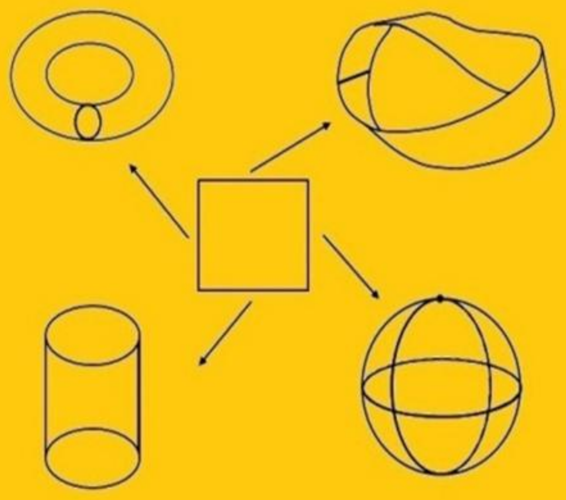
ვლადიმერ ზალაძე

ტოპოლოგია



ბათუმის შოთა რუსთაველის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

წიგნი ეძღვნება ქართული აბსტრაქტული მათემატიკური სკოლის ფუძემდებლის და საზოგადო მოღვაწის აკადემიკოს გიორგი ჭოღოშვილის დაბადების 100 წლისთავს

ვლადიმერ ბალაძე

ტოპოლოგია

ნაწილი პირველი
ზოგადი ტოპოლოგიის საფუძვლები

ბათუმის შოთა რუსთაველის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სახელმძღვანელო მათემატიკაში

ავტორი:

ვლადიმერ ბალაძე
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
მათემატიკის დეპარტამენტი
ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

წიგნში გაშუქებულია ზოგადი ტოპოლოგიის საკითხების ფართო წრე და გადმოცემულია შემდეგი თემები: სიმრავლეთა თეორიის, ალგებრის და კატეგორიათა თეორიის ზოგიერთი ცნებები და დამხმარე ფაქტები, ტოპოლოგიურ სივრცეებთან და უწყვეტ ასახვებთან დაკავშირებული მთავარი განსაზღვრებები და დებულებები, სიმრავლეზე ტოპოლოგიური სტრუქტურების აგების და ოპერაციების შემოტანის მეთოდები, განცალების აქსიომები და ტოპოლოგიურ სივრცეთა მნიშვნელოვანი კლასების-კომპაქტურ, ლოკალურად კომპაქტურ, პარაკომპაქტურ, მეტრიზებად, ბმულ და წრფივად ბმულ სივრცეთა კლასების თვისებები. წიგნში, ასევე საკმაოდ დიდი ყურადღება ეთმობა ტოპოლოგიურ ჯგუფებს, განზომილების ფუნქციებს, სივრცეთა კომპაქტიფიკაციების და სივრცეთა სხვადასხვა კლასის მიმართ უნივერსალური სივრცეების არსებობის ამოცანებს. ლიტერატურის ციტირებულ ნუსხაში აგრეთვე მითითებულია წყაროები, რომლებიც ეხება ტოპოლოგიის როგორც მათემატიკურ, ისე საბუნებისმეტყველო დარგებში გამოყენებებს. გარდა ამისა, ასევე დაფიქსირებულია ზოგიერთი ენციკლოპედიური ხასიათის მონოგრაფია, რომლებიც რეკომენდირებულია ზოგადი ტოპოლოგიის სხვა საკითხების დაუფლებისთვის.

წიგნი განკუთვნილია მათემატიკის და ფიზიკის სპეციალობების ბაკალავრ, მაგისტრანტ და დოქტორანტ სტუდენტთათვის და, საერთოდ, მკითხველთა ფართო წრისათვის, რომელთაც აქვთ ტოპოლოგიის სისტემატურად შესწავლის სურვილი.

რეცენზენტები:

ლეონარდ მძინარიშვილი
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
მათემატიკის დეპარტამენტი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ვაჟა ტარიელაძე
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი
გამოთვლითი მათემატიკის ინსტიტუტი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ამერიკის მათემატიკური საზოგადოების საგნობრივი კლასიფიკაცია (2015)
54A05,54B05,54B10,54B15,54B17,54C05,54D05,54D10,54D15,54D20,54D30,54D35,54D45,54D65,54E35,54F45,54H11

ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა

შესავალი

ტოპოლოგია მათემატიკის, კერძოდ, თანამედროვე გეომეტრიის ერთერთი მნიშვნელოვანი მიმართულებაა. პირველი თვალსაჩინო ტოპოლოგიური იდეები და დებულებები გამოჩნდა ლეონარდ ეილერის, კარლ ფ. გაუსის და ბერნარდ რიმანის შრომებში. მიუხედავად ამისა, ტოპოლოგია, როგორც სამეცნიერო დარგი, სრულყოფილად აღმოცენდა მეცხრამმეტე საუკუნის ბოლოს და მის ფუძემდებლად ითვლება ანრი პუანკარე.

სიტყვა „ტოპოლოგია" წარმოიშვა ბერძნული სიტყვებიდან topos-ზედაპირი, logos-შესწავლა და ნიშნავს ზედაპირების შესწავლას, გამოკვლევას. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ სიტყვის წარმომავლობა-ტოპონომიკა სრულად არ გამოხატავს და არ აღწერს ტოპოლოგიის საგანს და შინაარს.

როგორც ცნობილია, კლასიკური გეომეტრიის ცნებებით და მეთოდებით შესაძლებელია ფიგურათა ისეთი თვისებების აღწერა, რომლებიც არ იცვლება მოძრაობის და პროექციის ტიპის გეომეტრიული გარდაქმნებისას, მაგრამ მათი მეშვეობით შეუძლებელია ფიგურათა ისეთი თვისებების აღწერა, რომლებიც არ იცვლება გაჭიმვების და წერტილების არაგამაიგივებელი გრეხის მსგავსი უწყვეტი დეფორმაციებისას.

მოკლედ რომ ვთქვათ, კლასიკური გეომეტრიისაგან განსხვავებით, ტოპოლოგიის საგანს წარმოადგენს გეომეტრიულ ფიგურათა და სივრცეთა იმ თვისებების აღწერა და შესწავლა, რომლებიც არ იცვლება ფიგურათა და სივრცეთა ურთიერთცალსახა და ურთიერთუწყვეტი ასახვებისას, ე.წ. ტოპოლოგიური გარდაქმნებისას. ფიგურის ან სივრცის იმ თვისებებს, რომლებიც შენარჩუნებულია ტოპოლოგიური გარდაქმნებისას, ეწოდებათ ტოპოლოგიური თვისებები-ტოპოლოგიური ინვარიანტები. ეს თვისებები აღიქმება, როგორც ყველაზე ღრმა გეომეტრიული თვისებები, რადგან ისინი შენარჩუნებადია გეომეტრიულ გარდაქმნებზე უფრო ზოგადი ტოპოლოგიური გარდაქმნებისას.

გარდა გეომეტრიისა, მათემატიკის სხვა დარგების ობიექტებსაც გააჩნიათ მახასიათებლები, რომელთა შესწავლისა და აღწერისათვის აუცილებელია ტოპოლოგიის მეთოდები. ეს ფაქტი კიდევ ერთხელ ხაზს უსვამს მათემატიკისთვის ტოპოლოგიის მნიშვნელობას და ხსნის იმ მზარდი ინტერესის საფუძველს, რომელიც არსებობს სხვადასხვა მათემატიკური დარგის მკვლევართა მხრიდან ტოპოლოგიისადმი.

ტოპოლოგიამ, მეცხრამმეტე საუკუნის მიწურულიდან დღემდე, განვლო განვითარების დიდი და საინტერესო გზა. შეიქმნა და

განვითარდა ტოპოლოგიის ისეთი მნიშვნელოვანი მიმართულებები, როგორიცაა ზოგადი ტოპოლოგია, ალგებრული ტოპოლოგია, გეომეტრიული ტოპოლოგია, დიფერენციალური ტოპოლოგია და სხვა.

ტოპოლოგიის განვითარების თანამედროვე პერიოდისთვის დამახასიათებელია ტოპოლოგიური მეთოდების სისტემატური გამოყენება, როგორც მათემატიკურ (ალგებრა, კატეგორიათა თეორია, დიფერენციალური გეომეტრია, ფუნქციათა თეორია, კომპლექსური ანალიზი, დიფერენციალური განტოლებები, თეორიული მექანიკა, მათემატიკური ფიზიკა, დინამიკური სისტემები), ისე არამათემატიკურ დარგებში (თეორიული ფიზიკა, ველის კვანტური თეორია, ფარდობითობის თეორია, ქიმია, ბიოლოგია, რობოტების თეორია, კომპიუტერული მეცნიერებები).

ამჟამად, ცნობილი უნივერსიტეტების მათემატიკური და არამათემატიკური საგანმანათლებლო პროგრამები უდიდეს როლს ანიჭებს ტოპოლოგიის სწავლებას. ამიტომ ამ საგანმანათლებლო პროგრამების ტოპოლოგიის კურსის და ტოპოლოგიის სპეციალური კურსების სილაბუსების შინაარსის მომცველი სახელმძღვანელოების შექმნა არის უაღრესად მნიშვნელოვანი.

წინამდებარე წიგნი არის ქართულ ენაზე ასეთი სახელმძღვანელოს შექმნის პირველი ცდა. იგი განკუთვნილია მათემატიკური და არამათემატიკური სპეციალობების ბაკალავრ, მაგისტრანტ და დოქტორანტ სტუდენტთათვის და, საერთოდ, მკითხველთა ფართო წრისათვის, რომელთაც აქვთ ტოპოლოგიის სისტემატურად შესწავლის სურვილი.

წიგნი შედგება სამი ნაწილისგან.

I. ზოგადი ტოპოლოგიის საფუძვლები.

II. ალგებრული ტოპოლოგიის საფუძვლები.

III. გეომეტრიული ტოპოლოგია. რეტრაქტების თეორია და შეიპების თეორია.

წიგნი აღმოცენდა ლექციების იმ კურსების საფუძველზე, რომლებსაც ავტორი 1991 წლიდან კითხულობდა ბათუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, ხოლო 1996 წლიდან თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, როცა ქართული ტოპოლოგიური სკოლის ფუძემდებელმა აკადემიკოსმა გიორგი ჭოღოშვილმა დაავალა წაყვანა ტოპოლოგიური კურსისა, რომელსაც იგი კითხულობდა მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე რამდენიმე ათეული წლის განმავლობაში.

წიგნის პირველი ნაწილი ეხება თეორიულ-სიმრავლურ ტოპოლოგიას. ამ ნაწილის პირველ თავში გადმოცემულია სიმრავლეთა

თეორიის და ალგებრის ის ძირითადი ცნებები და ფაქტები, რომლებიც გამოიყენება წიგნის როგორც ამ, ისე შემდეგ ნაწილებში.

პირველი ნაწილის მეორე თავში აღწერილია ზოგადი ტოპოლოგიის ძირითადი ცნებები და დებულებები, მოცემულია სიმრავლეზე ტოპოლოგიური სტრუქტურების აგების სხვადასხვა მეთოდები, განხილულია უწყვეტი ასახვები და დამტკიცებულია მათი რიგი თვისებები. პირველი ნაწილის მესამე თავი ეხება ტოპოლოგიურ სივრცეთა ზოგიერთ მნიშვნელოვან კლასს. აქ გადმოცემულია სხვადასხვა ტიპის განცალების აქსიომის მქონე სივრცეთა კლასები, აღწერილია კომპაქტურ, ლოკალურად კომპაქტურ, პარაკომპაქტურ, მეტრიკულ, ბმულ და წრფივად ბმულ სივრცეთა კლასები და მათი თვისებები.

მეოთხე თავი ეხება ტოპოლოგიურ სივრცეთა კლასიკურ ინვარიანტებს-განზომილების ფუნქციებს. აქ განსაზღვრულია მცირე ინდუქციური, დიდი ინდუქციური და დაფარვითი განზომილებები და მოცემულია მათი ზოგიერთი თვისებები,გარდა ამისა, დამტკიცებულია მოცემული დაფარვითი განზომილებისა და წონის მქონე სივრცეთა კომპაქტიფიკაციების და უნივერსალური სივრცეების არსებობის თეორემები.

პირველი ნაწილის მეხუთე თავში გადმოცემულია ერთმანეთთან თავსებადი ტოპოლოგიური და ალგებრული სტრუქტურების მქონე სივრცეები-ტოპოლოგიური ჯგუფები. აქ, ასევე განხილულია ტოპოლოგიური ჯგუფის უწყვეტი მოქმედების მქონე ტოპოლოგიური სივრცეები და მათთან ბუნებრივად დაკავშირებული ჯგუფები-ე.წ. უწყვეტი ჯგუფები.

წიგნის მეორე ნაწილი ეხება ალგებრულ ტოპოლოგიას. ამ ნაწილში გადმოცემულია ჰომოტოპიის თეორიის ძირითადი ცნებები და ფაქტები, აგებულია ჰომოტოპიის კატეგორია და ჰომოტოპიური ფუნქტორები, აღწერილია ფუნდამენტური ჯგუფების და ჰომოტოპიური ჯგუფების ძირითადი თვისებები, დახასიათებულია ევკლიდური სივრცის წერტილთა გეომეტრიული ქვესიმრავლეები-სიმპლექსები და მათი ოჯახები-კომპლექსები. აქ, გარდა ევკლიდური სივრცის გეომეტრიული კომპლექსებისა, ასევე ზოგადი კომპლექსების, ე.წ. აბსტრაქტული კომპლექსების ტოპოლოგიური თეორიაცაა გადმოცემული. მეორე ნაწილი, აგრეთვე, ეძღვნება კომპლექსების და სივრცეების ჰომოლოგიის და კოჰომოლოგიის ჯგუფების აგებებს და მათი ზოგიერთი თვისების აღწერას.

წიგნის მესამე ნაწილში გადმოცემულია გეომეტრიული ტოპოლოგია, კერძოდ, რეტრაქტების და შეიპების თეორია, რომელიც მოიცავს რეტრაქტების და შეიპების თვალსაზრისით სივრცეთა

კლასიფიკაციებს. აქ მოცემულია რეტრაქტების თეორიის საფუძვლები, აღწერილია აბსოლუტური (მიდამოებრივი) რეტრაქტები და ექსტენზორები, დამტკიცებულია მათი ძირითადი თვისებები, მეტრიკულ სივრცეთა ჩადგმის კურატოვსკი-ვოიდისლავსკის თეორემა, დუგუნჯის გაფართოების თეორემა და ბორსუკის ჰომოტოპიის გავრცელების თეორემა. გარდა ამისა, მოცემულია ტოპოლოგიურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა შეიპური კლასიფიკაციები და შეიპური თეორიის სხვადასხვა ნაირსახეობანის აგებები.

და ბოლოს, მსურს დიდი მადლიერება გამოვხატო ჩემი მასწავლებლების-აკადემიკოს გიორგი ჭოღოშვილის, აკადემიკოს ნოდარ ბერიკაშვილის, აკადემიკოს ხვედრი ინასარიძის, აკადემიის წევრ-კორესპოდენტ დურსუნ ბალაძის, პროფესორ ლაზარე ზამბახიძის და პროფესორ ლეონარდ მძინარიშვილის მიმართ, რომლებმაც თავის დროზე დიდი ზეგავლენა მოახდინეს ჩემი სამეცნიერო ინტერესების სფეროს ჩამოყალიბებაზე, და რომელთაგანაც, ყოველთვის ვგძნობდი მუდმივ მხარდაჭერასა და ყურადღებას.

ასევე მინდა დიდი მადლობა მოვახსენო ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორ, პროფესორ ლეონარდ მძინარიშვილს და ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორ, პროფესორ ვაჟა ტარიელაძეს წიგნის რეცენზირებისთვის და მრავალი სასარგებლო რჩევის მოცემისთვის.

გარდა ამისა, ასევე მსურს დიდი მადლობა ვუთხრა ჩემს მოსწავლეებს ანზორ ბერიძეს, ზვიად გიორგაძეს, ლელა თურმანიძეს, გენადი ივანაძეს, რუსლან ცინარიძეს და მაია ძაძამიას წიგნზე მუშაობისას გაწეული დახმარებისთვის და გამოჩენილი ყურადღებისთვის.

ვლადიმერ ბალაძე

სარჩევი

შესავალი V

თავი I. ძირითადი და დამხმარე ცნებები 11

1.1. სიმრავლეთა ალგებრის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი…………….. 11
1.2. ჯგუფთა თეორიის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი…………………... 31
1.3. კატეგორიათა თეორიის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი………….…. 41

თავი II. ტოპოლოგიურ სივრცეთა კატეგორია 53

2.1.ტოპოლოგიური სივრცეები, ღია სიმრავლე, მიდამო, შიგა წერტილი, ბაზისი, მიდამოთა სისტემა, ბირთვი და მათი თვისებები………….. 53
2.2.ჩაკეტილი სიმრავლე, სიმრავლის ჩაკეტვა, შეხების, საზღვრის და დაგროვების წერტილები, სივრცის სიმკვრივე………………………... 63
2.3. უწყვეტი ასახვები…………………………………………………….. 74
2.4. სიმრავლეზე ტოპოლოგიის შემოტანის მეთოდები……………… 91

თავი III. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ზოგიერთი კლასები 115

3.1. განცალების აქსიომები……………………………………………….. 115
3.2. ტოპოლოგიური ოპერაციები და განცალების აქსიომები……….. 134
3.3. კომპაქტური, ლოკალურად კომპაქტური და პარაკომპაქტური სივრცეები, კომპაქტური გაფართოებები……………………………….. 145
I.კომპაქტური სივრცეები……………………………………………... 145
II. ლოკალურად კომპაქტური სივრცეები………………………….. 160
III. პარაკომპაქტური სივრცეები……………………………………... 165
IV. ტოპოლოგიურ სივრცეთა კომპაქტიფიკაციები………………... 167
3.4. მეტრიკული და მეტრიზებადი სივრცეები………………………… 176
3.5. ბმული და წრფივად ბმული სივრცეები…………………………… 196
I.ბმული სივრცეები……………………………………………………. 196
II.წრფივად ბმული სივრცეები……………………………………….. 202

თავი IV. ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილების თეორიის ელემენტები 211

4.1. ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილების ფუნქციები…………... 211
4.2. ტოპოლოგიურ სივრცეთა კომპაქტიფიკაციების განზომილებები 219
4.3. თვლადბაზისიან სივრცეთა განზომილებების თვისებები……… 233

თავი V. უწყვეტ ჯგუფთა თეორიის ელემენტები 241

5.1. ტოპოლოგიური ჯგუფები…………………………………………… 241
5.2. უწყვეტ გარდაქმნათა ჯგუფები…………………………………….. 257

ლიტერატურა……………………………………………………… 267

სიმბოლოების ინდექსი…………………………………………… 269

ინდექსი…………………………………………………………... 277

თავი I . ძირითადი და დამხმარე ცნებები

1.1. სიმრავლეთა ალგებრის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი

სიმრავლის ცნება არის მათემატიკის ერთ-ერთი საწყისი ცნება. ნებისმიერი სიმრავლე შედგება ელემენტებისაგან.

ვთქვათ X არის სიმრავლე. ჩანაწერი $x \in X$ აღნიშნავს, რომ x არის X სიმრავლის ელემენტი, ხოლო ჩანაწერი $x \notin X$ აღნიშნავს, რომ x არ არის X სიმრავლის ელემენტი. A სიმრავლეს ვუწოდებთ X სიმრავლის ქვესიმრავლეს და ვწერთ $A \subset X$, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის X სიმრავლეს.

X და Y სიმრავლეებს ვუწოდებთ ტოლს და ვწერთ $X = Y$, თუ ისინი შედგება ერთი და იგივე ელემენტებისგან:

$$X = Y \Leftrightarrow (X \subset Y) \wedge (Y \subset X).$$

ამრიგად, რომ ვაჩვენოთ ორი X და Y სიმრავლის ტოლობა, ამისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ, X სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის Y სიმრავლეს და პირიქით, Y სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის X სიმრავლეს.

სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს არც ერთ ელემენტს, ეწოდება ცარიელი სიმრავლე და აღინიშნება სიმბოლოთი $\varnothing$.

შემოვიღოთ ზოგიერთი სტანდარტული სიმრავლის აღნიშვნები:

$\mathbb{N}$ -არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$,

$\mathbb{N}^+$ -დადებით მთელ რიცხვთა, ანუ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{N}^+ = \{1,2,3,\ldots\}$,

$\mathbb{Z}$ -მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$,

$\mathbb{Q}$ -რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^+\}$,

$\Im$ -ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{R}^+$ -დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე,

$\mathbb{R}$ -ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$,

$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ -ჩაკეტილი სეგმენტი,

$I = [0,1]$ -ჩაკეტილი სეგმენტი.

$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ -ღია ინტერვალი,

$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$ -მარჯვნიდან ღია სეგმენტი,

$(a,b] = \{x \mid a \le x < b\}$ -მარცხნიდან ღია სეგმენტი,

$(a,+\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$ -უსასრულო მარცხნიდან ღია ინტერვალი,

$(-\infty,a) = \{x \mid -\infty < x < a\}$ -უსასრულო მარჯვნიდან ღია ინტერვალი,

$[a,+\infty) = \{x \mid a \le x < +\infty\}$ -უსასრულო მარცხნიდან ჩაკეტილი სეგმენტი,

$(-\infty, a] = \{x \mid -\infty < x \le a\}$ -უსასრულო მარჯვნიდან ჩაკეტილი სეგმენტი.

ორი X და Y სიმრავლის გაერთიანება ეწოდება სიმრავლეს

$$X \bigcup Y = \{x \mid (x \in X) \vee (x \in Y)\}.$$

ორი X და Y სიმრავლის თანაკვეთა ეწოდება სიმრავლეს

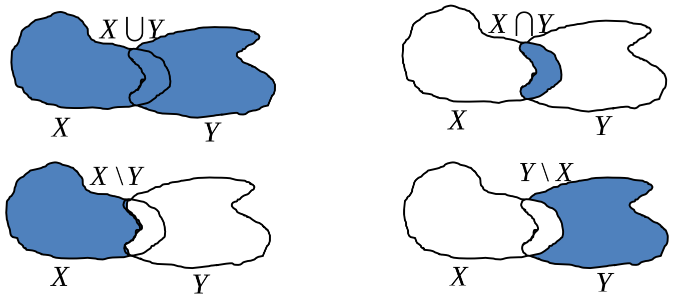
$$X \bigcap Y = \{x \mid (x \in X) \wedge (x \in Y)\}.$$

ორი X და Y სიმრავლის სხვაობა ეწოდება სიმრავლეს

$$X \setminus Y = \{x \mid (x \in X) \wedge (x \notin Y)\}.$$

თუ $Y \subset X$, მაშინ $X \setminus Y$ სხვაობას ეწოდება Y სიმრავლის დამატება X სიმრავლეში.

ვთქვათ X და Y არის სიბრტყის წერტილთა რაიმე ორი სიმრავლე.



პირველი და მეორე ნახატებიდან ჩანს, რომ ერთად აღებული ორივე X და Y სიმრავლე არის მათი გაერთიანება, ხოლო გამუქებული ნაწილი თანაკვეთა. მესამე და მეოთხე ნახატების გამუქებული ნაწილები არის X და Y სიმრავლეების $X \setminus Y$ და $Y \setminus X$ სხვაობები.

ვთქვათ $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$, მაშინ $X \bigcup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X \bigcap Y = \{3, 4\}$, $X \setminus Y = \{1, 2\}$, $Y \setminus X = \{5, 6\}$.

ვთქვათ მოცემულია ნებისმიერი ორი X და Y სიმრავლე. ყველა (x, y) დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, სადაც $x \in X$ და $y \in Y$, ეწოდება X და Y სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი და აღინიშნება სიმბოლოთი $X \times Y$. ამრიგად,

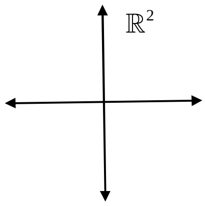
$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

ვთქვათ მოცემულია ნებისმიერი სამი X, Y და Z სიმრავლე. ყველა (x, y, z) დალაგებული სამეულების სიმრავლეს, სადაც $x \in X$, $y \in Y$ და $z \in Z$, ეწოდება X, Y და Z სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი და აღინიშნება სიმბოლოთი $X \times Y \times Z$. ამრიგად,

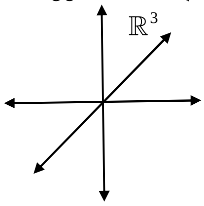
$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

მოვიყვანოთ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის რამდენიმე მაგალითი და მათი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.

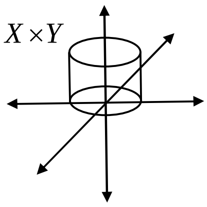
ვთქვათ $X = \mathbb{R}$ და $Y = \mathbb{R}$. დეკარტული ნამრავლი $X \times Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ წარმოადგენს ორ განზომილებიან ევკლიდურ სიბრტყეს. მას აგრეთვე აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



ვთქვათ $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ და $Z = \mathbb{R}$. დეკარტული ნამრავლი $X \times Y \times Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ წარმოადგენს სამ განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეს. მას აგრეთვე აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



ვთქვათ $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, $Y = [0,1]$. დეკარტული ნამრავლი $X \times Y$ წარმოადგენს $\mathbb{R}^3$ ევკლიდური სივრცის ქვესიმრავლეს, ე.წ. ცილინდრს, რომლის ფუძეა ერთეულრადიუსიანი წრე, ხოლო მსახველია $[0,1]$ ჩაკეტილი სეგმენტი.



ცხადია, ინდუქციის წესით განიმარტება სასრული რაოდენობის $X_1, X_2, \ldots X_n$ სიმრავლეების გაერთიანება, თანაკვეთა და დეკარტული ნამრავლი:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{i=1}^{n} X_i = (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_{n-1}) \cup X_n,$$

$$X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_i = (X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_{n-1}) \cap X_n,$$

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n.$$

ვთქვათ $X = I = [0,1]$. ცხადია,

$$X \times X = I \times I = I^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

წარმოადგენს ევკლიდურ სიბრტყეზე აღებულ კვადარატს ერთის ტოლი გვერდით, ხოლო

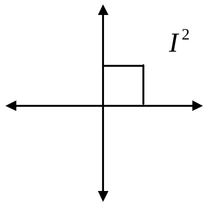
$$X \times X \times X = I \times I \times I = I^3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$$

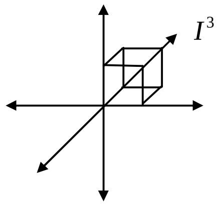
წარმოადგენს $\mathbb{R}^3$ ევკლიდურ სივრცეში ერთის ტოლი წიბოთი აღებულ კუბს.

დეკარტულ ნამრავლს

$$X \times X \times ... \times X = I \times I \times ... \times I = I^n$$

ეწოდება n-განზომილებიანი კუბი.





სიმრავლეს, რომლის ელემენტები არის სიმრავლეები, ეწოდება ოჯახი. მოცემული X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლე, ანუ ოჯახი, აღინიშნება 2^X სიმბოლოთი.

ვთქვათ მოცემულია S სიმრავლე. ყოველ $s \in S$ ელემენტს შევუსაბამოთ X_s სიმრავლე. $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახს ეწოდება ინდექსირებული ოჯახი. ამ შემთხვევაში, $s \in S$ ელემენტს ეწოდება X_s სიმრავლის ინდექსი, ხოლო S სიმრავლეს ინდექსთა სიმრავლე.

$\sim = \{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახს ეწოდება ცენტრირებული, თუ მისი ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ელემენტთა თანაკვეთა არის არაცარიელი სიმრავლე.

ვთქვათ მოცემულია $\{X_s\}_{s\in S}$ ინდექსირებული ოჯახი. ბუნებრივი წესით განიმარტება $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ელემენტთა, ანუ X_s სიმრავლეთა გაერთიანება $\bigcup_{s\in S} X_s$, თანაკვეთა $\bigcap_{s\in S} X_s$ და დეკარტული ნამრვალი $\prod_{s\in S} X_s$. განმარტების თანახმად,

$$\bigcup_{s\in S} X_s = \{x \mid \exists s \in S : x \in X_s\}$$

და

$$\bigcap_{s\in S} X_s = \{x \mid \forall s \in S : x \in X_s\}.$$

ყოველი $s \in S$ ფიქსირებული ინდექსისთვის განვიხილოთ $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის X_s სიმრავლის ფიქსირებული x_s ელემენტი და შევადგინოთ (x_s) ერთობლიობა. $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ელემენტთა, როგორც სიმრავლეთა, დეკარტული ნამრავლი არის სიმრავლე

$$\prod_{s\in S} X_s = \{(x_s) \mid \forall s \in S : x_s \in X_s\}.$$

სიმრავლეთა ინდექსირებული ოჯახის $\prod_{s\in S} X_s$ დეკარტული ნამრავლის ყოველი (x_s) ელემენტი ინდუცირებს f შესაბამისობას S და $\bigcup_{s\in S} X_s$ სიმრავლეებს შორის, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(s) = x_s \in X_s\,,\ s \in S\,.$$

ასევე პირიქით, ყოველი ასეთი f შესაბამისობა გვაძლევს $\prod_{s\in S} X_s$ დეკარტული ნამრავლის ელემენტს $(f(s))$, სადაც $f(s) \in X_s$. ამრიგად, $\prod_{s\in S} X_s$ დეკარტული ნამრავლი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც S სიმრავლიდან $\bigcup_{s\in S} X_s$ სიმრავლეში ისეთი f შესაბამისობების სიმრავლე, რომ $f(s) \in X_s$ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის.

შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

1). $X \subset X$.

2). $X \subset Y \wedge Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$.

3). $X \bigcap Y \subset X \subset X \bigcup Y$.

4). $X \setminus Y \subset X$.

5) . $X \subset Y \Rightarrow X \bigcup Y = Y.$

6). $X \subset Y \Rightarrow X \bigcap Y = X.$

7). $X \bigcup X = X.$

8). $X \bigcup Y = Y \bigcup X.$

9). $X \bigcap Y = Y \bigcap X.$

10). $(X \bigcup Y) \bigcup Z = X \bigcup (Y \bigcup Z).$

11). $(X \bigcap Y) \bigcap Z = X \bigcap (Y \bigcap Z).$

12). $X \bigcap (Y \bigcup Z) = (X \bigcap Y) \bigcup (X \bigcap Z).$

13). $X \bigcup (Y \bigcap Z) = (X \bigcup Y) \bigcap (X \bigcup Z).$

14). $X \setminus (X \setminus Y) = X \bigcap Y.$

15). $X \setminus Y = X \setminus (X \bigcap Y).$

16). $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z) = X \setminus (Y \bigcup Z).$

17). $X \setminus (Y \bigcup Z) = (X \setminus Y) \bigcap (X \setminus Z).$

18). $X \setminus (Y \bigcap Z) = (X \setminus Y) \bigcup (X \setminus Z).$

19). $X \bigcap (Y \setminus Z) = (X \bigcap Y) \setminus (X \bigcap Z) = (X \bigcap Y) \setminus Z.$

ახლა ვაჩვენოთ ერთ-ერთი მათგანის, მაგალითად 19) ტოლობის სამართლიანობა:

$$x \in X \bigcap (Y \setminus Z) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y \setminus Z) \Rightarrow (x \in X) \wedge ((x \in Y) \wedge (x \notin Z)) \Rightarrow$$
$$(x \in X \wedge x \in Y) \wedge (x \in X \wedge x \notin Z) \Rightarrow (x \in X \bigcap Y) \wedge (x \notin X \bigcap Z) \Rightarrow$$
$$x \in (X \bigcap Y) \setminus (X \bigcap Z).$$

$x \in (X \bigcap Y) \setminus (X \bigcap Z) \Rightarrow (x \in X \bigcap Y) \wedge (x \notin X \bigcap Z) \Rightarrow$

$(x \in X \wedge x \in Y) \wedge (x \in X \wedge x \notin Z) \Rightarrow (x \in X \wedge x \in Y) \wedge (x \notin Z) \Rightarrow$

$(x \in X) \wedge (x \in Y) \wedge (x \notin Z) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y \setminus Z) \Rightarrow x \in X \bigcap (Y \setminus Z).$

მარტივად შემოწმდება1)-18) დამოკიდებულებების სამართლიანობა.

თანაკვეთის, გაერთიანებისა და დეკარტული ნამრავლის ოპერაციებისთვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

20). $(X \bigcup Y) \times Z = (X \times Z) \bigcup (Y \times Z).$

21). $X \times (Y \bigcup Z) = (X \times Y) \bigcup (X \times Z).$

22). $(X \bigcap Y) \times Z = (X \times Z) \bigcap (Y \times Z).$

23). $X \times (Y \bigcap Z) = (X \times Y) \bigcap (X \times Z).$

24). $(X \setminus Y) \times Z = (X \times Z) \setminus (Y \times Z).$

დავამტკიცოთ ერთ-ერთის, მაგალითად 24) ტოლობის სამართლიანობა:

$(x,z) \in (X \setminus Y) \times Z \Rightarrow (x \in X \setminus Y) \wedge z \in Z \Rightarrow (x \in X \wedge x \notin Y) \wedge (z \in Z) \Rightarrow$

$(x \in X \wedge z \in Z) \wedge (x \notin Y \wedge z \in Z) \Rightarrow ((x,z) \in X \times Z) \wedge ((x,z) \notin Y \times Z) \Rightarrow$

$(x,z) \in (X \times Z) \setminus (Y \times Z).$

$(x,z) \in (X \times Z) \setminus (Y \times Z) \Rightarrow ((x,z) \in X \times Z) \wedge ((x,z) \notin Y \times Z) \Rightarrow$

$(x \in X \wedge z \in Z) \wedge (x \notin Y \wedge z \in Z) \Rightarrow (x \in X \wedge x \notin Y) \wedge (z \in Z) \Rightarrow$

$(x \in X \setminus Y) \wedge (z \in Z) \Rightarrow (x,z) \in (X \setminus Y) \times Z.$

ასევე მარტივად შემოწმდება 20)-23) ტოლობების სამართლიანობა.

გარდა აქ მოყვანილი ტოლობებისა, სამართლიანია შემდეგი ფორმულები, ე.წ. დე მორგანის ფორმულები.

ვთქვათ $\{X_s\}_{s \in S}$ არის X სიმრავლის X_s, $s \in S$ ქვესიმრავლეთა ოჯახი. მაშინ სრულდება ტოლობები:

25). $X \setminus \bigcup_{s \in S} X_s = \bigcap_{s \in S} (X \setminus X_s).$

26). $X \setminus \bigcap_{s \in S} X_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus X_s).$

ვაჩვენოთ 26) ფორმულის სამართლიანობა:

$\forall x \in X \setminus \bigcap_{s \in S} X_s \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \notin \bigcap_{s \in S} X_s) \Rightarrow (x \in X) \wedge (\exists s_0 \in S : x \notin X_{s_0}) \Rightarrow$

$\exists s_0 \in S : x \in X \setminus X_{s_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{s \in S} (X \setminus X_s).$

$\forall x \in \bigcup_{s \in S} (X \setminus X_s) \Rightarrow \exists s_0 \in S : x \in X \setminus X_{s_0} \Rightarrow (x \in X) \wedge (\exists s_0 \in S : x \notin X_{s_0}) \Rightarrow$

$(x \in X) \wedge (x \notin \bigcap_{s \in S} X_s) \Rightarrow x \in X \setminus \bigcap_{s \in S} X_s.$

ანალოგიურად შემოწმდება 25) ფორმულის სამართლიანობა.

კლასის ცნება არის უფრო ზოგადი, ვიდრე სიმრავლის. კლასებიც შედგება და მოიცემა თავისი ელემენტებისგან. ყოველი სიმრავლე არის კლასი, მაშინ როცა ყოველი კლასი შეიძლება არ იყოს სიმრავლე. კლასი

არის სიმრავლე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თვითონ არის რაიმე კლასის ელემენტი.

ვთქვათ $\sim = \{X_s\}_{s\in S}$ არის X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე ოჯახი. $\sim$ ოჯახს ეწოდება X სიმრავლის დაფარვა, თუ $\bigcup_{s\in S} X_s = X$. იმ შემთხვევაში, როცა S სიმრავლის ყოველი $s' \neq s''$ ინდექსისთვის $X_{s'} \bigcap X_{s''} = \varnothing$, მაშინ $\sim$ დაფარვას ეწოდება X სიმრავლის დაყოფა.

X და Y სიმრავლეების $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის E ქვესიმრავლეს ეწოდება მიმართება X განსაზღვრის არით და Y მნიშვნელობათა არით. თუ $(x, y) \in E,$ მაშინ ვამბობთ, რომ x ელემენტი E მიმართებაშია y ელემენტთან. ზოგჯერ, ნაცვლად ჩანაწერისა $(x, y) \in E$, ვისარგებლებთ აღნიშვნით xEy.

$X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის $f \subset X \times Y$ მიმართებას ეწოდება ასახვა, თუ ყოველი $x \in X$ ელემენტისთვის არსებობს ერთადერთი ისეთი $y \in Y$ ელემენტი, რომ $(x, y) \in f$. ამ y ელემენტს აღვნიშნავთ სიმბოლოთი $y = f(x)$ და ვუწოდებთ x ელემენტის ანასახს. ამრიგად, ასეთი $f \subset X \times Y$ მიმართება ინდუცირებს შესაბამისობას, რომელიც X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეუსაბამებს Y სიმრავლის ცალსახად განსაზღვრულ $y = f(x)$ ელემენტს და პირიქით, ნებისმიერი შესაბამისობა, რომელიც X სიმრავლის ყოველ x ელემენტს შეუსაბამებს Y სიმრავლის ცალსახად განსაზღვრულ $y = f(x)$ ელემენტს, ინდუცირებს მიმართებას

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

თუ X განსაზღვრის არის და Y მნიშვნელობათა არის მქონე f მიმართება არის ასახვა, მაშინ გამოვიყენებთ $f : X \to Y$, ან $X \xrightarrow{\ f\ } Y$ აღნიშვნებს.

$f : X \to Y$ ასახვის გრაფიკი ეწოდება $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ ქვესიმრავლეს.

ვთქვათ მოცემულია ორი $f : X \to Y$ და $g : Z \to W$ ასახვა. ვიტყვით, რომ f ასახვა ტოლია g ასახვის და ჩავწერთ $f = g$, თუ $X = Z,$ $Y = W$ და ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისთვის $f(x) = g(x)$.

X სიმრავლის თავისთავში $1_X : X \to X$ ასახვას, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$1_X(x) = x, \quad x \in X,$$

ეწოდება იგივური ასახვა, ან ერთეულოვანი ასახვა.

ვთქვათ $A \subset X$, $B \subset Y$ და $f : X \to Y$ არის რაიმე ასახვა. სიმრავლეს

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

ეწოდება A სიმრავლის ანასახი, ხოლო სიმრავლეს

$$f^{-1}(B)=\{x\in X \mid f(x)\in B\}$$

B სიმრავლის წინარესახე.

ასახვას $f_{|A}: A\to Y$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f_{|A}(a)=f(a), a\in A,$$

ეწოდება $f: X\to Y$ ასახვის შემოსაზღვრა $A\subset X$ ქვესიმრავლეზე, ხოლო ასახვას $f_B: f^{-1}(B)\to B,$ რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f_B(x)=f(x),\ x\in f^{-1}(B),$$

ეწოდება $f: X\to Y$ ასახვის შემოსაზღვრა $B\subset Y$ ქვესიმრავლეზე.

ცხადია, ყოველი $C\subset A$ და $D\subset Y$ ქვესიმრავლეებისთვის $f_{|A}(C)=f(C)$ და $f^{-1}{}_{|A}(D)=f^{-1}(D)\bigcap A.$ ასევე, $f_B(C)=f(C)$ ყოველი $C\subset f^{-1}(B)$ ქვესიმრავლისთვის და $f^{-1}{}_B(D)=f^{-1}(D)$ ყოველი $D\subset B$ ქვესიმრავლისთვის.

$f: X\to Y$ ასახვას ეწოდება ინექციური, ან ინექცია, თუ ყოველი $x_1\neq x_2$ ელემენტისთვის $f(x_1)\neq f(x_2)$.

$f: X\to Y$ ასახვას ეწოდება სურექციური, ან სურექცია, თუ ყოველი $y\in Y$ ელემენტისთვის არსებობს ისეთი $x\in X$ ელემეტი, რომ $f(x)=y.$

$f: X\to Y$ ასახვას ეწოდება ბიექციური, ან ბიექცია, თუ ის არის როგორც სურექციური, ისე ინექციური.

$f: X\to Y$ ასახვა ბიექციურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სიმრავლის განსხვავებულ ელემენტებს შეესაბამება Y სიმრავლის განსხვავებული ელემენტები და Y სიმრავლის ყოველი ელემენტის წინარესახე არაცარიელი სიმრავლეა. ასევე, ასახვა არის ბიექციური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Y სიმრავლის ყოველი ელემენტის წინარესახე შეიცავს X სიმრავლის ერთ და მხოლოდ ერთ ელემენტს.

მონიშნულწერტილიანი სიმრავლე ეწოდება (X,x_0) წყვილს, სადაც x_0 არის X სიმრავლის რაიმე ელემენტი. (X,x_0) და (Y,y_0) მონიშნულწერტილიან სიმრავლეებს შორის ასახვა ეწოდება ისეთ $f: X\to Y$ ასახვას, რომლისთვისაც $f(x_0)=y_0$. ცხადია, (X,x_0) მონიშნულწერტილიანი სივრცის თავის თავში იგივური ასახვა მოიცემა $1_X: X\to X$ იგივური ასახვით, რადგან $1_X(x_0)=x_0$.

ორი $f: X\to Y$ და $g: Y\to Z$ ასახვის კომპოზიცია ეწოდება $g\circ f: X\to Z$ ასახვას, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$(g\circ f)(x)=g(f(x)), x\in X.$$

ცხადია, მონიშნულწერტილიან სიმრავლეებს შორის ასახვების კომპოზიცია კვლავ არის მონიშნულწერტილიან სიმრავლეებს შორის ასახვა.

X სიმრავლიდან Y სიმრავლეში ასახვების სიმრავლე აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $Map(X,Y)$. ნებისმიერი სამი X, Y და Z სიმრავლის დალაგებული სამეულისთვის განიმარტება ასახვა

$$Map(X,Y)\times Map(Y,Z)\to Map(X,Z),$$

რომელიც ყოველ დალაგებულ (f,g) წყვილს, სადაც $f\in Map(X,Y)$ და $g\in Map(Y,Z)$, შეუსაბამებს $g\circ f: X\to Z$ ასახვას.

