)}}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\Psi(x_0,s)|\chi_2^{p-1}(s)}{|y_0-s|^p}\,ds\,dx_0\right]^{\frac{1}{p}}dy_0\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left\{C_p + C_p\left[\iint\limits_R |\Psi(x_0,y_0)|\ln^+|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{p-1}{2p}}\right\}\times$$

$$\times\left[\iint\limits_R |\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2p}}, \qquad (2;I.I6I)$$

где $E_m^{(y)}$ -проекция множества E_m на оси y .

Совершенно аналогично можно получить, что

$$\iint\limits_{B_m} m^{\frac{p-1}{2}} \Psi_2^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)\,dx_0dy_0 \le \left[\iint\limits_R |\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2p}} \times$$

$$\times\left\{C_p + C_p\left[\iint\limits_R |\Psi(x_0,y_0)|\ln^+|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{p-1}{2p}}\right\} \qquad (2;I.I62)$$

Затем, в силу (2;I.99),(I;I.I6), (2;I.I55), неравенства Гёльдера и леммы 6 (см. (2;I.42) и (2;I.43)) , будем иметь

$$\iint\limits_{B_m} m^{\frac{p-1}{2p}} \Psi_3^{\frac{1}{2p}}(x_0,y_0)\,dx_0dy_0 \le \left[\iint\limits_{B_m} m^{\frac{p-1}{2p-1}}\,dx_0dy_0\right]^{\frac{2p-1}{2p}} \times$$

$$\times\left[\iint\limits_{E_m} \Psi_3(x_0,y_0)\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2p}} \le \left[\iint\limits_{R} |\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right]^{\frac{1}{2p}} \times$$

$$\times\left[C_p + C_p\left(\iint\limits_{R} |\Psi(x_0,y_0)|\,\ln^+|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0\right)^{\frac{p-1}{2p}}\right]. \qquad (2;I.I63)$$

Пусть теперь

$$K(\Psi,R)=\max\begin{cases}\iint\limits_{R}|\Psi(x_0,y_0)|\,\ln^+|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0,\\ \iint\limits_{R}|\Psi(x_0,y_0)|\,dx_0dy_0.\end{cases} \qquad (2;I.I64)$$

Тогда, из соотношений (2;I.I57)- (2;I.I59) в силу (2;I.I60) - (2;I.I64) ,находим

$$\iint\limits_{B_m} \sup_{\substack{\delta_1\le 1\\ \delta_2\le 1}} \left[\frac{J_1(z_1,z_2,x_0,y_0)}{\delta_1^{1-2p}\,\delta_2^{1-2p}}\right]^{\frac{1}{2p}} dx_0dy_0 \le$$

$$\le C_p\left[K^{\frac{1}{2}}(\Psi,R)+K(\Psi,R)+K^{\frac{1}{2p}}(\Psi,R)+C_p\right], \qquad (2;I.I65)$$

$$\iint\limits_{B_m} \sup_{\substack{\delta_1\le 1\\ \delta_2\le 1}} \left[\frac{J_2(z_1,z_2,x_0,y_0)}{\delta_1^{1-2p}\,\delta_2^{1-p}}\right] dx_0dy_0 \le$$

$$\le C_p\left[K^{\frac{1}{2}}(\Psi,R)+K(\Psi,R)+K^{\frac{1}{2p}}(\Psi,R)+C_p\right], \qquad (2;I.I66)$$

$$\iint\limits_{B_m} \sup_{\substack{\delta_1\le 1\\ \delta_2\le 1}} \left[\frac{J_3(\tau_1,\tau_2,x_0,y_0)}{\delta_1^{1-p}\,\delta_2^{1-2p}}\right]^{\frac{1}{2p}} dx_0\,dy_0 \le$$

$$\le C_p\left[K(\Psi,R)+K^{\frac{1}{2}}(\Psi,R)+K^{\frac{1}{2p}}(\Psi,R)+C_p\right]. \qquad (2;I.167)$$

Теперь из соотношений (2;I.165)- (2;I.167) хорошо известным рассуждением А.Зигмунда (см. [4],стр. 464) получаем справедливость соотношений (2;I.107)- (2;I.109).

