ТБИЛИССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ДВАЛИШВИЛИ Бадри Павлович

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель, академик
АН ГССР, проф. Г.С.Чогошвили

Тбилиси – 1978

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривая в /32/ несимметричные функции расстояния на $X\times X$, так называемые квази-псевдо-метрики (к.п.м.) на X, изучение которых было начато ранее, например, в работах В.Вильсона /13/ и Х.Рибейро /61/, Дж. К.Келли заметил, что отсутствие аксиомы симметрии позволяет ассоциировать с каждой такой к.п.м. $p(\ ,\ )$ сопряженную к.п.м. $q(\ ,\ )$, определенную равенством $q(x,y)=p(y,x)$. Ясно, что каждая из этих к.п.м. порождает некоторую топологию на X и эти две топологии, вообще говоря, никак ни связаны между собой.

К аналогичному результату приводят и исследования квази-равномерных (см. Л.Начбин /48/, а также Д.Тамари /74/) и квази-близостных (см. В.Пэрвин /53/, Е.Штейнер /84/ и Ж.Гастл /14/) пространств, в определениях которых также отсутствует аксиома симметрии.

Как отмечает П.С.Александров в /2/, каждому частично упорядоченному множеству X соответствует двойственное ему частично упорядоченное множество X^*, состоящее из тех же точек, но с обращенным отношением порядка, что на топологическом языке означает замкнутость в X открытых множеств из X^* и наоборот. Следовательно, и в этом случае на множестве X порождаются две топологии, хотя сразу же сильно сцепленные между собой.

Существуют и другие математические объекты, например, упорядоченные топологические пространства (см. Л.Начбин /49/ и Д.Адналжевич /1/) и непрерывные группы (см. Дж. Вестон /12/), в которых специфические свойства рассматриваемых структур порождают, как правило, две топологии, иногда "симметричные" по построению, но, в явном виде, независимые друг от друга.

Возникшая из этих источников теория битопологических пространств (т.е. множеств, наделенных двумя произвольными топологиями /32/), сейчас насчитывает большое число исследований (свыше ста публикаций) и составляет самостоятельный раздел топологии.

Основные вопросы теории битопологических пространств (на протяжении всей работы называемых бипространствами), которые исследовались в этих работах - это вопросы отделимости (см. /10-11/, /29/, /32/, /36/, /42/, /47/, /51/, /55/, /58/, /65-66/, /68/, /71-72/, /75-76/, /81/), вопросы различных типов компактности и паракомпактности (см. /9/, /16-17/, /26/, /33/, /43-46/, /50/, /56/, /59/, /62-63/, /77/), вопросы бикомпактификации (см. /59/, /63/, /65/, /80/), вопросы связности (см. /8/, /54/, /63/) и т.д. Из различных приложений теории бипространств укажем, например, установление условий упорядочиваемости бикомпактных пространств, а также определение и изучение специальных категорий упорядоченных топологических пространств (см. Х.Пристли /52/), установление аксиоматики гильбертовых пространств (см. Дж. Сварт /64/), характеристику так называемых псевдо-булевых алгебр (см. С.Раушер /57/), абстрактную теорию потенциала и изучение плотностной топологии (см. Дж. Лукеш /39/) и т.д. Естественно, рассмотрение множества с двумя, - сцепленными между собой соотношениями "битопологического" характера, - топологиями, позволяет в некоторых случаях получить более обширную информацию, нежели рассмотрение этого множества с каждой топологией в отдельности.

Мы видим, что осталось много вопросов в теории бипространств, пока еще не ставших предметом исследования, и еще большее число вопросов, куда эту теорию можно приложить, поскольку большое число встречающихся в математике пространств обладают двумя топологическими структурами, например, многие функциональные пространства, топологические векторные пространства и т.д.

Наша работа примыкает к вышеуказанным исследованиям и ставит своей целью по возможности заполнить некоторые пробелы этой теории и дать некоторые ее приложения.

В § I главы I дается внутренняя характеристика парной вполне регулярности (см. теорему I.I.I) обобщением метода, предложенного О.Фринк в /79/ и В.И.Зайцевым в /28/ для случая топологического пространства (на функциональном языке эта аксиома парной отделимости была сформулирована П.Флетчером в /76/ и, независимо от него, Е.Лейном в /36/). Далее, парная почти нормальность характеризуется в терминах вещественных парно непрерывных функций (см. теорему I.I.2). Эти и ряд других результатов приводят к схеме (см. стр. 2I), показывающей зависимость между известными и введенными нами аксиомами парной отделимости бипространств. В заключении § I даны характеристики всех основных аксиом парной отделимости в терминах сходимости (см. теоремы I.I.3-I.I.8), (для обычных топологических пространств см. /7/ и /83/).

В § 2 главы I определяются и изучаются парно почти бикомпактные бипространства. Здесь же дается новый способ определения и построения бикомпактного расширения бипространства и доказывается существование хаусдорфова бикомпактного расширения для парно вполне регулярных бипространств (см. теорему I.2.I). Результаты этой главы существенно применяются в последующем.

В теории отображений бипространств в литературе имелись лишь понятия парно непрерывного (см. /54/) и парно замкнутого и парно открытого (см. /66/ отображений. В § I главы П значительно заполняется этот список введением естественно возникающих в этой теории и имеющих ряд приложений классов отображений. Такими являются парно почти непрерывные, парно Θ-непрерывные, парно слабо непрерывные, парно почти замкнутые и парно почти открытые отображения. Из свойств этих отображений, устанавливаемых в работе, отметим их характеристики в различных терминах, а также их связи как между собой, так и с понятиями Дж. Пэрвина из /54/ и А.Сингала из /66/.

Введенные разновидности отображений оказались приуроченными при исследовании вопроса о сохранении, или, вообще, изменении заданным образом, некоторых важных битопологических свойств в сторону образа или в сторону прообраза. Такими являются парная связность, парная отделимость и различные типы парной компактности. Это делается в § 2 главы П (см. теоремы 2.2.I-2.2.8).

Основной в диссертации является глава Ш, посвященная теории размерности бипространств.

Дж. Сварт в /63/ на слабо хаусдорфовые бипространства накладывает некоторое условие, называемое И.Рейли в /60/ нулевой размерностью. В направлении создании теории размерности бипространств к моменту нашей работы /20/ ничего не было сделано. В § I для любого бипространства (X,τ_1,τ_2) определяются размерностные функции $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X$ и $p\text{-}\dim X$ для любого $n\geqslant -1$,аналогичные обычным размерностям $\mathrm{Ind}\,X$ и $\dim X$ и называемые соответственно большой индуктивной и лебеговой биразмерностями бипространства (X,τ_1,τ_2). Следует отметить, что биразмерность $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X$ определяется как при помощи соответствующим образом определенных перегородок (см. определение 3.I.3), так и в терминах окрестностей (см. теорему 3.I.2), где существенную роль играет обобщенное понятие границы (см. определение 2.I.2). Далее, изучаются различные свойства $p\text{-}\mathrm{Ind}X$ и $p\text{-}\dim X$, такие, к примеру, как монотонность, аналог аддиционной теоремы Даукера для $p\text{-}\mathrm{Ind}X$, равносильность равенств $p\text{-}\mathrm{Ind}X=0$ и $p\text{-}\dim X=0$, теорема счетной суммы для нульмерных в смысле $p\text{-}\mathrm{Ind}$, а значит, и в смысле $p\text{-}\dim$, множеств (см. теоремы 3.I.I, 3.I.3-3.I.8) и т.д.

В § 2 определяется малая индуктивная биразмерность $p\text{-}\mathrm{ind}X$ и в терминах перегородок (см. определение 3.2.2) и в терминах окрестностей (см. теорему 3.2.2), причем $p\text{-}\mathrm{ind}X$ при $n=0$ дает нульмерность в смысле И.Рейли /60/. Для $p\text{-}\mathrm{ind}X$ исследуется свойство монотонности, доказывается аналог неравенства Урысона-Менгера, выясняется ее зависимость от малых индуктивных размерностей соответствующих двух топологических пространств (см. теоремы 3.2.I, 3.2.3, 3.2.4) и т.д.

Все три размерностные функции являются битопологическими инвариантами, т.е. инвариантны относительно парных гомеоморфизмов. Одновременно с появлением нашей работы по теории бипространств были опубликованы статьи М.Чирича /82/ и М.Лелич /37-38/, в первой из которых также определены и исследованы все три биразмерности, и во второй и третьей - только лебегова биразмерность. Основные из установленных ими для своих биразмерностей свойств составляют часть установленных нами и перечисленных выше свойств наших биразмерностей, а также некоторые наши теоремы являются более общими, чем соответствующие теоремы указанных авторов. Наконец, разница состоит еще в том, что в /82/ М.Чирич оценивает большую индуктивную биразмерность через большие индуктивные размерности соответствующих топологических пространств, а мы это делаем для малой индуктивной биразмерности.

Четвертая глава посвящена приложениям полученных выше результатов.

В § I дается характеристика вполне регулярных топологических пространств в терминах сходимости (см. теорему 4.I.2), которая получается из теоремы I.I.8 при $\tau_1 = \tau_2$. Кроме того, на основе понятия нормальной базы, введенного О.Фринк в /79/, для вполне регулярного пространства строится расширение волмэновского типа, т.е. W -расширение, при помощи так называемых Z- идеальных направленностей (см. определение 4.I.2 и теоремы 4.I.4-4.I.5). В конце параграфа в битопологических терминах дается характеристика непрерывного отображения обычных топологических пространств.

В § 2, используя параллель, проведенную Л.Канфеллом в /30/ между теориями бипространств и упорядоченных топологических пространств, устанавливаются зависимости аксиом отделимости упорядоченных топологических пространств от соответствующих аксиом парной отделимости ассоциированных в определенном смысле бипространств. Далее, при помощи результатов главы Ш, определяются размерности $o\text{-}\mathrm{Ind}X$, $o\text{-}\dim X$ и $o\text{-}\mathrm{ind}X$ для любого (X , τ , $\leqslant$), учитывающие одновременно обе структуры: топологию τ и частичный порядок $\leqslant$. Все основные результаты третьей главы, касающиеся биразмерностей $p\text{-}\mathrm{Ind}X$, $p\text{-}\dim X$ и $p\text{-}\mathrm{ind}X$ имеют свои аналоги и для размерностей $o\text{-}\mathrm{Ind}X$,

$o\text{-}\dim X$ и $o\text{-}\mathrm{ind}\, X$ (см. теоремы 4.2.I–4.2.8).

В заключении отметим, что при определении бипространства, его две топологии, вообще говоря, не связываются между собой каким-либо единым законом, какой-либо, имеющей место для всех бипространств, "дистрибутивностью". Если имеется какая-либо связь между топологиями, то в каждом случае она носит своеобразный, отличный от других случаев, характер. Однако, всякий раз, когда при определении какого-либо понятия приходится над одним и тем же множеством применять как операцию замыкания, так и операцию взятия открытого ядра, или наоборот, то, если одну из этих операций берем в одной из топологий, другую следует брать в другой топологии. Обнаружение и формулировка этого факта, что представляется нам одним из общих результатов проделанной работы, указывает на наличие в теории бипространств некоторой постоянной связи между топологиями, носящей характер двойственности.

Основные результаты диссертации опубликованы в /I8–25/.

ГЛАВА I

ОТДЕЛИМОСТЬ И КОМПАКТИФИКАЦИЯ В БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ I. ОТДЕЛИМОСТЬ В БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

На протяжении всей работы маленькая латинская буква i (или j) перед некоторым математическим понятием, например, i-замыкание, i-окрестность, i-полунепрерывность, i-сходимость и т.д. должна пониматься в следующем смысле соответственно: замыкание в топологии τ_i, открытая окрестность в топологии τ_i, полунепрерывность относительно топологии τ_i, сходимость в топологии τ_i и т.д.; кроме того, если встречается только лишь одна из этих букв, например, i, то всегда подразумевается, что $i = 1,2$ и, если обе буквы i и j встречаются одновременно, то всегда $i,j = 1,2$; $i \neq j$. Отметим тут же, что слово "парный" будет заменяться либо маленькой латинской буквой "p", либо префиксом " би ".

Если в бипространстве (X,τ_1,τ_2) дано множество A, то i-замыкание (i-открытое ядро) этого множества будем обозначать через $C_i A$ ($J_i A$). Подмножество $A \subset X$ называется (i,j)-каноническим замкнутым, если $A = C_i J_j A$; дополнение (i,j)-канонического замкнутого множества называется (i,j)-каноническим открытым; ясно, что A является (i,j)-каноническим открытым, если $A = J_i C_j A$ (см. /66/). Легко убеждаемся, что если $U \subset X$ j-открыто в (X,τ_1,τ_2), то $C_i U$ является (i,j)-каноническим замкнутым и, значит, если $F \subset X$ j-замкнуто, то $J_i F$ — (i,j)-каноническое открытое.

Если дано бипространство (X, τ_1, τ_2), то под (i, j)-полунепрерывной функцией будем понимать вещественную i-снизу и j-сверху полунепрерывную функцию, определенную на X.

<u>Замечание 1.1.1</u>. На числовой прямой R мы будем рассматривать следующие две топологии: $\omega_1 = \{\emptyset, R\} \cup \{(a, +\infty) : a \in R\}$ и $\omega_2 = \{\emptyset, R\} \cup \cup \{(-\infty, a) : a \in R\}$ (см., например, /10/). Через $(I, \omega_1^*, \omega_2^*)$ обозначается биподпространство бипространства (R, ω_1, ω_2). Нетрудно убедиться, что отображение $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (I, \omega)$, где ω – обычная топология на I, является (i, j)-полунепрерывным тогда и только тогда, когда $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (I, \omega_i^*, \omega_j^*)$ p-непрерывно. Отметим тут же, что согласно В.Пэрвин /54/, отображение $f : (X, \tau_1, \tau_2) \to (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ является p-непрерывным, если индуцированные отображения топологических пространств $f_i : (X, \tau_i) \to (Y, \gamma_i)$ непрерывны.

В этом параграфе будут определены и исследованы различные аксиомы парной отделимости бипространств, а также будут выяснены соотношения между ними. Основным результатом является внутренняя характеристика парно вполне регулярных бипространств, методом, предложенным О.Фринк в /79/ и В.И.Зайцевым в /28/ для случая топологических пространств. На функциональном языке эта аксиома парной отделимости была сформулирована П.Флетчером в /76/, а также Е.П.Лейном в /36/ и имеет следующий вид:

бипространство (X, τ_1, τ_2) парно вполне регулярно, если для любой точки $x \in X$ и любого i-замкнутого множества $F \subset X$, $x \bar{\in} F$, существует такая (i, j)-полунепрерывная функция f, что $f(F) = 0$, $f(x) = 1$, $0 \leq f \leq 1$.

Систему $Z = \{Z_1, Z_2\}$, где Z_i i-замкнутые базы бипространства (X, τ_1, τ_2), назовем парно замкнутой базой этого бипространства, а систему $co\mathcal{Z}=\{co\mathcal{Z}_1, co\mathcal{Z}_2\}$, где $co\mathcal{Z}_i$ i - открытые базы, сопряженные с базами $\mathcal{Z}_i$, назовем парно открытой базой бипространства (X,τ_1,τ_2), сопряженной с базой $\mathcal{Z}$.

Определение I.I.I. Парно замкнутую базу $\mathcal{Z}=(\mathcal{Z}_1,\mathcal{Z}_2\}$ назовем парно нормальной базой бипространства (X,τ_1,τ_2), если удовлетворяются следующие условия:

I. Для любой точки $x\in X$ и любой ее j-окрестности $\mathcal{U}(x)$ существует такое множество $A\in\mathcal{Z}_i$, что $x\in A\subseteq\mathcal{U}(x)$.

2. Если $A\in\mathcal{Z}_1, B\in\mathcal{Z}_2$ и $A\cap B=\varnothing$, то существуют такие $\mathcal{U}(A)\in co\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{U}(B)\in co\mathcal{Z}_1$, что $\mathcal{U}(A)\cap\mathcal{U}(B)=\varnothing$.

Определение I.I.2. Систему $\Sigma=(\Sigma_1,\Sigma_2\}$, где $\Sigma_i=\{(F,\mathcal{U}(F)):$ $F=C_iF$ и $\mathcal{U}(F)=\mathcal{J}_j\mathcal{U}(F)$, назовем парно плотной системой, если для любой пары $(F,\mathcal{U}(F))\in\Sigma_i$ существуют j-окрестность $V(F)$ и i-замкнутое множество Φ, удовлетворяющие условиям:

I. $C_iV(F)\subseteq\Phi\subseteq\mathcal{U}(F)$;

2. $(F,V(F))\in\Sigma_i$, $(\Phi,\mathcal{U}(F))\in\Sigma_i$.

Теорема I.I.I. Для того, чтобы бипространство было парно вполне регулярно, необходимо и достаточно, чтобы оно имело парно нормальную базу.

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма I.I.I. Пусть $\mathcal{Z}=\{\mathcal{Z}_1,\mathcal{Z}_2\}$ парно нормальная база бипространства (X,τ_1,τ_2). Тогда $\Sigma=\{\Sigma_1,\Sigma_2\}$, где $\Sigma_i=\{(A,\mathcal{U}(A)):A\in\mathcal{Z}_i,$ $\mathcal{U}(A)\in co\mathcal{Z}_j\}$, есть парно плотная система.

Доказательство. Пусть $(A,\mathcal{U}(A))$ произвольный элемент системы Σ_i. Рассмотрим множество $B=X\setminus\mathcal{U}(A)$. Ясно, что $B\in\mathcal{Z}_j$, $A\cap B=\varnothing$ и, так как $\mathcal{Z}$ p - нормальная база, то существуют непересекающиеся окрестности $V(A)\in co\mathcal{Z}_j$, $\mathcal{U}(B)\in co\mathcal{Z}_i$. Пусть

$\Phi=X\setminus U(B)$. Поскольку $V(A)\cap U(B)=\emptyset$, то $V(A)\subseteq X\setminus U(B)=\Phi$ и, так как $\Phi\in Z_i$, то $C_iV(A)\subseteq\Phi$. Далее, $(X\setminus U(A))\cap\Phi=B\cap(X\setminus U(B))=\emptyset$, т.е. $\Phi\subseteq U(A)$; итак, $A\subseteq C_iV(A)\subseteq\Phi\subseteq U(A)$. Так как $V(A)\in coZ_j$ и $\Phi\in Z_i$ то, согласно определению Σ_i, получаем, что $(A,V(A))\in\Sigma_i$, $(\Phi,U(A))\in\Sigma_i$. Лемма I.I.I доказана.

Будем говорить, что множество $A\subset X$ (i,j)-вполне отделимо от множества $B\subset X$, если существует такая (i,j) - полунепрерывная функция f, что $f(A)=0$ и $f(B)=1$.

Ясно, что если A (i,j) - вполне отделимо от B, то B (j,i) - вполне отделимо от A (соответствующей функцией будет $1-f$ которая, согласно /I5, стр. 8I/, (j,i) - полунепрерывна.

Лемма I.I.2. Пусть дано бипространство (X,τ_1,τ_2) и пусть подмножества $A,B\subset X$ удовлетворяют условиям: $A=C_iA$, $B=C_jB$ и $A\cap B=\emptyset$. Тогда, если для множества A существует система j-окрестностей $\{U_r\}$, занумерованных всеми двоично-рациональными числами $r\ (0\leq r\leq 1)$ так, что $U_1=X\setminus B$ и из $r<r'$ следует $C_iU_r\subseteq U_{r'}$, то A (i,j)-вполне отделимо от B.

Доказательство. Пусть $t\in[0,1]$ не является двоично-рациональным числом; положим $U_t=\bigcup\limits_{r<t}U_r$. Если $t<t'$, то $C_iU_t\subseteq U_{t'}$. Таким образом, каждому действительному числу $t\in[0,1]$ соответствует j-окрестность U_t множества A, удовлетворяющая условию: $C_iU_t\subseteq U_{t'}$, при $t<t'$. Наконец, допустим, что $U_t=\emptyset$ для $t<0$ и $U_t=X$ для $t>1$. Построим для каждого $x\in X$ сечение (A^x,B^x) во множестве всех действительных чисел таким образом: отнесем t к нижнему классу A^x, если $x\notin U_t$ и к верхнему классу B^x, если $x\in U_t$. Это сечение определяет некоторое действительное число ξ_x, причем, очевидно, $0\leq\xi_x\leq 1$. Пусть $f(x)=\xi_x$. Покажем, что f есть (i,j)-полунепрерывная функция, $f(A)=0$ и $f(B)=1$.

Рассмотрим произвольную точку $x\in X$ и такое $t\in[0,1]$, что $f(x)>t$; требуется найти i-окрестность $\mathcal{U}(x)$ с условием $f(y)>t$ для любой точки $y\in\mathcal{U}(x)$. Согласно построению сечения, условие $f(x)>t$ влечет $t\in A^x$, т.е. $x\bar{\in}\mathcal{U}_t$. Покажем, что $x\bar{\in}C_i\mathcal{U}_t$. Так как $f(x)>t$, то $f(x)>\frac{f(x)+t}{2}=t'$. Следовательно, $t'\in A^x$, т.е. $x\bar{\in}\mathcal{U}_{t'}$. Допустим, что $x\in C_i\mathcal{U}_t$; тогда $x\in\mathcal{U}_{t''}$ для произвольного числа $t''>t$. В частности, $x\in\mathcal{U}_{t'}$, так как $t'>t$. Получили противоречие и, поэтому, $x\bar{\in}C_i\mathcal{U}_t$. Пусть $\mathcal{U}(x)=X\setminus C_i\mathcal{U}_t$. Нетрудно убедиться, что $\mathcal{U}(x)$ требуемая i-окрестность и, следовательно, f — i- снизу полунепрерывная функция.

Теперь рассмотрим произвольную точку $x\in X$ и такое $t\in[0,1]$, что $f(x)<t$; требуется найти такую j-окрестность $\mathcal{U}(x)$, что $f(y)<t$ для любой точки $y\in\mathcal{U}(x)$. Так как $f(x)<t$, то $t\in B^x$, т.е. $x\in\mathcal{U}_t$. Легко видеть, что $\mathcal{U}(x)=\mathcal{U}_t$ искомая j-окрестность. Наконец, равенства $f(A)=0$ и $f(B)=1$ непосредственно следуют из определения функции f. Лемма I.I.2 доказана.

Лемма I.I.3. Пусть $(A,\mathcal{U}(A))\in\Sigma_i$, где $\Sigma_1=\{\Sigma_{11},\Sigma_{12}\}$ некоторая парно плотная система бипространства (X,τ_1,τ_2). Тогда множество A (i,j) - вполне отделимо от множества $X\setminus\mathcal{U}(A)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}(A)=\mathcal{U}_1$. Так как Σ_1 ρ- плотная система, то существуют такие $\mathcal{U}_0=J_j\mathcal{U}_0$ и $\Phi_0=C_i\Phi_0$, что $A\subseteq\subseteq\mathcal{U}_0\subseteq C_i\mathcal{U}_0\subseteq\Phi_0\subseteq\mathcal{U}_1$. Имеем: $(A,\mathcal{U}_0)\in\Sigma_i$, $(\Phi_0,\mathcal{U}_1)\in\Sigma_i$. По той же причине существуют такие $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}=J_j\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}$ и $\Phi_{\frac{1}{2}}=C_i\Phi_{\frac{1}{2}}$, что $\Phi_0\subseteq\subseteq\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}\subseteq C_i\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}\subseteq\Phi_{\frac{1}{2}}\subseteq\mathcal{U}_1$.

Рассуждая по индукции, мы построим для всех двоично-рациональных чисел $\tau = \frac{p}{2^n}$ ($0 \le \tau \le 1$) такие множества $\mathcal{U}_{\frac{p}{2^n}} = \mathcal{I}_j \mathcal{U}_{\frac{p}{2^n}}$ и $\Phi_{\frac{p}{2^n}} = C_i \Phi_{\frac{p}{2^n}}$, что $\Phi_{\frac{p}{2^n}} \subseteq \mathcal{U}_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq C_i \mathcal{U}_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq \Phi_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq \mathcal{U}_{\frac{p+1}{2^n}}$.

Теперь мы находимся в условиях леммы I.I.2. Поэтому A (i,j)-вполне отделимо от $X \setminus \mathcal{U}(A)$, ч.т.д.

Отметим тут же, что, согласно /36/, подмножество $A = \{x : f(x) = 0,\ f$ является (i,j)-полунепрерывной функцией и $f \geqslant 0\}$ называется i-нуль-множеством и оно i-замкнуто в (X, τ_1, τ_2).

Докажем теперь теорему I.I.I.

<u>Необходимость</u>. Пусть бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно вполне регулярным. Рассмотрим $Z = \{Z_1, Z_2\}$, где Z_i — семейство всех i-нуль-множеств. Согласно предложению 2.9 из /36/, Z есть p-замкнутая база для (X, τ_1, τ_2). Покажем, что Z удовлетворяет условиям I и 2 определения I.I.I.

I. Пусть $x \in X$ и $\mathcal{U}(x)$ ее произвольная j-окрестность. Так как бипространство (X, τ_1, τ_2) p-вполне регулярно, то j-замкнутое множество $X \setminus \mathcal{U}(x)$ (j,i) - вполне отделимо от точки x . Следовательно, точка x (i,j) -вполне отделима от множества $X \setminus \mathcal{U}(x)$, т.е. существует такая (i,j) - полунепрерывная функция $f : X \to [0,I]$, что $f(x) = 0$, $f(X \setminus \mathcal{U}(x)) = 1$. Пусть $A = f^{-1}(0)$. Ясно, что $x \in A \subseteq \mathcal{U}(x)$ и $A \in Z_j$.

2. Пусть $A \in Z_1$, $B \in Z_2$ и $A \cap B = \emptyset$. Тогда, согласно определению Z , существуют такая (I,2)-полунепрерывная функция φ и такая (2,I)-полунепрерывная функция ψ , что $A = \varphi^{-1}(0)$, $B = \psi^{-1}(0)$. Так как A есть I-нуль-множество, B есть 2-нуль множество и $A \cap B = \emptyset$, то, согласно предложению 2.8 из /36/, A (I,2)-вполне отделимо от B и отделяющей функцией является

$h=\frac{\varphi}{\varphi+\psi}$, т.е. $h(A)=0$, $h(B)=1$. Рассмотрим функции:

$$h_1(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } 0\leqslant h(x)\leqslant\frac{1}{3}, \\ \frac{3}{2}(h(x)-\frac{1}{3}), \text{ если } \frac{1}{3}<h(x)\leqslant 1, \end{cases} \qquad g_1(x)=\begin{cases} 3(\frac{1}{3}-h(x)), \text{ если } 0\leqslant h(x)<\frac{1}{3}, \\ 0, \text{ если } \frac{1}{3}\leqslant h(x)\leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда функция h_1 является (I,2)-полунепрерывной, а функция g_1 — (2,I)-полунепрерывной. Пусть $A_1=h_1^{-1}(0)$, $B_1=g_1^{-1}(0)$. Имеем $A_1\in Z_1$, $B_1\in Z_2$. Так как $h_1(A_1)=0$, $0\leqslant h(A_1)\leqslant\frac{1}{3}$ и $h(B)=0$, то $B\subset X\setminus A_1=X\setminus h_1^{-1}(0)=\mathcal{U}(B)$. Ясно, что $\mathcal{U}(B)\in coZ_1$. Аналогично, в виду того, что $g_1(B_1)=1$, $\frac{1}{3}\leqslant h(B_1)\leqslant 1$ и $h(A)=0$, имеем: $A\subset X\setminus B_1=X\setminus g_1^{-1}(0)=\mathcal{U}(A)$. Здесь $\mathcal{U}(A)\in coZ_2$. Легко видеть, что $\mathcal{U}(A)\cap\mathcal{U}(B)=\emptyset$. Необходимость доказана.

<u>Достаточность</u>. Пусть $Z=\{Z_1,Z_2\}$ p- нормальная база би-пространства (X,τ_1,τ_2). Рассмотрим $\Sigma=\{\Sigma_1,\Sigma_2\}$, где $\Sigma_i=\{(A,\mathcal{U}(A)):A\in Z_i , \mathcal{U}(A)\in coZ_j\}$. Согласно лемме I.I.I, Σ является p-плотной в X. Пусть $x\in X$ и $F\subset X$, $F=C_iF$, $x\bar{\in}F$. Так как Z_i есть i-замкнутая база, то существует такое $A\in Z_i$, что $x\bar{\in}A$ и $F\subseteq A$. Ясно, что $X\setminus A$ является некоторой i-окрестностью $\mathcal{U}(x)$ и $\mathcal{U}(x)\in coZ_i$. В силу p-нормальности Z , существует $B\in Z_j$ с условиями $x\in B\subseteq\mathcal{U}(x)$. Следовательно, $B\cap A=\emptyset$. Согласно лемме I.I.I, $(A,X\setminus B)\in\Sigma_i$ и, поэтому, учитывая лемму I.I.3, получаем, что существует такая (i,j)-полунепрерывная функция $f:X\to[0,1]$, что $f(A)=0$ и $f(B)=1$. Но $x\in B$, $F\subseteq A$; поэтому $f(x)=1$, $f(F)=0$. Итак, мы получили, что любое i-замкнутое множество F (i,j)-вполне отделимо от любой точки $x\in X\setminus F$, т.е. (X,τ_1,τ_2) парно вполне регулярно. Теорема I.I.I полностью доказана.

Согласно Дж.К.Келли /32/, бипространство (X,τ_1,τ_2) парно регулярно, если для любой точки $x\in X$ и любого i- замкнутого множества $F\subset X$, $x\bar{\in} F$, существуют дизъюнктные i - окрестность $U(x)$ и j-окрестность $U(F)$. Там же определено понятие парной нормальности следующим образом: бипространство (X,τ_1,τ_2) парно нормально, если для любой пары $A,B\subset X$, $A\cap B=\emptyset$, где A i-замкнуто, а B j-замкнуто, существуют дизъюнктные j-окрестность $U(A)$ и i-окрестность $U(B)$.

Справедливость следующих утверждений легко следует из соответствующих определений.

Предложение I.I.I. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно регулярно тогда и только тогда, когда для любой точки $x\in X$ и любой ее i-окрестности $U(x)$ существует такая i-окрестность $V(x)$ что $C_j V(x)\subseteq U(x)$.

Предложение I.I.2. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно нормально тогда и только тогда, когда для любого j-замкнутого множества A и любой его i-окрестности $U(A)$ существует такая i-окрестность $V(A)$, что $C_j V(A)\subseteq U(A)$.

Следствие. В парно нормальном бипространстве (X,τ_1,τ_2) для любой пары $A,B\subset X$, где $A=C_i A$, $B=C_j B$ и $A\cap B=\emptyset$, существуют такие j-окрестность $U(A)$ и i-окрестность $U(B)$, что $C_i U(A)\cap C_j U(B)=\emptyset$.

Заменой в определении парно регулярного бипространства i-замкнутого множества (i,j) - каноническим замкнутым, в /68/ были определены парно почти регулярные бипространства. Поступая аналогичным образом в отношении парно вполне регулярных и парно нормальных бипространств и учитывая замечание I.I.I, получаем

Определение I.I.3. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно почти вполне регулярно, если для любой точки $x\in X$ и любого (i,j)-канонического замкнутого множества $F\subset X$, $x\bar{\in}F$ существует такая p-непрерывная функция $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(I,\omega_i^*,\omega_j^*)$, что $f(F)=0$, $f(x)=1$ (ср. /67/).

Определение I.I.4. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно почти нормально, если для любой пары дизъюнктных множеств $A,B\subset X$, где A i- замкнуто, а B (j,i)-каноническое замкнутое, существуют дизъюнктные j-окрестность $U(A)$ и i-окрестность $U(B)$ (ср. /67/).

Предложение I.I.3. Для бипространства (X,τ_1,τ_2) следующие условия равносильны:

(а) (X,τ_1,τ_2) парно почти регулярно;

(б) для любой точки $x\in X$ и любой ее (i,j)-канонической открытой окрестности $U(x)$ существует такая i-окрестность $V(x)$, что $c_jV(x)\subseteq U(x)$;

(в) для любой точки $x\in X$ и любой ее (i,j)-канонической открытой окрестности $U(x)$ существует такая (i,j)-каноническая открытая окрестность $V(x)$, что $c_jV(x)\subseteq U(x)$;

(г) для любой точки $x\in X$ и любой ее i-окрестности $U(x)$ существует такая (i,j)-каноническая открытая окрестность $V(x)$, что $c_jV(x)\subseteq J_ic_jU(x)$;

(д) для любой точки $x\in X$ и любой ее i-окрестности $U(x)$ существует такая i-окрестность $V(x)$, что $c_jV(x)\subseteq J_ic_jU(x)$;

(е) для любой точки $x\in X$ и любого (i,j)-канонического замкнутого множества $F\subset X$, $x\bar{\in}F$, существуют такие i-окрестность $U(x)$ и j-окрестность $U(F)$, что $c_jU(x)\cap c_iU(F)=\emptyset$ (см. /68/).

казано и нами в /2I/.

Оказалось, что парно почти нормальные бипространства допускают функциональную характеристику, а именно, справедлива

Теорема I.I.2. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно почти нормально тогда и только тогда, когда для любой пары дизъюнктных множеств $A,B\subset X$, где $A=C_i A$, а $B=C_j J_i B$, существует такая p-непрерывная функция $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(I,\omega_i^*,\omega_j^*)$, что $f(A)=0$, $f(B)=1$.

Достаточность. Рассмотрим только случай $A=C_1 A$ и $B=C_2 J_1 B$ (второй доказывается аналогично). В силу того, что $A\cap B=\emptyset$, существует p-непрерывная функция $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(I,\omega_1^*,\omega_2^*)$ с условиями $f(A)=0$ и $f(B)=1$. Так как f p-непрерывное отображение, то $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ является 2-открытым и $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ — I-открытым в (X,τ_1,τ_2). Ясно, что $A\subset \mathcal{U}(A)=f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$, $B\subset\subset \mathcal{U}(B)=f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ и $\mathcal{U}(A)\cap\mathcal{U}(B)=\emptyset$.