ნებისმიერი სამი $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ და $h: Z\to W$ ასახვისთვის სრულდება ტოლობა

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f.$$

ამრიგად, ასახვები აკმაყოფილებენ ასოციაციურობის პირობას.

ცხადია, ნებისმიერი $f: X\to Y$ ასახვისთვის სრულდება ტოლობა

$$f\circ 1_X = f = 1_Y\circ f.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ასახვები აკმაყოფილებს ერთეულის არსებობის პირობას.

ვთქვათ $f: X\to Y$ არის ასახვა, $A_1, A_2\subset X$ და $B_1, B_2\subset Y$. ცხადია, თუ $A_1\subset A_2$ და $B_1\subset B_2$, მაშინ $f(A_1)\subset f(A_2)$ და $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$.

ვთქვათ მოცემულია $f: X\to Y$ ასახვა, X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახი და Y სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\{Y_t\}_{t\in T}$ ოჯახი. სამართლიანია შემდეგი ჩართვები და ტოლობები:

27). $f^{-1}(f(X_s))\supset X_s$.

28). $f(f^{-1}(Y_t))=Y_t\cap f(X)\subset Y_t$.

29). $f^{-1}(Y\setminus Y_t)=X\setminus f^{-1}(Y_t)$.

30). $f(\bigcap\limits_{s\in S}X_s)\subset\bigcap\limits_{s\in S}f(X_s)$.

31). $f(\bigcup\limits_{s\in S}X_s)=\bigcup\limits_{s\in S}f(X_s)$.

32). $f^{-1}(\bigcap\limits_{t\in T}Y_t)=\bigcap\limits_{t\in T}f^{-1}(Y_t)$.

33). $f^{-1}(\bigcup\limits_{t\in T}Y_t)=\bigcup\limits_{t\in T}f^{-1}(Y_t)$.

ვაჩვენოთ 33) ტოლობის სამართლიანობა:

$$\forall x\in f^{-1}(\bigcup_{t\in T}Y_t)\Rightarrow f(x)\in\bigcup_{t\in T}Y_t\Rightarrow\exists t_0\in T: f(x)\in Y_{t_0}\Rightarrow$$
$$\exists t_0\in T: x\in f^{-1}(Y_{t_0})\Rightarrow x\in\bigcup_{t\in T}f^{-1}(Y_t).$$
$$\forall x\in\bigcup_{t\in T}f^{-1}(Y_t)\Rightarrow\exists t_0\in T: x\in f^{-1}(Y_{t_0})\Rightarrow\exists t_\circ\in T: f(x)\in Y_{t_0}\Rightarrow$$
$$f(x)\in\bigcup_{t\in T}Y_t\Rightarrow x\in f^{-1}(\bigcup_{t\in T}Y_t).$$

მარტივად მოწმდება, რომ 27)-32) ფორმულების სამართლიანია.

მოვიყვანოთ სხვადასხვა სახის ასახვათა მაგალითები.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=x^2,\ \ x\in\mathbb{R},$$

არც ინექციურია და არც სურექციული.

$f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=x^2,\ \ x\in\mathbb{R},$$

არ არის ინექციური, მაგრამ არის სურექციული.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=\cos x\ ,\ x\in\mathbb{R},$$

არც ინექციურია და არც სურექციული.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=2^x,\ \ x\in\mathbb{R},$$

არის ინექციური, მაგრამ არაა სურექციული.

$f:[0,®]\to[-1,1]$ ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=\cos x\ \ ,\ \ x\in[0,®],$$

არის ბიექციური.

$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x)=\log_2 x\ \ ,\ \ x\in\mathbb{R}_+,$$

არის ბიექციური.

$X\times X$ დეკარტული ნამრავლის $E\subset X\times X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება მიმართება X სიმრავლეზე. X სიმრავლეზე განსაზღვრულ E მიმართებას ეწოდება ექვივალენტობის მიმართება, თუ ის აკმაყოფილებს პირობებს:

E1).ნებისმიერი $x\in X$ ელემენტისთვის xEx.

E2).თუ ნებისმიერი $x,y\in X$ ელემენტისთვის xEy, მაშინ yEx.

E3).თუ ნებისმიერი $x,y,z\in X$ ელემენტისთვის xEy და yEz, მაშინ xEz.

ყოველი $x\in X$ ელემენტისთვის განვიხილოთ X სიმრავლის ქვესიმრავლე

$$[x]=\{y\in X\mid xEy\}.$$

$[x]$ ქვესიმრავლეს ეწოდება $x\in X$ ელემენტის ექვივალენტობის კლასი. ყველა ექვივალენტობის კლასების სიმრავლე აღვნიშნოთ სიმბოლოთი

$$X/E=\{[x]\mid x\in X\}.$$

X/E სიმრავლეს ეწოდება ფაქტორ-სიმრავლე. ცხადია, X/E არის X სიმრავლის დაყოფა. ვთქვათ $[x']\neq[x'']$, ვაჩვენოთ, რომ ამ კლასებს არ აქვთ საერთო ელემენტი. დავუშვათ, საწინააღმდეგო. ვთქვათ $x\in[x']$ და $x\in[x'']$. ცხადია, $x'Ex$ და xEx'' . E3) პირობის თანახმად $x'Ex''$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $[x']$ კლასის ნებისმიერი ელემენტი

ეკუთვნის $[x'']$ კლასს. ვთქვათ $y \in [x']$, მაშინ გვაქვს yEx'. რადგან $x'Ex''$, ამიტომ yEx''. ე.ი. $y \in [x'']$. ანალოგიურად დამტკიცდება, თუ $y \in [x'']$, მაშინ $y \in [x']$. ამრიგად $[x'] = [x'']$, რაც არ შეიძლება.

X სიმრავლის ყოველი $\sim = \{X_s\}_{s\in S}$ დაყოფა X სიმრავლეზე განსაზღვრავს E მიმართებას:

xEx' მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $s \in S$ ინდექსი, რომ $x, x' \in X_s$. მართლაც, ასე განმარტებული E მიმართება აკმაყოფილებს E1), E2) და E3) პირობებს.

X სიმრავლეზე მოცემული E მიმართება ინდუცირებს $q : X \to X/E$ ასახვას, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$q(x) = [x] \ , \ x \in X .$$

განმარტებულ q ასახვას ეწოდება ფაქტორ-ასახვა.

ვთქვათ $I = [0,1]$ სეგმენტზე მოცემულია E მიმართება:

$0E1$ და ნებისმიერი $t \in I$ რიცხვისთვის tEt. ცხადია, რომ $[0] = [1] = \{0,1\}$. ყოველი $t \neq 0,1$ რიცხვისთვის $[t] = \{t\}$. ფაქტორ-ასახვა $q : I \to I/E$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც ასახვა, რომელიც ერთმანეთთან აიგივებს $[0,1]$ ჩაკეტილი სეგმენტის ბოლოებს.

ვთქვათ მოცემულია ასახვები $f_s : X_s \to Y_s$, $s \in S$. ასახვათა $\{f_s\}_{s\in S}$ ოჯახის დეკარტული ნამრავლი $\prod\limits_{s\in S} f_s : \prod\limits_{s\in S} X_s \to \prod\limits_{s\in S} Y_s$ არის ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$(\prod_{s\in S} f_s)((x_s)) = (f_s(x_s)), (x_s) \in \prod_{s\in S} X_s .$$

ნებისმიერი $A_s \subset X_s$ და $B_s \subset Y_s$ ქვესიმრავლისათვის სამართლიანია ტოლობები:

34). $(\prod\limits_{s\in S} f_s)(\prod\limits_{s\in S} A_s) = \prod\limits_{s\in S} f_s(A_s).$

35). $(\prod\limits_{s\in S} f_s)^{-1}(\prod\limits_{s\in S} B_s) = \prod\limits_{s\in S} f_s^{-1}(B_s).$

ვაჩვენოთ (35) ფორმულის სამართლიანობა.

$$\forall (x_s) \in (\prod_{s\in S} f_s)^{-1}(\prod_{s\in S} B_s) \Rightarrow (\prod_{s\in S} f_s)((x_s)) \in \prod_{s\in S} B_s \Rightarrow (f_s(x_s)) \in \prod_{s\in S} B_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_s(x_s) \in B_s, \forall s \in S \Rightarrow x_s \in f_s^{-1}(B_s), \forall s \in S \Rightarrow (x_s) \in \prod_{s\in S} f_s^{-1}(B_s).$$

ამრიგად, $(\prod\limits_{s\in S} f_s)^{-1}(\prod\limits_{s\in S} B_s) \subset \prod\limits_{s\in S} f_s^{-1}(B_s).$

$$\forall (x_s) \in \prod_{s\in S} f_s^{-1}(B_s) \Rightarrow x_s \in f_s^{-1}(B_s), \forall s \in S \Rightarrow f_s(x_s) \in B_s, \forall s \in S \Rightarrow$$

$$(f_s(x_s)) \in \prod_{s\in S} B_s \Rightarrow (\prod_{s\in S} f_s)((x_s)) \in \prod_{s\in S} B_s \Rightarrow (x_s) \in (\prod_{s\in S} f_s)^{-1}(\prod_{s\in S} B_s).$$

ამრიგად, $\prod\limits_{s\in S} f_s^{-1}(B_s) \subset (\prod\limits_{s\in S} f_s)^{-1}(\prod\limits_{s\in S} B_s).$

ასევე, ადვილი შესამოწმებელია (34) ფორმულის სამართლიანობა.

ვთქვათ მოცემულია $f_s : X \to Y_s$, $s \in S$ ასახვები. $\underset{s\in S}{\Delta} f_s : X \to \prod_{s\in S} Y_s$ ასახვას, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$(\underset{s\in S}{\Delta} f_s)(x) = (f_s(x)),\ x \in X,$$

ეწოდება f_s, $s \in S$ ასახვების დიაგონალური ნამრავლი.

ვაჩვენოთ, რომ $(\underset{s\in S}{\Delta} f_s)^{-1}(\prod_{s\in S} A_s) = \bigcap_{s\in S} f_s^{-1}(A_s),\ A_s \subset Y_s, s \in S.$

$\forall x \in \bigcap_{s\in S} f_s^{-1}(A_s) \Rightarrow \forall s \in S : x \in f_s^{-1}(A_s) \Rightarrow \forall s \in S : f_s(x) \in A_s \Rightarrow$

$\Rightarrow (f_s(x)) \in \prod_{s\in S} A_s \Rightarrow (\underset{s\in S}{\Delta} f_s)(x) \in \prod_{s\in S} A_s \Rightarrow x \in (\underset{s\in S}{\Delta} f_s)^{-1} \prod_{s\in S} A_s.$

$\forall x \in (\underset{s\in S}{\Delta} f_s)^{-1} \prod_{s\in S} A_s \Rightarrow (\underset{s\in S}{\Delta} f_s)(x) \in \prod_{s\in S} A_s \Rightarrow (f_s(x)) \in \prod_{s\in S} A_s \Rightarrow$

$\forall s \in S : f_s(x) \in A_s \Rightarrow \forall s \in S : x \in f_s^{-1}(A_s) \Rightarrow x \in \bigcap_{s\in S} f_s^{-1}(A_s).$

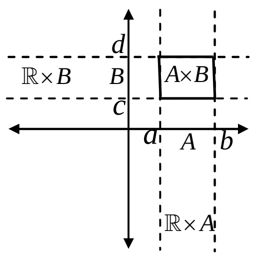
$p_s : \prod_{s\in S} X_s \to X_s$ ასახვას, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$p_s((x_s)) = x_s,\ \ (x_s) \in \prod_{s\in S} X_s,$$

ეწოდება პროექცია.

ვთქვათ $p_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ არის პროექცია, რომელიც მოიცემა ფორმულით $p_1((x_1, x_2)) = x_1$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. ცხადია, $p_1^{-1}(A) = A\times\mathbb{R}$ ყოველი $A \subset \mathbb{R}$ სიმრავლისთვის.

ასევე $p_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ პროექცია, რომელიც მოიცემა ფორმულით $p_2((x_1, x_2)) = x_2$, ყოველი $B \subset \mathbb{R}$ ქვესიმრავლისთვის აკმაყოფილებს პირობას $p_2^{-1}(B) = \mathbb{R}\times B$.



შევნიშნოთ, რომ $p_1^{-1}(A) \cap p_2^{-1}(B) = A\times B.$

ვთქვათ $A_s \subset X_s$, $s \in S.$ ცხადია, $p_{s_0}^{-1}(A_{s_0}) = \prod_{s\in S} W_s$, სადაც $W_s = X_s$ ნებისმიერი $s \neq s_0$ ინდექსისთვის და $W_{s_0} = A_{s_0}$.

ცხადია, $\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(A_{s_i}) = \prod_{s\in S} W_s$, სადაც $W_{s_i} = A_{s_i}$, როცა $i = 1, 2, \ldots, n$ და $W_s = X_s$, როცა $s \neq s_1, s_2, \ldots, s_n$.

ვთქვათ $\sim = \{X_s\}_{s\in S}$ არის X სიმრავლის დაფარვა, ხოლო $\{f_s\}_{s\in S}$ არის X_s, $s \in S$ სიმრავლეებიდან Y სიმრავლეში ასახვების ოჯახი.

ვიტყვით, რომ $\{f_s\}_{s\in S}$ არის ასახვათა თავსებადი ოჯახი, თუ ნებისმიერი $x\in X_s\bigcap X_{s'}$, $s,s'\in S$ ელემენტისთვის $f_s(x)=f_{s'}(x)$. ბუნებრივი წესით განიმარტება ასახვა $\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} f_s : X\to Y$. განმარტების თანახმად,

$$(\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} f_s)(x)=f_s(x)\,,\ x\in X_s\,.$$

$\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} f_s$ ასახვას ეწოდება $\{f_s\}_{s\in S}$ ასახვათა ოჯახის კომბინირებული ჯამი.

ვთქვათ $E=<$ არის მიმართება X სიმრავლეზე, ანუ $E\subset X\times X$. $<$ მიმართებას ეწოდება წრფივად დალაგების მიმართება X სიმრავლეზე, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

LO1).თუ ნებისმიერი $x,y,z\in X$ ელემენტისთვის $x<y$ და $y<z$, მაშინ $x<z$.

LO2).თუ $x,y\in X$ ელემენტებისთვის $x<y$, მაშინ არ სრულდება $y<x$ მიმართება.

LO3).თუ $x,y\in X$ ელემენტებისთვის $x\neq y$, მაშინ $x<y$ ან $y<x$.

X სიმრავლეს, რომელზეც განმარტებულია $<$ წრფივი დალაგების მიმართება, ეწოდება წრფივად დალაგებული სიმრავლე.

მაგალითად, $\mathbb{R}$ სიმრავლე არის წრფივად დალაგებული სიმრავლე. წრფივად დალაგებული სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლე არის წრფივად დალაგებული.

წრფივად დალაგებული X სიმრავლის $a\in X$ ელემენტს ეწოდება X სიმრავლის უმცირესი (უდიდესი) ელემენტი, თუ ყოველი $x\in X\setminus\{a\}$ ელემენტისთვის $a<x$ $(a>x)$.

წრფივად დალაგებულ სიმრავლეს ეწოდება სავსებით დალაგებული, თუ მის ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეს აქვს უმცირესი ელემენტი.

ვთქვათ X სიმრავლეზე არის მოცემული $E=\leq$ მიმართება. $\leq$ მიმართებას ეწოდება დალაგების მიმართება, თუ ის აკმაყოფილებს პირობებს:

OR1).თუ ნებისმიერი $x,y,z\in X$ ელემენტისთვის $x\leq y$ და $y\leq z$, მაშინ $x\leq z$.

OR2).ნებისმიერი $x\in X$ ელემენტისთვის $x\leq x$.

OR3).თუ ნებისმიერი $x,y\in X$ ელემენტისთვის $x\leq y$ და $y\leq x$, მაშინ $x=y$.

X სიმრავლეს, რომელზეც მოცემულია $\leq$ მიმართება, ეწოდება დალაგებული სიმრავლე.

X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეზე განიმარტება დალაგების მიმართება:

$$A \le B \Leftrightarrow A \subseteq B, \quad A, B \subset X .$$

X სიმრავლეზე მოცემული ყოველი წრფივად დალაგების მიმართება X სიმრავლეზე გვაძლევს დალაგების მიმართებას $\le$:

$$x \le y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y) .$$

ამრიგად, ყოველი წრფივად დალაგებული სიმრავლე შეიძლება განხილული იქნას როგორც დალაგებული სიმრავლე.

თუ X დალაგებული სიმრავლის A ქვესიმრავლის ყოველი ორი x და y ელემენტისათვის $x \le y$ ან $y \le x$, მაშინ A ქვესიმრავლე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წრფივად დალაგებული სიმრავლე:

$$x < y \Leftrightarrow (x \le y) \wedge (x \ne y) .$$

X დალაგებული სიმრავლის y ელემენტს ეწოდება X სიმრავლის A ქვესიმრავლის ზუსტი ქვედა (ზედა) საზღვარი, თუ ყოველი $x \in A$ ელემენტისათვის $y \le x$ $(y \ge x)$ და ყოველი $z \in X$ ელემენტისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $z \le x$ $(z \ge x)$ ნებისმიერი $x \in A$ ელემენტისთვის, სრულდება პირობა $y \ge z$ $(y \le z)$.

შევნიშნოთ, თუ არსებობს X დალაგებული სიმრავლის ზუსტი ქვედა (ზედა) საზღვარი, მაშინ ის არის X სიმრავლის უმცირესი (უდიდესი) ელემენტი.

X სიმრავლეზე განსაზღვრულ $E = \le$ მიმართებას ეწოდება წინარედალაგების მიმართება, თუ ის აკმაყოფილებს პირობებს:

PO1). ნებისმიერი $x \in X$ ელემენტისთვის $x \le x$.

PO2). თუ ნებისმიერი $x, y, z \in X$ ელემენტისთვის $x \le y$ და $y \le z$, მაშინ $x \le z$.

X სიმრავლეს $\le$ წინარედალაგების მიმართებით ეწოდება წინარედალაგებული სიმრავლე.

წინარედალაგებულ სიმრავლეს ეწოდება მიმართული, თუ X სიმრავლის ნებისმიერი ორი x და y ელემენტისათვის არსებობს ისეთი z ელემენტი, რომ $x \le z$ და $y \le z$.

X სიმრავლის Y ქვესიმრავლეს ეწოდება კოფინალური, თუ X სიმრავლის ყოველი $x \in X$ ელემენტისთვის არსებობს Y ქვესიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ $x \le y$.

X დალაგებული სიმრავლის $a \in X$ ელემენტს ეწოდება მაქსიმალური (მინიმალური) ელემენტი, თუ $a \le x (a \ge x)$ მიმართებიდან გამომდინარეობს $a = x$.

ვთქვათ მოცემულია X სიმრავლე და $\mathscr{P}$ თვისება, რომელიც აქვს X სიმრავლის ქვესიმრავლეებს. $\mathscr{P}$ თვისებას ეწოდება სასრული ხასიათის თვისება, თუ ცარიელ სიმრავლეს აქვს $\mathscr{P}$ თვისება და X სიმრავლის ყოველ A ქვესიმრავლეს აქვს $\mathscr{P}$ თვისება მაშინ და

მხოლოდ მაშინ, როცა A სიმრავლის ნებისმიერ სასრულ ქვესიმრავლეს აქვს $\mathscr{P}$ თვისება.

ახლა მოვიყვანოთ ამორჩევის აქსიომა და მისი ალტერნატიული სახეები, რომლებიც წარმოადგენენ სიმრავლეთა თეორიის ფუნდამენტური მნიშვნელობის დებულებებს.

თეორემა 1.1.1. (ამორჩევის აქსიომა). *არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი* $\{X_s\}_{s\in S}$ *ოჯახისთვის არსებობს ისეთი* $f: S \to \bigcup_{s\in S} X_s$ *ასახვა, რომ ნებისმიერი* $s \in S$ *ინდექსისთვის* $f(x) \in X_s$ *.*□

თეორემა 1.1.2.(ცერმოლოს თეორემა სავსებით დალაგების შესახებ). *ყოველი* X *სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი მიმართება* $<$, *რომელიც მას აქცევს სავსებით დალაგებულ სიმრავლედ.*□

თეორემა 1.1.3.(ტეიხმიულერი-ტიუკის ლემა). *თუ* $\mathscr{P}$ *არის* X *სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სასრული ხასიათის თვისება, მაშინ* X *სიმრავლის* $\mathscr{P}$ *თვისების მქონე ყოველი* A *ქვესიმრავლისათვის არსებობს მისი მომცველი,* $\mathscr{P}$ *თვისების მქონე ისეთი* B *სიმრავლე, რომელიც არის* X *სიმრავლის* $\mathscr{P}$ *თვისების მქონე სიმრავლეთა ჩართვის* $\subset$ *მიმართებით დალაგებული ოჯახის მაქსიმალური ელემენტი.*□

თეორემა 1.1.4.(კურატოვსკი-ცორნის ლემა). *თუ* X *დალაგებული სიმრავლის ყოველი წრფივად დალაგებული* A *ქვესიმრავლისთვის არსებობს ისეთი* $x_0 \in X$ *ელემენტი, რომ* $x_0 \geq a$ *ნებისმიერი* $a \in A$ *ელემენტისთვის, მაშინ* X *სიმრავლეში არსებობს მაქსიმალური ელემენტი.*□

სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ ის შედგება სასრული რაოდენობის ელემენტებისგან, ან არსებობს ბიექცია ამ სიმრავლისა $\mathbb{N}$ სიმრავლეზე.

X და Y სიმრავლეებს ეწოდებათ ექვივალენტური, ან ტოლსიმძლავრიანი, თუ არსებობს ბიექცია X სიმრავლისა Y სიმრავლეზე. ამ შემთხვევაში დავწერთ $X \sim Y$, ან $|X| = |Y|$.

სასრული სიმრავლეები ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ელემენტების რიცხვი ერთი და იგივეა. აქედან გამომდინარე, სხვადასხვა რაოდენობის ელემენტების შემცველი სასრული სიმრავლეები არ არის ექვივალენტური. ბუნებრივად ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა არაექვივალენტური უსასრულო სიმრავლეები? ამ შეკითხვაზე პასუხს იძლევა კანტორის შემდეგი

თეორემა 1.1.5.(კანტორი). *არაცარიელი* X *სიმრავლე არაა ექვივალენტური მისი ყველა ქვესიმრავლეების* 2^X *სიმრავლის.*

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $f: X \to 2^X$ ასახვისთვის $f(X) \neq 2^X$. ყოველი $x \in X$ ელემენტისთვის განვიხილოთ

X სიმრავლის რაიმე $f(x)$ ქვესიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ x ელემენტი შეიძლება ეკუთვნოდეს ან არ ეკუთვნოდეს $f(x)$ ქვესიმრავლეს. სიმრავლე $Y=\{x\in X \mid x\notin f(x)\}$ არის 2^X სიმრავლის ელემენტი.

ვაჩვენოთ, რომ $Y\notin f(X)$, ანუ ვაჩვენოთ, რომ $f(X)\neq 2^X$. ვთქვათ x არის X სიმრავლის ელემენტი. თუ $x\in f(x)$, მაშინ Y სიმრავლის განმარტების თანახმად $x\notin Y$ და, მაშასადამე, $f(x)\neq Y$. იმ შემთხვევაში, როცა $x\notin f(x)$, მაშინ $x\in Y$. აქედან გამომდინარე მივიღებთ, $f(x)\neq Y$. ამრიგად, ნებისმიერი $x\in X$ ელემენტისთვის $f(x)\neq Y$, ანუ $Y\notin f(X)$. □

კანტორის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს არაექვივალენტური უსასრულო სიმრავლეები.

სიმრავლეებს შორის $E=\sim$ მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება. ცხადია,

E1). $A\sim A$.

E2). თუ $A\sim B$, მაშინ $B\sim A$.

E3). თუ $A\sim B$ და $B\sim C$, მაშინ $A\sim C$.

E1), E2) და E3) დამოკიდებულებანი სრულდება, რადგან იგივური ასახვა, ბიექციური ასახვის შებრუნებული ასახვა და ბიექციური ასახვების კომპოზიცია არის ბიექციური ასახვები. თუ სასრული A და B სიმრავლეები შედგება სხვადასხვა რაოდენობის m და n ელემენტებისგან და $m<n$, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ A შედგება უფრო ნაკლები რაოდენობის ელემენტებისგან, ვიდრე B. ცხადია, ამ შემთხვევაში A ექვივალენტურია B სიმრავლის ყოველი ქვესიმრავლისა, რომელიც შედგება m რაოდენობის ელემენტისგან, მაგრამ A არაა ექვივალენტური B სიმრავლისა.

ახლა, ვთქვათ A არის ყველა ლუწ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო B ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე. ცხადია, A სიმრავლე არის B სიმრავლის საკუთრივი ქვესიმრავლე. ასახვა $f: B\to A$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(n)=2n,\ n\in B,$$

არის ბიექცია B სიმრავლისა A სიმრავლეზე, ე.ი. A სიმრავლე ექვივალენტურია B სიმრავლისა.

უსასრულო სიმრავლეების სადარობა შეიძლება ფორმულირებული იქნეს შემდეგნაირად:

ვიტყვით, რომ A სიმრავლის სიმძლავრე ნაკლებია B სიმრავლის სიმძლავრეზე, თუ არსებობს B სიმრავლეში A სიმრავლის ექვივალენტური B' სიმრავლე, მაგრამ B სიმრავლე არაა

ექვივალენტური A სიმრავლისა. ამ შემთხვევაში ვიყენებთ აღნიშვნას $|A|<|B|$.

თუ მოცემული A და B სიმრავლეები აკმაყოფილებს $|A|<|B|$ და $|A|=|B|$ დამოკიდებულებებიდან რომელიმეს, მაშინ დავწერთ $|A|\le|B|$ და ვიტყვით, რომ A სიმრავლის სიმძლავრე არ აღემატება B სიმრავლის სიმძლავრეს.

ცხადია, თუ $A\subset B$, მაშინ $|A|\le|B|$. გარდა ამისა, თუ $|A|\le|B|$ და $|B|\le|C|$, მაშინ $|A|\le|C|$.

თეორემა 1.1.6. *ყოველი A სიმრავლისთვის* $|A|<|2^A|$.

დამტკიცება. A სიმრავლის ყველა ერთწერტილიანი სიმრავლეების სიმრავლე $B=\{\{a\}\mid a\in A\}$ შედის 2^A სიმრავლეში და იგი ექვივალენტურია A სიმრავლის, რადგან ასახვა $f:A\to B$, მოცემული ფორმულით $f(a)=\{a\}$, $a\in A$, არის ბიექცია. კანტორის თეორემის თანახმად 2^A არაა ექვივალენტური A სიმრავლის. ამრიგად, $|A|<|2^A|$. □

თეორემა 1.1.7. *ყოველი A სიმრავლისთვის* $|A|\le|A\times A|$.

დამტკიცება. თუ $A=\varnothing$, მაშინ ეს ცხადია. ვთქვათ $A\ne\varnothing$ და a_0 არის A სიმრავლის რაიმე ელემენტი. ასახვა $f:A\to A\times A$, რომელიც მოიცემა ფორმულით $f(a)=(a,a_0)$, $a\in A$, არის ინექციური ასახვა, ე.ი. $A\sim A\times\{a_0\}$. □

მოვიყვანოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 1.1.8. **(ბერშტეინ-შრიოდერი).** *ვთქვათ A და B ისეთი სიმრავლეებია, რომ ყოველი მათგანი ექვივალენტურია მეორის ქვესიმრავლის. მაშინ A და B სიმრავლეები არის ექვივალენტური, ანუ, თუ $|A|\le|B|$ და $|B|\le|A|$, მაშინ $|A|=|B|$.* □

აქამდე უტოლობას $|A|\le|B|$, სადაც A და B იყო ნებისმიერი სიმრავლეები, აზრი ჰქონდა მთლიანობაში, მასში შემავალ $|A|$ და $|B|$ ნაწილებს, როგორც ცალკე აღებულებს არ ჰქონდათ დამოუკიდებელი შინაარსი. ახლა მათ მივანიჭოთ დამოუკიდებელი მნიშვნელობა.

ყველა იმ სიმრავლეთა კლასს, რომელიც ექვივალენტურია მოცემული A სიმრავლის, ეწოდება A სიმრავლის სიმძლავრე და აღინიშნება სიმბოლოთი $|A|$. ამრიგად, $|A|=\{B\mid B\sim A\}$.

$|A|$ სიმრავლეს აგრეთვე უწოდებენ კარდინალურ რიცხვს. კარდინალური რიცხვების ოჯახი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი Card.

უსასრულო სიმრავლეების სიმძლავრეებს უწოდებენ უსასრულო კარდინალურ რიცხვებს. კარდინალური რიცხვების ზემოთ მოყვანილი განმარტება იძლევა იმის საფუძველს, რომ სასრული კარდინალური

რიცხვები, ანუ სასრული სიმრავლეების შესაბამისი სიმძლავრეები, გავაიგივეოთ ნატურალურ რიცხვებთან. თუ A სასრული სიმრავლეა, მაშინ არსებობს ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომ A ექვივალენტურია სიმრავლის $\{1,2,...,n\}$, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია $|A|$ გავაიგივეოთ n რიცხვთან. ცხადია, A და B სიმრავლეები ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A|$ და $|B|$ არის ერთი და იგივე კარდინალები. ამრიგად ტოლობა $|A|=|B|$, რომელიც ადრე A და B სიმრავლეების ექვივალენტობა იყო, ახლა შეგვიძლია აღვიქვათ როგორც ორი კარდინალური რიცხვის ტოლობა. კარდინალურ რიცხვებს მომავალში აღვნიშნავთ მცირე ბერძნული ასოებით ²,«,ª და ა.შ.

კარდინალური რიცხვი $|\mathbb{N}^+|$ აღინიშნება სიმბოლოთი $\aleph_0$ (ალეფ-ნული), ხოლო კარდინალური რიცხვი $|\mathbb{R}|$ სიმბოლოთი C (კონტინუმი), თუ $|X|=$ ², მაშინ $|2^X|$ აღინიშნება $2^{²}$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ ², ª $\in \mathrm{Card}$. ვთქვათ $|A|=$ ª და $|B|=$ ². ვიტყვით, რომ ª $<$ ², თუ ª $\neq$ ² და B სიმრავლეში არსებობს A სიმრავლის ექვივალენტური სიმრავლე. ª $\leq$ ² აღნიშნავს, რომ ª $<$ ² ან ª $=$ ². თუ ª $<$ ², მაშინ ვიტყვით, რომ ª კარდინალური რიცხვი ნაკლებია ² კარდინალზე.

ადვილად შემოწმდება შემდეგი ფაქტები. ყოველი ª კარდინალური რიცხვისთვის ª $\leq$ ª. თუ ª $\leq$ ² და ² $\leq$ «, მაშინ ª $\leq$ «. ბერშტეინ-შრიოდერის თეორემიდან კი გამომდინარეობს, რომ თუ ª $\leq$ ² და ² $\leq$ ª, მაშინ ª $=$ ².

ამრიგად, $\leq$ მიმართება არის დალაგების მიმართება Card ოჯახზე.

ყოველი ორი ª და ² კარდინალური რიცხვისთვის ან ª $<$ ², ან ª $=$ ², ან ² $<$ ª. მაშასადამე, $<$ მიმართება არის წრფივი დალაგების მიმართება Card ოჯახზე. გარდა ამისა, კარდინალურ რიცხვთა ყოველ არაცარიელ სიმრავლეში არსებობს უმცირესი ელემენტი. ამიტომ $<$ მიმართება არის სავსებით დალაგების მიმართება Card ოჯახზე.

კარდინალურ რიცხვთა $\{$ª$_s\}_{s\in S}$ სიმრავლის ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვარი ეწოდება ისეთ ª კარდინალურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

i).ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის ª $\geq$ ª$_s$ (ª $\leq$ ª$_s$).

ii).თუ « არის ისეთი კარდინალური რიცხვი, რომ ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის « $\geq$ ª$_s$ (« $\leq$ ª$_s$), მაშინ ª $\leq$ « (ª $\geq$ «).

$\{$ª$_s\}_{s\in S}$ კარდინალურ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ზედა (ქვედა) საზღვარს ავღნიშნავთ სიმბოლოთი ª $= \sup\{$ª$_s \mid s\in S\}$ (ª $= \inf\{$ª$_s \mid s \in S\}$).

კარდინალური რიცხვებისთვის განიმარტება შეკრების, გამრავლების და ხარისხში აყვანის ოპერაციები.

ვთქვათ $\text{²}, \text{ª} \in \mathrm{Card}$ და $|A| = \text{²}$, $|B| = \text{ª}$ და $A \bigcap B = \varnothing$. ² და ª კარდინალური რიცხვების ჯამი $\text{²} + \text{ª}$ ეწოდება $A \bigcup B$ სიმრავლის სიმძლავრეს, ე.ი. $\text{²} + \text{ª} = |A \bigcup B|$.

ვთქვათ $\{\text{²}_s\}_{s \in S}$ არის კარდინალური რიცხვების ინდექსირებული ოჯახი. დავაფიქსიროთ ისეთი $\{A_s\}_{s \in S}$ ოჯახი, რომ $|A_s| = \text{²}_s$ ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის და $A_{s'} \bigcap A_{s''} = \varnothing$ ყოველი $s' \neq s''$ ინდექსისთვის. ვთქვათ $A = \bigcup_{s \in S} A_s$. განმარტების თანახმად, $\sum_{s \in S} \text{²}_s = |A|$, სამართლიანია შემდეგი მარტივი ფორმულები:

36). $\text{²} + \text{ª} = \text{ª} + \text{²}$, $\text{²}, \text{ª} \in \mathrm{Card}$.

37).ვთქვათ $\text{²} \in \mathrm{Card}$ და $|\varnothing| = 0$, მაშინ $\text{²} + 0 = \text{²}$.

38).თუ $\text{²}'_s \le \text{²}''_s$, $s \in S$, $\text{²}'_s, \text{²}''_s \in \mathrm{Card}$, მაშინ

$$\sum_{s \in S} \text{²}'_s \le \sum_{s \in S} \text{²}''_s .$$

39).ნებისმიერი ² უსასრულო კარდინალური რიცხვისთვის $\text{²} + \text{²} = \text{²}$.

40).ვთქვათ $\{\text{²}_s\}_{s \in S}$ არის კარდინალური რიცხვების ოჯახი, ხოლო ² უსასრულო კარდინალური რიცხვი.თუ $\text{²}_s \le \text{²}$ და $|S| \le \text{²}$,მაშინ $\sum_{s \in S} \text{²}_s \le \text{²}$.

41).ყოველი კარდინალური რიცხვისთვის $\text{²} < 2^{\text{²}}$.

ადვილი დასანახია, რომ ფორმულა 41) არის 1.1.6 თეორემის პირდაპირი შედეგი.

მარტივი შესამოწმებელია 36)-40) ფორმულების სამართლიანობა.

განვმარტოთ კარდინალური რიხვების ნამრავლი. ვთქვათ $\text{²}, \text{ª} \in \mathrm{Card}$ და $|A| = \text{²}$ და $|B| = \text{ª}$. განმარტების თანახმად,

$$\text{²}\,\text{ª} = |A \times B| .$$

$\{\text{²}_s\}_{s \in S}$ კარდინალურ რიცხვთა ოჯახის ნამრავლი $\prod_{s \in S} \text{²}_s$ არის $\prod_{s \in S} A_s$ დეკარტული ნამრავლის სიმძლავრე $|\prod_{s \in S} A_s|$, სადაც $|A_s| = \text{²}_s$, $s \in S$.

ახლა განვმარტოთ კარდინალური რიცხვების ხარისხი. ვთქვათ $\text{²}, \text{ª} \in \mathrm{Card}$, $|A| = \text{²}$ და $|B| = \text{ª}$. ვთქვათ A^B არის B სიმრავლიდან A სიმრავლეში ასახვების სიმრავლე. განმარტების თანახმად,

$$\text{²}^{\text{ª}} = |A^B| .$$

42). ვთქვათ $\{X_s\}_{s \in S}$ არის სიმრავლეთა ოჯახი. თუ ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $|X_s| = \text{²}_s \le \text{²}$ და $|S| = \text{«}$, მაშინ

$$\prod_{s \in S} \text{²}_s \le \text{²}^{\text{«}} .$$

სავარჯიშო 1.1.9. 1).აჩვენეთ, ყოველი X უსასრულო სიმრავლისთვის $\aleph_0 \leq |X|$.

2).აჩვენეთ, თუ არსებობს სურექციული ასახვა $f: X \to Y$, მაშინ $|Y| \leq |X|$.

3).ვთქვათ ², ª, « $\in$ Card . დაამტკიცეთ

² ª+« = ² ª ² « .

ვთქვათ მოცემულია სამი A, B და C სიმრავლე. თუ $B \bigcap C = \varnothing$, მაშინ არსებობს ექვივალენტობა $A^{B \bigcup C}$ და $A^B \times A^C$ სიმრავლეებს შორის. მართლაც, ვთქვათ $f: B \bigcup C \to A$ არის ასახვა. განვმარტოთ ასახვა ¨ $: A^{B \bigcup C} \to A^B \times A^C$. განმარტების თანახმად,

¨ $(f) = (f_{|B}, f_{|C})$.

აჩვენეთ, ¨ ასახვა არის ბიექცია.

4). ვთქვათ ², ª, « $\in$ Card . დაამტკიცეთ

(² ª)« = ² « ª « .

ნებისმიერი სამი A, B და C სიმრავლისთვის არსებობს ექვივალენტობა $(A \times B)^C$ და $A^C \times B^C$ სიმრავლეებს შორის. მართლაც, ვთქვათ $f: C \to A \times B$ არის ნებისმიერი ასახვა, ხოლო $p_1 : A \times B \to A$ და $p_2 : A \times B \to B$ პროექციები პირველ და მეორე თანამამრავლებზე. განვიხილოთ კომპოზიციები $g = p_1 \circ f : C \to A$, $h = p_2 \circ f : C \to B$ და განვმარტოთ ასახვა ¨ $: (A \times B)^C \to A^C \times B^C$. განმარტების თანახმად,

¨ $(f) = (g, h)$, $f \in (A \times B)^C$.

აჩვენეთ, ¨ ასახვა არის ბიექცია.

5).ვთქვათ ², ª, « $\in$ Card . დაამტკიცეთ

(² ª)« = ² ª·« .

ნებისმიერი სამი A, B და C სიმრავლისთვის არსებობს ექვივალენტობა $(A^B)^C$ და $A^{B \times C}$ სიმრავლეებს შორის. განვმარტოთ ასახვა · $: (A^B)^C \to A^{B \times C}$. ვთქვათ $f: C \to A^B$ არის ასახვა. განმარტების თანახმად, · $(f): B \times C \to A$ მოიცემა ფორმულით

· $(f)(b, c) = f(c)(b)$, $(b, c) = B \times C$.

აჩვენეთ, · ასახვა არის ბიექცია.

6).დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი ² $\in$ Card უსასრულო კარდინალური რიცხვისთვის ² ² = ² .

7).დაამტკიცეთ, რომ ყოველი ² $\in$ Card უსასრულო კარდინალური რიცხვისთვის ² $0 = 0$² $= 0$.

8).აჩვენეთ, ² , ª $\in$ Card კარდინალური რიცხვებისთვის ² ª = ª ².

9).აჩვენეთ, თუ ª,«,² $\in$ Card და ² $\leq$ « , მაშინ ²^{ª} $\leq$ «^{ª}.

10).აჩვენეთ, თუ ª,«,² $\in$ Card და ª $\leq$ « , მაშინ ²^{ª} $\leq$ ²$^{«}$.

1.2. ჯგუფთა თეორიის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი

ვთქვათ A არის არაცარიელი სიმრავლე. ნებისმიერ $Q: A\times A \to A$ ასახვას ეწოდება ალგებრული ოპერაცია A სიმრავლეზე. თუ Q ასახვა (a,b) წყვილს უთანადებს $Q(a,b)=c$ ელემენტს, მაშინ ვწერთ $aQb=c$. c ელემენტს ეწოდება a და b ელემენტების კომპოზიცია Q ოპერაციის მიმართ.

Q ალგებრულ ოპერაციას ეწოდება კომუტაციური, თუ ნებისმიერი ორი $a,b\in A$ ელემენტისათვის

$$aQb=bQa.$$

Q ალგებრულ ოპერაციას ეწოდება ასოციაციური, თუ ნებისმიერი სამი $a,b,c\in A$ ელემენტისათვის

$$(aQb)Qc=aQ(bQc).$$

A სიმრავლის e ელემენტს ეწოდება ნეიტრალური ელემენტი, თუ ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისათვის

$$aQe=eQa=a.$$

ნეიტრალურ ელემენტიანი A სიმრავლის b ელემენტს ეწოდება $a\in A$ ელემენტის სიმეტრიული ელემენტი, თუ

$$aQb=bQa=e.$$

A სიმრავლის B ქვესიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი Q ალგებრული ოპერაციის მიმართ, თუ B სიმრავლის ნებისმიერი ორი a და b ელემენტისთვის $aQb\in B$. ალგებრული ოპერაცია B სიმრავლეზე მოიცემა $Q_{|B\times B}: B\times B\to B$ შემოსაზღვრის ასახვით, ე.ი. ნებისმიერი ორი $a,b\in B$ ელემენტისთვის

$$aQ_{|B\times B}b=aQb.$$

არაცარიელ A სიმრავლეს ეწოდება ჯგუფი, თუ მასზე მოცემული $Q: A\times A\to A$ ალგებრული ოპერაცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს-აქსიომებს:

G1). Q არის ასოციაციური ოპერაცია.

G2). A სიმრავლეში არსებობს ნეიტრალური ელემენტი.

G3). A სიმრავლის ყოველი a ელემენტისათვის არსებობს სიმეტრიული ელემენტი.

A ჯგუფს ეწოდება კომუტაციური, თუ Q ალგებრული ოპერაცია

აკმაყოფილებს დამატებით პირობას-აქსიომას:

G4). Q ოპერაცია არის კომუტაციური.

ხშირად მოსახერხებელია $Q: A\times A\to A$ ალგებრულ ოპერაციას ეწოდოს შეკრება ან გამრავლება.