Лемма доказана.

Совершенно аналогично доказывается

Лемма I3. Пусть $f(x,y)\in L\ln^+L$, $\bar f_j(x,y)\in L\ln^+L$ $(j=1,3)$ и

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x,s)\,ds=0$, почти для всех $x\in[-\pi,\pi]$,

$\int_{-\pi}^{\pi} f(t,y)\,dt=0$, почти для всех $y\in[-\pi,\pi]$.

Тогда для любого $\tau>0$ почти всюду на R

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left|\bar f_1(x,y)-\bar f_2(x,y)-S_{ik}^{(1)}(x,y,f)+S_{ik}^{(2)}(x,y,f)\right|^{\tau}=0, \quad (2;I.168)$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left|f(x,y)+\bar f_3(x,y)-S_{ik}^{(3)}(x,y,f)-S_{ik}(x,y,f)\right|^{\tau}=0. \qquad (2;I.169)$$

Теперь можно доказать, что справедлива следующая

<u>Теорема 6.</u> Если $f(x,y)\in L\ln^{+}L$, $\bar{f}_j(x,y)\in L\ln^{+}L$ $j=1,2)$, то для любого $\tau>0$, почти для всех $(x,y)\in R$

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left|S_{ik}(x,y,f)-f(x,y)\right|^{2}=0, \qquad (2;I.I70)$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left|S_{ik}^{(j)}(x,y,f)-\bar{f}_j(x,y)\right|^{2}=0 \quad (j=1,2,3). \qquad (2;I.I7I)$$

<u>Доказательство</u>. Используя (I;I.I5) и (I;I.I6) согласно леммам I2 и I3 нетрудно убедиться в справедливости теоремы при условии (2;I.76), (2;I.77). Теперь покажем, что соотношения (2;I.76) и (2;I.77) не ограничивают общности. Действительно, рассмотрим функцию

$$N(x,y)=f(x,y)-\frac{1}{2\pi}\int f(x,y)\,dx-\frac{1}{2\pi}\int f(x,y)\,dy+\frac{1}{4\pi^{2}}\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (2;I.I72)$$

Ясно, что для функции $N(x,y)$ выполнены (2;I.76) и (2;I.77). Затем, используя неравенство Иенсена (см.напр.[I], стр.899) согласно условия теоремы получаем, что $N(x,y)\in L\ln^{+}L$.

Далее, в силу (2;I.I72)

$$\bar{N}_1(x,y)=\bar{f}_1(x,y)+\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\varepsilon}^{\pi}\left\{\frac{1}{4\pi^{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+t,y)-f(x-t,y)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dy\right\}dx=$$

$$=\bar{f}_1(x,y)-\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x+t,y)-f(x-t,y)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\,dt\right\}dt=$$

$$=\bar{f}_1(x,y)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}_1(x,y)\,dy, \qquad (2;I.I73)$$

ибо, в силу известного утверждения (см. [I4], стр. 442), в условиях теоремы , выражение, стоящее в фигурных скобках мажорируется суммируемой функцией и стало быть, применима теорема Лебега (см. например [I], стр. 40) о предельном переходе под знаком интеграла. Тогда применяя выше отмеченное неравенство Иенсена из (2; I.173) вытекает $\tilde{\mathcal{N}}_1(x,y)\in L\ln^+L$. Ясно, что и $\tilde{\mathcal{N}}_2(x,y)\in L\ln^+L$. Значит, для функции $\mathcal{N}(x,y)$ /согласно уже доказанного/ теорема справедлива. С другой стороны, в силу (2;I.172)

$$f(x,y)=\mathcal{N}(x,y)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)\,dy-\frac{1}{4\pi^2}\iint_{R}f(x,y)\,dx\,dy=\mathcal{N}(x,y)+F_1(y)+F_2(x).$$

Но для функций $F_1(y)$ и $F_2(x)$ утверждения теоремы справедливы (см. [4], стр. 275). Теперь согласно линейности метода суммирования (H,τ) , $\tau>0$ получаем доказательство теоремы.

§ 2. Сходимость и суммируемость двойных сопряженных тригонометрических рядов.