Необходимость. Пусть (X,τ_1,τ_2) p-почти нормально и пусть $A=C_1 A$, $B=C_2 J_1 B$, $A\cap B=\emptyset$. Пусть $A=F_0$, $B=\Phi_1$. Так как $F_0\cap\Phi_1=\emptyset$ и X p-почти нормально, то существуют множества $\Phi_{\frac{1}{2}}=C_2\Phi_{\frac{1}{2}}$, $F_{\frac{1}{2}}=C_1F_{\frac{1}{2}}$, удовлетворяющие условиям $F_0\subset X\setminus\Phi_{\frac{1}{2}}$ $\Phi_1\subset X\setminus F_{\frac{1}{2}}$ и $(X\setminus\Phi_{\frac{1}{2}})\cap(X\setminus F_{\frac{1}{2}})=\emptyset$. Так как $F_0\cap\Phi_{\frac{1}{2}}=\emptyset$, то, по той же причине, существуют множества $\Phi_{\frac{1}{4}}=C_2\Phi_{\frac{1}{4}}$ и $F_{\frac{1}{4}}=C_1F_{\frac{1}{4}}$, удовлетворяющие условиям: $F_0\subset X\setminus\Phi_{\frac{1}{4}}$, $\Phi_{\frac{1}{2}}\subset X\setminus F_{\frac{1}{4}}$ и $(X\setminus\Phi_{\frac{1}{4}})\cap(X\setminus F_{\frac{1}{4}})=\emptyset$. Аналогично, из $\Phi_1\cap F_{\frac{1}{2}}=\emptyset$ следует существование таких $\Phi_{\frac{3}{4}}=C_2\Phi_{\frac{3}{4}}$ и $F_{\frac{3}{4}}=C_1F_{\frac{3}{4}}$, что $F_{\frac{1}{2}}\subset\subset X\setminus\Phi_{\frac{3}{4}}$, $\Phi_1\subset X\setminus F_{\frac{3}{4}}$ и $(X\setminus\Phi_{\frac{3}{4}})\cap(X\setminus F_{\frac{3}{4}})=\emptyset$. Итак, мы имеем:

$$A=F_0\subset X\setminus\Phi_{\frac{1}{4}}\subset F_{\frac{1}{4}}\subset X\setminus\Phi_{\frac{1}{2}}\subset F_{\frac{1}{2}}\subset X\setminus\Phi_{\frac{3}{4}}\subset F_{\frac{3}{4}}\subset X\setminus\Phi_1=X\setminus B.$$

Продолжая этот процесс, мы получим две совокупности соответственно I-замкнутых и 2-замкнутых подмножеств $\{F_t\}_{t\in T}$ и $\{\Phi_t\}_{t\in T}$, где T — множество всех двоично-рациональных чисел от 0 до I. Если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 > t_2$, то

$$A = F_0 \subset X\setminus\Phi_{t_1} \subset F_{t_1} \subset X\setminus\Phi_{t_2} \subset F_{t_2} \subset X\setminus\Phi_1 = X\setminus B.$$

Определим функцию $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(I,\omega_1^*,\omega_2^*)$ следующим образом: $f(x)=\inf\{t\in T:\ x\in X\setminus\Phi_t\}$ и $f(x)=1$ для $x\in\Phi_1$. Ясно, что $f(A)=f(F_0)=0$, $f(B)=f(\Phi_1)=1$. Покажем, что $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(I,\omega_1^*,\omega_2^*)$ p-непрерывная функция. Сперва покажем, что $f_2:(X,\tau_2)\to(I,\omega_2^*)$ непрерывная функция, т.е., что $f_2^{-1}([0,a))$ 2-открыто в (X,τ_1,τ_2). Пусть $x\in f_2^{-1}([0,a))$. Тогда $f(x)=t<a$; это значит, что существует двоично-рациональное число $t'\in T$, удовлетворяющее условию $f(x)=t<t'<a$. Так как $x\in X\setminus\Phi_{t'}$ и $X\setminus\Phi_{t'}\subset\cup\{X\setminus\Phi_t : t<a, t\in T\}$, то

$$f_2^{-1}([0,a))\subset\cup\{X\setminus\Phi_t : t<a, t\in T\} \qquad (I)$$

Пусть, теперь, $x\in\cup\{X\setminus\Phi_t : t<a, t\in T\}$; тогда существует такое s, что $x\in X\setminus\Phi_s$, $s<a$. Но, в виду того, что $f(x)=\inf\{x : x\in X\setminus\Phi_t\}\leq s<a$, получаем $x\in f_2^{-1}([0,a))$ и, следовательно, $f_2^{-1}([0,a))\supset\cup\{X\setminus\Phi_t : t<a, t\in T\}$. Последнее включение, вместе с (I), дает равенство $f_2^{-1}([0,a))=\cup\{X\setminus\Phi_t : t<a, t\in T\}$, т.е. $f_2^{-1}([0,a))=\rceil_2 f_2^{-1}([0,a))$ и, поэтому, $f_2:(X,\tau_2)\to(I,\omega_2^*)$ — непрерывная функция.

Покажем, что $f_1:(X,\tau_1)\to(I,\omega_1^*)$ непрерывно. Для этого, сперва убедимся, что $f(x)\leq a$ тогда и только тогда, когда $x\in X\setminus\Phi_t$, для всех $t\in T$, удовлетворяющих условию $t>a$. В самом деле, если $x\in X\setminus\Phi_t$ для всех $t>a$, то, согласно определению f, получаем $f(x)\leq a$. Наоборот, если $f(x)\leq a$ то $x\in X\setminus\Phi_t$ для всех $t>a$. Применяя этот факт, получаем, что $f^{-1}([0,a))=\cap\{X\setminus\Phi_t : t>a, t\in T\}$. Мы покажем, что $\cap\{X\setminus\Phi_t : t>a, t\in T\}=\cap\{C_1(X\setminus\Phi_t) : t>a, t\in T\}$, т.е. что f_1 непрерывно. Ясно, что

$$\cap\{X\setminus\Phi_t : t>a, t\in T\}\subset\cap\{C_1(X\setminus\Phi_t) : t>a, t\in T\} \qquad (2)$$

Докажем обратное включение. Пусть $r\in T$ такое, что $r>a$. Тогда существует такое $s\in T$, что $r>s>a$. Поэтому $\cap\{C_1(X\setminus\Phi_t) : t>a, t\in T\}\subset C_1(X\setminus\Phi_s)\subset F_s\subset X\setminus\Phi_r$. Следовательно, для всех $r>a$: $\cap\{C_1(X\setminus\Phi_t) : t>a, t\in T\}\subset X\setminus\Phi_r$; значит, $\cap\{C_1(X\setminus\Phi_t) : t>a, t\in T\}\subset\cap\{X\setminus\Phi_r : r>a, r\in T\}$, т.е. учитывая (2), получаем

$$\cap\{C_1(X\setminus\Phi_t) : t>a, t\in T\}=\cap\{X\setminus\Phi_t : t>a, t\in T\}=f_1^{-1}([0,a)).$$

Этим непрерывность функции f_1, а следовательно, и функции f, доказана, ч.т.д.

<u>Предложение I.I.4</u>. Каждое парно почти регулярное парно почти нормальное бипространство парно почти вполне регулярно.

<u>Доказательство</u>. Пусть (X,τ_1,τ_2) p-почти регулярно и p-почти нормально. Пусть, сперва, $F\subset X$ — (I,2) -каноническое замкнутое, $x\,\bar{\in}\,F$. Так как X p- почти регулярно, то существуют непересекающиеся I-окрестность $\mathcal{U}(x)$ и 2-окрестность $\mathcal{U}(F)$. Учитывая (д) предложения I.I.3, можно найти такую I-окрестность $V(x)$, что $V(x)\subseteq J_1C_2\mathcal{U}(x)$; следовательно, поскольку $J_1C_2\mathcal{U}(x)\cap C_1\mathcal{U}(F)=\emptyset$, получаем $C_2V(x)\cap C_1\mathcal{U}(F)=\emptyset$. Но $C_1\mathcal{U}(F)$ — (I,2) - каноническое замкнутое и, в силу p -почти нормальности X, существует такая p -непрерывная функция $f:(X,\tau_1,\tau_2)\longrightarrow(I,\omega_1^*,\omega_2^*)$, что $f(C_2V(x))=1$, $f(C_1\mathcal{U}(F))=0$. Поэтому, $f(F)=0$, $f(x)=1$. Если $F=C_2J_1F$ и $x\,\bar{\in}\,F$, то аналогичными рассуждениями можно построить p -непрерывную функцию $\varphi:(X,\tau_1,\tau_2)\to(I,\omega_1^*,\omega_2^*)$ с условиями $\varphi(x)=1$ и $\varphi(F)=0$. Следовательно, бипространство (X,τ_1,τ_2) p -почти вполне регулярно, ч.т.д.

Следствие. Парно почти нормальное бипространство парно почти вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно парно почти регулярно.

Учитывая замечание I.I.I, а также тот факт, что если f является (i,j)-полунепрерывной функцией, то $1-f$ является (j,i)-полунепрерывной, получим, что справедливо

Предложение I.I.5. Каждое парно регулярное парно почти нормальное бипространство парно вполне регулярно.

Следствие. Парно почти нормальное бипространство парно вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно парно регулярно.

Полученные выше, а также некоторые ранее известные результаты (а именно, парные аксиомы T_0 и T_1 в смысле М.Мурдешвар и А.Наимпали /47/, парную аксиому T_1 в смысле И.Рейли, т.е. R_p-T_1 /58/, парную хаусдорфовость в смысле Дж.К.Келли /32/, парную урысоновость и парную полурегулярность в смысле А.Р.Сингала /66/), можно представить в виде следующей схемы, наглядно изображающей взаимосвязи аксиом парной отделимости:

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{p-полурегулярность и p-почти регулярность} \arrow[d, Rightarrow] & \\
\text{p-нор. и } R_p\text{-}T_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] & \text{p-вполне рег. и } R_p\text{-}T_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] & \text{p-регул. и } R_p\text{-}T_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddd, Rightarrow] & p\text{-урысон} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & p\text{-}T_2 \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & R_p\text{-}T_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{p-поч.нор. и } R_p\text{-}T_1 \arrow[r, Rightarrow] & \text{p-поч.вполне рег. и } R_p\text{-}T_1 \arrow[r, Rightarrow] & \text{p-почти регул.} & p\text{-}T_1 \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & & p\text{-}T_0
\end{tikzcd}$$

Следует отметить, что понятия парной полурегулярности и парной почти регулярности независимы друг от друга.

Пример I.I.I. Пусть $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau_1=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$. Нетрудно убедиться, что (X,τ_1,τ_2) p-почти регулярно, однако не является p-полурегулярным.

Пример I.I.2. Пусть $X=\{a,b,c\}$, $\tau_1=\{\emptyset,X,\{a\}\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X,\{c\}\}$; тогда (X,τ_1,τ_2) p-полурегулярно, но не является p-почти регулярным.

Сейчас будет дано достаточное условие того, чтобы парно регулярное бипространство было парно вполне регулярным. Для этого требуется следующее понятие: бипространство (X,τ_1,τ_2) парно экстремально несвязно, если для любого i-открытого подмножества $U\subset X$ справедливо равенство $C_jU=J_iC_jU$ (см. /5/).

Предложение I.I.6. Парно регулярное и парно экстремально несвязное бипространство парно вполне регулярно.

Доказательство. Пусть (X,τ_1,τ_2) p-регулярно и p-экстремально несвязно. Рассмотрим $Z=\{Z_1,Z_2\}$, где Z_i — семейство всех одновременно j-открытых и i-замкнутых подмножеств из X. Покажем, что Z p-нормальная база. Пусть $x\in X$, $F=C_iF$, $x\notin F$. Так как X p-регулярно, то существуют непересекающиеся i-окрестность $U(x)$ и j-окрестность $U(F)$. Ясно, что $U(x)\cap C_iU(F)=\emptyset$ и, в виду того, что X p-экстремально несвязно, множество $C_iU(F)$ j-открыто и, значит, $C_iU(F)\in Z_i$. Кроме того, $F\subseteq C_iU(F)$ и $x\notin C_iU(F)$. Следовательно, Z_i является i-замкнутой базой. Пусть, теперь, $x\in X$ и $U(x)$ — произвольная i-окрестность. Тогда p-регулярность X влечет существование такой i-окрестности $V(x)$, что $C_jV(x)\subseteq U(x)$. Пусть $A=C_jV(x)$. Ясно, что $A\in Z_j$ и A искомое множество.

Возьмем, наконец, такие $A\in Z_1$ и $B\in Z_2$, что $A\cap B=\emptyset$. Поскольку $Z_i=\mathrm{co}Z_j$, то A и B сами являются искомыми окрестностями, ч.т.д.

Определим, наконец, один класс бипространств, который будет иметь большое применение в главе Ш.

Определение I.I.5. Бипространство назовем наследственно парно нормальным, если любое его биподпространство парно нормально.

Справедливо следующее

Предложение I.I.7. **Бипространство (X,τ_1,τ_2) наследственно парно нормально тогда и только тогда, когда для любых двух подмножеств A и B, удовлетворяющих условию**

$$((C_1A\cap B)\cup(A\cap C_2B)=\emptyset \qquad (I)$$

существуют дизъюнктные 2-окрестность $U(A)$ и I-окрестность $U(B)$.

Доказательство. Пусть, сперва, (X,τ_1,τ_2) наследственно парно нормально и A и B — подмножества из X, удовлетворяющие условию (I). Рассмотрим множество $X_0=X\setminus(C_1A\cap C_2B)$. Так как $A\cap C_2B=\emptyset$ и $B\cap C_1A=\emptyset$, то $A,B\subset X_0$. Пусть $P=C_1A\cap X_0$, $Q=C_2B\cap X_0$. Ясно, что $P=C_{1'}P$, $Q=C_{2'}Q$ в (X_0,τ_1',τ_2'). Кроме того, $P\cap Q=((C_1A\cap C_2B)\cap X_0=\emptyset$. Из-за наследственной p-нормальности бипространства (X,τ_1,τ_2) следует, что (X_0,τ_1,τ_2) p-нормально и, следовательно, существуют непересекающиеся $2'$- окрестность $U_*(P)$ и I'- окрестность $U_*(Q)$. Рассмотрим такие 2-открытое $U(P)$ и I-открытое $U(Q)$, что $U(P)\cap X_0=U_*(P)$, $U(Q)\cap X_0=U_*(Q)$. Ясно, что $A_0\subseteq\subseteq X_0\cap C_1A=P\subseteq U_*(P)$ и $B\subseteq X_0\cap C_2B=Q\subseteq U_*(Q)$. Имеем: $X_0=X\setminus(C_1A\cap C_2B)=(X\setminus C_1A)\cup(X\setminus C_2B)$; следовательно

$X\setminus C_1A\subseteq X_0$, $X\setminus C_2B\subseteq X_0$ и $X\setminus C_1A$ I-открыто, $X\setminus C_2B$ 2-открыто в (X,τ_1,τ_2). Из условия (I) получаем, что $A\subseteq X\setminus C_2B$, $B\subseteq X\setminus C_1A$. Пусть, теперь, $U(A)=U(P)\cap(X\setminus C_2B)$, $U(B)=$ $=U(Q)\cap(X\setminus C_1A)$. Тогда $U(A)$ 2-открыто, $U(B)$ I-открыто; так как $U(A)\subseteq U_*(P)$, $U(B)\subseteq U_*(Q)$, то $U(A)\cap U(B)=\emptyset$

Наоборот, пусть выполняется условие и пусть (X_0,τ_1',τ_2') произвольное биподпространство в (X,τ_1,τ_2). Рассмотрим дизъюнктные $1'$-замкнутое A_0 и $2'$-замкнутое B_0. Поскольку $(C_1'A_0\cap B_0)\cup$ $\cup(A_0\cap C_2'B_0)=\emptyset$, то $(C_1A_0\cap B_0)\cup(A_0\cap C_2B_0)=\emptyset$. Следовательно, согласно условию, существуют дизъюнктные 2-окрестность $U(A_0)$ и I-окрестность $U(B_0)$. Пусть $U_*(A_0)=U(A_0)\cap X_0$, $U_*(B_0)=U(B_0)\cap X_0$. Ясно, что $U_*(A_0)$ и $U_*(B_0)$ искомые дизъюнктные окрестности в (X_0,τ_1',τ_2'), т.е. (X_0,τ_1',τ_2') парно нормально, и, значит, (X,τ_1,τ_2) наследственно парно нормально, ч.т.д.

Ниже будут приведены характеристики аксиом парной отделимости $p\text{-}T_0$, $p\text{-}T_1$, $p\text{-}T_2$, $p\text{-}T_3$ и $p\text{-}T_4$ в терминах сходимости по схеме, которая получается видоизменением **схемы, данной Г.Биркгофом в /7/** и Г.С.Чогошвили в /83/ для случая топологических пространств, а также аксиомы $p\text{-}T_{3\frac{1}{2}}$ по новой схеме, возникшей благодаря внутренней характеристике этого класса пространств.

Пару (A,B), где A и B — подмножества бипространства (X,τ_1,τ_2), $A=C_iA$, $B=C_jB$ и $A\cap B=\emptyset$, назовем нормальной парой. Пару (A,B), в которой $A\in Z_i$, $B\in Z_j$ и $A\cap B=\emptyset$, причем $Z=\{Z_1,Z_2\}$ — p-замкнутая база бипространства (X,τ_1,τ_2), назовем Z-нормальной парой. Пару, состоящую из точки $x\in X$ и i-замкнутого множества $A\not\ni x$ (множества $A\in Z_i$, $x\notin A$), назовем регулярной (Z-регулярной) парой; хаусдорфова пара - это пара, состоящая из точек $x, y \in X$, $x \neq y$.

Определение I.I.6. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ бисходится к точке $x \in X$, если $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ одновременно I-сходится и 2-сходится к x; будем обозначать это через $\{x_\alpha\} \xrightarrow{p} x$.

Теорема I.I.3. Бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно T_0-бипространством (см. /47/) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: если $x_\alpha = x$ и $y_\alpha = y$ для каждого $\alpha \in \mathcal{D}$, то существует точка, к которой бисходится одна и только одна из данных двух направленностей.

Доказательство. Пусть аксиома p-T_0 выполняется в X. Ясно, что $\{x_\alpha\} \xrightarrow{p} x$ и $\{y_\alpha\} \xrightarrow{p} y$. Если допустить, что не существует точки, указанной в условии, то получается, что $\{x_\alpha\} \xrightarrow{p} y$ и $\{y_\alpha\} \xrightarrow{p} x$, т.е. любая i-окрестность $U(x)$ содержит y и наоборот.

Пусть, теперь, существует точка $z \in X$, к которой бисходится, к примеру, только $\{x_\alpha\}$. Так как $\{y_\alpha\}$ не бисходится к z, то, можно допустить существование такой I-окрестности $U(z)$, что $y \bar{\in} U(z)$. Однако, как легко видеть, $U(z)$ является некоторой I-окрестностью и для x. Теорема доказана.

Теорема I.I.4. Бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно T_1-бипространством (см. /47/) тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: если $x_\alpha = x$ для каждого $\alpha \in \mathcal{D}$, то направленность $\{x_\alpha\}$ бисходится к единственной точке x.

Доказательство. Пусть аксиома p-T_1 выполняется в X и $y \in X$ произвольная точка, $y \neq x$. Тогда, не ограничивая общности, можно предположить существование такой I-окрестности $U(y)$, что $x \bar{\in} U(y)$. Следовательно, $\{x_\alpha\}$ не бисходится к y.

Наоборот, если выполняется условие теоремы и $x \neq y$ произвольные точки, то каждая из них имеет либо I-окрестность, либо 2-окрестность, не содержащую другой. Теорема доказана.

Определение I.I.7. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ бисходится к хаусдорфовой паре, состоящей из точек $x, y \in X$, если $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ I-сходится к x и 2-сходится к y.

Теорема I.I.5. Бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно хаусдорфовым (см. /32/) тогда и только тогда, когда не существует направленности, бисходящейся к хаусдорфовой паре.

Доказательство. Если допустить, что (X, τ_1, τ_2) есть $p\text{-}T_2$ бипространство и существует направленность, бисходящаяся к хаусдорфовой паре x, y, то получим, что любая I-окрестность $U(x)$ пересекает произвольную 2-окрестность $U(y)$.

Наоборот, если (X, τ_1, τ_2) не является $p\text{-}T_2$ бипространством, то, не ограничивая общности, можно предположить существование такой хаусдорфовой пары x, y, что любая I-окрестность $U(x)$ пересекает произвольную 2-окрестность $U(y)$. Обозначим через $\mathcal{U}_x$ и $\mathcal{U}_y$ семейства соответственно всех I-окрестностей $U(x)$ и 2-окрестностей $U(y)$. Семейства $\mathcal{U}_x$ и $\mathcal{U}_y$ направлены по включению. Упорядочим декартово произведение $\mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y$, полагая $(U(x), U(y)) \geqslant (V(x), V(y))$ в том и только в том случае, когда $V(x) \subseteq U(x)$ и $V(y) \subseteq U(y)$. Ясно, что отношение $\geqslant$ превращает рассматриваемое произведение в направленное множество. Для каждой пары $(U(x), U(y)) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y$, $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$. Выберем из каждого множества $U(x) \cap U(y)$ точку $z_{(U(x), U(y))}$. Если $(V(x), V(y)) \geqslant (U(x), U(y))$, то $z_{(U(x), U(y))} \in U(x) \cap U(y) \subseteq V(x) \cap V(y)$ и, следовательно, направленность $\{z_{(U(x), U(y))} : (U(x), U(y)) \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y\}$ бисходится к хаусдорфовой паре x, y , ч.т.д.

Определение I.I.8. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ бисходится к регулярной паре, состоящей из точки $x\in X$ и множества $A\subset X$, $A=C_i A$, $x\bar{\in} A$, если $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ i-сходится к x и j-сходится к A . Отметим тут же, что j-сходимость к множеству A следует понимать в следующем смысле: для любой j-окрестности $U(A)$ существует такой индекс $\alpha_0\in\mathcal{D}$, что $\alpha>\alpha_0$ влечет $x_\alpha\in U(A)$.

Теорема I.I.6. Бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно регулярным тогда и только тогда, когда не существует направленности, бисходящейся к регулярной паре.

Доказательство. Если (X,τ_1,τ_2) есть p-T_3 бипространство и существует направленность, бисходящаяся к регулярной паре, то любая i-окрестность $U(x)$ пересекает произвольную j-окрестность $U(A)$, что невозможно.

Наоборот, допустив, что (X,τ_1,τ_2) не является p-T_3 бипространством, можно построить такую направленность $\{z_{(U(x),U(A))} : (U(x),U(A))\in \mathcal{U}_x\times\mathcal{U}_A\}$, где $\mathcal{U}_x$ — семейство всех i-окрестностей $U(x)$, а $\mathcal{U}_A$ — семейство всех j-окрестностей $U(A)$, которая бисходится к регулярной паре, состоящей из точки x и множества A . Теорема доказана.

Определение I.I.9. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ бисходится к нормальной паре (A, B), если $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ j-сходится к A и i-сходится к B .

Теорема I.I.7. Бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно нормальным тогда и только тогда, когда не существует направленности, бисходящейся к нормальной паре.

Доказательство этой теоремы проходит аналогично доказательствам теорем I.I.5 и I.I.6, с той лишь разницей, что во второй части индексирующим множеством направленности является $\mathcal{U}_A \times \mathcal{U}_B$, где $\mathcal{U}_A$ — семейство всех j-окрестностей множества A и $\mathcal{U}_B$ — семейство всех i-окрестностей множества B.

Для характеристики аксиомы парной вполне регулярности в терминах сходимости более удобным является определение парно нормальной базы, приводимое ниже, равносильность которого определению I.I.I доказывается без труда и, поэтому, опускается.

Предложение I.I.8. Парно замкнутая база $Z=\{Z_1, Z_2\}$ бипространства (X, τ_1, τ_2) является парно нормальной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

I. Для любой точки $x \in X$ и любого $A \in Z_i$, $x \bar{\in} A$, существуют дизъюнктные окрестности $U(x) \in coZ_i$ и $U(A) \in coZ_j$.

2. Если $A \in Z_1, B \in Z_2, A \cap B = \emptyset$, то существуют дизъюнктные окрестности $U(A) \in coZ_2$, $U(B) \in coZ_1$.

Пусть $Z=\{Z_1, Z_2\}$ парно замкнутая база, а $coZ=\{coZ_1, coZ_2\}$ сопряженная с ней парно открытая база бипространства (X, τ_1, τ_2).

Определение I.I.IO. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ Z_i- сходится к точке $x \in X$ (к множеству $A \subset X$), если для любой окрестности $U(x) \in coZ_i$ ($U(A) \in coZ_i$) существует такой индекс $\alpha_0 \in D$, что из $\alpha > \alpha_0$ следует $x_\alpha \in U(x)$ ($x_\alpha \in U(A)$).

Определение I.I.II. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ Z-бисходится к Z-регулярной паре, состоящей из точки $x \in X$ и множества $A \in Z_i$, $x \bar{\in} A$, если $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ Z_j-сходится к A и Z_i-сходится к x.

Определение I.I.I2. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ Z-бисходится к Z-нормальной паре (A, B), если $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ Z_j-сходится к A и Z_i-сходится к B.

Теперь, характеристика парно вполне регулярных бипространств в терминах сходимости принимает вид:

Теорема I.I.8. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно вполне регулярно тогда и только тогда, когда существует парно замкнутая база $Z=\{Z_1,Z_2\}$ и выполнены следующие условия:

I. Не существует направленности, Z-бисходящейся к Z-регулярной паре.

2. Не существует направленности, Z-бисходящейся к Z-нормальной паре.

Доказательство. Если (X,τ_1,τ_2) является p-вполне регулярным, то оно обладает p-нормальной базой $Z=\{Z_1,Z_2\}$. Допустив существование направленности, которая либо Z-бисходится к Z-регулярной паре, либо Z-бисходится к Z-нормальной паре, получим, что или любая окрестность $U(x)\in coZ_i$ пересекает произвольную окрестность $U(A)\in coZ_j$, или любая окрестность $U(A)\in coZ_j$ пересекает произвольную окрестность $U(B)\in coZ_i$, что противоречит предложению I.I.8.

Пусть, теперь, (X,τ_1,τ_2) обладает p-замкнутой базой $Z=\{Z_1,Z_2\}$ со свойствами I и 2. Чтобы прийти к противоречию и в этой части доказательства, надо следовать схеме доказательства теоремы I.I.5, однако, индексирующим множеством брать либо — $\mathcal{U}_x\times\mathcal{U}_A$, где $\mathcal{U}_x$ — семейство всех окрестностей $U(x)\in coZ_i$ и $\mathcal{U}_A$ — семейство всех окрестностей $U(A)\in coZ_j$, либо — $\mathcal{U}_A\times\mathcal{U}_B$, где $\mathcal{U}_A$ — семейство всех окрестностей $U(A)\in coZ_j$, а $\mathcal{U}_B$ — семейство всех окрестностей $U(B)\in coZ_i$, ч.т.д.

Теорема I.I.8 позволяет получить характеристику вполне регулярных топологических пространств в терминах сходимости, что в качестве приложения и будет осуществлено в главе IУ.

§ 2. ТИПЫ КОМПАКТНОСТИ И БИКОМПАКТИФИКАЦИЯ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В первой части данного параграфа определяются и изучаются различные типы компактности бипространств, а именно, парно H-замкнутые, парно почти бикомпактные и парно бикомпактные бипространства. Кроме того, применяя некоторые известные аксиомы парной отделимости из § I, выясняются соотношения между введенными типами компактности.

Определение I.2.I. Бипространство (X,τ_1,τ_2) назовем парно H-замкнутым, если из любого i-открытого покрытия $\{U_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ этого бипространства можно выбрать такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$, что $X=\bigcup_{k=1}^{n} C_j U_{\alpha_k}$ (ср. /6, стр. I43/).

Предложение I.2.I. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно H-замкнуто тогда и только тогда, когда каждое открытое покрытие $\{U_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$, состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств имеет такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$, что $X=\bigcup_{k=1}^{n} C_j U_{\alpha_k}$.

Доказательство. Если (X,τ_1,τ_2) pH-замкнуто, то ясно, что условие выполняется. Пусть выполняется условие предложения и $\{U_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ произвольное i-открытое покрытие бипространства (X,τ_1,τ_2). Очевидно, что и семейство $\{J_i C_j U_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ является покрытием для X. Следовательно, существует такое конечное подсемейство $\{J_i C_j U_{\alpha_k} : k=\overline{1,n}\}$, что $X=\bigcup_{k=1}^{n} C_j J_i C_j U_{\alpha_k}$. Но, для каждого $k=\overline{1,n}$, $C_j J_i C_j U_{\alpha_k} = C_j U_{\alpha_k}$ и, поэтому $X=\bigcup_{k=1}^{n} C_j U_{\alpha_k}$, ч.т.д.

Определение I.2.2. Бипространство (X,τ_1,τ_2) назовем парно почти бикомпактным, если из любого i-открытого покрытия $\{U_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ этого бипространства можно выбрать такое конечное подсемейство

$\{\mathcal{U}_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$, что $X=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathcal{J}_i\mathcal{C}_j\mathcal{U}_{\alpha_k}$ (ср. /69/).

Предложение I.2.2. Для бипространства (X,τ_1,τ_2) следующие условия равносильны:

(а) (X,τ_1,τ_2) парно почти бикомпактно;

(б) каждое i-открытое покрытие $\{\mathcal{U}_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$, состоящее из базисных элементов, имеет такое конечное подсемейство $\{\mathcal{U}_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$, что $X=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathcal{J}_i\mathcal{C}_j\mathcal{U}_{\alpha_k}$;

(в) каждое покрытие, состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств, имеет конечное подпокрытие;

(г) каждое центрированное семейство (i,j)-канонических замкнутых множеств имеет непустое пересечение;

(д) каждое семейство i-замкнутых множеств $\{F_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$, обладающее свойством $\bigcap\limits_{k=1}^{n}\mathcal{C}_i\mathcal{J}_jF_{\alpha_k}\neq\emptyset$ для любого конечного подсемейства $\{F_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$, имеет непустое пересечение.

Доказательство. Ясно, что (а) $\Longrightarrow$ (б).

Покажем, что (б) $\Longrightarrow$ (в). Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ покрытие, состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств. Пусть $\mathcal{B}_i$ базы топологий τ_i. Тогда, для любого $\alpha\in\mathcal{D}$, имеем $\mathcal{U}_\alpha=\cup\{\mathcal{U}_\gamma:\gamma\in\Omega_\alpha,\mathcal{U}_\gamma\in\mathcal{B}_i\}$. Следовательно, $\{\mathcal{U}_\gamma:\gamma\in\Omega_\alpha,\alpha\in\mathcal{D}\}$ базисное i-открытое покрытие бипространства (X,τ_1,τ_2). Но, согласно (б), существует такое конечное подсемейство $\{\mathcal{U}_{\gamma_k}\}_{k=1}^{n}$, что $X=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathcal{J}_i\mathcal{C}_j\mathcal{U}_{\gamma_k}$. Для каждого $\mathcal{U}_{\gamma_k}$ возьмем $\mathcal{U}_{\alpha_k}\in\{\mathcal{U}_\alpha\}$, $\mathcal{U}_{\gamma_k}\subseteq\mathcal{U}_{\alpha_k}$. Тогда $\mathcal{J}_i\mathcal{C}_j\mathcal{U}_{\gamma_k}\subseteq\mathcal{J}_i\mathcal{C}_j\mathcal{U}_{\alpha_k}=\mathcal{U}_{\alpha_k}$. Следовательно, $\{\mathcal{U}_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ искомое конечное подпокрытие.

Ясно, что (в) $\Longrightarrow$ (г).

Покажем, что (г) $\Longrightarrow$ (д). Пусть $\{F_\alpha:F_\alpha=\mathcal{C}_iF_\alpha,\alpha\in\mathcal{D}\}$ семейство, обладающее свойством из (д). Тогда семейство $\{\mathcal{C}_i\mathcal{J}_jF_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ центрировано и состоит из (i,j)-канонических замкнутых множеств. Поэтому, согласно (г), $\bigcap\limits_{\alpha}\mathcal{C}_i\mathcal{J}_jF_\alpha\neq\emptyset$; но, поскольку каждое

F_α i-замкнуто, то $C_i J_j F_\alpha \subseteq F_\alpha$, т.е. $\bigcap F_\alpha \neq \emptyset$.

Осталось доказать импликацию (д) $\Longrightarrow$ (а). Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ произвольное i-открытое покрытие. Допустим противное: для любого конечного подсемейства $\{\mathcal{U}_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ справедливо неравенство $X \neq \bigcup_{k=1}^{n} J_i C_j \mathcal{U}_{\alpha_k}$. Тогда $\bigcap_{k=1}^{n} (X \setminus J_i C_j \mathcal{U}_{\alpha_k}) \neq \emptyset$, т.е. $\bigcap_{k=1}^{n} C_i J_j (X \setminus \mathcal{U}_{\alpha_k}) \neq \emptyset$. Согласно (д), $\bigcap_{\alpha} C_i J_j (X \setminus \mathcal{U}_\alpha) \neq \emptyset$. Но, в этом случае $X \neq \bigcup_{\alpha} J_i C_j \mathcal{U}_\alpha$, что невозможно, т.к. $X = \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{U}_\alpha \subseteq J_i C_j \mathcal{U}_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathcal{D}$. Противоречие доказывает справедливость импликации (д) $\Longrightarrow$ (а) и, значит, предложение.

Определение I.2.3. Бипространство (X,τ_1,τ_2) назовем парно бикомпактным, если топологические пространства (X,τ_i) бикомпактны.

Ясно, что парная бикомпактность $\Longrightarrow$ парная почти бикомпактность $\Longrightarrow$ парная H-замкнутость.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример I.2.I. Пусть X произвольное бесконечное множество, $\tau_1 = \{\emptyset, X\} \cup \{ A : x_0 \in A$, x_0 фиксирована в X, $\tau_2 = \{\emptyset, X\}$. Тогда, как легко видеть, (X,τ_1,τ_2) p-почти бикомпактно и, значит, pH-замкнуто, однако не является парно бикомпактным, так как топологическое пространство (X,τ_1) не бикомпактно.

Приведем теперь некоторые достаточные условия, при которых справедливы обратные импликации.

Предложение I.2.3. Если парно H-замкнутое бипространство является парно почти регулярным, то оно парно почти бикомпактно.

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ произвольное покрытие pH-замкнутого и p-почти регулярного бипространства (X,τ_1,τ_2), состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств. Тогда, для любой точки $x \in X$ существует такой индекс $\alpha_x \in \mathcal{D}$, что $x \in \mathcal{U}_{\alpha_x}$ Так как (X,τ_1,τ_2) p-почти регулярно, то, согласно условию (д) предложения I.I.3, существует такая i -окрестность $V(x)$, что $C_j V(x) \subseteq J_i C_j U_{\alpha_x} = U_{\alpha_x}$. Ясно, что $\{V(x) : x \in X\}$ i- открытое покрытие для X и, поскольку (X, τ_1, τ_2) pH-замкнуто, существует такое конечное подсемейство $\{V(x_k)\}_{k=1}^{n}$, что $X = \bigcup_{k=1}^{n} C_j V(x_k)$. Тогда $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ конечное подсемейство семейства $\{U_\alpha : \alpha \in D\}$, покрывающее X и, согласно условию (в) предложения I.2.2, (X, τ_1, τ_2) парно почти бикомпактно, ч.т.д.

Следствие. Парно почти регулярное бипространство парно H-замкнуто тогда и только тогда, когда оно парно почти бикомпактно.

Предложение I.2.4. Если парно почти бикомпактное бипространство является парно полурегулярным, то оно парно бикомпактно.

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha : \alpha \in D\}$ произвольное i-открытое покрытие p-почти бикомпактного и p-полурегулярного бипространства (X, τ_1, τ_2). Для каждой точки $x \in X$ возьмем U_{α_x}, $x \in U_{\alpha_x}$. В силу p-полурегулярности (X, τ_1, τ_2) существует такая (i, j)-каноническая открытая окрестность $V(x)$, что $V(x) \subseteq U_{\alpha_x}$ (см. /66/). Ясно, что $\{V(x) : x \in X\}$ покрытие для X, состоящее из (i, j)-канонических открытых множеств. Учитывая условие (в) предложения I.2.2, получаем, что существует конечное подпокрытие $\{V(x_k)\}_{k=1}^{n}$ и, следовательно, соответствующая система $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^{n}$ является конечным подпокрытием покрытия $\{U_\alpha : \alpha \in D\}$, ч.т.д.