თუ Q ოპერაციას ეწოდება შეკრება, მაშინ aQb კომპოზიცია აღინიშნება $a+b$ სიმბოლოთი და ეწოდება a და b ელემენტების ჯამი. ამ შემთხვევაში e ნეიტრალურ ელემენტს ეწოდება ნული და აღინიშნება სიმბოლოთი 0, ხოლო a ელემენტის სიმეტრიულ ელემენტს ეწოდება მოპირდაპირე ელემენტი და აღინიშნება სიმბოლოთი $-a$.

A ჯგუფს შეკრების ოპერაციით უწოდებენ ადიციურ ჯგუფს და აღნიშნავენ $(A,+)$ სიმბოლოთი. ამრიგად, $(A,+)$ ადიციური ჯგუფი აკმაყოფილებს პირობებს:

G1). ნებისმიერი $a,b,c\in A$ ელემენტისთვის $(a+b)+c=a+(b+c)$.

G2). ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისთვის $a+0=0+a=a$.

G3). ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისთვის $a+(-a)=(-a)+a=0$.

თუ $(A,+)$ ადიციური ჯგუფისთვის დამატებით სრულდება პირობა

G4). ნებისმიერი $a,b\in A$ ელემენტისთვის $a+b=b+a$,

მაშინ მას უწოდებენ კომუტაციურ ადიციურ ჯგუფს, ან აბელურ ჯგუფს.

თუ Q ოპერაციას ეწოდება გამრავლება, მაშინ aQb კომპოზიცია აღინიშნება ab სიმბოლოთი და ეწოდება a და b ელემენტების ნამრავლი. ამ შემთხვევაში e ნეიტრალურ ელემენტს ეწოდება ერთეული და აღინიშნება სიმბოლოთი 1, ხოლო a ელემენტის სიმეტრიულ ელემენტს ეწოდება შებრუნებული ელემენტი და აღინიშნება სიმბოლოთი a^{-1} .

A ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ უწოდებენ მულტიპლიკაციურ ჯგუფს და აღნიშნავენ $(A,\cdot)$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, $(A,\cdot)$ მულტიპლიკაციური ჯგუფი აკმაყოფილებს პირობებს:

G1). ნებისმიერი $a,b,c\in A$ ელემენტისთვის $(ab)c=a(bc)$.

G2). ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისთვის $a1=1a=a$.

G3). ნებისმიერი $a\in A$ ელემენტისთვის $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

თუ $(A,\cdot)$ მულტიპლიკაციური ჯგუფისთვის დამატებით სრულდება პირობა

G4). ნებისმიერი $a,b\in A$ ელემენტისთვის $ab=ba$,

მაშინ მას ეწოდება კომუტაციური მულტიპლიკაციური ჯგუფი.

თუ A ჯგუფის, როგორც სიმრავლის, სიმძლავრე $|A|<\aleph_0$, მაშინ A ჯგუფს ეწოდება სასრული ჯგუფი. თუ $|A|\geq\aleph_0$, მაშინ A ჯგუფს ეწოდება უსასრულო ჯგუფი. A ჯგუფის სიმძლავრეს ეწოდება A ჯგუფის რიგი.

ყოველი კომუტაციური მულტიპლიკაციური ჯგუფი შეიძლება გაიგივებული იქნეს აბელურ ჯგუფთან.

A ჯგუფის B ქვესიმრავლეს ეწოდება ქვეჯგუფი, თუ ის წარმოადგენს ჯგუფს A სიმრავლეში განსაზღვრული შეკრების ოპერაციის მიმართ. B ქვეჯგუფი ყოველთვის შეიცავს A ჯგუფის ნულს. A ჯგუფის არაცარიელი B ქვესიმრავლე ქვეჯგუფია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ჩაკეტილია შეკრების ოპერაციის და შებრუნებული ელემენტის აღების მიმართ, ანუ აკმაყოფილებს პირობებს:

i). თუ $a,b\in B$, მაშინ $a+b\in B.$

ii). თუ $a\in B$, მაშინ $-a\in B$.

ცხადია, B ქვეჯგუფია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $a,b\in B$ ელემენტისთვის $a-b\in B$.

შევნიშნოთ, რომ A ჯგუფის ქვეჯგუფებია თვითონ A და მხოლოდ 0 ელემენტისაგან შემდგარი ქვესიმრავლე $\{0\}$. მათ უწოდებენ A ჯგუფის ტრივიალურ ქვეჯგუფებს.

ვთქვათ B და C არის A ჯგუფის ქვეჯგუფები, მაშინ სიმრავლე

$$B+C=\{b+c\mid b\in B, c\in C\}$$

არის A ჯგუფის ქვეჯგუფი.

ახლა, ვთქვათ, $\{B_s\}_{s\in S}$ არის A ჯგუფის ქვეჯგუფების რაიმე ოჯახი. ცხადია, $\bigcap\limits_{s\in S} B_s$ არის A ჯგუფის ქვეჯგუფი. $\{B_s\}_{s\in S}$ ოჯახი წარმოქმნის ჯგუფს, რომელიც შედგება ყველა შესაძლო სასრული ჯამებისგან $b_{s_1}+b_{s_2}+\ldots+b_{s_k}, b_{s_j}\in B_{s_j}$.

ვთქვათ $X=\{x_s\}_{s\in S}$ არის A ჯგუფის ელემენტთა რაიმე ქვესიმრავლე. A ჯგუფის ყველა იმ ქვეჯგუფების თანაკვეთა, რომელიც მოიცავს X სიმრავლეს, როგორც ქვესიმრავლეს, არის ქვეჯგუფი. იგი აღინიშნება სიმბოლოთი $<X>=<x_s>_{s\in S}$. ცხადია, $<X>$ ქვეჯგუფი შედგება ყველა შესაძლო ჯამებისგან $m_{s_1}x_{s_1}+m_{s_2}x_{s_2}+\ldots+m_{s_k}x_{s_k}$, სადაც $x_{s_k}\in X$, $m_{s_k}\in\mathbb{Z}$ და $k\in\mathbb{N}^+$. $<X>$ ქვეჯგუფს ეწოდება X სიმრავლით წარმოქმნილი ქვეჯგუფი, ხოლო x_s ელემენტებს ეწოდებათ $<X>$ ჯგუფის წარმომქმნელები. თუ $<X>=A$, მაშინ ვიტყვით, რომ A ჯგუფი წარმოქმნილია X სიმრავლით, რომლის x_s ელემენტებს ეწოდებათ წარმომქმნელი ელემენტები.

ვთქვათ $X=\{x\}$ შედგება ერთი x ელემენტისგან. $<x>$ ჯგუფს ეწოდება x ელემენტით წარმოქმნილი ციკლური ჯგუფი. ამ ჯგუფის რიგს ეწოდება x ელემენტის რიგი, რომელიც შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო. თუ x ელემენტის რიგი არის უსასრულო, მაშინ $<x>$ ჯგუფის ყველა ელემენტი $m\,a(m\in\mathbb{Z})$ არის განსხვავებული. თუ x ელემენტის რიგი არის სასრული n რიცხვი, მაშინ $0,a,\dots,(n-1)a$ არის $<x>$ ჯგუფის განსხვავებული ელემენტები. ცხადია, $k\,x=l\,x$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა n რიცხვი ყოფს $l-k$ სხვაობას.

თუ A ჯგუფის ყოველ ელემენტს აქვს სასრული რიგი, მაშინ A ჯგუფს ეწოდება პერიოდული ჯგუფი, ხოლო თუ მის ყოველ ელემენტს, გარდა ნულისა, აქვს უსასრულო რიგი, მაშინ მას ეწოდება ჯგუფი გრეხის გარეშე. ცხადია, A ჯგუფის ყველა სასრული რიგის ელემენტების სიმრავლე არის მისი ქვეჯგუფი.

თუ $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, მაშინ $<X>$ ჯგუფს ეწოდება სასრულოდ წარმოქმნილი ჯგუფი.

A ჯგუფის B ჯგუფში $f:A\to B$ ასახვას ეწოდება ჰომომორფიზმი, თუ ნებისმიერი ორი $a_1,a_2\in A$ ელემენტისთვის

$$f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2).$$

$1_A:A\to A$ იგივური ასახვა არის ჰომომორფიზმი, მას უწოდებენ იგივურ ჰომომორფიზმს.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $f:A\to B$ ჰომომორფიზმისთვის

$$f(0)=0$$

და ყოველი $a\in A$ ელემენტისთვის

$$f(-a)=-f(a)\,.$$

ნებისმიერი ორი $f:A\to B$ და $g:B\to C$ ჰომომორფიზმის კომპოზიცია $g\circ f:A\to C$ არის ჰომომორფიზმი.

$f:A\to B$ ჰომომორფიზმის ბირთვი $\mathrm{Ker}(f)$ არის სიმრავლე ყველა იმ $a\in A$ ელემენტისა, რომლისთვისაც $f(a)=0$, ანუ

$$\mathrm{Ker}(f)=\{a\in A\mid f(a)=0\}.$$

$f:A\to B$ ჰომომორფიზმის ანასახი $\mathrm{Im}(f)$ არის B ჯგუფის ქვესიმრავლე

$$\mathrm{Im}(f)=\{f(a)\mid a\in A\}.$$

ცხადია, $\mathrm{Ker}(f)$ და $\mathrm{Im}(f)$ ქვესიმრავლეები შესაბამისად არის A და B ჯგუფების ქვეჯგუფები.

$f:A\to B$ ჰომომორფიზმს, რომელიც არის ინექციური ასახვა, ეწოდება მონომორფიზმი, ხოლო თუ f სურექციული ასახვაა, მაშინ მას ეწოდება ეპიმორფიზმი. $f:A\to B$ ჰომომორფიზმს, რომელიც არის

ბიექცია, ეწოდება იზომორფიზმი. ამ შემთხვევაში A და B ჯგუფებს ეწოდებათ იზომორფული ჯგუფები. A და B ჯგუფების იზომორფულობა აღინიშნება $A \cong B$ სიმბოლოთი.

$f : A \to A$ ჰომომორფიზმს უწოდებენ ენდომორფიზმს, ხოლო $f : A \to A$ იზომორფიზმს ავტომორფიზმს.

$f : A \to B$ ჰომომორფიზმს, რომლის ანასახი $f(A) = \{0\}$, ეწოდება ნულოვანი ჰომომორფიზმი და აღინიშნება სიმბოლოთი $0 : A \to B$.

A ჯგუფის B აბელურ ჯგუფში ყველა ჰომომორფიზმის $\mathrm{Hom}(A, B)$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ შეკრების ოპერაცია:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a), \quad f, g \in \mathrm{Hom}(A, B).$$

ყოველი $f : A \to B$ ჰომომორფიზმისთვის განიმარტება $-f : A \to B$ ჰომომორფიზმი. განმარტების თანახმად $(-f)(a) = -f(a), \quad a \in A$. ცხადია, სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

G1). ნებისმიერი $f, g, h \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ჰომომორფიზმისთვის

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

$G2$). ნებისმიერი $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ჰომომორფიზმისთვის

$$f + 0 = 0 + f = f.$$

G3). ნებისმიერი $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ჰომომორფიზმისთვის

$$f + (-f) = (-f) + f = 0.$$

G4). ნებისმიერი $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$ ჰომომორფიზმისთვის

$$f + g = g + f.$$

ამრიგად, $\mathrm{Hom}(A, B)$ არის აბელური ჯგუფი.

ვთქვათ B არის A ჯგუფის ქვეჯგუფი და $a \in A$. სიმრავლეს

$$a + B = \{a + b \mid b \in B\}$$

ეწოდება მარცხენა მოსაზღვრე კლასი, ხოლო

$$B + a = \{b + a \mid b \in B\}$$

სიმრავლეს ეწოდება მარჯვენა მოსაზღვრე კლასი.

B ქვეჯგუფს ეწოდება ნორმალური ქვეჯგუფი, თუ ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისთვის

$$a + B = B + a.$$

იმისთვის, რომ ქვეჯგუფი იყოს ნორმალური, აუცილებელი და საკმარისია ნებისმიერი $a \in A$ და $b \in B$ ელემენტისთვის $a + b + (-a) \in B.$

შევნიშნოთ, რომ თუ B არის A ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი, მაშინ $A/B = \{a + B \mid a \in A\}$ ფაქტორ-სიმრავლეზე განიმარტება შეკრების ოპერაცია. განმარტების თანახმად, ნებისმიერი ორი $a_1 + B$ და $a_2 + B$ მოსაზღვრე კლასისთვის

$$(a_1 + B) + (a_2 + B) = (a_1 + a_2) + B.$$

A ჯგუფის a_1 და a_2 ელემენტები ეკუთვნის ერთი და იგივე კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1 - a_2 \in B$. ცხადია, ორი კლასი ან ემთხვევა ერთმანეთს, ან არ იკვეთება. ამრიგად, A ჯგუფი წარმოადგენს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი მოსაზღვრე კლასების გაერთიანებას. $a+B$ მოსაზღვრე კლასს ხშირად აღნიშნავენ სიმბოლოთი $[a]$. ზემოთ მოცემული მოსაზღვრე კლასების ოპერაცია კორექტულადაა განმარტებული და არ არის დამოკიდებული წარმომადგენლების არჩევაზე. $-a+B$ კლასს ეწოდება $a+B$ მოსაზღვრე კლასის მოპირდაპირე, ხოლო $0+B=B$ მოსაზღვრე კლასს ეწოდება ნულოვანი კლასი. ცხადია, A/B ფაქტორ-სიმრავლე არის ჯგუფი. მას უწოდებენ ფაქტორ-ჯგუფს. A ჯგუფის A/B ფაქტორ-ჯგუფზე $q: A \to A/B$ ფაქტორ-ასახვა მოიცემა ფორმულით

$$q(a) = [a], \quad a \in A.$$

ცხადია, q ფაქტორ-ასახვა არის ჰომომორფიზმი.

შევნიშნოთ, თუ T არის A აბელური ჯგუფის პერიოდული ქვეჯგუფი, მაშინ A/T ფაქტორ-ჯგუფი არის ჯგუფი გრეხის გარეშე.

შემდეგში თეორიული მასალის გადმოცემისას უმეტესწილად საქმე გვექნება აბელურ ჯგუფებთან.

ვთქვათ მოცემულია $f: A \to B$ ჰომომრფიზმი. ცხადია, თუ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, მაშინ f არის მონომორფიზმი. განვიხილოთ ფაქტორ-ჯგუფები

$$\mathrm{Coim}(f) = A/\mathrm{Ker}(f)$$

და

$$\mathrm{Coker}(f) = B/\mathrm{Im}(f)\,.$$

თუ $\mathrm{Coker}(f) = \{0\}$, მაშინ $f: A \to B$ არის ეპიმორფიზმი. ამრიგად,

$$\mathrm{Im}(f) \cong A/\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Coim}(f)\,.$$

ჯგუფთა და ჰომომორფიზმთა მიმდევრობას

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

ეწოდება გრძელი ზუსტი მიმდევრობა, თუ ყოველი $n \in \mathbb{Z}$ მთელი რიცხვისთვის $\mathrm{Im}(f_{n+1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$.

ზუსტ მიმდევრობას

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

ეწოდება მოკლე ზუსტი მიმდევრობა.

თუ B არის A ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი, მაშინ მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} A/B \longrightarrow 0\,,$$

სადაც $i: B \to A$ არის ჩადგმის ჰომომორფიზმი, ხოლო $q: A \to A/B$ ფაქტორ-ჰომომორფიზმი, არის მოკლე ზუსტი მიმდევრობა.

ცხადია, მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$$

ზუსტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f არის მონომორფიზმი, ხოლო მიმდევრობა

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

ზუსტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f არის ეპიმორფიზმი.

თუ მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

არის ზუსტი, მაშინ f არის ისეთი ჩადგმა A ჯგუფისა B ჯგუფში, რომ g არის ეპიმოფიზმი $\mathrm{Im}(f)$ ბირთვით. ამ შემთხვევაში A ჯგუფი შეგვიძლია გავაიგივეოთ B ჯგუფის $\mathrm{Im}(f)$ ქვეჯგუფთან, ხოლო C შეგვიძლია გავაიგივეოთ B/A ფაქტორ ჯგუფთან.

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 1.2.1. (ე.ნიოტერი). *თუ B და C არის A ჯგუფის ქვეჯგუფები და $C \subseteq B$, მაშინ არსებობს იზომორფიზმი*

$$A/B \cong (A/C)/(B/C). \ \square$$

თეორემა 1.2.2. (ე.ნიოტერი). *თუ B და C არის A ჯგუფის ქვეჯგუფები, მაშინ არსებობს იზომორფიზმი*

$$B/(B \cap C) \cong (B+C)/C. \ \square$$

ვთქვათ მოცემულია ზუსტი მიმდევრობა

$$\cdots \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} \cdots .$$

ცხადია, f ჰომომრფიზმი არის მონომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $g=0$, ხოლო ეპიმორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $h=0$. ამრიგად, f არის იზომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $g=0$ და $h=0$.

ლემა 1.2.3. (ლემა ხუთი ჰომომრფიზმის შესახებ). *ვთქვათ კომუტაციური დიაგრამის*

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
\downarrow \mathrm{h}_1 & & \downarrow \mathrm{h}_2 & & \downarrow \mathrm{h}_3 & & \downarrow \mathrm{h}_4 & & \downarrow \mathrm{h}_5 \\
A_1 & \xrightarrow[g_1]{} & A_2 & \xrightarrow[g_2]{} & A_3 & \xrightarrow[g_3]{} & A_4 & \xrightarrow[g_4]{} & A_5
\end{array}$$

სტრიქონები არის ზუსტი მიმდევრობები. თუ h_1, h_2, h_4 და h_5 ჰომომორფიზმები არის იზომორფიზმები, მაშინ h_3 ჰომომორფიზმიც არის იზომორფიზმი. $\square$

ვთქვათ მოცემულია $\{A_s\}_{s\in S}$ აბელურ ჯგუფთა ინდექსირებული ოჯახი. როგორც ვიცით, $\prod\limits_{s\in S} A_s$ დეკარტული ნამრავლის ელემენტები არის ისეთი $f : S \to \bigcup\limits_{s\in S} A_s$ ფუნქციები, რომ $f(s) \in A_s$. ვიცით, რომ

ყოველი ერთობლიობა (a_s), $a_s \in A_s$, $s \in S$ განსაზღვრავს ისეთ $f : \mathrm{A} \to \bigcup_{s \in S} A_s$ ფუნქციას, რომ $f(s) = a_s \in A_s$. ფუნქციათა შეკრების ოპერაცია

$$(f + f')(s) = f(s) + f'(s),\ f, f' \in \prod_{s \in S} A_s,\ s \in S,$$

$\prod_{s \in S} A_s$ დეკარტულ ნამრავლს გადააქცევს აბელურ ჯგუფად.

ვთქვათ $(a_s), (a_s') \in \prod_{s \in S} A_s$ არის დეკარტული ნამრავლის ელემენტები. $f, f' : S \to \bigcup_{s \in S} A_s$ ფუნქციების $f + f'$ ჯამით განსაზღვრულია $(a_s + a_s{}')$ ერთობლიობა, ანუ

$$(a_s) + (a_s') = (a_s + a_s').$$

$\prod_{s \in S} A_s$ აბელურ ჯგუფს ეწოდება A_s, $s \in S$ აბელური ჯგუფების ნამრავლი.

ცხადია, პროექცია $p_{s_0} : \prod_{s \in S} A_s \to A_{s_0}, s_0 \in S$, მოცემული ფორმულით

$$p_{s_0}((a_s)) = a_{s_0},\ (a_s) \in \prod_{s \in S} A_s,$$

არის ჰომომორფიზმი.

განვიხილოთ $\prod_{s \in S} A_s$ აბელური ჯგუფის ის (a_s) ელემენტები, რომელთათვისაც $a_s = 0$ ყველა s ინდექსისათვის, გარდა ინდექსთა სასრული რაოდენობისა. ცხადია, ასეთ ელემენტთა ქვესიმრავლე არის $\prod_{s \in S} A_s$ ჯგუფის ქვეჯგუფი. მას აღნიშნავენ $\bigoplus_{s \in S} A_s$ სიმბოლოთი და უწოდებენ A_s, $s \in S$ აბელური ჯგუფების ჯამს.

შევნიშნოთ, თუ S არის ინდექსთა სასრული სიმრავლე, მაშინ A_s, $s \in S$ ჯგუფთა პირდაპირი ჯამი და ნამრავლი ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. სრულდება ტოლობა $\prod_{s \in S} A_s = \bigoplus_{s \in S} A_s$.

ვთქვათ $i_{s_0} : A_{s_0} \to \bigoplus_{s \in S} A_s$, $s_0 \in S$ არის ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$i_{s_0}(a_{s_0}) = (a_s),\ a_{s_0} \in A_{s_0},$$

სადაც $a_s = a_{s_0}$, თუ $s = s_0$ და $a_s = 0$, თუ $s \neq s_0$.

i_{s_0} ასახვა არის ჰომომორფიზმი და მას ეწოდება A_{s_0} ჯგუფის კანონიკური ჩადგმა $\bigoplus_{s \in S} A_s$ ჯგუფში. i_s და p_s ჰომომორფიზმები აკმაყოფილებს $p_{s_0} \circ i_{s_0} = 1_{A_{s_0}}$ და $p_s \circ i_{s_0} = 0$, $s \neq s_0$ პირობებს.

ვთქვათ A არის აბელური ჯგუფი, ხოლო $\{f_s\}_{s \in S}$ არის $f_s : A \to A_s$, $s \in S$ ჰომომორფიზმთა ოჯახი. დიაგონალური ასახვა $f = \Delta_{s \in S} f_s : A \to \prod_{s \in S} A_s$ არის ჰომომორფიზმი და აკმაყოფილებს პირობას

$p_s \circ f = f_s$, $s \in S$.

ვთქვათ მოცემულია $g_s : A_s \to A$, $s \in S$ ჰომომორფიზმთა $\{g_s\}_{s\in S}$ ოჯახი. განვმარტოთ ჰომომორფიზმთა კომბინირებული ჯამი $g = \underset{s\in S}{\nabla} g_s : \underset{s\in S}{\oplus} A_s \to A$. განმარტების თანახმად,

$$g((a_s)) = \sum_{s\in S} g_s(a_s), (a_s) \in \underset{s\in S}{\oplus} A_s.$$

ცხადია, $g \circ i_s = g_s$, $s \in S$.

ჰომომორფიზმთა $\{f_s\}_{s\in S}$ ოჯახს ეწოდება A ჯგუფის წარმოდგენა A_s, $s \in S$ ჯგუფთა ნამრავლის სახით, თუ $\underset{s\in S}{\Delta} f_s$ ჰომომორფიზმი არის იზომორფიზმი.

ჰომომორფიზმთა $\{g_s\}_{s\in S}$ ოჯახს ეწოდება A ჯგუფის წარმოდგენა A_s, $s \in S$ ჯგუფთა ჯამის სახით, თუ $\underset{s\in S}{\nabla} g_s$ ჰომომორფიზმი არის იზომორფიზმი.

ვთქვათ A არის აბელური ჯგუფი, ხოლო A_1 და A_2 მისი ქვეჯგუფები. ცხადია, $i_1 : A_1 \to A$ და $i_2 : A_2 \to A$ ჩადგმის ჰომომორფიზმები ინდუცირებს ჰომომორფიზმს $i_1 \nabla i_2 : A_1 \oplus A_2 \to A$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$(i_1 \nabla i_2)(a_1, a_2) = i_1(a_1) + i_2(a_2) = a_1 + a_2,\ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2.$$

თუ $i_1 \nabla i_2$ ჰომომორფიზმი არის იზომორფიზმი, მაშინ ვიტყვით, რომ A ჯგუფი არის A_1 და A_2 ქვეჯგუფების ჯამი.

ახლა, ვთქვათ, $\{A_s\}_{s\in S}$ არის A ჯგუფის $A_s, s \in S$ ქვეჯგუფების ოჯახი.

თუ $i_s : A_s \to A$, $s \in S$, ჩადგმის ჰომომორფიზმები ისეთია, რომ ჰომომორფიზმი $\underset{s\in S}{\oplus} i_s : \underset{s\in S}{\oplus} A_s \to A$ არის იზომორფიზმი, მაშინ ვიტყვით, რომ A ჯგუფი არის მისი A_s, $s \in S$ ქვეჯგუფების ჯამი.

უსასრულო ციკლური ჯგუფების ჯამს ეწოდება თავისუფალი (აბელური) ჯგუფი. ვთქვათ ეს ციკლური ჯგუფები წარმოქმნილია ელემენტებით a_s, $s \in S$. განვიხილოთ $< a_s >$, $s \in S$ ციკლური ჯგუფების ჯამი $A = \underset{s\in S}{\oplus} < a_s >$.

ამრიგად, A თავისუფალი ჯგუფის ყოველი a ელემენტი წარმოიდგინება როგორც ჯამი

$$a = n_1 a_{s_1} + n_2 a_{s_2} + ... + n_k a_{s_k},\ n_{s_i} \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}^+.$$

$\{a_s\}_{s\in S}$ სიმრავლეს ეწოდება A თავისუფალი ჯგუფის ბაზისი, ხოლო $a_s, s \in S$ ელემენტებს წარმომქმნელები. ცხადია, ყოველ სიმრავლეზე $\{a_s\}_{s\in S}$ შეიძლება აიგოს თავისუფალი ჯგუფი, რომლის ელემენტები

არის ჯამები $n_{s_1}a_{s_1}+n_{s_2}a_{s_2}+...+n_{s_k}a_{s_k}$, $n_{s_i}\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{N}^+$. აგებულ თავისუფალ ჯგუფს ეწოდება $\{a_s\}_{s\in S}$ სიმრავლით წარმოქმნილი თავისუფალი ჯგუფი.

თეორემა 1.2.4. *თუ მოკლე ზუსტ მიმდევრობაში*

$$0\to A\to B\to C\to 0$$

C არის თავისუფალი ჯგუფი, მაშინ $B\cong A\oplus C$. □

თეორემა 1.2.5. *ვთქვათ A არის თავისუფალი ჯგუფი, $\{a_s\}_{s\in S}$ მისი ბაზისი, ხოლო B ნებისმიერი აბელური ჯგუფი. მაშინ $\{a_s\}_{s\in S}$ ბაზისზე განმარტებული და B ჯგუფში მნიშვნელობების მქონე ნებისმიერი ასახვა შეიძლება ცალსახად გაგრძელდეს A ჯგუფიდან B ჯგუფში ჰომომორფიზმამდე.*

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ $f:\{a_s\}_{s\in S}\to B$ არის რაიმე ასახვა. განვმარტოთ $F:A\to B$ ასახვა. განმარტების თანახმად,

$$F(n_{s_1}a_{s_1}+n_{s_2}a_{s_2}+...+n_{s_k}a_{s_k})=n_{s_1}f(a_{s_1})+n_{s_2}f(a_{s_2})+...+n_{s_k}f(a_{s_k}).\ \square$$

თეორემა 1.2.6. *ყოველი აბელური ჯგუფი იზომორფულია რომელიმე თავისუფალი ჯგუფის ფაქტორ-ჯგუფის.*

დამტკიცება. მართლაც, ვთქვათ A არის რაიმე აბელური ჯგუფი, ხოლო B მისი ბაზისი. ავაგოთ C თავისუფალი ჯგუფი C სიმრავლეზე. არსებობს ისეთი ჰომომორფიზმი $F:C\to A$, რომ $F(b)=b$ ყოველი $b\in B$ ელემენტისთვის. ცხადია, F არის ეპიმორფიზმი, რადგან B სიმრავლე წარმოქმნის A ჯგუფს. აქედან გამომდინარე, $A\cong C/\mathrm{Ker}(f)$. □

სამართლიანია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 1.2.7. *თავისუფალი ჯგუფის ყოველი ქვეჯგუფი არის თავისუფალი.* □

თეორემა 1.2.8. *ვთქვათ A არის სასრულოდ წარმოქმნილი თავისუფალი აბელური ჯგუფი, ხოლო B მისი ქვეჯგუფი. მაშინ არსებობს A ჯგუფის ისეთი $\{a_1,a_2,...,a_k\}$ ბაზისი და B ქვეჯგუფის ისეთი $\{b_1,b_2,...,b_l\}$ ბაზისი, რომ $l\le k$ და $b_j=m_j a_j (j\le l)$, სადაც $m_j\in\mathbb{Z}$ და m_j ყოფს m_{j+1} $(j\le l)$.* □

სავარჯიშო 1.2.9. 1).აჩვენეთ, A სასრული ჯგუფი შეიცავს p რიგის ელემენტს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ყოფს A ჯგუფის რიგს.

2).ვთქვათ A არის ჯგუფი, $m>0$ და

$$A[m]=\{a\in A\mid ma=0\}.$$

აჩვენეთ, $A[m]$ არის A ჯგუფის ქვეჯგუფი.

3).აჩვენეთ, $a\in A[m]$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა a ელემენტის

რიგი ყოფს m რიცხვს.

4).ვთქვათ B არის A ჯგუფის ქვესიმრავლე, ხოლო m დადებითი მთელი რიცხვი. აჩვენეთ,

$$m^{-1}B = \{a \mid a \in A, ma \in B\}$$

არის A ჯგუფის ქვეჯგუფი.

5).აჩვენეთ, თუ m ყოფს A ჯგუფის რიგს, მაშინ A ჯგუფს აქვს m რიგის ქვეჯგუფები და ფაქტორ-ჯგუფები.

6).დაამტკიცეთ, რომ ზუსტია მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow A[m] \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} mA \longrightarrow 0,$$

სადაც i არის ჩადგმის ასახვა, ხოლო f ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$f(a) = ma,\ a \in A.$$

7).ვთქვათ A და B არის ჯგუფები. დაამტკიცეთ, რომ $|\mathrm{Hom}(A,B)| \leq |B|^{|A|}$.

8).აჩვენეთ, რომ $\mathrm{Hom}(A,B) \cong \mathrm{Hom}(B,A)$ და $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong A$, როცა A და B არის სასრული ჯგუფები.

9).დაამტკიცეთ, თუ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის ზუსტია მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow A_s \xrightarrow{f_s} B_s \xrightarrow{g_s} C_s \longrightarrow 0,$$

მაშინ აგრეთვე ზუსტია მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s\in S} A_s \xrightarrow{\bigoplus_{s\in S} f_s} \bigoplus_{s\in S} B_s \xrightarrow{\bigoplus_{s\in S} g_s} \bigoplus_{s\in S} C_s \longrightarrow 0.$$

10).დაამტკიცეთ, თუ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის ზუსტია მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow A_s \xrightarrow{f_s} B_s \xrightarrow{g_s} C_s \longrightarrow 0,$$

მაშინ აგრეთვე ზუსტია მიმდევრობა

$$0 \longrightarrow \prod_{s\in S} A_s \xrightarrow{\prod_{s\in S} f_s} \prod_{s\in S} B_s \xrightarrow{\prod_{s\in S} g_s} \prod_{s\in S} C_s \longrightarrow 0.$$

1.3. კატეგორიათა თეორიის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი

ამ წიგნში კატეგორიათა თეორია არ თამაშობს არსებით როლს. ის გამოიყენება როგორც მათემატიკური ფაქტების და წინდადადებების გადმოცემის მოსახერხებელი იარაღი.

კატეგორიები არ წარმოადგენენ ალგებრულ სისტემებს, ანუ ისინი საზოგადოდ არ არიან ალგებრული ოპერაციის მქონე სიმრავლეები. ასე მაგალითად, თუ ჩვენ განვიხილავთ აბელურ ჯგუფთა კატეგორიას, მაშინ იმ დაშვებიდან, რომ საქმე გვაქვს სიმრავლესთან უნდა განვთავისუფლდეთ, რადგან ყველა აბელურ ჯგუფთა ერთობლიობა არ

არის სიმრავლე.

ვთქვათ მოცემულია:

i). კლასი $ob(\mathscr{K})$, რომლის ელემენტებს ეწოდება ობიექტები და აღინიშნება სიმბოლოებით $X, Y, Z, \ldots$.

ii). სიმრავლეები $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)$, $X, Y \in ob(\mathscr{K})$, რომელთა ელემენტებს ეწოდება მორფიზმები და აღინიშნება სიმბოლოებით $f: X \longrightarrow Y$, $g: X \longrightarrow Y$, $h: X \longrightarrow Y, \ldots$ ან $X \xrightarrow{f} Y$, $X \xrightarrow{g} Y$, $X \xrightarrow{h} Y, \ldots$.

iii). ფუნქციები $Q_{X,Y,Z}: \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(Y,Z) \to \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Z)$, $X, Y, Z \in ob(\mathscr{K})$, რომლებიც $f: X \longrightarrow Y$ და $g: Y \longrightarrow Z$ მორფიზმთა (f, g) წყვილებს შეუსაბამებს $Q_{X,Y,Z}(f,g)$ მორფიზმებს, ე.წ. f და g მორფიზმთა კომპოზიციებს, რომლებსაც სიმარტივისთვის აღვნიშვნავთ $g \circ f$ სიმბოლოებით.

$\mathscr{K}$ კატეგორია ეწოდება ერთობლიობას, რომელიც შედგება $ob(\mathscr{K})$ კლასისგან, $\{\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)\}_{X,Y \in ob(\mathscr{K})}$ და $\{Q_{X,Y,Z}\}_{X,Y,Z \in ob(\mathscr{K})}$ ოჯახებისგან და აკმაყოფილებს პირობებს:

C1). ასოციაციურობა. ნებისმიერი $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(Y,Z)$ და $h \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(Z,W)$ მორფიზმისთვის

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \, .$$

C2). ერთეულის არსებობა. ყოველი $X \in ob(\mathscr{K})$ ობიექტისთვის არსებობს ისეთი $1_X \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,X)$ მორფიზმი, რომ ყოველი $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)$ მორფიზმისთვის

$$f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f \, .$$

$1_X : X \to X$ მორფიზმს ეწოდება იგივური ან ერთეულოვანი მორფიზმი. ცხადია, იგივური მორფიზმი ერთადერთია. მართლაც, თუ $1_Y : Y \to Y$ და $1'_Y : Y \to Y$ არის იგივური მორფიზმები, მაშინ

$$1_Y = 1_Y \circ 1'_Y = 1'_Y \, .$$

მოვიყვანოთ კატეორიათა მაგალითები.

სიმრავლეების და მათ შორის ასახვების კატეგორია $\mathbf{Sets}$. მისი ობიექტების კლასი $ob(\mathbf{Sets})$ შედგება ყველა სიმრავლისგან. სიმრავლე $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(X,Y)$ შედგება ყველა $f: X \to Y$ ასახვისგან.

სასრული სიმრავლეების და მათ შორის ასახვების კატეგორია $\mathbf{Sets_f}$. მისი ობიექტების კლასი $ob(\mathbf{Sets_f})$ შედგება ყველა სასრული სიმრავლისგან. სიმრავლე $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets_f}}(X,Y)$ შედგება ყველა $f: X \to Y$ ასახვისგან.

სიმრავლეების და მათ შორის ინექციური (სურექციული) ასახვების კატეგორია $\mathbf{Sets_I}$ ($\mathbf{Sets_S}$). მისი ობიექტების კლასი შედგება ყველა სიმრავლისგან. სიმრავლე $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets_I}}(X,Y)$ ($\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets_S}}(X,Y)$) შედგება მხოლოდ ყველა ინექციური (სურექციული) $f: X \to Y$ ასახვისგან.

მონიშნულწერტილიანი სიმრავლეების და მათ შორის ასახვების კატეგორია $\mathbf{Sets_*}$. მისი ობიექტების კლასი $ob(\mathbf{Sets_*})$ შედგება ყველა მონიშნულწერტილიანი სიმრავლისგან. სიმრავლე $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets_*}}(X,Y)$ შედგება ყველა $f: X \to Y$ მონიშნულწერტილიანი სიმრავლეების ასახვისგან.

ჯგუფების და მათ შორის ჰომომორფიზმების კატეგორია $\mathbf{Gr}$. ამ კატეგორიის ობიექტების კლასი $ob(\mathbf{Gr})$ შედგება ყველა ჯგუფისგან. სიმრავლე $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Gr}}(X,Y)$ შედგება ყველა $f: X \to Y$ ჰომომორფიზმისგან.

აბელური ჯგუფების და მათ შორის ჰომომორფიზმების კატეგორია $\mathbf{Ab}$. ამ კატეგორიის ობიექტების კლასი $ob(\mathbf{Ab})$ შედგება ყველა აბელური ჯგუფისგან. სიმრავლე $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ab}}(X,Y)$ შედგება ყველა $f: X \to Y$ ჰომომორფიზმისგან.

ნებისმიერი $\mathscr{K}$ კატეგორიისათვის განიმარტება კატეგორია $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}$, რომლის ობიექტებია $\mathscr{K}$ კატეგორიის $f: X \to Y$ მორიზმები. $\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}$ კატეგორიის მორფიზმი $f: X \to Y$ მორფიზმიდან $g: Z \to W$ მორფიზმში არის (g, g') წყვილი, სადაც g და g' არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ისეთი $g: X \to Z$ და $g': Y \to W$ მორფიზმები, რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g\downarrow & & \downarrow g' \\ Z & \xrightarrow[f']{} & W \end{array},$$

ანუ სრულდება ტოლობა $g' \circ f = f' \circ g$.

ყოველი წინარედალაგებული X სიმრავლე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც კატეგორია $x \in X$ ობიექტებით. x ობიექტიდან y ობიექტში მორფიზმთა სიმრავლე შედგება ერთი მორფიზმისგან, რომელიც ცალსახად შეესაბამება $x \le y$ მიმართებას. ვგულისხმობთ, რომ ეს სიმრავლე ცარიელია, როცა x და y ობიექტები, როგორც X სიმრავლის ელემენტები, არ არის ერთმანეთის სადარი.

$\mathscr{L}$ კატეგორიას ეწოდება $\mathscr{K}$ კატეგორიის ქვეკატეგორია, $\mathscr{L} \subset \mathscr{K}$, თუ სრულდება პირობები:

i). $ob(\mathscr{L}) \subset ob(\mathscr{K})$.

ii). $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(X,Y) \subset \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)$, $X, Y \in ob(\mathscr{L})$.

iii). $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(X,Y)$ და $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(Y,Z)$ მორფიზმების კომპოზიცია

$\mathscr{L}$ ქვეკატეგორიაში ემთხვევა მათ კომპოზიციას $\mathscr{K}$ კატეგორიაში.

$\mathscr{L}$ ქვეკატეგორიას ეწოდება $\mathscr{K}$ კატეგორიის სრული ქვეკატეგორია, თუ ნებისმიერი $X, Y \in ob(\mathscr{L})$ ობიექტისათვის $\mathrm{Mor}_{\mathscr{L}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)$.

შევნიშნოთ, რომ $\mathbf{Sets_f}$ კატეგორია არის $\mathbf{Sets}$ კატეგორიის სრული ქვეკატეგორია. ასევე, $\mathbf{Ab}$ კატეგორია არის $\mathbf{Gr}$ კატეგორიის სრული ქვეკატეგორია. ცხადია, $\mathbf{Sets}$ კატეგორიის $\mathbf{Sets_I}$ და $\mathbf{Sets_S}$ ქვეკატეგორიები არაა სრული ქვეკატეგორიები.

ვთქვათ $f: X \to Y$ და $g: Y \to X$ არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის მორფიზმები. თუ სრულდება ტოლობა $g \circ f = 1_X$, მაშინ g მორფიზმს ეწოდება f მორფიზმის მარცხენა შებრუნებული, ხოლო f მორფიზმს g მორფიზმის მარჯვენა შებრუნებული. $f: X \to Y$ მორფიზმის მიმართ ორმხრივ შებრუნებული ეწოდება ისეთ $g: Y \to X$ მორფიზმს, რომელიც ერთდროულად არის f მორფიზმის როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა შებრუნებული, ე.ი. $g \circ f = 1_X$ და $f \circ g = 1_Y$. $f: X \to Y$ მორფიზმს ეწოდება X და Y ობიექტების იზომორფიზმი, თუ არსებობს f მორფიზმის მიმართ ორმხრივ შებრუნებული $g: Y \to X$ მორფიზმი. შევნიშნოთ, რომ $f: X \to Y$ მორფიზმის ორმხრივ შებრუნებული ცალსახად განისაზღვრება.

მართლაც, ვთქვათ $f: X \to Y$ მორფიზმს გააჩნია ორი ორმხრივ შებრუნებული მორფიზმი $g: Y \to X$ და $h: Y \to X$. ცხადია,

$$h = h \circ 1_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = 1_X \circ g = g.$$

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი

წინადადება 1.3.1. *თუ* $f: X \to Y$ *მორფიზმს გააჩნია მარჯვენა შებრუნებული და მარცხენა შებრუნებული, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა და* f *არის იზომორფიზმი.* □

$\mathscr{K}$ კატეგორიის $\mathscr{L}$ კატეგორიაში ფუნქტორი $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ ეწოდება შესაბამისობას, რომელიც $\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველ X ობიექტს შეუსაბამებს $\mathscr{L}$ კატეგორიის $F(X)$ ობიექტს, ხოლო $\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველ $f: X \to Y$ მორფიზმს $\mathscr{L}$ კატეგორიის $F(f): F(X) \to F(Y)$ მორფიზმს და აკმაყოფილებს პირობებს:

F1). $\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ მორფიზმისთვის

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

F2). $\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველ X ობიექტისთვის $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

დუალური გზით განიმარტება კოფუნქტორის ცნება.

$\mathscr{K}$ კატეგორიის $\mathscr{L}$ კატეგორიაში კოფუნქტორი $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ ეწოდება

შესაბამისობას, რომელიც $\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველ X ობიექტს შეუსაბამებს $\mathscr{L}$ კატეგორიის $F(X)$ ობიექტს, ხოლო $\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველ $f: X \to Y$ მორფიზმს $\mathscr{L}$ კატეგორიის $F(f): F(Y) \to F(X)$ მორფიზმს და აკმაყოფილებს პირობებს:

CF1). $\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ მორფიზმისთვის $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

CF2). $\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველ X ობიექტისთვის $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

მოვიყვანოთ ფუნქტორების მაგალითები.

