ТБИЛИССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Бицадзе Мурад Георгиевич

О СХОДИМОСТИ И СУММИРУЕМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

01.01.01 – математический анализ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель – член-корреспондент Академии наук Груз. ССР, профессор Л.В.ЖИЖИАШВИЛИ

Тбилиси – 1980

Стр.

ВВЕДЕНИЕ

Теория простых общих тригонометрических рядов и тригонометрических рядов Фурье в настоящее время представляет весьма обширную и бурно развивающуюся область математической науки. Простые тригонометрические ряды играют важную роль в теории функции и в других математических науках, поэтому неслучайно, что многие важные вопросы, связанные с простыми тригонометрическими рядами, достаточно хорошо изучены. В частности, много сделано относительно простых тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами (см., напр., [1] , стр. 649-679 и [6] , стр. 292-339). Что касается кратных общих тригонометрических рядов и кратных рядов Фурье, то в этом направлении сравнительно мало сделано. Насколько нам известно, такие вопросы, как сходимость и суммируемость методом Чезаро отрицательного порядка почти всюду или в метрике L^p $(0<p\le 1)$ почти не исследовано даже простых тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами.

Диссертационная работа посвящается вопросам сходимости и суммируемости простых и кратных тригонометрических рядов, рядов Уолша-Пэли с монотонными коэффициентами в смысле сходимости в L^p $(0<p\le 1)$ и почти всюду. Исследован, также, вопрос о суммируемости в L^p $(1\le p\le 2)$ кратных общих ортогональных рядов. Заметим, что сходимость для кратных рядов понимается в смысле Прингсхейма.

Диссертационная работа состоит из введения и трех глав.

Во введении приводятся характерные утверждения диссертационной работы и обсуждаются известные результаты, полученные по тематике диссертации.

Первая глава касается вопроса сходимости в $L^p (0<p\leq 1)$ кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. Она состоит из трех параграфов. В первом параграфе приводятся некоторые определения и обозначения, которые используются в дальнейшем. Во втором параграфе исследуется вопрос о сходимости почти всюду и в $L^p (0<p<1)$ кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, в частности, на основе некоторых вспомогательных лемм доказывается

Теорема I.2.I. Пусть последовательность $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1.\ \lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{\vec{p}} = 0$$

$$2.\ \sum_{\vec{p}\geq\vec{0}} \left|\Delta(a_{\vec{p}}, M)\right| < +\infty .$$

Тогда для любого $B\subset M$ ряд (I.I.2) сходится в смысле Прингсхейма почти всюду на R_n, кроме того, для любого $p\in(0,1)$ (I.I.2) сходится в L^p к некоторой функции f_B, т.е. имеет место следующее соотношение

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{R_n} \left| f_B(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x}, B)\right|^p d\vec{x} = 0 .$$

Эта теорема является многомерным аналогом соответствующей теоремы П.Л.Ульянова [5]. В третьем параграфе этой же главы рассматривается вопрос о сходимости в метрике L кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами, в частности, для многомерного случая обобщаются соответствующие утверждения А.Н.Колмогорова [10] и У.Юнга [11]. Приведем характерный результат.

<u>Теорема I.3.2</u>. Если $(a_{\vec{p}})_{\vec{p} \geq \vec{0}}$ выпуклая последовательность и

$$\lim_{\|\vec{p}\| \to \infty} a_{\vec{p}} \prod_{i=1}^{n} \log(p_i+2) = 0,$$

то ряд (I.I.2) с $B=M$ сходится в смысле Прингсхейма почти всюду на R_n к неотрицательной функции $f_M \in L(R_n)$ и

$$\lim_{\vec{m} \to \infty} \int_{R_n} \left| f_M(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x}, M) \right| d\vec{x} = 0.$$

Вторая глава посвящается вопросу суммируемости в $L^p (0<p\leq 1)$ методом Чезаро простых и кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. Вторая глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе изучается вопрос суммируемости методом Чезаро отрицательного порядка простых и кратных тригонометрических рядов. Установлено, что справедлива

<u>Теорема 2.I.I</u>. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p} \geq \vec{0}}$ убывающая последовательность в смысле Харди, $a_{\vec{p}} \to 0$ при $\|\vec{p}\| \to \infty$ и $\alpha_i \in (-1, 0)$ $(i = \overline{1,n})$.

Для того, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{\vec{m} \to \infty} \int_{R_n} \left| f_B(\vec{x}) - \sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x}, B) \right|^p d\vec{x} = 0, \quad B \subset M,$$

для любого $p \in (0,1)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{\|\vec{m}\|\to\infty} a_{\vec{m}} \prod_{i=1}^{n} m_i^{-\alpha_i} = 0.$$

Во втором параграфе рассматривается вопрос о суммируемости в L методом Чезаро простых и кратных тригонометрических рядов, в частности, справедлива

Теорема 2.2.I. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ выпуклая последовательность и $a_{\vec{p}}\to 0$ при $\|\vec{p}\|\to\infty$.

Для того, чтобы ряд (I.I.2) при $B=M$ был суммируемым методом Чезаро в метрике $L(R_n)$ необходимо и достаточно соблюдение соотношения (2.I.2).

Справедлива и такая

Теорема 2.2.3. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ выпуклая последовательность и $a_{\vec{p}}\to 0$ при $\|\vec{p}\|\to\infty$.

Для того, чтобы все ряды (I.I.2) с $B\subset M\ (B\neq M, B\neq\emptyset)$ были суммируемыми методом Чезаро в метрике $L(R_n)$ к сусммируемым функциям, т.е.

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}\int_{R_n}\left|\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right|d\vec{x}=0,$$

необходимо и достаточно соблюдение условия (2.I.2).

В третьем параграфе этой же главы даются по порядку неулучшаемые оценки ядра Чезаро отрицательного порядка.

В третьей главе, в основном, изучается вопрос о суммируемости в метрике $L^p(0<p\leq 1)$ методом Чезаро отрицательного порядка простых и кратных рядов Уолша-Пэли и общих ортогональных рядов.

В первом параграфе для рядов Уолша-Пэли с монотонными коэффициентами установлены аналоги тех результатов, которые были получены в первой и второй главах этой работы. Приведем характерный результат.

Теорема 3.I.3. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ убывающая последовательность в смысле Харди, $a_{\vec{p}} \to 0$ при $\|\vec{p}\| \to \infty$ и $\alpha_i \in (-1,0)$ $(i=\overline{1,n})$.

Для того, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{U_n} \left| f(\vec{x}) - \sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x}) \right|^p d\vec{x} = 0$$

для любого $p \in (0,1)$, необходимо и достаточно выполнение условия (2.I.2).

Во втором параграфе этой же главы рассматривается вопрос о суммируемости методом Чезаро отрицательного порядка в пространстве L простых и кратных общих ортогональных рядов. В частности, показано, что справедлива

Теорема 3.2.I. Пусть

$$\sum_{\vec{k}\geq\vec{0}} a_{\vec{k}}^2 \prod_{i=1}^{n} k_i^{2\alpha_i} < +\infty, \; -1 < \alpha_i < 0 \quad (i=\overline{1,n})$$

и

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{i}\geq\vec{0}} a_{\vec{i}} \varphi_{\vec{i}}(\vec{x}).$$

Тогда

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{U_n} \left| \sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x}) - f(\vec{x}) \right| d\vec{x} = 0.$$

Отметим, как было уже отмечено, поведение кратных тригонометрических рядов (в том аспекте, в каком было рассмотрено в настоящей работе) до сих пор не было изучено. Поэтому, нам пришлось ввести многие новые определения (в том числе и кратную выпуклую последовательность), изучать их некоторые свойства и разработать новые методы для получения основных результатов диссертационной работы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [34-36] Они доложены на семинаре по теории функции Тбилисского государственного университета под руководством проф. Л.В.Жижиашвили.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю член-корреспонденту Академии наук Груз. ССР, профессору Л.В.Жижиашвили за постоянное внимание и обсуждение вопросов.

ГЛАВА I

О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ I. Некоторые обозначения и определения

Сначала заметим, что в одномерном случае часто будем пользоваться преобразованием Абеля (см., напр., [1] , стр. I7), а в многомерном случае так называемым преобразованием Харди, имеющий в двумерном случае следующий вид *)

$$\sum_{p_1=\mu}^{m}\sum_{p_2=\nu}^{n} a_{p_1,p_2} b_{p_1,p_2} =$$

$$=\sum_{p_1=\mu}^{m-1}\sum_{p_2=\nu}^{n-1} B_{p_1,p_2}\left(a_{p_1,p_2}-a_{p_1+1,p_2}-a_{p_1,p_2+1}+a_{p_1+1,p_2+1}\right)-$$

$$-\sum_{p_1=\mu}^{m-1} B_{p_1,\nu-1}\left(a_{p_1,\nu}-a_{p_1+1,\nu}\right)-\sum_{p_2=\nu}^{n-1} B_{\mu-1,p_2}\left(a_{\mu,p_2}-a_{\mu,p_2+1}\right)+$$

$$+\sum_{p_1=\mu}^{m-1} B_{p_1,n}\left(a_{p_1,n}-a_{p_1+1,n}\right)+\sum_{p_2=\nu}^{n-1} B_{m,p_2}\left(a_{m,p_2}-a_{m,p_2+1}\right)+$$

$$+B_{\mu-1,\nu-1}a_{\mu,\nu}-B_{m,\nu-1}a_{m,\nu}-B_{\mu-1,n}a_{\mu,n}+B_{m,n}a_{m,n}, \qquad (I.I.I)$$

---

*) Отметим, что в многомерном случае преобразование Харди получается последовательным применением (относительно каждого индекса) преобразования Абеля

где

$$B_{p_1,0}=B_{0,p_2}=0, \quad B_{m,n}=\sum_{p_1=1}^{m}\sum_{p_2=1}^{n} b_{p_1,p_2} \quad (m\geq 1, n\geq 1)$$

$$1\leq\mu\leq m, \quad 1\leq\nu\leq n.$$

Введем теперь некоторые обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем; многие из этих обозначений были введены в работах Л.В.Жижиашвили (см., напр., [2,3]).

Символом $E_n\ (n\geq 1)$ обозначаем n -мерное евклидово пространство с обычными линейными операциями; точки из E_n будем обозначать через $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n),\cdots$. Предполагается также, что

$$\|\vec{x}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{1/2}, \quad R_n=[-\pi,\pi]^n \text{ и } U_n=[0,1]^n.$$

Если $\vec{p}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ $(p_i=0,1,\cdots,\ i=\overline{1,n})$, то через $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ или $(a_{p_1,p_2,\cdots,p_n})_{p_i\geq 0}$ будем обозначать n -кратную последовательность вещественных чисел. Далее, пусть $M=\{1,2,\cdots,n\}$ и B - произвольное подмножество из M ; $\lambda(\vec{p})$ означает число тех координат вектора $\vec{p}$, которые равны нулю. Затем, если $\vec{I}_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ и

$$\Delta(a_{\vec{p}},\{i\})=a_{\vec{p}}-a_{\vec{p}+\vec{I}_i},$$

то символом $\Delta(a_{\vec{p}},B)$ обозначаем выражение, которое получается последовательным применением операции Δ по тем переменным, индекс которых составляют множества B.

<u>Определение I</u>. Говорят, что последовательность $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ убывающая в смысле Харди [4] , если для любого $B\subset M$

имеет место следующее соотношение

$$\Delta(a_{\vec{p}}, B) \geq 0.$$

Определение 2. Последовательность $(a_{\vec{p}})_{\vec{p} \geq \vec{0}}$ будем называть выпуклой, если для любого $B \subset M$ и произвольного $B' \subset B$ верно следующее неравенство

$$\Delta[\Delta(a_{\vec{p}}, B), B'] \geq 0.$$

Будем рассматривать кратные тригонометрические ряды следующего вида

$$\sum_{\vec{p} \geq \vec{0}} 2^{-\lambda(\vec{p})} a_{\vec{p}} \prod_{k \in B} \cos p_k x_k \prod_{i \in C_M B} \sin p_i x_i . \qquad (I.I.2)$$

Если ряд (I.I.2) сходится в смысле Прингсхейма почти всюду на $R_n = [-\pi, \pi]^n$, то сумму будем обозначать символом f_B. Частные суммы ряда (I.I.2) по n -мерным прямоугольникам обозначим:

$$S_{\vec{m}}(\vec{x}, B) = \sum_{\vec{p} \geq \vec{0}}^{\vec{m}} 2^{-\lambda(\vec{p})} a_{\vec{p}} \prod_{k \in B} \cos p_k x_k \prod_{i \in C_M B} \sin p_i x_i .$$

§ 2. Сходимость в $L^p(0<p<1)$ кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

П.Л.Ульянов [5], наряду с другими вопросами, изучал вопрос сходимости в $L^p(0<p<1)$ простых тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. В настоящем параграфе подобные вопросы изучаются для кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами.

Сначала приведем некоторые вспомогательные леммы, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма I.2.I. Пусть

$$\lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{\vec{p}} = 0$$

и

$$\sum_{\vec{p}\geq\vec{0}} \left|\Delta(a_{\vec{p}}, M)\right| < +\infty .$$

Тогда, если $B=\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ $(i_k<n,\ B\subset M)$, $C_M B=\{j_1, j_2, \dots, j_l\}$, то

$$\lim_{p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_l}\to\infty} \sum_{p_{i_1}=0}^{\infty}\sum_{p_{i_2}=0}^{\infty}\cdots\sum_{p_{i_k}=0}^{\infty}\left|\Delta(a_{\vec{p}}, B)\right| = 0 .$$

Доказательство. Сначала предположим, что $n=2$. Далее, положим:

$$\varphi(p_2)=\sum_{p_1=0}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2}, \{1\})\right|, \tag{I.2.I}$$

$$\Psi(p_1)=\sum_{p_2=0}^{\infty}\left|\Delta\left(a_{p_1,p_2},\{2\}\right)\right|. \qquad (I.2.2)$$

Согласно условию леммы имеем

$$\lim_{p_2\to\infty}\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{j=p_2}^{\infty}\left|a_{p_1,j}-a_{p_1+1,j}-a_{p_1,j+1}+a_{p_1+1,j+1}\right|=0.$$

Тогда и

$$\lim_{p_2\to\infty}\sum_{p_1=0}^{\infty}\left|\sum_{j=p_2}^{\infty}\left(a_{p_1,j}-a_{p_1+1,j}-a_{p_1,j+1}+a_{p_1+1,j+1}\right)\right|=0,$$

или

$$\lim_{p_2\to\infty}\sum_{p_1=0}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{j=p_2}^{m}\left(a_{p_1,j}-a_{p_1+1,j}-a_{p_1,j+1}+a_{p_1+1,j+1}\right)\right|=0. \qquad (I.2.3)$$

Но из леммы имеем

$$\lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{p_1,p_2}=0.$$

Стало быть

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=p_2}^{m}\left(a_{p_1,j}-a_{p_1+1,j}-a_{p_1,j+1}+a_{p_1+1,j+1}\right)=$$

$$=a_{p_1,p_2}-a_{p_1+1,p_2}.$$

Так что, согласно (I.2.3) и (I.2.I) находим

$$\lim_{p_2\to\infty} \varphi(p_2) = 0.$$

Совершенно аналогично получаем (см. (I.2.2)), что

$$\lim_{p_1\to\infty} \Psi(p_1) = 0.$$

Таким образом, лемма (I.2.I) при $n=2$ доказана. Если принять во внимание, что выражение $\Delta(a_{\vec{p}}, B)$ получается последовательным применением операции Δ относительно тех переменных, индексы которых принадлежат множеству $B\subset M$, то с учетом метода доказательства леммы (I.2.I) при $n=2$ заключаем, что лемма (I.2.I) справедлива при любом $n\geqslant 2$.

Лемма I.2.2. Пусть последовательность $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geqslant\vec{0}}$ удовлетворяет условиям $a_{\vec{p}}\geqslant 0$ и

$$\Delta(a_{\vec{p}}, \{i\}) \geqslant 0 \qquad (i=1,2,\dots,n).$$

Если

$$\sum_{\vec{p}\geqslant\vec{0}} a_{\vec{p}} < +\infty,$$

то

$$\lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{\vec{p}} \prod_{i=1}^{n} p_i = 0.$$

Утверждение леммы очевидно.

Замечание I.2.I. В дальнейшем предполагается $a_{\vec{p}} \geq 0$ $(\vec{p} \geq \vec{0})$, правда, в некоторых случаях неотрицательность $a_{\vec{p}}$ $(\vec{p} \geq \vec{0})$ вытекает из условий соответствующих лемм и теорем.