В дальнейшем нам понадобится следующее

Определение. Говорят, что ряд (I;I.5) суммируется в точке $(x_0,y_0)\in R$ к $f(x_0,y_0)$ методом A^*, если

$$\lim_{\substack{re^{ix}\xrightarrow{\wedge} e^{ix_0}\\ re^{iy}\xrightarrow{\wedge} e^{iy_0}}}\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}A_{\mu\nu}(x,y)\,r_1^{\mu}r_2^{\nu}=f(x_0,y_0),$$

где символ $re^{ix}\xrightarrow{\wedge} e^{ix_0}$ означает некасательное стремление точки re^{ix} к точке e^{ix_0} .

Справедлива следующая

Теорема 7. Пусть $f(x,y)\in L(R)$. Если $\bar f_j(x,y)\in L(R)$, где $j=1$ или $j=2$, то ряды (I;I.5)-(I;I.8) суммируемы почти для всех $(x,y)\in R$ методом A^*.

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что что $j=1$. Используя (I;I.6) и теорему В.И.Смирнова (см. например [I], стр. 583), получаем

$$G(\bar f_1)=\bar G(f,x)$$

Стало быть,

$$A(r_1,r_2,x,y)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}A_{\mu\nu}(x,y)r_1^{\mu}r_2^{\nu}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds, \qquad (2;2.I)$$

$$B(r_1,r_2,x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}B_{\mu\nu}(x,y)r_1^{\mu}r_2^{\nu}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iint_R \bar f_1(t,s)P(r_1,x-t)P(r_2,y-s)\,dt\,ds,\quad 0\le r_1,r_2<1. \qquad (2;2.2)$$

Рассмотрим теперь следующие выражения:

$$C(r_1,r_2,x,y)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}C_{\mu\nu}(x,y)r_1^{\mu}r_2^{\nu}, \qquad (2;2.3)$$

$$D(r_1,r_2,x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}D_{\mu\nu}(x,y)r_1^{\mu}r_2^{\nu}. \qquad (2;2.4)$$

Ясно, что $C(r_1,r_2,x,y)$ и $D(r_1,r_2,x,y)$ являются сопряженными функциями по переменному y соответственно для функции $A(r_1,r_2,x,y)$ и $B(r_1,r_2,x,y)$. Поэтому используя теорему А.Н.Колмогорова (см.например [I] ,стр. 580), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} |C(r_1,r_2,x,y)|^p dy \leq C_p \left[\int_{-\pi}^{\pi} |A(r_1,r_2,x,y)|\, dy \right]^p,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D(r_1,r_2,x,y)|^p dy \leq C_p \left[\int_{-\pi}^{\pi} |B(r_1,r_2,x,y)|\, dy \right]^p, \quad 0<p<1.$$

Отсюда в силу (2;2.I) и (2; 2.2) находим

$$\iint_R |C(r_1,r_2,x,y)|^p dx\,dy \leq C_p \left[\iint_R |A(r_1,r_2,x,y)|\, dx\,dy \right]^p \leq$$

$$\leq C_p \left[\iint_R |f(x,y)|\, dx\,dy \right]^p, \qquad (2;2.5)$$

$$\iint_R |D(r_1,r_2,x,y)|^p dx\,dy \leq C_p \left[\iint_R |B(r_1,r_2,x,y)|\, dx\,dy \right]^p \leq$$

$$\leq C_p \left[\iint_R |\bar{f}_1(x,y)|\, dx\,dy \right]^p. \qquad (2;2.6)$$

Затем принимая во внимание (2;2.I),(2;2.2) и используя неравенство Гёльдера , получаем

$$\iint_R |A(\tau_1,\tau_2,x,y)|^p\,dxdy \le C_p\Big[\iint_R |f(x,y)|\,dxdy\Big]^p, \qquad (2;2.7)$$

$$\iint_R |B(\tau_1,\tau_2,x,y)|\,dxdy \le C_p\Big[\iint_R |\bar f_1(x,y)|\,dxdy\Big]^p. \qquad (2;2.8)$$