იგივური ფუნქტორი $Id: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$. იგი მოიცემა ფორმულებით

$$Id(X) = X\,,\ X \in ob(\mathscr{K})$$

და

$$Id(f) = f,\ \ f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)\,.$$

მუდმივი ფუნქტორი $C: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$. ვთქვათ A არის $\mathscr{L}$ კატეგორიის ფიქსირებული ობიექტი. განმარტების თანახმად,

$$C(X) = A\,,\ X \in ob(\mathscr{K})$$

და

$$C(f) = 1_A,\ \ f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)\,.$$

მივიწყების ფუნქტორი $F: \mathbf{Gr} \to \mathbf{Sets}$. F ფუნქტორი $X \in ob(\mathbf{Gr})$ ჯგუფს შეუსაბამებს ჯგუფის ალგებრული სტრუქტურის გარეშე X სიმრავლეს, ხოლო $\mathscr{K}$ კატეგორიის $f: X \to Y$ ჰომომორფიზმს შეუსაბამებს X და Y სიმრავლეებს შორის $f: X \to Y$ ასახვას.

ნებისმიერი $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ და $G: \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ ფუნქტორისთვის განიმარტება მათი კომპოზიცია $G \circ F: \mathscr{K} \to \mathscr{M}$. განმარტების თანახმად,

$$(G \circ F)(X) = G(F(X))\,,\ X \in ob(\mathscr{K})$$

და

$$(G \circ F)(f) = G(F(f)),\ f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)\,.$$

ვთქვათ A არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი ფიქსირებული ობიექტი. ბუნებრივი წესით განიმარტება $F_A: \mathscr{K} \to \mathbf{Sets}$ ფუნქტორი და $F^A: \mathscr{K} \to \mathbf{Sets}$ კოფუნქტორი.

განმარტების თანახმად, ყოველი $X \in ob(\mathscr{K})$ ობიექტისთვის

$$F_A(X) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(A, X)$$

და

$$F^A(X) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(X, A)\,.$$

$\mathscr{K}$ კატეგორიის ყოველი $f: X \to Y$ მორფიზმისთვის ბუნებრივი წესით განიმარტება $F_A(f)$ და $F^A(f)$ ასახვები. განმარტების თანახმად,

$F_A(f): \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(A, X) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(A, Y)$ ასახვა მოიცემა ფორმულით

$$F_A(f)(¨) = f \circ ¨,\ ¨ \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, X),$$

ხოლო $F^A(f): \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(Y, A) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(X, A)$ ასახვა მოიცემა ფორმულით

$$F^A(f)(¨) = ¨ \circ f, ¨ \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(Y, A).$$

F_A არის ფუნქტორი. მართლაც, ყოველი $X \in ob(\mathscr{K})$ ობიექტისთვის

$$F_A(1_X)(¨) = 1_X \circ ¨ = ¨, ¨ \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, X)$$

და

$$1_{F_A(X)}(¨) = 1_{\mathrm{Mor}_{\mathbf{Sets}}(A,X)}(¨) = ¨, ¨ \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(A, X).$$

ამრიგად, $F_A(1_X) = 1_{F_A(X)}$.

ვთქვათ $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის მორფიზმები. ცხადია, ყოველი $¨: A \to X$ მორფიზმისთვის

$$F_A(g \circ f)(¨) = (g \circ f) \circ ¨$$

და

$$(F_A(g) \circ F_A(f))(¨) = F_A(g)(F_A(f)(¨)) = F_A(g)(f \circ ¨) = g \circ (f \circ ¨) = (g \circ f) \circ ¨ .$$

ამრიგად, $F_A(g \circ f) = F_A(g) \circ F_A(f)$.

ანალოგიურად შემოწმდება, რომ F^A არის კოფუნქტორი.

წინადადება 1.3.2. *ვთქვათ $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ არის ფუნქტორი (კოფუნქტორი). თუ X და Y არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის იზომორფული ობიექტები, მაშინ $F(X)$ და $F(Y)$ არის $\mathscr{L}$ კატეგორიის იზომორფული ობიექტები.*

დამტკიცება. ვთქვათ $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ არის ფუნქტორი. მართლაც, პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $f: X \to Y$ და $g: Y \to Z$ მორფიზმები, რომ $f \circ g = 1_X$ და $g \circ f = 1_Y$. გარდა ამისა, $F(f): F(X) \to F(Y)$ და $F(g): F(Y) \to F(Z)$ მორფიზმებისთვის გვაქვს

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$$

და

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) = F(1_Y) = 1_{F(Y)}.$$

ამრიგად, $F(X)$ და $F(Y)$ ობიექტები იზომორფულია.

ანალოგიურად შემოწმდება ის შემთხვევა, როცა $F: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ არის კოფუნქტორი. □

ვთქვათ $F, G: \mathscr{K} \to \mathscr{L}$ არის ფუნქტორები (კოფუნქტორები). F ფუნქტორის G ფუნქტორში ბუნებრივი გარდაქმნა $\Phi: F \to G$ ეწოდება მორფიზმების ოჯახს $\Phi = \{\Phi_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in ob(\mathscr{K})}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი $f: X \to Y$ მორფიზმისთვის სრულდება

ტოლობა

$$\Phi_Y \circ F(f) = G(f) \circ \Phi_X \quad (\Phi_X \circ F(f) = G(f) \circ \Phi_Y)\,,$$

ანუ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \Phi_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} F(X) & \xleftarrow{F(f)} & F(Y) \\ \Phi_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ G(X) & \xleftarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array} \right).$$

ვთქვათ $g : B \to A$ არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ფიქსირებულ B და A ობიექტებს შორის მორფიზმი. ავაგოთ ბუნებრივი გარდაქმნა F_B და F_A ფუნქტორებს შორის.

ვთქვათ X არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი ობიექტი. განვმარტოთ მორფიზმი $\Phi_X : F_A(X) \to F_B(X)$. განმარტების თანახმად,

$$\Phi_X(¨) = ¨ \circ g\,,\ ¨ \in F_A(X)\,.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\Phi = \{\Phi_X : F_A(X) \to F_B(X)\}_{X \in ob(\mathscr{K})}$ არის ბუნებრივი გარდაქმნა. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ნებისმიერი მორფიზმი. შევამოწმოთ, რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} F_A(X) & \xrightarrow{F_A(f)} & F_A(Y) \\ \Phi_X \downarrow & & \downarrow \Phi_Y \\ F_B(X) & \xrightarrow[F_B(f)]{} & F_B(Y). \end{array}$$

ვთქვათ $¨ \in F_A(X)$. სამართლიანია ტოლობები

$$(\Phi_Y \circ F_A(f))(¨) = \Phi_Y(F_A(f)(¨)) = \Phi_Y(f \circ ¨) = (f \circ ¨) \circ g,$$

$$(F_B(f) \circ \Phi_X)(¨) = F_B(f)(¨ \circ g) = f \circ (¨ \circ g)\,.$$

ამრიგად, $F_B(f) \circ \Phi_X = \Phi_Y \circ F_A(f)$.

$\Phi : F \to G$ ბუნებრივ გარდაქმნას ეწოდება ექვივალენტობა F და G ფუნქტორებს შორის, თუ ყოველი $X \in ob(\mathscr{K})$ ობიექტისთვის $\Phi(X) : F(X) \to G(X)$ მორფიზმი არის $\mathscr{L}$ კატეგორიის იზომორფიზმი.

ახლა განვმარტოთ $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტების ჯამის და ნამრავლის ცნებები.

ვთქვათ მოცემულია $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s \in S}$ ოჯახი. $(X, \{i_s\}_{s \in S})$ წყვილს, სადაც X არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტი, ხოლო $\{i_s\}_{s \in S}$ X_s ობიექტიდან X ობიექტში $\mathscr{K}$ კატეგორიის $i_s : X_s \to X$, $s \in S$ მორფიზმების ოჯახი, ეწოდება $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტების $\{X_s\}_{s \in S}$ ოჯახის ჯამი, თუ სრულდება პირობა:

$\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი Y ობიექტისა და $j_s : X_s \to Y$, $s \in S$ მორფიზმებისათვის არსებობს $\mathscr{K}$ კატეგორიის ერთადერთი ისეთი $h : X \to Y$ მორფიზმი, რომ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $h \circ i_s = j_s$, ანუ

კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "h"] & & Y \\ & X_s \arrow[ul, "i_s"] \arrow[ur, "j_s"'] & \end{tikzcd}.$$

თუ $(X,\{i_s\}_{s\in S})$ წყვილი არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ჯამი, მაშინ ვწერთ $X=\underset{s\in S}{\oplus} X_s$.

წინადადება 1.3.3. *ვთქვათ $(X,\{i_s\}_{s\in S})$ წყვილი არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ჯამი. თუ $(X',\{i'_s\}_{s\in S})$ წყვილი არის ობიექტთა იმავე ოჯახის ჯამი, მაშინ არსებობს $\mathscr{K}$ კატეგორიის ისეთი $\cdot : X\to X'$ იზომორფიზმი, რომ $\cdot\circ i_s=i'_s$, ანუ კომუტაციურია დიაგრამა*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\cdot"] & & X' \\ & X_s \arrow[ul, "i_s"] \arrow[ur, "i'_s"'] & \end{tikzcd}.$$

დამტკიცება. მართლაც, ობიექტთა ჯამის განმარტების თანახმად, არსებობს $\mathscr{K}$ კატეგორიის ისეთი $\cdot : X\to X'$ და $\cdot' : X'\to X$ მორფიზმები, რომ ყოველი $s\in S$ ინდექსისთვის $\cdot\circ i_s=i'_s$ და $\cdot'\circ i'_s=i_s$. ცხადია,

$$i_s=\cdot'\circ i'_s=\cdot'\circ(\cdot\circ i_s)=(\cdot'\circ\cdot)\circ i_s$$

და

$$i'_s=\cdot\circ i_s=\cdot\circ(\cdot'\circ i'_s)=(\cdot\circ\cdot')\circ i'_s.$$

შევნიშნოთ, რომ $i'_s=1_{X'}\circ i'_s$ და $i_s=1_X\circ i_s$. ობიექტთა ჯამის განმარტებიდან გამომდინარე, $\cdot\circ\cdot'=1_{X'}$ და $\cdot'\circ\cdot=1_X$. ამრიგად, $\cdot : X\to X'$ არის იზომორფიზმი. □

შევნიშნოთ, თუ $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა ჯამი არსებობს, მაშინ ის ერთადერთია იზომორფიზმამდე სიზუსტით.

$\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ნამრავლი ეწოდება $(X,\{p_s\}_{s\in S})$ წყვილს, სადაც X არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტი, ხოლო $\{p_s\}_{s\in S}$ არის X ობიექტიდან X_s ობიექტში $\mathscr{K}$ კატეგორიის ისეთი $p_s : X\to X_s$, $s\in S$ მორფიზმების ერთობლიობა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი Y ობიექტისა და $q_s : Y\to X_s$, $s\in S$ მორფიზმისათვის არსებობს $\mathscr{K}$ კატეგორიის ერთადერთი ისეთი $h:Y\to X$ მორფიზმი, რომ ყოველი $s\in S$ ინდექსისთვის $p_s\circ h=q_s$, ანუ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{h} & Y \\ p_s \searrow & & \swarrow q_s \\ & X_s & \end{array} \quad .$$

თუ $(X, \{i_s\}_{s\in S})$ წყვილი არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ნამრავლი, მაშინ დავწერთ $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$.

სამართლიანია შემდეგი წინადადება.

წინადადება 1.3.4. *ვთქვათ $(X, \{p_s\}_{s\in S})$ წყვილი არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ნამრავლი, თუ $(X', \{p'_s\}_{s\in S})$ აგრეთვე არის ობიექტთა იმავე ოჯახის ნამრავლი, მაშინ არსებობს $\mathscr{K}$ კატეგორიის ისეთი $¨ : X \to X'$ იზომორფიზმი, რომ $p'_s \circ ¨ = p_s$, $s \in S$ ანუ კომუტაციურია დიაგრამა*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{¨} & X' \\ p_s \searrow & & \swarrow p'_s \\ & X_s & \end{array} \quad .$$

დამტკიცება. მართლაც, ობიექტთა ნამრავლის განმარტების თანახმად, არსებობს $\mathscr{K}$ კატეგორიის ისეთი $¨ : X \to X'$ და $¨' : X' \to X$ მორფიზმები, რომ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $p_s = p'_s \circ ¨$ და $p'_s = p_s \circ ¨'$. ცხადია,

$$p_s = p'_s \circ ¨ = (p_s \circ ¨') \circ ¨ = p_s \circ (¨' \circ ¨)$$

და

$$p'_s = p_s \circ ¨' = (p'_s \circ ¨) \circ ¨' = p'_s \circ (¨ \circ ¨') .$$

გარდა ამისა, სამართლიანია $p_s = p_s \circ 1_X$ და $p_s' = p'_s \circ 1_{X'}$ ტოლობები. ობიექტთა ნამრავლის განმარტებიდან გამომდინარე, $¨ \circ ¨' = 1_{X'}$ და $¨' \circ ¨ = 1_X$. ამრიგად, $¨ : X \to X'$ არის იზომორფიზმი. □

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, თუ $\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა ნამრავლი არსებობს, მაშინ ის ერთადერთია იზომორფიზმამდე სიზუსტით.

Sets კატეგორიის $\{X_s\}_{s\in S}$ ობიექტთა ოჯახის ჯამი არის X_s, $s \in S$ სიმრავლეთა დიზიუნქციური ჯამი $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$, რომელიც განიმარტება, როგორც გაერთიანება $\bigcup\limits_{s\in S} (s \times A_s)$.

Sets კატეგორიის $\{A_s\}_{s\in S}$ ობიექტთა ოჯახის ნამრავლი არის X_s, $s \in S$ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი $\prod\limits_{s\in S} X_s$.

Gr კატეგორიის $\{A_s\}_{s\in S}$ ობიექტთა ჯამის და ნამრავლის განმარტება მოცემულია 1.2 პარაგრაფში და შესაბამისად წარმოადგენს

A_s, $s \in S$ ობიექტების, როგორც ჯგუფების ჯამს და ნამრავლს.

სავარჯიშო 1.3.5. 1).ვთქვათ A და B არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ფიქსირებული ობიექტები, ხოლო $g : A \to B$ ფიქსირებული მორფიზმი. ააგეთ ბუნებრივი გარდაქმნა $F^A : \mathscr{K} \to \mathbf{Sets}$ და $F^B : \mathscr{K} \to \mathbf{Sets}$ ფუნქტორებს შორის.

2).ვთქვათ $\mathscr{K}$ და $\mathscr{L}$ არის კატეგორიები. აჩვენეთ, არსებობს კატეგორია, რომლის ობიექტებია ფუნქტორები, ხოლო მორფიზმები ფუნქტორებს შორის ბუნებრივი გარდაქმნები.

3).ვთქვათ B არის $\mathscr{K}$ კატეგორიის ფიქსირებული ობიექტი. $f : X \to B$ მორფიზმიდან $g : Y \to B$ მორფიზმში $\ddot{} : f \to g$ მორფიზმი ეწოდება $\mathscr{K}$ კატეგორიის ისეთ $\ddot{} : X \to Y$ მორფიზმს, რომლისთვისაც $g \circ \ddot{} = f$.

აჩვენეთ, $\mathscr{K}$ კატეგორიის ნებისმიერი X ობიექტიდან B ობიექტში მორფიზმების კლასი ქმნის კატეგორიას $\mathscr{K}_{\mathbf{B}}$.

4).აჩვენეთ, 2)მაგალითში აგებულ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების ნამრავლი, თუ $\mathscr{L}$ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების ნამრავლი.

5).ვთქვათ $\mathscr{K}$ არის სიმრავლეების და ასახვების **Sets** კატეგორია. აჩვენეთ, ფიქსირებული $B \in ob(\mathbf{Sets})$ სიმრავლისთვის არსებობს ობიექტების ნამრავლი $\mathbf{Sets}_{\boldsymbol{B}}$ კატეგორიაში.

6).აჩვენეთ, $\mathbf{Sets}_{\boldsymbol{B}}$ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების ჯამი.

7).აჩვენეთ, თუ $\mathscr{K}$ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების ნამრავლი, მაშინ აგრეთვე $\mathbf{Mor}_{\mathscr{K}}$ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების ნამრავლი.

8).ვთქვათ B არის $\mathbf{Gr}$ კატეგორიის ფიქსირებული ჯგუფი. აჩვენეთ, შესაბამისობები

$$F(A) = A \times B,\ A \in ob(\mathbf{Gr})$$

და

$$F(f) = f \times 1_B,\ f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Gr}}(A, B)$$

ინდუცირებს ფუნქტორს $F : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Gr}$.

9).ვთქვათ B და B' არის $\mathbf{Gr}$ კატეგორიის ფიქსირებული ჯგუფები. ააგეთ $\Phi : F \to F'$ ბუნებრივი გარდაქმნა 8) მაგალითში განმარტებულ F და F' ფუნქტორებს შორის.

აჩვენეთ, აგებული $\Phi : F \to F'$ ბუნებრივი გარდაქმნა არის ექვივალენტობა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა B და B' ჯგუფები არის იზომორფული.

10).ვთქვათ $(A, a_0) \in ob(\mathbf{Sets}_*)$ არის $\mathbf{Sets}_*$ კატეგორიის ფიქსირებული ობიექტი. ყოველი $(X, x_0) \in ob(\mathbf{Sets}_*)$ ობიექტისთვის განვიხილოთ $(\mathscr{A}(X), {}_*) = A \times X / A \times \{x_0\} \bigcup \{a_0\} \times X$ ფაქტორ-სიმრავლე,

სადაც $*$ არის $q : A\times X \to \mathscr{A}(X)$ ფაქტორ-ასახვის მიმართ $A\times\{x_0\}\bigcup\{a_0\}\times X$ ქვესიმრავლის ანასახი. ყოველი $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ასახვისთვის განმარტეთ $\mathscr{A}(f) : \mathscr{A}(X) \to \mathscr{A}(Y)$ ასახვა და აჩვენეთ, რომ არსებობს $\mathscr{A} : \mathbf{Sets}_* \to \mathbf{Sets}_*$ ფუნქტორი.

ლიტერატურა

[Ar-P]. A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomarev, Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises, Springer, 1984.
[Bu-D]. I. Bucur and A. Deleanu, Introduction to the Theory of Categories and Functions, London-New York-Sydney, 1968.
[Do]. A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
[E-S]. S. Eilenberg and N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.
[M].S. Mac Lane, Homology, Academic Press, 1963.
[M1]. S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, Springer-Verlag, New York,1971.
[F]. L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, Academic Press, 1973.
[Je]. T. Jech, Set Theory, Springer, 2006.
[L]. S. Leng, Algebra, Springer, 2005.
[Md-Ka-U-Kh]. L.Mdzinarishvili, N. Kachakhidze, D. Ugulava and N. Khomeriki, Discrete Mathemathics, Georgian Technical University, 2012.
[Sp]. E.Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill,1966.

თავი II .ტოპოლოგიურ სივრცეთა კატეგორია

2.1. ტოპოლოგიური სივრცეები, ღია სიმრავლე, მიდამო, შიგა წერტილი, ბაზისი, მიდამოთა სისტემა, ბირთვი და მათი თვისებები

ვთქვათ მოცემულია X სიმრავლე. X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $^{2} = \{U_s\}_{s\in S}$ ოჯახს ეწოდება X სიმრავლის ტოპოლოგიური სტრუქტურა ან ტოპოლოგია, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

O1). X სიმრავლე და $\varnothing$ სიმრავლე ეკუთვნის ^{2} ოჯახს.

O2). თუ U_s და $U_{s'}$ ეკუთვნის ^{2} ოჯახს, მაშინ $U_s \cap U_{s'}$ თანაკვეთაც ეკუთვნის ^{2} ოჯახს.

O3). თუ $S' \subset S$ და ნებისმიერი $s \in S'$ ინდექსისთვის $U_s \in {}^{2}$, მაშინ $\bigcup\limits_{s\in S'} U_s \in {}^{2}$.

$(X, {}^{2})$ წყვილს ეწოდება ტოპოლოგიური სივრცე ან, უბრალოდ, სივრცე. სიმარტივისთვის $(X, {}^{2})$ წყვილის ნაცვლად ხშირად, როცა ვიცით რომელ ტოპოლოგიურ სტრუქტურაზეა საუბარი და არ ვთვლით საჭიროდ მისი დაფიქსირების აუცილებლობას, ვიხმართ მხოლოდ აღნიშვნას X. X ტოპოლოგიური სივრცის ელემენტებს ეწოდებათ წერტილები, ხოლო X სიმრავლის ქვესიმრავლეებს, რომლებიც ეკუთვნის ^{2} ტოპოლოგიურ სტრუქტურას, ეწოდებათ ღია სიმრავლეები. O1), O2) და O3) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ X ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლეებს გააჩნიათ შემდეგი თვისებები.

i). X და $\varnothing$ სიმრავლეები არის X ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლეები.

ii). X ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ორი ღია სიმრავლის, და მაშასადამე, ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ღია სიმრავლეების თანაკვეთა არის ღია სიმრავლე.

iii). X ტოპოლოგიური სივრცის როგორც სასრული, ისე არასასრული რაოდენობის ღია სიმრავლეთა გაერთიანება არის ღია სიმრავლე.

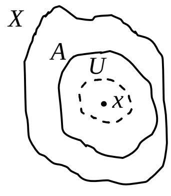
X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილის (A ქვესიმრავლის) მიდამო ეწოდება მის მომცველ ნებისმიერ ღია სიმრავლეს.

წინადადება 2.1.1. *X ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლე არის ღია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველ $x \in A$ წერტილს აქვს ისეთი U მიდამო, რომ $U \subset A$.*

დამტკიცება. ვთქვათ A არის ღია სიმრავლე. მაშინ ყოველ $x \in A$ წერტილს აქვს U მიდამო, კერძოდ A, რომელიც შედის A სიმრავლეში. ვთქვათ, ახლა პირიქით, ყოველი $x \in A$ წერტილს აქვს

ისეთი U_x მიდამო, რომ $U_x \subset A$. ცხადია, $A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$ და iii) თვისების თანახმად, A არის ღია სიმრავლე. □

ვთქვათ x არის X ტოპოლოგიური სივრცის წერტილი, ხოლო A ქვესიმრავლე. x წერტილს ეწოდება A სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს მისი ისეთი U მიდამო, რომ $U \subset A$.



2.1.1 წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე ღიაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ყოველი წერტილი არის შიგა წერტილი. □

მოვიყვანოთ ტოპოლოგიურ სივრცეთა მაგალითები.

მაგალითი 2.1.2. ვთქვათ X არის ნებისმიერი სიმრავლე, ხოლო $^2 = \{X, \varnothing\}$. ცხადია, O1), O2) და O3) პირობები სრულდება. ^{2} ტოპოლოგიურ სტრუქტურას ეწოდება ანტიდისკრეტული, ხოლო $(X, ^2)$ ტოპოლოგიურ სივრცეს ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცე. ამრიგად, ანტიდისკრეტული სივრცის მხოლოდ ორი ქვესიმრავლე, X და $\varnothing$ არის ღია. ამ სივრცის ყოველ $x \in X$ წერტილს აქვს ერთადერთი მიდამო, მთელი X სივრცე.

მაგალითი 2.1.3. ვთქვათ X არის ნებისმიერი სიმრავლე, ხოლო ^{2} X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის ოჯახი. ცხადია, ^{2} ოჯახი აკმაყოფილებს O1), O2) და O3) პირობებს. ^{2} ოჯახს ეწოდება დისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ხოლო $(X, ^2)$ წყვილს დისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცე. დისკრეტული სივრცის ყოველი ქვესიმრავლე, კერძოდ, ერთწერტილიანი ქვესიმრავლეც, არის ღია, რადგან ის ეკუთვნის ^{2} ოჯახს. $x \in X$ წერტილის მიდამოს როლში შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი მისი მომცველი ქვესიმრავლე, კერძოდ, თვითონ x წერტილიც.

მაგალითი 2.1.4. ვთქვათ $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}^{n-\text{ჯერ}}$ არის n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე. როგორც ვიცით, მანძილი $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ და $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ წერტილებს შორის მოიცემა ფორმულით

$$d(x, y) = \{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\}^{1/2}.$$

განვიხილოთ $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის $B(x, £) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < £\}$

ქვესიმრავლე.

$B(x,£)$ სიმრავლეს ეწოდება r რადიუსიანი ღია ბირთვი ცენტრით x წერტილში.

სიმბოლოთი B^n ავღნიშნოთ ერთეულ რადიუსიანი ღია ბირთვი კოორდინატთა სათავის მქონე ცენტრით.

ვთქვათ $²$ არის $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის ყველა იმ U ქვესიმრავლეების ოჯახი, რომელთა ნებისმიერი $x \in U$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $B(x,£)$ ღია ბირთვი, რომ $B(x,£) \subset U$.

ცხადია, $²$ ოჯახი აკმაყოფილებს O1) პირობას. ბუნებრივია, $\varnothing \in ²$. ასევე ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}^n$ წერტილისთვის ყოველი $B(x,£) \subset \mathbb{R}^n$, ე.ი. $\mathbb{R}^n \in ²$.

ვთქვათ $U,V \in ²$. მაშინ ნებისმიერი $x \in U \cap V$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $£_1 > 0$ და $£_2 > 0$ რიცხვები, რომ $B(x,£_1) \subset U$ და $B(x,£_2) \subset V$. ვთქვათ $£ = \min\{£_1,£_2\}$. ცხადია, $B(x,£) \subset B(x,£_1) \subset U$ და $B(x,£) \subset B(x,£_2) \subset V$. აქედან გამომდინარე, $B(x,£) \subset U \cap V$. ამრიგად, $U \cap V \in ²$.

ვთქვათ $U_s \in ², s \in S$. ვაჩვენოთ $\bigcup\limits_{s\in S} U_s \in ²$. ყოველი $x \in \bigcup\limits_{s\in S} U_s$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $s_0 \in S$ ინდექსი, რომ $x \in U_{s_0}$. ამიტომ არსებობს ისეთი $£ > 0$ რიცხვი, რომ $B(x,£) \subset U_{s_0}$. ცხადია, $B(x,£) \subset \bigcup\limits_{s\in S} U_s$. აქედან გამომდინარე, $\bigcup\limits_{s\in S} U_s \in ²$.

$\mathbb{R}^n$ ევკლიდურ სივრცეზე განმარტებულ ასეთ $²$ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას ეწოდება ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ხოლო $(\mathbb{R}^n,²)$ ტოპოლოგიურ სივრცეს ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ევკლიდური სივრცე.

ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ ღერძის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურა $²$ შედგება ყველა ისეთი U ქვესიმრავლისგან, რომელთა ნებისმიერ $x \in U$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $£ > 0$ რიცხვი, რომ $(x-£, x+£) \subset U$.

მაგალითი 2.1.5. ვთქვათ Y არის $(X,²)$ ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე. განვიხილოთ Y ქვესიმრავლის ქვესიმრავლეთა ოჯახი $²_Y = \{U \bigcap Y \mid U \in ²\}$. ვაჩვენოთ, რომ $²_Y$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა Y ქვესიმრავლეზე.

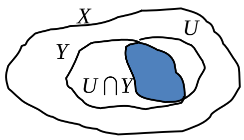
O1).ეს პირობა სრულდება. მართლაც, $Y = X \bigcap Y$, $X \in ²$ და $\varnothing = \varnothing \cap Y$, $\varnothing \in ²$. ამიტომ $²_Y$ ოჯახის განმარტების თანახმად $Y, \varnothing \in ²_Y$.

O2).ვთქვათ $U,V \in ²_Y$. მაშინ $U = U_1 \bigcap Y, U_1 \in ²$ და $V = V_1 \bigcap Y, V_1 \in ²$.

რადგან $U_1 \bigcap V_1 \in {}^2$, ამიტომ ტოლობიდან
$$U \bigcap V = (U_1 \bigcap Y) \bigcap (V_1 \bigcap Y) = (U_1 \bigcap V_1) \bigcap Y$$
გამომდინარეობს $U \bigcap V \in {}^2{}_Y$.

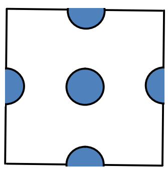
O3).ვთქვათ $U_s \in {}^2{}_Y$, $s \in S$. ცხადია, $U_s = G_s \bigcap Y$, $G_s \in {}^2, s \in S$. რადგან $\bigcup\limits_{s \in S} G_s \in {}^2$, ამიტომ ტოლობიდან
$$\bigcup_{s \in S} U_s = \bigcup_{s \in S} (G_s \bigcap Y) = (\bigcup_{s \in S} G_s) \bigcap Y$$
გამომდინარეობს $\bigcup\limits_{s \in S} U_s \in {}^2{}_Y$.

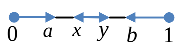
$(Y, {}^2{}_Y)$ წყვილს ეწოდება $(X, {}^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე. ამრიგად, $(Y, {}^2{}_Y)$ ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლეებია $(X, {}^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლეების Y ქვესიმრავლესთან თანაკვეთები.



ვთქვათ $I = [0,1]$, ხოლო $I^n = \overbrace{I \times I \times \ldots \times I}^{n-ჯერ}$. ცხადია, I^n და $I = I^1$ შესაბამისად არის $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის და $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის ქვესიმრავლეები. ამიტომ I^n და I არის მათი ქვესივრცეები.

ამრიგად, $\mathbb{R}^2$ ევკლიდური სიბრტყის I^2 ქვესივრცის ღია სიმრავლეებს წარმოადგენენ $B(x,£) \bigcap I^2$ სახის თანაკვეთები, სადაც $B(x,£)$ არის ღია ბირთვები. ასევე, ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის $I = I^1$ ჩაკეტილი ინტერვალის ღია სიმრავლეებს წარმოადგენს $U \bigcap I$ სახის სიმრავლეები, სადაც U არის $\mathbb{R}$ ღერძის ღია სიმრავლე. I ქვესივრცის ღია სიმრავლეები იქნება $[0,a)$, (x,y) და $(b,1]$ სახის სიმრავლეები, სადაც $0 < a < x < y < b < 1$. ცხადია, $[0,a)$ და $(b,1]$ სიმრავლეები არ არის ღია $\mathbb{R}$ ღერძზე.





შევნიშნოთ, ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი რაოდენობის ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა შეიძლება არ იყოს ღია სიმრავლე. ვთქვათ $U_n = [0,1/n), n \in \mathbb{N}^+$. სიმრავლეები $U_n, n \in \mathbb{N}^+$ არის ღია I ქვესივრცეში,

მაგრამ $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{0\}$ არაა I ქვესივრცის ღია სიმრავლე.

მაგალითი 2.1.6. ვთქვათ X არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო ² არის X სიმრავლის სასრული სიმრავლეების დამატებებისაგან და ცარიელი სიმრავლისაგან შემდგარი ოჯახი. ² არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე:

O1). $\varnothing \in$ ² ოჯახს პირობის თანახმად. რადგან $X = X \setminus \varnothing$, ამიტომ $X \in$ ² .

O2).ვთქვათ $U, V \in$ ² . მაშინ $U = X \setminus A$ და $V = X \setminus B$, სადაც A და B არის X სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლეები. ცხადია,

$$U \bigcap V = (X \setminus A) \bigcap (X \setminus B) = X \setminus (A \bigcup B).$$

ამრიგად, $U \bigcap V \in$ ², რადგან ის არის სასრული $A \bigcup B$ სიმრავლის დამატება.

O3).ვთქვათ $U_s \in$ ² , $s \in S$. პირობის თანახმად $U_s = X \setminus A_s$, სადაც ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის A_s არის სასრული სიმრავლე. ტოლობიდან

$$\bigcup_{s\in S} U_s = \bigcup_{s\in S} (X \setminus A_s) = X \setminus \bigcap_{s\in S} A_s$$

ჩანს, რომ $\bigcup\limits_{s\in S} U_s$ არის სასრული სიმრავლის დამატება. ამიტომ $\bigcup\limits_{s\in S} U_s \in$ ² .

$(X,$ ²$)$ წყვილს ეწოდება სასრული ტოპოლოგიის მქონე ტოპოლოგიური სივრცე.

მაგალითი 2.1.7. ვთქვათ X არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო x_0 მისი ფიქსირებული ელემენტი. ვთქვათ ² არის ოჯახი, რომელიც შედგება x_0 წერტილის არ შემცველი ყველა ქვესიმრავლისაგან და სასრული სიმრავლეების დამატებებისაგან. ² არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე. ეს ფაქტი შემოწმდება ისევე, როგორც 2.1.6 მაგალითში. $(X,$ ²$)$ სივრცის ყველა ერთწერტილიანი სიმრავლე, გარდა x_0 წერტილისა, არის ღია.

როგორც ვხედავთ ერთი და იგივე X სიმრავლეზე შეიძლება მოცემული იყოს სხვადასხვა ტოპოლოგიური სტრუქტურები. ასე მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე შეიძლება განვსაზღვროთ დისკრეტული, ანტიდისკრეტული, ბუნებრივი, სასრული და კიდევ სხვა ტოპოლოგიური სტრუქტურები.

ბუნებრივი წესით განიმარტება X სიმრავლის ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა სიმრავლეზე დალაგების მიმართება. ვიტყვით, რომ X სიმრავლის ² ტოპოლოგიური სტრუქტურა ნაკლებია ან ტოლი X სიმრავლის « ტოპოლოგიურ სტრუქტურაზე და დავწერთ ² $\le$ « , თუ ² $\subseteq$ « . ხშირად აგრეთვე ამბობენ ² ტოპოლოგიური სტრუქტურა უფრო სუსტია, ვიდრე « ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

X სიმრავლის ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა შორის შეიძლება იყოს ისეთი ორი ტოპოლოგიური სტრუქტურა, რომლებიც არ არის ერთმანეთთან დალაგების მიმართებით დაკავშირებული. X უსასრულო სიმრავლეზე შემოვიტანოთ 2.1.7 მაგალითში მოცემული ტოპოლოგიური სტრუქტურები. ვთქვათ ² და « შესაბამისად არის x_0 და y_0 ელემენტების მიმართ განმარტებული ტოპოლოგიური სტრუქტურები. ცხადია, x_0 ღიაა $(X,«)$ სივრცეში, მაგრამ არაა ღია $(X,²)$ სივრცეში. ასევე y_0 ღიაა $(X,²)$ სივრცეში, მაგრამ არაა ღია $(X,«)$ სივრცეში. ამრიგად, $« \not\subset ²$ და $² \not\subset «$, ე.ი. არ სრულდება არც $² \leq «$ და არც $« \leq ²$ მიმართებები.

ცხადია, X სიმრავლეზე მოცემულ ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა ოჯახი არის მიმართული სიმრავლე. მისი უმცირესი ელემენტი არის ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ხოლო უდიდესი ელემენტი დისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

X ტოპოლოგიური სივრცის ² ტოპოლოგიური სტრუქტურის ± ქვეოჯახს, $± \subset ²$, ეწოდება X სივრცის ბაზისი, თუ ყოველი ღია სიმრავლე არის ± ოჯახის რაიმე ელემენტთა გაერთიანება.

$± \subset ²$ ქვეოჯახს ეწოდება X სივრცის წინარებაზისი, თუ ± ოჯახის ყველა სასრული რაოდენობის ელემენტის თანაკვეთები ქმნის X სივრცის ბაზისს.

განვიხილოთ X ტოპოლოგიური სივრცის ყველა ბაზისის შესაბამისი $|±|$ კარდინალური რიცხვების სიმრავლე. იგი სავსებით დალაგებულია $<$ მიმართებით. ამ სიმრავლის უმცირეს ელემენტს ეწოდება X სივრცის წონა და აღინიშნება სიმბოლოთი $w(X)$.

X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილის მიდამოთა რაიმე $±(x)$ ოჯახს ეწოდება X სივრცის ბაზისი x წერტილში, თუ x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს x წერტილის ისეთი $V \in ±(x)$ მიდამო, რომ $V \subset U$.

X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილში ბაზისების შესაბამისი კარდინალური რიცხვების უმცირეს ელემენტს ეწოდება X სივრცის მახასიათებელი x წერტილში და აღინიშნება სიმბოლოთი $ª(X,x)$.

X სივრცის ნებისმიერი x წერტილის მახასიათებლების სიმრავლის სუპრემუმს ეწოდება X სივრცის მახასიათებელი და აღინიშნება სიმბოლოთი $ª(X)$. თუ $ª(X) \leq \aleph_0$, მაშინ ამბობენ, X სივრცე აკმაყოფილებს თვლადობის პირველ აქსიომას, ხოლო თუ $w(X) \leq \aleph_0$, მაშინ ამბობენ, X სივრცე აკმაყოფილებს თვლადობის მეორე აქსიომას.

ცხადია, თუ ± არის X სივრცის ბაზისი, მაშინ x წერტილის შემცველი ყველა $U \in ±$ სიმრავლის ოჯახი $±(x)$ არის X სივრცის x

წერტილში ბაზისი. აქედან გამომდინარე, $ª(X,x) \le w(X)$. ამიტომ, თუ სივრცე აკმაყოფილებს თვლადობის მეორე აქსიომას, მაშინ ის აგრეთვე აკმაყოფილებს თვლადობის პირველ აქსიომასაც.

შევნიშნოთ, X სივრცის ყოველ x წერტილში $\pm(x)$ ბაზისების გაერთიანება $\pm = \bigcup_{x\in X} \pm(x)$ არის X სივრცის ბაზისი. დისკრეტული X სივრცის ყოველი x წერტილის მახასიათებელი $ª(X,x)=1$, რადგან ერთწერტილიანი $\{x\}$ სიმრავლე არის ღია, $\pm(x)=\{x\}$ და $|\pm(x)|=1$. თუ X დისკრეტული სივრცის სიმძლავრე $|X|>\aleph_0$, მაშინ $w(X)=|X|$ და $w(X)>\aleph_0$. შევნიშნოთ, ამ შემთხვევაში $ª(X)=1$. ამრიგად, თვლადობის პირველი აქსიომის მქონე სივრცე საზოგადოდ არ არის თვლადობის მეორე აქსიომის მქონე სივრცე.

ტოპოლოგიურ სივრცეთა მნიშვნელოვან კლასს ჰქმნის სივრცეები, რომელთაც გააჩნიათ თვლადი ბაზისი, ე.წ. თვლადბაზისიანი სივრცეები. სივრცეთა ასეთ კლასს მიეკუთვნება n-განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცეები. $\mathbb{R}^n$ სივრცის თვლად ბაზისს ჰქმნის რაციონალური კოორდინატების მქონე ცენტრის და რაციონალური სიგრძის რადიუსების მქონე ღია ბირთვები. არათვლადი ბაზისის მქონე სივრცის მაგალითს წარმოადგენს დისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე ნებისმიერი არათვლადი სიმრავლე.

წინადადება 2.1.8. *$(X,^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის ^{2} ტოპოლოგიური სტრუქტურის $\pm$ ქვეოჯახი არის X ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცის ნებისმიერი x წერტილისთვის და ამ წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $V\in\pm$ ელემენტი, რომ $x\in V\subset U$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\pm$ არის X სივრცის ბაზისი, ხოლო $x\in X$ ნებისმიერი წერტილი. ვთქვათ x ეკუთვნის რაიმე U ღია სიმრავლეს. ცხადია, $U=\bigcup_{V\in\pm} V$. აქედან გამომდინარე, არსებობს ისეთი $V\in\pm$ ელემენტი, რომ $x\in V\subset U$.

ვთქვათ, შებრუნებით, ნებისმიერი $x\in X$ წერტილისთვის და მისი მომცველი ნებისმიერი U ღია სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $V\in\pm$ ელემენტი, რომ $x\in V\subset U$. ვთქვათ G არის X სივრცის ნებისმიერი ღია სიმრავლე. პირობის ძალით, ყოველი $x\in G$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $V_x\in\pm$ ელემენტი, რომ $x\in V_x\subset G$. ამიტომ $G=\bigcup_{x\in G} V_x$. ამრიგად, $\pm$ არის X სივრცის ბაზისი. □

წინადადება 2.1.9. *$(X,^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი $\pm$ ბაზისი აკმაყოფილებს პირობებს:*

B1). *ნებისმიერი $U,V\in\pm$ ელემენტისთვის და ნებისმიერი $x\in U\cap V$*

წერტილისთვის არსებობს ისეთი $W \in \pm$ *ელემენტი, რომ* $x \in W \subset U \bigcap V$ *.*

B2). *ნებისმიერი* $x \in X$ *წერტილისთვის არსებობს ისეთი* $U \in \pm$ *ელემენტი, რომ* $x \in U$ *.*

დამტკიცება. ცხადია, $U \bigcap V$ და X არის ღია სიმრავლეები. ამიტომ 2.1.8 წინადადებიდან გამომდინარეობს B1) და B2) პირობები. □

$(X,^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის ყოველ x წერტილში ბაზისების ოჯახს $\{\pm(x)\}_{x \in X}$ ეწოდება X სივრცის მიდამოთა სისტემა.

წინადადება 2.1.10. $(X,^2)$ *ტოპოლოგიური სივრცის* $\{\pm(x)\}_{x \in X}$ *მიდამოთა სისტემა აკმაყოფილებს პირობებს:*

BN1). *ნებისმიერი* $x \in X$ *წერტილისთვის* $\pm(x) \neq \varnothing$ *და ყოველი* $U \in \pm(x)$ *ელემენტისთვის* $x \in U$ *.*

BN2). *თუ* $x \in U \in \pm(y)$ *, მაშინ არსებობს ისეთი* $V \in \pm(x)$ *ელემენტი, რომ* $V \subset U$ *.*

BN3). *ნებისმიერი* $U,V \in \pm(x)$ *ელემენტისთვის არსებობს ისეთი* $W \in \pm(x)$ *ელემენტი, რომ* $W \subset U \bigcap V$ *.*

დამტკიცება. BN1). X სივრცე არის x წერტილის მიდამო, ამიტომ არსებობს x წერტილის ისეთი $U \in \pm(x)$ მიდამო, რომ $x \in U \subset X$, ე.ი. $\pm(x) \neq \varnothing$. $\pm(x)$ ოჯახის განმარტების თანახმად, ყოველი $U \in \pm(x)$ ელემენტისთვის $x \in U$.

BN2). თუ $x \in U \in B(y)$, მაშინ U არის x წერტილის მიდამო. ამიტომ არსებობს ისეთი $V \in \pm(x)$, რომ $U \subset V$.