Лемма I.2.3. Если $(a_{\vec{p}})_{\vec{p} \geq \vec{0}}$ выпуклая последовательность и

$$\lim_{\|\vec{p}\| \to \infty} a_{\vec{p}} = 0,$$

то

$$\sum_{\vec{p} \geq \vec{0}} \prod_{i=1}^{n} (p_i + 1) \Delta[\Delta(a_{\vec{p}}, \{M\}), \{M\}] < +\infty.$$

Доказательство. И здесь для простоты будем предполагать, что $n = 2$ Согласно условия леммы имеем

$$a_{0,0} = \lim_{\vec{m} \to \infty} \sum_{p_1=0}^{m_1+1} \sum_{p_2=0}^{m_2+1} \Delta(a_{p_1,p_2}, \{1,2\}).$$

Применяя преобразование Харди (см. I.I.I)), будем иметь

$$\sum_{p_1=0}^{m_1+1} \sum_{p_2=0}^{m_2+1} \Delta(a_{p_1,p_2}, \{1,2\}) =$$

$$= \sum_{p_1=0}^{m_1} \sum_{p_2=0}^{m_2} (p_1+1)(p_2+1) \Delta[\Delta(a_{p_1,p_2}, \{1,2\}), \{1,2\}] +$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1}(p_1+1)(m_2+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1,2\}),\{1\}]+$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2}(m_1+1)(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{m_1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]+$$

$$+(m_1+1)(m_2+1)\Delta(a_{m_1,m_2},\{1,2\}).$$

Теперь принимая во внимание, что в правой части (как и в левой части) все слагаемые неотрицательны, заключаем, что

$$\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]<+\infty,$$

это и доказывает лемму (I.2.3) при $n=2$. Нетрудно заметить, что метод доказательства проходит при любом $n\geqslant 2$.

Справедлива следующая

<u>Теорема I.2.I</u>. Пусть последовательность $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geqslant\vec{0}}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$1.\ \lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{\vec{p}}=0, \tag{I.2.4}$$

$$2.\ \sum_{\vec{p}\geqslant\vec{0}}\left|\Delta(a_{\vec{p}},M)\right|<+\infty. \tag{I.2.5}$$

Тогда для любого $B\subset M$ ряд (I.I.2) сходится в смысле

Принтсхейма почти всюду на R_n и существует такая функция $f_B \in L^p$, что для любого $p \in (0,1)$

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{R_n} \left| f_B(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x},B) \right|^p d\vec{x} = 0.$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $n=2$. Достаточно показать, что существуют функции f_B, $B \subset \{1,2\}$ определенные следующими равенствами $(x_1, x_2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi))$

$$f_{\{1,2\}}(x_1,x_2) = \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} a_{p_1,p_2} \cos p_1 x_1 \cos p_2 x_2,$$

$$f_{\{1\}}(x_1,x_2) = \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} a_{p_1,p_2} \cos p_1 x_1 \sin p_2 x_2,$$

$$f_{\{2\}}(x_1,x_2) = \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} a_{p_1,p_2} \sin p_1 x_1 \cos p_2 x_2,$$

$$f_{\phi}(x_1,x_2) = \sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} a_{p_1,p_2} \sin p_1 x_1 \sin p_2 x_2$$

для которых при $p \in (0,1)$

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{R_2} \left| f_B(x_1,x_2) - S_{m_1,m_2}(\vec{x},B) \right|^p d\vec{x} = 0. \qquad (1.2.6)$$

Сначала установим справедливость соотношения (1.2.6) при $B=\{1,2\}$. Покажем, что если $x_1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ и $x_2 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N_0, что для $m_1 > N_0$, $m_2 > N_0$ и произвольных натуральных чисел p и q

$$\left|\sum_{p_1=m_1+1}^{m_1+p}\sum_{p_2=0}^{m_2+q} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2 + \sum_{p_1=0}^{m_1}\sum_{p_2=m_2+1}^{m_2+q} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2\right| < \varepsilon.$$

Используя преобразование Харди, будем иметь

$$\sum_{p_1=m_1+1}^{m_1+p}\sum_{p_2=0}^{m_2+q} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2 =$$

$$=\sum_{p_1=m_1+1}^{m_1+p-1}\sum_{p_2=0}^{m_2+q-1} D_{p_1}(x_1)D_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) -$$

$$-\sum_{p_2=0}^{m_2+q-1} D_{m_1}(x_1)D_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\}) +$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2+q-1} D_{m_1+p}(x_1)D_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1+p,p_2},\{2\}) +$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{m_1+p-1} D_{p_1}(x_1)D_{m_2+q}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+q},\{1\}) +$$

$$+D_{m_1+p}(x_1)D_{m_2+q}(x_2)a_{m_1+p,m_2+q} -$$

$$-D_{m_1}(x_1)D_{m_2+q}(x_2)a_{m_1+1,m_2+q}$$

и

$$\sum_{p_1=0}^{m_1}\sum_{p_2=m_2+1}^{m_2+q} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2 =$$

$$=\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{m_2+q-1} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) -$$

$$-\sum_{p_1=0}^{m_1-1} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\}) +$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-1} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2+q}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+q},\{1\}) +$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{m_2+q-1} \mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}) -$$

$$-\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1,m_2+1}+\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2+q}(x_2)a_{m_1,m_2+q},$$

где

$$\mathcal{D}_{m_i}(x)=\sum_{p_i=0}^{m_i}\cos p_i x \qquad (i=1,2)$$

и будем считать, что $\mathcal{D}_{-1}(x)=0$.

В силу оценки (см., напр., [I], стр. 95)

$$\left|\mathcal{D}_{m_i}(x)\right| \le \frac{\pi}{2x} \qquad (0<|x|\le\pi,\ i=1,2)$$

получим

$$\left|\sum_{p_1=m_1+1}^{m_1+p}\sum_{p_2=0}^{m_2+q} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{p_1=0}^{m_1}\sum_{p_2=m_2+1}^{m_2+q} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2\right| \leq$$

$$\leq \frac{4}{|x_1||x_2|}\left[\sum_{p_1=m_1+1}^{m_1+p-1}\sum_{p_2=0}^{m_2+q-1}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right| + \right.$$

$$+ \sum_{p_2=0}^{m_2+q-1}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right| +$$

$$+ \sum_{p_2=0}^{m_2+q-1}\left|\Delta(a_{m_1+p,p_2},\{2\})\right| + \sum_{p_1=m_1+1}^{m_1+p-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+q},\{1\})\right| +$$

$$+ \left|a_{m_1+p,m_2+q}\right| + \left|a_{m_1+1,m_2+q}\right| +$$

$$+ \sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{m_2+q-1}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right| +$$

$$+ \sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right| + \sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+q},\{1\})\right| +$$

$$\left. + \sum_{p_2=m_2+1}^{m_2+q-1}\left|\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})\right| + \left|a_{m_1,m_2+1}\right| + \left|a_{m_1,m_2+q}\right|\right],$$

Из условий теоремы (I.2.I) и леммы (I.2.I) следует, что последнее выражение стремится к нулю при $\vec{m}\to\infty$. Следовательно, при $x_1\neq 0 \pmod{2\pi}$, $x_2\neq 0 \pmod{2\pi}$ ряд

$$\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2$$

сходится.

Имеем

$$f(x_1,x_2)-S_{m_1,m_2}(x_1,x_2,\{\phi\})=$$

$$=\left(\sum_{p_1=0}^{m_1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\right)a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2$$

$$=I^{(1)}_{m_1,m_2}+I^{(2)}_{m_1,m_2}+I^{(3)}_{m_1,m_2}. \qquad (I.2.7)$$

Но

$$I^{(1)}_{m_1,m_2}=\sum_{p_1=0}^{m_1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2=$$

$$=\lim_{q\to\infty}\sum_{p_1=0}^{m_1}\sum_{p_2=m_2+1}^{q}a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2.$$

Согласно преобразованию Харди находим

$$\lim_{q\to\infty}\sum_{p_1=0}^{m_1}\sum_{p_2=m_2+1}^{q} a_{p_1,p_2}\cos p_1x_1\cos p_2x_2 =$$

$$=\lim_{q\to\infty}\Bigg[\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{q-1}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{q-1}\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{q}(x_2)\Delta(a_{p_1,q},\{1\})-$$

$$-\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1,m_2+1}+\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{q}(x_2)a_{m_1,q}\Bigg]=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})-$$

$$-\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1,m_2+1}$$

при $\qquad x_1 \neq 0 (\bmod 2\pi), \quad x_2 \neq 0 (\bmod 2\pi).$ (I.2.8)

Тогда

$$\left| I^{(1)}_{m_1,m_2} \right| \leq \frac{4}{|x_1||x_2|} \left[\sum_{p_1=0}^{m_1-1} \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) \right| + \right.$$

$$+ \sum_{p_1=0}^{m_1-1} \left| \Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\}) \right| +$$

$$\left. + \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}) \right| + \left| a_{m_1,m_2+1} \right| \right]. \tag{I.2.9}$$

Аналогично можно оценить $\quad I^{(2)}_{m_1,m_2} \quad$ и $\quad I^{(3)}_{m_1,m_2}$, т.е.

$$\left| I^{(2)}_{m_1,m_2} \right| \leq \frac{4}{|x_1||x_2|} \left[\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{m_2-1} \left| \Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) \right| + \right.$$

$$+ \sum_{p_2=0}^{m_2-1} \left| \Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\}) \right| +$$

$$\left. + \sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \left| \Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}) \right| + \left| a_{m_1+1,m_2} \right| \right], \tag{I.2.10}$$

$$\left| I^{(3)}_{m_1,m_2} \right| \leq \frac{4}{|x_1||x_2|} \left[\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} \left| \Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) \right| + \right.$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|+\left|a_{m_1+1,m_2+1}\right|\Bigg]. \qquad (I.2.II)$$

Следовательно, согласно (I.2.7), (I.2.9)-(I.2.II) будем иметь

$$\left|f_{\{12\}}(x_1,x_2)-S_{m_1,m_2}(x_1,x_2,\{12\})\right|\leq$$

$$\leq\frac{4}{|x_1||x_2|}\Bigg[\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})\right|+\left|a_{m_1,m_2+1}\right|+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|+\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\})\right|+\left|a_{m_1+1,m_2}\right|+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\ \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right| +$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right| +$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right| + \left|a_{m_1+1,m_2+1}\right|\Bigg].$$

Таким образом, для любого $p\in(0,1)$ имеем

$$\int_{K_2}\left|f_{\{1,2\}}(x_1,x_2)-S_{m_1,m_2}(x_1,x_2,\{1,2\})\right|^p d\vec{x} \le$$

$$\le\Bigg[\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\ \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right| +$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right| +$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})\right| + \left|a_{m_1,m_2+1}\right| +$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\ \sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right| +$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\})\right|+\left|a_{m_1+1,m_2}\right|+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|+$$

$$+\left|a_{m_1+1,m_2+1}\right|\Big]^p 4^p \int\limits_{R_2}\frac{dx_1dx_2}{|x_1|^p|x_2|^p}.$$

Но $\int\limits_{R_2}\frac{dx_1dx_2}{|x_1|^p|x_2|^p}$ конечен при $p\in(0,1)$, а выражение в квадратных скобках согласно условию теоремы (I.2.I) и лемме (I.2.I), стремится к нулю при $\vec{m}\to\infty$. Стало быть

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}\int\limits_{R_2}\left|f_{\{1,2\}}(x_1,x_2)-S_{m_1,m_2}(x_1,x_2,\{1,2\})\right|^p d\vec{x}=0.$$

Совершенно аналогично проверяются соотношения (I.2.6) при

$B=\{1\}, \{2\}$ и ϕ.

Легко заметить, что метод доказательства теоремы (I.2.I) для случая $n=2$ проходит и при $n\geqslant 3$. Стало быть, указанная теорема полностью доказана.

Заметим, что при $p=1$, утверждения теоремы (I.2.I), вообще говоря, неверны.

§ 3. Сходимость в метрике L кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

Разные вопросы простых тригонометрических рядов Фурье достаточно хорошо изучены (см., напр., [I], стр. 649-679, [6], стр. 292-339). Что касается кратных тригонометрических рядов Фурье с монотонными коэффициентами, то в этом направлении сравнительно мало известно (см. [7], [8], [9]).

В этом параграфе приводятся результаты, относящиеся к вопросу сходимости в метрике L кратных тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных тригонометрических рядов. В частности, обобщаются соответствующие результаты А.Н.Колмогорова [I0] и У.Юнга [II].

Имеет место следующая

Теорема I.3.I. Если

$$\lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{\vec{p}} = 0 \tag{I.3.I}$$

и

$$\sum_{\vec{p}\geqslant\vec{0}} \left|\Delta(a_{\vec{p}}, M)\right| \prod_{i=1}^{n} \log(p_i+2) < +\infty, \tag{I.3.2}$$

то ряд (I.I.2) для любого $B \subset M$ сходится в смысле Прингсхейма почти всюду на R_n и существует такая функция $f_B \in L$, что

$$\lim_{\vec{m} \to \infty} \int_{R_n} \left| f_B(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x}, B) \right| d\vec{x} = 0. \tag{I.3.3}$$

Доказательство. Справедливость теоремы (I.3.I) проверим при $B=\{1,2\}$ и $n=2$. Из метода доказательства легко можно установить, что она справедлива для любого $B \subset M$ и $n \geqslant 3$.

Как и при доказательстве теоремы (I.2.I) легко проверить, что для всех $x_i \not\equiv 0 (mod\, 2\pi)$ $(i=1,2)$ сходятся ряды

$$\sum_{p_1=0}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{\infty} a_{p_1,p_2} \cos p_1 x_1 \cos p_2 x_2 \equiv f_B(\vec{x}),$$

$$\sum_{p_1=0}^{m_1} \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} a_{p_1,p_2} \cos p_1 x_1 \cos p_2 x_2,$$

$$\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{m_2} a_{p_1,p_2} \cos p_1 x_1 \cos p_2 x_2,$$

$$\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} a_{p_1,p_2} \cos p_1 x_1 \cos p_2 x_2.$$

Тогда для $x_i \not\equiv 0 (mod\, 2\pi)$ $(i=1,2)$ справедливо представление (I.2.7), причем, для $I^{(1)}_{m_1,m_2}$ имеет место (I.2.8), а для $I^{(i)}_{m_1,m_2}$ $(i=2,3)$ при $x_i \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)$ $(i=1,2)$ имеем

$$I^{(2)}_{m_1,m_2}=\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\})-$$

$$-\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1+1,m_2}. \tag{I.3.4}$$

$$I^{(3)}_{m_1,m_2}=\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})-$$

$$-\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})+$$

$$+\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1+1,m_2+1}. \tag{I.3.5}$$

Стало быть, согласно (I.2.7), (I.2.8), (I.3.4) и (I.3.5) имеем:

$$\int_{R_2}\left|f_B(\vec{x})-S_{\vec{m}}(\vec{x},B)\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq \int_{R_2} \Big| \sum_{p_1=0}^{m_1-1} \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_1=0}^{m_1-1} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{m_2-1} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_2=0}^{m_2-1} \mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_1=m_1+1}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+ \int_{R_2} \Big| \sum_{p_2=m_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\}) \Big| d\vec{x} +$$

$$+\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1,m_2+1}\right|d\vec{x}+$$

$$+\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1+1,m_2}\right|d\vec{x}+$$

$$+\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1+1,m_2+1}\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq\left(\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-1}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\right)\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|\times$$

$$\times\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\})\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta\left(a_{p_1,m_2+1},\{1\}\right)\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta\left(a_{m_1,p_2},\{2\}\right)\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\left|a_{m_1,m_2+1}\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\left|a_{m_1+1,m_2}\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right|d\vec{x}+$$

$$+\left|a_{m_1+1,m_2+1}\right|\int_{R_2}\left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\right|\left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C\left[\left(\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-1}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\right)\times\right.$$

$$\times\left|\Delta\left(a_{p_1,p_2},\{1,2\}\right)\right|\log(p_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta\left(a_{p_1,m_2+1},\{1\}\right)\right|\log(p_1+2)\log(m_2+2)+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta\left(a_{m_1+1,p_2},\{2\}\right)\right|\log(m_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta\left(a_{m_1+1,p_2},\{2\}\right)\right|\log(m_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\})\right|\log(p_1+2)\log(m_2+2)+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|\log(p_1+2)\log(m_2+2)+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})\right|\log(m_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\left(|a_{m_1,m_2+1}|+|a_{m_1+1,m_2}|+|a_{m_1+1,m_2+1}|\right)\log(m_1+2)\log(m_2+2)\Big],$$

где C – абсолютная положительная константа. Тогда:

$$\varlimsup_{\vec{m}\to\infty}\int_{R_2}\left|f_{B}(\vec{x})-S_{\vec{m}}(\vec{x},B)\right|d\vec{x}\le$$

$$\le\varlimsup_{\vec{m}\to\infty}C\Big[\Big(\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-1}+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\Big)\times$$

$$\times\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|\log(p_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|\log(p_1+2)\log(m_2+2)+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|\log(m_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|\log(m_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\})\right|\log(p_1+2)\log(m_2+2)+$$

$$+\sum_{p_1=m_1+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|\log(p_1+2)\log(m_2+2)+$$

$$+\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})\right|\log(m_1+2)\log(p_2+2)+$$

$$+\left(\left|a_{m_1,m_2+1}\right|+\left|a_{m_1+1,m_2}\right|+\left|a_{m_1+1,m_2+1}\right|\right)\times$$

$$\times\log(m_1+2)\log(m_2+2)\Big]. \qquad \text{(I.3.6)}$$

Из (I.3.2) вытекает, что

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|\log(p_1+2)\log(p_2+2)=0;$$

поэтому,

$$\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\sum_{p_2=m_2+1}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|\log(p_1+2)\log(p_2+2)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\log(p_1+2)\log(m_2+2)\left|\sum_{p_1=m_2+1}^{\infty}\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\left|\Delta(a_{p_1,m_2+1},\{1\})\right|\log(p_1+2)\log(m_2+2)\to 0$$

при $\vec{m}\to\infty$. (I.3.7)

Аналогично,

$$\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\left|\Delta(a_{m_1+1,p_2},\{2\})\right|\log(m_1+2)\log(p_2+2)\to 0 \quad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (I.3.8)$$

С другой стороны,

$$a_{m_1,m_2}\log(m_1+2)\log(m_2+2)=$$

$$=\log(m_1+2)\log(m_2+2)\sum_{p_1=m_1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2}^{\infty}\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\leq$$

$$\leq\sum_{p_1=m_1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2}^{\infty}\left|\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})\right|\log(p_1+2)\log(p_2+2)\to 0$$

при $\vec{m}\to\infty$. (I.3.9)

В силу (I.3.2), (I.3.7)-(I.3.9) все слагаемые в правой части неравенства (I.3.6) стремятся к нулю при $\vec{m}\to\infty$. Таким образом,

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}\int_{R_2}\left|f_B(\vec{x})-S_{\vec{m}}(\vec{x},B)\right|d\vec{x}=0.$$

Теорема (I.3.I) доказана.