Теперь нетрудно проверить, что

$$F_1(z_1,z_2)=\sum_{\mu=0}\sum_{\nu=0}\Big\{\big[A_{\mu\nu}(x,y)-D_{\mu\nu}(x,y)\big]+i\big[B_{\mu\nu}(x,y)+C_{\mu\nu}(x,y)\big]\Big\}\tau_1^{\mu}\tau_2^{\nu}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\big[P(\tau_1,x-t)+iQ(\tau_1,x-t)\big]\big[P(\tau_2,y-s)+iQ(\tau_2,y-s)\big]\,dtds, \qquad (2;2.9)$$

$$F_2(z_1,\bar z_2)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big\{\big[A_{\mu\nu}(x,y)+D_{\mu\nu}(x,y)\big]+i\big[B_{\mu\nu}(x,y)-C_{\mu\nu}(x,y)\big]\Big\}\tau_1^{\mu}\tau_2^{\nu}=$$

$$\frac{1}{\pi^2}\iint_R f(t,s)\big[P(\tau_1,x-t)+iQ(\tau_1,x-t)\big]\big[P(\tau_2,y-s)-iQ(\tau_2,y-s)\big]\,dtds, \qquad (2;2.10)$$

вляются регулярными функциями в единичном бицилиндре тносительно своих аргументов. (Согласно (I;I.5) -(I;I.8) предполагается, что $B_{0\nu}(x,y)=0$ при $\nu\ge0$, $C_{\mu,0}(x,y)=0$ ри $\mu\ge0$ и $D_{\mu\nu}(x,y)=0$, если $\mu=0,\nu\ge0$ или $\nu=0,\mu\ge0$.)

спользуя (2;2.9), (2;2.10) и (2;I.I6) согласно условия еоремы будем иметь .

$$\iint_R |F_1(z_1,z_2)|^p\,dx\,dy \le C_p\left\{\left[\iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy\right]^p + \left[\iint_R |\bar f_1(x,y)|\,dx\,dy\right]^p\right\} < \infty,$$

$$\iint_R |F_2(z_1,\bar z_2)|^p\,dx\,dy \le C_p\left\{\left[\iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy\right]^p + \left[\iint_R |\bar f_1(x,y)|\,dx\,dy\right]^p\right\} < \infty.$$

Из этих соотношений в силу теоремы А.Кальдерона и А.Зигмунда (см. [4], стр. 476) следует, что почти для всех $(x_0,y_0)\in R$ существуют следующие пределы

$$\lim_{\substack{r_1 e^{ix} \xrightarrow{\Lambda} e^{ix_0} \\ r_2 e^{iy} \xrightarrow{\Lambda} e^{iy_0}}} \left[A(r_1,r_2,x,y) - D(r_1,r_2,x,y)\right],$$

$$\lim_{\substack{r_1 e^{ix} \xrightarrow{\Lambda} e^{ix_0} \\ r_2 e^{iy} \xrightarrow{\Lambda} e^{iy_0}}} \left[B(r_1,r_2,x,y) + C(r_1,r_2,x,y)\right],$$

$$\lim_{\substack{r_1 e^{ix} \xrightarrow{\Lambda} e^{ix_0} \\ r_2 e^{iy} \xrightarrow{\Lambda} e^{iy_0}}} \left[A(r_1,r_2,x,y) + D(r_1,r_2,x,y)\right],$$

$$\lim_{\substack{r_1 e^{ix} \xrightarrow{\Lambda} e^{ix_0} \\ r_2 e^{iy} \xrightarrow{\Lambda} e^{iy_0}}} \left[B(r_1,r_2,x,y) - C(r_1,r_2,x,y)\right].$$

Отсюда легко получается справедливость теоремы.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение А.Зигмунда [29].

Если $f(x,y)\in L\ln^{+}L$, то ряды (I;I.5) - (I;I.8) почти всюду суммируемы методом A^{*}.

В самом деле, из условия $f(x,y)\in L\ln^{+}L$ вытекает, что $\bar{f}_j(x,y)\in L(R)$ $(j=1,2)$, т.е. выполнены условия теоремы 7.