Следствие. Парно полурегулярное бипространство является парно почти бикомпактным тогда и только тогда, когда оно парно бикомпактно.

Так как каждое парно регулярное бипространство парно почти регулярно и парно полурегулярно, то, учитывая предложения I.2.3

и I.2.4, получаем, что справедливо

<u>Предложение I.2.5</u>. Если парно H-замкнутое бипространство парно регулярно, то оно парно бикомпактно.

<u>Следствие</u>. Парно регулярное бипространство парно H-замкнуто тогда и только тогда, когда оно парно бикомпактно.

Ниже будут даны два необходимых и достаточных условия парной почти бикомпактности.

<u>Определение I.2.4</u>. Подмножество A бипространства (X,τ_1,τ_2) назовем δ_i-замкнутым, если для любой точки $x \overline{\in} A$ существует такая i-окрестность $U(x)$, что $J_i C_j U(x) \cap A = \emptyset$, т.е., если для любой точки $x \overline{\in} A$ существует такая (i,j)-каноническая открытая окрестность $U(x)$, что $U(x) \cap A = \emptyset$ (ср. /66/).

Дополнение δ_i-замкнутого множества назовем δ_i-открытым. Легко видеть, что система всех δ_i-открытых множеств образует некоторую топологию τ_i^* на X, которая, вообще говоря, слабее чем τ_i и базой для которой служат (i,j)-канонические открытые множества. Заметим тут же, что $\tau_i = \tau_i^*$ тогда и только тогда, когда бипространство (X,τ_1,τ_2) парно полурегулярно.

Пусть дано бипространство (X,τ_1,τ_2) и пусть $\mathfrak{B}_i$ базы топологий τ_i. Тогда, топологию, порожденную семейством $\{X \setminus C_j U \mid U \in \mathfrak{B}_i\}$, назовем котопологией топологии τ_i и обозначим через $\tau_{\mathfrak{B}_j}$. Бипространство $(X,\tau_{\mathfrak{B}_1},\tau_{\mathfrak{B}_2})$ назовем кобипространством бипространства (X,τ_1,τ_2). Бипространство (X,τ_1,τ_2) назовем P-кобипространством, если существуют такие базы $\mathfrak{B}_i$ топологий τ_i, что кобипространство $(X,\tau_{\mathfrak{B}_1},\tau_{\mathfrak{B}_2})$ обладает свойством P и, – назовем полностью P-кобипространством, если каждое кобипространство обладает свойством P.

Отметим тут же, что если дано семейство бипространств

$\{(X_\alpha,\tau_1^\alpha,\tau_2^\alpha):\alpha\in\mathcal{D}\}$, то согласно /63/, под произведением этого семейства будет пониматься бипространство (X,τ_1,τ_2), где (X,τ_i) — тихоновские произведения семейств $\{(X_\alpha,\tau_i^\alpha):\alpha\in\mathcal{D}\}$.

Предложение I.2.6. Бипространство (X,τ_1,τ_2) парно почти бикомпактно тогда и только тогда, когда бипространство (X,τ_1^*,τ_2^*) парно бикомпактно.

Доказательство. Пусть, сперва, (X,τ_1,τ_2) p-почти бикомпактно и $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ произвольное базисное i^*-открытое покрытие бипространства (X,τ_1^*,τ_2^*). Тогда $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ i-открытое покрытие для (X,τ_1,τ_2) и, в силу p-почти бикомпактности (X,τ_1,τ_2), существует такое конечное подсемейство $\{U_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$, что $X=\bigcup_{k=1}^n J_iC_jU_{\alpha_k}$. Так как $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ базисное i^*-открытое покрытие для (X,τ_1^*,τ_2^*), то $U_\alpha=J_iC_jU_\alpha$ для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$. Следовательно, $X=\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$, т.е. (X,τ_1^*,τ_2^*) p-бикомпактно.

Наоборот, пусть $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ i-открытое покрытие бипространства (X,τ_1,τ_2). Ясно, что $\{J_iC_jU_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ базисное i^*-открытое покрытие бипространства (X,τ_1^*,τ_2^*). Так как (X,τ_1^*,τ_2^*) p-бикомпактно, то существует такое конечное подсемейство $\{J_iC_jU_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$, что $X=\bigcup_{k=1}^n J_iC_jU_{\alpha_k}$. Следовательно, (X,τ_1,τ_2) p-почти бикомпактно, ч.т.д.

Следствие I. Для бипространства (X,τ_1,τ_2) следующие условия равносильны:

(а) (X,τ_1,τ_2) парно почти бикомпактно;

(б) каждое покрытие, состоящее из δ_i-открытых множеств, имеет конечное подпокрытие;

(в) каждое центрированное семейство δ_i-замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

<u>Следствие 2</u>. Пусть $\{(X_\alpha, \tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha) : \alpha \in \mathcal{D}\}$ произвольное семейство бипространств. Произведение (X, τ_1, τ_2) этого семейства парно почти бикомпактно в том и только в том случае, когда каждое бипространство $(X_\alpha, \tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha)$ парно почти бикомпактно.

<u>Доказательство</u>. Как известно, $\mathcal{J}_i \prod_\alpha \mathcal{U}_\alpha = \prod_\alpha \mathcal{J}_i \mathcal{U}_\alpha$ и $C_j \prod_\alpha \mathcal{U}_\alpha = \prod_\alpha C_j \mathcal{U}_\alpha$, где $\prod_\alpha \mathcal{U}_\alpha \subset \prod_\alpha X_\alpha$ и $\mathcal{U}_\alpha = X_\alpha$ за исключением конечного числа индексов. Поэтому, легко видеть, что бипространства $(X = \prod_\alpha X_\alpha, \tau_1^*, \tau_2^*)$ и $\prod_\alpha (X_\alpha, \tau_1^{\alpha*}, \tau_2^{\alpha*})$ совпадают. Теперь, непосредственно из предложения I.2.6 и теоремы Тихонова получаем справедливость следствия 2, ч.т.д.

<u>Предложение I.2.7</u>. Бипространство (X, τ_1, τ_2) парно почти бикомпактно тогда и только тогда, когда оно полностью парно кобикомпактно.

<u>Доказательство</u>. Пусть, сперва, (X, τ_1, τ_2) p-почти бикомпактно. Тогда, как известно, топологии $\tau_{\mathcal{B}_1}$ и $\tau_{\mathcal{B}_2}$ порождены соответственно семействами $\{X \setminus C_1 \mathcal{U}_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{B}_2\}$ и $\{X \setminus C_2 V_\beta : V_\beta \in \mathcal{B}_1\}$, где $\mathcal{B}_i$ — базы топологий τ_i.

Ясно, что каждое $X \setminus C_1 \mathcal{U}_\alpha$ является (I,2)-каноническим открытым и каждое $X \setminus C_2 V_\beta$ — (2,I)-каноническим открытым в (X, τ_1, τ_2). Пусть $\{W_\gamma : \gamma \in \mathcal{D}\}$ произвольное $i_{\mathcal{B}_j}$-открытое покрытие. Так как база топологии $\tau_{\mathcal{B}_j}$ состоит из (j, i)-канонических открытых в (X, τ_1, τ_2) множеств, то $\tau_{\mathcal{B}_j}$ является семейством δ_j-открытых множеств из (X, τ_1, τ_2). Теперь, применив условие (б) следствия I предыдущего предложения, получим, что $\{W_\gamma : \gamma \in \mathcal{D}\}$ имеет конечное подпокрытие, т.е. $(X, \tau_{\mathcal{B}_1}, \tau_{\mathcal{B}_2})$ p-бикомпактно.

Наоборот, пусть произвольное кобипространство бипространства (X, τ_1, τ_2) p-бикомпактно. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ произвольное покрытие для (X,τ_1,τ_2), состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств. Тогда, для любого U_α имеем:

$$U_\alpha=J_iC_jU_\alpha=X\setminus(X\setminus J_iC_jU_\alpha)=X\setminus C_i(X\setminus C_jU_\alpha).$$

Так как $X\setminus C_jU_\alpha\in\tau_j$, то $U_\alpha\in\tau_{\tau_i}$; следовательно, $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ является i_{τ_i}-открытым покрытием бипространства $(X,\tau_{\tau_1},\tau_{\tau_2})$ и поскольку $(X,\tau_{\tau_1},\tau_{\tau_2})$ p-бикомпактно, то $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ имеет конечное подпокрытие. Остается применить условия (в) предложения I.2.2, ч.т.д.

До конца главы под бипространством следует понимать бипространство, удовлетворяющее аксиоме парной отделимости $Rp\text{-}T_1$.

<u>Определение I.2.5</u>. Бикомпактным расширением бипространства (X,τ_1,τ_2) назовем пару (Y,f), где Y — бикомпактное топологическое пространство, а f — гомеоморфизм топологического пространства (X,τ), где $\tau=\tau_1\vee\tau_2$ (см. /6, стр. 62/), на всюду плотное подпространство пространства Y.

Нашей ближайшей целью является построение бикомпактного хаусдорфова расширения для парно вполне регулярного бипространства (X,τ_1,τ_2). Для этого требуются некоторые предварительные понятия и утверждения, приводимые ниже.

Пусть дано парно вполне регулярное бипространство (X,τ_1,τ_2); тогда, как известно, оно обладает парно нормальной базой $Z=\{Z_1,Z_2\}$.

<u>Определение I.2.6</u>. Подсистему $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$ парно нормальной базы $Z=\{Z_1,Z_2\}$, где $\mathcal{A}_i\subset Z_i$, назовем парным Z-фильтром, если для любого $A_1\in\mathcal{A}_1$ и любого $A_2\in\mathcal{A}_2$ пересечение $A_1\cap A_2\neq\emptyset$.

Если $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\}$ другой pZ-фильтр, то скажем, что $\mathcal{B}\geqslant\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}_i\subseteq\mathcal{B}_i$. Ясно, что отношение $\geqslant$ является частичным порядком во множестве всех pZ-фильтров.

Определение I.2.7. Парный Z-фильтр $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$ назовем парным Z-ультрафильтром, если не существует парного Z-фильтра $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\}$ с условием $\mathcal{B}>\mathcal{A}$, т.е. если не существует парного Z-фильтра $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\}$ с условиями $\mathcal{A}_1\subseteq\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{A}_2\subset\mathcal{B}_2$ или $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{A}_2\subseteq\mathcal{B}_2$.

Предложение I.2.8. Для каждого парного Z-фильтра $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$ существует такой парный Z-ультрафильтр $\mathcal{B}=\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\}$, что $\mathcal{B}\geqslant\mathcal{A}$.

Доказательство этого предложения легко получается, если применить лемму Цорна.

Предложение I.2.9. Если $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$ pZ-ультрафильтр и $A_1\in Z_1 (A_2\in Z_2)$ такое, что $A_1\cap A\neq\emptyset\,(A\cap A_2\neq\emptyset)$ для любого $A\in\mathcal{A}_2$ $(A\in\mathcal{A}_1)$, то $A_1\in\mathcal{A}_1\,(A_2\in\mathcal{A}_2)$.

Доказательство. Пусть $A_1\in\mathcal{A}_1$ такое, что $A_1\cap A\neq\emptyset$ для любого $A\in\mathcal{A}_2$. Если $A_1\bar{\in}\mathcal{A}_1$, то $\mathcal{A}'=\{\mathcal{A}_1\cup\{A_1\},\mathcal{A}_2\}$ pZ-фильтр, содержащий $\mathcal{A}$; но это невозможно, поскольку $\mathcal{A}$ есть pZ-ультрафильтр. Второй – аналогично, ч.т.д.

Для каждой точки $x\in X$ обозначим через Z_i^x семейство всех множеств из Z_i, содержащих x.

Предложение I.2.10. $Z_x=\{Z_1^x,Z_2^x\}$ является парным Z-ультрафильтром.

Доказательство. Ясно, что Z_x есть pZ-фильтр. Покажем, что Z_x – pZ-ультрафильтр. Допустим противное, тогда, согласно предложению I.2.8, существует такой pZ-ультрафильтр $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$, что $\mathcal{A}>Z_x$. Но это значит, что либо $\mathcal{A}_1\supset Z_1^x$, либо $\mathcal{A}_2\supset Z_2^x$. Не ограничивая общности допустим, что $\mathcal{A}_1\supset Z_1^x$, так как второй случай доказывается аналогично. Согласно допущению, существует такое $A_1\in\mathcal{A}_1$, что $A_1\bar{\in} Z_1^x$. Нетрудно убедиться, что p-нормальность базы $Z=\{Z_1,Z_2\}$ влечет существование такого $A_2\in Z_2$, что $x\in A_2$ и $A_1\cap A_2=\emptyset$. Но $x\in A_2$ влечет $A_2\in Z_2^x$ и, следовательно, $A_2\in\mathcal{A}_2$. С другой стороны, так как $A_1\in\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\}$ pZ - фильтр, получаем, что $A_1\cap A_2\neq\emptyset$. Прлучили противоречие. Это доказывает, что Z_x есть pZ-ультрафильтр.

Предложение I.2.II. Если $x\in X$ произвольная точка X, то $\cap\{Z_1^x\cup Z_2^x\}=\{x\}$.

Доказательство. Допустим, что существует $y\in\cap\{Z_1^x\cup Z_2^x\}$ и $y\neq x$. Так как (X,τ_1,τ_2) удовлетворяет аксиоме RpT_1, то $y=C_2y$ (см. /58/). В силу p -нормальности базы Z существует такое $A\in Z_1$, что $x\in A$ и $y\,\bar{\in}\,A$. Поскольку $x\in A$, то $A\cap A_2\neq\emptyset$ для любого $A_2\in Z_2^x$. Но тогда, тот факт, что Z_x есть pZ -ультрафильтр, влечет $A\in Z_1^x$. Согласно предположению, $y\in\cap\{Z_1^x\cup Z_2^x\}$ и, значит, $y\in A$; противоречие. Следовательно, $\cap\{Z_1^x\cup Z_2^x\}=\{x\}$, ч.т.д.

Обозначим через $W_p(Z)$ множество всех парных Z -ультрафильтров бипространства (X,τ_1,τ_2). Тогда, согласно предложению I.2.II, существует взаимно-однозначное соответствие между точками $x\in X$ и pZ-ультрафильтрами из $W_p(Z)$, имеющими вид Z_x. Формально, точки из $W_p(Z)$ будем обозначать через $s=\{\mathcal{A}_1^s,\mathcal{A}_2^s\}$.

Для каждого $A_1\in Z_1$ определим

$$\Phi(A_1)=\{s:A_1\in\mathcal{A}_1^s\}$$

и, для каждого $A_2\in Z_2$, пусть

$$\psi(A_2)=\{s:A_2\in\mathcal{A}_2^s\}.$$

Если $U_1=X\setminus A_1$, т.е. $U_1\in coZ_1$, пусть

$$\Phi_1(U_1)=\{s:A_1\,\bar{\in}\,\mathcal{A}_1^s\}=W_p(Z)\setminus\Phi(A_1)$$

и, если $U_2=X\setminus A_2$, т.е. $U_2\in coZ_2$, пусть

$$\psi_1(U_2)=\{s:A_2\,\bar{\in}\,\mathcal{A}_2^s\}=W_p(Z)\setminus\psi(A_2)$$

Объявим семейство $\{\Phi(A_1),\psi(A_2)\}_{A_1\in Z_1,A_2\in Z_2}$ предбазой замкнутых множеств топологии γ на $W_p(Z)$. Ясно, что тогда $\{\Phi_2(U_1),\Psi_1(U_2)\}_{U_1\in coZ_1, U_2\in coZ_2}$ — предбаза открытых множеств топологии γ.

Справедливо следующее

Предложение I.2.I2. Если $A_1\in Z_1, A_2\in Z_2$ и $A_1\cup A_2=X$, то $\Phi(A_1)\cup\Psi(A_2)=W_p(Z)$.

Доказательство. Допустим существует $s\in W_p(Z)\setminus(\Phi(A_1)\cup\Psi(A_2))$. Тогда $A_1\bar{\in}\mathcal{A}_1^s, A_2\bar{\in}\mathcal{A}_2^s$. Следовательно, согласно предложению I.2.9, существуют такие $A_2'\in\mathcal{A}_2^s, A_1'\in\mathcal{A}_1^s$, что $A_1\cap A_2'=A_1'\cap A_2=\phi$. Но, тогда $A_1'\cap A_2'=(A_1'\cap A_2')\cap X=(A_1'\cap A_2')\cap(A_1\cup A_2)=\phi$; противоречие с тем, что $s=\{\mathcal{A}_1^s,\mathcal{A}_2^s\}$ есть pZ-ультрафильтр.

Предложение доказано.

Теорема I.2.I. Топологическре пространство ($W_p(Z),\gamma$) является хаусдорфовым бикомпактным расширением парно вполне регулярного бипространства (X,τ_1,τ_2).

Доказательство. Определим отображение $f:(X,\tau)\to(W_p(Z),\gamma)$, где $\tau=\tau_1\vee\tau_2$, равенством $f(x)=Z_x$. Тогда, как было указано выше, f взаимно-однозначно отображает множество X на множество $f(X)=\mathcal{Y}\subset W_p(Z)$. Покажем, сперва, что $f:(X,\tau)\to(\mathcal{Y},\gamma')$ гомеоморфизм и $[\mathcal{Y}]_{W_p(Z)}=W_p(Z)$.

В виду того, что $f:X\to\mathcal{Y}$ взаимно-однозначное отображение "на", для гомеоморфизмости f достаточно доказать, что f открыто. Пусть V - базисное открытое подмножество в (X,τ). Тогда, согласно определению топологии τ, $V=V_1\cap V_2$, где $V_i\in\tau_i$. Покажем, что $f(V)$ открыто в ($\mathcal{Y},\gamma'$). Возьмем произвольную точку $Z_x\in f(V)$. Ясно, что тогда $x\in V=V_1\cap V_2$. Так как $coZ=\{coZ_1,coZ_2\}$ p-открытая база бипространства (X,τ_1,τ_2 то существуют такие $U_1\in coZ_1$, $U_2\in coZ_2$, что $x\in U_1\subset V_1$,

$x\in\mathcal{U}_2\subset V_2$ и, значит, $x\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\subset V$. Покажем, что $x\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)$. Для этого достаточно доказать, что $x\in\mathcal{U}_1\Leftrightarrow Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)$ и $x\in\mathcal{U}_2\Leftrightarrow Z_x\in\Psi_1(\mathcal{U}_2)$.

Пусть $x\in\mathcal{U}_1$; тогда $x\bar{\in} X\setminus\mathcal{U}_1=A_1$, где $A_1\in Z_1$. Рассмотрим $\Phi(A_1)=\{s: A_1\in\mathfrak{A}_1^s\}$. Так как $x\bar{\in} A_1$, то $A_1\bar{\in} Z_1^x$ и, значит, $Z_x\bar{\in}\Phi(A_1)$. Следовательно, $Z_x\in W_p(Z)\setminus\Phi(A_1)=\Phi_1(\mathcal{U}_1)$. Итак, $x\in\mathcal{U}_1\Longrightarrow Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)$.

Наоборот, пусть $f(x)=Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)$. Отсюда получаем, что $A_1\bar{\in} Z_1^x$, где $A_1=X\setminus\mathcal{U}_1$. Но это значит, что $x\bar{\in} A_1$ и, поэтому, $x\in X\setminus A_1=\mathcal{U}_1$. Равносильность $x\in\mathcal{U}_1\Leftrightarrow Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)$ доказана. Аналогично доказывается, что $x\in\mathcal{U}_2\Leftrightarrow Z_x\in\Psi_1(\mathcal{U}_2)$. Следовательно, $x\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\Leftrightarrow Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)$. Мы имели: $x\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ и $f(x)=Z_x\in f(U)$. Поэтому $Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)\subset f(U)$. Согласно определению топологии γ на $W_p(Z)$, множество $\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)$ является в нем базисным открытым множеством и, так как $\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)\subset f(U)\subset Y$, то оно открыто в Y. Итак, для произвольной точки $Z_x\in f(U)$ мы нашли открытую окрестность $\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)$, содержащуюся в $f(U)$. Следовательно, $f(U)$ открыто в Y, и, значит, $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma')$ гомеоморфизм.

Покажем сейчас, что $[Y]_{W_p(Z)}=W_p(Z)$. Для этого достаточно доказать, что для каждого непустого базисного открытого множества $\mathcal{U}$ в $W_p(Z)$ пересечение $\mathcal{U}\cap Y\neq\emptyset$. Пусть $\mathcal{U}$ произвольное непустое базисное открытое множество в $W_p(Z)$. Тогда, согласно определению топологии γ, существуют такие $\mathcal{U}_1\in coZ_1$, $\mathcal{U}_2\in coZ_2$, что $\mathcal{U}=\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)$. Так как $\mathcal{U}\neq\emptyset$, то $\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\neq\emptyset$. Пусть $x\in\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2$ произвольная точка. Тогда, как было показано выше, $Z_x\in\Phi_1(\mathcal{U}_1)\cap\Psi_1(\mathcal{U}_2)$; но, из определения $Y=f(X)$ непосредственно следует, что $Z_x\in Y$. Следовательно, $Z_x\in\mathcal{U}\cap Y\neq\emptyset$

и, значит, $[\mathcal{Y}]_{W_p(\mathcal{Z})}=W_p(\mathcal{Z})$.

Покажем, что $(W_p(\mathcal{Z}),\gamma)$ — бикомпактное пространство. Пусть $\{\Phi(A_1^\alpha),\Psi(A_2^\beta)\}_{\alpha\in\mathcal{D},\beta\in M}$ — произвольное центрированное семейство предбазисных замкнутых множеств. Тогда $\mathcal{A}'=\{\{A_1^\alpha\},\{A_2^\beta\}\}$ является $p\mathcal{Z}$-фильтром и, согласно предложению I.2.8, существует такой $p\mathcal{Z}$-ультрафильтр $s=\{\mathcal{A}_1^s,\mathcal{A}_2^s\}$, что $s\geqslant\mathcal{A}'$. Следовательно, $\{A_1^\alpha\}\subseteq\mathcal{A}_1^s$ и $\{A_2^\beta\}\subseteq\mathcal{A}_2^s$; поэтому $s\in\Phi(A_1^\alpha)\cap\Psi(A_2^\beta)$ для любого $\alpha\in\mathcal{D}$ и любого $\beta\in M$. Отсюда получаем, что семейство $\{\Phi(A_1^\alpha),\Psi(A_2^\beta)\}_{\alpha\in\mathcal{D},\beta\in M}$ имеет непустое пересечение, т.е. $(W_p(\mathcal{Z}),\gamma)$ бикомпактно.

Докажем, наконец, что $(W_p(\mathcal{Z}),\gamma)$ хаусдорфовое пространство. Пусть $s=\{\mathcal{A}_1^s,\mathcal{A}_2^s\}$, $t=\{\mathcal{A}_1^t,\mathcal{A}_2^t\}$ и $s\neq t$. Так как $s\neq t$, то существуют такие $A_1\in\mathcal{A}_1^s$ и $A_2\in\mathcal{A}_2^t$, что $A_1\cap A_2=\emptyset$. Ясно, что $A_1\in\mathcal{Z}_1$, $A_2\in\mathcal{Z}_2$. В силу p-нормальности базы $\mathcal{Z}$ существуют такие $A_1'\in\mathcal{Z}_1$, $A_2'\in\mathcal{Z}_2$, что $A_1\subset A_1'$, $A_2\subset A_2'$, $A_1'\cup A_2'=X$ и $A_1\cap A_2'=A_1'\cap A_2=\emptyset$. Пусть $\mathcal{U}_{(s)}=W_p(\mathcal{Z})\setminus\Phi(A_1')$, $\mathcal{U}_{(t)}=W_p(\mathcal{Z})\setminus\Psi(A_2')$. Ясно, что $\mathcal{U}_{(s)}$ и $\mathcal{U}_{(t)}$ открыты в $W_p(\mathcal{Z})$.

Рассмотрим $\mathcal{U}_{(s)}\cap\mathcal{U}_{(t)}=(W_p(\mathcal{Z})\setminus\Phi(A_1'))\cap(W_p(\mathcal{Z})\setminus\Psi(A_2'))=W_p(\mathcal{Z})\setminus(\Phi(A_1')\cup\Psi(A_2'))$. Поскольку $A_1'\cup A_2'=X$, то, согласно предложению I.2.12, $\Phi(A_1')\cup\Psi(A_2')=W_p(\mathcal{Z})$. Значит, $\mathcal{U}_{(s)}\cap\mathcal{U}_{(t)}=W_p(\mathcal{Z})\setminus W_p(\mathcal{Z})=\emptyset$ и, следовательно, $(W_p(\mathcal{Z}),\gamma)$ хаусдорфово. Теорема доказана.

В заключение отметим, что приведенное построение хаусдорфова бикомпактного расширения естественно порождает следующий вопрос: является ли $(X,\tau_1\vee\tau_2)$ вполне регулярным, если бипространство (X,τ_1,τ_2) парно вполне регулярно?

ГЛАВА II

ОТОБРАЖЕНИЯ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ I. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ ОТОБРАЖЕНИЙ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ И СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ

В данном параграфе, обобщая понятие парной непрерывности отображения бипространств (см. замечание I.I.I), вводятся так называемые парно почти непрерывные, парно θ-непрерывные и парно слабо непрерывные отображения. Кроме того, определяются парно почти замкнутые и парно почти открытые отображения с таким расчетом, чтобы они способствовали как изучению зависимостей введенных отображений между собой, так и сохранению различных битопологических свойств (к примеру, аксиом парной отделимости и типов компактности бипространств), как в сторону образа, так и в сторону прообраза при этих отображениях.

<u>Определение 2.I.I.</u> Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ назовем парно почти непрерывным отображением, если для любой точки $x\in X$ и любой i-окрестности $U(y)$ точки $y=f(x)$ существует такая i-окрестность $U(x)$, что $f(U(x))\subset J_iC_jU(y)$ (ср. /70/).

<u>Теорема 2.2.I</u>. Для отображения $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ следующие условия равносильны:

(а) f является парно почти непрерывным;

(б) для любого (i,j)-канонического открытого подмножества $U\subset Y$ прообраз $f^{-1}(U)$ i-открыт в X ;

(в) для любого (i,j)-канонического замкнутого подмножества $F\subset Y$ прообраз $f^{-1}(F)$ i-замкнут в X ;

(г) для любой точки $x\in X$ и любой (i,j)-канонической открытой окрестности $U(y)$ точки $y=f(x)$ существует такая

i-окрестность $U(x)$, что $f(U(x))\subset U(y)$;

(д) $f^{-1}(A)\subset J_i f^{-1}(J_i C_j A)$ для любого i-открытого подмножества $A\subset Y$;

(е) $C_i f^{-1}(C_i J_j B)\subset f^{-1}(B)$ для любого i-замкнутого подмножества $B\subset Y$;

(ж) для любой точки $x\in X$ и любой направленности $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$, которая i-сходится к точке x, направленность $\{f(x_\alpha) : \alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится в любой (i,j)-канонической открытой окрестности $U(y)$ точки $y=f(x)$.

Доказательство. (а) $\Longrightarrow$ (б). Пусть $U=J_iC_jU$ и $x\in f^{-1}(U)$. Так как f парно почти непрерывно, то существует такая i-окрестность $V(x)$, что $f(V(x))\subset J_iC_jU=U$. Следовательно, $V(x)\subset f^{-1}(U)$. В силу того, что $x\in f^{-1}(U)$ произвольна, получаем, что $f^{-1}(U)$ i-открыто.

(б) $\Longrightarrow$ (в). Пусть $B=C_iJ_jB\subset Y$. Тогда $Y\setminus B$ является (i,j)-каноническим открытым. Согласно (б), $f^{-1}(Y\setminus B)$ i-открыто в X; но $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$ и, поэтому $f^{-1}(B)$ i-замкнуто в X.

(в) $\Longrightarrow$ (г). Пусть $x\in X$ и $U(y)$ произвольная (i,j)-каноническая открытая окрестность точки $y=f(x)$. Тогда, согласно (в), $f^{-1}(Y\setminus U(y))$, т.е. $X\setminus f^{-1}(U(y))$ i-замкнуто в (X,τ_1,τ_2). Следовательно, $f^{-1}(U(y))$ i-открыто и, поэтому, $U(x)=f^{-1}(U(y))$ искомая i-окрестность.

(г) $\Longrightarrow$ (д). Пусть $A=J_iA\subset Y$. Возьмем произвольную точку $x\in f^{-1}(A)$. Ясно, что J_iC_jA является (i,j)-канонической открытой окрестностью точки $y=f(x)$. Следовательно, учитывая (г), существует такая i-окрестность $U(x)$, что $f(U(x))\subset J_iC_jA$, откуда $U(x)\subset f^{-1}(J_iC_jA)$. Так как $x\in f^{-1}(A)$ произвольная точка, то $f^{-1}(A)\subset J_if^{-1}(J_iC_jA)$.

(д) $\Longrightarrow$ (е) Пусть $B=C_iB\subset Y$. Согласно (д), имеем включение $f^{-1}(Y\setminus B)\subset J_if^{-1}(J_iC_j(Y\setminus B))$, т.е. $X\setminus J_if^{-1}(J_iC_j(Y\setminus B))\subset X\setminus f^{-1}(Y\setminus B)$. Но $X\setminus J_if^{-1}(J_iC_j(Y\setminus B))=C_i(X\setminus f^{-1}J_iC_j(Y\setminus B))=C_i(X\setminus f^{-1}(Y\setminus C_iJ_jB))=C_if^{-1}(C_iJ_jB)$; но $X\setminus f^{-1}(Y\setminus B)=f^{-1}(B)$ и, поэтому, $C_if^{-1}(C_iJ_jB)\subset f^{-1}(B)$.

(е) $\Longrightarrow$ (ж). Пусть $U(y)$ произвольная (i,j)-каноническая открытая окрестность точки $y=f(x)$, где $x\in X$ произвольная точка, и направленность $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ i-сходится к точке x. Тогда $Y\setminus U(y)$ i-замкнуто и, согласно (е), имеем включение. $C_if^{-1}((C_iJ_j(Y\setminus U(y)))\subset f^{-1}(Y\setminus U(y))$. Но $C_iJ_j(Y\setminus U(y)=Y\setminus U(y)$; кроме того, $f^{-1}(Y\setminus U(y))=X\setminus f^{-1}(U(y))$. Следовательно, $C_if^{-1}(Y\setminus U(y))\subset X\setminus f^{-1}(U(y))$, т.е. $f^{-1}(U(y))\subset X\setminus C_if^{-1}(Y\setminus U(y))$. Однако, мы имеем $X\setminus C_if^{-1}(Y\setminus U(y))=J_i(X\setminus f^{-1}(Y\setminus U(y)))=J_if^{-1}(U(y))$, откуда получаем, что $f^{-1}(U(y))\subset J_if^{-1}(U(y))$. В силу этого включения, $f^{-1}(U(y))$ является некоторой i-окрестностью $U(x)$ и, так как направленность $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ i-сходится к точке x, то существует такой индекс $\alpha_0\in D$, что из $\alpha>\alpha_0$ следует $x_\alpha\in f^{-1}(U(y))=U(x)$. Но тогда $f(x_\alpha)\in U(y)$, а это значит, что направленность $\{f(x_\alpha):\alpha\in D\}$ существенно содержится в $U(y)$.

(ж) $\Longrightarrow$ (а). Пусть f не является парно почти непрерывным отображением. Тогда, не ограничивая общности, можно предположить, что существует такая точка $x\in X$ и такая I-окрестность $U(y)$ точки $y=f(x)$, что для любой I-окрестности $U(x)$: $f(U(x))\cap(Y\setminus J_1C_2U(y))\neq\emptyset$; значит $U(x)\cap f^{-1}(Y\setminus J_1C_2U(y))\neq\emptyset$. Семейство $\mathcal{U}$ всех I-окрестностей $U(x)$ направлено по включению. Для каждого $U(x)\in\mathcal{U}$ выберем точку $x_U\in U(x)\cap f^{-1}(Y\setminus J_1C_2U(y))$. Тогда $\{x_U:U\in\mathcal{U}\}$ направленность в X, которая I-сходится к точке x. Однако, направленность $\{f(x_U):U\in\mathcal{U}\}$ не содержится существенно в (I,2)-канонической открытой окрестности $J_1C_2U(y)$.

Полученное противоречие влечет импликацию (ж) $\Longrightarrow$ (а).

Теорема полностью доказана.

Ясно, что каждое парно непрерывное отображение парно почти непрерывно, однако обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 2.I.I. Рассмотрим на R следующие четыре топологии: $\tau_1=\{\emptyset, R\}\cup\{A : R\setminus A$ счетно$\}$, τ_2 – обычная топология, $\gamma_1=\{\emptyset, R, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\gamma_2=\{\emptyset, R, R\setminus\{a, b\}\}$, где a и b фиксированные в R точки. Определим отображение $f:(R,\tau_1,\tau_2)\to(R,\gamma_1,\gamma_2)$ так

$$f(x)=\begin{cases} a, x & \text{рациональная точка,} \\ b, x & \text{иррациональная точка.}\end{cases}$$

Тогда, как легко видеть, f есть парно почти непрерывное, но не парно непрерывное отображение, так как $f_1:(R,\tau_1)\to(R,\gamma_1)$ не является непрерывным отображением топологических пространств.

Предложение 2.I.I. Парно почти непрерывное отображение в парно полурегулярное бипространство является парно непрерывным.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и выполнены условия предложения. Пусть $x\in X$ произвольная точка и $U(y)$ произвольная i-окрестность точки $y=f(x)$. Так как (Y,γ_1,γ_2) p-полурегулярно, то существует такая i-окрестность $V(y)$, что $V(y)\subseteq J_i C_j V(y)\subseteq U(y)$. В силу p-почти непрерывности f существует такая i-окрестность $U(x)$, что $f(U(x))\subset J_i C_j V(y)$ и, поэтому, $f(U(x))\subset U(y)$, ч.т.д.

Приведем теперь некоторые утверждения, касающиеся парно почти непрерывных отображений.

Теорема 2.I.2. Пусть $\{(X_\alpha,\tau_1^\alpha,\tau_2^\alpha) : \alpha\in\mathcal{D}\}$ и $\{(Y_\alpha,\gamma_1^\alpha,\gamma_2^\alpha) : \alpha\in\mathcal{D}\}$ семейства бипространств и для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$, имеется отображение $f_\alpha:(X_\alpha,\tau_1^\alpha,\tau_2^\alpha)\to(Y_\alpha,\gamma_1^\alpha,\gamma_2^\alpha)$. Тогда отображение

$f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ произведений соответствующих семейств, определенное равенством $f(\{x_\alpha\})=\{f_\alpha(x_\alpha)\}$, является парно почти непрерывным тогда и только тогда, когда f_α есть парно почти непрерывное отображение для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$.