Замечание I.3.I. Если $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ убывает в смысле Харди, то при $B=\emptyset$ сумма ряда (I.I.2) - $f_\emptyset$ суммируема на R_n в том и только в том случае, когда имеет место соотношение (I.3.2).

Теорема I.3.2. Если $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geqslant\vec{0}}$ выпуклая последовательность и

$$\lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{\vec{p}} \prod_{i=1}^{n} \log(p_i+2)=0, \tag{I.3.10}$$

то ряд (I.I.2) с $B=M$ сходится в смысле Прингсхейма почти всюду на R_n к неотрицательной функции $f_M \in L(R_n)$ и

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{R_n} \left| f_M(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x},M) \right| d\vec{x} = 0.$$

Доказательство. Вновь будем предполагать, что $n=2$. (Метод доказательства показывает, что утверждение теоремы остается в силе и при $n\geqslant 3$).

Сначала докажем, что функция f существует почти всюду и неотрицательна. Рассмотрим частную сумму ряда (I.I.2) $S_{\vec{m}}(\vec{x},M)$ и применим преобразование Харди.

$$S_{\vec{m}}(\vec{x},M) = \sum_{p_1=0}^{m_1} \sum_{p_2=0}^{m_2} a_{p_1,p_2} \cos p_1 x_1 \cos p_2 x_2 =$$

$$= \sum_{p_1=0}^{m_1-1} \sum_{p_2=0}^{m_2-1} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) +$$

$$+ \sum_{p_1=0}^{m_1-1} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}) +$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2-1}\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\})+$$

$$+\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\,\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1,m_2}.$$

Далее, еще раз применяя преобразование Харди и преобразование Абеля, находим

$$S'_{\vec{m}}(\vec{x},M)=$$

$$=\sum_{p_1=0}^{m_1-2}\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_1+1)(p_2+1)K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)m_2K_{p_1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}]+$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2-2}m_1(p_2+1)K_{m_1-1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{m_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]+$$

$$+m_1m_2K_{m_1-1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1-1,m_2-1},\{1,2\})+$$

$$+\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\Big\{\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}]+$$

$$+m_1K_{m_1-1}(x_1)\Delta(a_{m_1-1,m_2},\{1\})\Big\}+$$

$$+\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\Big\{\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_2+1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}),\{2\}]+$$

$$+m_2K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1,m_2-1},\{2\})\Big\}+$$

$$+\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1,m_2}, \qquad \text{(I.3.II)}$$

где

$$K_m(t)=\frac{1}{m+1}\sum_{p=0}^{m}\mathcal{D}_p(t),$$

причем, как известно,

$$K_m(t)\geqslant 0,\ mK_m(t)=O\left(\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\right),\quad t\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,2\pi).$$

Поэтому,

$$\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)m_2K_{p_1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}]\leqslant$$

$$\leqslant O_{x_1,x_2}\left(\sum_{p_1=0}^{m_1-1}\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}]\right).$$

Так как в силу (I.3.IO) $\lim_{\|\vec{m}\|\to\infty} a_{\vec{m}}=0$, то последнее выражение стремится к нулю при $\vec{m}\to\infty$, $x_i\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$, $(i=1,2)$. Аналогично получаем, что

$$\sum_{p_2=0}^{m_2-2}m_1(p_2+1)K_{m_1-1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{m_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]\to 0$$

при $\vec{m}\to\infty$.

Далее,

$$\left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right|\left\{\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}]+\right.$$

$$\left.+m_1K_{m_1-1}(x_1)\Delta(a_{m_1-1,m_2},\{1\})\right\}\leq$$

$$\leq O_{x_1,x_2}\left(\sum_{p_1=0}^{m_1-2}\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}]\right)+$$

$$+\Delta(a_{m_1-1,m_2},\{1\})=o(1) \text{ при } \vec{m}\to\infty \text{ и } x_i\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,2\pi)$$

$$(i=1,2).$$

Точно так же можно получить

$$\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\left\{\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_2+1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}),\{2\}]+\right.$$

$$\left.+m_2K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1,m_2-1},\{2\})\right\}=o(1) \text{ при } \vec{m}\to\infty,$$

$$x_i\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)\quad(i=1,2).$$

Легко проверяется, что остальные слагаемые также стремятся к нулю. Поэтому, согласно лемме (I.2.3)

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}S_{\vec{m}}(\vec{x},M)=f_M(\vec{x})\equiv$$

$$\equiv \sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]<+\infty$$

при $x_i \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ $(i=1,2)$. (I.3.I2)

Так что $f_M(\bar{x})$ существует почти всюду на R_n и неотрицательна.

Вычитая (I.3.II) из (I.3.I2) получаем

$$\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{m_1-2}\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_1+1)(p_2+1)K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)m_2K_{p_1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}]-$$

$$-\sum_{p_2=0}^{m_2-2}m_1(p_2+1)K_{m_1-1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{m_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]-$$

$$-m_1m_2K_{m_1-1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1-1,m_2-1},\{1,2\})-$$

$$-D_{m_2}(x_2)\Big\{\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}]+$$

$$+m_1K_{m_1-1}(x_1)\Delta(a_{m_1-1,m_2},\{1\})\Big\}-$$

$$- \mathcal{D}_{m_1}(x_1)\left\{\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_2+1)K_{p_2}(x_2)\Delta\left[\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}),\{2\}\right] +\right.$$

$$\left. + m_2 K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1,m_2-1},\{2\})\right\} -$$

$$- \mathcal{D}_{m_1}(x_1)\mathcal{D}_{m_2}(x_2)a_{m_1,m_2} .$$

Следовательно,

$$\left| f_M(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x},M) \right| \leq$$

$$\leq \left| \left(\sum_{p_1=0}^{m_1-2}\sum_{p_2=m_2-1}^{\infty} + \sum_{p_1=m_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-2} + \sum_{p_1=m_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2-1}^{\infty} \right)(p_1+1)(p_2+1) \times \right.$$

$$\left. \times K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta\left[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}\right] \right| +$$

$$+ \left|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)\right| \left\{ \sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta\left[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}\right] +\right.$$

$$\left. + m_1 K_{m_1-1}(x_1)\Delta(a_{m_1-1,m_2},\{1\}) \right\} +$$

$$+ \left|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)\right| \left\{ \sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_2+1)K_{p_2}(x_2)\Delta\left[\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}),\{2\}\right] +\right.$$

$$\left. + m_2 K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1,m_2-1},\{2\}) \right\} +$$

$$+ \sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)m_2 K_{p_1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta\left[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}\right] +$$

$$+\sum_{p_2=0}^{m_2-2} m_1(p_2+1)K_{m_1-1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{m_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]+$$

$$+m_1m_2K_{m_1-1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1-1,m_2-1},\{1,2\})+$$

$$+|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)||\mathcal{D}_{m_2}(x_2)|a_{m_1,m_2}.$$

Отсюда

$$\int\limits_{R_2}|f_M(\vec{x})-S_{\vec{m}}(\vec{x},M)|\,d\vec{x}\le$$

$$\le\Bigg|\left(\sum_{p_1=0}^{m_1-2}\sum_{p_2=m_2-1}^{\infty}+\sum_{p_1=m_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-2}+\sum_{p_1=m_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2-1}^{\infty}\right)(p_1+1)(p_2+1)\times$$

$$\times\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]\int\limits_{R_2}K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\,d\vec{x}\Bigg|+$$

$$+\int\limits_{R_2}|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)|\Bigg\{\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}]+$$

$$+m_1K_{m_1-1}(x_1)\Delta(a_{m_1-1,m_2},\{1\})\Bigg\}d\vec{x}+$$

$$+\int\limits_{R_2}|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)|\Bigg\{\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_2+1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}),\{2\}]+$$

$$+m_2K_{m_2-1}(x_2)\Delta(a_{m_1,m_2-1},\{2\})\Bigg\}d\vec{x}+$$

$$+\int\limits_{R_2}\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)m_2K_{p_1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}]\,d\vec{x}+$$

$$+\int\limits_{R_2}\sum_{p_2=0}^{m_2-2} m_1(p_2+1)K_{m_1-1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\times$$

$$\times\Delta[\Delta(a_{m_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]d\vec{x}+$$

$$+m_1m_2\Delta(a_{m_1-1,m_2-1},\{1,2\})\int\limits_{R_2}K_{m_1-1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)d\vec{x}+$$

$$+a_{m_1,m_2}\int\limits_{R_2}|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)||\mathcal{D}_{m_2}(x_2)|d\vec{x}. \qquad (I.3.I3)$$

Но

$$\sum_{p_1=0}^{m_1-2}\sum_{p_2=m_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]\times$$

$$\times\int\limits_{R_2}K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)d\vec{x}=$$

$$=\pi^2\sum_{p_1=0}^{m_1-2}\sum_{p_2=m_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]=o(1)$$

$$\text{при}\quad \vec{m}\to\infty. \qquad (I.3.I4)$$

Аналогично,

$$\sum_{p_1=m_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_1+1)(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]\times$$

$$\times\int\limits_{R_2}K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)d\vec{x}=o(1)\quad\text{при}\quad\vec{m}\to\infty. \qquad (I.3.I5)$$

и

$$\sum_{p_1=m_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=m_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]\times$$

$$\times\int_{R_2}K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)d\vec{x}=o(1)\qquad \text{при}\quad \vec{m}\to\infty. \qquad (I.3.16)$$

Затем, согласно лемме (I.2.2)

$$\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)m_2\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}]\int_{R_2}K_{p_1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)d\vec{x}=$$

$$=\pi^2\sum_{p_1=0}^{m_2-2}(p_1+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2-1},\{1,2\}),\{1\}]=o(1)$$

при $\vec{m}\to\infty$.

Совершенно так же

$$\sum_{p_2=0}^{m_2-2}m_1(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{m_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]\times$$

$$\times\int_{R_2}K_{m_1-1}(x_1)K_{p_2}(x_2)d\vec{x}=o(1)\qquad \text{при}\quad \vec{m}\to\infty.$$

$$m_1m_2\Delta(a_{m_1-1,m_2-1},\{1,2\})\int_{R_2}K_{m_1-1}(x_1)K_{m_2-1}(x_2)d\vec{x}=$$

$$=\pi^2m_1m_2\Delta(a_{m_1-1,m_2-1},\{1,2\})=o(1)\qquad \text{при}\quad \vec{m}\to\infty.$$

Далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\mathcal{D}_{m_2}(x_2)|dx_2\Big\{\sum_{p_1=0}^{m_1-2}(p_1+1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}]\int_{-\pi}^{\pi}K_{p_1}(x_1)dx_1+$$

$$+m_1\Delta(a_{m_1-1,m_2},\{1\})\int_{-\pi}^{\pi}K_{m_1-1}(x_1)dx_1\Big\} =$$

$$=\pi^2 L_{m_2}(a_{0,m_2}-a_{m_1,m_2}), \qquad (I.3.I7)$$

где L_{m_2} константы Лебега (см. [I]).

Аналогично находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)|dx_1\Big\{\sum_{p_2=0}^{m_2-2}(p_2+1)\Delta[\Delta(a_{m_1,p_2},\{2\}),\{2\}]\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi}K_{p_2}(x_2)dx_2+m_2\Delta(a_{m_1,m_2-1},\{2\})\int_{-\pi}^{\pi}K_{m_2-1}(x_2)dx_2\Big\}$$

$$=\pi^2 L_{m_1}(a_{m_1,0}-a_{m_1,m_2}) \qquad (I.3.I8)$$

$$\int_{R_2}a_{m_1,m_2}|\mathcal{D}_{m_1}(x_1)||\mathcal{D}_{m_2}(x_2)|d\vec{x}=\pi^2 a_{m_1,m_2}L_{m_1}L_{m_2}. \qquad (I.3.I9)$$

Следовательно, на основании (I.3.I3)-(I.3.I9) окончательно будем иметь

$$\int_{R_2}|f_M(\vec{x})-S_{\vec{m}}(\vec{x},M)|d\vec{x}\le$$

$$\le\pi^2\big[a_{m_1,m_2}L_{m_1}L_{m_2}+L_{m_1}(a_{m_1,0}-a_{m_1,m_2})+$$

$$+L_{m_2}(a_{0,m_2}-a_{m_1,m_2})\big]+o(1).$$

Так как константы Лебега имеют порядок (см., напр., [6], стр. 115)

$$L_m = \frac{4}{\pi^2} \ln m + o(1),$$

то

$$\int_{R_2} \left| f_M(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x}, M) \right| d\vec{x} \leq$$

$$\leq O[16 a_{m_1,m_2} \ln m_1 \ln m_2 + 4 \ln m_1 (a_{m_1,0} - a_{m_1,m_2}) +$$

$$+ 4 \ln m_2 (a_{0,m_2} - a_{m_1,m_2})] + o(1),$$

т.е.

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{R_2} \left| f_M(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x}, M) \right| d\vec{x} = 0.$$

Теорема (1.3.2) доказана.

Пусть $\vec{m}_0 = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$, где $\vec{m}_0 \neq \vec{0}$ и не все $m_i \neq 0$ $(i = \overline{1,n})$. Положим

$$\mathcal{P} = \{ i : m_i \neq 0, i \in M \}.$$

Через $\mathcal{P}_0$ обозначаем множество всевозможных векторов $\vec{m}_0$.

Анализируя доказательство теоремы (1.3.2) можно заключить, что справедливо следующее

<u>Замечание 1.3.2</u>. Если в условии теоремы (1.3.2) вместо (1.3.10) будем предполагать, что

$$\lim_{\|\vec{m}_0\|\to\infty} a_{\vec{m}_0} \prod_{i\in \mathcal{P}} \log(m_i+2) = 0$$

для всех $\vec{m}_0 \in \mathcal{P}_0$, то для сходимости ряда (I.I.2) в смысле метрики L необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} a_{\vec{m}} \prod_{i=1}^{n} \log(m_i+2) = 0.$$

ГЛАВА II

О СУММИРУЕМОСТИ МЕТОДОМ ЧЕЗАРО ПРОСТЫХ И КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ I. Суммируемость методом Чезаро в $L^p(0<p<1)$ простых и кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

В дальнейшем символом

$$\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x},B)=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} A_{m_i}^{\alpha_i}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\cdots A_{m_n-i_n}^{\alpha_n-1} S_{\vec{i}}(\vec{x},B) \qquad (2.I.I)$$

будем обозначать чезаровские средние ряда (I.I.2), где $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\alpha_i\in(-1,+\infty)$, $(i=\overline{1,n})$.

Справедлива следующая теорема

<u>Теорема 2.I.I</u>. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ убывающая последовательность в смысле Харди, $a_{\vec{p}}\to 0$ при $\|\vec{p}\|\to\infty$ и $\alpha_i\in(-1,0)$ $(i=\overline{1,n})$.