Однако, как показал Л.В. Жижиашвили [27], существует $f(x,y)\geq 0$, $f(x,y)\in L(R)$, $\bar{f}_1(x,y)\in L(R)$, но $f(x,y)\,\bar{\in}\, L\ln^{+}L$.

Подобным путём доказывается следующая

<u>Теорема 8</u>. Пусть ряд (I;I.5) является рядом Фурье. Если любой один из рядов (I;I.6) - (I;I.8) есть ряд Фурье то все ряды (I;I.5) - (I;I.8) почти всюду на R суммируются методом A^{*}.

Теперь рассмотрим вопрос равномерной (C,α,β), $\alpha,\beta>-1$ суммируемости рядов (I;I.5) - (I;I.8). Справедлива следующая

<u>Теорема 9.</u> Пусть $f(x,y)$ и $\bar{f}_j(x,y)\in C(R)$ $(j=1,2,3)$.

а) Если ряды (I;I.5) и (I;I.8) равномерно (C,α,β), $\alpha,\beta>-1$ суммируемы на R, то и ряды (I;I.6), (I;I.7) равномерно (C,α,β) суммируемы.

в) Если ряды (I;I.6) и (I;I.7) равномерно (C,α,β), $\alpha,\beta>-1$ суммируемы на R, то и ряды (I;I.5) и (I;I.8) равномерно (C,α,β) суммируемы.

с) Равномерная (C,α,β), $\alpha,\beta>-1$ суммируемость на R любых двух рядов из (I;I.5) - (I; I.8), вообще говоря, не обеспечивает равномерную суммируемость двух остальных рядов.

Доказательство. В силу неравенства С.И.Бернштейна (см. например, [I] стр. 47)

$$\frac{1}{m}\left\|\frac{\partial}{\partial x} A_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\|_C \le \left\|A_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\|_C \qquad (2;2.II)$$

Согласно условию теоремы и пункта а) для сколь-угодно малого $\varepsilon>0$ существует такое $N_1(\varepsilon)$,что

$$\left\|A_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)-A_{N_1(\varepsilon)N_1(\varepsilon)}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\|_C<\varepsilon \quad \text{при } m,n>N_1(\varepsilon); \qquad (2;2.I2)$$

ясно,что

$$\frac{1}{m}\left\|\frac{\partial}{\partial x} A_{N_1(\varepsilon)N_1(\varepsilon)}^{(\alpha,\beta)}(x,y)\right\|_C<\varepsilon \quad \text{при } m>N_2(\varepsilon) \qquad (2;2.I3)$$

Тогда используя (2;2.I2) и (2; 2.I3) из (2;2.II) находим

$$\frac{1}{m}\left\|\frac{\partial}{\partial x} A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C \le \left\| A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y) - A^{(\alpha,\beta)}_{N_1(\varepsilon)N_1(\varepsilon)}(x,y)\right\|_C +$$

$$+\frac{1}{m}\left\|\frac{\partial}{\partial x} A^{(\alpha,\beta)}_{N_1(\varepsilon)N_1(\varepsilon)}(x,y)\right\|_C < 2\varepsilon, \text{ при } \quad m,n > \max[N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)],$$

т.е.

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{m+1}\left\|\frac{\partial}{\partial x} A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C =$$

$$= \lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} i B_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\,\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}\right\|_C = 0, \qquad (2;I.I4)$$

Аналогично, опираясь на неравенства

$$\frac{1}{n}\left\|\frac{\partial}{\partial y} A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C \le \left\| A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C, \qquad (2;I.I5)$$

$$\frac{1}{m}\left\|\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C \le \left\| \mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C, \qquad (2;I.I6)$$

$$\frac{1}{n}\left\|\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C \le \left\| \mathcal{D}^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C, \qquad (2;I.I7)$$

будем иметь

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} k C_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\,\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}\right\|_C = 0, \qquad (2;I.I8)$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k B_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}\right\|_C=0, \tag{2;I.I9}$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} i C_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}\right\|_C=0. \tag{2;I.20}$$