Необходимость. Достаточно доказать, что каждое f_α удовлетворяет условию (г) теоремы 2.I.I. Пусть $\alpha_0\in\mathcal{D}$ произвольно фиксированный элемент. Рассмотрим любую точку $x_{\alpha_0}\in X_{\alpha_0}$ и пусть V_{α_0} произвольная (i,j)-каноническая открытая окрестность точки $f_{\alpha_0}(x_{\alpha_0})\in Y_{\alpha_0}$. Возьмем произвольную точку $x=\{x_\alpha\}\in X$, чья α_0-ая координата есть x_{α_0}. Тогда, множество $V=\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_0}Y_\alpha\times V_{\alpha_0}$ является i-открытым в (Y,γ_1,γ_2) и $f(x)\in V$. Так как $C_jV=$ $=\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_0}Y_\alpha\times C_jV_{\alpha_0}$, то $\Im_iC_jV=\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_0}Y_\alpha\times\Im_iC_jV_{\alpha_0}=\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_0}Y_\alpha\times V_{\alpha_0}$, т.е. $V=\Im_iC_jV$. В силу p-почти непрерывности f, существует такая i-окрестность $\mathcal{U}(x)\subset X$, что $f(\mathcal{U}(x))\subset V$. Следовательно, существует такое i-открытое базисное множество $G=\prod\limits_{\substack{\alpha\neq\alpha_0\\ \alpha\neq\alpha_k}}Y_\alpha\times G_{\alpha_1}\times G_{\alpha_2}\times\cdots\times G_{\alpha_n}$, что $G\subset\mathcal{U}(x)$, $x\in G$ и $f(G)\subset V$. Но это включение влечет включения $f_\alpha(G_\alpha)\subset V_\alpha$, для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$, т.е., в частности, $f_{\alpha_0}(G_{\alpha_0})\subset V_{\alpha_0}$. Так как $G_{\alpha_0}=\Im_iG_{\alpha_0}$, то f_{α_0} p-почти непрерывно и, в силу того, что $\alpha_0\in\mathcal{D}$ мы выбрали произвольным образом, f_α p-почти непрерывно для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $x=\{x_\alpha\}\in X$ и пусть $V(y)$ произвольная (i,j)-каноническая открытая окрестность точки $y=f(x)$. Так как $V(y)=\Im_iV(y)$, то существует такой i-открытый базисный элемент $\prod\limits_\alpha V_\alpha$, что $y\in\prod\limits_\alpha V_\alpha\subset V(y)$ и $V_\alpha=Y_\alpha$ для всех $\alpha\in\mathcal{D}$, за исключением конечного числа индексов α_k, $k=\overline{1,n}$. Ясно, что каждое V_{α_k} i_{α_k}-открыто в $(X_{\alpha_k},\tau_1^{\alpha_k},\tau_2^{\alpha_k})$. Так как $V(y)=\Im_iC_jV(y)$, то $\Im_iC_j\prod\limits_\alpha V_\alpha\subset V(y)$. Следовательно, для любого α_k, $k=\overline{1,n}$,

$f_{\alpha_k}(x_{\alpha_k})\in V_{\alpha_k}\subset J_iC_jV_{\alpha_k}$. В силу того, что каждое f_{α_k} p-почти непрерывно, существуют такие i_{α_k}-открытые множества $U_{\alpha_k}\subset X_{\alpha_k}$, $k=\overline{1,n}$, что $x_{\alpha_k}\in U_{\alpha_k}$ и $f_{\alpha_k}(U_{\alpha_k})\subset J_iC_jV_{\alpha_k}$. Тогда, i-открытое множество $U=\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_k}X_\alpha\times U_{\alpha_1}\times\dots\times U_{\alpha_n}$, удовлетворяет условиям $x\in U$ и $f(U)\subset U(y)$. Следовательно, f p-почти непрерывно. Теорема доказана.

<u>Теорема 2.1.3</u>. Пусть дано бипространство (X,τ_1,τ_2) и семейство бипространств $\{(Y_\alpha,\gamma_1^\alpha,\gamma_2^\alpha):\alpha\in\mathcal{D}\}$. Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ является парно почти непрерывным тогда и только тогда, когда $f_\alpha=p_\alpha\circ f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y_\alpha,\gamma_1^\alpha,\gamma_2^\alpha)$ есть парно почти непрерывное отображение для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть, сперва, f p-почти непрерывно. Возьмем произвольную точку $x\in X$ и произвольную (i,j)-каноническую открытую окрестность V_{α_0} точки $p_{\alpha_0}\circ f(x)=f_{\alpha_0}(x)$, где $\alpha_0\in\mathcal{D}$ произвольный индекс. Тогда $J_iC_jp_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})=J_iC_j(\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_0}Y_\alpha\times V_{\alpha_0})=\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_0}Y_\alpha\times J_iC_jV_{\alpha_0}=p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$. Следовательно, $p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})\subset J_iC_jp_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})\subset Y$ и $f(x)\in p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$. Так как f p-почти непрерывно, то существует i-открытое множество U с условиями $x\in U$ и $f(U)\subset p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$. Поэтому $f_{\alpha_0}(U)=(p_{\alpha_0}\circ f)U=p_{\alpha_0}f(U)\subset p_{\alpha_0}p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})=V_{\alpha_0}$, т.е. $f_{\alpha_0}(U)\subset V_{\alpha_0}$. Следовательно, f_α p-почти непрерывно для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$.

Наоборот, пусть $f_\alpha=p_\alpha\circ f$ p-почти непрерывно для каждого $\alpha\in\mathcal{D}$. Пусть $x\in X$ произвольная точка и $U(y)$ произвольная (i,j)-каноническая открытая окрестность точки $y=\{y_\alpha\}=f(x)$. Тогда существует такое i-открытое базисное множество $V=\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_k}Y_\alpha\times V_{\alpha_1}\times\dots\times V_{\alpha_n}$, что $y=f(x)\in V\subset U(y)$. Следовательно, $y\in\prod\limits_{\alpha\neq\alpha_k}Y_\alpha\times J_iC_jV_{\alpha_1}\times\dots\times J_iC_jV_{\alpha_n}\subset J_iC_jU(y)=U(y)$, т.е. $y\in J_iC_jV\subset U(y)$. Так как каждое $f_{\alpha_k}=p_{\alpha_k}\circ f$, $k=\overline{1,n}$, p-почти непрерывно и $J_iC_jV_{\alpha_k}$ (i,j)- каноническое открытое, то существуют i-окрестности

$\mathcal{U}^k_{(x)} \subset X$ с условием $f_{\alpha_k}(\mathcal{U}^k_{(x)}) \subset \mathcal{J}_i C_j V_{\alpha_{k}}, k=\overline{1,n}$. Пусть $\mathcal{U}(x)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\mathcal{U}^k(x)$ Тогда $f(\mathcal{U}(x)) \subset \mathcal{J}_i C_j V \subset V(y)$. Следовательно, f p-почти непрерывно. Теорема доказана.

В /66/ определены парно открытые и парно замкнутые отображения бипространств следующим образом:
отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ является парно открытым (парно замкнутым), если индуцированные отображения топологических пространств $f_i:(X,\tau_i)\to(Y,\gamma_i)$ открыты (замкнуты). Таким же путем определяются и парные гомеоморфизмы.

Предложение 2.I.2. Если отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\xrightarrow{\text{"на"}}(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ является парно непрерывным и парно открытым, а отображение $\varphi:(Y,\gamma_1,\gamma_2)\to(Z,\eta_1,\eta_2)$ является произвольным, то композиция $\varphi\circ f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Z,\eta_1,\eta_2)$ является парно почти непрерывной тогда и только тогда, когда φ есть парно почти непрерывное отображение.

Доказательство. Пусть, сперва, $\varphi\circ f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Z,\eta_1,\eta_2)$ p-почти непрерывное отображение и $\mathcal{U}=\mathcal{J}_i C_j \mathcal{U}\subset Z$. Тогда множество $(\varphi\circ f)^{-1}\mathcal{U}$, т.е. $f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$, i-открыто в X . Но, так как f p-открыто, то $f f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))$ i-открыто в Y и, поскольку f надъективно, то $f f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))=\varphi^{-1}(\mathcal{U})$, т.е. $\varphi^{-1}(\mathcal{U})=\mathcal{J}_i\varphi^{-1}(\mathcal{U})$. Следовательно, φ p-почти непрерывное отображение.

Наоборот, пусть φ является p-почти непрерывным и $\mathcal{U}=\mathcal{J}_i C_j \mathcal{U}\subset Z$. Тогда $\varphi^{-1}(\mathcal{U})=\mathcal{J}_i\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ и, в силу p-непрерывности f , множество $f^{-1}(\varphi^{-1}(\mathcal{U}))=(\varphi\circ f)^{-1}\mathcal{U}$ i-открыто в X , ч.т.д.

Определение 2.I.2. Под $(i,j)\mathrm{Fr}A$ будем понимать множество $C_i A\cap C_j(X\setminus A)$, т.е. $(i,j)\mathrm{Fr}A=C_i A\cap C_j(X\setminus A)$. Оказывается, что справедливе

Теорема 2.I.4. Пусть дано отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и пусть $A=\{x: x\in X$, f не является p-почти непрерывным отображением в $x\}$. Тогда $A=\cup\{(j,i)\mathrm{Fr}\,f^{-1}(U): U=I_iC_jU\subset Y\}$.

Доказательство. Пусть, сперва, $x\in A$. Тогда, не ограничивая общности, можно предположить, что существует такая (I,2)-каноническая открытая окрестность $U_{(y)}$ точки $y=f(x)$, что для любой I-окрестности $U_{(x)}: f(U_{(x)})\cap(Y\setminus U_{(y)})\neq\emptyset$. Следовательно, $U_{(x)}\cap f^{-1}(Y\setminus U_{(y)})=U_{(x)}\cap(X\setminus f^{-1}(U_{(y)})\neq\emptyset$. Отсюда получаем, что $x\in C_1(X\setminus f^{-1}(U_{(y)})$. С другой стороны: $x\in f^{-1}(U_{(y)})$ и, значит, $x\in C_2 f^{-1}(U_{(y)})$ и, поэтому, $x\in C_2 f^{-1}(U_{(y)})\cap C_1(X\setminus f^{-1}(U_{(y)})=(2,1)\mathrm{Fr}\,f^{-1}(U_{(y)})$.

Наоборот, если $x\in\cup\{(j,i)\mathrm{Fr}\,f^{-1}(U): U=I_iC_jU\subset Y\}$, то можно допустить существование такого (2,I)-канонического открытого множества U, что $x\in(1,2)\mathrm{Fr}\,f^{-1}(U)$. Это значит, что $x\in C_1 f^{-1}(U)\cap C_2(X\setminus f^{-1}(U))$. Допустим, что f p-почти непрерывно в точке x. Так как $y=f(x)\in U$, то существует 2-окрестность $U_{(x)}$ с условием $f(U_{(x)})\subset U$. Но тогда $U_{(x)}\subset f^{-1}(U)$. Так как $U_{(x)}=I_2U_{(x)}$, то $x\in I_2 f^{-1}(U)$. С другой стороны, из $x\in C_1 f^{-1}(U)\cap C_2(X\setminus f^{-1}(U))$ следует, что $x\in C_2(X\setminus f^{-1}(U))$, т.е. $x\bar{\in} X\setminus C_2(X\setminus f^{-1}(U))=I_2 f^{-1}(U)$; противоречие. Поэтому $x\in A$, ч.т.д.

Отметим тут же, что понятие $(i,j)\mathrm{Fr}\,A$ будет играть очень важную роль в третьей главе.

Определение 2.I.3. Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ назовем парно Θ-непрерывным отображением, если для любой точки $x\in X$ и любой i-окрестности $U_{(y)}$ точки $y=f(x)$ существует такая i-окрестность $U_{(x)}$, что $f(C_jU_{(x)})\subset C_jU_{(y)}$ (ср. /78/),

Предложение 2.I.3. Парно почти непрерывное отображение является парно Θ-непрерывным.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ p-почти непрерывное отображение. Пусть $x\in X$ и $U_{(y)}$ произвольная i-окрестность точки $y=f(x)$. Так как f p -почти непрерывно, то существует i-окрестность $U(x)$ с условием $f(U(x))\subset J_i C_j U(y)$. Но $C_j U(y)=C_j J_i C_j U(y)$, и, поэтому, согласно (в) теоремы 2.I.I, имеем

$$f^{-1}(C_j U(y)) = C_j f^{-1}(C_j U(y)) \qquad (I)$$

Кроме того, как было указано выше, $f(U(x))\subset J_i C_j U(y)$ и, следовательно, $U(x)\subset f^{-1}(C_j U(y))$. Подставляя в (I), получаем $C_j U(x)\subset f^{-1}(C_j U(y))$ и, значит, $f(C_j U(x))\subset C_j U(y)$. Поэтому f $p\Theta$-непрерывно, ч.т.д.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 2.I.2. Пусть $X=\{a,b,c\}$, $\tau_1=\{\emptyset,X,\{a\},\{c\},\{a.c\}\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$; $Y=\{0,1,2\}$, $\gamma_1=\{\emptyset,Y,\{0\},\{2\},\{0,2\}\}$, $\gamma_2=\{\emptyset,Y,\{2\}\}$. Определим отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ следующим образом: $f(a)=1$, $f(b)=f(c)=0$. Как легко видеть, f $p\Theta$-непрерывно, однако не является p -почти непрерывным, так как для (I,2)-канонического открытого подмножества $\{0\}\subset Y$, прообраз $f^{-1}(0)=$ $=\{b,c\}\neq J_1\{b,c\}$.

Определение 2.I.4. Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ назовем парно слабо непрерывным отображением, если для любой точки $x\in X$ и любой i-окрестности $U(y)$ точки $y=f(x)$ существует такая i-окрестность $U(x)$, что $f(U(x))\subset C_j U(y)$ (ср. /35/).

Ясно, что любое $p\Theta$ -непрерывное, а значит и любое p-почти непрерывное, а также любое p -непрерывное отображение является p-слабо непрерывным. Обратное не всегда верно, что видно из следующего примера.

Пример 2.I.3. Пусть $X=\{a,b,c\}$, τ_1 — дискретная топология на X , $\tau_2=\{\emptyset,X,\{b,c\}\}$; $Y=\{0,1\}$, $\gamma_1=\{\emptyset,Y,\{0\}\}$, $\gamma_2=\{\emptyset,Y,\{1\}\}$.

Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ определено следующим образом: $f(a)=f(c)=0$, $f(b)=1$. Нетрудно убедиться, что f p-слабо непрерывно, однако не является $p\Theta$-непрерывным, так как для множества $C_2U_{f(b)}=C_2\{1\}=\{1\}$, где $U_{f(b)}=\{1\}$ — 2-окрестность точки I, не существует 2-окрестности $U(b)$, с условием $f(C_2U(b))\subset\{1\}$.

Предложение 2.I.4. Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ парно слабо непрерывно тогда и только тогда, когда для любого i-открытого подмножества $U\subset Y$ справедливо включение $f^{-1}(U)\subset J_if^{-1}(C_jU)$.

Доказательство. Пусть f p- слабо непрерывно и пусть $x\in f^{-1}(U)$ произвольная точка, где $U=J_iU\subset Y$. Ясно, что $f(x)=y\in U$ и, поэтому, существует такая i-окрестность $U(x)$, что $f(U(x))\subset C_jU$; следовательно, $U(x)\subset f^{-1}(C_jU)$. Но, так как $x\in f^{-1}(U)$ произвольная точка, то $f^{-1}(U)\subset J_if^{-1}(C_jU)$. Пусть теперь $x\in X$ и $U(y)$ произвольная i-окрестность точки $y=f(x)$. Согласно условию, $f^{-1}(U(y))\subset J_if^{-1}(C_jU(y))$. Ясно, что $x\in J_if^{-1}(C_jU(y))$. Пусть $U(x)=J_if^{-1}(C_jU(y))$. Тогда $f(U(x))\subset J_if^{-1}(C_jU(y))$, ч.т.д.

Предложение 2.I.5. Если $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ парно слабо непрерывное отображение, то $C_jf^{-1}(U)\subset f^{-1}(C_jU)$ для любого i-открытого подмножества $U\subset Y$.

Доказательство. Допустим противное: существует точка $x\in X$ с условием $x\in C_jf^{-1}(U)\setminus f^{-1}(C_jU)$. Тогда $y=f(x)\bar{\in} C_jU$ и, следовательно, существует такая i-окрестность $U(y)$, что $U(y)\cap U=\emptyset$. Так как $U=J_iU$, то $C_iU(y)\cap U=\emptyset$. В силу p-слабой непрерывности f существует i-окрестность $U(x)$ с условием $f(U(x))\subset C_jU(y)$, и, так как $C_iU(y)\cap U=\emptyset$, то $f(U(x))\cap U=\emptyset$. Но, с другой стороны, $x\in C_jf^{-1}(U)$ и, поэтому, $U(x)\cap f^{-1}(U)\neq\emptyset$. Полученное противоречие доказывает предложение.

Приведем теперь два достаточных условия того, чтобы парно слабо непрерывное отображение было парно почти, а значит, и парно θ-непрерывным.

Предложение 2.I.6. Парно слабо непрерывное и парно открытое отображение является парно почти непрерывным.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ удовлетворяет условиям предложения, $x\in X$ произвольная точка и $\mathcal{U}(y)$ произвольная i-окрестность $y=f(x)$. Тогда p-слабая непрерывность f влечет существование такой i-окрестности $\mathcal{U}(x)$, что $f(\mathcal{U}(x))\subset C_j\mathcal{U}(y)$. Но, в силу того, что f p-открыто, множество $f(\mathcal{U}(x))$ является i-открытым в Y и, значит, $f(\mathcal{U}(x))\subset J_iC_j\mathcal{U}(y)$, ч.т.д.

Следствие. Парно открытое отображение является парно почти непрерывным тогда и только тогда, когда оно парно слабо непрерывно.

Предложение 2.I.7. Парно слабо непрерывное отображение в парно почти регулярное бипространство является парно почти непрерывным.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и $\mathcal{U}\subset Y$ (i,j)-каноническое открытое. Рассмотрим произвольную точку $x\in f^{-1}(\mathcal{U})$. Так как $y=f(x)\in\mathcal{U}$, то, учитывая условие (в) предложения I.I.3, получим, что существует такая (i,j)-каноническая открытая окрестность $\mathcal{U}(y)$, что $C_j\mathcal{U}(y)\subseteq\mathcal{U}$. Теперь, в силу p-слабой непрерывности f, существует такая i-окрестность $\mathcal{U}(x)$, что $f(\mathcal{U}(x))\subset C_j\mathcal{U}(y)$. Следовательно, $\mathcal{U}(x)\subset f^{-1}(\mathcal{U})$ и, так как $x\in f^{-1}(\mathcal{U})$ произвольная точка, то $f^{-1}(\mathcal{U})$ i-открыто, ч.т.д.

Следствие. Для отображения в парно почти регулярное бипространство понятия парно слабой непрерывности, парно θ-непрерывности и парно почти непрерывности равносильны друг другу.

Определение 2.I.5. Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ назовем парно почти замкнутым (парно почти открытым), если для каждого (i,j)-канонического замкнутого подмножества $F\subset X$ ((i,j)-канонического открытого подмножества $U\subset X$), образ $f(F)$ является i-замкнутым в Y ($f(U)$ является i-открытым в Y) (ср. /70/).

Ясно, что каждое парно замкнутое (парно открытое) отображение парно почти замкнуто (парно почти открыто), однако, обратное, не всегда бывает верным.

Пример 2.I.4. Пусть на R заданы четыре топологии: τ_1 как в примере 2.I.I, τ_2 и γ_2 антидискретные, γ_1 - обычная. Пусть $f:(R,\tau_1,\tau_2)\to(R,\gamma_1,\gamma_2)$, $f(x)=x$. Тогда f есть p-почти замкнутое и p-почти открытое отображение, однако оно не является ни p-замкнутым, ни p-открытым.

Предложение 2.I.8. Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\xrightarrow{\text{"на"}}(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ является парно почти замкнутым тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A\subset Y$ и любой (i,j)-канонической открытой окрестности U множества $f^{-1}(A)$ существует такое i-открытое множество $V\subset Y$, что $A\subset V$ и $f^{-1}(V)\subset U$.

Доказательство. Пусть, сперва, f есть p-почти замкнутое отображение; возьмем произвольное подмножество $A\subset Y$ и произвольную (i,j)-каноническую открытую окрестность U множества $f^{-1}(A)$. Нетрудно убедиться, что $V=Y\setminus f(X\setminus U)$ удовлетворяет всем требованиям предложения.

Наоборот, пусть выполнено условие предложения. Пусть $A=C_iJ_jA\subset X$ и $y\in Y\setminus f(A)$ произвольная точка. Тогда $f^{-1}(y)\subset X\setminus A$, где $X\setminus A=J_iC_j(X\setminus A)$. Согласно условию, существует такое множество $V=J_iV\subset Y$, что $y\in V$ и $f^{-1}(V)\subset X\setminus A$. Следовательно,

$y\in V\subset Y\setminus f(A)$ и, так как y произвольная точка, то $Y\setminus f(A)$ i-открыто и значит, $f(A)$ i-замкнуто в Y, ч.т.д.

Заметим тут же, что взаимно-однозначное отображение "на" парно почти открыто тогда и только тогда, когда оно парно почти замкнуто и поэтому, в случае взаимно-однозначных отображений, предложение 2.I.8 может служить и для характеристики парно почти открытых отображений.

Предложение 2.I.9. Парно слабо непрерывное и парно почти открытое отображение парно полурегулярного бипространства является парно почти непрерывным.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и выполнены условия предложения. Тогда, согласно предложению 2.I.6, достаточно доказать, что f p-открыто. Пусть $U=I_iU\subset X$ произвольное подмножество. Так как (X,τ_1,τ_2) p-полурегулярно, то $U=\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, где $U_\alpha=I_iC_jU_\alpha$. Поскольку f p-почти открыто, то $f(U_\alpha)=I_if(U_\alpha)$, $\forall\alpha\in\mathcal{D}$. Следовательно, $f(U)=I_if(U)$, т.к. $f(U)=\bigcup\limits_\alpha f(U_\alpha)$, ч.т.д.

Предложение 2.I.IO. Парно θ-непрерывное и парно почти открытое отображение является парно почти непрерывным.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ удовлетворяет условиям предложения, $x\in X$ и $U(y)$ произвольная i-окрестность точки $y=f(x)$. В силу $p\theta$-непрерывности f существует такая i-окрестность $U(x)$, что $f(C_jU(x))\subset C_jU(y)$. Но $I_iC_jU(x)$ (i,j)-каноническое открытое и так как f p-почти открыто, то $f(I_iC_jU(x))$ i-открыто в Y. С другой стороны, ясно, что $f(U(x))\subseteq f(I_iC_jU(x))\subseteq f(C_jU(x))$. Так как $f(I_iC_jU(x))\subseteq f(C_jU(x))$ и образ $f(I_iC_jU(x))$ i-открыт, то $f(I_iC_jU(x))\subseteq I_if(C_jU(x))$. Следовательно, $f(U(x))\subseteq I_if(C_jU(x))$; но

$f(C_jU(x))\subseteq C_jU(y)$ и, поэтому, получаем,что $f(U(x))\subseteq I_iC_jU(y)$, ч.т.д.

Предложение 2.I.II. Если отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ является парно почти непрерывным и парно почти открытым, то

(а) прообраз (i,j)-канонического открытого подмножества из Y является (i,j)-каноническим открытым в X ;

(б) прообраз (i,j)-канонического замкнутого подмножества из Y является (i,j)-каноническим замкнутым в X .

Доказательство. (а). Пусть $U=I_iC_jU\subset Y$. Тогда $f^{-1}(U)$ i-открыто и, следовательно, $f^{-1}(U)\subseteq I_iC_jf^{-1}(U)$. С другой стороны, так как f p-почти непрерывно и C_jU (j,i)-каноническое замкнутое, то $f^{-1}(C_jU)=C_jf^{-1}(C_jU)$. Поэтому, имеем включения

$$I_iC_jf^{-1}(U)\subseteq C_jf^{-1}(U)\subseteq f^{-1}(C_jU) \tag{I}$$

В силу того, что f p-почти открыто и $I_iC_jf^{-1}(U)$ (i,j)-каноническое открытое, множество $f(I_iC_jf^{-1}(U))$ i-открыто в Y . Согласно (I), $f(I_iC_jf^{-1}(U))\subseteq C_jU$ и, поэтому, $f(I_iC_jf^{-1}(U))\subseteq$ $\subseteq I_iC_jU=U$. Отсюда следует, что $I_iC_jf^{-1}(U)\subseteq f^{-1}(U)$ и, значит, $f^{-1}(U)=I_iC_jf^{-1}(U)$; (б) непосредственно следует из того факта, что $f^{-1}(Y\setminus U)=X\setminus f^{-1}(U)$, ч.т.д.

Резюмируя предыдущие результаты, можно привести следующие схемы:

p-непрерывность $\Rightarrow$ p-почти непрерывность $\Rightarrow$ $p\theta$-непрерывность $\Rightarrow$ p-слабая непрерывность.

p-слабая непрерывность и p-открытость $\Rightarrow$ $p\theta$-непрерывность и p-почти открытость $\Rightarrow$ p-почти непрерывность.

§ 2. О СОХРАНЕНИИ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В первом параграфе этой главы были определены различные разновидности понятия парно непрерывного отображения бипространств.

Эти обобщения имеют целью расширить класс отображений, сохраняющих те или иные свойства бипространств как в сторону образа, так и в сторону прообраза, что и является задачей данного параграфа.

В.Пэрвин в /54/ определил парно связные бипространства следующим образом: бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств A и B, удовлетворяющих условию

$$(C_1 A \cap B) \cup (A \cap C_2 B) = \emptyset.$$

Там же было доказано, что парная связность бипространства (X,τ_1,τ_2) равносильна условию: X нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств A и B, где $A = \mathcal{J}_1 A$ и $B = \mathcal{J}_2 B$ (и, значит, $A = C_2 A$ и $B = C_1 B$).

Оказывается, что справедлива

<u>Теорема 2.2.I</u>. Образ парно связного бипространства при парно слабо непрерывном отображении является парно связным бипространством.

<u>Доказательство</u>. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2) \xrightarrow{\text{„на"}} (Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и выполняются условия теоремы. Допустим противное: (Y,γ_1,γ_2) не является p-связным. Тогда существуют такие $U_1 = \mathcal{J}_1 U_1$, $U_2 = \mathcal{J}_2 U_2$, что $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ и $U_1 \cup U_2 = Y$. Ясно, что $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$. Так как f есть надъективное отображение, то $f^{-1}(U_1) \neq \emptyset \neq f^{-1}(U_2)$ и $f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) = X$. Согласно предложению 2.I.4, $f^{-1}(U_1) \subset \mathcal{J}_1 f^{-1}(C_2 U_1)$

и $f^{-1}(U_2)\subset J_2f^{-1}(C_1U_2)$. В виду того, что $U_1=C_2U_1$ и $U_2=C_1U_2$, имеем: $f^{-1}(U_1)=J_1f^{-1}(U_1)$ и $f^{-1}(U_2)=J_2f^{-1}(U_2)$. Следовательно, (X,τ_1,τ_2) не является p-связным, ч.т.д.

Выясним теперь условия сохранения некоторых аксиом парной отделимости в одну из сторон (либо в сторону образа, либо в сторону прообраза), при отображениях, рассмотренных в предыдущем параграфе.

Теорема 2.2.2. Бипространство является парно хаусдорфовым, если выполнено одно из следующих двух условий:

(I) оно является прообразом парно хаусдорфового бипространства при инъективном парно почти непрерывном отображении;

(2) оно является прообразом парно урысонового бипространства при инъективном парно слабо непрерывном отображении.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\longrightarrow(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и выполняется условие (I) теоремы. Рассмотрим точки $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$. Тогда инъективность f влечет $y_1=f(x_1)\neq f(x_2)=y_2$. В силу p-хаусдорфовости $(Y\gamma_1,\gamma_2)$ существуют I-окрестность $U(y_1)$ и 2-окрестность $U(y_2)$, которые дизъюнктны (см. /32/) и, поэтому, $J_1C_2U(y_1)\cap J_2C_1U(y_2)=\emptyset$. Так как f является парно почти непрерывным, то существуют такие I-окрестность $U(x_1)$ и 2-окрестность $U(x_2)$, что $f(U(x_1))\subset J_1C_2U(y_1)$ и $f(U(x_2))\subset J_2C_1U(y_2)$. Следовательно, $U(x_1)\cap U(x_2)=\emptyset$.

Пусть, теперь, выполняется условие (2). Если $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$, то $y_1=f(x_1)\neq f(x_2)=y_2$. Но p-урысоновость (Y,γ_1,γ_2) влечет существование таких I-окрестности $U(y_1)$ и 2-окрестности $U(y_2)$, что $C_2U(y_1)\cap C_1U(y_2)=\emptyset$ (см. /66/). Следовательно, $f^{-1}(C_2U(y_1))\cap f^{-1}(C_1U(y_2))=\emptyset$; поэтому, $J_1f^{-1}(C_2U(y_1))\cap J_2f^{-1}(C_1U(y_2))=\emptyset$. В виду того, что f p-слабо непрерывно, имеем: $f^{-1}(U(y_1))\subset J_1f^{-1}(C_2U(y_1))$

и $f^{-1}(\mathcal{U}(y_2)) \subset \mathcal{J}_2 f^{-1}(C_1 \mathcal{U}(y_2))$. Ясно, что $x_1 \in \mathcal{J}_1 f^{-1}(C_2 \mathcal{U}(y_1))$ и $x_2 \in \mathcal{J}_2 f^{-1}(C_1 \mathcal{U}(y_2))$. Теорема доказана.

Теорема 2.2.3. Парно Θ-непрерывный, парно почти открытый и парно почти замкнутый образ парно почти регулярного бипространства является парно почти регулярным бипространством.

Доказательство. Пусть $f : (X, \tau_1, \tau_2) \xrightarrow{\text{"на"}} (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ и удовлетворяются условия теоремы. Тогда, согласно предложению 2.I.IO, отображение f p-почти непрерывно. Пусть $y \in Y$, $F \subset Y$, $F = C_i \mathcal{J}_j F$ и $y \bar{\in} F$. Так как f p-почти открыто и p-почти непрерывно, то, согласно предложению 2.I.II, $f^{-1}(F) = C_i \mathcal{J}_j f^{-1}(F)$. Пусть $x \in f^{-1}(y)$. Ясно, что $x \bar{\in} f^{-1}(F) = \Phi$. В силу парной почти регулярности X существуют такие i-окрестность $\mathcal{U}(x)$ и j-окрестность $\mathcal{U}(\Phi)$, что $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{U}(\Phi) = \emptyset$ и, поэтому $\mathcal{J}_i C_j \mathcal{U}(x) \cap \mathcal{J}_j C_i \mathcal{U}(\Phi) = \emptyset$. Пусть $\mathcal{U}_1 = \mathcal{J}_i C_j \mathcal{U}(x)$, $\mathcal{U}_2 = \mathcal{J}_j C_i \mathcal{U}(\Phi)$. Ясно, что $\mathcal{U}_1$ является (i, j)-каноническим открытым, а $\mathcal{U}_2$ — (j, i)-каноническим открытым. Так как f есть p-почти открытое и p-почти замкнутое отображение, то $f(\mathcal{U}_1) = \mathcal{J}_i f(\mathcal{U}_1)$, $Y \setminus f(X \setminus \mathcal{U}_2) = \mathcal{J}_j (Y \setminus f(X \setminus \mathcal{U}_2))$ и они дизъюнктны. Кроме того $y_1 \in f(\mathcal{U}_1)$, $F \subset Y \setminus f(X \setminus \mathcal{U}_2)$, ч.т.д.

Как показали М.К.Сингал и А.Р.Сингал в /72/, парно непрерывный, парно открытый и парно замкнутый образ парно почти нормального бипространства является парно почти нормальным бипространством. Как оказалось, некоторые требования этой теоремы можно ослабить, а именно, справедлива

Теорема 2.2.4. Образ парно почти нормального бипространства при парно непрерывном и парно почти открытом отображении является парно почти нормальным бипространством.

Доказательство. Пусть $f : (X, \tau_1, \tau_2) \xrightarrow{\text{"на"}} (Y, \gamma_1, \gamma_2)$ и выполняются условия теоремы. Пусть $F \subset Y$, $F = C_j F$ и $\mathcal{U}(F)$ его произвольная (i,j)-каноническая открытая окрестность. В силу p-непрерывности f имеем $\Phi = C_j\Phi$, где $\Phi = f^{-1}(F)$ и, так как f является также p-почти открытым, то $\mathcal{U}(\Phi) = f^{-1}(\mathcal{U}(F))$ есть (i,j)-каноническое открытое множество. Поскольку (X,τ_1,τ_2) p-почти нормально, то, как легко видеть, существует такое (i,j)- каноническое открытое множество $V(\Phi)$, что $C_jV(\Phi) \subseteq \mathcal{U}(\Phi)$. Так как f является p-почти открытым отображением, то $f(V(\Phi)) = J_i f(V(\Phi))$ и, поскольку f p-непрерывное отображение, то $f(C_jV(\Phi)) \subseteq C_j f(V(\Phi))$. Следовательно, $F \subseteq f(V(\Phi)) \subseteq f(C_jV(\Phi)) \subseteq$ $\subseteq C_j f(V(\Phi)) \subseteq \mathcal{U}(F)$, ч.т.д.

Наконец, выясним сохранимость различных типов компактности бипространств при парно строго непрерывных и парно почти непрерывных отображениях. Отображение $f:(X,\tau_1,\tau_2)\to(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ будем считать парно строго непрерывным, если $f(A) = f(C_iA)$ для любого подмножества $A \subset X$ (ср. /34/).

Теорема 2.2.5. Образ парно H-замкнутого бипространства при парно строго непрерывном отображении является парно бикомпактным бипространством.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\xrightarrow{\text{"на"}}(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и выполнены условия теоремы. Пусть $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ i-открытое покрытие бипространства (Y,γ_1,γ_2). Так как f есть p-строго непрерывное отображение, то оно является p-непрерывным и, поэтому, $f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) = J_i f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$, для любого $\alpha\in\mathcal{D}$. Ясно, что $\{f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) : \alpha\in\mathcal{D}\}$ является i-открытым покрытием для X и поскольку (X,τ_1,τ_2) pH-замкнуто, то существует такое конечное подсемейство $\{f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_k})\}_{k=1}^{n}$, что $X = \bigcup_{k=1}^{n} C_j f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_k})$. Но, в силу p-строгой непрерывности f , получаем $f(C_j f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_k})) = ff^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha_k}) = \mathcal{U}_{\alpha_k}$ и, поэтому $Y=\bigcup_{k=1}^{n}U_{\alpha_k}$, ч.т.д.

Теорема 2.2.6. Образ парно H-замкнутого бипространства при парно почти непрерывном отображении является парно H-замкнутым бипространством.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\xrightarrow{\text{"на"}}(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и удовлетворяются условия теоремы. Рассмотрим покрытие $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ бипространства (Y,γ_1,γ_2), состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств. В силу pH-замкнутости (X,τ_1,τ_2), из i-открытого покрытия $\{f^{-1}(U_\alpha):\alpha\in\mathcal{D}\}$ можно выбрать такое конечное подсемейство $\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1}^{n}$, что $X=\bigcup_{k=1}^{n}C_jf^{-1}(U_{\alpha_k})$. Так как f p-почти непрерывно, то оно $p\theta$-непрерывно и, значит, $f(C_jf^{-1}(U_{\alpha_k}))\subset$ $\subset C_j(ff^{-1}(U_{\alpha_k}))=C_jU_{\alpha_k}$. Следовательно, $Y=\bigcup_{k=1}^{n}C_jU_{\alpha_k}$, ч.т.д.