Для того, чтобы для любого $p\in(0,1)$ имело место соотношение

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}\int_{R_n}\left|f_B(\vec{x})-\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x},B)\right|^p d\vec{x}=0,\ B\subset M,$$

необходимо и достаточно

$$\lim_{\|\vec{m}\|\to\infty} a_{\vec{m}}\prod_{i=1}^{n} m_i^{-\alpha_i}=0. \qquad (2.I.2)$$

Доказательство. Пусть $n=1$ и $B=\{1\}$, тогда согласно (2.I.I) будем иметь

$$\sigma_m^\alpha(x,B)-f(x)=\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{i=0}^{m}A_{m-i}^{\alpha-1}\left[S_i(x)-f(x)\right],$$

где

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx,\quad 0<|x|\leq\pi,$$

$$S_i(x)=\sum_{k=0}^{i}a_k\cos kx,\quad \alpha\in(-1,0).$$

Следовательно,

$$\sigma_m^\alpha(x,B)-f(x)=-\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{i=0}^{m}A_{m-i}^{\alpha-1}\sum_{k=i+1}^{\infty}a_k\cos kx. \qquad (2.I.3)$$

Но используя преобразование Абеля, находим

$$\sum_{k=i+1}^{\infty}a_k\cos kx=-a_{i+1}D_i(x)+\sum_{k=i+1}^{\infty}\Delta a_kD_k(x).$$

Отсюда

$$\left|\sum_{k=i+1}^{\infty}a_k\cos kx\right|\leq\frac{Ca_i}{|x|},\quad 0<|x|\leq\pi,\ C>0. \qquad (2.I.4)$$

С другой стороны (см., например, [6], стр. 131)

$$C_1(\alpha)\leq\frac{A_m^{\alpha}}{m^{\alpha}}\leq C_2(\alpha),\ C_i(\alpha)\in(0,+\infty),\ (i=1,2).^{*)} \qquad (2.1.5)$$

Тогда, согласно (2.1.3)-(2.1.5), будем иметь

$$\left|\sigma_m^{\alpha}(x,B)-f(x)\right|\leq$$

$$\leq C(\alpha)m^{-\alpha}\left\{\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]}\left|A_{m-i}^{\alpha-1}\right|\frac{a_i}{|x|}+\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m}\left|A_{m-i}^{\alpha-1}\right|\frac{a_i}{|x|}\right\}\leq$$

$$\leq\frac{C(\alpha)}{|x|}m^{-\alpha}\left\{\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]}(m-i)^{\alpha-1}a_i+a_m+\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}(m-i)^{\alpha-1}a_i\right\}\leq$$

$$\leq\frac{C(\alpha)}{|x|}\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}a_i+m^{-\alpha}a_m+m^{-\alpha}a_{[\frac{m}{2}]}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}(m-i)^{\alpha-1}\right\}\leq$$

$$\leq\frac{C(\alpha)}{|x|}\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}a_i+m^{-\alpha}a_m+m^{-\alpha}a_{[\frac{m}{2}]}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1-\alpha}}\right\}.$$

Стало быть, если $a_m=o(m^{-\alpha})$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sigma_m^{\alpha}(x,B)-f(x)\right|^p dx\leq$$

---

* В дальнейшем, разные положительные константы, зависящие от $\alpha,\beta,\dots$ будем обозначать через $C(\alpha),C(\beta),C(\alpha,\beta),\dots$.

$$\leq C(\alpha,p)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{|x|^p}\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m}a_i+m^{-\alpha}a_m+\right.$$

$$\left.+m^{-\alpha}a_{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1-\alpha}}\right\}^p\to 0$$

при $m\to\infty$.

Таким образом, в одномерном случае достаточность условия теоремы (2.I.I) доказана.

<u>Необходимость</u>. Как известно (см., напр., [6], стр. I32).

$$\frac{a_m\cos mx}{A_m^\alpha}=\left(\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{-\alpha-2}A_k^\alpha\sigma_k^\alpha(x,B)\right)\Big/A_m^\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{a_m\cos mx}{A_m^\alpha}=\left(\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{-\alpha-2}A_k^\alpha\left[\sigma_k^\alpha(x,B)-f(x)+f(x)\right]\right)\Big/A_m^\alpha.$$

Стало быть, используя соотношение

$$\left(\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{-\alpha-2}A_k^\alpha f(x)\right)\Big/A_m^\alpha=f(x)\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{-\alpha-2}A_k^\alpha\Big/A_m^\alpha=$$

$$=f(x)\frac{A_m^{-\alpha-2+\alpha+1}}{A_m^\alpha}=f(x)\frac{A_m^{-1}}{A_m^\alpha},$$

получим

$$\frac{|a_m\cos mx|}{|A_m^\alpha|}\leq\frac{1}{|A_m^\alpha|}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}|A_{m-k}^{-\alpha-2}||A_k^\alpha||\sigma_k^\alpha(x,B)-f(x)|+$$

$$+\frac{1}{|A_m^\alpha|}\sum_{k=[\frac{m}{2}]+1}^{m}|A_{m-k}^{-\alpha-2}||A_k^\alpha||\sigma_k^\alpha(x,B)-f(x)|+$$

$$+|f(x)|\left|\frac{A_m^{-1}}{A_m^\alpha}\right|,\quad (A_m^{-1}=0,\ m>1).$$

Имеем

$$\frac{1}{|A_m^\alpha|^p}\int_{-\pi}^{\pi}|a_m\cos mx|^p dx\leq$$

$$\leq\frac{1}{|A_m^\alpha|^p}\sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]}|A_{m-k}^{-\alpha-2}|^p|A_k^\alpha|^p\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_m^\alpha(x,B)-f(x)|^p dx+$$

$$+\frac{1}{|A_m^\alpha|^p}\sum_{k=[\frac{m}{2}]+1}^{m}\left(|A_{m-k}^{-\alpha-2}||A_k^\alpha|\right)^p\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_k^\alpha(x,B)-f(x)|^p dx\to 0$$

при $\vec{m}\to\infty$, $p\in\left(\frac{1}{2+\alpha},1\right)$.

Следовательно,

$$m^{-\alpha p}a_m^p\int_{-\pi}^{\pi}|\cos mx|^p dx=o(1)\qquad \text{при } m\to\infty.$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\cos mx|^p dx\geqslant\pi,$$

то

$$m^{-\alpha} a_m = o(1), \quad m \to \infty .$$

Таким образом, при $n=1$ необходимость теоремы (2.I.I) доказана.

Рассмотрим случай при $n=2$ и $B=\{1,2\}$. Согласно (2.I.I) имеем

$$\sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}S_{i_1,i_2}(\vec{x},B), \quad (2.I.6)$$

Далее,

$$\sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\left[S_{i_1,i_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right]. \quad (2.I.7)$$

Согласно (I.2.7) имеем

$$\sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\left(I_{i_1,i_2}^{(1)}+I_{i_1,i_2}^{(2)}+I_{i_1,i_2}^{(3)}\right)\equiv$$

$$\equiv H_1(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})+H_2(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})+H_3(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \quad (2.I.8)$$

Рассмотрим выражение $I^{(1)}_{i_1,i_2}$. Согласно (I.2.8) имеем

$$I^{(1)}_{i_1,i_2}=\sum_{p_1=0}^{i_1-1}\sum_{p_2=i_2-1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{i_1-1}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,i_2+1},\{1\})+$$

$$+\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{i_1,p_2},\{2\})-$$

$$-\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)a_{i_1,i_2+1},\quad 0<|x_i|\le\pi\quad(i=1,2).$$

Отсюда

$$I^{(1)}_{i_1,i_2}=\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{p_1=i_1}^{\infty}\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{p_1=0}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,i_2+1},\{1\})+$$

$$+\sum_{p_1=i_1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,i_2+1},\{1\})+$$

$$+\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{i_1,p_2},\{2\}) -$$

$$-\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)a_{i_1,i_2+1} \quad (2.I.9)$$

Используя последнее соотношение согласно (2.I.8) находим

$$H_1(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) = \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1} \times$$

$$\times\Big\{\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) -$$

$$-\sum_{p_1=i_1}^{\infty}\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}) -$$

$$-\sum_{p_1=0}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,i_2+1},\{1\}) +$$

$$+\sum_{p_1=i_1}^{\infty} \mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,i_2+1},\{1\}) +$$

$$+\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty} \mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{i_1,p_2},\{2\}) -$$

$$-\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)a_{i_1,i_2+1}\Big\} =$$

$$=\frac{1}{A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\times$$

$$\times\sum_{p_1=i_1}^{\infty}\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\})-$$

$$-\frac{1}{A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{p_1=0}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,i_2+1},\{1\})+$$

$$+\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\times$$

$$\times\sum_{p_1=i_1}^{\infty}\mathcal{D}_{p_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\Delta(a_{p_1,i_2+1},\{1\})+$$

$$+\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\times$$

$$\times\sum_{p_2=i_2+1}^{\infty}\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{p_2}(x_2)\Delta(a_{i_1,p_2},\{2\})-$$

$$-\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)a_{i_1,i_2+1}\equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{6} a^{(i)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \tag{2.I.10}$$

$$\left|a^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right| \leq \frac{C(\alpha_2) m_2^{-\alpha_2}}{|x_1||x_2|} \sum_{i_2=0}^{m_2} \left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| a_{0,i_2}, \tag{2.I.II}$$

$$\left|a^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right| \leq \frac{C(\alpha_1,\alpha_2)}{|x_1||x_2|} m_1^{-\alpha_1} m_2^{-\alpha_2} \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right| \left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| a_{i_1,i_2+1} =$$

$$= \frac{C(\alpha_1,\alpha_2) m_1^{-\alpha_1} m_2^{-\alpha_2}}{|x_1||x_2|} \left\{ \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} \left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right| \left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| a_{i_1,i_2+1} + \right.$$

$$+ \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2} \left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right| \left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| a_{i_1,i_2+1} +$$

$$+ \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} \left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right| \left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| a_{i_1,i_2+1} +$$

$$\left. + \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1} \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2} \left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right| \left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| a_{i_1,i_2+1} \right\} \leq$$

$$\leq \frac{C(\alpha_1,\alpha_2) m_1^{-\alpha_1} m_2^{-\alpha_2}}{|x_1||x_2|} \left\{ m_1^{\alpha_1-1} m_2^{\alpha_2-1} \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} a_{i_1,i_2+1} + \right.$$

$$+ m_1^{\alpha_1-1} \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} a_{i_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]} \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2} \left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| +$$

$$+m_2^{\alpha_2-1}\sum_{i_2=0}^{m_2} a_{[\frac{m_1}{2}],i_2}\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|+$$

$$+a_{[\frac{m_1}{2}],[\frac{m_2}{2}]}\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\ \sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\Bigg\} \qquad (2.I.I2)$$

Нетрудно заметить, (см. оценку $Q^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})$), что

$$Q^{(3)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\le\frac{C(\alpha_2)\,m_2^{-\alpha_2}}{|x_1||x_2|}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|a_{0,i_2} \qquad (2.I.I3)$$

и

$$\left|Q^{(i)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|\le\frac{C(\alpha_1,\alpha_2)}{|x_1||x_2|}\Bigg\{m_1^{-1}m_2^{-1}\sum_{i_1=0}^{[\frac{m_1}{2}]}\sum_{i_2=0}^{[\frac{m_2}{2}]}a_{i_1,i_2}+$$

$$+m_1^{-1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=0}^{[\frac{m_1}{2}]}a_{i_1,[\frac{m_2}{2}]}\sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|+$$

$$+m_1^{-\alpha_1}m_2^{-1}\sum_{i_2=0}^{m_2}a_{[\frac{m_1}{2}],i_2}\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|+$$

$$+m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{[\frac{m_1}{2}],[\frac{m_2}{2}]}\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\ \sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\Bigg\}\ (i=4,5,6). \qquad (2.I.I4)$$

Тогда, используя (2.I.IO)-(2.I.I4), будем иметь

$$\int\limits_{R_2} \left|H_1(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|^p d\vec{x} \le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\int\limits_{R_2} \frac{d\vec{x}}{|x_1|^p|x_2|^p}\Bigg[m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| a_{0,i_2} +$$

$$+ m_1^{-1}m_2^{-1}\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} a_{i_1,i_2} +$$

$$+ m_1^{-1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} a_{i_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right| +$$

$$+ m_1^{-\alpha_1}m_2^{-1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} a_{\left[\frac{m_1}{2}\right],i_2}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right| +$$

$$+ m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2} a_{\left[\frac{m_1}{2}\right],\left[\frac{m_2}{2}\right]}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\;\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\Bigg]^p .$$

Отсюда согласно (2.I.2) находим

$$\int\limits_{R_2} \left|H_1(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|^p d\vec{x} \to 0 \quad \text{при} \quad \vec{m}\to\infty . \qquad (2.I.15)$$

Совершенно аналогично можно получить, что

$$\int\limits_{R_2} \left|H_2(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|^p d\vec{x} \to 0 \quad \text{при} \quad \vec{m}\to\infty . \qquad (2.I.16)$$

Анализируя схему доказательства (2.I.I5) заключаем, что оценка (2.I.I4) справедлива и для $H_3(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})$ из (2.I.8). Следовательно,

$$\int\limits_{R_2} |H_3(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})|^p d\vec{x} \to 0 \qquad \text{при} \quad \vec{m}\to\infty . \qquad (2.I.I7)$$

Таким образом, в силу (2.I.8), (2.I.I5)-(2.I.I7), будем иметь

$$\int\limits_{R_2} \left| \sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B) - f_B(\vec{x}) \right|^p d\vec{x} \to 0 \quad \text{при} \quad \vec{m}\to\infty,$$

т.е. достаточная часть теоремы (2.I.I) доказана и в двумерном случае.

Докажем необходимость условия (2.I.2) при $n=2$. Имеем

$$\frac{a_{m_1,m_2}\cos m_1x_1 \cos m_2x_2}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} \frac{A_{m_1-i_1}^{-\alpha_1-2} A_{m_2-i_2}^{-\alpha_2-2} A_{i_1}^{\alpha_1} A_{i_2}^{\alpha_2} \sigma_{i_1,i_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} .$$

Отсюда

$$\left| \frac{a_{m_1,m_2}\cos m_1x_1 \cos m_2x_2}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} \right| \le$$

$$\leq \frac{1}{|A_{m_1}^{\alpha_1}||A_{m_2}^{\alpha_2}|}\left\{\sum_{i_1=0}^{[\frac{m_1}{2}]}\sum_{i_2=0}^{[\frac{m_2}{2}]}+\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{[\frac{m_2}{2}]}+\sum_{i_1=0}^{[\frac{m_1}{2}]}\sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}\right\}|A_{m_1-i_1}^{-\alpha_1-2}||A_{m_2-i_2}^{-\alpha_2-2}||A_{i_1}^{\alpha_1}||A_{i_2}^{\alpha_2}| \times$$

$$\times\left|\sigma_{i_1,i_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right|.$$

Отсюда

$$\int_{R_2}\left|\frac{a_{m_1,m_2}\cos m_1x_1\cos m_2x_2}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\right|^p d\vec{x} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|A_{m_1}^{\alpha_1}|^p|A_{m_2}^{\alpha_2}|^p}\left(\sum_{i_1=0}^{[\frac{m_1}{2}]}\sum_{i_2=0}^{[\frac{m_2}{2}]}+\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{[\frac{m_2}{2}]}+\sum_{i_1=0}^{[\frac{m_1}{2}]}\sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}\right)|A_{m_1-i_1}^{-\alpha_1-2}|^p|A_{m_2-i_2}^{-\alpha_2-2}|^p|A_{i_1}^{\alpha_1}|^p|A_{i_2}^{\alpha_2}|^p \times$$

$$\times\int_{R_2}\left|\sigma_{i_1,i_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right|^p d\vec{x}. \qquad (2.I.I8)$$

Анализируя доказательство соотношений (2.I.II)-(2.I.I4), принимая во внимание неотрицательность убывающей в смысле Харди последовательности a_{m_1,m_2} и тот факт, что $a_{m_1,m_2}\to 0$ при $\vec{m}\to\infty$, заключаем

$$\left|A_{i_1}^{\alpha_1}\right|^p \left|A_{i_2}^{\alpha_2}\right|^p \int_{R_2} \left|\sigma_{i_1,i_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right|^p d\vec{x} \to 0 \quad \text{при } \|\vec{i}\| \to \infty.$$

Тогда согласно (2.I.I8) с применением (2.I.5) находим

$$\int_{R_2} \left| \frac{a_{m_1,m_2} \cos m_1 x_1 \cos m_2 x_2}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} \right|^p d\vec{x} \to 0 \quad \text{при } \|\vec{m}\| \to \infty$$

и $p \in (\beta, 1)$, где $\beta = \max\left(\frac{1}{2+\alpha_1}, \frac{1}{2+\alpha_2}\right)$.

Стало быть,

$$m_1^{-\alpha_1} m_2^{-\alpha_2} a_{m_1,m_2} \to 0, \quad \text{когда } \|\vec{m}\| \to \infty.$$

Заметим, что выражения

$$\widetilde{\mathcal{D}}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

обладают всеми свойствами, которыми мы пользовались (для $\mathcal{D}_n(t)$) при доказательстве теоремы (2.I.I). Стало быть, теорема (2.I.I) верна и для двумерных сопряженных тригонометрических рядов.

Нетрудно видеть, что метод, которым пользовались при $n=2$ остается в силе и в случае $n \geq 3$. Стало быть, теорема (2.I.I) полностью доказана.

Схема доказательства теоремы (2.I.I) приводит к следующему заключению.

Теорема 2.I.2. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ убывающая последовательность в смысле Харди, $a_{\vec{p}} \to 0$ при $\|\vec{p}\| \to \infty$ и $\alpha_i \in (-1,0)$ $(i=\overline{1,n})$.