BN3). თუ $U,V \in \pm(x)$, მაშინ $U \bigcap V$ არის x წერტილის მიდამო. ამიტომ არსებობს ისეთი $W \in \pm(x)$, რომ $W \subset U \bigcap V$.□

X ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლის ბირთვი ეწოდება მასში შემავალი X სივრცის ყველა ღია სიმრავლეების გაერთიანებას. იგი აღინიშნება სიმბოლოთი $\operatorname{Int} A$.

ცხადია, A სიმრავლის ბირთვი არის ღია სიმრავლე და ის არის A სიმრავლეში შემავალი მაქსიმალური ღია სიმრავლე, მაქსიმალური იმ თვალსაზრისით, რომ A სიმრავლეში შემავალი X სივრცის ღია სიმრავლეები და, კერძოდ, A სიმრავლის როგორც ქვესივრცის ღია სიმრავლეები, შედის მასში.

წინადადება 2.1.11. *ტოპოლოგიური სივრცის სიმრავლე ღიაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ემთხვევა თავის ბირთვს.*

დამტკიცება. ვთქვათ $A \subset X$ სიმრავლე არის X ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლე. მაშინ A , როგორც ღია სიმრავლე, შედის $\operatorname{Int} A$ ბირთვში. ამიტომ $A \subset \operatorname{Int} A$ და $\operatorname{Int} A \subset A$ ჩართვებიდან მივიღებთ $\operatorname{Int} A = A$.

შებრუნებით, თუ X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე

აკმაყოფილებს პირობას $\operatorname{Int} A = A$, მაშინ A არის ღია სიმრავლე, რადგან $\operatorname{Int} A$ ბირთვი არის ღია სიმრავლე. □

ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე. $\operatorname{Int}: 2^X \to 2^X$ შესაბამისობას, რომელიც X სივრცის ყოველ A ქვესიმრავლეს უთანადებს მის $\operatorname{Int} A$ ბირთვს, ეწოდება ბირთვის ოპერატორი. განსაზღვრების თანახმად,

$$\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int} A, \quad A \in 2^X.$$

თეორემა 2.1.12. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე. $\operatorname{Int}: 2^X \to 2^X$ ბირთვის ოპერატორს აქვს თვისებები:*

IO1). $\operatorname{Int}(X) = X$.

IO2). $\operatorname{Int}(A) \subset A$.

IO3). $\operatorname{Int}(A \bigcap B) = \operatorname{Int}(A) \bigcap \operatorname{Int}(B)$.

IO4). $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(A)$.

დამტკიცება.IO1). X არის ღია სიმრავლე. 2.1.11 წინადადების თანახმად,

$$\operatorname{Int}(X) = \operatorname{Int} X = X .$$

IO2). ბირთვის ოპერატორისა და ბირთვის განმარტების თანახმად, $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int} A \subset A$.

IO3). ვთქვათ A და B არის X სივრცის ქვესიმრავლეები. ვიცით, რომ $\operatorname{Int} A \subset A$ და $\operatorname{Int} B \subset B$. აქედან გამომდინარე, $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset A \bigcap B$. სიმრავლე $\operatorname{Int} A \bigcap \operatorname{Int} B$, როგორც ღია სიმრავლეების თანაკვეთა არის ღია, ამიტომ $\operatorname{Int} A \bigcap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int} A \bigcap B$. ამრიგად,

$$\operatorname{Int}(A) \bigcap \operatorname{Int}(B) = \operatorname{Int} A \bigcap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int} A \bigcap B = \operatorname{Int}(A \bigcap B) .$$

ჩართვებიდან $A \bigcap B \subset A$ და $A \bigcap B \subset B$ გამომდინარეობს $\operatorname{Int} A \bigcap B \subset \operatorname{Int} A$ და $\operatorname{Int} A \bigcap B \subset \operatorname{Int} B$, ანუ $\operatorname{Int} A \bigcap B \subset \operatorname{Int} A \bigcap \operatorname{Int} B$. ცხადია,

$$\operatorname{Int}(A \bigcap B) = \operatorname{Int} A \bigcap B \subset \operatorname{Int} A \bigcap \operatorname{Int} B = \operatorname{Int}(A) \bigcap \operatorname{Int}(B) .$$

მიღებული ჩართვებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\operatorname{Int}(A \bigcap B) = \operatorname{Int}(A) \bigcap \operatorname{Int}(B).$$

IO4). ბირთვის ოპერატორის განმარტებისა და 2.1.11 წინადადების თანახმად,

$$\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(A) . \square$$

X ანტიდისკრეტული სივრცის ნებისმიერი A საკუთრივი ქვესიმრავლისთვის $\operatorname{Int} A = \varnothing$, ხოლო $\operatorname{Int} X = X$. დისკრეტული სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისთვის $\operatorname{Int} A = A$. ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის ყოველი $[a,b]$ ჩაკეტილი სეგმენტისათვის $\operatorname{Int}[a,b] = (a,b)$, ხოლო ყოველი $x \in \mathbb{R}$

წერტილისათვის $\operatorname{Int}\{x\}=\varnothing$, რადგან $\{x\}$ არაა ღია სიმრავლე და არ შეიცავს არცერთ არაცარიელ ღია სიმრავლეს. სასრული ტოპოლოგიის მქონე უსასრულო X სივრცის ყოველი A სასრული სიმრავლის $X \setminus A$ დამატების ზირთვი $\operatorname{Int}(X \setminus A) = X \setminus A$, ხოლო $\operatorname{Int} A = \varnothing$.

სავარჯიშო 2.1.13. 1).ვთქვათ ${}^{2}{}_{s}$, $s \in S$ არის X სიმრავლეზე განმარტებული ტოპოლოგიური სტრუქტურები. აჩვენეთ, ამ სტრუქტურათა თანაკვეთა $\bigcap\limits_{s\in S} {}^{2}{}_{s}$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე.

2).ვთქვათ $\mathbb{R}^2$ ევკლიდურ სიბრტყეზე მოცემულია ² ტოპოლოგიური სტრუქტურა, რომლის წინარებაზისი შედგება ყველა წრფისაგან. აღწერეთ $(\mathbb{R}^2, {}^2)$ სივრცის ღია სიმრავლეები და იპოვეთ მისი წონა $w((\mathbb{R}^2, {}^2))$.

3).ვთქვათ $\mathbb{R}^2$ სიბრტყის ტოპოლოგიური სტრუქტურის წინარებაზისია მოცემული (a) წრფის პარალელური წრფეები. აჩვენეთ, $U \subset \mathbb{R}^2$ სიმრავლე ღიაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $x \in U$ წერტილისთვის U სიმრავლეში შედის x წერტილზე გამავალი და (a) წრფის პარალელური წრფე.

4).ვთქვათ $F = \{0\} \bigcup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. აჩვენეთ, $\mathbb{R} \setminus F$ არის ღია სიმრავლე ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძზე.

5).ვთქვათ $\mathbb{Q}$ არის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის რაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \varnothing$ და $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \varnothing$.

6).აჩვენეთ, $X = [0;+\infty)$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ოჯახი ${}^2 = \{\varnothing, X, (a,+\infty) \mid a \ge 0\}$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

7).ვთქვათ $X = \mathbb{R}^2$ და ² არის ოჯახი, რომელიც შედგება ღია $r > 0$ რადიუსიანი, $(0,0)$ ცენტრის მქონე წრეებისგან და $\varnothing$, $\mathbb{R}^2$ სიმრავლეებისგან. აჩვენეთ, ² არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე.

8).ვთქვათ $X = \mathbb{R}$ და ² შედგება $\varnothing$ სიმრავლისაგან და ყველა უსასრულო სიმრავლისგან. შეამოწმეთ არის თუ არა ² ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\mathbb{R}$ ღერძზე.

9).აღწერეთ $X = \{a,b,c\}$ სიმრავლის ტოპოლოგიური სტრუქტურები და ღია სიმრავლეები.

10).ვთქვათ $(X, {}^2)$ არის ტოპოლოგიური სივრცე და $Y = X \bigcup \{a\}$. ქმნის თუ არა ტოპოლოგიურ სტრუქტურას Y სიმრავლეზე ოჯახი

$$« = \{X \bigcup \{a\} \mid u \in {}^2\} \bigcup \{\varnothing\}?$$

2.2. ჩაკეტილი სიმრავლე, სიმრავლის ჩაკეტვა, შეხების, საზღვრის და დაგროვების წერტილები, სივრცის სიმკვრივე

ვთქვათ (X,τ) არის ტოპოლოგიური სივრცე. X სივრცის $F \subset X$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი სიმრავლე, თუ მისი დამატება $X \setminus F$ არის ღია სიმრავლე.

თეორემა 2.2.1. *X სივრცის ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა $\mathscr{C}$ ოჯახი აკმაყოფილებს პირობებს:*

C1). $X, \varnothing \in \mathscr{C}$.

C2). *თუ* $F_1 \in \mathscr{C}$ *და* $F_2 \in \mathscr{C}$ *, მაშინ* $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{C}$ *.*

C3). *თუ* $F_s \in \mathscr{C}$, $s \in S$ *, მაშინ* $\bigcap\limits_{s \in S} F_s \in \mathscr{C}$ *.*

დამტკიცება. C1). რადგან $\varnothing = X \setminus X$ და $\varnothing$ არის ღია სიმრავლე, ამიტომ X არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ე.ი. $X \in \mathscr{C}$. ასევე, რადგან $X = X \setminus \varnothing$ და X არის ღია სიმრავლე, ამიტომ $\varnothing$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ე.ი. $\varnothing \in \mathscr{C}$.

C2). ვთქვათ $F_1, F_2 \in \mathscr{C}$, მაშინ $U_1 = X \setminus F_1$ და $U_2 = X \setminus F_2$ არის X სივრცის ღია სიმრავლეები. დე მორგანის ფორმულის თანახმად,

$$(X \setminus F_1) \bigcap (X \setminus F_2) = X \setminus (F_1 \bigcup F_2).$$

ცხადია, $(X \setminus F_1) \bigcap (X \setminus F_2)$ თანაკვეთა არის ღია სიმრავლე. ამიტომ $F_1 \bigcup F_2$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე და ის ეკუთვნის $\mathscr{C}$ ოჯახს.

C3). ვთქვათ $F_s \in \mathscr{C}$, $s \in S$. ცხადია, $U_s = X \setminus F_s, s \in S$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე. დე მორგანის ფორმულის თანახმად,

$$\bigcup_{s \in S} (X \setminus F_s) = X \setminus \bigcap_{s \in S} F_s.$$

ცხადია, $\bigcup\limits_{s \in S} (X \setminus F_s)$ გაერთიანება არის ღია სიმრავლე. ამიტომ $\bigcap\limits_{s \in S} F_s$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ე.ი. $\bigcap\limits_{s \in S} F_s \in \mathscr{C}$. □

C1), C2) და C3) პირობების თანახმად X ტოპოლოგიური სივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეებს აქვთ თვისებები:

i). X და $\varnothing$ არის X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლეები.

ii). X ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ორი და, მაშასადამე, ნებისმიერი სასრული რაოდენობის ჩაკეტილი სიმრავლეების გაერთიანება არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

iii). X ტოპოლოგიური სივრცის როგორც სასრული, ისე უსასრულო რაოდენობის ჩაკეტილ სიმრავლეთა თანაკვეთა არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

ვთქვათ Y არის X სივრცის ქვესივრცე. ცხადია, $G \subset Y$ ქვესიმრავლე ჩაკეტილია Y ქვესივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $G = F \bigcap Y$, სადაც F არის X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე.

X ანტიდისკრეტულ სივრცეში მხოლოდ ორი სიმრავლე, X და $\varnothing$ არის ჩაკეტილი. დისკრეტულ X სივრცეში კი ყოველი F ქვესიმრავლე არის ჩაკეტილი, რადგან მისი დამატება $X \setminus F$ არის ღია სიმრავლე. ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველი ჩაკეტილი $[a,b]$ სეგმენტი არის ჩაკეტილი სიმრავლე, რადგან მისი დამატება $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ არის ღია სიმრავლე. ასევე, ყოველი $a \in \mathbb{R}$ წერტილიც არის ჩაკეტილი სიმრავლე, რადგან მისი დამატება $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ არის ღია სიმრავლე. სასრული ტოპოლოგიის მქონე უსასრულო X სიმრავლის ნებისმიერი სასრული F ქვესიმრავლე არის ჩაკეტილი, რადგან სასრული ტოპოლოგიის სტრუქტურის განმარტების თანახმად, $X \setminus F$ არის ღია სიმრავლე.

ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეს, რომელიც ერთდროულად არის ღიაც და ჩაკეტილიც, ეწოდება ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე. ნებისმიერ $(X,{}^2)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში, O1) და C1) პირობების თანახმად, X და $\varnothing$ არის ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეები. დისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი ქვესიმრავლე არის ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე. $X = (\{a,b\},{}^2)$ ორწერტილიან სივრცეში, სადაც ${}^2 = \{\{a\},\{a,b\},\varnothing\}$, $\{a\}$ არის ღია, მაგრამ არაა ჩაკეტილი, ხოლო $\{b\}$ არის ჩაკეტილი, მაგრამ არაა ღია.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი რაოდენობის ჩაკეტილ სიმრავლეთა გაერთიანება შეიძლება არ იყოს ჩაკეტილი სიმრავლე. მაგალითად, ვთქვათ $F_n = [1/n, 1],\ n \in \mathbb{N}$. ყოველი F_n არის $I = [0,1]$ სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე, რადგან მისი დამატება $I \setminus F_n = [0, 1/n)$ არის ღია სიმრავლე I სივრცეში. გაერთიანება $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = (0,1]$ არ არის I სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე, რადგან მისი დამატება $\{0\}$ არაა I სივრცის ღია სიმრავლე.

$(X,{}^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ სიმრავლის ჩაკეტვა ეწოდება A სიმრავლის მომცველ ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა თანაკვეთას და იგი აღინიშნება სიმბოლოთი $\overline{A}$.

განმარტების თანახმად, $\overline{A} = \bigcap_{A \subset F \in \mathscr{C}} F$. C3) პირობიდან გამომდინარე, A სიმრავლის ჩაკეტვა $\overline{A}$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ცხადია, $\overline{A}$ არის A სიმრავლის მომცველი მინიმალური ჩაკეტილი სიმრავლე, მინიმალური იმ თვალსაზრისით, რომ ის შედის ყოველ ჩაკეტილ სიმრავლეში, რომელიც მოიცავს A სიმრავლეს.

წინადადება 2.2.2. *თუ* $A \subset B$, *მაშინ* $\overline{A} \subset \overline{B}$.

დამტკიცება. მართლაც, თუ $B \subset G \in \mathscr{C}$, მაშინ $A \subset G \in \mathscr{C}$. ამიტომ ოჯახი $\{G \mid B \subset G \in \mathscr{C}\}$ შედის ოჯახში $\{F \mid A \subset F \in \mathscr{C}\}$. აქედან

გამომდინარე,

$$\overline{A}=\bigcap_{A\subset F\in\mathscr{C}} F\subset\bigcap_{B\subset G\in\mathscr{C}} G=\overline{B}. \ \square$$

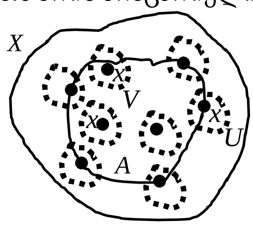
ვთქვათ Y არის X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე. ცხადია, Y ქვესივრცის B ქვესიმრავლის ჩაკეტვა Y ქვესივრცეში არის B სიმრავლის X სივრცეში ჩაკეტვისა და Y ქვესივრცის თანაკვეთა.

წინადადება 2.2.3. X *ტოპოლოგიური სივრცის* A *ქვესიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $A=\overline{A}$.

დამტკიცება. ვთქვათ A არის ჩაკეტილი სიმრავლე, მაშინ $A\in\{F\mid A\subset F\in\mathscr{C}\}$. ამიტომ $\overline{A}\subset A$. მეორეს მხრივ, $A\subset\overline{A}$, ანუ $A=\overline{A}$.

ვთქვათ, შებრუნებით, $A=\overline{A}$. რადგან A სიმრავლის ჩაკეტვა $\overline{A}$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ამიტომ ამ ტოლობის გამო A სიმრავლეც იქნება ჩაკეტილი სიმრავლე. □

X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილს ეწოდება $A\subset X$ სიმრავლის შეხების წერტილი, თუ x წერტილის ნებისმიერი მიდამოსა და A სიმრავლის თანაკვეთა არის არაცარიელი სიმრავლე.



წინადადება 2.2.4. *ვთქვათ* A *არის* X *ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე.* X *სივრცის* x *წერტილი ეკუთვნის* A *სიმრავლის ჩაკეტვას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* x *არის* A *სიმრავლის შეხების წერტილი.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x\in\overline{A}$ და U არის x წერტილის ნებისმიერი მიდამო. ვაჩვენოთ $U\cap A\neq\varnothing$. დავუშვათ სრულდება საწინააღმდეგო, $U\bigcap A=\varnothing$. ცხადია, A შედის $X\setminus U$ ჩაკეტილ სიმრავლეში. რადგან $\overline{A}$ არის A სიმრავლის მომცველი მინიმალური ჩაკეტილი სიმრავლე, ამიტომ $\overline{A}\subset X\setminus U$. აქედან გამომდინარე, $x\notin\overline{A}$. ეს კი პირობას ეწინააღმდეგება, ე.ი. ჩვენი დაშვება არასწორია. ამიტომ $U\cap A\neq\varnothing$. ამრიგად, x არის A სიმრავლის შეხების წერტილი.

ახლა დავუშვათ შებრუნებით, ვთქვათ $x\in X$ არის A სიმრავლის შეხების წერტილი. ვაჩვენოთ $x\in\overline{A}$. დავუშვათ სრულდება საწინააღმდეგო, $x\notin\overline{A}$. მაშინ არსებობს A სიმრავლის მომცველი ისეთი F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $x\notin F$. აქედან გამომდინარე, $x\in U=X\setminus F$ ღია სიმრავლეს. რადგან $A\subset F$, ამიტომ $A\bigcap(X\setminus F)=\varnothing$ და, მაშასადამე, $A\bigcap U=\varnothing$. ეს კი ეწინააღმდეგება იმ პირობას, რომ x არის A სიმრავლის შეხების წერტილი. ამრიგად, ჩვენი დაშვება

არასწორია, ე.ი. $x \in \overline{A}$. □

შედეგი 2.2.5. *ვთქვათ A არის X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე. მაშინ X სივრცის ნებისმიერი x წერტილისათვის ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

i). $x \in \overline{A}$.

ii). *ნებისმიერი $U \in \pm(x)$ სიმრავლისთვის $U \bigcap A \neq \varnothing$.*

დამტკიცება.2.2.4 წინადადებიდან გამომდინარეობს i) $\Leftrightarrow$ ii) ექვივალენტობა. □

შედეგი 2.2.6.*თუ X ტოპოლოგიური სივრცის U ღია სიმრავლისა და A ქვესიმრავლის თანაკვეთა $U \bigcap A = \varnothing$, მაშინ $U \bigcap \overline{A} = \varnothing$.*

დამტკიცება. მართლაც, თუ $x \in U \bigcap \overline{A}$, მაშინ $x \in U$ და $x \in \overline{A}$. 2.2.5 წინადადების თანახმად, $U \bigcap A \neq \varnothing$, რაც არ შეიძლება. ამიტომ $U \bigcap \overline{A} = \varnothing$. □

შედეგი 2.2.7.*თუ U და V არის X ტოპოლოგიური სივრცის თანაუკვეთი ღია სიმრავლეები, მაშინ $U \bigcap \overline{V} = \varnothing$ და $\overline{U} \bigcap V = \varnothing$.* □

X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახს ეწოდება ლოკალურად სასრული, თუ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს მისი ისეთი U ღია მიდამო, რომ $U \bigcap X_s = \varnothing$ ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისათვის, გარდა ინდექსთა სასრული რაოდენობისა.

წინადადება 2.2.8. *X ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი $\{X_s\}_{s\in S}$ ლოკალურად სასრული ოჯახისთვის*

$$\overline{\bigcup_{s\in S} X_s} = \bigcup_{s\in S} \overline{X}_s .$$

დამტკიცება. ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $X_s \subset \bigcup_{s\in S} X_s$, ამიტომ $\overline{X}_s \subset \overline{\bigcup_{s\in S} X_s}$. აქედან გამომდინარე, $\bigcup_{s\in S} \overline{X}_s \subset \overline{\bigcup_{s\in S} X_s}$.

ვაჩვენოთ შებრუნებული ჩართვა. ვთქვათ $x \in \overline{\bigcup_{s\in S} X_s}$. პირობის თანახმად არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \cap X_{s_i} \neq \varnothing$ ყოველი $s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსისთვის და $U \bigcap X_s = \varnothing$ ყოველი $s \in S' = S \setminus \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ ინდექსისთვის. ცხადია, $U \bigcap \bigcup_{s\in S'} X_s = \varnothing$. ამიტომ $x \notin \overline{\bigcup_{s\in S'} X_s}$. ტოლობიდან

$$\overline{\bigcup_{s\in S} X_s} = \overline{\bigcup_{s\in S'} X_s} \bigcup \overline{\bigcup_{i=1}^{n} X_{s_i}}$$

გამომდინარეობს, რომ

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} X_{s_i}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{X_{s_i}} \subset \bigcup_{s\in S} \overline{X_s} .$$

ამრიგად, $\overline{\bigcup_{s\in S} X_s} \subset \bigcup_{s\in S} \overline{X}_s$. □

შედეგი 2.2.9. *ჩაკეტილ სიმრავლეთა ლოკალურად სასრული ოჯახის ელემენტების გაერთიანება არის ჩაკეტილი სიმრავლე.* □

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 2.2.10. *$(X,{}^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი $A \subset X$ სიმრავლისათვის*

$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in \operatorname{Int} A = \bigcup_{U\subset A} U, U \in {}^2$. ცხადია, x ეკუთვნის რომელიმე $U \subset A$ ღია სიმრავლეს. შევნიშნოთ, რომ $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$. ამიტომ $x \notin \overline{X \setminus A}$, ე.ი. $x \in X \setminus \overline{X \setminus A}$. ამრიგად, $\operatorname{Int} A \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$.

ახლა, ვთქვათ, შებრუნებით, $x \in X \setminus \overline{X \setminus A}$. მაშინ $x \in X$ წერტილი არ ეკუთვნის $\overline{X \setminus A}$ სიმრავლეს, ე.ი. იარსებებს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $U \subset A$, ანუ $U \subset \operatorname{Int} A$, რაც თავისთავად ნიშნავს $x \in \operatorname{Int} A$. ამრიგად, $X \setminus \overline{X \setminus A} \subset \operatorname{Int} A$. □

X ტოპოლოგიური სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა 2^X სიმრავლის ნებისმიერ A ელემენტს შევუსაბამოთ X სივრცის ქვესიმრავლე $\overline{A}$. ასე განიმარტება ოპერატორი $\mathrm{CL} : 2^X \to 2^X$, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$\mathrm{CL}(A) = \overline{A}, \ \ A \in 2^X.$$

CL ოპერატორს ეწოდება ჩაკეტვის ოპერატორი.

თეორემა 2.2.11. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე. $\mathrm{CL} : 2^X \to 2^X$ ჩაკეტვის ოპერატორს აქვს შემდეგი თვისებები:*

CL1). $\mathrm{CL}(\varnothing) = \varnothing$.

CL2). $A \subset \mathrm{CL}(A)$.

CL3). $\mathrm{CL}(A \bigcup B) = \mathrm{CL}(A) \bigcup \mathrm{CL}(B)$.

CL4). $\mathrm{CL}(\mathrm{CL}(A)) = \mathrm{CL}(A)$.

დამტკიცება. CL1). CL ოპერატორის განმარტებისა და 2.2.3 წინადადების თანახმად, $\mathrm{CL}(\varnothing) = \overline{\varnothing} = \varnothing$.

CL2). CL ოპერატორისა და სიმრავლის ჩაკეტვის განმარტების თანახმად $A \subset \overline{A} = \mathrm{CL}(A)$. ამრიგად, $A \subset \mathrm{CL}(A)$.

CL3). ვთქვათ A და B არის X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეები. რადგან $A \subset \overline{A}$, $B \subset \overline{B}$, ამიტომ $A \bigcup B \subset \overline{A} \bigcup \overline{B}$. აქედან გამომდინარე, გვაქვს $\overline{A \bigcup B} \subset \overline{A} \bigcup \overline{B}$. ამრიგად,

$$\mathrm{CL}(A \bigcup B) = \overline{A \bigcup B} \subset \overline{A} \bigcup \overline{B} = \mathrm{CL}(A) \bigcup \mathrm{CL}(B).$$

ჩართვებიდან $A \subset A \bigcup B$ და $B \subset A \bigcup B$ მივიღებთ $\overline{A} \subset \overline{A \bigcup B}$ და

$\overline{B} \subset \overline{A \bigcup B}$. ანუ $\overline{A} \bigcup \overline{B} \subset \overline{A \bigcup B}$. ამრიგად,

$$\mathrm{CL}(A) \bigcup \mathrm{CL}(B) = \overline{A} \bigcup \overline{B} \subset \overline{A \bigcup B} = \mathrm{CL}(A \bigcup B).$$

მიღებული ჩართვებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\mathrm{CL}(A \bigcup B) = \mathrm{CL}(A) \bigcup \mathrm{CL}(B).$$

CL4). $\overline{A}$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. 2.2.3 წინადადების თანახმად $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. ამიტომ

$$\mathrm{CL}(\mathrm{CL}(A)) = \mathrm{CL}(\overline{A}) = \overline{(\overline{A})} = \overline{A} = \mathrm{CL}(A). \square$$

ანტიდისკრეტული X სივრცის ყოველი A საკუთრივი სიმრავლის ჩაკეტვა $\overline{A} = X$. დისკრეტული X სივრცის ყოველი A ქვესიმრავლისთვის $\overline{A} = A$. ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის ყოველი (a,b) ღია ინტერვალისთვის $\overline{(a,b)} = [a,b]$, ხოლო ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}$ წერტილისთვის $\overline{\{x\}} = \{x\}$, რადგან $\{x\}$ წერტილი არის ჩაკეტილი სიმრავლე. სასრული ტოპოლოგიის მქონე უსასრულო სიმრავლის ყოველი F სასრული სიმრავლისთვის $\overline{F} = F$, რადგან F არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

X ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ სიმრავლის საზღვარი ეწოდება სიმრავლეს

$$\mathrm{Fr}A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

ცხადია, A სიმრავლის და მისი $X \setminus A$ დამატების საზღვრები ტოლია, რადგან

$$\mathrm{Fr}(X \setminus A) = \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus (X \setminus A)} = \overline{X \setminus A} \cap \overline{A} = \mathrm{Fr}A.$$

სიმრავლის საზღვარი, როგორც ორი ჩაკეტილი სიმრავლის თანაკვეთა, არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

წინადადება 2.2.12. *X ტოპოლოგიური სივრცის A სიმრავლის საზღვარი ტოლია $\overline{A} \setminus \mathrm{Int}\, A$ სიმრავლის.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in \mathrm{Fr}A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, მაშინ $x \in \overline{A}$ და $x \in \overline{X \setminus A}$. ვაჩვენოთ $x \notin \mathrm{Int}\, A$. დავუშვათ, $x \in \mathrm{Int}\, A$. მაშინ x ეკუთვნის A სიმრავლეში შემავალ რაიმე U ღია სიმრავლეს. ამიტომ $U \cap (X \setminus A) = \varnothing$, ე.ი. x არ არის $X \setminus A$ სიმრავლის შეხების წერტილი, ანუ $x \notin \overline{X \setminus A}$. ეს კი ეწინააღმდეგება $x \in \overline{X \setminus A}$ პირობას. ამდენად, $x \notin \mathrm{Int}\, A$ სიმრავლეს. აქედან გამომდინარე, $x \in \overline{A} \setminus \mathrm{Int}\, A$. ამრიგად, $\mathrm{Fr}A \subset \overline{A} \setminus \mathrm{Int}\, A$.

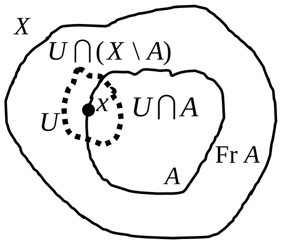
ვთქვათ $x \in \overline{A} \setminus \mathrm{Int}\, A$, მაშინ $x \in \overline{A}$ და $x \notin \mathrm{Int}\, A$. ცხადია, x წერტილის არცერთი U მიდამო არ შედის A სიმრავლეში, ე.ი. ის იკვეთება $X \setminus A$ დამატებასთან, რაც ნიშნავს, რომ $x \in \overline{X \setminus A}$. ამრიგად, $x \in \overline{A} \bigcap \overline{X \setminus A} = \mathrm{Fr}A$. ამიტომ $\overline{A} \setminus \mathrm{Int}\, A \subset \mathrm{Fr}A$. მიღებული ჩართვებიდან გამომდინარეობს,

ტოლობა $FrA = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$. □

შედეგი 2.2.13. *X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილი ეკუთვნის $A \subset X$ სიმრავლის საზღვარს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოს A სიმრავლესთან და $X \setminus A$ დამატებასთან თანაკვეთები არის არაცარიელი სიმრავლეები, ე.ი. $U \bigcap A \neq \varnothing$ და $U \bigcap (X \setminus A) \neq \varnothing$.* □

ნებისმიერი $(X,{}^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის საზღვარი არის ცარიელი სიმრავლე, რადგან $\mathrm{Fr}X = \overline{X} \setminus \operatorname{Int} X = X \setminus X = \varnothing$. დისკრეტული X სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლის საზღვარი $\mathrm{Fr}A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = A \setminus A = \varnothing$. ანტიდისკრეტული X სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლის საზღვარი $\mathrm{Fr}A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A = X \setminus \varnothing = X$. ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის (a,b) ღია ინტერვალის საზღვარი $\mathrm{Fr}(a,b) = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\}$.

X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილს ეწოდება $A \subset X$ სიმრავლის საზღვრის წერტილი, თუ მისი ნებისმიერი U მიდამოს A სიმრავლესთან და $X \setminus A$ დამატებასთან თანაკვეთები არის არაცარიელი სიმრავლეები.



წინადადება 2.2.14. *X ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისათვის სრულდება ტოლობა $\overline{A} = A \bigcup \mathrm{Fr}A$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $A \subset X$. ვაჩვენოთ, თუ $x \in \overline{A}$, მაშინ x ეკუთვნის A სიმრავლეს, ან A სიმრავლის საზღვარს. ვთქვათ $x \notin A$. მაშინ $x \in X \setminus A$. x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის $U \bigcap A \neq \varnothing$. ასევე $U \setminus A \neq \varnothing$, ვინაიდან $x \in U \setminus A$. ამრიგად, x არის A სიმრავლის საზღვრის წერტილი, ე.ი. $x \in \mathrm{Fr}\, A$.

ვთქვათ, ახლა $x \in \overline{A}$ წერტილი არ ეკუთვნის A სიმრავლის საზღვარს. მაშინ არსებობს მისი ისეთი U მიდამო, რომ $U \bigcap A = \varnothing$ ან $U \setminus A = \varnothing$. რადგან $U \bigcap A$ არაა ცარიელი სიმრავლე, ამიტომ აუცილებლად $U \setminus A = \varnothing$, ე.ი. $U \subset A$. აქედან გამომდინარე, $x \in A$.

ვთქვათ, შებრუნებით, $x \in X$ წერტილი ეკუთვნის ან A სიმრავლეს, ან A სიმრავლის საზღვარს. თუ $x \in A$, მაშინ ცხადია $x \in \overline{A}$. ვთქვათ x არ ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაგრამ ეკუთვნის მის საზღვარს. მაშინ

x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის $U \bigcap A \neq \varnothing$. ამიტომ $x \in \overline{A}$. □

წინადადება2.2.15. *X ტოპოლოგიური სივრცის $A \subset X$ სიმრავლისთვის სრულდება ტოლობა* $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$.

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in \operatorname{Int} A$. ბირთვის განმარტების თანახმად, არსებობს ისეთი $U \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $x \in U \subset A$. ცხადია, $U \bigcap (X \setminus A) = \varnothing$. 2.2.13 შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ $x \notin \operatorname{Fr} A$, ანუ $x \in A \setminus \operatorname{Fr} A$. ამრიგად,

$$\operatorname{Int} A \subset A \setminus \operatorname{Fr} A.$$

ახლა, ვთქვათ, $x \in A \setminus \operatorname{Fr} A$, ე.ი. $x \in A$ და $x \notin \operatorname{Fr} A$. 2.2.13 შედეგის თანახმად არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ ან $U \bigcap (X \setminus A) = \varnothing$, ან $U \bigcap A = \varnothing$. რადგან $U \bigcap A \neq \varnothing$, ამიტომ $U \bigcap (X \setminus A) = \varnothing$. აქედან გამომდონარე, $U \subset A$. ეს კი ნიშნავს, $x \in \operatorname{Int} A$. ამრიგად,

$$A \setminus \operatorname{Fr} A \subset \operatorname{Int} A.$$

მიღებული ჩართვებიდან გამომდინარეობს ტოლობა $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$. □

წინადადება 2.2.16. *ვთქვათ A არის X ტოპოლოგიური სივრცის სიმრავლე. მაშინ*

$$X = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A).$$

დამტკიცება. 2.2.10 თეორემის და 2.2.12 წინადადების თანახმად,

$$\operatorname{Int} A \bigcup \operatorname{Fr} A \bigcup \operatorname{Int}(X \setminus A) = \operatorname{Int} A \bigcup (\overline{A} \setminus \operatorname{Int} A) \bigcup \operatorname{Int}(X \setminus A) = \overline{A} \cup \operatorname{Int}(X \setminus A) =$$

$$= \overline{A} \bigcup (X \setminus \overline{(X \setminus (X \setminus A))}) = \overline{A} \bigcup (X \setminus \overline{A}) = X. \square$$

წინადადება 2.2.17. *X ტოპოლოგიური სივრცის A და B ქვესიმრავლეებისთვის სამართლიანია ფორმულები:*

i). $\operatorname{Fr}(A \bigcup B) \subset \operatorname{Fr} A \bigcup \operatorname{Fr} B$.

ii). $\operatorname{Fr}(A \bigcap B) \subset \operatorname{Fr} A \bigcup \operatorname{Fr} B$.

iii). $\operatorname{Fr} \overline{A} \subset \operatorname{Fr} A$.

iv). $\operatorname{Fr} \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Fr} A$.

დამტკიცება.ამ ფორმულების სამართლიანობა მარტივად მოწმდება. □

X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილს ეწოდება $A \subset X$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო შეიცავს A სიმრავლის ერთ მაინც x წერტილისაგან განსხვავებულ წერტილს.

წინადადება 2.2.18. *X ტოპოლოგიური სივრცის $x \in X$ წერტილი არის $A \subset X$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

დამტკიცება. ვთქვათ x არის A სიმრავლის დაგროვების წერტილი. მაშინ მისი ნებისმიერი U მიდამო შეიცავს $A \setminus \{x\}$ დამატების წერტილს, ე.ი. $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. ამიტომ $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

ვთქვათ, შებრუნებით, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. ცხადია, x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის $U \bigcap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$. აქედან გამომდინარე, არსებობს ერთი მაინც ისეთი y წერტილი, რომ $y \in U \bigcap (A \setminus \{x\})$. ამრიგად, $y \in U$ და $y \neq x$, ე.ი. x არის A სიმრავლის დაგროვების წერტილი. □

A სიმრავლის წერტილებს, რომლებიც არ არის A სიმრავლის დაგროვების წერტილები, ეწოდება A სიმრავლის იზოლირებული წერტილები.

წინადადება 2.2.19. *X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილი არის იზოლირებული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ერთწერტილიანი $\{x\}$ სიმრავლე არის ღია.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in X$ წერტილი არის X სივრცის იზოლირებული წერტილი. მაშინ x არ არის X სივრცის დაგროვების წერტილი. 2.2.18 წინადადების თანახმად $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$. ამიტომ არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \bigcap (X \setminus \{x\}) = \varnothing$. ცხადია, $U = \{x\}$, ე.ი. ერთწერტილიანი $\{x\}$ სიმრავლე არის ღია.

ვთქვათ, შებრუნებით, ერთწერტილიანი $\{x\}$ სიმრავლე არის ღია. მაშინ $\{x\} \bigcap (X \setminus \{x\}) = \varnothing$. ამიტომ $x \notin \overline{X \setminus \{x\}}$ და x არაა დაგროვების წერტილი, ე.ი. x არის X სივრცის იზოლირებული წერტილი. □

A სიმრავლის ყველა დაგროვების წერტილების სიმრავლე აღვნიშნოთ A^d სიმბოლოთი.

წინადადება 2.2.20. *X ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი $A \subset X$ სიმრავლისთვის $\overline{A} = A \bigcup A^d$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in A \bigcup A^d$. თუ $x \in A$ სიმრავლეს, მაშინ $x \in \overline{A}$. ასევე, თუ $x \in A^d$, მაშინ $x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset \overline{A}$. ამრიგად, $A \bigcup A^d \subset \overline{A}$.

ახლა, ვთქვათ, $x \in \overline{A}$. იმ შემთხვევაში, როცა $x \notin A^d$, მაშინ არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $U \bigcap (A \setminus \{x\}) = \varnothing$. ცხადია, $U \bigcap A \neq \varnothing$, ე.ი. $x \in A$. ასევე, თუ $x \notin A$, მაშინ x წერტილის ნებისმიერი მიდამო შეიცავს A სიმრავლის x წერტილისგან განსხვავებულ წერტილს. ამიტომ $x \in A^d$. ამრიგად, $x \in A \bigcup A^d$. აქედან გამომდინარე, $\overline{A} \subset A \bigcup A^d$.

მიღებული ჩართვების თანახმად, $\overline{A} = A \bigcup A^d$. □

X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება მკვრივი ქვესიმრავლე, თუ $\overline{A} = X$. ცხადია, A არის მკვრივი ქვესიმრავლე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი არაცარიელი U ღია სიმრავლის A სიმრავლესთან თანაკვეთა არ არის ცარიელი.

X ტოპოლოგიური სივრცის მკვრივი ქვესიმრავლეების შესაბამისი კარდინალური რიცხვების სიმრავლის უმცირეს ელემენტს ეწოდება X

სივრცის სიმკვრივე და აღინიშნება სიმბოლოთი $d(X)$.

თეორემა 2.2.21. *ნებისმიერი* X *ტოპოლოგიური სივრცისათვის* $d(X) \le w(X)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $± = \{U_s\}_{s\in S}$ არის X სივრცის ისეთი ბაზისი, რომ $|±| = |S| = w(X)$. ვთქვათ $A = \{x_s\}_{s\in S}$, სადაც x_s არის ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის U_s სიმრავლიდან აღებული წერტილი. X სივრცის ყოველი U ღია სიმრავლე წარმოიდგინება $U_{s'}$, $s' \in S' \subset S$ ღია სიმრავლეების გაერთიანებით. ამიტომ $U \cap A \ne \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $\overline{A} = X$. შევნიშნოთ, რომ A სიმრავლის სიმძლავრე $|A| \le |S| = w(X)$, ე.ი. $d(X) \le |A| \le w(X)$. □

X სივრცეს, რომლის სიმკვრივე $d(X) \le \aleph_0$, ეწოდება სეპარაბელური სივრცე. თვლადობის მეორე აქსიომის მქონე ყოველი სივრცე არის სეპარაბელური.

X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება $G_{¢}$-ტიპის სიმრავლე, თუ ის წარმოდგება როგორც თვლადი რაოდენობის ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, $\{0\}$ არის $I = [0,1]$ სივრცის $G_{¢}$-ტიპის სიმრავლე.

X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება $F_{±}$-ტიპის სიმრავლე, თუ ის წარმოდგება როგორც თვლადი რაოდენობის ჩაკეტილ სიმრავლეთა გაერთიანება.

$I = [0,1]$ სივრცის $(0,1]$ სიმრავლე არის $F_{±}$-ტიპის სიმრავლე.

X ტოპოლოგიური სივრცის ბადე ეწოდება ერთობლიობას $\mathcal{N} = \{x_s, s \in S\}$, სადაც S არის s ინდექსთა მიმართული სიმრავლე, ხოლო ყოველი s ინდექსისთვის x_s არის X ტოპოლოგიური სივრცის წერტილი.

X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილს ეწოდება $\mathcal{N} = \{x_s, s \in S\}$ ბადის ზღვარი, თუ მისი ყოველი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $s_0 \in S$ ინდექსი, რომ ნებისმიერი $s \ge s_0$ ინდექსისთვის $x_s \in U$.

$\mathcal{N}$ ბადის ყველა ზღვრების სიმრავლეს აღვნიშნავთ სიმბოლოთი $\lim \mathcal{N}$.

თუ x წერტილი არის $\mathcal{N}$ ბადის ზღვარი, მაშინ ვიტყვით, $\mathcal{N}$ ბადე კრებადია x წერტილისკენ.

წინადადება 2.2.22. *ვთქვათ* A *არის* X *ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე.* $x \in X$ *წერტილი ეკუთვნის* $\overline{A}$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს* x *წერტილისკენ კრებადი* A *სიმრავლის წერტილებისგან შემდგარი ბადე.*

დამტკიცება. ვთქვათ არსებობს A სიმრავლის წერტილებისგან

შედგენილი $\mathcal{N}=\{x_s, s\in S\}$ ბადე და $x\in \lim\mathcal{N}$. ზღვრის განმარტების თანახმად, x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $s_0\in S$ ინდექსი, რომ ყოველი $s\geq s_0$ ინდექსისთვის $x_s\in U$. ამრიგად, $U\bigcap A\neq\varnothing$. აქედან გამომდინარე, $x\in\overline{A}$.