Теорема 2.2.7. Образ парно почти бикомпактного бипространства при парно почти непрерывном и парно почти открытом отображении является парно почти бикомпактным бипространством.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\xrightarrow{\text{"на"}}(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и выполнены условия теоремы. Пусть $\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ покрытие (Y,γ_1,γ_2), состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств. Тогда, поскольку f является p-почти непрерывным и p-почти открытым отображением, $\{f^{-1}(U_\alpha):\alpha\in\mathcal{D}\}$ есть покрытие для X, состоящее также из (i,j)-канонических открытых множеств. В виду того, что (X,τ_1,τ_2) p-почти бикомпактно, существует такое конечное подсемейство $\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1}^{n}$, что $X=\bigcup_{k=1}^{n}f^{-1}(U_{\alpha_k})$. Следовательно, $Y=\bigcup_{k=1}^{n}U_{\alpha_k}$, ч.т.д.

Теорема 2.2.8. Бипространство парно почти бикомпактно тогда и только тогда, когда оно является парно почти непрерывным образом парно бикомпактного бипространства.

Доказательство. Пусть $f:(X,\tau_1,\tau_2)\xrightarrow{\text{„на“}}(Y,\gamma_1,\gamma_2)$ и (X,τ_1,τ_2) p-бикомпактно. Пусть $\{U_\alpha:\alpha\in D\}$ покрытие бипространства (Y,γ_1,γ_2), состоящее из (i,j)-канонических открытых множеств. Так как (X,τ_1,τ_2) является p-бикомпактным, то из i-открытого покрытия $\{f^{-1}(U_\alpha):\alpha\in D\}$ можно выбрать конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_{\alpha_k})\}_{k=1}^{n}$. Но тогда $Y=\bigcup\limits_{k=1}^{n}U_{\alpha_k}$

Наоборот, пусть (X,τ_1,τ_2) является p-почти бикомпактным бипространством. Тогда, согласно предложению I.2.6, бипространство (X,τ_1^*,τ_2^*) является p-бикомпактным. Рассмотрим тождественное отображение $f:(X,\tau_1^*,\tau_2^*)\to(X,\tau_1,\tau_2)$. Отображение f является p-почти непрерывным, так как если $U\subset X$, $U=J_iC_jU$, то $f^{-1}(U)=J_if^{-1}(U)$. Теорема доказана.

ГЛАВА III

ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

§ I. БОЛЬШАЯ ИНДУКТИВНАЯ И ЛЕБЕГОВА БИРАЗМЕРНОСТИ

Как было указано во введении, в работе /63/ Дж. Сварт на так называемые парно слабо хаусдорфовые бипространства накладывает некоторое условие, называемое И.Рейлли в /60/ нулевой размерностью. В этой главе для любого бипространства (X,τ_1,τ_2) нами вводятся понятия $p\text{-}\mathrm{Ind}X$, $p\text{-}\mathrm{dim}X$ и $p\text{-}\mathrm{ind}X$ для любого $n\geq-1$, аналогичные понятиям обычных размерностей $\mathrm{Ind}X$, $\mathrm{dim}X$ и $\mathrm{ind}X$, причем $p\text{-}\mathrm{ind}X=0$ равносильно нульмерности в смысле /60/. Далее, изучаются как их взаимосвязи, так и другие свойства, такие, к примеру, как монотонность, аналог аддиционной теоремы Даукера для $p\text{-}\mathrm{Ind}X$, аналог неравенства Урысона-Менгера для $p\text{-}\mathrm{ind}X$ и т.д.

В первом параграфе нами будут определены и изучены биразмерности $p\text{-}\mathrm{Ind}X$ и $p\text{-}\mathrm{dim}X$, называемые соответственно большой индуктивной и лебеговой биразмерностями (X,τ_1,τ_2).

<u>Определение 3.I.I</u>. Подмножество F бипространства (X,τ_1,τ_2) назовем бизамкнутым, если его можно представить в виде пересечения $F=F_1\cap F_2$, где $F_i=C_iF_i$.

Дополнение бизамкнутого множества назовем биоткрытым. Ясно, что если $H\subset X$ является биоткрытым, то $H=H_1\cup H_2$, где $H_i=J_tH_i$.

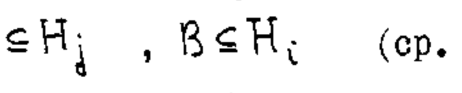
Легко видеть, что если $F\subset X$ $(H\subset X)$ бизамкнуто (биоткрыто) в X , то $F=C_1F\cap C_2F$ $(H=J_1H\cup J_2H)$ и, пересечение (объединение) произвольного числа бизамкнутых (биоткрытых) множеств вновь является бизамкнутым (биоткрытым).

Через C_pA будем обозначать наименьшее бизамкнутое множество, содержащее A, т.е. пересечение всех бизамкнутых множеств, содержащих A, а через J_pA будем обозначать наибольшее биоткрытое множество, содержащееся в A, т.е. объединение всех биоткрытых множеств, содержащихся в A.

Из определения 3.I.I сразу следует, что если $F=C_1F\ (H=J_1H)$, или $F=C_2F\ (H=J_2H)$, то $F=C_pF\ (H=J_pH)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

В самом деле, пусть $X=\{a,b,c,d\}$, $\tau_1=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $\tau_2=\{\emptyset,X,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$. Тогда $\{a,b,c\}=J_1\{a,b,c\}\cup J_2\{a,b,c\}=\{a,b\}\cup\{a,c\}=J_p\{a,b,c\}$, однако, $J_1\{a,b,c\}\neq\{a,b,c\}\neq J_2\{a,b,c\}$. Заметим тут же, что объединение (пересечение) двух бизамкнутых (биоткрытых) множеств может не быть бизамкнутым (биоткрытым).

Рассмотрим бипространство $(I,\omega_1^*,\omega_2^*)$ (см. замечание I.I.I). Ясно, что если $H_1=J_1H_1\subset I$ и $H_2=J_2H_2\subset I$, то $H_1=J_pH_1$, $H_2=J_pH_2$. Однако, если $\emptyset\neq H_1\cap H_2\neq I$, то $H_1\cap H_2\neq J_p(H_1\cap H_2)$, так как $J_p(H_1\cap H_2)=\emptyset$.



<u>Определение 3.I.2</u>. Перегородкой нормальной пары (A,B) будем называть такое множество $F=C_pF$, что $X\setminus F$ не является парно связным (т.е. $X\setminus F=H_1\cup H_2$, где $H_i=J_iH_i$, $H_1\neq\emptyset\neq H_2$, $H_1\cap H_2=\emptyset\}$ и $A\subseteq H_j$, $B\subseteq H_i$ (ср. /3, стр. I57-I58/).

Согласно определению 2.I.2, для любого подмножества $A\subset X$, $(i,j)\mathrm{Fr}\,A=C_iA\cap C_j(X\setminus A)$. Ясно, что $(i,j)\mathrm{Fr}\,A$ является бизамкнутым в X множеством.

<u>Определение 3.I.3</u>. Предположим, что $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X=-1 \Leftrightarrow X=\emptyset$. Полагая, что смысл неравенства $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leq n-1$ уже определен, будем считать, что $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leq n$ тогда и только тогда, когда для любой нормальной пары (A,B) в X существует перегородка

для которой $p\text{-}\mathrm{Ind}F\leq n-1$. Далее, $p\text{-}\mathrm{Ind}X=n$, если неравенство $p\text{-}\mathrm{Ind}X\leq n$ верно, а неравенство $p\text{-}\mathrm{Ind}X\leq n-1$ неверно. Наконец, если неравенство $p\text{-}\mathrm{Ind}X\leq n$ не выполняется ни для какого $n\geq -1$, то будем считать $p\text{-}\mathrm{Ind}X=\infty$

Из определения 3.I.I сразу следует справедливость следующих предложений

Предложение 3.I.I. Если биразмерность $p\text{-}\mathrm{Ind}X$ является конечной, то (X,τ_1,τ_2) есть парно нормальное бипространство.

Предложение 3.I.2. Биразмерность $p\text{-}\mathrm{Ind}X$ является битопологическим инвариантом, т.е. сохраняется при парных гомеоморфизмах.

Для изучения свойства монотонности $p\text{-}\mathrm{Ind}$ относительно подмножеств бипространства (X,τ_1,τ_2), докажем некоторые леммы.

Лемма 3.I.I. Пусть F перегородка нормальной пары (A,B) в бипространстве (X,τ_1,τ_2). Если $X_0\subset X, X_0=C_pX_0$ подмножество, которое пересекается как с A, так и с B, то $F_0=F\cap X_0$ является перегородкой нормальной пары $(A_0=A\cap X_0, B_0=B\cap X_0)$ в бипространстве (X_0,τ_1',τ_2').

Доказательство. В виду того, что F — перегородка нормальной пары (A,B), имеем $X\setminus F=H_1\cup H_2$, где $H_i=J_iH_i$, $H_1\neq\emptyset\neq H_2$, $H_1\cap H_2=\emptyset$ и $A\subseteq H_j$, $B\subseteq H_i$. Следовательно, $F=X\setminus(H_1\cup H_2)$. Рассмотрим $X_0\setminus F_0=X_0\setminus F=X_0\setminus(X\setminus(H_1\cup H_2))=(X_0\setminus(X\setminus H_1))\cup\cup(X_0\setminus(X\setminus H_2))=(X_0\cap H_1)\cup(X_0\cap H_2)=H_1'\cup H_2'$, где $H_i'=J_i'H_i'$ в (X_0,τ_1',τ_2'). Ясно, что $A_0\subseteq H_j'$, $B_0\subseteq H_i'$, ч.т.д.

Лемма 3.I.2. Если (A_0,B_0) нормальная пара бипространства (X_0,τ_1',τ_2'), где $X_0\subset X, X_0=C_pX_0$, то существует такая нормальная пара (A,B) в X, что $A_0=A\cap X_0$, $B_0=B\cap X_0$.

Доказательство. Поскольку $X_0=C_pX_0$, то $X_0=C_1X_0\cap C_2X_0$.

τ_1' и τ_2' на X можно рассматривать как топологии, первая из которых индуцируется из топологического подпространства (C_1X_0, τ_1'') топологического пространства (X, τ_1), а вторая — из топологического подпространства (C_2X_0, τ_2'') топологического пространства (X, τ_2). Поэтому, существуют такие $A = C_iA \subset X_0$, $B = C_jB \subset C_jX_0$, что $A_0 = A \cap X_0$, $B_0 = B \cap X_0$. Легко видеть, что $A \cap B = \emptyset$, т.е. (A, B) нормальная пара в (X, τ_1, τ_2), ч.т.д.

<u>Следствие</u>. Если $X_0 \subset X, X_0 = C_pX_0$ и (X, τ_1, τ_2) есть парно нормальное бипространство, то и (X_0, τ_1', τ_2') является парно нормальным.

Следующая теорема показывает, что биразмерность $p\text{-}\mathrm{Ind}$ монотонна по бизамкнутым подмножествам.

<u>Теорема 3.I.I</u>. Если $X_0 \subset X, X_0 = C_pX_0$, то $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X_0 \leqslant p\text{-}\mathrm{Ind}\,X$.

<u>Доказательство</u>. Теорема очевидна, когда $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X = \infty$. Пусть $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X = k < \infty$. Требуется доказать, что $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X_0 \leqslant k$. Это верно, когда $k = -1$. Предположим, что утверждение доказано при $k \leqslant n-1$ и докажем его для $k = n$. Итак, $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X = n$. Пусть (A_0, B_0) произвольная нормальная пара в бипространстве (X_0, τ_1', τ_2'). Тогда, согласно лемме 3.I.3, существует такая нормальная пара (A, B) в X что $A_0 = A \cap X_0$, $B_0 = B \cap X_0$. Так как $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X = n$, то для (A, B) существует перегородка F в X, для которой $p\text{-}\mathrm{Ind}\,F \leqslant n-1$. Теперь, учитывая лемму 3.I.I, получаем, что $F_0 = F \cap X_0$ есть перегородка в X_0 нормальной пары (A_0, B_0). Ясно, что F_0 является бизамкнутым в F и, согласно предположению индукции, $p\text{-}\mathrm{Ind}\,F_0 \leqslant$ $\leqslant p\text{-}\mathrm{Ind}\,F \leqslant n-1$. Следовательно, $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X_0 \leqslant n$. Теорема доказана.

<u>Теорема 3.I.2</u>. Бипространство (X, τ_1, τ_2) имеет биразмерность $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для любого j-замкнутого

множества B и любой его i-окрестности $U(B)$ существует такая i-окрестность $V(B)$, что $C_j V(B) \subseteq U(B)$ и $p\text{-}\mathrm{Ind}(j,i)\mathrm{Fr}\,V(B) \leqslant n-1$.

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.I.3. Если (A,B) есть нормальная пара в бипространстве (X,τ_1,τ_2) и j-окрестность $U(A)$ (i-окрестность $U(B)$) удовлетворяет условию $C_i U(A) \subseteq X\setminus B$ $(C_j U(B) \subseteq X\setminus A)$, то $(i,j)\mathrm{Fr}\,U(A)$ $((j,i)\mathrm{Fr}\,U(B))$ является перегородкой (A,B).

Доказательство. Пусть (A,B) есть нормальная пара в (X,τ_1,τ_2) и пусть j-окрестность $U(A)$ удовлетворяет условию $C_i U(A) \subseteq X\setminus B$; имеем $X\setminus(i,j)\mathrm{Fr}\,U(A) = X\setminus(C_i U(A) \cap (X\setminus U(A))) = (X\setminus C_i U(A)) \cup U(A) = H_i \cup H_j$, где $H_i = \mathfrak{I}_i H_i$, $H_j = \mathfrak{I}_j H_j$. Ясно, что $A \subseteq H_j$ и, так как $C_i U(A) \subseteq X\setminus B$, то $B \subseteq X\setminus C_i U(A) = H_i$; кроме того, $H_i \cap H_j = \emptyset$; второй аналогично, ч.т.д.

Лемма 3.I.4. Если (A,B) нормальная пара в бипространстве (X,τ_1,τ_2) и F перегородка для этой пары, т.е. $X\setminus F = H_1 \cup H_2$, где $H_i = \mathfrak{I}_i H_i$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ и $A \subseteq H_j$, $B \subseteq H_i$, то $(j,i)\mathrm{Fr}\,H_i \subseteq F$.

Доказательство. Рассмотрим биподпространство $(X\setminus F, \tau_1', \tau_2')$. Так как $H_i = \mathfrak{I}_i H_i$ в (X,τ_1,τ_2) и $H_i \cap (X\setminus F) = H_i$, то $H_i = \mathfrak{I}_i' H_i$ в $(X\setminus F, \tau_1', \tau_2')$. С другой стороны, $X\setminus F = H_1 \cup H_2$ и $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Поэтому, $H_i = C_j' H_i$. Имеем: $(j,i)\mathrm{Fr}\,H_i \cap (X\setminus F) = (C_j H_i \cap (X\setminus H_i)) \cap$ $\cap (X\setminus F) = (C_j H_i \cap (X\setminus F)) \cap (X\setminus H_i) \cap (X\setminus F)) = C_j' H_i \cap H_j = H_i \cap H_j = \emptyset$, т.е. $(j,i)\mathrm{Fr}\,H_i \subseteq F$, ч.т.д.

Доказательство теоремы 3.I.2.

Необходимость. Пусть $B \subset X$, $B = C_j B$ и $U(B)$ произвольная i-окрестность. Тогда, ясно, что $(A = X\setminus U(B), B)$ нормальная пара в X, и, поэтому, существует перегородка F, для которой

$p\text{-}\mathrm{Ind}\,F \leqslant n-1$. Из определения перегородки следует, что $X \setminus F = H_1 \cup H_2$, где $H_i = J_i H_i$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, $A \subseteq H_j$, $B \subseteq H_i$. Ясно, что $C_j H_i \cap H_j = \emptyset$ и, значит, $C_j H_i \subseteq X \setminus H_j$; но, поскольку $A \subseteq H_j$ то $X \setminus H_j \subseteq X \setminus A$. Следовательно, $C_j H_i \subseteq X \setminus A = \mathcal{U}(B)$; пусть $V(B) = H_i$. Мы получили, что $B \subseteq V(B) \subseteq C_j V(B) \subseteq \mathcal{U}(B)$; кроме того, согласно лемме 3.I.4, $(j,i)\mathrm{Fr}\,V(B) \subseteq F$ и так как $(j,i)\mathrm{Fr}\,V(B) \subseteq F$ бизамкнуто в F, то $p\text{-}\mathrm{Ind}(j,i)\mathrm{Fr}\,V(B) \leqslant p\text{-}\mathrm{Ind}\,F \leqslant n-1$.

<u>Достаточность</u>. Пусть (A, B) произвольная нормальная пара в бипространстве (X, τ_1, τ_2). Тогда множество $X \setminus A$ является некоторой i-окрестностью $\mathcal{U}(B)$. Поэтому существует такая i-окрестность $V(B)$, что $C_j V(B) \subseteq \mathcal{U}(B)$ и $p\text{-}\mathrm{Ind}(j,i)\mathrm{Fr}\,V(B) \leqslant n-1$. Но, учитывая лемму 3.I.3, получаем, что $(j,i)\mathrm{Fr}\,V(B)$ является перегородкой нормальной пары (A, B). Теорема доказана.

Применяя эту теорему, легко убеждаемся, что бипространство (R, ω_1, ω_2) (см. замечание I.I.I), имеет биразмерность $p\text{-}\mathrm{Ind}\,R = 1$.

Справедлива следующая

<u>Теорема 3.I.3</u>. Пусть X_k для всех $k = \overline{1,\infty}$, одновременно I и 2-открытые множества в наследственно парно нормальном бипространстве (X, τ_1, τ_2), причем $X_k \supseteq X_{k+1}$, $X_1 = X$ и $\bigcap X_k = \emptyset$. Если для всех $k = \overline{1,\infty}$ $p\text{-}\mathrm{Ind}(X_k \setminus X_{k+1}) \leqslant n$, то и $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X \leqslant n$.

<u>Доказательство</u>. При $n = -1$ теорема, очевидно, верна. Предполагая ее верной для $0, 1, \ldots, n-1$, докажем для n.

Мы должны для любой нормальной пары (A, B) в X построить перегородку F, размерность которой $p\text{-}\mathrm{Ind}\,F \leqslant n-1$. Так как бипространство (X, τ_1, τ_2) p-нормально, то, согласно следствию предложения I.I.2, существуют такие $\mathcal{U}_0 = J_j \mathcal{U}_0$, $V_0 = J_i V_0$, что $A \subset \mathcal{U}_0$, $B \subset V_0$ и $C_i \mathcal{U}_0 \cap C_j V_0 = \emptyset$. Пусть $\mathcal{D}_k = X_k \setminus X_{k+1}$ для любого $k = \overline{1,\infty}$. Построим прежде всего тройку дизъюнктных множеств $(\mathcal{U}_1, T_1, V_1)$, где $\mathcal{U}_1 = J_j \mathcal{U}_1 \subset X_1 = X$, $V_1 = J_i V_1 \subset X_1 = X$, $T_1 = C_p T_1 \subseteq \mathcal{D}_1$ бизамкнуто в $\mathcal{D}_1$, $p\text{-}\mathrm{Ind}\, T_1 \leq n-1$ и выполнены условия

$$\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 \cup T_1 \cup V_1, \; C_i \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1, \; C_j V_0 \subseteq V_1, \; C_i \mathcal{U}_1 \cap C_j V_1 \cap X_2 = \emptyset .$$

Ясно, что $(C_i \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{D}_1, C_j V_0 \cap \mathcal{D}_1)$ — нормальная пара в бипространстве $(\mathcal{D}_1, \tau_1', \tau_2')$. Так как $p\text{-}\mathrm{Ind}\, \mathcal{D}_1 \leq n$, то в $\mathcal{D}_1$ существует перегородка T_1 с условием $p\text{-}\mathrm{Ind}\, T_1 \leq n-1$; следовательно, существуют такие множества $G_1 = J_{j'} G_1, H_1 = J_{i'} H_1$ в $(\mathcal{D}_1, \tau_1', \tau_2')$, что $G_1 \cap H_1 = \emptyset$, $C_i \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{D}_1 \subseteq G_1$, $C_j V_0 \cap \mathcal{D}_1 \subseteq H_1$, $T_1 = \mathcal{D}_1 \setminus (G_1 \cup H_1)$. Так как $\mathcal{D}_1 = C_1 \mathcal{D}_1 = C_2 \mathcal{D}_1$ и $T_1 = C_p T_1 \subset \mathcal{D}_1$, то $T_1 = C_p T_1$ в $X_1 = X$. С другой стороны, $\mathcal{D}_1 \setminus T_1 = (X_1 \setminus T_1) \cap \mathcal{D}_1$, т.е. $\mathcal{D}_1 \setminus T_1 = C_{1''}(\mathcal{D}_1 \setminus T_1) = C_{2''}(\mathcal{D}_1 \setminus T_1)$ в $(X_1 \setminus T_1, \tau_1'', \tau_2'')$. Но $\mathcal{D}_1 \setminus T_1 = G_1 \cup H_1$ и, следовательно, $G_1 = J_{j'''} G_1, H_1 = J_{i'''} H_1$ в $(\mathcal{D}_1 \setminus T_1, \tau_1''', \tau_2''')$. В силу того, что $G_1 \cap H_1 = \emptyset$, получаем $G_1 = C_{i'''} G_1$, $H_1 = C_{j'''} H_1$. Поэтому $G_1 = C_{i''} G_1$, $H_1 = C_{j''} H_1$. Легко видеть, что пара (A_1, B_1), где $A_1 = (C_i \mathcal{U}_0 \cup G_1) \cap (X_1 \setminus T_1)$, $B_1 = (C_j V_0 \cup H_1) \cap \cap (X_1 \setminus T_1)$ есть нормальная пара $(X_1 \setminus T_1, \tau_1'', \tau_2'')$. Учитывая наследственную p-нормальность бипространства (X, τ_1, τ_2), получаем, что бипространство $(X_1 \setminus T_1, \tau_1'', \tau_2'')$ p-нормально и, поэтому, существуют множества $\mathcal{U}_1 = J_{j''} \mathcal{U}_1$, $V_1 = J_{i''} V_1$ с условиями

$$A_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \; B_1 \subseteq V_1, \; C_{i''} \mathcal{U}_1 \cap C_{j''} V_1 = \emptyset .$$

Отсюда следует, что $C_{i''} \mathcal{U}_1 \cap C_{j''} V_1 \cap (X_1 \setminus T_1) = \emptyset$ и, значит, $C_i \mathcal{U}_1 \cap C_j V_1 \cap (X_1 \setminus T_1) = \emptyset$, т.е. $C_i \mathcal{U}_1 \cap C_j V_1 \subseteq T_1$. Так как $T_1 = \mathcal{D}_1 \setminus (G_1 \cup H_1)$, то $T_1 = (\mathcal{D}_1 \setminus H_1) \cap (\mathcal{D}_1 \setminus G_1)$. Но $H_1 = J_{i'} H_1$, $G_1 = J_{j'} G_1$ в $(\mathcal{D}_1, \tau_1', \tau_2')$ и, поэтому, $\mathcal{D}_1 \setminus H_1 = C_{i'}(\mathcal{D}_1 \setminus H_1)$, $\mathcal{D}_1 \setminus G_1 = C_{j'}(\mathcal{D}_1 \setminus G_1)$. Поскольку $\mathcal{D}_1 = C_1 \mathcal{D}_1 = C_2 \mathcal{D}_1$ в $X_1 = X$, то $\mathcal{D}_1 \setminus H_1 = C_i(\mathcal{D}_1 \setminus H_1)$, $\mathcal{D}_1 \setminus G_1 = C_j(\mathcal{D}_1 \setminus G_1)$. Имеем $X_1 \setminus T_1 = X_1 \setminus ((\mathcal{D}_1 \setminus H_1) \cap (\mathcal{D}_1 \setminus G_1)) = (X_1 \setminus (\mathcal{D}_1 \setminus H_1)) \cup (X_1 \setminus (\mathcal{D}_1 \setminus G_1))$.

Так как $\mathcal{U}_1 \subset X_1 \setminus T_1$ и $\mathcal{U}_1 \cap H_1 = \emptyset$, то $\mathcal{U}_1 \subset (X_1 \setminus (\mathcal{D}_1 \setminus G_1))$, где $X_1 \setminus (\mathcal{D}_1 \setminus G_1)$ j-открыто в $X_1 = X$. В виду того, что $\mathcal{U}_1 = \mathcal{J}_{j''} \mathcal{U}_1$ в $(X_1 \setminus T_1, \tau_1'', \tau_2'')$ и $\mathcal{U}_1 \subset (X_1 \setminus (\mathcal{D}_1 \setminus G_1))$, то $\mathcal{U}_1 = \mathcal{J}_j \mathcal{U}_1$.

Аналогично доказывается, что $V_1 = \mathcal{J}_i V_1$ в $X_1 = X$. Итак, имеем $\mathcal{D}_1 = G_1 \cup T_1 \cup H_1$ и, поскольку $G_1 \subseteq A_1 \subseteq \mathcal{U}_1, H_1 \subseteq B_1 \subseteq V_1$, то $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{U}_1 \cup T_1 \cup V_1$. Покажем наконец, что $C_i \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1, C_j V_0 \subseteq V_1$. В самом деле, так как $C_i \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{D}_1 \subseteq G_1$, то $C_i \mathcal{U}_0 \cap T_1 = \emptyset$. Поэтому $C_i \mathcal{U}_0 = C_i \mathcal{U}_0 \cap (X_1 \setminus T_1) \subseteq A_1 \subseteq \mathcal{U}_1$. Аналогично получим, что $C_j V_0 \subseteq V_1$. Таким образом, для $k = 1$ мы построили тройку дизъюнктных множеств $(\mathcal{U}_k, T_k, V_k)$, удовлетворяющих условиям:

1_k^0. $\mathcal{U}_k$ и V_k лежат в X_k и $\mathcal{U}_k = \mathcal{J}_j \mathcal{U}_k$, $V_k = \mathcal{J}_i V_k$ в X;

2_k^0. T_k лежит в $\mathcal{D}_k = X_k \setminus X_{k+1}$ и $T_k = C_p T_k$ в $\mathcal{D}_k$;

3_k^0. $\mathcal{D}_k \subseteq \mathcal{U}_k \cup T_k \cup V_k$;

4_k^0. $C_i \mathcal{U}_k \cap C_j V_k \cap X_{k+1} = \emptyset$;

5_k^0. $C_i \mathcal{U}_{k-1} \cap X_k \subseteq \mathcal{U}_k$, $C_j V_{k-1} \cap X_k \subseteq V_k$;

6_k^0. $p\text{-}\mathrm{Ind}\, T_k \leq n-1$.

Предположим, что такая тройка построена для $\overline{1, k-1}$ и построим ее для k. Из условия 4_{k-1}^0 следует, что $C_i \mathcal{U}_{k-1} \cap C_j V_{k-1} \cap X_k = \emptyset$ (заметим тут же, что как и в случае $k = 1$, топология на X_k будет обозначаться без штрихов, а топологии подпространств из X_k — со штрихами). Так как $\mathcal{D}_k \subset X_k$, то $(C_i \mathcal{U}_{k-1} \cap \mathcal{D}_k, C_j V_{k-1} \cap \mathcal{D}_k)$ — нормальная пара в $\mathcal{D}_k$ и, в виду того, что $p\text{-}\mathrm{Ind}\, \mathcal{D}_k \leq n$, существует в $\mathcal{D}_k$ перегородка T_k, размерность которой $p\text{-}\mathrm{Ind}\, T_k \leq n-1$. Перегородке T_k соответствуют дизъюнктные множества G_k и H_k где $G_k = \mathcal{J}_{j'} G_k$, $H_k = \mathcal{J}_{i'} H_k$ в $\mathcal{D}_k$ и $\mathcal{D}_k = G_k \cup T_k \cup H_k$. Кроме того, $C_i \mathcal{U}_{k-1} \cap \mathcal{D}_k \subseteq G_k$, $C_j V_{k-1} \cap \mathcal{D}_k \subseteq H_k$. Поскольку $T_k = C_p T_k$ в $\mathcal{D}_k$ и $\mathcal{D}_k = C_1 \mathcal{D}_k = C_2 \mathcal{D}_k$ в X_k, то $T_k = C_p T_k$ в X_k.

Имеем: $G_k = C_{i'''} G_k$ и $H_k = C_{j'''} H_k$ в $D_k \setminus T_k$. Но $D_k \setminus T_k = (X_k \setminus T_k) \cap D_k$ и, так как $D_k = C_1 D_k = C_2 D_k$ в X_k, то $D_k \setminus T_k = C_{1''}(D_k \setminus T_k) = C_{2''}(D_k \setminus T_k)$ в $X_k \setminus T_k$. Следовательно, $C_k = C_{i''} G_k$, $H_k = C_{j''} H_k$ в $X_k \setminus T_k$. Далее, легко убедиться, что пара (A_k, B_k), где $A_k = (C_i \mathcal{U}_{k-1} \cup G_k) \cap (X_k \setminus T_k)$, $B_k = (C_j V_{k-1} \cup H_k) \cap (X_k \setminus T_k)$ нормальная пара в $X_k \setminus T_k$ и так как $X_k \setminus T_k$ p-нормально, то существуют такие $V_k = J_{i''} V_k$, $\mathcal{U}_k = J_{j''} \mathcal{U}_k$, что $A_k \subseteq \mathcal{U}_k, B_k \subseteq V_k$ и $C_{i''} \mathcal{U}_k \cap C_{j''} V_k = \emptyset$. Поэтому $(C_{i''} \mathcal{U}_k \cap C_{j''} V_k) \cap (X_k \setminus T_k) = \emptyset$ и, значит, $((C_i \mathcal{U}_k \cap \cap C_j V_k) \cap (X_k \setminus T_k) = \emptyset$. Отсюда получаем, что $C_i \mathcal{U}_k \cap C_j V_k \subseteq T_k$ и, в силу включения $T_k \subseteq D_k = X_k \setminus X_{k+1}$, имеем $C_i \mathcal{U}_k \cap C_j V_k \cap \cap X_{k+1} = \emptyset$.

Множество $X_k \setminus T_k = J_p(X_k \setminus T_k)$ в X_k и, так как $X_k = J_1 X_k = J_2 X_k$ в X, то $X_k \setminus T_k = J_p(X_k \setminus T_k)$ в X. Это значит, что $X_k \setminus T_k = O_1 \cup O_2$, где $O_i = J_i O_i$ в X. Как и в случае $k=1$ получим, что $\mathcal{U}_k \subseteq O_j$, $V_k \subseteq O_i$, т.е. получим, что $\mathcal{U}_k = J_j \mathcal{U}_k$, $V_k = J_i V_k$ в X. Далее, $D_k = G_k \cup T_k \cup H_k$ и, поскольку $G_k \subseteq A_k \subseteq \mathcal{U}_k$, $H_k \subseteq B_k \subseteq V_k$, то $D_k \subseteq \mathcal{U}_k \cup T_k \cup V_k$. Наконец, $C_i \mathcal{U}_{k-1} \cap D_k \subseteq G_k$ и, поэтому, $C_i \mathcal{U}_{k-1} \cap T_k = \emptyset$; отсюда следует, что $C_i \mathcal{U}_{k-1} \cap X_k \subseteq A_k \subseteq \mathcal{U}_k$. Аналогично доказывается, что $C_j V_{k-1} \cap X_k \subseteq V_k$. Итак, мы построили тройку ($\mathcal{U}_k, T_k, V_k$), удовлетворяющую условиям $1^0_k - 6^0_k$.

Пусть, теперь, $T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ и докажем, что $p\text{-}\mathrm{Ind}\, T \le n-1$. Пусть для любого $k=1,2,\ldots$

$$Z_k = \bigcup_{l=k}^{\infty} T_l$$

В частности, $Z_1 = C$. Кроме того, $Z_k \supseteq Z_{k+1}, Z_k \setminus Z_{k+1} = T_k$, т.е. $p\text{-}\mathrm{Ind}(Z_k \setminus Z_{k+1}) \le n-1$. Поскольку $Z_k = X_k \cap T$ для любого $k = \overline{1,\infty}$, то $Z_k = J_1 Z_k = J_2 Z_k$ в T и $\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k = \emptyset$. Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 3.I.3 для $n-1$; но в этих условиях мы предполагаем ее доказанной, так что $p\text{-}\mathrm{Ind}\,T \leqslant n-1$.

Докажем теперь, что T содержит перегородку F для нормальной пары (A, B). Пусть $\mathcal{U}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{U}_k$, $V=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}V_k$. Ясно, что $\mathcal{U}=\mathcal{I}_j\mathcal{U}$, $V=\mathcal{I}_iV$. Из условия 5^0_k следует, что $A\subseteq\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, $B\subseteq V_0\subset V$.

Равенство $X=\mathcal{U}\cup T\cup V$ следует из того, что $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{D}_k$, $\mathcal{D}_k=\mathcal{U}_k\cup T_k\cup V_k$, $\mathcal{U}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{U}_k$, $V=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}V_k$.

Покажем, что множества $\mathcal{U}$ и V дизъюнктны. Для этого достаточно показать, что при $s\leqslant t$ имеем

$$\mathcal{U}_s\cap V_t=V_s\cap\mathcal{U}_t=\emptyset.$$

Прежде всего заметим, что при $s\leqslant t$

$$\mathcal{U}_s\cap V_t\subseteq\mathcal{U}_s\cap X_t\subseteq(\mathcal{U}_s\cap X_{s+1})\cap X_t\subseteq\mathcal{U}_{s+1}\cap X_t$$

и, поэтому, пересекая обе части неравенства с V_t, получим

$$\mathcal{U}_s\cap V_t\subseteq\mathcal{U}_{s+1}\cap V_t.$$

Продолжая это рассуждение, убеждаемся, что

$$\mathcal{U}_s\cap V_t\subseteq\mathcal{U}_t\cap V_t=\emptyset.$$

Точно также доказываем, что $V_s\cap\mathcal{U}_t=\emptyset$ и, значит, $\mathcal{U}\cap V=\emptyset$. Следовательно, множество $F=X\setminus(\mathcal{U}\cup V)$ есть перегородка в X для (A, B). Так как $F=C_pF\subset X$ и $F\subset T$, то $F=C_pF$ в T; поэтому $p\text{-}\mathrm{Ind}\,F\leqslant n-1$. Теорема доказана.

Следствие. Если $A=C_1A=C_2A\subset X$, где (X,τ_1,τ_2) является наследственно парно нормальным и $p\text{-}\mathrm{Ind}\,A\leqslant n$, $p\text{-}\mathrm{Ind}(X\setminus A)\leqslant n$, то и $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leqslant n$.

Доказательство. Пусть $X_1=X$, $X_2=X\setminus A$, $X_3=X_4=\dots=\emptyset$. Тогда все условия теоремы 3.I3 выполняются и, поэтому, $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leqslant n$.

Теореме 3.I.3 равносилен аналог аддиционной теоремы Даукера для $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X$, т.е.

Теорема 3.I.4. Пусть наследственно парно нормальное бипространство (X,τ_1,τ_2) есть сумма счетного числа дизъюнктных множеств $\mathcal{D}_k$, $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{D}_k$, обладающих тем свойством, что все "частные суммы" $F_k=\bigcup\limits_{s\leqslant k}\mathcal{D}_s$, $k=\overline{1,\infty}$, одновременно I и 2 – замкнуты в (X,τ_1,τ_2). Если при этом $p\text{-}\mathrm{Ind}\,\mathcal{D}_k\leqslant n$ для всех $k=\overline{1,\infty}$, то и $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leqslant n$.