Для того, чтобы при любом $p\in(0,1)$ кратная последовательность

$$\left(\int_{R_2} \left| f_B(\vec{x}) - \sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x},B)\right|^p d\vec{x}\right)_{\vec{m}\geq\vec{0}}$$

была ограниченной необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{\vec{m}} \prod_{i=1}^{n} m_i^{-\alpha_i} = O(1) \quad \text{при } \|\vec{m}\|\to\infty. \qquad (2.I.19)$$

§ 2. Суммируемость в L методом Чезаро простых и кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами

В этом параграфе будет изучен вопрос о поведении чезаровских средних ряда (I.I.2) в смысле сходимости метрики в $L(R_n)$.

Справедлива следующая

Теорема 2.2.I. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ выпуклая последовательность и $a_{\vec{p}} \to 0$ при $\|\vec{p}\| \to \infty$.

Для того, чтобы ряд (I.I.2) при $B=M$ был суммируемым методом Чезаро в метрике $L(R_n)$ необходимо и достаточно соблюдение соотношения (2.I.2).

Доказательство. Достаточность. Рассмотрим случай $n=1$.

Согласно (2.I.I) (как уже было отмечено при доказательстве теоремы (2.I.I)) имеем

$$\sigma_m^\alpha(x,B)-f(x)=\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{i=0}^{m}A_{m-i}^{\alpha-1}\left[S_i(x)-f(x)\right]\ (m>3),$$

где

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx \qquad 0<|x|\leq\pi,$$

$$S_i(x)=\sum_{k=0}^{i}a_k\cos kx.$$

Дважды применяя преобразование Абеля и рассуждая так же, как в [6] (см. стр. 294), получим

$$S_i(x)-f(x)=D_i(x)a_i+iK_{i-1}(x)\Delta a_{i-1}-$$

$$-\sum_{k=i-1}^{\infty}(k+1)\Delta^2 a_k K_k(x).$$

Стало быть,

$$\sigma_m^\alpha(x,B)-f(x)=$$

$$=\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{i=0}^{m}A_{m-i}^{\alpha-1}(D_i(x)a_i+iK_{i-1}(x)\Delta a_{i-1}-$$

$$-\sum_{k=i-1}^{\infty}(k+1)\Delta^2 a_k K_k(x)\Big) =$$

$$= J^{(1)}(m,\alpha,x) + J^{(2)}(m,\alpha,x) + J^{(3)}(m,\alpha,x). \qquad (2.2.I)$$

Для $J^{(1)}(m,\alpha,x)$ имеем

$$J^{(1)}(m,\alpha,x) =$$

$$= \frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} A_{m-i}^{\alpha-1} D_i(x) a_i + \frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m} A_{m-i}^{\alpha-1} D_i(x) a_i =$$

$$= \frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} A_{m-i}^{\alpha-1} D_i(x) a_i + \frac{1}{A_m^{\alpha}}\Big(-a_{[\frac{m}{2}]+1}\sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]} A_{m-j}^{\alpha-1} D_j(x) +$$

$$+ a_m \sum_{j=0}^{m} A_{m-j}^{\alpha-1} D_j(x) + \sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}\sum_{j=0}^{i} A_{m-j}^{\alpha-1} D_j(x)\Delta a_i\Big) =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{4} J^{(1,\lambda)}(m,\alpha,x). \qquad (2.2.2)$$

Согласно (2.I.2), (2.I.5) и (2.2.2) будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} |J^{(1,1)}(m,\alpha,x)| dx \le$$

$$\le C(\alpha) m^{-\alpha} \sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} A_{m-i}^{\alpha-1} a_i \int_{-\pi}^{\pi} |D_i(x)| dx \le$$

$$\le C(\alpha) m^{-1} \sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} a_i \log(i+2) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \qquad (2.2.3)$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{j=0}^{i} A_{m-j}^{\alpha-1}\,\mathcal{D}_j(x) =$$

$$=\frac{1}{2A_m^\alpha \sin\frac{x}{2}}\,\mathfrak{I}_m \sum_{j=0}^{i} A_{m-j}^{\alpha-1} e^{i(j+\frac{1}{2})x} =$$

$$=\mathfrak{I}_m \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{2A_m^\alpha \sin\frac{x}{2}} \sum_{j=m-i}^{m} A_j^{\alpha-1} e^{-ijx} =$$

$$=\mathfrak{I}_m \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{2A_m^\alpha \sin\frac{x}{2}}\left[\sum_{j=0}^{m} A_j^{\alpha-1} e^{-ijx} - \sum_{j=0}^{m-i-1} A_j^{\alpha-1} e^{-ijx}\right] =$$

$$=\mathfrak{I}_m \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{2A_m^\alpha \sin\frac{x}{2}}\left[\left(1-e^{-ix}\right)^{-\alpha} - \sum_{j=m+1}^{\infty} A_j^{\alpha-1} e^{-ijx} - \right.$$

$$\left. -\left(1-e^{-ix}\right)^{-\alpha} + \sum_{j=m-i}^{\infty} A_j^{\alpha-1} e^{-ijx}\right] =$$

$$=\mathfrak{I}_m \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{2A_m^\alpha \sin\frac{x}{2}}\left\{\left[\left(1-e^{-ix}\right)^{-\alpha} - \sum_{j=m+1}^{\infty} A_j^{\alpha-1} e^{-ijx}\right] + \right.$$

$$\left. +\left[-\left(1-e^{-ix}\right)^{-\alpha} + \sum_{j=m-i}^{\infty} A_j^{\alpha-1} e^{-ijx}\right]\right\} =$$

$$= K_m^\alpha(x) + \Theta(m,i,\alpha,x), \qquad (2.2.4)$$

где $K_m^\alpha(x)$ – ядро Чезаро (см., напр., [6], стр. 158), а

$$\Theta(m,i,\alpha,x)=\mathcal{J}_m\frac{e^{i(m+\frac{1}{2})x}}{2A_m^\alpha\sin\frac{x}{2}}\left[-\left(1-e^{-ix}\right)^{-\alpha}+\sum_{j=m-i}^{\infty}A_j^{\alpha-1}e^{-ijx}\right]=$$

$$=\varphi_1(m,i,\alpha,x)+\varphi_2(m,i,\alpha,x). \qquad (2.2.5)$$

Так как (см., напр., [6], стр. 158-160):

$$K_m^\alpha(x)=\frac{1}{A_m^\alpha}\,\frac{\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)x-\frac{1}{2}\pi\alpha\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha+1}}+$$

$$+\frac{2k\alpha}{m\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}\equiv U_m^\alpha(x)+\tau_m^\alpha(x),\ (|k|\le 1), \qquad (2.2.6)$$

$$\left|\tau_m^\alpha(x)\right|\le\frac{C(\alpha)}{mx^2}\ \left(\frac{1}{m}\le x\le\pi\right),\ \left|K_m^\alpha(x)\right|\le C(\alpha)m, \qquad (2.2.7)$$

то имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|K_m^\alpha(x)\right|dx\le C\left[\int_0^{\frac{1}{m}}\left|K_m^\alpha(x)\right|dx+\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\left|U_m^\alpha(x)\right|dx+\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\left|\tau_m^\alpha(x)\right|dx\right]\le C(\alpha)+C_1(\alpha)m^{-\alpha}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}+$$

$$+C_2(\alpha)\frac{1}{m}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dx}{x^2}\le O(m^{-\alpha}),\quad m\to\infty. \qquad (2.2.8)$$

Нетрудно заметить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|J^{(1,2)}(m,\alpha,x)\right|dx =$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{A_m^\alpha}a_{[\frac{m}{2}]}\sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]-1}A_{m-j}^{\alpha-1}\mathcal{D}_j(x)\right|dx \leq$$

$$\leq C(\alpha)m^{-\alpha}a_{[\frac{m}{2}]}m^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{D}_j(x)\right|dx \leq$$

$$\leq C(\alpha)a_{[\frac{m}{2}]}m^{-1}\sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]-1}\log(j+2) \leq$$

$$\leq C(\alpha)a_{[\frac{m}{2}]}\log m \to 0,\ m\to\infty. \qquad (2.2.9)$$

И, аналогично,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|J^{(1,3)}(m,\alpha,x)\right|dx =$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{A_m^\alpha}a_m\sum_{j=0}^{m}A_{m-j}^{\alpha-1}\mathcal{D}_j(x)\right|dx \leq$$

$$\leq C(\alpha)\,m^{-\alpha}a_m \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty. \qquad (2.2.10)$$

Так как

$$\sum_{i=[\frac{m}{2}]}^{m}(a_i-a_{i+1})=a_{[\frac{m}{2}]}-a_{m+1}>\frac{m}{2}(a_m-a_{m+1})$$

и согласно (2.I.2)

$$m^{1-\alpha}\Delta a_m \to 0 \qquad (2.2.II)$$

при $m\to\infty$, то (см. (2.2.2)) имеем

$$\int_0^{\frac{1}{m}}\left|\frac{1}{A_m^\alpha}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}A_{m-j}^{\alpha-1}\mathcal{D}_j(x)\Delta a_i\right|dx \le$$

$$\le C(\alpha)m^{-\alpha}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}\Delta a_i\sum_{j=0}^{i}(m-j)^{\alpha-1}\le$$

$$\le C(\alpha)m^{-\alpha}\frac{m}{2}\left(a_{[\frac{m}{2}]}-a_{[\frac{m}{2}]+1}\right)\to 0 \quad \text{при } m\to\infty. \qquad (2.2.I2)$$

С другой стороны, учитывая (2.2.5) и (2.2.II) имеем

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\left|\mathfrak{I}^{(1,4)}(m,\alpha,x)\right|dx\le C(\alpha)m^{-\alpha}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}\Delta a_i+$$

$$+C(\alpha)m^{-\alpha}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}(m-i)^{\alpha-1}\Delta a_i\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dx}{x^2}\le$$

$$\le C_1(\alpha)m^{1-\alpha}\Delta a_{[\frac{m}{2}]}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m-1}(m-i)^{\alpha-1}\to 0$$

$$\text{при } m\to\infty. \qquad (2.2.I3)$$

Таким образом, используя (2.2.2), (2.2.3), (2.2.9), (2.2.I2), (2.2.I3) находим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{J}^{(1)}(m,\alpha,x)\right|dx = o(1) \qquad \text{при } m\to\infty. \quad (2.2.I4)$$

Так как для выпуклых последовательностей

$$i\Delta a_i \to 0 \qquad \text{при } m\to\infty,$$

то из (2.2.I) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\mathcal{J}^{(2)}(m,\alpha,x)\right|dx \le$$

$$\le \frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{i=0}^{m}\left|A_{m-i}^{\alpha-1}\right| i\Delta a_{i-1}\int_{-\pi}^{\pi}K_{i-1}(x)dx =$$

$$=\frac{\pi}{A_m^{\alpha}}\left[\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]}\left|A_{m-i}^{\alpha-1}\right| i\Delta a_{i-1}+\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m}\left|A_{m-i}^{\alpha-1}\right| i\Delta a_{i-1}\right]\le$$

$$\le C(\alpha)\left[\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} i\Delta a_{i-1}+m^{1-\alpha}\Delta a_{[\frac{m}{2}]}\sum_{i=[\frac{m}{2}]+1}^{m}\left|A_{m-i}^{\alpha-1}\right|\right]\to 0$$

$$\text{при } m\to\infty. \quad (2.I.I5)$$

С другой стороны,

$$(k+1)\Delta^2 a_k = \Delta k\Delta a_k + \Delta a_k.$$

Стало быть, согласно (2.2.I) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|J^{(3)}(m,\alpha,x)\right|dx \leq$$

$$\leq C(\alpha)m^{-\alpha}\sum_{i=0}^{m}\left|A_{m-i}^{\alpha-1}\right|\left[(i-1)\Delta a_{i-1}+a_{i-1}\right]\to 0$$

при $m\to\infty$. (2.2.I6)

Следовательно, на основании (2.2.I4)-(2.2.I6) будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sigma_m^{\alpha}(x,B)-f(x)\right|dx\to 0 \qquad \text{при } m\to\infty,$$

т.е. достаточная часть теоремы (2.2.I) при $n=1$ доказана, что касается необходимости, то она проверяется методом, использованным при доказательстве необходимости условия теоремы (2.I.I).

Рассмотрим теперь случай $n=2,\ B=\{1,2\}$. Согласно (2.I.7) будем иметь

$$\sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_1}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\left[S_{i_1,i_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right]$$

где (см. (I.3.II) и (I.3.I2)

$$S_{i_1,i_2}(\vec{x},B) =$$

$$=\sum_{p_1=0}^{i_1-2}\sum_{p_2=0}^{i_2-2}(p_1+1)(p_2+1)K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]+$$

$$+\sum_{p_1=0}^{i_1-2}(p_1+1)\,i_2K_{p_1}(x_1)K_{i_2-1}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,i_2-1},\{1,2\}),\{1\}]+$$

$$+\sum_{p_2=0}^{i_2-2}i_1(p_2+1)K_{i_1-1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{i_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}]+$$

$$+i_1\,i_2K_{i_1-1}(x_1)K_{i_2-1}(x_2)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\})+$$

$$+\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\left\{\sum_{p_1=0}^{i_1-2}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1\}),\{1\}]+\right.$$

$$\left.+i_1K_{i_1-1}(x_1)\Delta(a_{i_1-1,i_2},\{1\})\right\}+$$

$$+\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\left\{\sum_{p_2=0}^{i_2-2}(p_2+1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{i_1,p_2},\{2\}),\{2\}]+\right.$$

$$\left.+i_2K_{i_2-1}(x_2)\Delta(a_{i_1,i_2-1},\{2\})\right\}+$$

$$+\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\,\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\,a_{i_1,i_2}\,,$$

$$f_B(\vec{x})=\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}].$$

Стало быть,

$$\sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B) - f_B(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1} \left\{ \left(\sum_{p_1=0}^{i_1-2} \sum_{p_2=i_2-1}^{\infty} + \sum_{p_1=i_1-1}^{\infty} \sum_{p_2=0}^{i_2-2} + \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{p_1=i_1-1}^{\infty} \sum_{p_2=i_2-1}^{\infty} \right) (p_1+1)(p_2+1) K_{p_1}(x_1) K_{p_2}(x_2) \Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}] +$$

$$+ \mathcal{D}_{i_2}(x_2) \left\{ \sum_{p_1=0}^{i_1-2} (p_1+1) K_{p_1}(x_1) \Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1\}),\{1\}] + \right.$$

$$\left. + i_1 K_{i_1-1}(x_1) \Delta(a_{i_1-1,i_2},\{1\}) \right\} +$$

$$+ \mathcal{D}_{i_1}(x_1) \left\{ \sum_{p_2=0}^{i_2-2} (p_2+1) K_{p_2}(x_2) \Delta[\Delta(a_{i_1,p_2},\{2\}),\{2\}] + \right.$$

$$\left. + i_2 K_{i_2-1}(x_2) \Delta(a_{i_1,i_2-1},\{2\}) \right\} +$$

$$+ \sum_{p_1=0}^{i_1-2} (p_1+1) i_2 K_{p_1}(x_1) K_{i_2-1}(x_2) \Delta[\Delta(a_{p_1,i_2-1},\{1,2\}),\{1\}] +$$

$$+ \sum_{p_2=0}^{i_2-2} i_1 (p_2+1) K_{i_1-1}(x_1) K_{p_2}(x_2) \Delta[\Delta(a_{i_1-1,p_2},\{1,2\}),\{2\}] +$$

$$+ i_1 i_2 K_{i_1-1}(x_1) K_{i_2-1}(x_2) \Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\}) +$$

$$+\mathcal{D}_{i_1}(x_1)\,\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\,a_{i_1,i_2}\Big\} =$$

$$=\sum_{j=1}^{11} T_j(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (2.2.17)$$

Имем

$$T_1(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) =$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{p_1=0}^{i_1-1}\sum_{p_2=i_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\times$$

$$\times K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}] =$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=i_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\times$$

$$\times K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}] -$$

$$-\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{p_1=i_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=i_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\times$$

$$\times K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}] =$$

$$=\frac{1}{A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=i_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\times$$

$$\times\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}] -$$

$$-\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{p_1=i_1-1}^{\infty}\sum_{p_2=i_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\times$$

$$\times K_{p_1}(x_1)K_{p_2}(x_2)\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]=$$

$$=T_1^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})+T_1^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (2.2.18)$$

Имеем

$$\int_{R_2}\left|T_1^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha)m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=i_2-1}^{\infty}(p_1+1)(p_2+1)\times$$

$$\times\Delta[\Delta(a_{p_1,p_2},\{1,2\}),\{1,2\}]\leq$$

$$\leq C(\alpha)m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[(i_2-1)\Delta a_{0,i_2-1}+a_{0,i_2-1}\right]\to\infty$$

при $\vec{m}\to\infty$. (2.2.19)

Затем

$$\int_{R_2}\left|T_1^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha)m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\times$$

$$\times[(i_1-1)(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\})+$$

$$+(i_1-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1\})+(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{2\})+a_{i_1-1,i_2-1}\Big].$$