ვთქვათ, ახლა $x\in\overline{A}$. განვიხილოთ x წერტილის ყველა U_s, $s\in S$ მიდამოთა სისტემა. შემოვიტანოთ ინდექსთა S სიმრავლეზე დალაგების მიმართება:

$$s\leq s'\Leftrightarrow U_{s'}\subseteq U_s .$$

ცხადია, S არის ინდექსთა მიმართული სიმრავლე. განვიხილოთ ნებისმიერი $x_s\in U_s\bigcap A$ წერტილი და ბადე $\mathcal{N}=\{x_s, s\in S\}$. განვიხილოთ x წერტილის ნებისმიერი U მიდამო. $\mathcal{N}$ ბადის განმარტების თანახმად, $U=U_{s_0}$, სადაც s_0 არის S სიმრავლის რაიმე ინდექსი. გარდა ამისა, $U\bigcap A=U_{s_0}\bigcap A$ თანაკვეთიდან აღებული x_{s_0} წერტილი ისეთია, რომ $x_{s_0}\in\mathcal{N}$. ცხადია, ყოველი $s\geq s_0$ ინდექსისთვის $U_s\bigcap A\subseteq U_{s_0}\bigcap A$. ამრიგად, $x\in\overline{A}$ წერტილისთვის არსებობს A სიმრავლის წერტილთა ისეთი $\mathcal{N}$ ბადე, რომ x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის მოიძებნება ისეთი $s_0\in S$ ინდექსი, რომ ყოველი $s\geq s_0$ ინდექსისთვის

$$x_s\in U_s\bigcap A\subset U_{s_0}\bigcap A\subset U_{s_0}\subset U .\square$$

შედეგი 2.2.23. X სივრცის A *ქვესიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის* A *სიმრავლეში შემავალ ყველა ბადესთან ერთად შეიცავს მათ ზღვრებს.* □

შედეგი 2.2.24. X *ტოპოლოგიური სივრცის* x *წერტილი ეკუთვნის დაგროვების წერტილთა* A^d *სიმრავლეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს* x *წერტილისკენ კრებადი ისეთი* $\mathcal{N}=\{x_s, s\in S\}$ *ბადე, რომ ყოველი* $s\in S$ *ინდექსისთვის* $x_s\in A$ *და* $x_s\neq x$. □

სავარჯიშო 2.2.25. 1). დაამტკიცეთ, თვლადი რაოდენობის F_σ-ტიპის სიმრავლეთა გაერთიანება არის F_σ-ტიპის სიმრავლე.

2).დაამტკიცეთ, თვლადი რაოდენობის G_δ-ტიპის სიმრავლეთა თანაკვეთა არის G_δ-ტიპის სიმრავლე.

3).აჩვენეთ, ორი F_σ-ტიპის სიმრავლის თანაკვეთა არის F_σ-ტიპის სიმრავლე.

4).აჩვენეთ, ორი G_δ-ტიპის სიმრავლის გაერთიანება არის G_δ-ტიპის სიმრავლე.

5).ვთქვათ $\{A_\alpha\}_{\alpha\in A}$ არის X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეთა

ლოკალურად სასრული ოჯახი. აჩვენეთ, $\mathrm{Fr}(\bigcup_{\sim\in A} A_{\sim}) \subset \bigcup_{\sim\in A} \mathrm{Fr}\, A_{\sim}$.

6).ვთქვათ $\mathbb{Q}$ არის $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის რაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ და $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

7).აჩვენეთ, X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathrm{Fr}\, A \subset A$.

8).მოიყვანეთ მაგალითი X ტოპოლოგიური სივრცისა, რომლის ორი A და B სიმრავლისთვის არ სრულდება ტოლობა $\mathrm{Int}(A \bigcup B) = \mathrm{Int}\, A \bigcup \mathrm{Int}\, B$.

9).იპოვეთ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის საზღვარი $\mathrm{Fr}\mathbb{Q}$.

10).ვთქვათ A და B არის X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეები. დაამტკიცეთ, $(A \bigcup B)^d = A^d \bigcup B^d$. ასევე აჩვენეთ, თუ $A \subset B$, მაშინ $A^d \subset B^d$.

2.3. უწყვეტი ასახვები

ვთქვათ მოცემულია $(X, ^2)$ და $(Y, «)$ ტოპოლოგიური სივრცეები. $f : X \to Y$ ასახვას ეწოდება უწყვეტი, თუ ნებისმიერი $U \in «$ ელემენტისთვის $f^{-1}(U) \in {}^2$.ამრიგად, $f : X \to Y$ ასახვა უწყვეტია, თუ Y სივრცის ნებისმიერი ღია სიმრავლის წინარესახე არის ღია სიმრავლე X სივრცეში.

ცხადია, $1_X : X \to X$ იგივური ასახვა არის უწყვეტი ასახვა. მართლაც, ნებისმიერი $U \in {}^2$ ელემენტისთვის $1_X^{-1}(U) = U \in {}^2$.

წინადადება 2.3.1. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა უწყვეტი ასახვების კომპოზიცია არის უწყვეტი ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $(X, ^2)$, $(Y, «)$ და $(Z, ¬)$ არის ტოპოლოგიური სივრცეები, ხოლო $f : X \to Y$ და $g : Y \to Z$ უწყვეტი ასახვები. ნებისმიერი $U \subset Z$ ღია სიმრავლისთვის გვაქვს

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \ .$$

g ასახვის უწყვეტობის გამო $g^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია სიმრავლე Y სივრცეში. ასევე, f ასახვის უწყვეტობის გამო $f^{-1}(g^{-1}(U))$ წინარესახე არის ღია სიმრავლე X სივრცეში, ე.ი. $(g \circ f)^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია სიმრავლე X სივრცეში. ამიტომ $g \circ f : X \to Z$ კომპოზიცია არის უწყვეტი ასახვა. □

2.3.1 წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოპოლოგიური სივრცეები და მათ შორის უწყვეტი ასახვები ქმნის კატეგორიას, რომელსაც აღნიშნავენ **Top** სიმბოლოთი. ამ კატეგორიის იზომორფულ X და Y ობიექტებს, ანუ სივრცეებს, უწოდებზნ ჰომეომორფულ

სივრცეებს და აღნიშნავენ $X \approx Y$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, X და Y ტოპოლოგიური სივრცეები არის ჰომეომორფული სივრცეები, $X \approx Y$, თუ არსებობს ისეთი $f : X \to Y$ და $g : Y \to X$ უწყვეტი ასახვები, რომ $g \circ f = 1_X$ და $f \circ g = 1_Y$. როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში f ასახვა არის ურთიერთცალსახა ასახვა X სივრცისა Y სივრცეზე, ხოლო g არის f ასახვის შებრუნებული ასახვა, ე.ი. $g = f^{-1}$. აქედან გამომდინარე, X და Y ტოპოლოგიური სივრცეები ჰომეომორფულია, თუ არსებობს ისეთი $f : X \to Y$ ურთიერთცალსახა უწყვეტი ასახვა X სივრცისა Y სივრცეზე, რომ მისი შებრუნებული ასახვა $f^{-1} : Y \to X$ არის უწყვეტი.

ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის ჰომეომორფულობის მიმართება $\approx$ არის ექვივალენტობის მიმართება:

E1). $X \approx X$.

E2). თუ $X \approx Y$, მაშინ $Y \approx X$.

E3). თუ $X \approx Y$ და $Y \approx Z$, მაშინ $X \approx Z$.

ცხადია E1) პირობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ $1_X : X \to X$ იგივური ასახვა არის ჰომეომორფიზმი. E2) პირობა სრულდება, რადგან, თუ $f : X \to Y$ არის ჰომეომორფიზმი, მაშინ $f^{-1} : Y \to X$ შებრუნებული ასახვა არის ჰომეომორფიზმი. E3) პირობაც სრულდება, ვინაიდან $f : X \to Y$ და $g : Y \to Z$ ჰომეომორფიზმების კომპოზიცია $g \circ f : X \to Z$ არის ჰომეომორფიზმი.

X ტოპოლოგიური სივრცის ჰომეომორფულ სივრცეთა კლასი ავღნიშნოთ $[X]$ სიმბოლოთი და მას ვუწოდოთ X სივრცის ტოპოლოგიური ტიპი.

წინადადება 2.3.2. *X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f : X \to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Y სივრცის $\mathscr{P}$ წინარებაზისის ყოველი წევრის წინარესახე არის X სივრცის ღია სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა და $\mathscr{P} = \{U_s\}_{s \in S}$ არის Y სივრცის წინარებაზისი. ნებისმიერი $U_s \in \mathscr{P}$, $s \in S$ არის ღია სიმრავლე. ამიტომ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $f^{-1}(U_s)$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე.

ვთქვათ, შებრუნებით, Y სივრცის $\mathscr{P} = \{U_s\}_{s \in S}$ წინარებაზისის ყოველი $U_s \in \mathscr{P}$ ელემენტისთვის $f^{-1}(U_s)$ არის ღია. ავიღოთ X სივრცის ნებისმიერი U ღია სიმრავლე. ცხადია,

$$U = \bigcup_{s_1, s_2, \ldots, s_n \in S} (U_{s_1} \bigcap U_{s_2} \bigcap \ldots \bigcap U_{s_n}), U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_n} \in \mathscr{P},\ s_1, s_2, \ldots, s_n \in S.$$

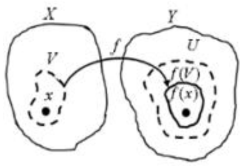
შევნიშნოთ, რომ

$$f^{-1}(U)=f^{-1}(\bigcup_{s_1,s_2,\dots,s_n\in S}(U_{s_1}\bigcap U_{s_2}\bigcap\dots\bigcap U_{s_n}))=\bigcup_{s_1,s_2,\dots,s_n\in S}f^{-1}(U_{s_1}\bigcap U_{s_2}\bigcap\dots\bigcap U_{s_n})=$$
$$=\bigcup_{s_1,s_2,\dots,s_n\in S}(f^{-1}(U_{s_1})\bigcap f^{-1}(U_{s_2})\bigcap\dots\bigcap f^{-1}(U_{s_n})).$$

ნებისმიერი s_i, $i=1,2,\dots,n$ ინდექსისთვის $f^{-1}(U_{s_i})$ არის ღია სიმრავლე. ამიტომ O2) პირობის თანახმად, $(f^{-1}(U_{s_1})\bigcap f^{-1}(U_{s_2})\bigcap\dots\bigcap f^{-1}(U_{s_n}))$ თანაკვეთა არის X სივრცის ღია სიმრავლე. O3) პირობიდან კი გამომდინარეობს, რომ $f^{-1}(U)$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე. □

შედეგი 2.3.3. *X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f:X\to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Y სივრცის ბაზისის ელემენტთა წინარესახეები არის X სივრცის ღია სიმრავლეები.* □

წინადადება 2.3.4. *X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f:X\to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცის ნებისმიერი $x\in X$ წერტილისთვის და $f(x)$ ანასახის ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს x წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $f(V)\subset U$.*



დამტკიცება. ვთქვათ $f:X\to Y$ არის უწყვეტი ასახვა და U არის $x\in X$ წერტილის $f(x)$ ანასახის ნებისმიერი მიდამო. ცხადია, U არის ღია სიმრავლე. f ასახვის უწყვეტობის გამო $f^{-1}(U)$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე და ის მოიცავს x წერტილს. ამიტომ ის არის x წერტილის მიდამო. ამდენად, x წერტილისთვის არსებობს ისეთი $V=f^{-1}(U)$ მიდამო, რომ $f(V)=f(f^{-1}(U))\subset U$

ახლა ვაჩვენოთ პირიქით. ვთქვათ $f:X\to Y$ არის ასახვა. ავიღოთ Y სივრცის ნებისმიერი U ღია სიმრავლე. ვაჩვენოთ, რომ $f^{-1}(U)$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $f^{-1}(U)$ წინარესახის ყოველი x წერტილი არის შიგა წერტილი. ცხადია, $f(x)\in U$ და U არის მისი მიდამო. პირობის თანახმად, არსებობს x წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $f(V)\subset U$. ცხადია, $x\in V\subset f^{-1}(U)$. ამრიგად, x წერტილი არის $f^{-1}(U)$ წინარესახის შიგა წერტილი, ე.ი. $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე. ეს კი ნიშნავს, რომ $f:X\to Y$ ასახვა არის უწყვეტი. □

შედეგი 2.3.5. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f:X\to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $\{\pm(x)\}_{x\in X}$ და $\{\pm(y)\}_{y\in Y}$*

მიდამოთა სისტემები, რომ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის და $f(x)$ ანსასხის ნებისმიერი$U \in \pm(f(x))$ მიდამოსთვის არსებობს x წერტილის ისეთი $V \in \pm(x)$ მიდამო, რომ $f(V) \subset U$. □

ცხადია, X ტოპოლოგიური სივრციდან ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძში და $I = [0,1]$ ჩაკეტილ სეგმენტში ასახვები $f : X \to \mathbb{R}$ და $f : X \to I$ უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $x \in X$ და $£ > 0$ რიცხვისათვის არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $| f(x) - f(x') | < £$ ნებისმიერი $x' \in U$ წერტილისთვის. ასევე, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}$ და $£ > 0$ რიცხვებისათვის არსებობს ისეთი $¢ > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი $x' \in \mathbb{R}$ წერტილისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $| x - x' | < ¢$,სრულდება პირობა $| f(x) - f(x') | < £$.

წინადადება 2.3.6. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f : X \to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა Y სივრცის ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლის წინარესახე არის X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა, ხოლო F არის Y სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. $f^{-1}(F)$ წინარესახე არის ჩაკეტილი, რადგან მისი დამატება $X \setminus f^{-1}(F)$ ტოლია $f^{-1}(Y \setminus F)$ წინარესახის, რომელიც, როგორც $Y \setminus F$ ღია სიმრავლის წინარესახე, არის ღია სიმრავლე.

ახლა ვაჩვენოთ პირიქით. ვთქვათ U არისY სივრცის ნებისმიერი ღია სიმრავლე. ცხადია, $X \setminus f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus U)$ და$Y \setminus U$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. პირობის თანახმად $f^{-1}(Y \setminus U)$, ანუ $X \setminus f^{-1}(U)$, არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ეს კი ნიშნავს, რომ $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე. ამრიგად, $f : X \to Y$ ასახვა არის უწყვეტი ასახვა. □

წინადადება 2.3.7. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f : X \to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისთვის*

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $A \subset X$ ქვესიმრავლისთვის $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. ვთქვათ y არის $f(\overline{A})$ ანსასხის ნებისმიერი წერტილი. მაშინ $y = f(x)$, $x \in \overline{A}$. ვთქვათ U არის $y = f(x)$ წერტილის ნებისმიერი მიდამო. ცხადია, $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე, შეიცავს x წერტილს და $f^{-1}(U) \bigcap A \neq \varnothing$. შევნიშნოთ, რომ

$$f(f^{-1}(U)\cap A)\subset f(f^{-1}(U))\cap f(A)=U\cap f(A).$$

აქედან გამომდინარე, $U\cap f(A)\neq\varnothing$, ე.ი. $y\in\overline{f(A)}$. ამრიგად, $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

ახლა, დავუშვათ სრულდება თეორემის პირობა. ვაჩვენოთ $f:X\to Y$ ასახვის უწყვეტობა. ვთქვათ U არის Y სივრცის ღია სიმრავლე. შევამოწმოთ, რომ $f^{-1}(U)$ წინარესახე არის X სივრცის ღია სიმრავლე. ამისთვის საკმარისია დავამტკიცოთ $X\setminus f^{-1}(U)$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ანუ სრულდება ტოლობა $\overline{X\setminus f^{-1}(U)}=X\setminus f^{-1}(U)$. ვთქვათ, $x\in\overline{X\setminus f^{-1}(U)}$. პირობის ძალით

$$f(\overline{X\setminus f^{-1}(U)})\subset\overline{f(X\setminus f^{-1}(U))},$$

ანუ

$$f(x)\in\overline{f(X\setminus f^{-1}(U))}=\overline{Y\setminus U}=Y\setminus U.$$

ცხადია, $x\in f^{-1}(Y\setminus U)=X\setminus f^{-1}(U)$, ე.ი $\overline{X\setminus f^{-1}(U)}\subset X\setminus f^{-1}(U)$. ამრიგად, $\overline{X\setminus f^{-1}(U)}=X\setminus f^{-1}(U)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $X\setminus f^{-1}(U)$ არის X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე, ხოლო $f^{-1}(U)$ ღია სიმრავლე. □

წინადადება 2.3.8. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა* $f:X\to Y$ *ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი* $B\subset Y$ *ქვესიმრავლისთვის*

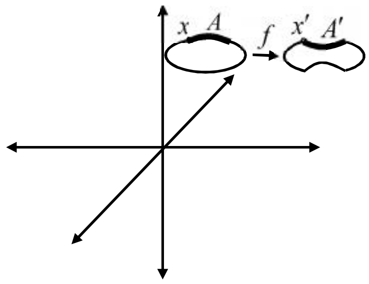
$$f^{-1}(\operatorname{Int}B)\subset\operatorname{Int}f^{-1}(B).$$

დამტკიცება. ვთქვათ $f:X\to Y$ ასახვა არის უწყვეტი. Y სივრცის ნებისმიერი B სიმრავლისთვის $\operatorname{Int}B\subset B$. f ასახვის უწყვეტობის გამო $f^{-1}(\operatorname{Int}B)$ არის ღია სიმრავლე. ცხადია, $f^{-1}(\operatorname{Int}B)\subset f^{-1}(B)$. აქედან გამომდინარე, $f^{-1}(\operatorname{Int}B)\subset\operatorname{Int}f^{-1}(B)$.

ახლა ვაჩვენოთ შებრუნებული დებულება. ვთქვათ ნებისმიერი $B\subset Y$ ქვესიმრავლისთვის $f^{-1}(\operatorname{Int}B)\subset\operatorname{Int}f^{-1}(B)$. ცხადია, Y სივრცის ნებისმიერი $B=U$ ღია სიმრავლე აკმაყოფილებს პირობას $\operatorname{Int}U=U$. ამიტომ $f^{-1}(\operatorname{Int}U)\subset\operatorname{Int}f^{-1}(U)$, ე.ი. $f^{-1}(U)\subset\operatorname{Int}f^{-1}(U)$. ამ და $\operatorname{Int}f^{-1}(U)\subset f^{-1}(U)$ ჩართვებიდან მივიღებთ $\operatorname{Int}f^{-1}(U)=f^{-1}(U)$, რაც ნიშნავს, რომ $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე. ამრიგად, $f:X\to Y$ ასახვა არის უწყვეტი ასახვა. □

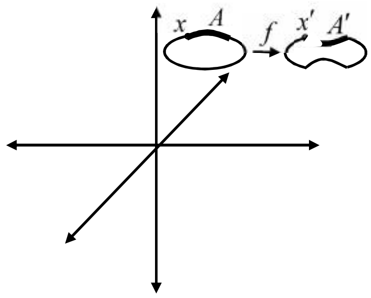
უფრო ნათლად რომ დავინახოთ ასახვის უწყვეტობის გეომეტრიული არსი, მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ X არის რეზინისაგან დამზადებული ელასტიური რგოლი. იგი წარმოვიდგინოთ, როგორც 3-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცის ქვესივრცე.

მოვახდინოთ X სივრცის ისეთი f დეფორმაცია, რომ რგოლი არ გაწყდეს.



ამ შემთხვევაში რგოლის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისთვის ყველა $x \in X$ წერტილი, რომელიც საკმარისად ახლოს იყო A სიმრავლესთან, სხვანაირად რომ ვთქვათ, იყო A სიმრავლის შეხების წერტილი, გადავა დეფორმირებული რგოლის ისეთ x' წერტილში, რომელიც ისევ საკმარისად ახლოს არის დეფორმირებულ A' ქვესიმრავლეთან, ანუ x' არის A' სიმრავლის შეხების წერტილი. როგორც ვიცით, 2.3.7 წინადადების თანახმად ეს ნიშნავს, რომ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

ახლა მოვახდინოთ X სივრცის ისეთი f დეფორმაცია, რომ იგი გაწყდეს.



ამ შემთხვევაში რგოლის A ნაწილი, A ქვესიმრავლე, რომელთანაც საკმარისად ახლოს იყო x წერტილი, სხვანაირად რომ ვთქვათ x იყო მისი შეხების წერტილი, გადავა გაწყვეტილი რგოლის ისეთ A' ნაწილში, A' ქვესიმრავლეში, რომ x' აღარაა A' ქვესიმრავლის საკმარისად ახლო წერტილი, ანუ x' აღარაა A' ქვესიმრავლის შეხების წერტილი. 2.3.7 წინადადების საკმარისი პირობა არ სრულდება, ანუ არსებობს X სივრცის ისეთი A ქვესიმრავლე, რომ $f(\bar{A})$ არ შედის $\overline{f(A)}$ ქვესიმრავლეში, ანუ არსებობს ისეთი $x \in \bar{A}$, რომ $f(x) = x' \notin \overline{f(A)} = \bar{A}'$.

ცხადია, X დისკრეტული სივრციდან ნებისმიერ Y ტოპოლოგიურ

სივრცეში ასახვა არის უწყვეტი. ასევე, ნებისმიერი X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ანტიდისკრეტულ სივრცეში ასახვა არის უწყვეტი. X ტოპოლოგიური სივრცის Y ქვესივრციდან X სივრცეში ჩადგმის ასახვა $i: Y \to X$ არის უწყვეტი.

წინადადება 2.3.9. *ვთქვათ A და B შესაბამისად არის X და Y ტოპოლოგიური სივცეების ქვესივცეები, ხოლო $f: X \to Y$ უწყვეტი ასახვა. მაშინ $f_{|A}: A \to Y$ და $f_B: f^{-1}(B) \to B$ შემოსაზღვრის ასახვები არის უწყვეტი ასახვები.*

დამტკიცება. ვთქვათ U არის Y სივრცის ღია ქვესიმრავლე. ცხადია, $(f_{|A})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \bigcap A$. შევნიშნოთ, რომ $f^{-1}(U)$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე. ამიტომ $(f_{|A})^{-1}(U)$ იქნება A ქვესივრცის ღია სიმრავლე.

ვთქვათ, ახლა V არის B ქვესივრცის ღია სიმრავლე. მაშინ $V = U \bigcap B$, სადაც U არის Y სივრცის ღია სიმრავლე. ცხადია,

$$f_B^{-1}(V) = f_B^{-1}(U \bigcap B) = f^{-1}(U) \bigcap f^{-1}(B) .$$

ამიტომ $f_B^{-1}(V)$ არის $f^{-1}(B)$ ქვესივრცის ღია სიმრავლე. □

მაგალითი 2.3.10. შევნიშნოთ, რომ ტოპოლოგიური სივრცის ტოპოლოგიურ სივრცეზე ურთიერთცალსახა და უწყვეტი ასახვა შეიძლება არ იყოს ჰომეომორფიზმი. ვთქვათ მოცემულია ბუნებრივი ტოპლოგიური სტრუქტურის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის და $\mathbb{R}^2$ ევკლიდური სიბრტყის

$$X = (0, 2)$$

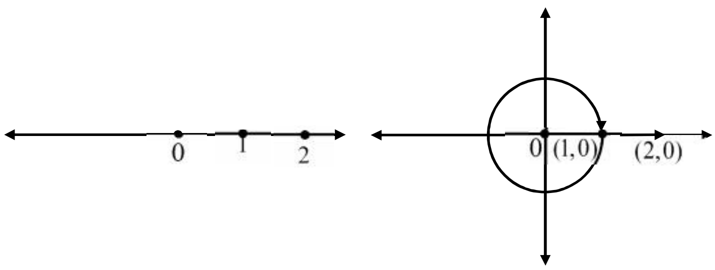
და

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \bigcup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x < 2, y = 0\}$$

ქვესივრცეები.

განვმარტოთ $f: X \to Y$ ასახვა. განმარტების თანახმად,

$$f(x) = \begin{cases} (\cos 2\text{®}\, x, \sin 2\text{®}\, x), & 0 < x \le 1, \\ (x, 0) & , \ 1 \le x < 2. \end{cases}$$



ცხადია, f არის უწყვეტი ასახვა. შებრუნებული ასახვა $f^{-1}: Y \to X$

არაა უწყვეტი $(1,0)$ წერტილში, რადგან $f^{-1}((1,0))=1$ წერტილის $(1/2,3/2)$ მიდამოში f^{-1} ასახვით არ აისახება $(1,0)$ წერტილის არცერთი მიდამო.

მაგალითი 2.3.11. ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე რიცხვითი ღერძის ნებისმიერ (a,b) და (c,d) ღია ინტერვალს აქვს ერთი და იგივე ტოპოლოგიური ტიპი. ასახვა $f:(a,b)\to(c,d)$, მოცემული ფორმულით

$$f(x)=\frac{d-c}{b-a}\cdot x+c-\frac{d-c}{b-a}\cdot a\ ,\ \ x\in(a,b)$$

არის ჰომეომორფიზმი.

მართლაც, (a,b) და (c,d) წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებიდან

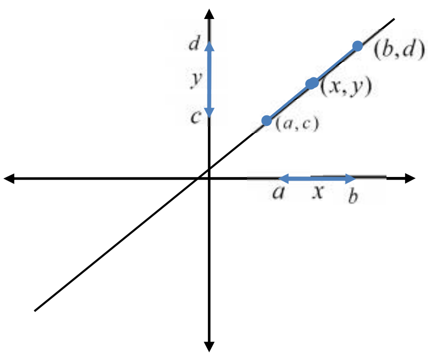
$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-c}{d-c}$$

მივიღებთ

$$y=\frac{d-c}{b-a}\cdot(x-a)+c\ ,$$

ანუ

$$y=\frac{d-c}{b-a}\cdot x+c-\frac{d-c}{b-a}\cdot a\ .$$



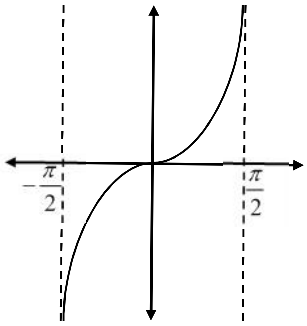
ასახვა $f:(a,b)\to(c,d)$, რომელიც განიმარტება ფორმულით

$$f(x)=y, x\in(a,b)\ ,$$

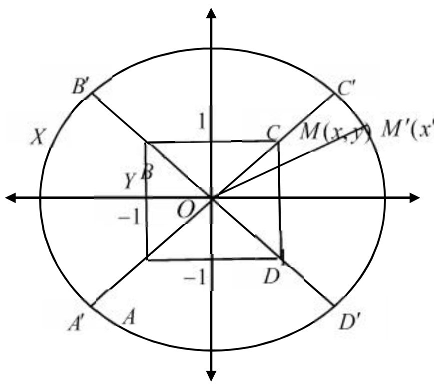
არის ჰომეომორფიზმი $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის (a,b) და (c,d) ქვესივრცეებს შორის.

მაგალითი 2.3.12. ნებისმიერ (a,b) ინტერვალს და $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძს აქვთ ერთი და იგივე ტოპოლოგიური ტიპი. მართლაც, წინა მაგალითში გამარტებული ჰომეომორფიზმის და $\mathrm{tg}:(-®/2,®/2)\to\mathbb{R}$

ჰომეომორფიზმის კომპოზიცია $\mathrm{tg}\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ არის ჰომეომორფიზმი (a,b) ღია ინტერვალსა და $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძს შორის.



მაგალითი 2.3.13. წრეწირსა და კვადრატის საზღვარს აქვთ ერთი და იგივე ტოპოლოგიური ტიპი.



ვთქვათ

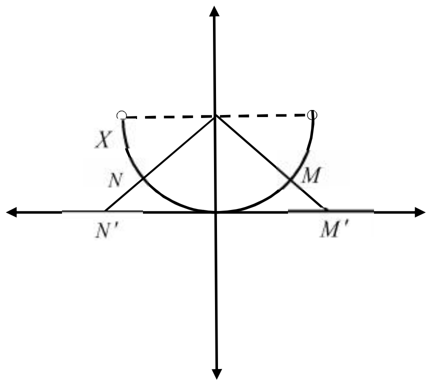
$$Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$$

და

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=1,-1\le y\le 1; x=-1,-1\le y\le 1;$$
$$-1\le x\le 1, y=1;-1\le x\le 1, y=-1\}.$$

ვთქვათ $f:X\to Y$ არის ასახვა, რომელიც ყოველ $M(x,y)$ წერტილს შეუსაბამებს O და M წერტილებზე გამავალი წრფისა და Y წრეწირის თანაკვეთით განსაზღვრულ $M'(x',y')$ წერტილს. ცხადია, f ასახვა არის ჰომეომორფიზმი X და Y ქვესივრცეებს შორის.

მაგალითი 2.3.14. საწყისი და ბოლო წერტილების არმქონე ნახევარწრეწირსა და წრფეს აქვთ ერთი და იგივე ტოპოლოგიური ტიპი.



ვთქვათ

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \le y < 1\}$$

და

$$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, y = 0\}.$$

ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ასახვა, რომელიც ყოველ $M \in X$ წერტილს შეუსაბამებს C და M წერტილებზე გამავალი წრფისა და აბსცისთა ღერძის თანაკვეთით განსაზღვრულ M' წერტილს. f ასახვა არის ჰომეომორფიზმი X ნახევარწრეწირსა და $Y = \mathbb{R}$ რიცხვით წრფეს შორის.

მაგალითი 2.3.15. ვთქვათ $X = [0,1]$ და $Y = [0,2]$. მათ აქვთ ერთი და იგივე ტოპოლოგიური ტიპი. $f : X \to Y$ ასახვა, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x) = 2x, \quad x \in [0,1],$$

არის ჰომეომორფიზმი.

თვალსაჩინოდ ჰომეომორფიზმი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად. ვთქვათ გვაქვს რეზინისაგან დამზადებული ელასტიური X ფიგურა. მოვახდინოთ მისი დეფორმაცია, გავჭიმოთ ისე, რომ არ გაწყდეს და წერტილები არ გაიგივდეს. დეფორმაციის შეწყვეტის შემდეგ ფიგურა დაუბრუნდება თავის პირვანდელ სახეს. გაჭიმვა, რომლის დროსაც არ ხდება რეზინის ფიგურის არც გაწყვეტა და არც მისი რაიმე ნაწილების ერთმანეთზე დამთხვევა, წარმოადგენს ჰომეომორფიზმს. დეფორმაციის შეწყვეტა კი, რომელიც იწვევს გაჭიმული ფიგურის პირვანდელ მდგომარეობაში დაბრუნებას, შეგვიძლია აღვიქვათ, როგორც შებრუნებული ჰომეომორფიზმი. ამრიგად, ფიგურის გაჭიმვა არის ჰომეომორფიზმი, რომელსაც თავდაპირველი X ფიგურა გადაყავს დეფორმირებულ Y ფიგურაში, ხოლო დეფორმაციის შეწყვეტა არის ჰომეომორფიზმი, რომელსაც დეფორმირებული Y ფიგურა გადაყავს თავდაპირველ X ფიგურაში.

2.3.13, 2.3.14 და 2.3.15 მაგალითებში მოყვანილი ჰომეომორფიზმები შეგვიძლია აღვიქვათ როგორც ისეთი ჰომეომორფიზმები, რომლებიც კვადრატის კონტურს, ნახევარწრეწირს და $[0,1]$ მონაკვეთს შესაბამისად გარდაქმნის წრეწირად, რიცხვით ღერძად და $[0,2]$ მონაკვეთად.

ნებისმიერი ორი ჰომეომორფული სივრცე ტოპოლოგიური თვალსაზრისით აღიქმება როგორც ერთი და იგივე.

სივრცის თვისებებს, რომლებიც არ იცვლება ჰომეომორფული ასახვების მიმართ, ტოპოლოგიური ინვარიანტები, ან ტოპოლოგიური თვისებები ეწოდება. ამრიგად, X სივრცის $\mathscr{P}$ თვისებას ეწოდება ტოპოლოგიური ინვარიანტი, თუ $\mathscr{P}$ თვისება გააჩნია X სივრცის ჰომეომორფულ ნებისმიერ Y სივრცეს. სივრცის ტოპოლოგიურ ინვარიანტებს, ტოპოლოგიურ თვისებებს სწავლობს ტოპოლოგია.

ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f: X \to Y$ უწყვეტ ასახვას ეწოდება ჩაკეტილი ასახვა, თუ X სივრცის ყოველი F ჩაკეტილი სიმრავლის $f(F)$ ანასახი არის Y სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე.

ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f: X \to Y$ უწყვეტ ასახვას ეწოდება ღია ასახვა, თუ X სივრცის ყოველი U ღია სიმრავლის $f(U)$ ანასახი არის Y სივრცის ღია სიმრავლე.

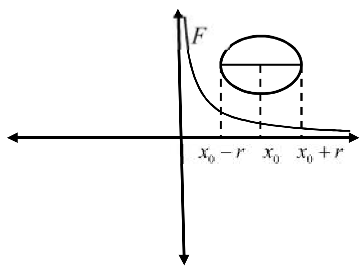
$f: X \to Y$ ასახვას, რომელიც არის ღია ასახვაც და ჩაკეტილი ასახვაც ეწოდება ღია-ჩაკეტილი ასახვა.

მაგალითი 2.3.16. ვთქვათ $f: \mathbb{R} \to I$ არის ასახვა ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე რიცხვითი ღერძიდან მის $I=[0,1]$ ქვესივრცეში, მოცემული ფორმულით

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0 & ,\\ x, 0\le x\le 1, & \\ 1, x\ge 1 & .\end{cases}$$

ცხადია, f არის ჩაკეტილი ასახვა, მაგრამ არ არის ღია ასახვა, რადგან $U=(-1,0)$ ღია სიმრავლის ანასახი $\{0\}$ არაა ღია სიმრავლე.

მაგალითი 2.3.17. ვთქვათ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ არის სიბრტყის პროექცია აბსცისთა ღერძზე, მოცემული ფორმულით $f((x,y))=x$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.



ნებისმიერი $B((x_0, y_0), r)$ ღია ბირთვის ანასახი არის $(x_0 - r, x_0 + r)$ ღია ინტერვალი. $\{B((x_0, y_0), r) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, r > 0\}$ ოჯახი არის სიბრტყის ბაზისი. ამიტომ ნებისმიერი ღია სიმრავლის, როგორც ღია ბირთვების გაერთიანების ანასახი, იქნება ღია. სიმრავლე $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ არის ჩაკეტილი. მისი ანასახი $f(F) = (0, +\infty)$ კი არაა ჩაკეტილი, ე.ი. f პროექცია არის ღია ასახვა, მაგრამ არაა ჩაკეტილი ასახვა.

მაგალითი 2.3.18. ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცის დისკრეტულ სივრცეში მუდმივი ასახვა არის ღია-ჩაკეტილი ასახვა.

მაგალითი 2.3.19. ვთქვათ X არის დისკრეტული სივრცე და $|X| > 1$, ხოლო Y ანტიდისკრეტული სივრცე და $|Y| > 1$. ცხადია, X სივრციდან Y სივრცეში ნებისმიერი ასახვა არც ღია ასახვაა და არც ჩაკეტილი ასახვა.

თეორემა 2.3.20. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა $f : X \to Y$ უწყვეტი ასახვა არის ღია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $B \subset Y$ სიმრავლისთვის და ყოველი $A \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის, რომელიც შეიცავს $f^{-1}(B)$ წინარესახეს, არსებობს B სიმრავლის მომცველი ისეთი $C \subset Y$ ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $f^{-1}(C) \subset A$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ღია ასახვა, $B \subset Y$ და $A \subset X$ არის ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $f^{-1}(B) \subset A$. სიმრავლე $C = Y \setminus f(X \setminus A)$ არის ჩაკეტილი Y სივრცეში და $B \subset C$. მართლაც, $f^{-1}(B) \subset A$ ჩართვის თანახმად $f^{-1}(B) \bigcap (X \setminus A) = \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $B \bigcap f(X \setminus A) = \varnothing$, საიდანაც თავის მხვრივ მიიღება $B \subset C$ ჩართვა. C სიმრავლის ჩაკეტილობა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ A ჩაკეტილი სიმრავლის $X \setminus A$ ღია დამატების $f(X \setminus A)$ ანასახი f ღია ასახვის მიმართ არის ღია სიმრავლე. გარდა ამისა, ადვილი დასანახია, რომ

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus A)) = X \setminus f^{-1} f(X \setminus A) \subset X \setminus (X \setminus A) = A.$$

ახლა, ვთქვათ, სრულდება თეორემის პირობა და U არის X სივრცის ნებისმიერი ღია ქვესიმრავლე. სიმრავლე $A = X \setminus U$ არის ჩაკეტილი. ვთქვათ $B = Y \setminus f(U)$. შევნიშნოთ, რომ

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus f(U)) = X \setminus f^{-1} f(U) \subset X \setminus U = A.$$

პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $C \subset Y$ ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $Y \setminus f(U) \subset C$ და $f^{-1}(C) \subset A = X \setminus U$. ცხადია, $f^{-1}(C) \bigcap U = \varnothing$ და $C \bigcap f(U) = \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $C \subset Y \setminus f(U)$. ამრიგად, $C = Y \setminus f(U)$, ანუ $f(U) = Y \setminus C$, რაც ნიშნავს, რომ $f(U)$ არის ღია სიმრავლე, ე.ი. $f : X \to Y$ არის ღია ასახვა. □

თეორემა 2.3.21. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა* $f : X \to Y$ *უწყვეტი ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი* $B \subset Y$ *და ყოველი* $A \subset X$ *ღია სიმრავლისთვის, რომელიც მოიცავს* $f^{-1}(B)$ *წინარესახეს, არსებობს* B *სიმრავლის მომცველი ისეთი* $C \subset Y$ *ღია სიმრავლე, რომ* $f^{-1}(C) \subset A$.

დამტკიცება. ამ თეორემის დამტკიცება მიმდინარეობს წინა თეორემის მტკიცების დუალიზირებით. □

წინადადება 2.3.22. *ვთქვათ* $f : X \to Y$ *არის ურთიერთცალსახა ასახვა* X *ტოპოლოგიური სივრცისა* Y *ტოპოლოგიურ სივრცეზე.* f *ასახვა არის ჰომეომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* f *არის ღია ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ჰომეომორფიზმი. ვაჩვენოთ f არის ღია ასახვა. განვიხილოთ ნებისმიერი $U \subset X$ ღია სიმრავლე. $f^{-1} : Y \to X$ არის უწყვეტი ასახვა. ამიტომ $(f^{-1})^{-1}(U)$ იქნება Y სივრცის ღია სიმრავლე, რადგან $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$. ამიტომ $f(U)$ არის ღია სიმრავლე, ე.ი. f არის ღია ასახვა.

ვთქვათ, შებრუნებით, $f : X \to Y$ ურთიერთცალსახა ასახვა X სივრცისა Y სივრცეზე არის ღია ასახვა. ვაჩვენოთ, $f^{-1} : Y \to X$ არის უწყვეტი ასახვა. პირობის ძალით, ნებისმიერი $U \subset X$ ღია სიმრავლის ანასახი $f(U)$ არის ღია Y სივრცეში. ცხადია, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$, ე.ი. $(f^{-1})^{-1}(U)$ არის ღია Y სივრცეში. ეს კი ნიშნავს, რომ $f^{-1} : Y \to X$ არის უწყვეტი ასახვა. □

წინადადება 2.3.23. $f : X \to Y$ *ურთიერთცალსახა ასახვა* X *სივრცისა* Y *სივრცეზე არის ჰომეომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $f : X \to Y$ *არის ჩაკეტილი ასახვა.*

დამტკიცება. ამ წინადადების დამტკიცება წინა წინადადების მტკიცების ანალოგიურია. □

X ტოპოლოგიური სივრცის $\sim = \{X_s\}_{s\in S}$ დაფარვას ეწოდება ღია (ჩაკეტილი) დაფარვა, თუ ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისათვის X_s არის X სივრცის ღია (ჩაკეტილი) სიმრავლე. ვიტყვით, რომ $\sim = \{X_s\}_{s\in S}$ არის სასრული დაფარვა, თუ $|S| < \aleph_0$.

წინადადება 2.3.24. *თუ* $\{X_s\}_{s\in S}$ *არის* X *სივრცის ღია დაფარვა, ხოლო* $f_s : X_s \to Y$, $s \in S$ *უწყვეტ ასახვათა თავსებადი ოჯახი, მაშინ მათი კომბინირებული ჯამი* $\mathop{\nabla}\limits_{s\in S} f_s : X \to Y$ *არის უწყვეტი ასახვა.*

დამტკიცება. Y სივრცის U ღია სიმრავლის $f_s^{-1}(U)$, $s \in S$

წინარესახეები არის ღია X_s ქვესივრცეში. ცხადია, $f_s^{-1}(U)=G_s\bigcap X_s$, $s\in S$, სადაც G_s არის X სივრცის ღია ქვესიმრავლე. ამრიგად, $f_s^{-1}(U)$ წინარესახე, როგორც X სივრცის ორი ღია სიმრავლის თანაკვეთა არის ღია სიმრავლე X სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ წინარესახე

$$(\mathop{\nabla}_{s\in S} f_s)^{-1}(U)=\bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(U),$$

როგორც X სივრცის ღია სიმრავლეების გაერთიანება, არის ღია სიმრავლე. ამრიგად, $\mathop{\nabla}_{s\in S} f_s$ არის უწყვეტი ასახვა. □

წინადადება 2.3.25. *თუ* $\{X_1,X_2,...,X_n\}$ *არის* X *სივრცის სასრული ჩაკეტილი დაფარვა და* $f_i:X_i\to Y$, $i=1,2,...,n$ *არის უწყვეტ ასახვათა თავსებადი ოჯახი, მაშინ მათი კომბინირებული ჯამი*

$$\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} f_i : X\to Y$$

არის უწყვეტი ასახვა.

დამტკიცება. ვთქვათ F არის Y სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, მაშინ $f_i^{-1}(F)$, $i=1,2,...,n$ იქნება X_i ქვესივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები. ცხადია, $f_i^{-1}(F)=Q_i\bigcap X_i$, $i=1,2,...,n$, სადაც Q_i არის X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ამიტომ $f_i^{-1}(F)$ იქნება X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ტოლობიდან

$$(\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} f_i)^{-1}(F)=\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(F)$$

გამომდინარეობს, რომ $(\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} f_i)^{-1}(F)$ წინარესახე არის X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. ამრიგად, $\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} f_i : X\to Y$ არის უწყვეტი ასახვა. □

X ტოპოლოგიური სივრცის $\{X_s\}_{s\in S}$ დაფარვას ეწოდება ლოკალურად სასრული დაფარვა, თუ $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახი არის ლოკალურად სასრული ოჯახი.