Чтобы из теоремы 3.I.3 вывести теорему 3.I.4, достаточно допустить, что $\mathcal{D}_k=X_k\setminus X_{k+1}$; обратное получается при допущении $X_k=X\setminus\bigcup\limits_{s\leqslant k}\mathcal{D}_s$

Теорема 3.I.5. Если (X,τ_1,τ_2) есть наследственно парно нормальное бипространство и $X=P\cup Q$, где $p\text{-}\mathrm{Ind}\,P\leqslant n$, $p\text{-}\mathrm{Ind}\,Q\leqslant 0$, то $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leqslant n+1$.

Доказательство. Пусть $B\subset X, B=c_jB$ и $\mathcal{U}(B)$ его произвольная i-окрестность; тогда $(A=X\setminus\mathcal{U}(B),B)$ — нормальная пара в X и, следовательно, существуют такие $V=\mathcal{J}_jV$, $W=\mathcal{J}_iW$, что $A\subset V$, $B\subset W$ и $c_iV\cap c_jW=\varnothing$. Рассмотрим биподпространство (Q,τ_1',τ_2'). Ясно, что $Q\setminus(c_iV\cap Q)$ является i'-окрестностью множества $c_jW\cap Q=c_{j'}(c_jW\cap Q)$. Так как $p\text{-}\mathrm{Ind}\,Q\leqslant 0$, то существует такая i'-окрестность $\mathcal{U}$ множества $c_jW\cap Q$, что $c_{j'}\mathcal{U}\subseteq Q\setminus(c_iV\cap Q)$ и $p\text{-}\mathrm{Ind}\,(j',i')\mathrm{Fr}\,\mathcal{U}=-1$, т.е. $(j',i')\mathrm{Fr}\,\mathcal{U}=\varnothing$. Поэтому $c_{j'}\mathcal{U}=\mathcal{U}$. Рассмотрим множества $B\cup\mathcal{U}$ и $A\cup(Q\setminus\mathcal{U})$, и покажем, что

$$\{c_j(B\cup\mathcal{U})\cap(A\cup(Q\setminus\mathcal{U}))\}\cup\{(B\cup\mathcal{U})\cap c_i(A\cup(Q\setminus\mathcal{U}))\}=\varnothing \qquad (\mathrm{I})$$

Поскольку $c_j(B\cup\mathcal{U})=c_jB\cup c_j\mathcal{U}=B\cup c_j\mathcal{U}$, и $c_i(A\cup(Q\setminus\mathcal{U}))=$ $=c_iA\cup c_i(Q\setminus\mathcal{U})=A\cup c_i(Q\setminus\mathcal{U})$, то доказательство равенства (I) сводится к доказательству следующих фактов:

(а) $c_j\mathcal{U}\cap(Q\setminus\mathcal{U})=\varnothing$; (б) $B\cap(Q\setminus\mathcal{U})=\varnothing$; (в) $c_j\mathcal{U}\cap A=\varnothing$;
(г) $B\cap c_i(Q\setminus\mathcal{U})=\varnothing$; (д) $\mathcal{U}\cap c_i(Q\setminus\mathcal{U})=\varnothing$. (а). Так как $\mathcal{U}=c_{j'}\mathcal{U}$, то $c_j\mathcal{U}\cap Q=\mathcal{U}$ и, поэтому, $c_j\mathcal{U}\cap(Q\setminus\mathcal{U})=\varnothing$;

(б). $B \subseteq C_jW$ и $C_jW\cap Q \subseteq \mathcal{U}$. Следовательно, $B\cap Q\subseteq \mathcal{U}$ и, значит, $B\cap(Q\setminus\mathcal{U})=\emptyset$; (в). $\mathcal{U}\subset Q\cap(C_iV\cap Q)$ и, поэтому, $\mathcal{U}\cap(C_iV\cap Q)=\emptyset$. Поскольку $\mathcal{U}\subset Q$, то $\mathcal{U}\cap C_iV=\emptyset$; отсюда получаем, что $\mathcal{U}\cap V=\emptyset$ и, так как $V=J_jV$, то $C_j\mathcal{U}\cap V=\emptyset$. Но $A\subset V$ и, поэтому, $C_j\mathcal{U}\cap A=\emptyset$; (г). $C_jW\cap Q\subseteq\mathcal{U}$. Следовательно, $(C_jW\cap Q)\cap(Q\setminus\mathcal{U})=\emptyset$. Но, поскольку $B\subseteq W$ и $W\cap C_i(Q\setminus\mathcal{U})=\emptyset$, то $B\cap C_i(Q\setminus\mathcal{U})=\emptyset$; (д). $Q\setminus\mathcal{U}=C_i(Q\setminus\mathcal{U})$ и, поэтому, $C_i(Q\setminus\mathcal{U})\cap Q=Q\setminus\mathcal{U}$; но отсюда следует, что $\mathcal{U}\cap C_i(Q\setminus\mathcal{U})=\emptyset$. Этим равенство (I) доказано. Теперь учитывая, что (X,τ_1,τ_2) наследственно p-нормально и опираясь на предложение I.I.7, получаем, что существуют такие $M=J_jM$, $\mathcal{N}=J_i\mathcal{N}$, что $B\cup\mathcal{U}\subset\mathcal{N}$, $A\cup(Q\setminus\mathcal{U})\subset M$ и $M\cap\mathcal{N}=\emptyset$. Ясно, что $Q=\mathcal{U}\cup(Q\setminus\mathcal{U})$, $B\cup\mathcal{U}\subset\mathcal{N}$. Так как $\mathcal{U}\subset\mathcal{N}$ и $C_j\mathcal{N}\setminus\mathcal{N}=C_j\mathcal{N}\cap(X\setminus\mathcal{N})=C_j\mathcal{N}\cap C_i(X\setminus\mathcal{N})=(j,i)Fr\mathcal{N}$, то $(j,i)Fr\mathcal{N}=\emptyset$; кроме того, $Q\setminus\mathcal{U}\subset M$ и $C_j\mathcal{N}\cap M=\emptyset$. Следовательно, $(j,i)Fr\mathcal{N}\cap(Q\setminus\mathcal{U})=\emptyset$ и, значит, $(j,i)Fr\mathcal{N}\cap$ $\cap(\mathcal{U}\cup(Q\setminus\mathcal{U}))=(j,i)Fr\mathcal{N}\cap Q=\emptyset$. Поскольку $X=P\cup Q$, то получаем, что $(j,i)Fr\mathcal{N}\subset P$ и, так как $(j,i)Fr\mathcal{N}$ бизамкнуто в P , то, в силу монотонности, $p\text{-}Ind(j,i)Fr\mathcal{N}\leqslant p\text{-}Ind\,P\leqslant n$. С другой стороны, $B\subset\mathcal{N}$, $\mathcal{N}\cap M=\emptyset$ и, так как $M=J_jM$, то $C_j\mathcal{N}\cap M=\emptyset$; поэтому $C_j\mathcal{N}\subset X\setminus M\subset X\setminus A=\mathcal{U}(B)$. Следовательно, для любого j-замкнутого множества B и любой его i-окрестности $\mathcal{U}(B)$ мы нашли такую i-окрестность $\mathcal{N}=V(B)$, что $C_jV(B)\subseteq\mathcal{U}(B)$ и $p\text{-}Ind(j,i)Fr\,V(B)\leqslant n$. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Если наследственно парно нормальное бипространство (X,τ_1,τ_2) представляется в виде суммы $n+1$ множества X_k , где $p\text{-}Ind\,X_k\leqslant 0$ для любого $k=\overline{0,n}$, то $p\text{-}Ind\,X\leqslant n$.

Перейдем теперь к определению лебеговой размерности для случая бипространств.

<u>Определение 3.I.4</u>. Предположим $p\text{-}\dim X=-1 \Leftrightarrow X=\emptyset$. Полагаем, что $p\text{-}\dim X\leqslant n$, если для любой системы i-открытых множеств $\{\mathcal{U}_s : s=\overline{1,k}\}$ и любой системы j-замкнутых множеств $\{A_s : s=\overline{1,k}\}$ с условием $A_s\subset\mathcal{U}_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$ существует такая система i-открытых множеств $\{V_s : s=\overline{1,k}\}$, что $A_s\subset V_s\subset\mathcal{U}_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$ и $\mathrm{ord}\{(j,i)\mathrm{Fr}\,V_s : s=\overline{1,k}\}\leqslant n$.

Будем говорить, что $p\text{-}\dim X=n$, если выполнено неравенство $p\text{-}\dim X\leqslant n$, но неравенство $p\text{-}\dim X\leqslant n-1$ уже не выполняется. Наконец, если неравенство $p\text{-}\dim X\leqslant n$ не выполняется ни для какого $n\geqslant -1$, то говорим $p\text{-}\dim X=\infty$.

Если рассматривать бипространство (R,ω_1,ω_2), то для любого i-открытого подмножества $\mathcal{U}\subset R$, $(j,i)\mathrm{Fr}\,\mathcal{U}$ состоит ровно из одной точки. Поэтому, систему границ всегда можно выбрать дискретной и, значит, $p\text{-}\dim R=1$.

Ясно, что биразмерность $p\text{-}\dim X$ (так же как и $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X$) является битопологическим инвариантом.

Справедлива следующая

<u>Теорема 3.I.6.</u> Пусть множество $X_0\subset X$, $X_0=C_pX_0$ и $p\text{-}\dim X=n$. Тогда $p\text{-}\dim X_0\leqslant n$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим бипространство (X_0,τ_1',τ_2') и пусть $\{\mathcal{U}_s' : s=\overline{1,k}\}$ и $\{A_s' : s=\overline{1,k}\}$ такие системы соответственно i'-открытых и j'-замкнутых подмножеств из (X_0,τ_1',τ_2'), что $A_s'\subset\mathcal{U}_s'$ для каждого $s=\overline{1,k}$. Пусть $\{\mathcal{U}_s : s=\overline{1,k}\}$ и $\{A_s : s=\overline{1,k}\}$ такие системы соответственно i-открытых и j-замкнутых подмножеств из (X,τ_1,τ_2), что $\mathcal{U}_s\cap X_0=\mathcal{U}_s'$,

$A_s\cap X_0=A'_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$.

Поскольку $X_0=C_pX_0$ в X, то $X_0=A\cap B$, где $A=C_iA$, $B=C_jB$. Пусть $\mathcal{D}=X\setminus A$. Ясно, что $\mathcal{D}$ i-открыто в X. Нетрудно убедиться, что $\{E_s: E_s=\mathcal{U}_s\cup\mathcal{D}, s=\overline{1,k}\}$ и $\{\Phi_s:\Phi_s=A_s\cap B, s=\overline{1,k}\}$ такие системы соответственно i-открытых и j-замкнутых подмножеств в X, что $\Phi_s\subset E_s$, $E_s\cap X_0=(\mathcal{U}_s\cup\mathcal{D})\cap X_0=(\mathcal{U}_s\cap X_0)\cup(\mathcal{D}\cap X_0)=\mathcal{U}_s\cap X_0=\mathcal{U}'_s$, $\Phi_s\cap X_0=(A_s\cap B)\cap X_0=A_s\cap X_0=A'_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$. Так как $p\text{-}\dim X=n$, то существует такая система i-открытых множеств $\{V_s: s=\overline{1,k}\}$ в X, что

$$\Phi_s\subset V_s\subset E_s \qquad (I)$$

для любого $s=\overline{1,k}$ и

$$\operatorname{ord}\{(j,i)\operatorname{Fr}V_s: s=\overline{1,k}\}\leqslant n \qquad (2)$$

Рассмотрим систему i'-открытых множеств $\{V'_s: V'_s=V_s\cap X_0, s=\overline{1,k}\}$ в (X_0,τ'_1,τ'_2). Тогда, согласно (I), $A'_s\subset V'_s\subset \mathcal{U}'_s$, $\forall s=\overline{1,k}$. С другой стороны, $(j',i')\operatorname{Fr}V'_s\subset(j,i)\operatorname{Fr}V_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$ и, учитывая (2), получим, что $\operatorname{ord}\{(j',i')\operatorname{Fr}V'_s: s=\overline{1,k}\}\leqslant n$, ч.т.д.

Теорема 3.I.7. Для любого бипространства (X,τ_1,τ_2) равенства $p\text{-}\dim X=0$ и $p\text{-}\operatorname{Ind}X=0$ равносильны друг другу и каждое из них влечет парную нормальность (X,τ_1,τ_2).

Доказательство. Пусть, сперва, $p\text{-}\dim X=0$ и пусть (A,B) произвольная нормальная пара в X. Тогда $X\setminus A$ является некоторой i-окрестностью $\mathcal{U}(B)$. Так как $p\text{-}\dim X=0$, то существует такое i-открытое множество V, что $B\subset V\subset \mathcal{U}(B)$ и $\operatorname{ord}\{(j,i)\operatorname{Fr}V\}=0$, т.е. $(j,i)\operatorname{Fr}V=C_jV\setminus V=\emptyset$. Отсюда следует, что $C_jV=V$ и, значит, $X\setminus V=W$ является j-окрестностью для A. Так как $V\cap W=\emptyset$, то (X,τ_1,τ_2) p-нормально. Кроме того, поскольку $V\cup W=X$, то пустое множество является перегородкой пары (A,B) в X и, поэтому, $p\text{-}\operatorname{Ind}X=0$.

Наоборот, пусть $p\text{-}\mathrm{Ind}X=0$. Тогда, согласно предложению 3.I.I, (X,τ_1,τ_2) p-нормально. Покажем, что $p\text{-}\dim X=0$. Пусть $\{\mathcal{U}_s : s=\overline{1,k}\}$ и $\{A_s : s=\overline{1,k}\}$ такие системы соответственно i-открытых и j-замкнутых подмножеств в X, что $A_s\subset\mathcal{U}_s, \forall s=\overline{1,k}$. Так как $p\text{-}\mathrm{Ind}X=0$, то существует такая система i-открытых множеств $\{V_s : s=\overline{1,k}\}$, что $A_s\subset V_s\subset\mathcal{U}_s$ и $(j,i)\mathrm{Fr}V_s=\emptyset$ для каждого $s=\overline{1,k}$; следовательно, $\mathrm{ord}\{(j,i)\mathrm{Fr}V_s : s=\overline{1,k}\}=0$. Теорема доказана.

<u>Теорема 3.I.8</u>. Пусть парно нормальное бипространство (X,τ_1,τ_2) представляется в виде суммы $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}X_k$, где $X_k=C_1X_k=C_2X_k$ и $p\text{-}\mathrm{Ind}X_k=0$ (или, что то же самое, $p\text{-}\dim X_k=0$) для любого $k=\overline{1,\infty}$. Тогда $p\text{-}\mathrm{Ind}X=0$, следовательно, $p\text{-}\dim X=0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть (A,B) нормальная пара в (X,τ_1,τ_2). Покажем, что для (A,B) в X существует пустая перегородка. Ясно, что $(A\cap X_1,B\cap X_1)$ – нормальная пара в (X_1,τ_1',τ_2') и, так как $p\text{-}\mathrm{Ind}X_1=0$, то существуют такие $A_1=C_{i'}A_1=J_{j'}A_1$ и $B_1=C_{j'}B_1=J_{i'}B_1$ в (X_1,τ_1',τ_2'), что $A\cap X_1\subset A_1$, $B\cap X_1\subset B_1$, $A_1\cup B_1=X_1$ и $A_1\cap B_1=\emptyset$. Поскольку $X_1=C_1X_1=C_2X_1$ в X, то $A_1=C_iA_1$ и $B_1=C_jB_1$ в (X,τ_1,τ_2). Следовательно, $(A\cup A_1,B\cup B_1)$ нормальная пара в X. Из p-нормальности (X,τ_1,τ_2) следует существование таких множеств $G_1=J_jG_1$, $H_1=J_iH_1$, что $A\cup A_1\subset G_1$, $B\cup B_1\subset H_1$ и $C_iG_1\cap C_jH_1=\emptyset$. Ясно, что $X_1\subseteq G_1\cup H_1$. Заменяя в предыдущем рассуждении нормальную пару (A,B) нормальной парой (C_iG_1,C_jH_1), построим множества $G_2=J_jG_2$, $H_2=J_iH_2$, для которых выполнены условия

$$X_1\cup X_2\subseteq G_2\cup H_2,\ C_iG_2\cap C_jH_2=\emptyset,\ C_iG_1\subseteq G_2,\ C_jH_1\subseteq H_2.$$

Продолжая рассуждать таким образом, получим две возрастающие последовательности j-открытых и i-открытых подмножеств в X :

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots, \ C_i G_k \subseteq G_{k+1};$$
$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots, \ C_j H_k \subseteq H_{k+1};$$
$$X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k \subseteq G_k \cup H_k, \ C_i G_k \cap C_j H_k = \emptyset.$$

Пусть $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$, $H=\bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$. Так как $X=\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, то $X=G\cup H$. С другой стороны, в виду того, что $G_k \cap H_k=\emptyset$ и $G_k\subseteq G_{k+1}, H_k\subseteq H_{k+1}$ для любого $k=\overline{1,\infty}$, то $G\cap H=\emptyset$. Ясно, что $A\subset G$, $B\subset H$. Следовательно, $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X=0$ и, значит, $p\text{-}\dim X=0$. Теорема доказана.

Отметим здесь же, что подмножество $A\subset X$ имеет тип pF_σ , если $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ и $A_k=C_1A_k=C_2A_k, \forall k=\overline{1,\infty}$.

Замечание 3.I.I. Теорема 3.I.8 остается верной, если в её формулировке предположить, что все слагаемые X_k имеют тип pF_σ.

Теорема 3.I.9. Если подмножество $X_0\subset X$ имеет тип pF_σ и $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leqslant 0$, т.е. $p\text{-}\dim X\leqslant 0$, то $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X_0\leqslant 0$ и, значит, $p\text{-}\dim X_0\leqslant 0$.

Доказательство. Имеем $X_0=\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k=C_1X_k=C_2X_k$ в (X,τ_1,τ_2) для любого $k=\overline{1,\infty}$. Поэтому, $X_k=C_pX_k$, $\forall k=\overline{1,\infty}$. В силу монотонности большой индуктивной и лебеговой размерностей, получаем, что $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X_k\leqslant 0$, $p\text{-}\dim X_k\leqslant 0$, $\forall k=\overline{1,\infty}$. Но теперь, применяя предыдущую теорему, получим, что $p\text{-}\mathrm{Ind}\,X_0\leqslant n$ и значит, $p\text{-}\dim X_0\leqslant 0$, ч.т.д.

§ 2. МАЛАЯ ИНДУКТИВНАЯ БИРАЗМЕРНОСТЬ

В этом параграфе для произвольного бипространства (X,τ_1,τ_2) вводится понятие биразмерности $p\text{-}\mathrm{ind}\,X$ для любого $n\geqslant -1$ и изучаются ее некоторые свойства.

Определение 3.2.I. Перегородкой регулярной пары, состоящей из точки $x\in X$ и множества $A\subset X$, $A=C_i A$, $x\bar{\in} A$, назовем такое множество $T\subset X$, $T=C_pT$, что $X\setminus T$ не является p-связным, (т.е. $X\setminus T=H_1\cup H_2$, где $H_i=J_iH_i$, $H_1\neq\emptyset\neq H_2$, $H_1\cap H_2=\emptyset$) и $x\in H_i$, $A\subseteq H_j$.

Определение 3.2.2. Предположим, что $p\text{-}\mathrm{ind}\,X=-1\Leftrightarrow X=\emptyset$. Полагая, что смысл неравенства $p\text{-}\mathrm{ind}\,X\leqslant n-1$ уже определен, будем сиитать, что $p\text{-}\mathrm{ind}\,X\leqslant n$ тогда и только тогда, когда для любой регулярной пары, состоящей из точки $x\in X$ и множества $A\subset X$, $A=C_iA$, существует перегородка T, для которой $p\text{-}\mathrm{ind}\,T\leqslant n-1$. Далее, $p\text{-}\mathrm{ind}\,X=n$, если неравенство $p\text{-}\mathrm{ind}\,X\leqslant n$ верно, а неравенство $p\text{-}\mathrm{ind}\,X\leqslant n-1$ неверно. Наконец, если неравенство $p\text{-}\mathrm{ind}\,X\leqslant n$ не выполняется ни для какого $n\geqslant -1$, то будем считать $p\text{-}\mathrm{ind}\,X=\infty$.

Биразмерность $p\text{-}\mathrm{ind}\,X$ назовем малой индуктивной биразмерностью (X,τ_1,τ_2).

Из определения 3.2.2 сразу следует справедливость следующих предложений:

Предложение 3.2.I. Если биразмерность $p\text{-}\mathrm{ind}\,X$ является конечной, то (X,τ_1,τ_2) есть парно регулярное бипространство.

Предложение 3.2.2. Биразмерность $p\text{-}\mathrm{ind}\,X$ является битопологическим инвариантом.

Предложение 3.2.3. Если (X,τ_1,τ_2) является $Rp\text{-}T_1$ бипространством, то $p\text{-}\mathrm{ind}\,X\leqslant p\text{-}\mathrm{Ind}\,X$.

Имеет место

Теорема 3.2.I. Если $X_0\subset X$ произвольное подмножество, то $p\text{-}\mathrm{ind}\,X_0\leqslant p\text{-}\mathrm{ind}\,X$.

Доказательство. Как и в случае теоремы 3.I.I, достаточно доказать, что из $p\text{-}ind\,X = n$ следует $p\text{-}ind\,X_0 \leqslant n$. Пусть $x_0 \in X_0$, $A_0 = C_{i'} A_0$ в (X_0, τ_1', τ_2'), $x_0 \bar{\in} A_0$. Рассмотрим такое множество $A \subset X$, $A = C_i A$, что $A \cap X_0 = A_0$. Ясно, что $x_0 \bar{\in} A$. Следовательно, пара, состоящая из точки x_0 и множества A, является регулярной парой и, так как $p\text{-}ind\,X = n$, то существует перегородка T в X для этой пары, с условием $p\text{-}ind\,T \leqslant n-1$. Но $T \cap X_0 = T_0$ является перегородкой пары, состоящей из точки $x_0 \in X_0$ и множества $A_0 \subset X_0$ и, согласно предположению индукции, $p\text{-}ind\,T_0 \leqslant p\text{-}ind\,T \leqslant n-1$, ч.т.д.

Замечание 3.2.I. Если для данной фиксированной точки $x_0 \in X$ и любой регулярной пары, состоящей из точки x_0 и множества $A \subset X$, $A = C_i A$, $x_0 \bar{\in} A$, существует перегородка T, для которой $p\text{-}ind\,T \leqslant n-1$, то пишем $p\text{-}ind_{x_0} X_0 \leqslant n$. Ясно, что $p\text{-}ind\,X = \sup\limits_{x_0 \in X} p\text{-}ind_{x_0} X$

Теорема 3.2.2. Бипространство (X, τ_1, τ_2) имеет биразмерность $p\text{-}ind\,X \leqslant n$ тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ и любой ее i-окрестности $U(x)$ существует такая i-окрестность $V(x)$, что $C_j U(x) \subseteq U(x)$ и $p\text{-}ind(j,i) Fr V(x) \leqslant n-1$.

Доказательство этой теоремы легко вытекает из лемм, аналогичных леммам 3.I.3 и 3.I.4, если в этих последних вместо нормальных пар, рассматривать регулярные пары.

Рассмотрим случай $p\text{-}ind\,X = 0$. Легко видеть, что в этом случае множества, открытые в топологии τ_i, обладают базой из множеств, замкнутых относительно топологии τ_j, что и есть нульмерность в смысле /60/.

Отметим тут же, что как и в случае большой индуктивной биразмерности, нетрудно убедиться, что $p\text{-}ind\,R = 1$.

Замечание 3.2.2. Пусть даны бипространства (X_1,τ_1',τ_2'), (X_2,τ_1'',τ_2'') и их произведение (X,τ_1,τ_2), где $X=X_1\times X_2$, $\tau_i=\tau_i'\times\tau_i''$. Пусть $A\subset X_1$, $B\subset X_2$. Имеет место формула:

$$(i,j)\mathrm{Fr}(A\times B)=((i',j')\mathrm{Fr}A\times C_{i''}B)\cup(C_{i'}A\times(i'',j'')\mathrm{Fr}B).$$

В самом деле: $(i,j)\mathrm{Fr}(A\times B)=C_i(A\times B)\cap C_j((X_1\times X_2)\setminus(A\times B))=$

$$=(C_{i'}A\times C_{i''}B)\cap\{(C_{j'}(X_1\setminus A)\times C_{j''}X_2)\cup(C_{j'}X_1\times C_{j''}(X_2\setminus B))\}=$$

$$=\{(C_{i'}A\times C_{i''}B)\cap(C_{j'}(X_1\setminus A)\times X_2)\}\cup\{(C_{i'}A\times C_{j'}B)\cap$$

$$\cap(X_1\times C_{j''}(X_2\setminus B))\}=\{(C_{i'}A\cap C_{j'}(X_1\setminus A))\times C_{i''}B\}\cup$$

$$\cup\{(C_{i'}A\times(C_{i''}B\cap C_{j''}(X_2\setminus B))\}=(i',j')\mathrm{Fr}A\times C_{i''}B)\cup$$

$\cup(C_{i'}A\times(i'',j'')\mathrm{Fr}B)$, ч.т.д.

Теперь, учитывая замечание 3.2.2, а также тот факт, что $p\text{-}\mathrm{ind}X$ является битопологическим инвариантом, без труда убеждаемся в том, что $p\text{-}\mathrm{ind}R^2=2$.

Предложение 3.2.4. Произведение бипространств, нульмерных в смысле малой индуктивной биразмерности, является нульмерным бипространством в том же смысле.

Доказательство. Так как $p\text{-}\mathrm{ind}X_\alpha=0$, то в каждом сомножителе $(X_\alpha,\tau_1^\alpha,\tau_2^\alpha)$ возьмем i-открытую базу $\mathfrak{B}_{\alpha_i}$, состоящую из j-замкнутых множеств. Тогда, элементарные открытые множества $\bigcap\limits_{k=1}^{s}p^{-1}_{\alpha_k}(\mathcal{U}_{\alpha_k})=O(\mathcal{U}_{\alpha_1},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_s})$ (см. /3, стр. 9I/), образуют i-открытую базу $\mathfrak{B}_i$ бипространства (X,τ_1,τ_2); следовательно, достаточно доказать, что каждое $O(\mathcal{U}_{\alpha_1},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_s})$ j-замкнуто в X. Пусть $x=\{x_\alpha\}\in C_jO(\mathcal{U}_{\alpha_1},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_s})$ произвольная точка. Так как каждое p_α p- непрерывно, то $x_{\alpha_k}\in C_j\mathcal{U}_{\alpha_k}=\mathcal{U}_{\alpha_k}$ (см. /3/, стр. 92, предложение 5). Поскольку это верно для каждого $k=\overline{1,s}$, то $x=\{x_\alpha\}\in O(\mathcal{U}_{\alpha_1},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_s})$, т.е. $O(\mathcal{U}_{\alpha_1},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_s})=$ $=C_jO(\mathcal{U}_{\alpha_1},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_s})$, ч.т.д.

Имеет место

<u>Теорема 3.2.3</u>. Пусть бипространство (X, τ_1, τ_2) является наследственно парно нормальным и M и $\mathcal{N}$ произвольные подмножества в X. Тогда, имеет место неравенство

$$p\text{-}ind(M \cup \mathcal{N}) \leqslant p\text{-}ind M + p\text{-}ind \mathcal{N} + 1.$$

Сперва докажем следующую лемму

<u>Лемма 3.2.I</u>. Пусть в наследственно парно нормальном бипространстве (X, τ_1, τ_2) дано множество X_0 и в нем точка $x_0 \in X_0$. Для того, чтобы $p\text{-}ind_{x_0} X_0 \leqslant n$ необходимо и достаточно, чтобы в любой i-окрестности $U(x_0)$ содержалась i-окрестность $V(x_0)$, для которой

$$p\text{-}ind(X_0 \cap (j,i) Fr V(x_0)) \leqslant n-1.$$

<u>Доказательство</u>. Пусть, сперва, $p\text{-}ind_{x_0} X_0 \leqslant n$. Покажем, что выполняется условие леммы.

Так как $p\text{-}ind_{x_0} X_0 \leqslant n$, то для любой i'-окрестности $U^*(x_0)$ в (X_0, τ_1', τ_2') существует такая i'-окрестность $V^*(x_0)$, что $C_{j'} V^*_{(x_0)} \subseteq U^*_{(x_0)}$ и $p\text{-}ind(j',i') Fr V^*_{(x_0)} \leqslant n-1$. Покажем, что

$$(C_j V^*_{(x_0)} \cap (X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)})) \cup (V^*_{(x_0)} \cap C_i (X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)})) = \emptyset \qquad (I)$$

В самом деле, так как $V^*_{(x_0)} \subset X_0$, то $C_j V^*_{(x_0)} \cap X_0 = C_{j'} V^*_{(x_0)}$; но тогда

$$C_j V^*_{(x_0)} \cap (X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)}) = \emptyset \qquad (2)$$

С другой стороны, $X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)} \subset X_0 \setminus V^*_{(x_0)}$ и, поскольку $X_0 \setminus V^*_{(x_0)}$ i'-замкнуто, то $C_{i'}(X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)}) \subseteq X_0 \setminus V^*_{(x_0)}$. Значит, $C_i (X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)}) \cap X_0 \subseteq X_0 \setminus V^*_{(x_0)}$ и, поэтому,

$$V^*_{(x_0)} \cap C_i (X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)}) = \emptyset \qquad (3)$$

Учитывая (2) и (3), получаем (I). В виду того, что (X, τ_1, τ_2) наследственно p-нормально, существуют такие j-открытое U, i-открытое V, что $V^*_{(x_0)} \subset V$, $X_0 \setminus C_{j'} V^*_{(x_0)} \subset U$ и $U \cap V = \emptyset$.

Ясно, что $x_0 \in V = V(x_0)$. Далее, $C_j V(x_0) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Рассмотрим такую i-окрестность $\mathcal{U}(x_0)$, что $\mathcal{U}(x_0) \cap X_0 = \mathcal{U}^*(x_0)$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $V(x_0) \subset \mathcal{U}(x_0)$. Покажем, что $(j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0) \cap X_0 \subseteq (j',i')\mathrm{Fr}\,V^*(x_0)$. В самом деле, поскольку $V^*(x_0) \subset V(x_0)$, то $V^*(x_0) \cap (j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0) = \emptyset$; кроме того, в силу $X_0 \setminus C_{j'} V^*(x_0) \subset \mathcal{U}$ и $C_j V(x_0) \cap \mathcal{U} = \emptyset$, имеем $(j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0) \cap (X_0 \setminus C_{j'} V^*(x_0)) = \emptyset$; следовательно, $(j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0) \cap X_0 \subseteq$ $\subseteq C_{j'} V^*(x_0) \setminus V^*(x_0) = (j',i')\mathrm{Fr}\,V^*(x_0)$. Но $p\text{-}\mathrm{ind}(j',i')\mathrm{Fr}\,V^*(x_0) \leq n-1$ и, поэтому, $p\text{-}\mathrm{ind}(X_0 \cap (j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0)) \leq n-1$.

Наоборот, пусть выполняется условие леммы. Покажем, что $p\text{-}\mathrm{ind}_{x_0} X_0 \leq n$. Ясно, что в любой i'-окрестности $\mathcal{U}^*(x_0)$ содержится i'-окрестность $V^*(x_0)$. Пусть $V(x_0)$ такая i-окрестность, что $V(x_0) \cap X_0 = V^*(x_0)$. Имеем: $X_0 \cap (j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0) =$ $= (X_0 \cap C_j V(x_0)) \cap (X_0 \cap (X \setminus V(x_0)),\ (j',i')\mathrm{Fr}\,V^*(x_0) = C_{j'} V^*(x_0) \cap (X_0 \setminus V^*(x_0))$. В силу того, что $C_{j'} V^*(x_0) \subseteq C_j V(x_0) \cap X_0$ и $X_0 \setminus V^*(x_0) = X_0 \cap (X \setminus V^*(x_0))$, получаем $(j',i')\mathrm{Fr}\,V^*(x_0) \subseteq X_0 \cap (j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0)$ и, значит, $p\text{-}\mathrm{ind}(j',i')\mathrm{Fr}\,V^*(x_0) \leq$ $p\text{-}\mathrm{ind}(X_0 \cap (j,i)\mathrm{Fr}\,V(x_0)) \leq n-1$. Следовательно, $p\text{-}\mathrm{ind}_{x_0} X_0 \leq n$, ч.т.д.

Доказательство теоремы 3.2.3.

Неравенство теоремы 3.2.3 очевидно, если имеет место хотя бы одно из равенств $p\text{-}\mathrm{ind}\,M = \infty$ или $p\text{-}\mathrm{ind}\,\mathcal{N} = \infty$. Поэтому, предположим, что $p\text{-}\mathrm{ind}\,M$ и $p\text{-}\mathrm{ind}\,\mathcal{N}$ суть целые числа ≥ -1 Требуется доказать, что

$$p\text{-}\mathrm{ind}(M \cup \mathcal{N}) \leq m+n+1 \qquad (\mathrm{I})$$

Доказательство будем вести индукцией относительно числа $m+n$. При $m+n=-2$ неравенство (I) выполнено. Предположив, что неравенство (I) выполнено при $m+n \leq k-1$, докажем, его для $m+n=k$. Пусть $x \in M \cup \mathcal{N}$ произвольная точка и $\mathcal{U}(x)$ её произвольная i'-окрестность из $(M\cup\mathcal{N}, \tau_1', \tau_2')$. Не ограничивая общности можно предположить, что $x\in M$; так как $p\text{-}\mathrm{ind}\, M = m$, то, согласно лемме 3.2.I, можно найти такую i'-окрестность $V(x)$, что $p\text{-}\mathrm{ind}(M\cap (j',i')\mathrm{Fr}\, V(x)) \leq m-1$. С другой стороны, $p\text{-}\mathrm{ind}(\mathcal{N}\cap(j',i')\mathrm{Fr}\, V(x)) \leq p\text{-}\mathrm{ind}\,\mathcal{N} \leq n$. Рассмотрим множества $M_1 = M\cap(j',i')\mathrm{Fr}\, V(x)$ и $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}\cap(j',i')\mathrm{Fr}\, V(x)$. Применяя к этим множествам неравенство (I), которое можно применить, так как $p\text{-}\mathrm{ind}\, M_1 + p\text{-}\mathrm{ind}\,\mathcal{N}_1 \leq m-1+n \leq k-1$, получим

$$p\text{-}\mathrm{ind}(M_1\cup\mathcal{N}_1) \leq p\text{-}\mathrm{ind}\, M_1 + p\text{-}\mathrm{ind}\,\mathcal{N}_1 + 1 \leq m-1+n+1 = m+n.$$

Но $M_1\cup\mathcal{N}_1 = (M\cap(j',i')\mathrm{Fr}\, V(x))\cup(\mathcal{N}\cap(j',i')\mathrm{Fr}\, V(x)) = (M\cup\mathcal{N})\cap$ $\cap(j',i')\mathrm{Fr}\, V(x) = (j',i')\mathrm{Fr}\, V(x)$ и, значит, $p\text{-}\mathrm{ind}(j',i')\mathrm{Fr}\, V(x) \leq m+n$. Так как $V(x)$ произвольно малая i'-окрестность точки $x\in M\cup\mathcal{N}$, то $p\text{-}\mathrm{ind}(M\cup\mathcal{N}) \leq m+n+1$, ч.т.д.