Отсюда

$$\int_{R_2}\left|T_1^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha)m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\Bigg[\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}+\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}+$$

$$+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\Bigg]\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\Big[(i_1-1)(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\})+$$

$$+(i_1-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1\})+(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{2\})+$$

$$+a_{i_1-1,i_2-1}\Big]. \tag{2.2.20}$$

Так как

$$\left.\begin{array}{ll}1.\ i_1^{1-\alpha_1}i_2^{1-\alpha_2}\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})\to 0 & \text{при } \|\vec{i}\|\to\infty,\\ 2.\ i_1^{1-\alpha_1}\Delta(a_{i_1,i_2},\{1\})=o(i_2^{\alpha_2}) & \text{при } \|\vec{i}\|\to\infty,\\ 3.\ i_2^{1-\alpha_2}\Delta(a_{i_1,i_2},\{2\})=o(i_1^{\alpha_1}) & \text{при } \|\vec{i}\|\to\infty,\\ 4.\ a_{i_1,i_2}\to 0 & \text{при } \|\vec{i}\|\to\infty,\end{array}\right\} \tag{2.2.21}$$

то из (2.2.20) находим

$$\int_{R_2}\left|T_1^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\le C(\alpha)\Bigg\{\frac{1}{m_1}\frac{1}{m_2}\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}(i_1-1)(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\})+$$

$$+(i_1-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1\})+(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{2\})+a_{i_1-1,i_2-1}+$$

$$+m_1^{-\alpha_1}m_2^{-1}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\Big[(i_1-1)(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\})+$$

$$+(i_1-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1\})+(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{2\})+a_{i_1-1,i_2-1}\Big]+$$

$$+m_1^{-1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\Big[(i_1-1)(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\})+$$

$$+(i_1-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1\})+(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{2\})+a_{i_1-1,i_2-1}\Big]+$$

$$+m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\Big[(i_1-1)(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1,2\})+$$

$$+(i_1-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{1\})+(i_2-1)\Delta(a_{i_1-1,i_2-1},\{2\})+$$

$$+a_{i_1-1,i_2-1}\Big]\Bigg\}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.22)$$

Таким образом, согласно (2.2.I8), (2.2.I9), (2.2.22) будем иметь

$$\int\limits_{R_2} \left| T_1(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) \right| d\vec{x} \to 0 \quad \text{при} \quad \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.23)$$

Совершенно аналогично получаем, что

$$\int\limits_{R_2} \left| T_j(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) \right| d\vec{x} \to 0 \quad \text{при} \quad \vec{m}\to\infty \quad (j=2,3,5,7,10). \qquad (2.2.24)$$

Далее, учитывая (2.2.17) имеем

$$T_4(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_{i_2}(x_2) \times$$

$$\times \sum_{p_1=0}^{i_1-2} (p_1+1) K_{p_1}(x_1) \Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1\}),\{1\}] =$$

$$= \frac{1}{A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_{i_2}(x_2) \sum_{p_1=0}^{\infty} (p_1+1) K_{p_1}(x_1) \Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1\}),\{1\}] -$$

$$- \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_{i_2}(x_2) \times$$

$$\times \sum_{p_1=i_1-1}^{\infty} (p_1+1) K_{p_1}(x_1) \Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1\}),\{1\}] =$$

$$= T_4^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) - T_4^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (2.2.25)$$

Используя преобразование Абеля, находим

$$T_4^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) =$$

$$=\frac{1}{A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\sum_{p_1=0}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1\}),\{1\}]+$$

$$+\frac{1}{A_{m_2}^{\alpha_2}}\Bigg\{-\sum_{j=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} A_{m_2-j}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_j(x_2)\sum_{p_1=0}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]},\{1\}),\{1\}]+$$

$$+\sum_{j=0}^{m_2} A_{m_2-j}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_j(x_2)\sum_{p_1=0}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,m_2},\{1\}),\{1\}]+$$

$$+\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2-1}\ \sum_{j=0}^{i_2} A_{m_2-j}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_j(x_2)\sum_{p_1=0}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1,2\}),\{1\}]\Bigg\}=$$

$$=T_4^{(1,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})+T_4^{(1,2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})+T_4^{(1,3)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})+T_4^{(1,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (2.2.26)$$

Используя (2.2.2I) из (2.2.26), имеем

$$\int_{R_2}\left|T_4^{(1,i)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \quad (i=1,2) \text{ при } \quad \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.27)$$

Используя (2.2.8) и (2.2.2I) находим

$$\int_{R_2}\left|T_4^{(1,3)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \quad \text{ при } \quad \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.28)$$

Принимая во внимание (2.2.5), (2.2.2I), согласно (2.2.26) будем иметь

$$\int\limits_{R_2}\left|T_4^{(1,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_2)m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2-1}\left|2\Delta(a_{0,i_2},\{2\})-\Delta(a_{1,i_2},\{2\})\right|+$$

$$+C_1(\alpha_2)m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2-1}(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}\left|2\Delta(a_{0,i_2},\{2\})-\right.$$

$$\left.-\Delta(a_{1,i_2},\{2\})\right|\int\limits_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\frac{dx_2}{x_2^2}+$$

$$+C_2(\alpha_2)m_2^{-\alpha_2}\int\limits_0^{\frac{1}{m_2}}\left\{\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\sum_{j=0}^{i_2}\left|A_{m_2-j}^{\alpha_2-1}\right|\left|\mathcal{D}_j(x_2)\right|\times\right.$$

$$\left.\times\left|2\Delta(a_{0,i_2},\{2\})-\Delta(a_{1,i_2},\{2\})\right|\right\}dx_2\to 0\qquad\text{при } \vec{m}\to\infty.$$

Последнее соотношение вместе с (2.2.26)-(2.2.28) дает

$$\int\limits_{R_2}\left|T_4^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0\qquad\text{при}\quad \vec{m}\to\infty. \tag{2.2.29}$$

Согласно (2.2.25) имеем

$$T_4^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\left(\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}+\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\right)\times$$

$$\times A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\sum_{p_1=i_1+1}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta[\Delta(a_{p_1,i_2},\{1\}),\{1\}]=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{4}T_4^{(2,\lambda)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (2.2.30)$$

Далее

$$\int_{R_2}\left|T_4^{(2,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-1}m_2^{-1}\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\log(i_2+2)\times$$

$$\times\left(\Delta(a_{i_1,i_2},\{1\})+a_{i_1,i_2}\right)\to 0 \quad \text{при } \vec{m}\to\infty \qquad (2.2.31)$$

и

$$\int_{R_2}\left|T_4^{(2,2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-1}m_2^{-1}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\log(i_2+2)\times$$

$$\times\left(\Delta(a_{i_1,i_2},\{1\})+a_{i_1,i_2}\right)\to 0 \quad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.32)$$

Применяя преобразование Абеля для $T_4^{(2,3)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})$ имеем

$$T_4^{(2,3)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) =$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\Bigg\{-\sum_{j=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}A_{m_2-j}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_j(x_2)\times$$

$$\times\sum_{p_1=i_1+1}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta\left[\Delta\left(a_{p_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1},\{1\}\right),\{1\}\right]+$$

$$+\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2-1}\sum_{j=0}^{i_2}A_{m_2-j}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_j(x_2)\sum_{p_1=i_1+1}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta\left[\Delta\left(a_{p_1,i_2},\{1,2\}\right),\{1\}\right]+$$

$$+\sum_{j=0}^{m_2}A_{m_2-j}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_j(x_2)\sum_{p_1=i_1+1}^{\infty}(p_1+1)K_{p_1}(x_1)\Delta\left[\Delta\left(a_{p_1,m_2},\{1\}\right),\{1\}\right]\Bigg\}.$$

Отюда согласно (2.2.4), (2.2.5) и (2.2.2I) (см. оценку $T^{(1,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})$) находим

$$\int_{R_2}\left|T_4^{(2,3)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.33)$$

Совешенно аналогично получаем, что

$$\int_{R_2}\left|T_4^{(2,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.34)$$

Стл: быть, пользуясь соотношениями (2.2.25), (2.2.29)-(2.2.34) заключаем, что верно следующее соотношение

$$\int\limits_{R_2} \left| T_4(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) \right| d\vec{x} \to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.35)$$

Совершенно таким же образом находим

$$\int\limits_{R_2} \left| T_6(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) \right| d\vec{x} \to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.36)$$

Нетрудно заметить, что

$$\int\limits_{R_2} \left| T_j(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) \right| d\vec{x} \to 0 \quad (j=8,9) \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.37)$$

Теперь рассмотрим выражение $T_{11}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})$ из соотношения (2.2.17). Имеем

$$\mathbb{T}_{11}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\, a_{i_1,i_2} =$$

$$= \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1} A_{m_2}^{\alpha_2}} \left(\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} + \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} + \sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2} + \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1} \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2} \right) \times$$

$$\times A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_{i_1}(x_1)\mathcal{D}_{i_2}(x_2)\, a_{i_1,i_2} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{4} T_{11}^{(\lambda)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (2.2.38)$$

Анализируя метод, примененный при оценке $T_4^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})$ (см. 2.2.30)) заключаем

$$\int\limits_{R_2}\left|T_{11}^{(i)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \quad i=(1,2,3) \text{ при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.39)$$

Применяя преобразование Харди (см. I.I.I)) согласно (2.2.38) будем иметь

$$T_{11}^{(4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\Bigg\{\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1}\ \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2-1}\ \sum_{k=0}^{i_1}\sum_{\ell=0}^{i_2}A_{m_1-k}^{\alpha_1-1}A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1}\times$$

$$\times\mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2)\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})-$$

$$-\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1}\ \sum_{k=0}^{i_1}\ \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}A_{m_1-k}^{\alpha_1-1}A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2)\Delta(a_{i_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1},\{1\})-$$

$$-\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2-1}\ \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\ \sum_{\ell=0}^{i_2}A_{m_1-k}^{\alpha_1-1}A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2)\Delta(a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,i_2},\{2\})+$$

$$+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1}\ \sum_{k=0}^{i_1}\ \sum_{\ell=0}^{m_2}A_{m_1-k}^{\alpha_1-1}A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2)\Delta(a_{i_1,m_2},\{1\})+$$

$$+\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2-1}\ \sum_{k=0}^{m_1}\ \sum_{\ell=0}^{i_2}A_{m_1-k}^{\alpha_1-1}A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2)\Delta(a_{m_1,i_2},\{2\})+$$

$$+\sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{\ell=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} A_{m_1-k}^{\alpha_1-1} A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2) a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1} -$$

$$-\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{\ell=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} A_{m_1-k}^{\alpha_1-1} A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2) a_{m_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1} -$$

$$-\sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{\ell=0}^{m_2} A_{m_1-k}^{\alpha_1-1} A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2) a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,m_2} +$$

$$+\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{\ell=0}^{m_2} A_{m_1-k}^{\alpha_1-1} A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1} \mathcal{D}_k(x_1)\mathcal{D}_\ell(x_2) a_{m_1,m_2} \Bigg\} =$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{9} T_{11}^{(4,\lambda)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (2.2.40)$$

Далее имеем

$$\int_0^{\frac{1}{m_1}}\int_0^{\frac{1}{m_2}} \left|T_{11}^{(4,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right| d\vec{x} \le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2) m_1^{-\alpha_1} m_2^{-\alpha_2} \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1} \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2} \sum_{k=0}^{i_1}\sum_{\ell=0}^{i_2} \left|A_{m_1-k}^{\alpha_1-1}\right| \left|A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1}\right| \times$$

$$\times \Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\}) \le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2) m_1^{-\alpha_1} m_2^{-\alpha_2} \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1} \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2} \Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\}) \le$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{\left[\frac{m_1}{2}\right],\left[\frac{m_2}{2}\right]}\to 0 \quad \text{при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.41)$$

Кроме этого

$$\int_0^{\frac{1}{m_1}}\int_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\left|T_{11}^{(4,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)\,m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\;\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\;\sum_{k=0}^{i_1}\left|A_{m_1-k}^{\alpha_1-1}\right|\times$$

$$\times\int_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\left|\sum_{\ell=0}^{i_2}A_{m_2-\ell}^{\alpha_2-1}\mathcal{D}_\ell(x_2)\right|dx_2\,\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\}).$$

Отсюда, используя (2.2.4), (2.2.5) и (2.2.8) находим

$$\int_0^{\frac{1}{m_1}}\int_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\left|T_{11}^{(4,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\;\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\;\int_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\Big|K_{m_2}^{\alpha_2}(x_2)+\varphi_1(m_2,i_2,\alpha_2,x_2)+$$

$$+\varphi_2(m_2,i_2,\alpha_2,x_2)\Big|dx_2\,\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-\alpha_1}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\;\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left[m_2^{-\alpha_2}+m_2^{-\alpha_2}+m_2^{-\alpha_2}(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}\times\right.$$

$$\times\int_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\frac{dx_2}{x_2^2}\Big]\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\Big[m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{[\frac{m_1}{2}],[\frac{m_2}{2}]}+m_1^{-\alpha_1}m_2^{1-\alpha_2}\times$$

$$\times\sum_{i_1=[\frac{m_1}{2}]+1}^{m_1}\ \sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})\Big]\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\Big[m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{[\frac{m_1}{2}],[\frac{m_2}{2}]}+m_1^{-\alpha_1}m_2^{1-\alpha_2}\times$$

$$\times\sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}\Big(a_{[\frac{m_1}{2}]+1,i_2}-a_{m_1,i_2}-a_{[\frac{m_1}{2}]+1,i_2+1}+a_{m_1,i_2+1}\Big)\Big]\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\Big\{m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{[\frac{m_1}{2}],[\frac{m_2}{2}]}+m_1^{-\alpha_1}m_2^{1-\alpha_2}\sum_{i_2=[\frac{m_2}{2}]+1}^{m_2}(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}\times$$

$$\times\Big[\Big(a_{[\frac{m_1}{2}]+1,i_2}-a_{[\frac{m_1}{2}]+1,i_2+1}\Big)+\Big(a_{m_1,i_2}-a_{m_1,i_2+1}\Big)\Big]\Big\}\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\Big\{m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{[\frac{m_1}{2}],[\frac{m_2}{2}]}+m_1^{-\alpha_1}m_2^{1-\alpha_2}\Big[\Big(a_{[\frac{m_1}{2}]+1,[\frac{m_2}{2}]+1}-$$

$$-a_{[\frac{m_1}{2}]+1,[\frac{m_2}{2}]+2}\Big)+\Big(a_{m_1,[\frac{m_2}{2}]+1}-a_{m_1,[\frac{m_2}{2}]+2}\Big)\Big]\Big\}.$$

Отсюда согласно (2.I.2) и (2.2.2I) находим

$$\int_0^{\frac{1}{m_1}}\int_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\Big|T_{11}^{(4,1)}(\vec m,\vec\alpha,\vec x)\Big|d\vec x\to 0\quad \text{при } \vec m\to\infty. \qquad (2.2.42)$$

Стало быть,

$$\int\limits_{\frac{1}{m_1}}^{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{1}{m_2}}\left|T_{11}^{(4,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \text{ при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.43)$$

Аналогично, используя (2.2.4), (2.2.5), (2.2.8) находим

$$\int\limits_{\frac{1}{m_1}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\left|T_{11}^{(4,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\ \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\ \int\limits_{\frac{1}{m_1}}^{\pi}\left|K_{m_1}^{\alpha_1}(x_1)+\varphi_1(m_1,i_1,\alpha_1,x_1)+\right.$$

$$\left.+\varphi_2(m_1,i_1,\alpha_1,x_1)\right|dx_1\int\limits_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\left|K_{m_2}^{\alpha_2}(x_2)+\varphi_1(m_2,i_2,\alpha_2,x_2)+\right.$$

$$\left.+\varphi_2(m_2,i_2,\alpha_2,x_2)\right|dx_2\,\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\ \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left\{\left[m_1^{-\alpha_1}+m_1^{-\alpha_1}(m_1-i_1)^{\alpha_1-1}\int\limits_{\frac{1}{m_1}}^{\pi}\frac{dx_1}{x_1^2}\right]\times\right.$$

$$\times\left[m_2^{-\alpha_2}+m_2^{-\alpha_2}(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}\int\limits_{\frac{1}{m_2}}^{\pi}\frac{dx_2}{x_2^2}\right]\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\ \sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left[m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}+m_1^{-\alpha_1}m_2^{1-\alpha_2}(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}+\right.$$

$$+m_1^{1-\alpha_1}(m_1-i_1)^{\alpha_1-1}m_2^{-\alpha_2}+m_1^{1-\alpha_1}\,m_2^{1-\alpha_2}(m_1-i_1)^{\alpha_1-1}\times$$

$$\times(m_2-i_2)^{\alpha_2-1}\Big]\Delta(a_{i_1,i_2},\{1,2\})\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\Big[m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{\left[\frac{m_1}{2}\right],\left[\frac{m_2}{2}\right]}+m_1^{-\alpha_1}m_2^{1-\alpha_2}\Big(a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}-$$

$$-a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+2}\Big)+m_1^{1-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\Big(a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}-a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+2,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}\Big)+$$

$$+m_1^{1-\alpha_1}m_2^{1-\alpha_2}\Big(a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}-a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+2,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}-$$

$$-a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+2}+a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+2,\left[\frac{m_2}{2}\right]+2}\Big)\Big]\to 0 \quad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.44)$$