წინადადება 2.3.26. *თუ* $\{X_s\}_{s\in S}$ *არის* X *სივრცის ლოკალურად სასრული ჩაკეტილი დაფარვა და* $f_s:X_s\to Y$, $s\in S$ *არის უწყვეტ ასახვათა თავსებადი ოჯახი, მაშინ კომბინირებული ჯამი* $\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} f_i : X\to Y$ *არის უწყვეტი ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ F არის Y სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. $\{f_s^{-1}(F)\}_{s\in S}$ არის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ლოკალურად სასრული ოჯახი. ამიტომ წინარესახე $(\mathop{\nabla}_{s\in S} f_s)^{-1}(F)=\bigcup_{s\in S} f_s^{-1}(F)$ იქნება X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ამრიგად, $\mathop{\nabla}_{s\in S} f_s : X\to Y$ არის უწყვეტი ასახვა. □

$f:X\to Y$ უწყვეტ ასახვას ეწოდება ჰომეომორფული ჩადგმა X

სივრცისა Y სივრცეში, თუ $f = i \circ g$, სადაც g არის ჰომეომორფიზმი X სივრციდან $f(X)$ სივრცეზე, ხოლო $i_{f(X)}$ ჩადგმის ასახვა $f(X)$ ანასახისა Y სივრცეში. თუ $f(X)$ არის ჩაკეტილი(ღია) Y სივრცეში, მაშინ $f: X \to Y$ ჰომეომორფულ ჩადგმას ეწოდება ჩაკეტილი(ღია) ჰომეომორფული ჩადგმა.

წინადადება 2.3.27. თუ $f: X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა X სივრცისა Y სივრცეზე, მაშინ $d(Y) \leq d(X)$.

დამტკიცება. ვთქვათ A არის X სივრცის ისეთი მკვრივი ქვესიმრავლე, რომ $|A| = d(X)$. 2.3.7 წინადადების თანახმად

$$Y = f(X) = f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

ამიტომ ჩართვიდან $\overline{f(A)} \subset Y$ მივიღებთ $\overline{f(A)} = Y$, ე.ი. $f(A)$ არის Y სივრცის მკვრივი ქვესიმრავლე. ცხადია, სრულდება უტოლობა $|f(A)| \leq |A|$. ამიტომ $d(X) \leq |f(A)| \leq |A| = d(X)$. □

წინადადება 2.3.28. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა ყოველი* $f: X \to Y$ *ღია ასახვისთვის და* $x \in X$ *წერტილისთვის* $¡(f(x), Y) \leq ¡(x, X)$. *თუ დამატებით,* $f(X) = Y$, *მაშინ* $w(Y) \leq w(X)$ *და* $¡(Y) \leq ¡(X)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\pm(x) = \{U_s\}_{s \in S}$ არის ისეთი ბაზისი x წერტილში, რომ $|\pm(x)| = ¡(x, X)$. ოჯახი $\pm(f(x)) = \{f(U_s)\}_{s \in S}$ იქნება ბაზისი $f(x)$ წერტილში. მართლაც, $f(x)$ წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე და $x \in f^{-1}(U)$. პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $U_s \in \pm(x)$, რომ $U_s \subset f^{-1}(U)$. აქედან მივიღებთ $f(x) \in f(U_s) \subset U$. ამდენად,

$$¡(f(x), Y) \leq |\{f(U_s)\}_{s \in S}| \leq |\pm(x)| = ¡(x, X).$$

ასევე, თუ $\pm = \{U_t\}_{t \in T}$ არის X სივრცის ბაზისი და $f(X) = Y$, მაშინ $\{f(U_t)\}_{t \in T}$ იქნება Y სივრცის ბაზისი. ვთქვათ $|\pm| = w(X)$. შევნიშნოთ, რომ

$$w(Y) \leq |\{f(U_t)\}_{t \in T}| = |\pm| = w(X).$$

ასევე, ადვილად შემოწმდება, რომ $¡(Y) \leq ¡(X)$. □

ვთქვათ მოცემულია X ტოპოლოგიური სივრციდან $I = [0,1]$ ან $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურების მქონე სივრცეებში $f_n: X \to I$ ან $f_n: X \to \mathbb{R}$ ასახვების $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა.

ვიტყვით, რომ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $f: X \to I$ $(f: X \to \mathbb{R})$ ასახვისკენ, თუ ნებისმიერი $£ > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი $x \in X$

წერტილისთვის და $n \geq n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $| f(x) - f_n(x) | < £$. ამ შემთხვევაში გამოვიყენებთ აღვნიშვნას $f = \lim_{n\to\infty} \{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$.

თეორემა 2.3.29. *თუ X ტოპოლოგიური სივრციდან $\mathbb{R}$ სივრცეში უწყვეტ ფუნქციათა $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქციისკენ, მაშინ f არის უწყვეტი ასახვა.*

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $£ > 0$ რიცხვი და განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი. პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის და $n \geq n_0$ რიცხვისთვის $| f(x) - f_n(x) | < £/3$. f_n ფუნქციები არის უწყვეტი. ამიტომ არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ ნებისმიერი $x' \in U$ წერტილისთვის $| f(x) - f_n(x') | < £/3$. შევნიშნოთ, რომ

$$| f(x) - f(x') | \leq | f(x) - f_n(x) | + | f_n(x) - f_n(x') | + | f_n(x') - f(x') | < £$$

ამრიგად, ნებისმიერი $£ > 0$ რიცხვისთვის და ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი U მიდამო, რომ ყოველი $x' \in U$ წერტილისთვის $| f(x) - f(x') | < £$, ეს კი ნიშნავს f ფუნქციის უწყვეტობას. □

შევნიშნოთ, თუ თეორემის პირობებში $f_n(X) \subset I$, $n = 1, 2, \dots$, მაშინ $f(X) \subset I$.

წინადადება 2.3.30. *X ტოპოლოგიური სივრცის Y ტოპოლოგიურ სივრცეში $f : X \to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცის ყოველი $\mathcal{N} = \{ x_s, s \in S \}$ ბადისთვის $f(\lim_{s\in S} x_s) \subset \lim_{s\in S} f(x_s)$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა და $x \in \lim_{s\in S} x_s$. პირობის თანახმად, ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის და $f(x)$ ანასახის ნებისმიერი V მიდამოსთვის არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $f(U) \subset V$. რადგან $x \in \lim_{s\in S} x_s$, ამიტომ არსებობს ისეთი $s_0 \in S$ ინდექსი, რომ ყოველი $s \geq s_0$ ინდექსისთვის $x_s \in U$, ანუ $f(x_s) \subset V$. ამრიგად, $f(x) \in \lim_{s\in S} f(x_s)$, ე.ი. $f(\lim_{s\in S} x_s) \subset \lim_{s\in S} f(x_s)$.

ახლა ვაჩვენოთ შებრუნებული დებულება. ვთქვათ სრულდება საკმარისი პირობა. ვაჩვენოთ f არის უწყვეტი ასახვა. ნებისმიერი $A \subset X$ სიმრავლისთვის და $x \in \overline{A}$ წერტილისთვის 2.2.22 წინადადების თანახმად, არსებობს A სიმრავლის წერტილთა ისეთი $\mathcal{N} = \{ x_s, s \in S \}$ ბადე, რომ $\lim_{s\in S} x_s = x$. წინადადების პირობიდან გამომდინარე $f(x) \in \lim_{s\in S} f(x_s)$. აქედან მივიღებთ $f(x) \in \overline{f(A)}$. ამრიგად, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,

ე.ი. f არის უწყვეტი ასახვა. □

ვთქვათ მოცემულია X ტოპოლოგიური სივრცე და A ქვესივრცე. $r:X\to A$ უწყვეტ ასახვას ეწოდება რეტრაქცია, თუ $r\circ i=1_A$, ანუ $r_{|A}=1_A$. ცხადია, r ასახვას $X\setminus A$ დამატების ყოველი x წერტილი გადაყავს A ქვესივრცის წერტილებში, ხოლო A ქვესივრცის წერტილებს ტოვებს უძრავად, ანუ $r(a)=a$ ყოველი $a\in A$ წერტილისთვის. A ქვესივრცეს ეწოდება X სივრცის რეტრაქტი.

წინადადება 2.3.31. *ვთქვათ A და B არის X სივრცის ქვესივრცეები და $A\subset B$. თუ A ქვესივრცე არის B ქვესივრცის რეტრაქტი, ხოლო B ქვესივრცე X სივრცის რეტრაქტი, მაშინ A ქვესივრცე არის X სივრცის რეტრაქტი.*

დამტკიცება. პირობის თანახმად არსებობს რეტრაქციები $r_A:B\to A$ და $r_B:X\to B$. მაშინ $r_A\circ i_A=1_A$ და $r_B\circ i_B=1_B$, სადაც $i_A:A\to B$ და $i_B:B\to X$ არის ჩადგმის ასახვები. ცხადია, $i_B\circ i_A:A\to X$ არის A ქვესივრცის X სივრცეში ჩადგმის ასახვა. კომპოზიცია $r_A\circ r_B:X\to A$ აკმაყოფილებს პირობას

$$(r_A\circ r_B)(i_B\circ i_A)=r_A\circ(r_B\circ i_B)\circ i_A=r_A\circ 1_B\circ i_A=r_A\circ i_A=1_A,$$

ე.ი. A არის X სივრცის რეტრაქტი. □

წინადადება 2.3.32. *ვთქვათ A და B არის X სივრცის ქვესივრცეები და $A\subset B$. თუ A არის X სივრცის რეტრაქტი, მაშინ A არის B ქვესივრცის რეტრაქტი.*

დამტკიცება. პირობის თანახმად არსებობს $r_A:X\to A$ რეტრაქცია. განვიხილოთ $r_B=r_{A_{|B}}:B\to A$ შემოსაზღვრის ასახვა. $i_A:A\to B$ და $i_B:B\to X$ ასახვების კომპოზიცია $i_B\circ i_A:A\to X$ არის A ქვესივრცის X სივრცეში ჩადგმის ასახვა. ამიტომ $r_A\circ(i_B\circ i_A)=1_A$.ცხადია, $r_A\circ i_B=r_{A_{|B}}=r_B$. ამრიგად, $r_B\circ i_A=1_A$, ე.ი. A არის B ქვესივრცის რეტრაქტი. □

მაგალითი 2.3.33. ვთქვათ $X=[0,1]\setminus\{1/2\}$, ხოლო $A=\{0,1\}$. ცხადია, ასახვა $r:X\to A$, მოცემული ფორმულით

$$r(x)=\begin{cases}0, & x<1/2,\\ 1, & x>1/2,\end{cases}$$

არის რეტრაქცია.

მაგალითი 2.3.34. ვთქვათ $X=B^n\setminus\{(0,0,\dots,0)\}$, ხოლო $A=S^{n-1}$. ადვილი დასანახია, რომ $r:X\to A$ ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$r((x_1,x_2,\dots,x_n))=(\frac{x_1}{\|x\|},\frac{x_2}{\|x\|},\dots,\frac{x_n}{\|x\|}),$$

სადაც $\|x\|=\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\}^{1/2}$, არის რეტრაქცია.

სავარჯიშო 2.3.35. 1). ვთქვათ τ_1 და τ_2 არის ორი ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე. აჩვენეთ, $1_X:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$ იგივური ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\tau_2\subset\tau_1$.

2).აჩვენეთ, თუ $f,g:X\to\mathbb{R}$ არის უწყვეტი ასახვები, მაშინ $h:X\to\mathbb{R}$ ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$h(x)=\max\{f(x),g(x)\},\ x\in X\ ,$$

არის უწყვეტი ასახვა.

3).ვთქვათ $f,g:X\to\mathbb{R}$ არის უწყვეტი ასახვები, აჩვენეთ $h:X\to\mathbb{R}$ ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$h(x)=\min\{f(x),g(x)\},\ x\in X\ ,$$

არის უწყვეტი ასახვა.

4).ვთქვათ $f:X\to\mathbb{R}$ არის უწყვეტი ასახვა. აჩვენეთ, $h:X\to\mathbb{R}$ ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$h(x)=|f(x)|,x\in X\ ,$$

არის უწყვეტი ასახვა.

5).ვთქვათ $f,g:X\to\mathbb{R}$ არის უწყვეტი ასახვები და $g(X)\subset\mathbb{R}\setminus\{0\}$. აჩვენეთ, $h:X\to\mathbb{R}$ ასახვაა, მოცემული ფორმულით

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in X\ ,$$

არის უწყვეტი ასახვა.

6).აჩვენეთ, $f:X\to Y$ ასახვა არის ღია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $A\subset X$ სიმრავლისთვის $f(\mathrm{Int}\,A)\subset\mathrm{Int}\,f(A)$.

7).აჩვენეთ, $f:X\to Y$ ასახვა ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $A\subset X$ სიმრავლისთვის $\overline{f(A)}=f(\overline{A})$.

8).ვთქვათ $f:X\to Y$ არის უწყვეტი ასახვა. აჩვენეთ, თუ x არის $A\subset X$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი, მაშინ $f(x)$ არის $f(A)$ ანასახის დაგროვების წერტილი.

9).ვთქვათ $f:X\to Y$ არის ჰომეომორფიზმი. აჩვენეთ, $A\subset X$ სიმრავლისთვის $f(\mathrm{Fr}\,A)=\mathrm{Fr}(f(A))$.

10).ვთქვათ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ არის ბიექცია. აჩვენეთ, f არის ჰომეომორფიზმი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f არის მონოტონური ასახვა.

2.4. სიმრავლეზე ტოპოლოგიის შემოტანის მეთოდები

წინამდებარე პარაგრაფში საუბარი იქნება ნებისმიერ სიმრავლეზე ტოპოლოგიის შემოტანის მეთოდებზე. აქ, სხვადასხვა გზებით

ნებისმიერ X სიმრავლეზე ავაგებთ ქვესიმრავლეთა ² ოჯახებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ O1), O2) და O3) პირობებს.

სიმრავლეზე ტოპოლოგიური სტრუქტურის აგების პირველი მეთოდი მოიცემა შემდეგი თეორემით.

თეორემა 2.4.1. *ვთქვათ მოცემულია X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\pm = \{U_s\}_{s\in S}$ ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:*

B1).*ნებისმიერი $U_s, U_{s'} \in \pm$ ელემენტისთვის და ნებისმიერი $x \in U_s \bigcap U_{s'}$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_{s''} \in \pm$ ელემენტი, რომ $x \in U_{s''} \subset U_s \bigcap U_{s'}$.*

B2).*ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_s \in \pm$ ელემენტი, რომ $x \in U_s$.*

მაშინ ² ოჯახი, რომელიც შედგება ± ოჯახის ნებისმიერ ქვეოჯახში შემავალი ელემენტების გაერთიანებებისაგან, არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე. $(X,{}^2)$ ტოპოლოგიური სივრცის ერთერთ ბაზისს წარმოადგენს ± ოჯახი.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ ² ოჯახი აკმაყოფილებს O1), O2) და O3) პირობებს.

O1). X სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტი შედის ± ოჯახის რომელიმე U ელემენტში. ამიტომ $X = \bigcup_{U\in\pm} U$ და ² ოჯახის განმარტების თანახმად, $X \in {}^2$. ასევე, $\varnothing$ სიმრავლე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ± ოჯახის ცარიელი ქვეოჯახის მეშვეობით. ამიტომ $\varnothing \in \pm$.

O2).ვთქვათ $G_1, G_2 \in {}^2$. მაშინ $G_1 = \bigcup_{U_s \in \pm_1 \subset \pm} U_s$ და $G_2 = \bigcup_{U_t \in \pm_2 \subset \pm} U_t$. ცხადია,

$$G_1 \bigcap G_2 = \bigcup_{\substack{U_s \in \pm_1 \subset \pm \\ U_t \in \pm_2 \subset \pm}} U_s \bigcap U_t$$

ნებისმიერი $x \in U_s \bigcap U_t$ წერტილისთვის, B1) პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $U_l \in \pm_0 \subset \pm$ ელემენტი, რომ $x \in U_l \subset U_s \bigcap U_t$. ამიტომ $U_s \bigcap U_t = \bigcup_{U_l \in \pm_0 \subset \pm} U_l$. ამრიგად, $G_1 \bigcap G_2$ სიმრავლე არის ± ოჯახის რაიმე ქვეოჯახის ელემენტების გაერთიანება, ე.ი. $G_1 \bigcap G_2 \in {}^2$.

O3).ვთქვათ $G_{\tilde{}} \in {}^2$, $\sim \in A$. მაშინ $G_{\tilde{}} = \bigcup_{U_s \in \pm_{\tilde{}} \subset \pm} U_s$.აქედან გამომდინარე,

$$\bigcup_{\sim\in A} G_{\tilde{}} = \bigcup_{U_s \in \bigcup\limits_{\sim\in A} \pm_{\tilde{}} \subset \pm} U_s .$$

² ოჯახის განმარტების თანახმად, $\bigcup_{\sim\in A} G_{\tilde{}} \in {}^2$.

$(X,{}^2)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში ღიაა ± ოჯახის ყოველი წევრი. ² ტოპოლოგიური სტრუქტურის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ± არის $(X,{}^2)$ სივრცის ბაზისი. □

მაგალითი 2.4.2. $\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ქვესიმრავლეების

$\pm = \{[a,b) \subset \mathbb{R} \mid a < b, a, b, \in \mathbb{Q}\}$ ოჯახი აკმაყოფილებს B1)-B2) პირობებს. ამიტომ ± ინდუცირებს $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძზე ² ტოპოლოგიურ სტრუქტურას.

სიმრავლეზე ტოპოლოგიის შემოტანის მეორე მეთოდი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2.4.3. *ვთქვათ მოცემულია X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\pm(x)$ ოჯახების ერთობლიობა $\{\pm(x)\}_{x\in X}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:*

BN1). *ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის $\pm(x) \neq \varnothing$ და ყოველი $U \in \pm(x)$ ელემენტისთვის $x \in U$.*

BN2). *თუ $x \in U \in \pm(y)$, მაშინ არსებობს ისეთი $V \in \pm(x)$, რომ $V \subset U$.*

BN3). *ნებისმიერი $U, V \in \pm(x)$ ელემენტისთვის არსებობს ისეთი $W \in \pm(x)$ ელემენტი, რომ $W \subset U \bigcap V$.*

მაშინ X სიმრავლის ქვესიმრავლეები, რომლებიც წარმოდგება $\bigcup\limits_{x\in X} \pm(x)$ ოჯახის ქვეოჯახების ელემენტების გაერთიანებებით, ქმნის ² ტოპოლოგიურ სტრუქტურას X სიმრავლეზე. მიღებული $(X, ^2)$ ტოპოლოგიური სივრცისათვის $\{\pm(x)\}_{x\in X}$ არის მიდამოთა სისტემა.

დამტკიცება. ამ თეორემის დამტკიცება მიმდინარეობს ისე, როგორც 2.4.1 თეორემის მტკიცება. □

მაგალითი 2.4.4. ვთქვათ $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$, ხოლო $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. ნებისმიერი $(x,y,z) \in X$ წერტილისათვის განვიხილოთ $\pm((x,y,z))$ ოჯახი. $\pm((x,y,z))$ ოჯახი, სადაც $z > 0$, შედგება (x,y,z) წერტილის შემცველი და X ნახევარსივრცეში მდებარე ღია ბირთვებისაგან, ხოლო, თუ $z = 0$, მაშინ $\pm((x,y,0))$ შედგება $(x,y,0)$ წერტილისაგან და ყველა იმ ღია ბირთვისაგან, რომელიც მდებარეობს X ნახევარსივრცეში და ეხება $(x,y,0) \in Y$ წერტილს. $\{\pm((x,y,z))\}_{(x,y,z)\in X}$ ოჯახი აკმაყოფილებს BN1)-BN3) პირობებს. ამიტომ იგი X ნახევარსივრცეში ინდუცირებს ² ტოპოლოგიურ სტრუქტურას. $(X, ^2)$ ტოპოლოგიურ სივრცეს ვუწოდებთ ნემიცკის სივრცეს. ცხადია, Y ქვესივრცე არის დისკრეტული ქვესივრცე. შევნიშნოთ, რომ Y ქვესიმრავლე არის X ნემიცკის სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. $X \setminus Y$ ქვესიმრავლეზე ნემიცკის სივრცის ტოპოლოგიური სტრუქტურით და $\mathbb{R}^3$ ევკლიდური სივრცის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სტრუქტურები ერთმანეთს ემთხვევა.

სიმრავლეზე ტოპოლოგიის აგების მესამე მეთოდი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2.4.5. *ვთქვათ* $\mathscr{C}$ *არის* X *სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:*

C1). $X,\varnothing\in\mathscr{C}$.

C2). თუ $F,G\in\mathscr{C}$, მაშინ $F\bigcup G\in\mathscr{C}$.

C3). თუ $F_s\in\mathscr{C}$, $s\in S$, მაშინ $\bigcap\limits_{s\in S}F_s\in\mathscr{C}$.

მაშინ $^{2}=\{X\setminus F\mid F\in\mathscr{C}\}$ ოჯახი არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე, ხოლო $\mathscr{C}$ არის $(X,^{2})$ სივრცის ყველა ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი.

დამტკიცება. O1). ^{2} ოჯახის განმარტებიდან გამომდინარე $X,\varnothing\in{}^{2}$, რადგან $X=X\setminus\varnothing$, $\varnothing=X\setminus X$ და $X,\varnothing\in\mathscr{C}$.

O2). ვთქვათ $U,V\in{}^{2}$. მაშინ $U=X\setminus F$, $F\in\mathscr{C}$ და $V=X\setminus G$, $G\in\mathscr{C}$. დემორგანის ფორმულის და C2) პირობის თანახმად,

$$U\bigcap V=(X\setminus F)\bigcap(X\setminus G)=X\setminus(F\bigcup G)$$

და

$$F\bigcup G\in\mathscr{C} .$$

^{2} ოჯახის განმარტებიდან გამომდინარე, $U\bigcap V\in{}^{2}$.

O3).ვთქვათ $U_s\in{}^{2},s\in S$. მაშინ $U_s=X\setminus F_s,F_s\in\mathscr{C},s\in S$. დემორგანის ფორმულის და C3) პირობის თანახმად,

$$\bigcup_{s\in S}U_s=\bigcup_{s\in S}(X\setminus F_s)=X\setminus\bigcap_{s\in S}F_s$$

და

$$\bigcap_{s\in S}F_s\in\mathscr{C} .$$

^{2} ოჯახის განმარტებიდან გამომდინარე, $\bigcup\limits_{s\in S}U_s\in{}^{2}$.

ნებისმიერი $F\in\mathscr{C}$ სიმრავლისთვის $X\setminus F\in{}^{2}$, ე.ი. $X\setminus F$ არის ღია სიმრავლე. ამიტომ მისი დამატება $X\setminus(X\setminus F)=F$ იქნება $(X,^{2})$ სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. ვთქვათ, ახლა G არის ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე $(X,^{2})$ სივრცეში. მაშინ $X\setminus G$ არის ღია $(X,^{2})$ სივრცეში, ე.ი. $X\setminus G\in{}^{2}$. ცხადია, $X\setminus G=X\setminus F$, სადაც $F\in\mathscr{C}$. აქედან მივიღებთ $G=F$, ანუ $G\in\mathscr{C}$. ამრიგად, $\mathscr{C}$ ოჯახი შედგება მხოლოდ და მხოლოდ $(X,^{2})$ სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლეებისაგან. □

მაგალითი 2.4.6. ვთქვათ $\mathbb{R}$ არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძი. განვიხილოთ $\mathscr{C}$ ოჯახი, რომელიც შედგება $\mathbb{R}$ ღერძისაგან და მისი სასრული ქვესიმრავლეებისაგან. ცხადია, $\mathscr{C}$ ოჯახი აკმაყოფილებს C1), C2) და C3) პირობებს. ამრიგად, ^{2} ოჯახი, რომელიც შედგება $\varnothing$ სიმრავლისაგან და სასრული სიმრავლეების დამატებებისაგან, არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე. $(\mathbb{R},^{2})$ სივრცის $(-\infty,a)\bigcup(b,+\infty)$ სიმრავლე, სადაც $a<b$, არაა ღია, რადგან მისი

დამატება, $[a,b]$ სეგმენტი არაა სასრული სიმრავლე. ცხადია, ამ სივრცეში ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{N}^+$ არაა ჩაკეტილი.

სიმრავლეზე ტოპოლოგიური სტრუქტურის შემოტანის მეოთხე მეთოდი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 2.4.7. *ვთქვათ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეზე განსაზღვრულია შესაბამისობა $A \to \tilde{A}$, რომელიც ყოველ $A \subset X$ სიმრავლეს შეუსაბამებს სიმრავლეს $\tilde{A} \subset X$ და აკმაყოფილებს პირობებს:*

CL1). $\varnothing = \tilde{\varnothing}$.

CL2). $A \subset \tilde{A}$.

CL3). $\widetilde{A \bigcup B} = \tilde{A} \bigcup \tilde{B}$.

CL4). $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$.

მაშინ ოჯახი $^2 = \{X \setminus A \,|\, A = \tilde{A}, A \subset X\}$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე, ხოლო შესაბამისობა $A \to \tilde{A}$ ჩაკეტვის ოპერატორი.

დამტკიცება. წინა თეორემის თანახმად საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ერთობლიობა $\mathscr{C} = \{A = \tilde{A} \,|\, A \subset X\}$ აკმაყოფილებს C1), C2) და C3) პირობებს.

C1).CL1) პირობის თანახმად $\varnothing \in \mathscr{C}$. სამართლიანია $X = \tilde{X}$ ტოლობა, რადგან $A \to \tilde{A}$ შესაბამისობის განმარტების და CL2) პირობის თანახმად $\tilde{X} \subset X$ და $X \subset \tilde{X}$. ამრიგად, $X = \tilde{X}$ და $X \in \mathscr{C}$.

C2).ვთქვათ $F, G \in \mathscr{C}$. მაშინ $\tilde{F} = F$ და $\tilde{G} = G$. ცხადია, CL3) პირობის თანახმად,

$$\widetilde{F \bigcup G} = \tilde{F} \bigcup \tilde{G} = F \bigcup G .$$

ამიტომ $F \bigcup G \in \mathscr{C}$.

C3).თავდაპირველად ვაჩვენოთ, თუ $A \subset B$, მაშინ $\tilde{A} \subset \tilde{B}$. ცხადია, $A \bigcup B = B$. ამიტომ $\tilde{A} \bigcup \tilde{B} = \widetilde{A \bigcup B} = \tilde{B}$. აქედან მივიღებთ $\tilde{A} \subset \tilde{B}$.

ვთქვათ $F_s \in \mathscr{C}$, $s \in S$. მაშინ $\tilde{F}_s = F_s$, $s \in S$. ჩართვიდან $\bigcap\limits_{s \in S} F_s \subset F_s$ მივიღებთ $\widetilde{\bigcap\limits_{s \in S} F_s} \subset \tilde{F}_s$. აქედან გამომდინარე, $\widetilde{\bigcap\limits_{s \in S} F_s} \subset \bigcap\limits_{s \in S} F_s$. გარდა ამისა, CL2)პირობის თანახმად გვაქვს $\bigcap\limits_{s \in S} F_s \subset \widetilde{\bigcap\limits_{s \in S} F_s}$, ე.ი. $\widetilde{\bigcap\limits_{s \in S} F_s} = \bigcap\limits_{s \in S} F_s$. ამრიგად, $\bigcap\limits_{s \in S} F_s \in \mathscr{C}$.

ამრიგად, ^{2} ოჯახი არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე. ახლა ვაჩვენოთ, რომ A სიმრავლის ჩაკეტვა $\overline{A}$ ემთხვევა

A სიმრავლესთან შესაბამისობაში მოყვანილ $\tilde{A}$ სიმრავლეს. ყოველი $A \subset X$ სიმრავლისთვის, CL4) პირობის თანახმად, $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$, ამიტომ $\tilde{A} \in \mathscr{C}$. აქედან გამომდინარე, $\tilde{A}$ არის $(X, {}^{2})$ ტოპოლოგიური სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. რადგან $A \subset \tilde{A}$, ამიტომ $\overline{A} \subset \tilde{A}$. ახლა ვაჩვენოთ პირიქით, $\tilde{A} \subset \overline{A}$. X სივრცის ნებისმიერი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის, რომელიც მოიცავს A სიმრავლეს, გვაქვს $\tilde{F} = F$, $\tilde{A} \subset \tilde{F} = F$. ამიტომ $\tilde{A} \subset \overline{A} = \bigcap_{A \subset F} F$, სადაც F არის A სიმრავლის მომცველი ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე. ამრიგად, $\overline{A} = \tilde{A}$. □

მაგალითი 2.4.8. ვთქვათ r არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძის რაიმე ელემენტი. ნებისმიერ $A \subset \mathbb{R}$ ქვესიმრავლეს შევუსაბამოთ სიმრავლე $\tilde{A} = A \bigcup \{r\}$. დავუშვათ $\tilde{\varnothing} = \varnothing$. ეს შესაბამისობა აკმაყოფილებს CL1), CL2), CL3) და CL4) პირობებს. ამრიგად, ოჯახი ${}^{2} = \{\mathbb{R} \setminus A \mid \tilde{A} = A\}$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე. მიღებულ $(\mathbb{R}, {}^{2})$ ტოპოლოგიურ სივრცეში r წერტილი და მისი მომცველი ყველა სიმრავლე არის ჩაკეტილი. ცხადია, ამ სივრცეში ნებისმიერი r წერტილისგან განსხვავებული წერტილი არაა ჩაკეტილი, მაშინ როცა r წერტილი არის ჩაკეტილი.

სიმრავლეზე ტოპოლოგიის შემოტანის მეოთხე მეთოდი მოიცემა შემდეგი თეორემით.

თეორემა 2.4.9. *ვთქვათ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლეზე განმარტებულია შესაბამისობა $A \to \operatorname{int} A$, რომელიც ყოველ $A \subset X$ სიმრავლეს შეუსაბამებს $\operatorname{int} A \subset X$ სიმრავლეს და აკმაყოფილებს პირობებს:*

IO1). $\operatorname{int} X = X$.

IO2). $\operatorname{int} A \subset A$.

IO3). $\operatorname{int}(A \bigcap B) = \operatorname{int} A \bigcap \operatorname{int} B$.

IO4). $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$.

მაშინ ოჯახი ${}^{2} = \{A \subset X \mid \operatorname{int} A = A\}$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე, ხოლო შესაბამისობა $A \to \operatorname{int} A$ ბირთვის ოპერატორი.

დამტკიცება. შევამოწმოთ, რომ სრულდება O1), O2) და O3) პირობები.

O1).IO1) პირობის თანახმად $X \in {}^{2}$. ჩართვებიდან $\varnothing \subset \operatorname{int} \varnothing$ და $\operatorname{int} \varnothing \subset \varnothing$ გამომდინარეობს $\operatorname{int} \varnothing = \varnothing$. ამიტომ $\varnothing \in {}^{2}$.

O2).ვთქვათ $U, V \in {}^{2}$. მაშინ $\operatorname{int} U = U$ და $\operatorname{int} V = V$ ტოლობებიდან და IO3) პირობიდან მივიღებთ ტოლობას

$$\operatorname{int}(U\bigcap V)=\operatorname{int}U\bigcap \operatorname{int}V=U\bigcap V\ .$$

ამიტომ $U\bigcap V\in\tau$.

О3).თავდაპირველად ვაჩვენოთ, თუ $A\subset B$, მაშინ $\operatorname{int}A\subset\operatorname{int}B$. ტოლობიდან $A\bigcap B=A$ და IO3) პირობიდან მივიღებთ

$$\operatorname{int}A\bigcap\operatorname{int}B=\operatorname{int}(A\bigcap B)=\operatorname{int}A .$$

აქედან კი გამომდინარეობს ჩართვა $\operatorname{int}A\subset\operatorname{int}B$.

ვთქვათ $U_s\in\tau$, $s\in S$. ცხადია, $\operatorname{int}(\bigcup\limits_{s\in S}U_s)\subset\bigcup\limits_{s\in S}U_s$. ვაჩვენოთ შებრუნებული ჩართვა $\bigcup\limits_{s\in S}U_s\subset\operatorname{int}(\bigcup\limits_{s\in S}U_s)$. ჩართვიდან $U_s\subset\bigcup\limits_{s\in S}U_s$, $s\in S$ მივიღებთ $U_s=\operatorname{int}U_s\subset\operatorname{int}(\bigcup\limits_{s\in S}U_s)$, $s\in S$. ამიტომ $\bigcup\limits_{s\in S}U_s\subset\operatorname{int}(\bigcup\limits_{s\in S}U_s)$. ამრიგად, $\operatorname{int}(\bigcup\limits_{s\in S}U_s)=\bigcup\limits_{s\in S}U_s$. ე.ი. $\bigcup\limits_{s\in S}U_s\in\tau$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი $A\subset X$ ქვესიმრავლის ბირთვი $\operatorname{Int}A=\operatorname{int}A$. IO4) პირობის თანახმად $\operatorname{int}A\in\tau$ და იგი არის (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლე.გარდა ამისა, IO2) პირობის თანახმად, $\operatorname{int}A\subset A$. ამიტომ $\operatorname{int}A\subset\operatorname{Int}A$. (X,τ) სივრცის ნებისმიერი U ღია სიმრავლისთვის, რომელიც შედის A სიმრავლეში, გვაქვს ჩართვა $U=\operatorname{int}U\subset\operatorname{int}A$. ამიტომ $\operatorname{Int}A\subset\operatorname{int}A$. ამრიგად, $\operatorname{Int}A=\operatorname{int}A$. □

მაგალითი 2.4.10.ვთქვათ $X=\mathbb{R}$ და $I=[0,1]$. დავუშვათ, რიცხვითი ღერძის ყოველი U ქვესიმრავლისთვის $\operatorname{int}U=U\bigcap I$ და $\operatorname{int}X=X$. შესაბამისობა $U\to\operatorname{int}U$ აკმაყოფილებს IO1), IO2), IO3) და IO4) პირობებს. ამიტომ 2.4.9 თეორემის თანახმად, ოჯახი $\tau=\{\operatorname{int}U=U\mid U\subset\mathbb{R}\}$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე. ცხადია, $(\mathbb{R},\tau)$ სივრცის I ქვესიმრავლე არის ღია.

ვთქვათ მოცემულია წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ოჯახი. ამ სივრცეთა, როგორც სიმრავლეთა, გაერთიანებაზე ავაგოთ ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

თეორემა 2.4.11.*ვთქვათ* (X_s,τ_s) , $s\in S$ *არის ტოპოლოგიურ სივრცეთა ისეთი ოჯახი, რომ ნებისმიერი* $s\neq s'$ *ინდექსისათვის* $X_s\bigcap X_{s'}=\varnothing$ *.* $\bigcup\limits_{s\in S}X_s$ *სიმრავლის* U *ქვესიმრავლეთა* τ *ოჯახი, რომელთათვისაც* $U\bigcap X_s\in\tau_s$ *,* $s\in S$ *, ქმნის ტოპოლოგიურ სტრუქტურას* $\bigcup\limits_{s\in S}X_s$ *გაერთიანებაზე.*

დამტკიცება. О1).ცხადია, $\bigcup\limits_{s\in S}X_s$ სიმრავლისთვის და ნებისმიერი s ინდექსისათვის $(\bigcup\limits_{s\in S}X_s)\bigcap X_s=X_s\in\tau_s$, ასევე $\varnothing\bigcap X_s=\varnothing\in\tau_s$. ამრიგად, τ ოჯახის განმარტების თანახმად, $\bigcup\limits_{s\in S}X_s,\varnothing\in\tau$.

O2).ვთქვათ $U,V \in {}^2$. ცხადია, $U \bigcap X_s, V \bigcap X_s \in {}^2{}_s$. შევნიშნოთ, რომ $(U \bigcap X_s) \bigcap (V \bigcap X_s) \in {}^2{}_s$. ამიტომ ტოლობიდან

$$(U \bigcap V) \bigcap X_s = (U \bigcap X_s) \bigcap (V \bigcap X_s)$$

და ^{2} ოჯახის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $U \bigcap V \in {}^2$.

O3).ვთქვათ $U_{\tilde{}} \in {}^2$, $\sim \in A$. ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $U_{\tilde{}} \bigcap X_s \in {}^2{}_s$. შევნიშნოთ, რომ $\bigcup\limits_{\sim \in A} (U_{\tilde{}} \bigcap X_s) \in {}^2{}_s$. ამიტომ ^{2} ოჯახის განმარტებიდან და ტოლობიდან

$$(\bigcup_{\sim \in A} U_{\tilde{}}) \bigcap X_s = \bigcup_{\sim \in A} (U_{\tilde{}} \bigcap X_s)$$

გამომდინარეობს $\bigcup\limits_{\sim \in A} U_{\tilde{}} \in {}^2$. □

$(\bigcup\limits_{\sim \in A} X_{\tilde{}}, {}^2)$ წყვილს ეწოდება $(X_s, {}^2{}_s)$, $s \in S$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი და აღინიშნება $\bigoplus\limits_{s \in S} X_s$ სიმბოლოთი.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ მოცემულია

$$X_1 = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) ,$$

$$X_2 = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} ,$$

$$X_3 = \mathbb{R}^2 ,$$

$$X_4 = \bar{B}^3((0,0,0),1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$$

სივრცეები. ამ სივრცეთა $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$ ტოპოლოგიურ ჯამში

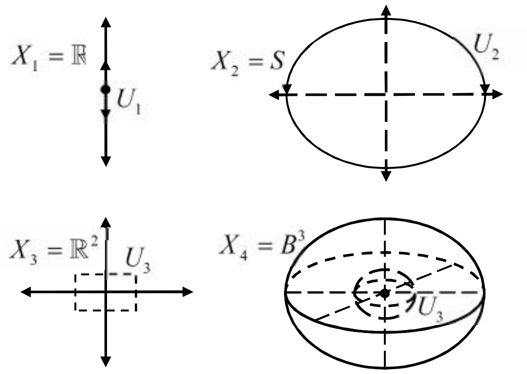
$$U_1 = (-1,1) ,$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1,\ 0 < y \le 1,\ x^2 + y^2 = 1\} ,$$

$$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\} ,$$

$$U_4 = B^3((0,0,0),1/2)$$

სიმრავლეების გაერთიანება $U = U_1 \bigcup U_2 \bigcup U_3 \bigcup U_4$ არის ღია სიმრავლე.



თეორემა 2.4.12. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა* $\bigoplus\limits_{s \in S} X_s$ *ჯამის* F

ქვესიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $F \bigcap X_s$ ჩაკეტილია X_s სივრცეში.

დამტკიცება. ვთქვათ F არის სივრცეთა $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ ჯამის ჩაკეტილი სიმრავლე. მაშინ $(\underset{s\in S}{\oplus} X_s)\setminus F$ არის ღია $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ სივრცეში. ამიტომ ნებიმიერი $s' \in S$ ინდექსისთვის $((\underset{s\in S}{\oplus} X_s)\setminus F)\bigcap X_{s'}$ იქნება ღია $X_{s'}$ სივრცეში. ტოლობიდან

$$((\underset{s\in S}{\oplus} X_s)\setminus F)\bigcap X_{s'} = X_{s'}\setminus(F\bigcap X_{s'})$$

გამომდინარეობს, რომ $X_{s'}\setminus(F\bigcap X_{s'})$ სიმრავლე ღიაა $X_{s'}$ სივრცეში, ე.ი. $F\bigcap X_{s'}$ სიმრავლე ჩაკეტილია $X_{s'}$ სივრცეში.

ვთქვათ, შებრუნებით, ნებისმიერი $s' \in S$ ინდექსისათვის და $F \subset \underset{s\in S}{\oplus} X_s$ სიმრავლისათვის $F\bigcap X_{s'}$ ჩაკეტილია $X_{s'}$ სივრცეში. მაშინ $X_{s'}\setminus(F\bigcap X_{s'})$ იქნება ღია სიმრავლე $X_{s'}$ სივრცეში, ე.ი. ნებისმიერი $s' \in S$ ინდექსისთვის $((\underset{s\in S}{\oplus} X_s)\setminus F)\bigcap X_{s'}$ სიმრავლე ღიაა $X_{s'}$ სივრცეში. ამიტომ $(\underset{s\in S}{\oplus} X_s)\setminus F$ სიმრავლე არის ღია $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ სივრცეში, ანუ F არის ჩაკეტილი $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ ჯამში. □

ნებისმიერი $X_{s'}, s' \in S$ სივრცე არის $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ ჯამის ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე, რადგან ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის თანაკვეთა $X_s \bigcap X_{s'}$ არის ან $X_{s'}$ ან $\varnothing$ სიმრავლე.

თეორემა 2.4.13. *თუ X ტოპოლოგიური სივრცე არის მისი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ღია $X_s, s \in S$ ქვესიმრავლეების გაერთიანება, მაშინ $X = \underset{s\in S}{\oplus} X_s$.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ X და $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ სივრცეების ღია სიმრავლეების ერთობლიობები ერთმანეთს ემთხვევა. ვთქვათ U არის ღია X სივრცეში, მაშინ $U\bigcap X_s, s\in S$ იქნება ღია ყოველ X_s ქვესივრცეში. ამიტომ U არის ღია $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ სივრცეთა ჯამში.

ვთქვათ, პირიქით, U არის ღია $\underset{s\in S}{\oplus} X_s$ სივრცეთა ჯამში. მაშინ $U\bigcap X_s$

,

$s\in S$ იქნება ღია X_s სივრცეში და, მაშასადამე, X სივრცეში. რადგან $U = \bigcup_{s\in S}(U\bigcap X_s)$, ამიტომ U არის X სივრცის ღია სიმრავლე. □

თეორემა 2.4.14. *$f : \underset{s\in S}{\oplus} X_s \to Y$ ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისათვის $f \circ i_s : X_s \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ f ასახვა უწყვეტია. ცხადია, $i_s : X_s \to \bigoplus_{s\in S} X_s$ უწყვეტი ჩადგმისა და f ასახვის კომპოზიცია არის უწყვეტი ასახვა.

ვთქვათ, შებრუნებით, $f \circ i_s : X_s \to Y$, $s \in S$ არის უწყვეტი ასახვა. ყოველი $U \subset Y$ ღია სიმრავლის $(f \circ i_s)^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია X_s სივრცეში. ამიტომ, $(f \circ i_s)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \bigcap X_s$ ტოლობის თანახმად, $f^{-1}(U) \bigcap X_s$ არის ღია ნებისმიერ X_s სივრცეში. ეს კი ნიშნავს, რომ Y სივრცის ყოველი U ღია სიმრავლის წინარესახე $f^{-1}(U)$ არის ღია სივრცეთა $\bigoplus_{s\in S} X_s$ ჯამში. ამრიგად, f არის უწყვეტი ასახვა. □

ახლა ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახში შემავალი X_s სივრცეების, როგორც სიმრავლეების, $\prod_{s\in S} X_s$ დეკარტულ ნამრავლზე შემოვიტანოთ ტოპოლოგიური სტრუქტურა. ამ მიზნის მისაღწევად დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე წინადადება.