Очевидным обобщением этого неравенства является неравенство

$$p\text{-}\mathrm{ind}(M_0\cup M_1\cup\cdots\cup M_n) \leq p\text{-}\mathrm{ind}\, M_0 + p\text{-}\mathrm{ind}\, M_1 + \cdots + p\text{-}\mathrm{ind}\, M_n + n$$

для любых подмножеств $M_0, M_1, \ldots, M_n$, лежащих в наследственно p-нормальном бипространстве (X, τ_1, τ_2).

Следствие. Если (X, τ_1, τ_2) является наследственно парно нормальным и $X = \bigcup_{k=0}^{n} X_k$, где $p\text{-}\mathrm{ind}\, X_k = 0$ для любого $k = \overline{0,n}$, то $p\text{-}\mathrm{ind}\, X \leq n$.

Замечание 3.2.3. В виду того, что любое квази-метризуемое бипространство наследственно p-нормально (см. /82/), можно сказать, что все результаты, полученные для наследственно p-нормальных бипространств, справедливы и для квази-метризуемых бипространств.

Предложение 3.2.5. Если бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно регулярным и парно экстремально несвязным, то $p\text{-}\mathrm{ind}\, X = 0$.

Доказательство. Пусть $x \in X$ произвольная точка и $U(x)$ ее произвольная i-окрестность. Так как (X, τ_1, τ_2) p-регулярно, то существует такая i-окрестность $V(x)$, что $C_j V(x) \subseteq U(x)$. Но, в силу p-экстремальной несвязности (X, τ_1, τ_2), $C_j V(x)$ снова i-открыто. Поэтому $(j,i) Fr C_j V(x) = C_j V(x) \cap C_i (X \setminus C_j V(x)) = $ $= C_j V(x) \cap (X \setminus C_j V(x)) = \emptyset$ и, значит, $p\text{-}ind (j,i) Fr C_j V(x) = -1$; следовательно, $p\text{-}ind X = 0$, ч.т.д.

Предложение 3.2.6. Если $p\text{-}ind X = 0$, то (X, τ_1, τ_2) является парно вполне регулярным.

Доказательство. Пусть $Z = \{Z_1, Z_2\}$, где Z_i – система всех одновременно j-открытых и i-замкнутых подмножеств из X. Так как $p\text{-}ind X = 0$, то i-открытые множества обладают базой $\mathcal{B}_i$ из j-замкнутых множеств.

Ясно, что $\{B : X \setminus B \in \mathcal{B}_i\} \subset Z_i$. Нетрудно убедиться, что $Z = \{Z_1, Z_2\}$ p-нормальная база бипространства (X, τ_1, τ_2) в смысле определения I.I.I и, согласно теореме I.I.I, (X, τ_1, τ_2) p-вполне регулярно, ч.т.д.

В заключении этой главы, выясним взаимосвязь битопологической размерности $p\text{-}ind X$ с топологическими размерностями $i\text{-}ind X$, где $i\text{-}ind X$ обозначает малую индуктивную размерность топологического пространства (X, τ_i).

Как показал И.Рейли в /60/, биподпространство $(Q, \omega_1', \omega_2')$ бипространства (R, ω_1, ω_2), где Q – множество рациональных чисел, имеет биразмерность $p\text{-}ind Q = 0$. Однако $i\text{-}ind Q \neq 0$ и, следовательно, $p\text{-}ind Q \neq i\text{-}ind Q$.

В /I2/ Дж.Вестон ввел понятие спаренных топологий следующим образом: топология τ_i спарена с топологией τ_j на множестве X, если $C_i U \subseteq C_j U$ для любого множества $U \in \tau_i$.

Теорема 3.2.4. Если в бипространстве (X,τ_1,τ_2) топология τ_i спрарена с топологией τ_j, то $i\text{-}ind X \leq p\text{-}ind X$.

Доказательство. Неравенство очевидно, если $p\text{-}ind X = \infty$. Поэтому, допустив, что $p\text{-}ind X = k$ конечно, докажем, что $i\text{-}ind X \leq k$. При $k=-1$ это верно. Пусть теорема доказана для $k \leq n-1$ и докажем её для $k=n$. Так как $p\text{-}ind X = n$, то, согласно предложению 3.2.I, (X,τ_1,τ_2) p-регулярно и поэтому, согласно /32, стр. 73/, имеем $\tau_j \subseteq \tau_i$. Пусть $x \in X$ и $U(x)$ её произвольная i-окрестность. Поскольку $p\text{-}ind X = n$, то существует такая i-окрестность $V(x)$, что $C_j V(x) \subseteq U(x)$ и $p\text{-}ind(j,i) Fr V(x) \leq n-1$. Но $(j,i) Fr V(x) = C_j V(x) \setminus V(x)$. С другой стороны, $i\text{-}Fr V(x) = C_i V(x) \setminus V(x)$. Так как $\tau_j \subseteq \tau_i$, то $C_i V(x) \subseteq C_j V(x)$, т.е. $i\text{-}Fr V(x) \subseteq (j,i) Fr V(x)$. Но $p\text{-}ind(j,i) Fr V(x) \leq n-1$ и, в силу монотонности, $p\text{-}ind(i\text{-}Fr V(x)) \leq n-1$. Тогда, согласно индуктивному предположению, $i\text{-}ind(i\text{-}Fr V(x)) \leq n-1$. Итак, для любой точки $x \in X$ и любой её i-окрестности $U(x)$ мы нашли i-окрестность $V(x)$, для которой $C_i V(x) \subseteq U(x)$ и $i\text{-}ind(i\text{-}Fr V(x)) \leq n-1$, ч.т.д.

ГЛАВА IУ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ БИТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В ТЕОРИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ I. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В настоящее время имеется несколько вариантов внутренних характеристик тихоновских ($\equiv T_1$-вполне регулярных) пространств (см. /4/, /28/, /73/, /79/, /85/), определенных первоначально во "внешних" (посредством непрерывных отображений в числовую прямую) терминах. Для наших целей наиболее удобными оказались характеристики, данные О.Фринк в /79/ и В.И.Зайцевым в /28/. А именно, как мы уже показали в первой главе, перенесением конструкции В.И.Зайцева с необходимыми предостережениями в битопологические пространства, удается во внутренних терминах охарактеризовать парную полную регулярность.

В этом параграфе, на основе характеристики полной регулярности, данной О.Фринк и результатов главы I, мы, с одной стороны, охарактеризуем тихоновские пространства в терминах сходимости и, с другой стороны, укажем способ построения бикомпактных расширений волмэновского типа, т.е. W-расширений, ассоциированных с нормальной базой, при помощи направленностей специального типа.

Все пространства, встречающиеся в этом параграфе, предполагаются удовлетворяющими аксиоме отделимости T_1 , а расширения - хаусдорфовыми и бикомпактными.

Согласно О.Фринк, база-кольцо $Z=\{A\}$ замкнутых множеств пространства X называется нормальной базой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Для любой точки $x \in X$ и любого множества $F \subset X$, $F=[F]$, $x \bar{\in} F$, существует такое $A \in Z$, что $x \in A$ и $A \cap F = \emptyset$.

2. Для любой пары $A, B \in Z$, $A \cap B = \emptyset$, существуют такие множества $\mathcal{U}(A)$ и $\mathcal{U}(B)$, что $\mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}(B) = \emptyset$; при этом $\mathcal{U}(A)$ и $\mathcal{U}(B)$ являются элементами открытой базы, сопряженной с базой Z, т.е. $\mathcal{U}(A), \mathcal{U}(B) \in coZ$, где $coZ = \{X \setminus A : A \in Z\}$.

Основной результат, полученный О.Фринк, гласит следующее: пространство X является вполне регулярным тогда и только тогда, когда оно обладает по крайней мере одной нормальной базой.

Доказанная нами теорема I.I.8, в случае совпадения топологий, дает новую внутреннюю характеристику вполне регулярных пространств, а именно – характеристику в терминах сходимости. Приведем подробное доказательство этого результата.

Прежде всего сформулируем следующую, более удобную для наших целей, характеристику полной регулярности.

<u>Теорема 4.I.I</u>. Пространство X является вполне регулярным тогда и только тогда, когда существует база-кольцо $Z = \{A\}$ замкнутых в X множеств, удовлетворяющая следующим условиям:

I. Для любой точки $x \in X$ и любого $A \in Z$, $x \bar{\in} A$, существуют такие $\mathcal{U}(x), \mathcal{U}(A) \in coZ$, что $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{U}(A) = \emptyset$.

2. Для любой пары $A, B \in Z$, $A \cap B = \emptyset$, существуют такие $\mathcal{U}(A), \mathcal{U}(B) \in coZ$, что $\mathcal{U}(A) \cap \mathcal{U}(B) = \emptyset$.

Доказательство равносильности теоремы 4.I.I результату О.Фринк, приведенному выше, не представляет никаких затруднений и, поэтому, не приводится.

Пусть $Z = \{A\}$ есть замкнутая база, а $coZ = \{\mathcal{U}\}$ – сопряженная с ней открытая база пространства X.

Определение 4.I.I. Будем говорить, что направленность $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ Z-сходится к точке $x \in X$ (к множеству $A \subset X$), если для любой окрестности $U(x) \in \mathrm{co}Z$ $(U(A) \in \mathrm{co}Z\}$ существует такой индекс $\alpha_0 \in D$, что из $\alpha > \alpha_0$ следует $x_\alpha \in U(x)$ $(x_\alpha \in U(A))$.

Приводимая ниже теорема является характеристикой вполне регулярных пространств в терминах сходимости.

Теорема 4.I.2. Пространство X является вполне регулярным тогда и только тогда, когда существует база-кольцо $Z = \{A\}$ замкнутых в X множеств и выполнены следующие условия:

I. Не существует направленности, одновременно Z-сходящейся к точке $x \in X$ и к множеству $A \in Z$, $x \overline{\in} A$.

2. Не существует направленности, одновременно Z-сходящейся к двум непересекающимся множествам из базы Z.

Доказательство. Если пространство X является вполне регулярным, то, согласно теореме 4.I.I, оно обладает базой-кольцом $Z = \{A\}$ из замкнутых в X множеств с условиями I и 2. Допустив существование направленности, которая либо Z-сходится к точке $x \in X$ и к множеству $A \in Z$, $x \overline{\in} A$, либо Z-сходится к паре $A, B \in Z$, $A \cap B = \emptyset$, получим, что или любая окрестность $U(x) \in \mathrm{co}Z$ пересекает произвольную окрестность $U(A) \in \mathrm{co}Z$, или любая окрестность $U(A) \in \mathrm{co}Z$ пересекает произвольную окрестность $U(B) \in \mathrm{co}Z$, что противоречит условиям I или 2 теоремы 4.I.I.

Пусть, теперь, выполняются условия теоремы и пространство X не является вполне регулярным. Тогда, либо существуют такие точка $x \in X$ и множество $A \in Z$, $x \overline{\in} A$, что любая окрестность $U(x) \in \mathrm{co}Z$ пересекает произвольную окрестность $U(A) \in \mathrm{co}Z$, либо существуют такие дизъюнктные множества $A, B\in Z$, что любая окрестность $U(A)\in \mathrm{co}\,Z$ пересекает произвольную окрестность $U(B)\in \mathrm{co}\,Z$. Учитывая известную схему, примененную нами в доказательстве теоремы I.I.5, в первом случае получим, что направленность $\{x_{(U(x),U(A))}: (U(x),U(A))\in \mathcal{U}_x\times\mathcal{U}_A\}$, где $\mathcal{U}_x$ - семейство всех окрестностей $U(x)\in \mathrm{co}\,Z$, $\mathcal{U}_A$ - семейство всех окрестностей $U(A)\in \mathrm{co}\,Z$, одновременно Z-сходится и к x и к A, а во втором случае получим, что направленность $\{x_{(U(A),U(B))}: (U(A),U(B))\in \mathcal{U}_A\times\mathcal{U}_B\}$, где $\mathcal{U}_A$ - семейство всех окрестностей $U(A)\in \mathrm{co}\,Z$, $\mathcal{U}_B$ - семейство всех окрестностей $U(B)\in \mathrm{co}\,Z$, одновременно Z-сходится и к A и к B. Но это противоречит либо условию I, либо условию 2 теоремы, ч.т.д.

В первой главе нашей диссертации основное внимание уделялось классу парно вполне регулярных бипространств, для представителей которого были даны внутренние характеристики и в терминах окрестностей, с помощью понятия так называемой парно нормальной базы, и в терминах сходимости. Как было указано выше, первый из этих результатов обобщает результат О.Фринк и В.И.Зайцева, а второй дает возможность получения новой характеристики даже в случае топологических пространств.

Результаты, полученные выше, и понятие Z-идеальной направленности (обобщающее понятие идеальной направленности в смысле В.Г.Евстигнеева /27/) позволяют построить расширение волмэновского типа вполне регулярных пространств. Изложению этой конструкции посвящена почти вся оставшаяся часть данного параграфа.

Пусть $Z=\{A\}$ нормальная база вполне регулярного пространства X . Истинное подмножество нормальной базы называется $\mathcal{Z}$ -фильтром, если оно замкнуто относительно конечных пересечений и содержит каждый элемент из базы $\mathcal{Z}$, содержащий его элемент как подмножество.

Пусть $W(\mathcal{Z})=X\cup\{W:W$ есть $\mathcal{Z}$ -ультрафильтр в X с пустым пересечением $\}$.

В качестве открытой базы в $W(\mathcal{Z})$ задается семейство всех множеств H^* , где H^* является подмножеством в $W(\mathcal{Z})$, сопоставляемым множеству $H\in co\mathcal{Z}$ следующим образом:

$H^*=H\cup\{W:W$ есть $\mathcal{Z}$ -ультрафильтр в X с пустым пересечением, который содержит множество $A\in\mathcal{Z}$, $A\subset H\}$.

Как показано в /79/, $W(\mathcal{Z})$ является расширением вполне регулярного пространства X ; оно называется расширением волмэновского типа, ассоциированным с нормальной базой $\mathcal{Z}$ (см. /79/).

<u>Определение 4.I.2</u>. Направленность $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ во вполне регулярном пространстве X будем называть $\mathcal{Z}$ -идеальной направленностью, если выполнены следующие условия:

I. Какое бы множество $H\in co\mathcal{Z}$ мы ни взяли, $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ либо существенно содержится в H , либо существенно содержится в $X\setminus A$.

2. Из того, что направленность $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится во множестве $H\in co\mathcal{Z}$, следует существование такого индекса $\alpha_0\in\mathcal{D}$, что $[\{x_\alpha:\alpha>\alpha_0\}]\subset H$.

3. Направленность $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ не имеет предельных точек в X .

<u>Замечание 4.I.I</u>. Очевидно, мы получим определение, равносильное приведенному, оставив условия I, 3 прежними и заменив

условие 2 следующим:

если $A\in Z$ такое множество, что для любого индекса $\alpha_0\in\mathcal{D}$ пересечение $A\cap[\{x_\alpha:\alpha>\alpha_0\}]\neq\phi$, то направленность $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится в A.

Определение 4.I.3. Z-идеальные в X направленности $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ и $\{x_\beta:\beta\in M\}$ будем называть Z-эквивалентными тогда и только тогда, когда каждое множество $H\in coZ$, содержащее существенно одну из этих направленностей, содержит существенно и другую.

Ясно, что определение 4.I.3 не изменится, если множество $H\in coZ$ заменить множеством $A\in Z$.

Пусть $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$ Z-идеальная направленность в X. Через $\{x_\alpha\}_Z$ будем обозначать класс всех Z-идеальных в X направленностей, Z-эквивалентных $\{x_\alpha:\alpha\in\mathcal{D}\}$.

Справедлива следующая

Теорема 4.I.3. Во вполне регулярном пространстве X существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех классов Z-эквивалентности Z-идеальных направленностей, с одной стороны, и множеством всех Z-ультрафильтров с пустым пересечением, с другой стороны.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать следующие два факта:

I. Пусть $W=\{A\}$ Z-ультрафильтр в X с пустым пересечением; сопоставим каждому $A\in W$ некоторую точку $x_A\in A$ и в семействе W определим направление посредством операции включения множеств. Тогда $\{x_A:A\in W\}$ – Z-идеальная направленность в X и, если $y_A\in A$, для любого $A\in W$, то Z-идеальные в X направленности $\{x_A:A\in W\}$ и $\{y_A:A\in W\}$ – Z- эквивалентны. При этом, различным $\mathcal{Z}$-ультрафильтрам соответствуют не $\mathcal{Z}$-эквивалентные $\mathcal{Z}$-идеальные направленности в X.

2. Если $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ $\mathcal{Z}$-идеальная в X направленность, то семейство $\mathcal{S}=\{A : A\in\mathcal{Z}$ и содержит существенно $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}\}$ является $\mathcal{Z}$-ультрафильтром с пустым пересечением и, направленность $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ $\mathcal{Z}$-эквивалентна всякой $\mathcal{Z}$-идеальной направленности $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$.

<u>Доказательство утверждения I</u>. Покажем сперва, что $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ $\mathcal{Z}$-идеальная направленность в X. Пусть множество $A_0\in\mathcal{Z}$ является произвольным. Если $A_0\in\mathcal{W}$, то из определения $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ находим, что $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ существенно содержится в A_0. Если $A_0\overline{\in}\mathcal{W}$, то существует такое $A_1\in\mathcal{W}$, что $A_0\cap A_1=\emptyset$. Так как $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ существенно содержится в A_1 и $A_1\subset X\setminus A_0$, то $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ существенно содержится в $X\setminus A_0$. Условие I определения 4.I.3 доказано.

Пусть, далее, множество $A_0\in\mathcal{Z}$ и для любого $A_1\in\mathcal{W}$: $A_0\cap[\{x_A : A>A_1\}]\neq\emptyset$. Тогда, для любого $A_1\in\mathcal{W}$ имеем $\emptyset\neq A_0\cap[\{x_A : A>A_1\}]\subset A_0\cap A_1$. Следовательно, $A_0\in\mathcal{W}$;отсюда находим, что направленность $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ существенно содержится в A_0. Свойство 2 доказано.

Наконец, допустим, что направленность $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ имеет предельную точку $x_0\in X$. Тогда, согласно теореме 7 из /3I/, стр. I04, для любого $A_0\in\mathcal{W}$: $x_0\in[\{x_A : A>A_0\}]$. Но, так как $\{x_A : A>A_0\}\subset A_0$ и $A_0\in\mathcal{Z}$, то $[\{x_A : A>A_0\}]\subset A_0$. Следовательно, $x_0\in A_0$ для любого $A_0\in\mathcal{W}$, что неверно, так как $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{W}} A=\emptyset$. Свойство 3 доказано.

Покажем, что $\mathcal{Z}$-идеальные в X направленности $\{x_A : A\in\mathcal{W}\}$ и $\{y_A : A\in\mathcal{W}\}$ $\mathcal{Z}$-эквивалентны. Пусть $A_0\in\mathcal{Z}$ и A_0 существенно содержит (например) направленность $\{x_A : A\in W\}$. Тогда $A_0\in W$, так как в противном случае оказалось бы, что $\{x_A : A\in W\}$ существенно содержится в $X\setminus A_0$. Следовательно, $\{y_A : A\in W\}$ существенно содержится в A_0, что и требовалось.

Если, далее, W_1 и W_2 два различных Z-ультрафильтра в X с пустым пересечением, то существует такое $A_0\in W_1$, что $A_0 \bar{\in} W_2$. Следовательно, любые две Z-идеальные направленности в X, одна из которых соответствует семейству W_1, а другая - семейству W_2, не Z-эквивалентны.

Докажем теперь утверждение 2. Покажем, во-первых, что $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{S}} A=\emptyset$, так как центрированность семейства $\mathcal{S}$, а также его замкнутость относительно конечных пересечений очевидны. Допустим противное: существует $x_0\in\bigcap\limits_{A\in\mathcal{S}} A$; тогда $x_0\in[\{x_\alpha : \alpha>\alpha_0\}]$ и, поэтому, согласно теореме 7 из /3I/, стр. I04, x_0 является предельной точкой для $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$, что неверно. Поэтому $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{S}} A=\emptyset$.

Покажем, что $\mathcal{S}$ максимально. В противном случае существует такое $A_0\in Z$, что $A_0\bar{\in}\mathcal{S}$ и $A_0\cap A\neq\emptyset$ для любого $A\in\mathcal{S}$. Следовательно, для любого $\alpha_0\in\mathcal{D}$ получаем, что $A\cap[\{x_\alpha : \alpha>\alpha_0\}]\neq\emptyset$. В силу Z-идеальности $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ в X, направленность $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится в A_0. Противоречие с тем, что $A_0\bar{\in}\mathcal{S}$.

Наконец, пусть для любого $A\in\mathcal{S}$ точка $x_A\in A$. Покажем, что Z-идеальные в X направленности $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ и $\{x_A : A\in\mathcal{S}\}$ Z-эквивалентны. Пусть $A_0\in Z$ и A_0 содержит существенно $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$. Тогда $A_0\in\mathcal{S}$ и, следовательно, A_0 существенно содержит и $\{x_A : A\in\mathcal{S}\}$. Обратно, пусть $A_0\in Z$ и A_0 существенно содержит $\{x_A : A\in\mathcal{S}\}$. Тогда $A_0\in\mathcal{S}$, так как в противном случае $\{x_A : A\in\mathcal{S}\}$ существенно содержится в $X\setminus A_0$. Значит, A_0 существенно содержит $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{D}(X,Z)$ множество, получаемое добавлением к X в качестве "новых" точек классов Z -эквивалентности Z -идеальных направленностей, т.е. $\mathcal{D}(X,Z)=X\cup\{\{x_\alpha\}_Z : \{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ Z -идеальная в X направленность$\}$.

Точки множества $\mathcal{D}(X,Z)$ будем считать равными, если они либо равные точки множества X, либо равные классы Z -идеальных направленностей в X.

Определим на $\mathcal{D}(X,Z)$ топологию, открытой базой для которой служат множества вида

$\breve{H}=H\cup\{\{x_\alpha\}_Z : \{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ Z -идеальная в X направленность, существенно содержащаяся в H, $H\in \mathrm{co}Z\}$.

Покажем корректность этого определения.

Лемма 4.I.I. Пусть $H_k\in \mathrm{co}Z$ для любого $k=\overline{1,n}$. Тогда справедливо равенство $\widetilde{\bigcap\limits_k H_k}=\bigcap\limits_k \breve{H}_k$.

Доказательство. Сперва покажем, что $\widetilde{\bigcap\limits_k H_k}\subset\bigcap\limits_k \breve{H}_k$; пусть $\widetilde{\bigcap\limits_k H_k}\neq\emptyset$ и, пусть $\breve{x}=\{x_\alpha\}_Z\in\widetilde{\bigcap\limits_k H_k}$. Тогда $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится в $\bigcap\limits_k H_k$ и, значит, $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится в каждом H_k, $k=\overline{1,n}$. Следовательно, $\breve{x}\in\breve{H}_k$, $\forall k=\overline{1,n}$, т.е. $\breve{x}\in\bigcap\limits_k\breve{H}_k$.

Наоборот, пусть $\bigcap\limits_k\breve{H}_k\neq\emptyset$. Если не существует Z -идеальной направленности, которая существенно содержится в каждом H_k, то $\bigcap\limits_k\breve{H}_k=\bigcap\limits_k H_k$ и требуемое включение доказано. Если же существует Z -идеальная направленность $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$, которая существенно содержится в каждом H_k, то, для любого $k=\overline{1,n}$, существует такой индекс α_k, что из $\alpha>\alpha_k$ следует $x_\alpha\in H_k$. Пусть $\alpha_0\in\mathcal{D}$ следует за всеми α_k, $k=\overline{1,n}$. Тогда $x_\alpha\in\bigcap\limits_k H_k$, если $\alpha>\alpha_0$. Это значит, что $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится в $\bigcap\limits_k H_k$. Лемма доказана.

Отметим тут же, что, как легко видеть, множество $\breve{A}=A\cup\{\{x_\alpha\}_Z:\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ Z-идеальная в X направленность, которая существенно содержится в A, $A\in Z\}$ является замкнутым базисным множеством в $D(X,Z)$.

Имеет место следующая

<u>Теорема 4.I.4</u>. Пространство $D(X,Z)$ является расширением вполне регулярного пространства .

<u>Доказательство</u>. Сперва покажем, что X является подпространством $D(X,Z)$. Пусть U открыто в X . Значит $U=\bigcup_\alpha H_\alpha$, где $H_\alpha\in coZ$ для любого α . Тогда $\breve{H}_\alpha$ открытое базисное множество в $D(X,Z)$ для любого α . Пусть $\breve{U}=\bigcup_\alpha \breve{H}_\alpha$. Тогда $\breve{U}\cap X=(\bigcup_\alpha \breve{H}_\alpha)\cap X=\bigcup_\alpha(\breve{H}_\alpha\cap X)=\bigcup_\alpha H_\alpha=U$. Обратно, если V открыто в $D(X,Z)$, то $V=\bigcup_\alpha \breve{H}_\alpha$, где $H_\alpha\in coZ$ для любого α . Следовательно, $V\cap X=(\bigcup_\alpha \breve{H}_\alpha)\cap X=\bigcup_\alpha H_\alpha$, т.е. $V\cap X$ открыто в X ,

Таким образом, X действительно есть подпространство $D(X,Z)$.

Покажем, что X всюду плотно в $D(X,Z)$, т.е. $[X]_{D(X,Z)}=D(X,Z)$. Пусть $\breve{x}=\{x_\alpha\}_Z\in D(X,Z)\setminus X$ произвольная точка и $U(\breve{x})$ произвольная ее окрестность. Тогда, согласно определению базы открытых множеств в $D(X,Z)$, существует такое $H\in coZ$, что $\breve{x}\in\breve{H}\subset U(\breve{x})$. Следовательно, направленность $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ существенно содержится в H и, так как $H\subset U(\breve{x})$, то $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ существенно содержится в $U(\breve{x})$. Но это значит, что направленность $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ сходится к точке $\breve{x}$ в $D(X,Z)$, т.е., согласно теореме 2 из /3I/, стр. 97, $D(X,Z)=[X]_{D(X,Z)}$.

Покажем, далее, что $D(X,Z)$ бикомпактно. Допустим противное; тогда существует максимальное центрированное семейство $\{\breve{A}\}$ базисных замкнутых множеств в $D(X,Z)$, для которого $\cap\breve{A}=\emptyset$. Ясно, что $W=\{A\}$ является Z-ультрафильтром в X с пустым пересечением. Каждому $A\in W$ сопоставим точку $x_A\in A$ и в семействе W определим направление по включению множеств, т.е. $x_A > x_{A_0}$, если $A_0\subset A$. Тогда, согласно теореме 4.I.3, направленность $\{x_A : A\in W\}$ является Z -идеальной в X и $\{x_A : A\in W\}$ существенно содержится в каждом $A\in W$. Поэтому, точка $\breve{x}=\{x_\alpha\}_Z$ содержится в каждом $\breve{A}$, т.е. $\breve{x}\in\bigcap\limits_{A\in W}\breve{A}$. Противоречие доказывает бикомпактность $\mathcal{D}(X,Z)$.

Покажем, наконец, что $\mathcal{D}(X,Z)$ хаусдорфово. Рассмотрим три случая:

I. $x_1,x_2\in X$, $x_1\neq x_2$. Так как X есть вполне регулярное T_1 пространство, то оно является хаусдорфовым. Следовательно, существуют такие открытые базисные окрестности $U(x_1), U(x_2)\in \mathrm{co}Z$, что $U(x_1)\cap U(x_2)=\emptyset$. Ясно, что $\breve{U}(x_1)\cap\breve{U}(x_2)=\emptyset$.

2. Пусть $x_1\in X$, $\breve{x}_2=\{x_\alpha\}_Z\in\mathcal{D}(X,Z)\setminus X$. Пусть $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ произвольная Z -идеальная направленность из класса $\{x_\alpha\}_Z$. Так как $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ не имеет предельных точек в X, то x_1 не может быть предельной точкой для $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$. Следовательно, у x_1 найдется такая окрестность $U'(x_1)\in \mathrm{co}Z$, что для некоторого $\alpha_0\in\mathcal{D}$ из $\alpha>\alpha_0$ следует $x_\alpha\bar{\in} U'(x_1)$. Так как $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ Z -идеальная направленность, то $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ существенно содержится в $X\setminus U'(x_1)=A$, $A\in Z$. Итак, $x_1\bar{\in} A$, $A\in Z$. Так как $Z=\{A\}$ нормальная база, то существуют такие $U(x_1), U(A)\in\mathrm{co}Z$, что $U(x_1)\cap U(A)=\emptyset$. Рассмотрим $\breve{U}(x_1)$ и $\breve{U}(A)$. Ясно, что $x_1\in\breve{U}(x_1)$, $\breve{x}_2=\{x_\alpha\}_Z\in\breve{U}(A)$ и $\breve{U}(x_1)\cap\breve{U}(A)=\emptyset$.

3. Пусть $\breve{x}_1=\{x_\alpha\}_Z$, $\breve{x}_2=\{x_\beta\}_Z\in\mathcal{D}(X,Z)\setminus X$. Следовательно, никакая Z -идеальная направленность $\{x_\alpha : \alpha\in\mathcal{D}\}$ не Z -эквивалентна никакой Z -идеальной направленности $\{x_\beta : \beta\in M\}$.

Пусть $W_1=\{A: A\in Z$ и $\{x_\alpha:\alpha\in D\}$ существенно содержится в $A\}$, $W_2=\{B: B\in Z$ и $\{x_\beta:\beta\in M\}$ существенно содержится в $B\}$. Тогда, согласно теореме 4.I.3, W_1 и W_2 два различных Z-ультрафильтра в X. Поэтому, существуют такие $A\in W_1, B\in W_2$, что $A\cap B=\varnothing$. В силу нормальности базы Z существуют такие $U(A), U(B)\in coZ$, что $U(A)\cap U(B)=\varnothing$. Рассмотрим $\breve{U}(A)$, $\breve{U}(B)$. Ясно, что $\breve{x}_1\in\breve{U}(A)$, $\breve{x}_2\in\breve{U}(B)$ и $\breve{U}(A)\cap\breve{U}(B)=\varnothing$. Этим хаусдорфовость $\mathcal{D}(X,Z)$ и, значит, теорема полностью доказаны.

О том, что $\mathcal{D}(X,Z)$ является W-расширением вполне регулярного пространства X, говорит следующая

Теорема 4.I.5. Пусть X вполне регулярное пространство с нормальной базой Z. Тогда существует гомеоморфизм из пространства $W(Z)$ на пространство $\mathcal{D}(X,Z)$, неподвижный на точках X.

Доказательство. Построим отображение $f: W(Z)\to\mathcal{D}(X,Z)$, оставляя точки пространства X неподвижными и сопоставляя каждому Z-ультрафильтру $W=\{A\}$ с пустым пересечением точку $\{x_A\}_Z$. Тогда, учитывая соответствующее утверждение теоремы 4.I.3, находим, что f взаимно-однозначное надъективное отображение. Для доказательства гомеоморфизмости f осталось доказать, что для любого $H\in coZ$ имеем равенства $f(H^*)=\breve{H}$ и $f^{-1}(\breve{H})=H^*$.

Докажем, к примеру, справедливость первого равенства. Пусть $\breve{x}\in f(H^*)$. Тогда, согласно определению f, существует такой Z-ультрафильтр $W=\{A\}$, что $\breve{x}=\{x_A\}_Z$, где $x_A\in A$ для каждого $A\in W$. Так как $W\in H^*$, то, по определению H^*, существует $A_0\in W$, $A_0\subset H$. Поскольку направленность $\{x_A: A\in W\}$ существенно содержится в A_0, то $\{x_A: A\in W\}$ существенно содержится в H, т.е. $\breve{x} \in H$. Следовательно, $f(H^*) \subset \breve{H}$.

Наоборот, пусть $\breve{x} = \{x_\alpha\}_Z \in \breve{H}$. Тогда Z-идеальная направленность $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ существенно содержится в H. Следовательно, согласно теореме 4.I.3, семейство $\mathcal{S} = \{A : A \in Z$ и существенно содержит $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}\}$ является Z-ультрафильтром в X с пустым пересечением. Кроме того, тот факт, что $\{x_\alpha : \alpha \in \mathcal{D}\}$ существенно содержится в H, влечет существование такого индекса $\alpha_0 \in \mathcal{D}$, что $[\{x_\alpha : \alpha > \alpha_0\}] \subset H$ и, значит, $\mathcal{S} \in H^*$. Теперь, учитывая утверждение 2 теоремы 4.I.3, находим, что $\breve{x} = \{x_\alpha\}_Z = \{x_A\}_Z$, где $x_A \in A$ для любого $A \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\breve{x} \in f(H^*)$. Теорема доказана.

В заключении этого параграфа охарактеризуем в битопологических терминах непрерывные отображения топологических пространств.

Как известно, если бипространство $(X, \mathcal{J}, \mathcal{C})$ задано соответственно операторами открытого ядра $\mathcal{J}$, замыкания $\mathcal{C}$ и $\mathcal{U}$ некоторое семейство подмножеств из X, то $\mathcal{J}$ и $\mathcal{C}$ сопряжены над $\mathcal{U}$, т.е. $\mathcal{J}\mathcal{U} = \mathcal{C}\mathcal{J}\mathcal{U}$ и $\mathcal{C}\mathcal{U} = \mathcal{J}\mathcal{C}\mathcal{U}$, если $\mathcal{J}A = \mathcal{C}\mathcal{J}A$ и $\mathcal{C}A = \mathcal{J}\mathcal{C}A$ для каждого $A \in \mathcal{U}$ (см., например, /57/).

Пусть (X, τ) и (Y, γ) произвольные топологические пространства и $f : (X, \tau) \to (Y, \gamma)$ произволное отображение. Для любого подмножества $A \subset X$ пусть $[A] = f^{-1} f(A)$. Нетрудно убедиться, что $A \longrightarrow [A]$ является оператором замыкания Куратовского на 2^X. Обозначим этот оператор через $\mathcal{C}$, а оператор открытого ядра, порождающий начальную топологию – через $\mathcal{J}$. Если $A \in 2^X$, то $A = \mathcal{C}A$ в том и только в том случае, если A является насыщенным или отмеченным множеством при отображении f (см. /6, стр. 9I/). Ясно, что если f биективное отображение, то $(X, \mathfrak{C})$ является дискретным пространством и, если $\mathfrak{f}$ постоянное отображение, то $(X, \mathfrak{C})$ – антидискретное пространство.

Справедлива следующая

Теорема 4.1.6. Отображение $\mathfrak{f}:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ является непрерывным тогда и только тогда, когда в бипространстве $(X,\mathfrak{I},\mathfrak{C})$ операторы $\mathfrak{I}$ и $\mathfrak{C}$ полусопряжены над семейством $\mathcal{U}=\{\mathfrak{f}^{-1}(U): U\in\gamma\}$, т.е. если $\mathfrak{I}\mathfrak{C}\mathcal{U}=\mathfrak{C}\mathcal{U}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{f}:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ непрерывное отображение, то из $U\in\gamma$ следует, что $\mathfrak{f}^{-1}(U)\in\tau$. Тогда, как легко видеть, $\mathfrak{C}\mathfrak{f}^{-1}(U)=\mathfrak{I}\mathfrak{C}\mathfrak{f}^{-1}(U)=\mathfrak{f}^{-1}(U)$, т.е. $\mathfrak{I}\mathfrak{C}\mathcal{U}=\mathfrak{C}\mathcal{U}$.