Таким образом, на основании (2.2.40)-(2.2.44) заключаем

$$\int\limits_{R_2}\left|T_{11}^{(4,1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \quad \text{при} \quad \vec{m}\to\infty. \qquad (2.2.45)$$

Далее, имеем

$$\int\limits_0^{\frac{1}{m_1}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|T_{11}^{(4,2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\,m_1^{-\alpha_1}m_2^{-1}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1}\sum_{k=0}^{i_1}\sum_{l=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\log(l+2)(m_1-k)^{\alpha_1-1}\times$$

$$\times\Delta(a_{i_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1},\{1\})\le C(\alpha_1,\alpha_2)\,m_1^{-\alpha_1}m_2^{-1}\times$$

$$\times \log(m_2+2) m_2 a_{\left[\frac{m_1}{2}\right],\left[\frac{m_2}{2}\right]+1} \to 0 \quad \text{при } \vec{m} \to \infty. \quad (2.2.46)$$

Затем

$$\int_{\frac{1}{m_1}}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| T_{11}^{(4,2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) \right| d\vec{x} \le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2) m_2^{-1} \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1} \sum_{\ell=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} \log(\ell+2) \int_{\frac{1}{m_1}}^{\pi} \left| K_{m_1}^{\alpha_1}(x_1) + \varphi_1(m_1,i_1,\alpha_1,x_1) + \right.$$

$$\left. + \varphi_2(m_1,i_1,\alpha_1,x_1) \right| dx_1 \, \Delta\left(a_{i_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}, \{1\}\right) \le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2) \log(m_2+2) \sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1} \left[m_1^{-\alpha_1} + m_1^{1-\alpha_1}(m_1-i_1)^{\alpha_1-1} \right] \Delta\left(a_{i_1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}, \{1\}\right) \le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2) \left[m_1^{-\alpha_1} \log(m_2+2) a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1} + \log(m_2+2) m_1^{1-\alpha_1} \times \right.$$

$$\left. \times \left(a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+1,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1} - a_{\left[\frac{m_1}{2}\right]+2,\left[\frac{m_2}{2}\right]+1} \right) \right] \to 0 \quad \text{при } \vec{m} \to \infty. \quad (2.2.47)$$

Следовательно, в силу (2.2.46), (2.2.47) находим

$$\int_{R_2} \left| T_{11}^{(4,2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}) \right| d\vec{x} \to 0 \quad \text{при } \vec{m} \to \infty. \quad (2.2.48)$$

Совершенно аналогично получаем, что

$$\int_{R_2}\left|T_{11}^{(4,3)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.49)$$

Для $T_{11}^{(4,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})$ на основании (2.2.4), (2.2.5), (2.2.8) имеем

$$\int_0^{\frac{1}{m_1}}\int_{-\pi}^{\pi}\left|T_{11}^{(4,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-\alpha_1}\int_{-\pi}^{\pi}\left|K_{m_2}^{\alpha_2}(x_2)\right|dx_2\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1}\Delta(a_{i_1,m_2},\{1\})\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}a_{\left[\frac{m_1}{2}\right],m_2}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty \quad (2.2.50)$$

и

$$\int_{\frac{1}{m_1}}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|T_{11}^{(4,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_1,\alpha_2)\int_{-\pi}^{\pi}\left|K_{m_2}^{\alpha_2}(x_2)\right|dx_2\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1-1}\int_{\frac{1}{m_1}}^{\pi}\left|K_{m_1}^{\alpha_1}(x_1)+\varphi_1(m_1,i_1,\alpha_1,x_1)+\right.$$

$$\left.+\varphi_2(m_1,i_1,\alpha_1,x_1)\right|dx_1\Delta(a_{i_1,m_2},\{1\})\to 0 \text{ при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.5I)$$

Таким образом (см. (2.2.50) и (2.2.5I)),

$$\int\limits_{R_2}\left|T_{11}^{(4,4)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.52)$$

Теперь нетрудно заключить, что

$$\int\limits_{R_2}\left|T_{11}^{(4,\lambda)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \quad (\lambda=5-9) \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.53)$$

Стало быть, используя (2.2.38)-(2.2.40), (2.2.42), (2.2.45), (2.2.48), (2.2.49), (2.2.52), (2.2.53), будем иметь

$$\int\limits_{R_2}\left|T_{11}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty. \quad (2.2.54)$$

Тогда согласно (2.2.I7), (2.2.23), (2.2.24), (2.2.35), (2.2.36), (2.2.37), (2.2.54) будем иметь:

$$\int\limits_{R_2}\left|\sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \qquad \text{при } \vec{m}\to\infty,$$

т.е. достаточная часть теоремы (2.2.I) при $n=2$ доказана.

Необходимая часть теоремы (2.2.I) проверяется аналогично доказательству необходимой части теоремы (2.I.I) при $0<p<1$.

Замечание 2.2.I. Метод, с помощью которого была доказана теорема (2.2.I) при $n=2$, проходит и для случая $n\geqslant 3$; естественно надо использовать свойства выпуклых кратных последовательностей и применять преобразование Харди.

Метод доказательства теоремы (2.2.I) приводит к заключению, что верна следующая

Теорема 2.2.2. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geqslant\vec{0}}$ выпуклая последовательность и $a_{\vec{p}}\to 0$ при $\|\vec{p}\|\to\infty$.

Для того, чтобы кратная последовательность

$$\left(\int_{R_n}\left|f_M(\vec{x})-\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x},M)\right|d\vec{x}\right)_{\vec{m}\geqslant\vec{0}}$$

была ограничена необходимо и достаточно выполнение условия (2.I.I9).

Справедлива и такая

Теорема 2.2.3. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geqslant\vec{0}}$ выпуклая последовательность и $a_{\vec{p}}\to 0$ при $\|\vec{p}\|\to\infty$.

Для того, чтобы все ряды (I.I.2) с $B\subset M$ $(B\neq M, B\neq\emptyset)$ были суммируемыми методом Чезаро в метрике $L(R_n)$ к суммируемым функциям, т.е.

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}\int_{R_n}\left|\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x},B)-f_B(\vec{x})\right|d\vec{x}=0$$

необходимо и достаточно соблюдение условия (2.I.2).

Достаточная часть теоремы (2.2.3) доказывается совершенно также как была доказана достаточная часть теоремы (2.2.I); естественно, надо учесть (в соответствующих местах) следующие свойства (см., напр., [6], стр. I59-I60) сопряженного ядра Чезаро:

$$\tilde{K}_m^{\alpha}(x)=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{\alpha-1}\tilde{D}_k(x)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{\alpha-1}\frac{\cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\Psi_m^{\alpha}(x)+\tau_m^{\alpha}(x);$$

$$\left|\tilde{K}_m^{\alpha}(x)\right|\leq C(\alpha)m,\quad\left|\tau_m^{\alpha}(x)\right|\leq\frac{C(\alpha)}{mx^2},\ \frac{1}{m}\leq x\leq\pi;$$

$$\Psi_m^{\alpha}(x)=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\frac{\cos\left[\left(m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)x-\frac{1}{2}\pi\alpha\right]}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^{\alpha+1}}.$$

Что касается необходимости условия теоремы (2.2.3), то она проверяется так же как соответствующая часть теоремы (2.2.I).

При рассмотрении теорем (2.I.I), (2.I.2), (2.2.I)-(2.2.3) мы предполагали, что $\alpha_i\in(-1,0)$ $(i=\overline{1,n})$, а в теоремах (I.2.I), (I.3.I), (I.3.2) предполагалось $\alpha_i=0$ $(i=\overline{1,n})$. Если $\alpha_i>0$ $(i=\overline{1,n})$, то верны следующие теоремы:

<u>Теорема 2.2.4</u>. Если $(a_{\vec p})_{\vec p\geq\vec 0}$ выпуклая последовательность и выполняется условие (I.3.I0), то

$$\lim_{\vec m\to\infty}\int_{R_n}\left|\sigma_{\vec m}^{\vec\alpha}(\vec x,M)-f_M(\vec x)\right|d\vec x=0.$$

<u>Теорема 2.2.5</u>. Пусть $(a_{\vec p})_{\vec p\geq\vec 0}$ убывает в смысле Харди и $a_{\vec p}\to 0$ при $\|\vec p\|\to\infty$.

Если выполнено условие (I.3.2), то для любого $B\subset M$

$$\lim_{\vec m\to\infty}\int_{R_n}\left|\sigma_{\vec m}^{\vec\alpha}(\vec x,B)-f_B(\vec x)\right|d\vec x=0.$$

Эти теоремы получаются таким же методом как была доказана теорема (2.2.I). Надо заметить, что в одномерном случае метод

Чезаро обладает свойством включения в том смысле, что из суммируемости методом (C,α) функционального ряда в метрике L вытекает (C,α') суммируемость в метрике L при $\alpha'>\alpha$ (см., напр., [12], стр. 131 для числовых рядов; а метод остается в силе и для функциональных рядов).

Стало быть, эти теоремы (см. (2.2.4), (2.2.5)) в одномерном случае можно получить из соответствующих теорем А.Н.Колмогорова [10] и У.Юнга [11]. С другой стороны, как известно (см. [13], стр. 186-187), в многомерном случае метод Чезаро не обладает свойством включения, поэтому, теоремы (2.2.4), (2.2.5) нельзя получить из теорем (1.3.2), (1.3.1).

Условие (1.3.2) является необходимым для того, чтобы все сопряженные тригонометрические ряды из (1.1.2) имели суммы, интегрируемые на R_n.

Что касается аналога теоремы (2.1.1) в том случае, когда $\alpha_i>0$ $(i=\overline{1,n})$, то он имеет следующий вид

Теорема 2.2.6. Пусть $(a_{\vec p})_{\vec p\geqslant\vec 0}$ убывающая последовательность в смысле Харди и $a_{\vec p}\to 0$ при $\|\vec p\|\to\infty$, тогда для любого $B\subset M$ и $p\in(0,1)$ имеет место следующее соотношение

$$\lim_{\vec m\to\infty}\int_{R_n}\left|f_B(\vec x)-\sigma_{\vec m}^{\vec\alpha}(\vec x,B)\right|^p d\vec x=0.$$

Пусть $M=\mathcal{A}\cup C\cup\mathcal{D}$, где

$$A=\{i:\alpha_i\in(-1,0),\ i\in M\},$$
$$C=\{i:\alpha_i=0\ ,\quad i\in M\},$$
$$\mathcal{D}=\{i:\alpha_i\in(0,+\infty),\ i\in M\}.$$

Тогда при исследовании $\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x}, B)$ (в смысле сходимости в L^p $(p \in (0,1])$) надо от относительно соответствующих индексов $\alpha_{\vec{p}}$ потребовать соответствующие условия, фигурирующие в теоремах: (I.2.I), (I.3.I), (2.I.I), (2.2.6).

§ 3. Об одном свойстве ядра Чезаро отрицательного порядка

Как уже было отмечено, выражение

$$K_m^{\alpha}(x)=\frac{1}{A_m^{\alpha}}\sum_{k=0}^{m}A_{m-k}^{\alpha-1}\mathcal{D}_k(x)$$

называют ядром Чезаро. Пусть $\alpha\in(-1,0)$, тогда используя (2.2.6), (2.2.7) и (2.2.8) будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_m^{\alpha}(x)|dx\leq C(\alpha)m^{-\alpha}$$

и

$$\int_{0}^{\frac{1}{m}}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx\leq C(\alpha),\quad p\in(0,1].$$

Далее, если $p\in(0,1)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{m}}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx+2\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx\leq$$

$$\leq C(\alpha)\left[m^{p-1}+m^{-\alpha p}\int_{\frac{\pi}{m}}^{\pi}\frac{dx}{x^{(1+\alpha)p}}\right]\leq C(\alpha,p)m^{-\alpha p}\quad(m\geq m_0),$$

Стало быть,

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leq C(\alpha,p)m^{-\alpha}. \qquad (2.3.1)$$

С другой стороны (см. (2.2.6)), при $p\in(0,1]$

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\pi} |U_m(\alpha, x)|^p dx \geqslant$$

$$\geqslant C(\alpha,p) \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \left| m^{-\alpha} \frac{\sin[(m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha)x - \frac{1}{2}n\alpha]}{x^{\alpha+1}} \right|^p dx \geqslant$$

$$\geqslant C(\alpha,p)\, m^{-\alpha p} \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \frac{\{\sin[(m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha)x - \frac{1}{2}\pi\alpha]\}^2}{x^{(\alpha+1)p}} dx =$$

$$= C(\alpha,p)\, m^{-\alpha p} \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \frac{1-2\cos 2[(m+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha)x - \frac{1}{2}\pi\alpha]}{2x^{(\alpha+1)p}} dx \geqslant$$

$$\geqslant C(\alpha,p)\, m^{-\alpha p}. \qquad (2.3.2)$$

Затем, согласно (2.2.6)

$$|K_m^{\alpha}(x)| \geqslant |U_m^{\alpha}(x)| - |\tau_m^{\alpha}(x)|.$$

Стало быть,

$$|K_m^{\alpha}(x)|^p + |\tau_m^{\alpha}(x)|^p \geqslant |U_m^{\alpha}(x)|^p.$$

Тогда, учитывая (2.2.6) и (2.3.2), будем иметь

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\pi} |K_m^{\alpha}(x)|^p dx \geqslant \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} |U_m^{\alpha}(x)|^p dx -$$

$$- \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} |\tau_m^{\alpha}(x)|^p dx \geqslant C(\alpha,p)\, m^{-\alpha p}.$$

Таким образом, оценка (2.3.I) по порядку точная.

Замечание 2.3.I. Оценка (2.3.I) показывает, что для кратных методов Чезаро отрицательного порядка константы Лебега оцениваются так

$$C_1(\vec{\alpha},p)\prod_{i=1}^{n} m_i^{-\alpha_i} \leq \left\{\int_{R_n}\left|\prod_{i=1}^{n} K_{m_i}^{\alpha_i}(x_i)\right|^p d\vec{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_2(\vec{\alpha},p)\prod_{i=1}^{n} m_i^{-\alpha_i}, \quad p\in(0,1]. \qquad (2.3.3)$$

Стало быть, условия (2.I.I9) теоремы (2.I.2) связаны с порядком констант Лебега кратного метода Чезаро отрицательного порядка.

Рассмотрим теперь вопрос о поведении констант Лебега простого и кратного методов Чезаро отрицательного порядка в пространстве $L^p(R_n)$, где $p\in(1,+\infty)$.

Если снова применим (2.2.6), (2.2.7) и будем предполагать, что $p^{-1}+q^{-1}=1$, получим

$$\int_0^{\pi}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx=\int_0^{\frac{1}{m}}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx+\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx \leq$$

$$\leq C(\alpha,p)\left[\int_0^{\frac{1}{m}}[m]^p dx+\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}|U_m^{\alpha}(x)|^p dx+\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}|\tau_m^{\alpha}(x)|^p dx\right]\leq$$

$$\leq C(\alpha,p)\left[(m)^{p-1}+m^{-\alpha p}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dx}{x^{(1+\alpha)p}}+\frac{1}{m^p}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{dx}{x^{2p}}\right]\leq$$

$$\leq C(\alpha,p)\begin{cases} m^{p-1}+m^{-\alpha p} & \text{при } (\alpha+1)p<1,\\ m^{p-1}+m^{-\alpha p}\log m & \text{при } (\alpha+1)p=1,\\ m^{p-1} & \text{при } (\alpha+1)p>1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|K_m^{\alpha}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C(\alpha,p)\begin{cases} m^{-\alpha} & \text{при } (\alpha+1)p<1,\\ m^{-\alpha}(\log m)^{\frac{1}{p}} & \text{при } (\alpha+1)p=1,\\ m^{\frac{1}{q}} & \text{при } (\alpha+1)p>1. \end{cases} \qquad (2.3.4)$$

Отметим, что оценка (2.3.4) точная по порядку. Последнее можно показать рассуждением, с помощью которого была установлена точность по порядку оценки (2.3.I).