Затем так как (см. [4], стр. 2I)

$$\frac{1}{m}\left\|\frac{\partial}{\partial x}B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C\le\left\|A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C, \tag{2;I.2I}$$

$$\frac{1}{n}\left\|\frac{\partial}{\partial y}C^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C\le\left\|A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C, \tag{2;I.22}$$

о используя вышеотмеченное неравенство Бернштейна, получим

$$\frac{1}{mn}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C\le\left\|A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C, \tag{2;I.23}$$

$$\frac{1}{mn}\left\|\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}C^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C\le\left\|A^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)\right\|_C. \tag{2;I.24}$$

Опираясь на соотношения (2;I.23) и (2;I.24) таким же путем, как было получено (2;I.I4), находим

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} ik\, C_{ik}\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}\right\|_C=0, \tag{2;I.25}$$

$$\lim_{\to\infty}\left\|\frac{1}{(m+1)(n+1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} ik B_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}\right\|_{C}=0 \qquad (2;I.26)$$

алее, нетрудно проверить, что

$$B^{(\alpha+1,\beta+1)}_{mn}(x,y)-B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} B_{ik}(x,y)\left\{\frac{A^{\alpha+1}_{m-i}}{A^{\alpha+1}_{m}}\frac{A^{\beta+1}_{n-k}}{A^{\beta+1}_{n}}-\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{1+\alpha+m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} i B_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}-$$

$$-\frac{1}{1+\alpha+n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} k B_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}+$$

$$+\frac{1}{(1+\alpha+m)(1+\beta+n)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} ik B_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}},$$

(2;I.27)

$$C^{(\alpha+1,\beta+1)}_{mn}(x,y)-B^{(\alpha,\beta)}_{mn}(x,y)=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} C_{ik}(x,y)\left\{\frac{A^{\alpha+1}_{m-i}A^{\beta+1}_{n-k}}{A^{\alpha+1}_{m}A^{\beta+1}_{n}}-\frac{A^{\alpha}_{m-i}A^{\beta}_{n-k}}{A^{\alpha}_{m}A^{\beta}_{n}}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{1+\alpha+m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} i\,C_{ik}(x,y)\frac{A^{\alpha}_{m-i}}{A^{\alpha}_{m}}\frac{A^{\beta}_{n-k}}{A^{\beta}_{n}}-$$

$$-\frac{1}{1+\alpha+n}\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} k C_{ik}(x,y)\frac{A_{m-i}^{\alpha}}{A_m^{\alpha}}\frac{A_{n-k}^{\beta}}{A_n^{\beta}}+$$

$$+\frac{1}{(1+\alpha+m)(1+\beta+n)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} ik C_{ik}(x,y)\frac{A_{m-i}^{\alpha}}{A_m^{\alpha}}\frac{A_{n-k}^{\beta}}{A_n^{\beta}}. \qquad (2;I.28)$$

Теперь учитывая, что в условиях теоремы (см. [22], стр. I36)

$$\lim_{m,n\to\infty}\|B_{mn}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,y)-\bar{f}_1(x,y)\|_c=0,$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\|C_{mn}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,y)-\bar{f}_2(x,y)\|_c=0;$$

но в силу (2;I.I4), (2;I.I8)- (2;I.20), (2;I.25) , (2;I.26) из (2;I.27) и (2;I.28), получаем

$$\lim_{m,n\to\infty}\|B_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)-\bar{f}_1(x,y)\|_c=0,$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\|C_{mn}^{(\alpha,\beta)}(x,y)-\bar{f}_2(x,y)\|_c=0,$$

что и показывает справедливость пункта а).

Совершенно аналогично доказывается пункт в)

Справедливость пункта с) легко проверить на следующем примере:

Пусть

$$f_0(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) \ ,$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ выбраны так, что

1) $\varphi(x), \bar{\varphi}(x) \in C[-\pi,\pi]$,

2) $\psi(y), \bar{\psi}(y) \in C[-\pi,\pi]$,

3) $\sigma(\psi)$ равномерно (C,α), $\alpha > -1$ суммируема,

4) $\bar{\sigma}(\psi)$ равномерно не суммируема для $-1 < \alpha \le 0$.