Если наоборот $\mathfrak{I}\mathfrak{C}\mathcal{U}=\mathfrak{C}\mathcal{U}$, то $\mathfrak{I}\mathfrak{C}\mathfrak{f}^{-1}(U)=\mathfrak{C}\mathfrak{f}^{-1}(U)$; но $\mathfrak{C}\mathfrak{f}^{-1}(U)=\mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{f}(\mathfrak{f}^{-1}(U))=\mathfrak{f}^{-1}(U)$ и, поэтому, $\mathfrak{f}^{-1}(U)=\mathfrak{I}\mathfrak{f}^{-1}(U)$, т.е. $\mathfrak{f}^{-1}(U)\in\tau$. Теорема доказана.

§ 2. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть $(X,\tau,\leqslant)$ упорядоченное топологическое пространство (ниже у.т.п.), где τ – топология, $\leqslant$ – частичный порядок. Изучение таких пространств систематически проводится Л.Начбиным в монографии /49/. Вспомним, что подмножество $A\subset X$ называется возрастающим, если из $a\leqslant x$ и $a\in A$ следует $x\in A$. Для каждого подмножества $A\subset X$ единственным образом определяется наименьшее возрастающее множество $i(A)$ в X, содержащее A. Двойственно, подмножество $A\subset X$ называется убывающим, если из $x\leqslant a$ и $a\in A$ следует $x\in A$; через $d(A)$ обозначается наименьшее убывающее множество в X, содержащее A. Подмножество $A\subset X$ называется выпуклым, если $A=i(A)\cap d(A)$. Далее, через $I(A)$ и $D(A)$ обозначаются соответственно наименьшее замкнутое возрастающее и наименьшее замкнутое убывающее множества в X, содержащие A .

М.Канфелл в /30/ провел параллель между теориями у.т.п. и бипространств, сопоставляя каждому у.т.п. $(X, \tau, \leqslant)$ бипространство (X, τ_1, τ_2), где

$$\tau_1 = \{U : U \in \tau,\ U = i(U)\}$$

$$\tau_2 = \{V : V \in \tau,\ V = d(V)\}$$ (см. также /49/).

Заметим тут же, что τ_1 называется верхней, а τ_2 - нижней топологиями относительно порядка $\leqslant$.

С другой стороны, М.Канфеллом был поставлен следующий вопрос: в каком случае бипространство может трактоваться как у.т.п., т.е., если (X, τ_1, τ_2) бипространство и $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$, то при каких условиях существует частичный порядок $\leqslant$ на X, относительно которого τ_1 является верхней, а τ_2 - нижней топологиями.

Ответ на этот вопрос, данный Х.Пристли в /52/, гласит: пусть для бипространства (X, τ_1, τ_2) топология $\tau = \tau_1 \vee \tau_2$ является бикомпактной. Тогда на X существует такой частичный порядок $\leqslant$, что $(X, \tau, \leqslant)$ является строго T_2-упорядоченным (см. ниже) и τ_1 совпадает с верхней, а τ_2 - с нижней топологиями относительно $\leqslant$ тогда и только тогда, когда

(I) (X, τ_1) (или (X, τ_2)) удовлетворяет аксиоме отделимости T_0 ;

(2) бипространство (X, τ_1, τ_2) парно регулярно.

Этот результат может быть получен применением только лишь битопологических понятий, что и будет проделано ниже.

Отмеченная М.Канфеллом зависимость между у.т.п. и ассоциированным бипространством позволяет изучить различные свойства у.т.п. при помощи соответствующих свойств ассоциированного бипространства. Целью этого параграфа является применение указанной зависимости в следующих двух направлениях: 1) в направлении аксиом отделимости; 2) в направлении теории размерности.

Аксиомами отделимости у.т.п. занимались Л.Начбин в /49/, С.Маккартан в /41/, Т.Маккаллион в /40/. В частности, Л.Начбин определил T_2, нормально и вполне регулярно упорядоченные пространства, причем, последние - на функциональном языке; С.Маккартан определил T_1 и регулярно упорядоченные пространства, а Т.Маккаллион - вполне регулярно упорядоченные пространства, однако во внутренних терминах. Отметим тут же, что С.Маккартан изучил и так называемые строгие варианты этих аксиом; разница состоит в том, что вместо возрастающих (убывающих) окрестностей берутся открытые возрастающие (открытые убывающие) окрестности. Приведем одну из этих аксиом, а именно строгую T_2-упорядоченность, т.е. монотонную отделимость в терминах Л.Начбина: для любой пары различных точек x, $y \in X$, $x \not\leq y$, существуют дизъюнктные открытые окрестности $U(x) = iU(x)$, $U(y) = dU(y)$.

Если дано у.т.п. $(X, \tau, \leq)$, то из $x \not\leq y$ следует $x \neq y$. Учитывая вышеизложенное, а также соответствующие понятия из главы 1, получим, что справедливы следующие предложения:

1) если бипространство (X, τ_1, τ_2) удовлетворяет аксиоме отделимости $Rp\text{-}T_1$, то $(X, \tau, \leq)$ является строго T_1-упорядоченным;

2) если бипространство (X, τ_1, τ_2) является парно хаусдорфовым, то $(X, \tau, \leq)$ является строго T_2-упорядоченным;

3) у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$ является строго регулярно упорядоченным тогда и только тогда, когда бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно регулярным;

4) у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$ является строго нормально упорядоченным тогда и только тогда, когда бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно нормальным.

Постараемся теперь ответить на вопрос М.Канфелла только лишь с применением битопологических понятий. Согласно Дж.Сварт /63/, бипространство (X,τ_1,τ_2) является компактным, если из каждого покрытия $\mathcal{U}\subset\tau_1\cup\tau_2$ можно выбрать конечное подпокрытие; но это требование равносильно требованию, чтобы (X,τ), где $\tau=\tau_1\vee\tau_2$, являлось бикомпактным.

Предложение 4.2.5. Пусть бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно хаусдорфовым и компактным. Тогда на X существует такой частичный порядок $\leqslant$, что $(X,\tau,\leqslant)$ является строго τ_2-упорядоченным, τ_1 совпадает с верхней, а τ_2 – с нижней топологиями относительно $\leqslant$ тогда и только тогда, когда бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно регулярным.

Изучим, наконец, зависимость аксиом полной регулярности. Приведем некоторые факты из работы Т.Маккаллиона.

Если дано у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$, то (τ_1,τ_2), где τ_1 и τ_2 являются топологиями на X, называется парой, определяющей порядок, если $\tau_1,\tau_2\leqslant\tau$ и следующие условия равносильны:

(I) $x\in C_1 y$;

(2) $x\leqslant y$;

(3) $y\in C_2 x$.

Рассматривая на X семейства $\mathcal{A}=\{A: A=D(A)\}$ и

$\mathcal{B}=\{B:B=I(B)\}$, Т.Маккаллион называет семейство $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ нормально упорядоченной подбазой для ($X,\tau,\leqslant$), если

(I) $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) является базой замкнутых множеств топологии $\tau_{\mathcal{A}}$ ($\tau_{\mathcal{B}}$) на X, $\tau_{\mathcal{A}}\vee\tau_{\mathcal{B}}=\tau$ и ($\tau_{\mathcal{A}},\tau_{\mathcal{B}}$) - пара, определяющая порядок;

(2) если множество $F\subset X$ замкнуто в топологии $\tau_{\mathcal{A}}$($\tau_{\mathcal{B}}$) и $x\bar{\in}F$, то существует множество $B\in\mathcal{B}$ ($A\in\mathcal{A}$), для которого $x\in B$ и $B\cap F=\emptyset$ ($x\in A$ и $A\cap F=\emptyset$);

(3) если $A\in\mathcal{A}$, $B\in\mathcal{B}$ и $A\cap B=\emptyset$, то существуют такие $A'\in\mathcal{A}$, $B'\in\mathcal{B}$, что $A\subseteq A'$, $B\subseteq B'$, $A\cap B'=\emptyset=A'\cap B$ и $A'\cup B'=X$.

Т.Маккаллион доказал, что у.т.п. ($X,\tau,\leqslant$) является вполне регулярно упорядоченным тогда и только тогда, когда оно обладает нормально упорядоченной подбазой.

Оказывается, что справедливо

<u>Предложение 4.2.6</u>. У.т.п. ($X,\tau,\leqslant$) является вполне регулярно упорядоченным тогда и только тогда, когда на X существует пара (τ_1,τ_2), определяющая порядок, $\tau_1\vee\tau_2=\tau$ и бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно вполне регулярным.

<u>Доказательство</u>. Пусть, сперва, ($X,\tau,\leqslant$) есть вполне регулярно упорядоченное пространство. Тогда оно обладает нормально упорядоченной подбазой $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$. Пусть τ_1 - топология, базой замкнутых множеств для которой служит $\mathcal{A}$, а τ_2 - топология, базой замкнутых множеств для которой служит $\mathcal{B}$. Тогда, поскольку $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ - нормально упорядоченная подбаза, то (τ_1,τ_2) является парой, определяющей порядок, $\tau_1\vee\tau_2=\tau$ и ($\mathcal{A},\mathcal{B}$) есть парно нормальная база бипространства (X,τ_1,τ_2). Следовательно, согласно теореме I.I.I, (X,τ_1,τ_2) является парно вполне регулярным.

Наоборот, если (τ_1,τ_2) - пара, определяющая порядок, $\tau_1\vee\tau_2=\tau$ и бипространство (X,τ_1,τ_2) является парно вполне регулярным, то оно обладает парно нормальной базой $Z=\{Z_1,Z_2\}$. Легко видеть, что тогда $Z_1\cup Z_2$ - нормально упорядоченная подбаза для $(X,\tau,\leqslant)$, ч.т.д.

Перейдем теперь к построению теории размерности для у.т.п. Интерес к построению такого рода естественен по той простой причине, что для у.т.п. не существовало теории размерности, учитывающей одновременно обе структуры: топологию и порядок.

Пусть $(X,\tau,\leqslant)$ есть у.т.п. и (X,τ_1,τ_2) - ассоциированное бипространство. Ясно, что если $A\subset X$, то $\mathcal{D}(A)=C_1A$, $I(A)=C_2A$ и если множество A является замкнутым и выпуклым в $(X,\tau,\leqslant)$, т.е. если $A=\mathcal{D}(A)\cap I(A)$, то $A=C_pA$ в (X,τ_1,τ_2).

Определение 4.2.1. Пусть A и B - подмножества у.т.п. X. Будем писать, что $A<'B$, если выполняется равенство

$$(A\cap I(B))\cup(\mathcal{D}(A)\cap B)=\emptyset.$$

Если $A<'B$ и, в то же время, существуют такие открытые окрестности $\mathcal{U}(A)=d\mathcal{U}(A)$ и $\mathcal{U}(B)=i\mathcal{U}(B)$, что $\mathcal{U}(A)\cap\mathcal{U}(B)=\emptyset$, то будем писать $A\ll'B$.

Определение 4.2.2. У.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$ будем называть наследственно строго нормально упорядоченным, если любое его упорядоченное подпространство является строго нормально упорядоченным.

Перейдем теперь к определению размерностных функций для у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$.

Определение 4.2.3. Предположим, что $o\text{-}\operatorname{Ind}X=-1$ $(o\text{-}\operatorname{ind}X=-1)\Leftrightarrow X=\emptyset$.

Полагая, что смысл неравенства $o\text{-}\operatorname{Ind}X\leqslant n-1$ $(o\text{-}\operatorname{ind}X\leqslant n-1)$ уже определен, будем считать, что $o\text{-}\operatorname{Ind}X\leqslant n$ $(o\text{-}\operatorname{ind}X\leqslant n)$, если выполнены следующие условия:

1) для любого замкнутого возрастающего множества A (для любой точки $x \in X$) и любой его открытой возрастающей окрестности $\mathcal{U}(A)$ (и любой ее открытой возрастающей окрестности $\mathcal{U}(x)$) существует такая открытая возрастающая окрестность $V(A)$ ($V(x)$), что $IV(A) \subseteq \mathcal{U}(A)$ и $o\text{-}\mathrm{Ind}(IV(A) \setminus V(A)) \leqslant n-1$ ($IV(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ и $o\text{-}\mathrm{ind}(IV(x) \setminus V(x)) \leqslant n-1$);

2) для любого замкнутого убывающего множества B (для любой точки $x \in X$) и любой его открытой убывающей окрестности $\mathcal{U}(B)$ (и любой ее открытой убывающей окрестности $\mathcal{U}(x)$) существует такая открытая убывающая окрестность $V(B)$ ($V(x)$) , что $\mathcal{D}V(B) \subseteq \mathcal{U}(B)$ и $o\text{-}\mathrm{Ind}(\mathcal{D}V(B) \setminus V(B)) \leqslant n-1$ ($\mathcal{D}V(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ и $o\text{-}\mathrm{ind}(\mathcal{D}V(x) \setminus V(x)) \leqslant n-1$).

$o\text{-}\mathrm{Ind}X=n$ ($o\text{-}\mathrm{ind}X=n$) , если выполнено неравенство $o\text{-}\mathrm{Ind}X \leqslant n$ ($o\text{-}\mathrm{ind}X \leqslant n$) , а неравенство $o\text{-}\mathrm{Ind}X \leqslant n-1$ ($o\text{-}\mathrm{ind}X \leqslant n-1$) уже не выполняется. Наконец, если неравенство $o\text{-}\mathrm{Ind}X \leqslant n$ ($o\text{-}\mathrm{ind}X \leqslant n$) не выполняется ни для какого $n \geqslant -1$, то будем считать $o\text{-}\mathrm{Ind}X=\infty$ ($o\text{-}\mathrm{ind}X=\infty$).

$o\text{-}\mathrm{Ind}X$ ($o\text{-}\mathrm{ind}X$) назовем большой индуктивной (малой индуктивной) размерностью у.т.п. ($X, \tau, \leqslant$).

Ясно, что размерности $o\text{-}\mathrm{Ind}X$ и $o\text{-}\mathrm{ind}X$ могут быть определены и с помощью соответствующим образом определенных перегородок.

<u>Определение 4.2.4</u>. Предположим, что $o\text{-}\dim X=-1 \Leftrightarrow X=\emptyset$.

Полагаем, что $o\text{-}\dim X \leqslant n$, если выполнены следующие условия:

1) для любой системы открытых возрастающих множеств $\{U_s : s=\overline{1,k}\}$ и любой системы замкнутых возрастающих множеств $\{A_s : s=\overline{1,k}\}$ с

условием $A_s \subset \mathcal{U}_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$, существует такая система открытых возрастающих множеств $\{V_s : s=\overline{1,k}\}$, что $A_s \subset V_s \subset \mathcal{U}_s$, для каждого $s=\overline{1,k}$ и $\mathrm{ord}\{I(V_s)\setminus V_s : s=\overline{1,k}\} \leqslant n$;

2) для любой системы открытых убывающих множеств $\{\mathcal{U}_s : s=\overline{1,k}\}$ и любой системы замкнутых убывающих множеств $\{B_s : s=\overline{1,k}\}$ с условием $B_s \subset \mathcal{U}_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$, существует такая система открытых убывающих множеств $\{V_s : s=\overline{1,k}\}$, что $B_s \subset V_s \subset \mathcal{U}_s$ для каждого $s=\overline{1,k}$ и $\mathrm{ord}\{D(V_s)\setminus V_s : s=\overline{1,k}\} \leqslant n$.

Далее, $o\text{-}\dim X = n$, если неравенство $o\text{-}\dim X \leqslant n$ выполнено, а неравенство $o\text{-}\dim X \leqslant n-1$ не выполнено. Наконец, если неравенство $o\text{-}\dim X \leqslant n$ не выполняется ни для какого $n \geqslant -1$, то говорим $o\text{-}\dim X = \infty$.

$o\text{-}\dim X$ назовем лебеговой размерностью у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$.

Замечание 4.2.I. Пусть $(X,\tau,\leqslant)$ есть у.т.п. и (X,τ_1,τ_2) - ассоциированное бипространство. Тогда, ясно, что $o\text{-}\mathrm{Ind}(X,\tau,\leqslant) = p\text{-}\mathrm{Ind}(X,\tau_1,\tau_2)$, $o\text{-}\mathrm{ind}(X,\tau,\leqslant) = p\text{-}\mathrm{ind}(X,\tau_1,\tau_2)$, $o\text{-}\dim(X,\tau,\leqslant) = p\text{-}\dim(X,\tau_1,\tau_2)$. Если рассматривать $(R,\omega,\leqslant)$, где ω -обычная топология, а $\leqslant$ - естественный порядок, то ассоциированным бипространством является (R,ω_1,ω_2); следовательно, $o\text{-}\mathrm{Ind} R = o\text{-}\mathrm{ind} R = o\text{-}\dim R = 1$

Доказательства приводимых ниже утверждений для $o\text{-}\mathrm{Ind} X$, $o\text{-}\mathrm{ind} X$ и $o\text{-}\dim X$ легко получаются как следствия из соответствующих битопологических утверждений переходом на ассоциированные бипространства. Ясно, что эти доказательства можно проводить непосредственно в категории упорядоченных топологических пространств, однако это нам не представляется целесообразным, так как они значительно усложняются.

Справедливы следующие утверждения:

7) для того, чтобы у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$ было наследственно строго нормально упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух подмножеств $A,B\subset X$ из $A<'B$ следовало $A\ll' B$

8) размерности $o\text{-}\mathrm{Ind}\,X$, $o\text{-}\mathrm{ind}\,X$ и $o\text{-}\dim X$ являются инвариантами сохраняющих порядок гомеоморфизмов;

9) если размерность $o\text{-}\mathrm{Ind}\,X$ ($o\text{-}\mathrm{ind}\,X$) является конечной, то у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$ является строго нормально (строго регулярно) упорядоченным;

10) если $(X,\tau,\leqslant)$ является строго нормально упорядоченным и A замкнуто и выпукло в X, т.е. $A=D(A)\cap I(A)$, то $(A,\tau_A,\leqslant)$ также является строго нормально упорядоченным.

<u>Теорема 4.2.1</u>. Если A замкнуто и выпукло в X, т.е. $A=D(A)\cap I(A)$ ($A\subset X$ произвольное подмножество), то $o\text{-}\mathrm{Ind}\,A\leqslant o\text{-}\mathrm{Ind}\,X$, $o\text{-}\dim A\leqslant o\text{-}\dim X$ $(o\text{-}\mathrm{ind}\,A\leqslant o\text{-}\mathrm{ind}\,X)$.

<u>Теорема 4.2.2</u>. Для любого у.т.п. $(X,\tau,\leqslant)$ равенства $o\text{-}\mathrm{Ind}X=0$ и $o\text{-}\dim X=0$ равносильны друг другу и каждое из них влечет строгую нормальную упорядоченность $(X,\tau,\leqslant)$.

<u>Теорема 4.2.3</u>. Пусть наследственно строго нормально упорядоченное пространство $(X,\tau,\leqslant)$ есть сумма счетного числа дизъюнктных множеств $\mathcal{D}_k$: $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathcal{D}_k$, обладающих тем свойством, что все частные суммы $F_k=\bigcup\limits_{s\leqslant k}\mathcal{D}_s$, $k=\overline{1,\infty}$, удовлетворяют условию $F_k=D(F_k)=I(F_k)$. Если при этом $o\text{-}\mathrm{Ind}\,\mathcal{D}_k\leqslant n$ для всех $k=\overline{1,\infty}$, то $o\text{-}\mathrm{Ind}\,X\leqslant n$.

<u>Теорема 4.2.4</u>. Пусть $X_k=i(X_k)=d(X_k)$ открытые подмножества в X для всех $k=\overline{1,\infty}$, где $(X,\tau,\leqslant)$ является наследственно строго нормально упорядоченным. Кроме того,

$X_k \supseteq X_{k+1}$, $X_1 = X$ и $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_k = \emptyset$. Если для всех $k = \overline{1,\infty}$, $o\text{-}\mathrm{Ind}(X_k \setminus X_{k+1}) \leqslant n$, то и $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X \leqslant n$.

Следствие. Если $A = D(A) = I(A) \subset X$, где $(X, \tau, \leqslant)$ есть наследственно строго нормально упорядоченное пространство и $o\text{-}\mathrm{Ind}\, A \leqslant n$, $o\text{-}\mathrm{Ind}(X \setminus A) \leqslant n$, то и $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X \leqslant n$.

Теорема 4.2.5. Если $(X, \tau, \leqslant)$ есть наследственно строго нормально упорядоченное пространство и $X = P \cup Q$, где $o\text{-}\mathrm{Ind}\, P \leqslant n$, $o\text{-}\mathrm{Ind}\, Q \leqslant 0$, то $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X \leqslant n+1$.

Следствие. Если наследственно ст~~о~~рого нормально упорядоченное пространство $(X, \tau, \leqslant)$ представляется в виде суммы $n+1$ множества X_k, где $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X_k \leqslant 0$ для любого $k = \overline{0,n}$, то $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X \leqslant n$.

Теорема 4.2.6. Пусть строго нормально упорядоченное пространство $(X, \tau, \leqslant)$ представляется в виде суммы $X = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, где $X_k = D(X_k) = I(X_k)$ и $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X_k = 0$ (или, что то же самое, $o\text{-}\dim X_k = 0$) для любого $k = \overline{1,\infty}$. Тогда $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X = 0$, а следовательно, $o\text{-}\dim X = 0$.

Теорема 4.2.7. Если $X_0 \subset X$ и $X_0 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где $A_k = D(A_k) = I(A_k)$ в $(X, \tau, \leqslant)$ и $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X \leqslant 0$, т.е. $o\text{-}\dim X \leqslant 0$, то $o\text{-}\mathrm{Ind}\, X_0 \leqslant 0$ и, значит, $o\text{-}\dim X_0 \leqslant 0$.

Теорема 4.2.8. Пусть $(X, \tau, \leqslant)$ является наследственно строго нормально упорядоченным. Тогда, для любых подмножеств $M, N \subset X$ справедливо неравенство

$$o\text{-}\mathrm{ind}(M \cup N) \leqslant o\text{-}\mathrm{ind}\, M + o\text{-}\mathrm{ind}\, N + 1.$$

Ясно, что справедливо и обобщение этого неравенства, т.е. справедливо неравенство

$$o\text{-}\mathrm{ind}(M_0 \cup M_1 \cup \cdots \cup M_n) \leqslant o\text{-}\mathrm{ind}\, M_0 + o\text{-}\mathrm{ind}\, M_1 + \cdots + o\text{-}\mathrm{ind}\, M_n + n$$

для любых подмножеств $M_0, M_1, \ldots, M_n$, лежащих в наследственно строго нормально упорядоченном $(X, \tau, \leqslant)$.

<u>Следствие</u>. Если наследственно строго нормально упорядоченное пространство $(X, \tau, \leqslant)$ представляется в виде суммы $X = \bigcup\limits_{k=0}^{n} X_k$ и $o\text{-}\mathrm{ind}\, X_k \leqslant 0$ для любого $k = \overline{0, n}$, то $o\text{-}\mathrm{ind}\, X \leqslant n$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Аднаджевич (Adnadević D.) Ordered spaces and bitopology, Glasnik Math. 10(30), (1975), 337-340.

2. Александров П.С. О понятии пространства в топологии, УМН 2, № I (I947), 5-57.

3. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности, "Наука", I973.

4. Александров П.С., Пономарев В.И. О бикомпактных расширениях топологических пространств, Вестн. МГУ, сер. матем., № 5, (I959), 93-I07.

5. Амиаесей (Amihaesei C.) Sur les bi-espaces extrémement discontinus, An.şt.Univ. Iaşi, Mat.19, (1973),19-25.

6. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, "Наука", I974.

7. Биркгоф (Birkhoff G.) Moore-Smith convergence in general topology, Ann. Math. 38, (1937), 39-56.

8. Бирсан (Birsan T.) Sur les espaces bitopologiques connexes, An. şt. Univ. Iaşi, Mat. 14, (1968), 293-296.

9. Бирсан (Birsan T.) Compacité dans les espaces bitopologiques, An. şt. Univ. Iaşi, Mat. 15, (1969), 317-329.

IO. Бирсан (Birsan T.) Sur les espaces bitopologiques completement réguliers, An.şt.Univ.Iaşi, Mat.16,(1970), 29-34.

II. Васудеван, Гоель (Vasudevan R., Goel C.K.) Separation axioms in bitopological hyperspaces, Ann.Soc.Sci.Bruxelles 89,(1975), 480-496.

I2. Вестон (Weston J.D.) On the comparison of topologies, J.London Math. Soc. 32, (1957), 342-354.

I3. Вильсон (Wilson W.A.) On quasi-metric spaces, Amer. J.Math. 53, (1931), 675-684.

I4. Гастл (Gastl G.L.) Bitopological spaces from quasi-proximities, Portug. Math. 33, No.4, (1974), 213-218.

I5. Грауэрт Г., Либ И. и Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисление, "Мир", I97I.

I6. Датта (Datta M.C.) Projective bitopological spaces, J.Aust. Math. Soc. 13, (1972), 327-334.

I7. Датта (Datta M.C.) Projective bitopological spaces II, J.Aust. Math. Soc. 14, (1972), 119-128.

I8. Двалишвили Б.П. Вполне регулярность в терминах направленностей, Сообщения АН ГССР 72, № 2 (I973), 297-299.

I9. Двалишвили Б.П. Отделимость в битопологических пространствах, Сообщения АН ГССР 73, № 2 (I974), 285-288.

20. Двалишвили Б.П. О размерности битопологических пространств, Сообщения АН ГССР 76, № I (I974), 49-52.

2I. Двалишвили Б.П. О некоторых типах компактности и аксиомах отделимости битопологических пространств, Сообщения АН ГССР 80, № 2 (I975), 289-292.

22. Двалишвили Б.П. Об отображениях битопологических пространств, Сообщения АН ГССР 80, № 3 (I975), 553-556.

23. Двалишвили Б.П. К теории размерности частично упорядоченных топологических пространств, Тезисы УП Всесоюзной топологической конференции, Минск, I977, 63.

24. Двалишвили Б.П. (Dvalishvili B.P.) Bitopology and order, International Symposium of Topology and its Applications (abstr.), Beograd, 1977, 18.

25. Двалишвили Б.П. О размерности и некоторых других вопросах теории битопологических пространств, Труды Тбилисского Математического института, т. LVI , (I977), I5-5I.

26. Димитриевич (Dimitrijević R.) Pairwise compact bitopological quasiordered spaces, Math. Balkanica 4.22, (1974), 121-127.

27. Евстигнеев В.Г. Новая характеристика расширения Уолмена и минимальный аналог его для общего случая T -пространств, Вестн. МГУ, сер. матем., № 2 (I97I), 34-4I.

28. Зайцев В.И. К теории тихоновских пространств, Вестн. МГУ, сер. матем., № 3 (I967), 48-57.

29. Зизович (Žižović M.R.) Neke osobine bitopoloških prostora, Мат. весник II(26), (I974), 233-237.

30. Канфелл (Canfell M.J.) Semi-algebras and rings of continuous functions, Thesis, University of Edinburgh, 1968.

3I. Келли Дж. Л. Общая топология, "Наука", I968.

32. Келли (Kelly J.C.) Bitopological spaces, Proc. London Math. Soc. 13. No.3 (1963), 71-89.

33. Ким (Kim Y.W.) Pairwise compactness, Public. Math., Debrecen 15, (1968), 87-90.

34. Левин (Levine N.) Strong continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly 67, No.3, (1960), 269.

35. Левин (Levine N.) A decomposition of continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly 68, No.1, (1961), 44-46.

36. Лейн (Lane E.P.) Bitopological spaces and quasi-uniform spaces, Proc. London Math. Soc. 17, No.3 (1967), 241-256.

37. Лелич (Јелић М.) Неке димензионе функциjе у битополошким просторима, Мат. весник, II(26), (I974), 38-42.

38. Лелич (Јелић М.) Некоторые свойства размерностных функций в битопологических пространствах, Math. Balkanica 4.54, (1974), 309-311.

39. Лукеш (Lukeš J.) The Lusin-Menchoff property of fine topologies, Comment. math. Univ. carol. 18, No.3 (1977), 515-530.

40. Маккаллион (McCallion T.) Compactifications of ordered topological spaces, Proc.Cambridge Philos.Soc.71,(1972),463-473.

4I. Маккартан (McCartan S.D.) Separation axioms for topological ordered spaces, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64, (1968) 965-973.

42. Махесшвари, Прасад (Maheshwari S.N., Prasad R.) Some new separation axioms in bitopological spaces, Мат. весник, I2(27),(I975), I59-I62.

43. Монич А.Л. Об одном обобщении паракомпактности, Актуальные вопросы математической логики и теории множеств, Сборник трудов кафедры мат. анализа МГПИ им. В.И.Ленина, 258-275.

44. Монич А.Л. Счетная паракомпактность битопологических пространств, Математические исследования, сборник Карагандинского Гос. Университета, вып. 2, Караганда, I975, I03-I05.

45. Монич А.Л. Обобщение леммы Веденисова на битопологические пространства, Математические исследования, сборник Карагандинского Гос. Университета, вып. 2, Караганда, I975, I06-I09.

46. Монич А.Л. О двух обобщениях p-паракомпактных пространств, Математические науки, вып. 3, Тематический сборник трудов преподавателей и аспирантов Министерства просвещения Каз. ССР, Алма-Ата, I976, 49-59.

47. Мурдешвар, **Наимпали** (Murdeshwar M.G.,Naimpally S.A.) Quasi-uniform topological spaces, Noordhoff, Groningen, 1966.

48. Начбин (Nachbin L.) Sur les espaces uniformes ordonnés, Comptes Rendus 226, (1948), 774-775.

49. Начбин (Nachbin L.) Topology and order, Van Nostrand Math. Studies 4, Princeton, New-Jersey, 1965.

50. Пак, Чой (Pahk D.H., Choi B.D.) Note on pairwise compactness, Kyungpook Math. J. 11, (1971), 45-52.

5I. Патти (Patty C.W.) Bitopological spaces, Duke Math. J. 34, (1967), 387-392.

52. Пристли (Pristley H.A.) Ordered topological spaces and the represintation of distributive lattices, Proc. London Math. Soc. 24, No.3 (1972), 503-530.

53. Пэрвин (Pervin W.J.) Quasi-proximities for topological spaces, Math. Annalen 150, (1963), 325-326.

54. Пэрвин (Pervin W.J.) Connectedness in bitopological spaces, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A70, Indag. Math. 29, (1967), 369-372.

55. Рагхаван (Raghavan T.G.) Quasi-ordered bitopological spaces, The Math. Student 16, No.3 (1973), 276-284.

56. Рагхаван, Рейли (Raghavan T. G., Reilly I.L.) Metrisability of quasi-metric spaces, J.London Math. Soc. 2(15), (1977), 169-172.

57. Раушер (Rauszer C.) Semi-boolean algebras and their applications to intuitionistic logic with dual operations, Fundam. Math. 83, (1974), 219-249.

58. Рейлли (Reilly I.L.) Quasi-gauges, quasi-uniformities and bitopological spaces, Unpublished Ph.D.thesis, Urbana-Champaign, Illinois, Library, University of Illinois,1970.

59. Рейлли (Reilly I.L.) Bitopological local compactness, Nederl. Akad.Wetensch. Proc.Ser. A75, Indag.Math.34, (1972), 407-411.

60. Рейлли (Reilly I.L.) Zero dimensional bitopological spaces, Nederl.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A76, Indag.Math.35, (1973), 127-131.

6I. Рибейро (Ribeiro H.) Sur les espaces à métrique faible, Portug. Math. 4, (1943), 21-40 et 65-68.

62. Ричардсон (Richardson G.D.) R_1, pairwise compact, and pairwise complete spaces, Can.Math. Bull. 15, (1972), 109-119.

63. Сварт (Swart J.) Total disconnectedness in bitopological spaces and product bitopological spaces, Nederl. Akad.Wetensch. Proc. Ser. A74, Indag. Math. 33, (1971), 135-145.

64. Сварт (Swart J.) An axiomatic topological characterization of Hilbert spaces, Lincei-Rend.Sc.fis. mat. e nat. 52, (1972), 166-174.

65. Сейгров (Saegrove M.J.) Pairwise complete regularity and compactification in bitopological spaces, J.London Math. Soc. 2(7), (1973), 286-290.

66. Сингал (Singal A.R.) Remarques on separation axioms, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra. Proceedings of the Kanpur Topological Conference, 1968, Prague, 1971, 265-296.

67. Сингал ,Ариа (Singal M.K., Arya S.P.) On almost normal and almost completely regular spaces, Glasnik Mat. 5(25), (1970), 141-152.

68. Сингал, Ариа (Singal A.R., Arya S.P.) On pairwise almost regular spaces, Glasnik Mat. 6, (1971), 335-343.

69. Сингал, Матхур (Singal M.K., Mathur A.) On nearly compact spaces, Boll. U.M.I. (4) 2, (1969), 702-710.

70. Сингал М.К., Сингал А.Р. (SingalM.K., Singal A.R.) Almost continuous mappings, The Yokohama Math J.16,No.2(1968),163-173.

7I. Сингал М.К., Сингал А.Р. (Singal M.K., Singal A.R.) Some more separation axioms in bitopological spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 84, (1970), 207-230.

72. Сингал М.К., Сингал А.Р. (Singal M.K., Singal A.R.) On some pairwise normality conditions in bitopological spaces, Publ. Math. 21, No.1-2 (1974), 71-81.

73. Смирнов Ю.М. К теории вполне регулярных пространств, Уч. зап. МГУ У, вып. I55, (I955), I37-I54.

74. Тамари (Tamari D.) On a generalization of uniform structures and spaces, Bull.Res.Council.Israel 3,(1954), 417-428.

75. Тампуран (Thampuran D.) Regularity for bitopological spaces, Publ. Math. 20, No.1-2 (1973), 41-44.

76. Флетчер (Fletcher P.) Pairwise uniform spaces, Notices Amer. Math. Soc. 12 (83), No.5 (1965), 612.

77. Флетчер, Хоул и Патти (Fletcher P., Hoyle H.B. and Patty C.W.) The comparison of topologies, Duke Math.J.36, (1969), 325-331.

78. Фомин С.В. Расширения топологических пространств, ДАН СССР 32, № 2 (I94I), II4-II6.

79. Фринк (Frink O.) Compactifications and semi-normal spaces, Amer. J. Math. 86, No.3 (1964), 602-607.

80. Часар (Ćsaszár A.) Double compact bitopological spaces, Proc. International Symposium of Topology and its Applications, Budva, 1972, Beograd, 1971, 71.

8I. Чирич (Ćirić M.D.) Aksiome separacije u bitopološkim prostorima, Мат.вес~~т~~ник II (26) , (I974), I0-2I.

82. Чирич (Ćirić M.D.) Dimension of bitopological spaces, Math. Balkanica 4.22, (1974), 121-127.

83. Чогошвили Г.С. О пространствах сходимости, Матем. сб. 9(5I), № 2 (I94I), 377-382.

84. Штейнер (Steiner E.F.) The relation between quasi-proximities and topological spaces, Math.Annalen 155,(1964), 194-195.

85. Штейнер (Steiner E.F.) Normal families and completely regular spaces, Duke Math. J.33, (1966), 743-746.

СОДЕРЖАНИЕ