Теперь легко можно получить оценку в $L^p(R_n)$ $p\in(1,+\infty)$ кратного метода Чезаро отрицательного порядка. Положим

$M=A\cup C\cup \mathcal{D}$, где

$$A=\{i:(\alpha_i+1)p<1,\ i\in M\}$$

$$C=\{i:(\alpha_i+1)p=1,\ i\in M\}$$

$$\mathcal{D}=\{i:(\alpha_i+1)p>1,\ i\in M\}.$$

Тогда

$$\left\{\int_{R_n}\left|\prod_{i=1}^{n}K_{m_i}^{\alpha_i}(x_i)\right|^p d\vec{x}\right\}^{\frac{1}{p}} \leq C(\vec{\alpha},p)\prod_{i\in A} m_i^{-\alpha_i} \times$$

$$\times \prod_{j\in C} m_j^{-\alpha_j}\log m_j \prod_{k\in \mathfrak{L}} m_k^{\frac{1}{q}} \quad . \quad .$$

ГЛАВА III

СУММИРУЕМОСТЬ МЕТОДОМ ЧЕЗАРО ОБЩИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

§ I. Ряды Уолша-Пэли с монотонными коэффициентами

Пусть $\left(W_i(x)\right)_{i\geqslant 0}$ - простая система Уолша-Пэли [I4], [I5] и рассмотрим кратный ряд Уолша-Пэли (см. [I4], [I5])

$$\sum_{\vec{p}\geqslant\vec{0}} a_{\vec{p}} \prod_{i=1}^{n} W_{p_i}(x_i). \tag{3.I.I}$$

Через $S_{\vec{m}}(\vec{x})$ обозначим прямоугольные частичные суммы ряда (3.I.I). Как обычно, положим:

$$D_m(x)=\sum_{i=1}^{m} W_i(x), \tag{3.I.2}$$

$$K_m(x)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} D_i(x). \tag{3.I.3}$$

Известно (см. [I6], [I7]), что

$$\left|D_m(x)\right|<\frac{2}{x} \quad x\in(0,1] \ (m=1,2,\cdots). \tag{3.I.4}$$

Как показал Яно [I8]

$$\int_0^1 \left|K_m(x)\right| dx \leqslant C \quad (m=1,2,\cdots), \tag{3.I.5}$$

где C - положительная абсолютная константа.

В дальнейшем через

$$\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x})=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n} A_{m_i}^{\alpha_i}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\cdots A_{m_n-i_n}^{\alpha_n-1} S_{\vec{i}}(\vec{x})$$

будем обозначать Чезаровские средние ряда (3.I.I), где $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ и $\alpha_i \in (-1,+\infty)$, $(i=\overline{1,n})$.

Для простых рядов Уолша-Пэли с монотонными коэффициентами в настоящее время известны ряд важных результатов (см., напр., [19], стр. 172-177), в частности, аналоги, утвержденные П.Л.Ульяновым [5], А.Н.Колмогоровым [10] и У.Юнгом [11], полученные для тригонометрических рядов исследовали и развивали (для рядов Уолша-Пэли) А.И.Рубинштейн [20], А.А.Шнейдер [21], Л.А.Балашов [22], Яно [23], Фомин [24] и другие.

Что касается кратных рядов Уолша-Пэли с монотонными коэффициентами, то в этом направлении, насколько нам известно, почти ничего не сделано.

Справедливы следующие теоремы

Теорема 3.I.I. Пусть последовательность $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ удовлетворяет условиям

$$\text{I)}\quad \lim_{\|\vec{p}\|\to\infty} a_{\vec{p}}=0,$$

$$\text{2)}\quad \sum_{\vec{p}\geq\vec{0}}\left|\Delta(a_{\vec{p}},M)\right|<+\infty.$$

Тогда ряд (3.I.I) сходится в смысле Прингсхейма к f для любого $\vec{x}\in U_n$ с $x_i\in(0,1]$ $(i=1,\cdots,n)$; кроме того, в произвольном $p\in(0,1)$ имеет место следующее соотношение

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{U_n} \left| f(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x}) \right|^p d\vec{x} = 0.$$

Теорема 3.I.2. Если $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ выпуклая последовательность и

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} a_{\vec{p}} \prod_{i=1}^{n} \log(p_i+2) = 0,$$

то для любого $\vec{x} \in U_n$ с $x_i \in (0,1]$ $(i=\overline{1,n})$ ряд (3.I.I) сходится в смысле Прингсхейма к $f \in L(U_n)$ и

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{U_n} \left| f(\vec{x}) - S_{\vec{m}}(\vec{x}) \right| d\vec{x} = 0.$$

Теорема 3.I.3. Пусть $(a_{\vec{p}})_{\vec{p}\geq\vec{0}}$ убывающая последовательность в смысле Харди, $a_{\vec{p}} \to 0$ при $\|\vec{p}\| \to \infty$ и $\alpha_i \in (-1,0)$ $(i=\overline{1,n})$.

Для того, чтобы при любом $p \in (0,1)$ имело место соотношение

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{U_n} \left| f(\vec{x}) - \sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x}) \right|^p d\vec{x} = 0.$$

необходимо и достаточно выполнение условия (2.I.2).

Принимая во внимание (3.I.2)-(3.I.5) нетрудно убедиться, что теоремы (3.I.I)-(3.I.3) доказываются аналогично теоремам (I.2.I), (I.3.2) и (2.I.I).

§ 2. Суммируемость общих ортогональных рядов методом Чезаро в пространстве L

В дальнейшем через $(\varphi_{\vec{i}}(\vec{x}))_{\vec{i}\geqslant\vec{0}}$ будем обозначать n $(n\geqslant 1)$ кратную ортонормированную на $\mathcal{U}_n$ систему, а символом

$$\sum_{\vec{i}\geqslant\vec{0}} a_{\vec{i}}\,\varphi_{\vec{i}}(\vec{x}) \qquad (3.2.1)$$

обозначаем n -кратный ортогональный ряд. Прямоугольные частичные суммы будем обозначать через $S_{\vec{i}}(\vec{x})$ и, как и раньше, выражения $\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x})$ обозначают кратные Чезаровские средние ряда (3.2.1), причем $\alpha_i = (-1,+\infty)$ $(i=\overline{1,n})$.

В одномерном случае поведение $\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x})$ при $\alpha\geqslant 0$ достаточно хорошо изучено (см., напр., [25], стр. 85-144, 190-216; [26], стр. 217-227, 396-406).

Если $\alpha\in(-1,0)$, то для суммируемости методом (C,α) ряда (3.2.1) существуют (насколько нам известно) результаты Ченга [27], Суноучи и Яно [28]. Если $n\geqslant 2$, то в этом направлении сравнительно мало известно. Для случая $\alpha_i = 0$ $(i=\overline{1,n})$ известны результаты Ш.П.Панджакидзе [29], [30] и Е.М.Никишина [31], которые представляют, в определенном смысле, многомерные аналоги фундаментального результата Меньшова-Радемахера (см. [32], [33]); что касается вопроса о поведении чезаровских средних отрицательного порядка ряда (3.2.1) в смысле сходимости почти всюду или в метрике $L(\mathcal{U}_n)$, насколько нам известно, до сих пор не изучено.

В настоящем параграфе изложим результаты, относящиеся к вопросу сходимости в смысле метрики $L(\mathcal{U}_n)$ чезаровских средних отрицательного порядка ряда (3.2.1), причем, в многомерном случае, сходимость понимается по Прингсхейму. Заметим, что и в одномерном случае изложенные результаты являются новыми.

Справедлива следующая

Теорема 3.2.1. Пусть

$$\sum_{\vec{k}\geqslant\vec{0}} a_{\vec{k}}^2 \prod_{i=1}^{n} k_i^{2\alpha_i} < +\infty, \ -1<\alpha_i<0 \quad i=(\overline{1,n}) \qquad (3.2.2)$$

и

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{i}\geqslant\vec{0}} a_{\vec{i}}\,\varphi_{\vec{i}}(\vec{x}). \qquad (3.2.3)$$

Тогда

$$\lim_{\vec{m}\to\infty} \int_{U_n} \left|\sigma_{\vec{m}}^{\vec{\alpha}}(\vec{x}) - f(\vec{x})\right| d\vec{x} = 0.$$

Доказательство. Будем предполагать, что $n=2$. Согласно (3.2.2) функция f почти всюду существует (см. [31]) и $f\in L^2[U_n]$, Стало быть,

$$\sigma_{m_1,m_2}^{\alpha_1\alpha_2}(\vec{x}) - f(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\left[S_{i_1,i_2}(\vec{x}) - f(\vec{x})\right] =$$

$$= \frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}} \sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2} A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1} A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\left[\left(\sum_{j=0}^{i_1}\sum_{k=i_2+1}^{\infty} + \sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i_2} +\right.\right.$$

$$+\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}\Big]\Big]a_{j,k}\varphi_{j,k}(\vec{x})\equiv\sum_{\lambda=1}^{3}\mathcal{P}_{\lambda}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (3.2.4)$$

Имеем

$$\mathcal{P}_1(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{j=0}^{i_1}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}\varphi_{j,k}(\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}-$$

$$-\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}\Big)a_{j,k}\varphi_{j,k}(\vec{x})=$$

$$=\frac{1}{A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}\varphi_{j,k}(\vec{x})-$$

$$-\frac{1}{A_{m_1}^{\alpha_1}A_{m_2}^{\alpha_2}}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}\varphi_{j,k}(\vec{x})\equiv$$

$$\equiv\mathcal{P}_1^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})+\mathcal{P}_2^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x}). \qquad (3.2.5)$$

Далее,

$$\int_{U_2}\left|\mathcal{P}_1^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_2)m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\int_{U_2}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}\varphi_{j,k}(\vec{x})\right|d\vec{x}\leq$$

$$\leq C(\alpha_2)m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left\{\int_{U_2}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}\varphi_{j,k}(\vec{x})\right|^2d\vec{x}\right\}^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq C(\alpha_2)m_2^{-\alpha_2}\left\{\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\leq$$

$$\leq C(\alpha_2)\left\{m_2^{-1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}i_2^{-\alpha_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2k^{2\alpha_2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Отсюда, согласно условия (3.2.2) находим

$$\int_{U_2}\left|\mathcal{P}_1^{(1)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0\qquad\text{при } \vec{m}\to\infty. \quad (3.2.6)$$

Согласно (3.2.5) имеем

$$\int\limits_{U_2}\left|\mathcal{P}_1^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\sum_{i_1=0}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=C(\alpha_1,\alpha_2)m_1^{-\alpha_1}m_2^{-\alpha_2}\left\{\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}+\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\right\}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C(\alpha_1,\alpha_2)\left\{m_1^{-1}m_2^{-1}\left[\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+m_1^{-1}\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left[\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\, j^{2\alpha_1}\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+m_2^{-1}\sum_{i_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\, k^{2\alpha_2}\right]^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sum_{i_1=\left[\frac{m_1}{2}\right]+1}^{m_1}\sum_{i_2=\left[\frac{m_2}{2}\right]+1}^{m_2}\left|A_{m_1-i_1}^{\alpha_1-1}\right|\left|A_{m_2-i_2}^{\alpha_2-1}\right|\left[\sum_{j=i_1+1}^{\infty}\sum_{k=i_2+1}^{\infty}a_{j,k}^2\, j^{2\alpha_1}k^{2\alpha_2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда с применением (3.2.2) находим

$$\int\limits_{U_2}\left|\mathcal{P}_1^{(2)}(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0 \quad \text{при } \vec{m}\to\infty. \qquad (3.2.7)$$

Совершенно аналогично (см. (3.2.4)) заключаем, что

$$\int\limits_{U_2}\left|\mathcal{P}_\lambda(\vec{m},\vec{\alpha},\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0\ (\lambda=2,3)\ \text{при}\quad \vec{m}\to\infty. \qquad (3.2.8)$$

Таким образом, используя (3.2.4)-(3.2.8), будем иметь

$$\int\limits_{U_2}\left|\sigma^{\alpha_1\alpha_2}_{m_1,m_2}(\vec{x})-f(\vec{x})\right|d\vec{x}\to 0\ \text{при}\quad \vec{m}\to\infty.$$

Нетрудно заметить, что метод доказательства теоремы (3.2.I) проходит и при $n\geqslant 3$ (и содержит случаи $n=1$). Стало быть, теорема (3.2.I) полностью доказана.

Метод доказательства теоремы (3.2.I) показывает, что справедлива такая

Теорема 3.2.2. Если выполнены условия (3.2.2) и $p\in[1,2]$, то

$$\lim_{\vec{m}\to\infty}\left\{\int\limits_{U_n}\left|\sigma^{\vec{\alpha}}_{\vec{m}}(\vec{x})-f(\vec{x})\right|^p d\vec{x}\right\}^{\frac{1}{p}}=0.$$

Замечание. Пусть

$$\sum_{\vec{i}\geqslant\vec{0}}a^2_{\vec{i}}\prod_{j=0}^{n}\log(i_j+2)<+\infty.$$

Тогда применяя метод, использованный при доказательстве необходимой части теоремы (2.I.I) и (2.2.I) можно показать, что для $(C,\vec{\alpha})$ -суммируемости ряда (3.2.I) в смысле метрики $L(U_n)$ необходимо выполнение условия (2.I.2).

Последнее замечание показывает, что условие (3.2.2) является характерным для суммируемости методом Чезаро отрицательного порядка общих кратных ортогональных рядов в метрике $L(U_n)$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.К.Бари, Тригонометрические ряды, М., "Физматгиз", I96I.

2. Л.В.Жижиашвили, О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 28, вып. 2(I70), I973, 65-II9.

3. Л.В.Жижиашвили, О простых и кратных тригонометрических рядах Фурье, Сообщ. АН ГССР, 88, № 2, I977, 293-295.

4. G.H.Hardy, On double Fourier series and especiably those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters, Quart. J. Math. 37, 1905, 53-79.

5. П.Л.Ульянов, Применение A -интегрирования к одному классу тригонометрических рядов, Мат. сб., 35(77), I954, 469-490.

6. А.Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. I, М., "Мир", I965.

7. И.Е.Жак, А.А.Шнейдер, Об условиях равномерной сходимости двойных рядов из синусов, Изв. высш. уч. зав., математика, 4(53), I966, 44-52.

8. С.А.Теляковский, Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами, Мат. сб., 63, № 3, I964, 426-444.

9. S.Wainger, Special trigonometric series in K-dimensions, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 59, 1965, 1-102.

IO. А.Н.Колмогоров, Sur J'ordre de grandeur des coefficiento de la serie de Fourer-Lebesque, Bull.de l'Acad.Polonaise, 1923, 83-86.

II. W.H.Young, On the Fourer series of bounded functions, Proc. of the London Math Soc., 12, 1913, 41-70.

12. Г.Харди, Расходящиеся ряды, М., издат. И-Л., 1951.

13. В.Г.Челидзе, Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов, Тбилиси, изд. ТГУ, 1977.

14. J.L.Walsh, A closed set of normal ortogonal functions, Amer. J.Math, 45, 1923, 5-24.

15. R.Paley, A remarkable system of ortogonal functions, Proc. London math. Soc., 34, 1932, 241-279.

16. N.J.Fine, On the Walsh functions, Trans. Amer. Math. Soc., 65, No.3, 1949, 372-414.

17. А.А.Шнейдер, О сходимости рядов Фурье по функциям Уолша, Мат. сб., 34, № 3, 1954, 441-472.

18. S.Yano, On approximation by Walsh functions., Proc. Amer. Math. Soc., 2, No.6, 1951, 962-967.

19. Л.А.Балашов, А.И.Рубинштейн, Ряды по системе Уолша и их обобщения, В сб. "Мат. анализ. 1970 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР"), М., 1971, 147-202.

20. А.И.Рубинштейн, A -интеграл и ряды по системе Уолша, УМН 18, № 3, 1963, 191-197.

21. А.А.Шнейдер, О рядах по функциям Уолша с монотонными коэффициентами, Изв. АН СССР, сер. мат., 12, 1948, 179-192.

22. Л.А.Балашов, О рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами, Сиб. мат. ж., 12, № 1, 1971, 25-39.

23. S.Yano, On Walsh-Fourier series, Tohoku Math. J., 3, No.2, 1951, 223-242.

24. Г.А.Фомин, Некоторые свойства ортогональных рядов, Межвузовская конференция "Применение функц. анализа в теории приближений", г. Калинин, 1970, 165-169.

25. Г.Алексич, Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., ИЛ, 1963.

26. С.Качмаж и Г.Шнейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., "Физматгиз", 1958.

27. Min Ten Cheng, Cesaro summability of orthogonal series, Duke Math. J. 14, 1947, 401-404.

28. G.Sunouchi, S.Yano, Convergence and summability of orthogonal series, Proc. Acad. Japan, 26, 1950, 10-16.

29. Ш.П.Панджакидзе, О теореме Меньшова-Радемахера для двойных ортогональных рядов, Сообщ. АН ГССР, 39, № 2, 1965, 277-282.

30. Ш.П.Панджакидзе, О сходимости кратных ортогональных рядов, Сообщ. АН ГССР, 89, № 3, 1978, 553-555.

31. Е.М.Никишин, Множители Вейля для кратных рядов Фурье, Мат. сб., 89, № 2, 1972, 340-348.

32. Д.Е.Меньшов, Sur les series de functions orthogonales, J.Fund. Math. 4, 1923, 82-105.

33. H.Rademacher, Einige Sätre über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann., 87, 1922, 112-138.

34. М.Г.Бицадзе, О кратных тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами, Сообщ. АН ГССР, 92, № 1, 1978, 53-55.

35. М.Г.Бицадзе, О простых и кратных тригонометрических рядах и рядах по системе Уолша с монотонными коэффициентами, Сообщ. АН ГССР, 96, № 3, 1979, 545-548.

36. М.Г.Бицадзе, Об общих ортогональных рядах, Сообщ. АН ГССР, 97, № 1, 1980, 41-45.