Ясно, что условия теоремы выполнены и ряды (для функции $f_0(x,y)$) (I;I.6), (I;I.8) равномерно (C,α,β), $\alpha,\beta > -1$ суммируемы, а ряды (I;I.5) и (I; I.7) не суммируются равномерно методом (C,α,β) $\alpha,\beta > -1$.

Теорема полностью доказана.

Заметим, что теорема 9 справедлива и в смысле метрики $L(R)$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Бари Н.К., Тригонометрические ряды, Физматгиз, Москва, 1961.

Leindler L., Über die Approximation im starken Sinne, ACTA Math. Scien. Hungaricae, т. XVI (1965) 255-262.

Тимэн А.Ф., Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, Москва, 1960.

Зигмунд А., Тригонометрические ряды, Издательство "Мир", т. II, Москва, 1965.

Чилидзе В.Г., Некоторые вопросы теории двойных рядов, Издание Уханьского университета (Китай), 1958.

Turan P., On the summability of Fourier series, J. Ind. Math. Soc., (N5), 12 (1948), 8-12.

Kralik D., Über ein Problem der starken Summierbarkeit von Fourierreihen, ACTA Math. Scien. Hungaricae, т. XVII (1966), 303-312.

Leindler L., On a problem of strong summability of Fourier series, ACTA Math. Scien. Hungaricae, т. XIX (1968), 87-94.

Ульянов П.Л., Особые интегралы и ряды Фурье, Вестник МГУ, № 5 (1959), 33-42.

I0. Шмуклер А.И. ,Особые интегралы и сходимость рядов Фурье ,Математический сборник ,т. 56(98): 2 (I962), 87-280.

II. Leindler L., Bemerkungen zur Approximation in starken Sinne, ACTA Math. Scien. Hungaricae, т. XVIII (I967), 273-277.

I2. Стечкин С.Б., О приближении периодических функций суммами Фейера, Труды мат.ин-та имени В.А.Стеклова, ХП (I96I), 48-60.

I3. Бари Н.К. ,О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций, ИАН, I9(I955),285-303.

I4. Зигмунд В., Тригонометрические ряды,Издательство "Мир",т.I,Москва,I965.

I5. Hsü H.T. , The strong summability of double Fourier series, American Math. Soc.,vol.5I (I945), 700-7I4.

I6. Robinson G.M., Divergent double sequences and series, Transactions of the American Math.Soc. vol.28 (I926),

I7. Челидзе В.Г., О преобразовании двойных последовательностей,Труды Тбилисского мат.ин-та имени А.М. Размадзе ,ХУП (I949) ,6I-94.

I8. Jessen B., Marcinkiewicz J., Zygmund A., Note on the differentiability of multiple integrals F.M. vol. 25 (I935), 2I7-234.

I9. Топурия С.Б., О суммировании двойных рядов и интегралов ,Труды ГПИ, № 3 (1968), 12-37

20. Hardy G.H., Littlewood J.E., On the strong summability of Fourier series, F.M.,25 (1935), 162-189.

21. Жижиашвили Л.В., Сопряженные функции и тригонометрические ряды ,Издательство ТГУ,1969.

22. Жижиашвили Л.В. ,Некоторые вопросы теории рядов Фурье и сопряженных к ним тригонометрических рядов, Издательство ТГУ,1965.

23. Курашвили М.М., Некоторые вопросы суммируемости двойних рядов ,Диссертация ,ТГУ ,1966.

24. Маркушевич,А.И., Теория аналитических функций, Гостехиздат,Москва,1950.

25. Челидзе В.Г.,Суммирование двойных рядов, Труды Тбилисского мат.ин-та имени А.М.Размадзе,ХУI (1948),I-37.

26. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.,Неравенства, ИЛ, Москва,1948.

27. Жижиашвили Л.В. ,Обобщение одной теоремы М.Рисса на случай функций многих переменных, Математические заметки,т.4 (1968),269-279 .

28. Kinukawa M., On the Convergence Character of Fourier Series, Proc. Japan Acad., vol.XXXI, N7 (1955), 513-516.

29. Zygmund A., On the boundary values of functions of several complex variables, F.M., vol.36, (1949), 207-235.

ОГЛАВЛЕНИЕ