წინადადება 2.4.15. *ვთქვათ X არის სიმრავლე, ხოლო $f_s : X \to Y_s$, $s \in S$ ასახვები X სიმრავლიდან Y_s ტოპოლოგიურ სივრცეებში. X სიმრავლის ყველა იმ ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა შორის, რომელთა მიმართაც f_s ასახვები არის უწყვეტი, არსებობს ყველაზე სუსტი ტოპოლოგიური სტრუქტურა ², წარმოქმნილი ± ბაზისით, რომლის ელემენტებია $\bigcap_{i=1}^{n} f_{s_i}^{-1}(U_i)$ თანაკვეთები, სადაც ყოველი $i = 1, 2, ..., n$ ინდექსისთვის U_i არის Y_{s_i} სივრცეების ღია ქვესიმრავლეები.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ± ოჯახს გააჩნია B1) და B2) თვისებები.

ვთქვათ $x \in X$. ცხადია, $f_s(x)$ ანასახი ეკუთვნის Y_s ტოპოლოგიური სივრცის რაიმე U_s ღია სიმრავლეს. ამიტომ $x \in f_s^{-1}(U_s) \in$ ± .

ვთქვათ ახლა x ეკუთვნის ± ოჯახის რაიმე ორი $\bigcap_{i=1}^{n} f_{s_i}^{-1}(U_i)$ და $\bigcap_{j=1}^{m} f_{s_j}^{-1}(V_j)$ ელემენტის თანაკვეთას. ცხადია, ამ ელემენტების თანაკვეთა არის $\bigcap_{k=1}^{n+m} f_{s_k}^{-1}(W_k)$, სადაც $W_1, W_2, ..., W_n$ შესაბამისად არის $U_1, U_2, ..., U_n$, ხოლო $W_{n+1}, W_{n+2}, ..., W_{n+m}$ შესაბამისად არის $V_1, V_2, ..., V_m$. შევნიშნოთ, რომ

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n+m} f_{s_k}^{-1}(W_k) \subset \bigcap_{i=1}^{n} f_{s_i}^{-1}(U_i) \bigcap \bigcap_{j=1}^{m} f_{s_j}^{-1}(V_j).$$

2.4.1 თეორემის თანახმად ± ოჯახი X სიმრავლეზე ინდუცირებს ² ტოპოლოგიურ სტრუქტურას, რომლის ელემენტებია ± ოჯახში შემავალი ელემენტების ყველა შესაძლო გაერთიანებები. ² ტოპოლოგიური სტრუქტურის მიმართ f_s არის უწყვეტი ასახვა.

ვთქვათ « არის ისეთი ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე, რომ $f_s : X \to Y_s$, $s \in S$ არის უწყვეტი ასახვები. ვაჩვენოთ, $² \subset «$. ვთქვათ U ეკუთვნის ² ოჯახს. ² ოჯახის განმარტების თანახმად, U არის $\bigcap_{i=1}^{n} f_{s_i}^{-1}(U_i)$ სახის სიმრავლეების გაერთიანება. ვაჩვენოთ U ეკუთვნის « ტოპოლოგიურ სტრუქტურას. მართლაც, $f_s : X \to Y_s$ ფუნქციის « ტოპოლოგიური სტრუქტურის მიმართ უწყვეტობის გამო $f_{s_i}^{-1}(U_i) \in «$. O2) პირობის თანახმად $\bigcap_{i=1}^{n} f_{s_i}^{-1}(U_i) \in «$. ასევე, O3) პირობიდან გამომდინარე, ამ თანაკვეთების გაერთიანება $U \in «$. □

ვთქვათ $p_s : \prod_{s \in S} X_s \to X_s$ არის პროექციები, მოცემული ფორმულით

$$p_s(x) = x_s, \ x = (x_s) \in \prod_{s \in S} X_s .$$

2.4.15 წინადადების თანახმად, ოჯახი

$$± = \{\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(U_i)\}_{s_1, s_2, \ldots, s_n \in S},$$

სადაც U_i არის X_{s_i} სივრცის ღია სიმრავლე, ქმნის $\prod_{s \in S} X_s$ სივრცის ბაზისს.

შევნიშნოთ, $\bigcap_{i=1}^{n} p_{s_i}^{-1}(U_i) = \prod_{s \in S} V_s$, სადაც $V_s = U_i$, როცა $s = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ და $V_s = X_s$, როცა $s \neq s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი დებულებები.

წინდადადება 2.4.16. *$\{X_s\}_{s \in S}$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ოჯახის დეკარტული ნამრავლის ბაზისს ქმნის სიმრავლეები $\prod_{s \in S} V_s$, სადაც ინდექსთა $s_1, s_2, \ldots, s_n$ სასრული რაოდენობისთვის $V_{s_1}, V_{s_2}, \ldots, V_{s_n}$ არის $X_{s_1}, X_{s_2}, \ldots, X_{s_n}$ სივრცეების ღია ქვესიმრავლეები, ხოლო ყოველი $s \neq s_1, s_2, \ldots, s_n$ ინდექსისთვის $V_s = X_s$.* □

წინდადადება 2.4.17. *ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $p_s : \prod_{s \in S} X_s \to X_s$ პროექციის ასახვა არის უწყვეტი ასახვა.* □

წინდადადება 2.4.18. *X_s, $s \in S$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა A_s, $s \in S$ ქვესიმრავლეებისთვის სამართლიანია ტოლობა*

$$\overline{\prod_{s \in S} A_s} = \prod_{s \in S} \overline{A}_s .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $x = (x_s) \in \overline{\prod_{s \in S} A_s}$. ვაჩვენოთ $x \in \prod_{s \in S} \overline{A}_s$. ვთქვათ $x_{s_0} \in x$. ცხადია, $x_{s_0} \in X_{s_0}$ წერტილის ყოველი U_{s_0} მიდამოსთვის $p_{s_0}^{-1}(U_{s_0})$ არის $x = (x_s)$ წერტილის მიდამო. როგორც ვიცით

$p_{s_0}^{-1}(U_{s_0}) = \prod_{s\in S} V_s$, სადაც $s = s_0$ ინდექსისთვის $V_s = U_{s_0}$. ცხადია, $(\prod_{s\in S} V_s) \bigcap (\prod_{s\in S} A_s) \neq \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $U_{s_0} \bigcap A_{s_0} \neq \varnothing$, ე.ი. $x_{s_0} \in \overline{A}_{s_0}$ ყოველი s_0 ინდექსისთვის. ამიტომ $x = (x_s) \in \prod_{s\in S} \overline{A}_s$.

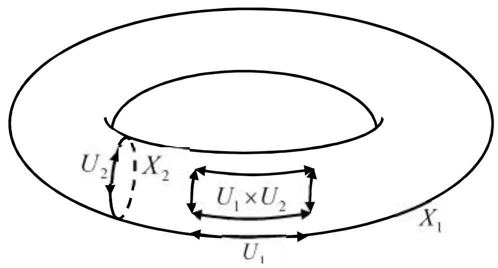
ახლა, ვთქვათ, $x = (x_s) \in \prod_{s\in S} \overline{A}_s$. ვაჩვენოთ, რომ $x = (x_s) \in \overline{\prod_{s\in S} A_s}$. ამისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ, x წერტილის ნებისმიერი $\prod_{s\in S} V_s$ მიდამოსთვის $(\prod_{s\in S} V_s) \bigcap (\prod_{s\in S} A_s) \neq \varnothing$. ცხადია, $x_s \in \overline{A}_s$. ამიტომ $V_s \bigcap A_s \neq \varnothing$, $s \in S$. აქედან გამომდინარე, $(\prod_{s\in S} V_s) \bigcap (\prod_{s\in S} A_s) \neq \varnothing$. □

შედეგი 2.4.19. *ვთქვათ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის A_s არის X_s ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე. $\prod_{s\in S} A_s$ სიმრავლე მკვრივია $\prod_{s\in S} X_s$ სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის A_s სიმრავლე მკვრივია X_s სივრცეში.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\prod_{s\in S} A_s$ მკვრივია $\prod_{s\in S} X_s$ სივრცეში. ტოლობიდან $\prod_{s\in S} X_s = \overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \overline{A}_s$ მივიღებთ, ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $X_s = \overline{A}_s$.ამრიგად, A_s სიმრავლე მკვრივია X_s სივრცეში.

ვთქვათ, შებრუნებით, ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის A_s სიმრავლე მკვრივია X_s სივრცეში, ანუ $\overline{A}_s = X_s$, $s \in S$. ტოლობიდან $\overline{\prod_{s\in S} A_s} = \prod_{s\in S} \overline{A}_s = \prod_{s\in S} X_s$ გამომდინარეობს, რომ $\prod_{s\in S} A_s$ ნამრავლი მკვრივია $\prod_{s\in S} X_s$ სივრცეში. □

ვთქვათ $X_1 = S^1$ და $X_2 = S^1$ არის ერთგანზომილებიანი წრეწირები. $S^1 \times S^1$ ნამრავლს ეწოდება ტორი და აღინიშნება სიმბოლოთი T^2. განვიხილოთ $U_1 \subset X_1$ და $U_2 \subset X_2$ ღია რკალები და მათი $p_1^{-1}(U_1) = U_1 \times S^1$ და $p_2^{-1}(U_2) = S^1 \times U_2$ წინარესახეები ტორის პირველ და მეორე თანამამრავლ წრეწირებზე $p_1 : S^1 \times S^1 \to S^1$ და $p_2 : S^1 \times S^1 \to S^1$ პროექციების მიმართ.



ცხადია, $p_1^{-1}(U_1)=U_1\times S^1$, $p_2^{-1}(U_2)=S^1\times U_2$ და $U_1\times U_2$ არის ტორის ბაზისის ელემენტები. შევნიშნოთ, რომ $\overline{U_1\times U_2}=\overline{U_1}\times\overline{U_2}$.

წინდადადება 2.4.20. $f:X\to\prod_{s\in S}X_s$ *ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი* $s\in S$ *ინდექსისთვის* $p_s\circ f:X\to X_s$ *კომპოზიცია უწყვეტია.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f:X\to\prod_{s\in S}X_s$ არის უწყვეტი ასახვა. $p_s\circ f$ ასახვა, როგორც უწყვეტი ასახვების კომპოზიცია, იქნება უწყვეტი.

ვთქვათ, შებრუნებით, ყოველი $s\in S$ ინდექსისთვის $p_s\circ f:X\to X_s$ ასახვა არის უწყვეტი. ნებისმიერი $U_s\subset X_s$ ღია სიმრავლისთვის $(p_s\circ f)^{-1}(U_s)$ წინარესახე არის ღია X სივრცეში. ტოლობიდან $(p_s\circ f)^{-1}(U_s)=f^{-1}(p_s^{-1}(U_s))$ გამომდინარეობს, რომ $\prod_{s\in S}X_s$ სივრცის წინარებაზისის ყოველი $p_s^{-1}(U_s)$ ელემენტის წინარესახე არის ღია X სივრცეში, რაც ნიშნავს, f ასახვის უწყვეტობას. □

შევნიშნოთ, რომ $p_s:\prod_{s\in S}X_s\to X_s$ უწყვეტი პროექცია არის ღია ასახვა. მართლაც, ± ბაზისის ყოველი $\prod_{s\in S}V_s$ ელემენტის $p_s(\prod_{s\in S}X_s)=V_s$ ანასახი არის ღია სიმრავლე. ამიტომ $\prod_{s\in S}X_s$ ნამრავლის ყოველი ღია სიმრავლის, როგოც ± ბაზისის ელემენტების გაერთიანების, ანასახი არის ღია სიმრავლე.

ასევე შევნიშნოთ, რომ $p_s:\prod_{s\in S}X_s\to X_s$ პროექცია საზოგადოდ არაა ჩაკეტილი ასახვა (იხ. მაგალითი 2.3.17).

წინადადება 2.4.21. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა უწყვეტი ასახვების დეკარტული ნამრავლი არის უწყვეტი ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f_s:X_s\to Y_s$, $s\in S$ არის უწყვეტი ასახვები. განვიხილოთ ასახვათა $\prod_{s\in S}f_s:\prod_{s\in S}X_s\to\prod_{s\in S}Y_s$ დეკარტული ნამრავლის მიმართ $\prod_{s\in S}Y_s$ სივრცის ბაზისის ნებისმიერი $\prod_{s\in S}V_s$ ელემენტის წინარესახე. ცხადია,

$$(\prod_{s\in S}f_s)^{-1}(\prod_{s\in S}V_s)=\prod_{s\in S}f_s^{-1}(V_s)\ .$$

f_s ასახვის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ $f_s^{-1}(V_s)$ არის ღია სიმრავლე X_s სივრცეში. სასრული რაოდენობის $s_i\in S$, $i=1,2,\dots,n$ ინდექსისთვის $V_{s_i}\subset Y_{s_i}$. ასევე, $f_{s_i}^{-1}(V_{s_i})\subset X_{s_i}$. ამიტომ $\prod_{s\in S}f_s^{-1}(V_s)$ არის $\prod_{s\in S}X_s$ სივრცის ღია სიმრავლე. ამრიგად, ასახვათა $\prod_{s\in S}f_s$ დეკარტული ნამრავლი არის უწყვეტი ასახვა. □

წინადადება 2.4.22. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა უწყვეტი ასახვების დიაგონალური ნამრავლი არის უწყვეტი ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f_s : X \to X_s$, $s \in S$ არის უწყვეტი ასახვები. ვაჩვენოთ, რომ $\prod\limits_{s\in S} X_s$ დეკარტული ნამრავლის ბაზისის $\prod\limits_{s\in S} V_s$ ელემენტის $\mathop{\Delta}\limits_{s\in S} f_s : X \to \prod\limits_{s\in S} X_s$ დიაგონალური ასახვის მიმართ წინარესახე არის X სივრცის ღია სიმრავლე. ცხადია, არსებობს ისეთი $s_1, s_2, ..., s_n$ სასრული რაოდენობის ინდექსები, რომ $V_s = X_s$ ყოველი $s \neq s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსისთვის და $V_{s_i} \subset X_{s_i}$ ნებისმიერი $i = 1, 2, ..., n$ ინდექსისთვის. ამიტომ

$$(\mathop{\Delta}\limits_{s\in S} f_s)^{-1}(\prod\limits_{s\in S} V_s) = X \bigcap \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_{s_i}^{-1}(V_{s_i}) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_{s_i}^{-1}(V_{s_i})$$

წინარესახე არის ღია X სივრცეში. □

თეორემა 2.4.23. *თუ X_s, $s \in S$ ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის $w(X_s) \leq m \geq \aleph_0$, $s \in S$ და $|S| \leq m$, მაშინ $w(\prod\limits_{s\in S} X_s) \leq m$.*

დამტკიცება. ვთქვათ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $\pm_s$ არის X_s სივრცის ისეთი ბაზისი, რომ $|\pm_s| = w(X_s) \leq m$. 2.4.16 წინადადების თანახმად, $w(\prod\limits_{s\in S} X_s) \leq m$. □

წინადადება 2.4.24. *თუ X_s, $s \in S$ ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის ¡$(X_s) \leq m \geq \aleph_0$ და $|S| \leq m$, მაშინ ¡$(\prod\limits_{s\in S} X_s) \leq m$.*

დამტკიცება. მტკიცება მიმდინარეობს მარტივად. □

ჩვენი შემდგომი მიზანია ტოპოლოგიური სტრუქტურის აგება ფაქტორ-სიმრავლეზე, რომელიც მიიღება ტოპოლოგიურ სივრცეზე მოცემული რაიმე ექვივალენტობის მიმართების მეშვეობით.

ვთქვათ $(X, ²)$ არის ტოპოლოგიური სივრცე, ხოლო E ექვივალენტობის მიმართება X სივრცეზე. $X/E = \{[x] \mid x \in X\}$ ფაქტორ-სიმრავლეზე შემოვიტანოთ ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

ვთქვათ $q : X \to X/E$ არის ფაქტორ-ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$q(x) = [x],\ x \in X.$$

წინადადება 2.4.25. *ოჯახი*

$$²_E = \{U \mid q^{-1}(U) \in ², U \subset X/E\}$$

არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X/E ფაქტორ-სიმრავლეზე.

დამტკიცება. O1). $X/E \in ²_E$, რადგან $q^{-1}(X/E) = X$ და $X \in ²$. ასევე $\varnothing \in ²_E$, რადგან $q^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ და $\varnothing \in ²$.

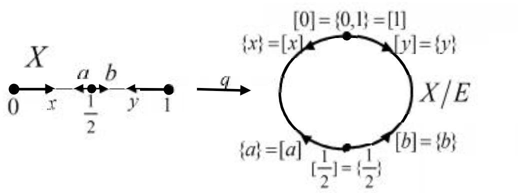
O2). ვთქვათ $U, V \in ²_E$. განმარტების თანახმად, $q^{-1}(U) \in ²$ და $q^{-1}(V) \in ²$. თანაკვეთა $U \bigcap V \in ²_E$, რადგან

$$q^{-1}(U \bigcap V) = q^{-1}(U) \bigcap q^{-1}(V) \in {}^2 \ .$$

O3).ვთქვათ $U_{\sim} \in {}^2{}_E$, $\sim \in A$. ტოლობიდან $q^{-1}(\bigcup\limits_{\sim \in A} U_{\sim}) = \bigcup\limits_{\sim \in A} q^{-1}(U_{\sim})$ და პირობიდან $q^{-1}(U_{\sim}) \in {}^2$, გამომდინარეობს $\bigcup\limits_{\sim \in A} q^{-1}(U_{\sim}) \in {}^2$. ამიტომ $\bigcup\limits_{\sim \in A} U_{\sim} \in {}^2{}_E$. □

2.4.25 წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ X/E ფაქტორ-სივრცეში ღია სიმრავლედ ითვლება ის ქვესიმრავლეები, რომელთა წინარესახეები q ფაქტორ-ასახვის მიმართ არის ღია X სივრცეში. ცხადია, $q:(X,{}^2) \to (X/E,{}^2{}_E)$ ფაქტორ-ასახვა არის უწყვეტი ასახვა.

მოვიყვანოთ ფაქტორ-სივრცის ერთი მაგალითი. განვიხილოთ $X = [0,1]$ სივრცეზე $0E1$ და xEx, $x \in X$ დამოკიდებულებებით მოცემული მიმართება



$\widehat{[x][y]}$ რკალი არის ღია X/E ფაქტორ-სივრცეში, რადგან მისი წინარესახე $q^{-1}(\widehat{[x][y]}) = [0,x) \bigcup (y,1]$ არის ღია $X = I$ სივრცეში. ასევე, $\widehat{[a][b]}$ არის ღია X/E ფაქტორ-სივრცეში, რადგან მისი წინარესახე $q^{-1}(\widehat{[a][b]}) = (a,b)$ არის ღია X სივრცეში.

წინადადება 2.4.26. X/E *ფაქტორ-სივრცის ქვესიმრავლე ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* q *ფაქტორ-ასახვის მიმართ მისი წინარესახე ჩაკეტილია* X *სივრცეში.*

დამტკიცება. ვთქვათ F არის X/E ფაქტორ-სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. X/E სივრცის $(X/E) \setminus F$ ღია სიმრავლის $q^{-1}((X/E) \setminus F)$ წინარესახე არის ღია X სივრცეში. ცხადია,

$$q^{-1}((X/E) \setminus F) = q^{-1}(X/E) \setminus q^{-1}(F) = X \setminus q^{-1}(F).$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $q^{-1}(F)$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე X სივრცეში.

ვთქვათ X/E ფაქტორ-სივრცის F ქვესიმრავლის $q^{-1}(F)$ წინარესახე არის ჩაკეტილი. განვიხილოთ X სივრცის $X \setminus q^{-1}(F)$ ღია სიმრავლე. ტოლობიდან

$$q^{-1}((X/E) \setminus F) = X \setminus q^{-1}(F)$$

გამომდინარეობს, რომ $(X/E)\setminus F$ არის X/E ფაქტორ-სივრცის ღია ქვესიმრავლე. ამიტომ მისი დამატება

$$(X/E)\setminus((X/E)\setminus F)=F$$

არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. □

წინადადება 2.4.27.ფაქტორ-სივრცის ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეში $f:X/E\to Y$ ასახვა არის უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f\circ q:X\to Y$ კომპოზიცია არის უწყვეტი.

დამტკიცება. ვთქვათ $f:X/E\to Y$ არის უწყვეტი ასახვა. $q:X\to X/E$ უწყვეტი ასახვისა და f უწყვეტი ასახვის კომპოზიცია არის უწყვეტი ასახვა.

ვთქვათ, შებრუნებით, $f\circ q:X\to Y$ კომპოზიცია არის უწყვეტი ასახვა. ცხადია, Y სივრცის ნებისმიერი U ღია სიმრავლისთვის $(f\circ q)^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია X სივრცეში. ტოლობიდან

$$(f\circ q)^{-1}(U)=q^{-1}(f^{-1}(U))$$

გამომდინარეობს, რომ X/E ფაქტორ-სივრცის $f^{-1}(U)$ ქვესიმრავლე არის ღია, რადგან მისი $q^{-1}(f^{-1}(U))$ წინარესახე, ანუ $(f\circ q)^{-1}(U)$ სიმრავლე არის ღია X სივრცეში. ამრიგად, $f:X/E\to Y$ ასახვა არის უწყვეტი ასახვა. □

ვთქვათ $f:X\to Y$ არის უწყვეტი ასახვა, ხოლო $\mathscr{P}$ არის X სივრცის ისეთი დანაწილება, რომ f ასახვა დანაწილების ყოველი ელემენტის წერტილებში ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობას. განვმარტოთ $f/\mathscr{P}:X/\mathscr{P}\to Y$ ასახვა. განმარტების თანახმად,

$$(f/\mathscr{P})(A)=f(a),A\in\mathscr{P},\ a\in A.$$

ცხადია, დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ q\searrow & & \nearrow f/\mathscr{P} \\ & X/\mathscr{P} & \end{array}$$

არის კომუტაციური. ნებისმიერი $x\in X$ წერტილისთვის

$$((f/\mathscr{P})\circ q)(x)=(f/\mathscr{P})(q(x))\ ,$$

სადაც $q(x)$ არის ის $A\in\mathscr{P}$ სიმრავლე, რომელსაც ეკუთვნის x წერტილი. $f/\mathscr{P}$ ასახვის განმარტების თანახმად,

$$(f/\mathscr{P})(q(x))=f(x)\ .$$

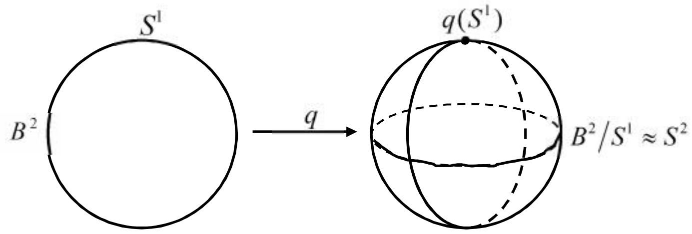
ყოველი $U\subset Y$ ღია სიმრავლისთვის $q^{-1}((f/\mathscr{P})^{-1}(U))$ სიმრავლე, რომელიც ტოლია $f^{-1}(U)$ წინარესახის, არის ღია. ამიტომ $(f/\mathscr{P})^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია $X/\mathscr{P}$ ფაქტორ-სივრცეში. აქედან გამომდინარე,

$f/\mathscr{P}: X/\mathscr{P} \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა.

ვთქვათ $f: X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა X სივრციდან Y სივრცეზე. X სივრცის $\mathscr{P}$ დანაწილების როლში შეგვიძლია განვიხილოთ $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ ოჯახი. ამ შემთხვევაში $f/\mathscr{P}: X/\mathscr{P} \to Y$ ასახვა არის ურთიერთცალსახა ასახვა $X/\mathscr{P}$ სივრცისა Y სივრცეზე, მაგრამ იგი საზოგადოდ არაა ჰომეომორფიზმი.

ვთქვათ A არის X სივრცის ქვესიმრავლე, ხოლო $\mathscr{P}$ დანაწილება, შემდგარი A სიმრავლისა და $X \setminus A$ სიმრავლის ერთწერტილიანი სიმრავლეებისგან. X/A სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $X/\mathscr{P}$ ფაქტორ-სივრცე.

მაგალითი 2.4.28. B^n/S^{n-1} ფაქტორ-სივრცე ჰომეომორფულია S^n n-განზომილებიანი სფეროს.

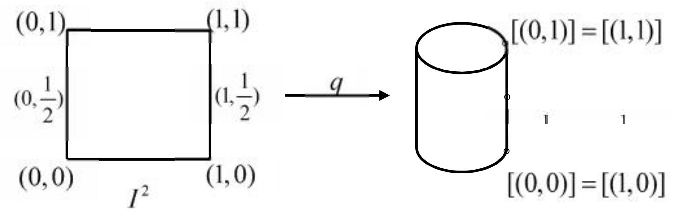


მაგალითი 2.4.29. ვთქვათ $X = I^2 = [0,1]\times[0,1]$, ხოლო E არის ექვივალენტობის მიმართება, მოცემული შემდეგი მიმართებებით

$$(0,s)E(1,s),\ 0 \le s \le 1,$$

$$(t,s)E(t,s),\ 0 < t < 1, 0 \le s \le 1.$$

ადვილი დასანახია, რომ X/E ფაქტორ-სივრცე ჰომეომორფულია $S^1 \times I$ ცილინდრის.



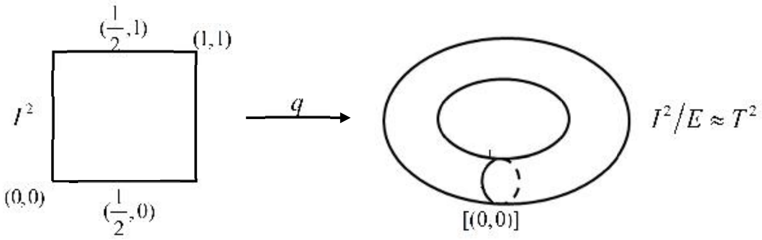
მაგალითი 2.4.30. ვთქვათ $X = I^2 = [0,1]\times[0,1]$, ხოლო E არის ექვივალენტობის მიმართება, მოცემული მიმართებებით

$$(0,s)E(1,s), 0 \le s \le 1,$$

$$(t,0)E(t,1), 0 \le t \le 1.$$

ადვილი დასანახია, რომ I^2/E ჰომეომორფულია $S^1 \times S^1$ სივრცის,

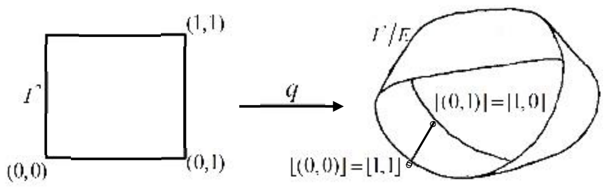
რომელსაც უწოდებენ ტორს.



მაგალითი 2.4.31. $X = I^2 = [0,1]\times[0,1]$ სიმრავლეზე განვიხილოთ E ექვივალენტობის მიმართება:

$$(0,s)E(1,1-s), 0 \le s \le 1,$$
$$(t,s)E(t,s), 0 < t < 1, 0 \le s \le 1 .$$

მიღებულ I^2/E სივრცეს ეწოდება მებიუსის ფურცელი.

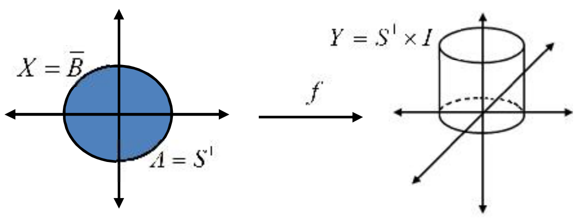


ვთქვათ $f : A \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა X სივრცის A ჩაკეტილი სიმრავლიდან Y სივრცეში. მოცემული X და Y სივრცეების $X \oplus Y$ ჯამზე განვიხილოთ ექვივალენტობის მიმართება E :

$$aEf(a),\ a \in A,$$
$$xEx, x \in X \setminus A,$$
$$yEy,\ y \in Y \setminus f(A).$$

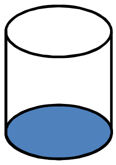
$(X \oplus Y)/E$ ფაქტორ-სივრცეს უწოდებენ მიერთების სივრცეს და მას აღნიშნავენ $X \cup_f Y$ სიმბოლოთი. შევნიშნოთ, თუ Y არის ერთწერტილიანი სივრცე, მაშინ $X \cup_f Y$ არის X/A ფაქტორ-სივრცე.

მაგალითი 2.4.32. ვთქვათ $X = \overline{B}((0,0),1)$, $A = S^1$ და $Y = S^1 \times I$.



ვთქვათ $f : A \to Y$ არის ასახვა მოცემული ფორმულით

$$f((x,y))=(x,y,0)\,,\ (x,y)\in A\,,\ (x,y,0)\in Y\,.$$



$X\bigcup_f Y$

მიღებული $X\bigcup_f Y$ მიერთების სივრცე ჰომეომორფულია $\mathbb{R}^3$ ევკლიდური სივრცის $\bar{B}((0,0),1)\bigcup(S^1\times I)$ ქვესივრიცის.

ვთქვათ $i:X\to X\oplus Y$ და $j:Y\to X\oplus Y$ არის ჩადგმის ასახვები, ხოლო $q:X\oplus Y\to X\bigcup_f Y$ ფაქტორ-ასახვა. განვიხილოთ კომპოზიციები

$$k=q\circ i:X\to X\bigcup_f Y$$

და

$$l=q\circ j:Y\to X\bigcup_f Y\,.$$

$X\bigcup_f Y$ ფატორ-სივრცის U ქვესიმრავლე არის ღია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $k^{-1}(U)$ და $l^{-1}(U)$ არის ღია X სივრცეში და Y სივრცეში, შესაბამისად. ასევე $X\bigcup_f Y$ ფაქტორ-სივრცის F ქვესიმრავლე არის ჩაკეტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $k^{-1}(F)$ და $l^{-1}(F)$ არის ჩაკეტილი X და Y სივრცეებში, შესაბამისად. ყოველი $U\subset Y$ და $V\subset X$ სიმრავლეებისთვის სამართლიანია ფორმულები

$$(k^{-1}\circ l)(U)=f^{-1}(U)\,,$$

$$(l^{-1}\circ l)(U)=U,$$

$$(k^{-1}\circ k)(V)=V\bigcup(f^{-1}\circ f)(V\bigcap A),$$

$$(l^{-1}\circ k)(V)=f(V\bigcap A).$$

აქედან გამომდინარე, $l:Y\to X\bigcup_f Y$ არის ჩაკეტილი ასახვა. l ასახვის ინექციურობის გამო ის არის ჰომეომორფული ჩადგმა. ამრიგად, $l(Y)$ ანასახი არის ჩაკეტილი $X\bigcup_f Y$ ფაქტორ-სივრცეში.

გარდა ამისა, $k|_{X\setminus A}$ ასახვა არის ღია ასახვა. მისი ინექციურობის გამო $k|_{X\setminus A}$ არის ჰომეომორფული ჩადგმა. ამრიგად, $k(X\setminus A)$ არის ღია სიმრავლე $X\bigcup_f Y$ ფაქტორ-სივრცეში.

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ k არის ჩაკეტილი ასახვა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა. ამრიგად, q ფაქტორ-ასახვა არის ჩაკეტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა.

განვიხილოთ ფაქტორ-სივრცის კიდევ ერთი მაგალითი, ე.წ. ასახვის ცილინდრი.

ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ტოპოლოგიურ სივრცეთა უწყვეტი ასახვა. განვიხილოთ ფაქტორ-სივრცე, რომელიც მიიღება $X \times I$ და Y სივრცეების $(X \times I) \oplus Y$ ტოპოლოგიური ჯამიდან შემდეგი E ექვივალენტობის მიმართებით:

$$(x,1)Ef(x), x \in X,$$
$$yEy,\ y \in Y \setminus f(X),$$
$$(x,t)E(x,t), x \in X, 0 \le t < 1.$$

მიღებულ $(X \times I) \oplus Y/E$ ფაქტორ-სივრცეს ეწოდება f ასახვის ცილინდრი და აღინიშნება $\mathrm{Cyl}(f)$ სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{Cyl}(f)$ არის $X \times I$ სივრცის $X \times \{1\}$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლიდან Y სივრცეში განსაზღვრული $X \times \{1\} \approx X \xrightarrow{f} Y$ ასახვით მიღებული $X \times I \bigcup_f Y$ მიერთების ფაქტორ-სივრცე.

ყოველი $(x,t) \in X \times I$ წერტილის ექვივალენტობის კლასი აღვნიშნოთ $[x,t]$ სიმბოლოთი, ხოლო $y \in Y$ წერტილის ექვივალენტობის კლასი $[y]$ სიმბოლოთი. შევნიშნოთ, რომ $[(x,1)] = [f(x)]$ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის.

განვმარტოთ ასახვები $i : X \to \mathrm{Cyl}(f)$ და $j : Y \to \mathrm{Cyl}(f)$. განმარტების თანახმად,

$$i(x) = [(x,0)], x \in X.$$
$$j(y) = [y], y \in Y.$$

ეს ასახვები წარმოადგენს X და Y სივრცეების $\mathrm{Cyl}(f)$ სივრცეში ჩადგმის ასახვებს.

ახლა განვმარტოთ ასახვა $r : \mathrm{Cyl}(f) \to Y$. ვთქვათ,

$$r([(x,t)]) = [f(x)], x \in X, 0 \le t \le 1,$$
$$r([y]) = [y], y \in Y.$$

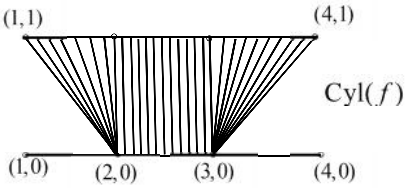
ცხადია, $r \circ i = f$ და $r \circ j = 1_Y$.

$r : \mathrm{Cyl}(f) \to Y$ ასახვა არის f ასახვის ცილინდრის Y სივრცეზე რეტრაქცია.

მაგალითი 2.4.33. ვთქვათ მოცემულია $X = \{(x,1) \mid 1 \le x \le 4\} \subset \mathbb{R}^2$ და $Y = \{(x,0) \mid 2 \le x \le 3\} \subset \mathbb{R}^2$ ევკლიდური სიბრტყის ქვესივრცეები და $f : X \to Y$ ასახვა, განსაზღვრული ფორმულით

$$f((x,1)) = \begin{cases} (2,0), & 1 \le x \le 2 \\ (x,0), & 2 \le x \le 3 \\ (3,0), & 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

f ასახვის ცილინდრი არის გეომეტრიული ფიგურა



ტოპოლოგიურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა **Top** კატეგორიაში არსებობს $\{X_s\}_{s\in S}$ ობიექტთა ოჯახის ჯამი და ნამრავლი. როგორც ზემოთ ვნახეთ, ისინი წარმოადგენს X_s, $s\in S$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$ ტოპოლოგიურ ჯამს და $\prod\limits_{s\in S} X_s$ ტოპოლოგიურ ნამრავლს.

ტოპოლოგიურ სივრცეთა (X,A) წყვილი შედგება X ტოპოლოგიური სივრცისგან და მისი A ქვესივრცისგან. (X,A) წყვილის (Y,B) წყვილში უწყვეტი ასახვა ეწოდება ისეთ $f:X\to Y$ უწყვეტ ასახვას, რომლისთვისაც $f(A)\subset B$. სიმარტივისათვის, (X,A) წყვილის (Y,B) წყვილში ასახვა ისევ აღვნიშნოთ $f:(X,A)\to(Y,B)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, არსებობს $1_{(X,A)}:(X,A)\to(X,A)$ იგივური უწყვეტი ასახვა. $f:(X,A)\to(Y,B)$ და $g:(Y,B)\to(Z,C)$ უწყვეტი ასახვების

$$g\circ f:(X,A)\to(Z,C)$$

კომპოზიცია მოიცემა $g\circ f:X\to Z$ კომპოზიციით. შევნიშნოთ, რომ $(g\circ f)(A)\subset C$ და $g\circ f$ არის უწყვეტი ასახვა.

ამრიგად, ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილები და მათ შორის უწყვეტი ასახვები ქმნის კატეგორიას. იგი აღინიშნება $\mathbf{Top}^2$ სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ, რომ $\mathbf{Top}^2$ კატეგორიაში არსებობს მისი ობიექტების, ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილების $\{(X_s,A_s)\}_{s\in S}$ ოჯახის ჯამი და
ნამრავლი.

განმარტების თანახმად,

$$\bigoplus_{s\in S}(X_s,A_s)=(\bigoplus_{s\in S}X_s,\bigoplus_{s\in S}A_s)$$

და

$$\prod_{s\in S}(X_s,A_s)=(\prod_{s\in S}X_s,\prod_{s\in S}A_s).$$

X ტოპოლოგიური სივრცე შეგვიძლია გავაიგივეოთ $(X,\varnothing)$ წყვილთან, ხოლო $f:X\to Y$ უწყვეტი ასახვა $f:(X,\varnothing)\to(Y,\varnothing)$ უწყვეტ ასახვასთან. შესაბამისობები

$$F(X)=(X,\varnothing),\ X\in ob(\mathbf{Top})$$

და

$$F(f) = f : (X,\varnothing) \to (Y,\varnothing)\,,\;\; f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{Top}}(X,Y)$$

ინდუცირებს ფუნქტორს $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}^2$.

სავარჯიშო 2.4.34. 1).აჩვენეთ, თუ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $d(X_s) \le m \ge \aleph_0$ და $|S| \le 2^m$, მაშინ $d(\prod_{s\in S} X_s) \le m$.

2).ვთქვათ $X = \oplus_{\sim\in A} X_{\sim}$. შეაფასეთ $w(X)$, $d(X)$, ¡(X) კარდინალური რიცხვები $w(X_{\sim})$, $d(X_{\sim})$, ¡$(X_{\sim})$, $\sim \in A$ კარდინალური რიცხვებით.

3).ვთქვათ $f_{\sim} : X_{\sim} \to Y_{\sim}, \sim \in A$ არის ასახვები. განვმარტოთ ასახვა $\oplus_{\sim\in A} f_{\sim} : \oplus_{\sim\in A} X_{\sim} \to \oplus_{\sim\in A} Y_{\sim}$. განმარტების თანახმად,

$$(\oplus_{\sim\in A} f_{\sim})(x) = f_{\sim}(x), x \in X_{\sim}.$$

აჩვენეთ, თუ $f_{\sim} : X_{\sim} \to Y_{\sim}, \sim \in A$ არის უწყვეტი ასახვები, მაშინ $\oplus_{\sim\in A} f_{\sim} : \oplus_{\sim\in A} X_{\sim} \to \oplus_{\sim\in A} Y_{\sim}$ ასახვა არის უწყვეტი ასახვა.

4).ვთქვათ $f_{\sim} : X_{\sim} \to Y_{\sim}, \sim \in A$ არის უწყვეტი ასახვები. აჩვენეთ, $\oplus_{\sim\in A} f_{\sim} : \oplus_{\sim\in A} X_{\sim} \to \oplus_{\sim\in A} Y_{\sim}$ ასახვა არის ჩაკეტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $\sim \in A$ ინდექსისთვის $f_{\sim}$ ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა.

5).ვთქვათ A და B შესაბამისად არის X და Y ტოპოლოგიური სივრცეების ქვესიმრავლეები. აჩვენეთ,

$$\mathrm{Int}(A\times B)=\mathrm{Int}(A)\times \mathrm{Int}(B).$$

6).ვთქვათ A და B შესაბამისად არის X და Y ტოპოლოგიური სივრცეების ქვესიმრავლეები. აჩვენეთ,

$$\mathrm{Fr}(A\times B)=(\overline{A}\times \mathrm{Fr}(B))\bigcup(\mathrm{Fr}(A)\times \overline{B}).$$

7).აჩვენეთ, X ტოპოლოგიური სივრცე ჰომეომორფულია $\oplus_{\sim\in A} X_{\sim}$ ჯამის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $i_{\sim} : X_{\sim} \to X, \sim \in A$ ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

i).თუ ყოველი Y სივრცისთვის და $f, g : X \to Y$ ასახვებისთვის $f \circ i_{\sim} = g \circ i_{\sim}, \sim \in A$, მაშინ $f = g$.

ii).ყოველი Y სივრცისთვის და $f_{\sim} : X_{\sim} \to Y, \sim \in A$ ასახვებისთვის არსებობს ისეთი $f : X \to Y$ ასახვა, რომ $f \circ i_{\sim} = f_{\sim}, \sim \in A$.

8).აჩვენეთ, X ტოპოლოგიური სივრცე ჰომეომორფულია $\prod_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $f_{\sim} : X \to X_{\sim}, \sim \in A$ ასახვები, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

i).თუ ყოველი Y სივრცისთვის და $f, g : X \to Y$ ასახვებისთვის სრულდება $p_{\sim} \circ f = p_{\sim} \circ g, \sim \in A$, მაშინ $f = g$.

ii).ყოველი Y სივრცისთვის და $f_\alpha : Y \to X_\alpha, \alpha \in A$, ასახვებისთვის არსებობს ისეთი $f : X \to Y$ ასახვა, რომ $p_\alpha \circ f = f_\alpha, \alpha \in A$.

9).აჩვენეთ, X სივრცის ფაქტორ-სივრცის ფაქტორ სივრცე არის X სივრცის ფაქტორ-სივრცე.

10).ვთქვათ $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ და $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ არის ტოპოლოგიურ სივრცეთა ისეთი ოჯახები, რომ ყოველი $\alpha \in A$ ინდექსისთვის $X_\alpha \bigcap Y_\alpha = \varnothing$. აჩვენეთ, ნებისმიერი $f_\alpha : A_\alpha \to Y_\alpha, \alpha \in A$ უწყვეტი ასახვისთვის და ნებისმიერ X_α სივრცეში ჩაკეტილი A_α, $\alpha \in A$ ქვესიმრავლისთვის

$$(\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha) \bigcup_{\bigoplus_{\alpha \in A} f_\alpha} (\bigoplus_{\alpha \in A} Y_\alpha)$$

და

$$\bigoplus_{\alpha \in A} (X_\alpha \bigcup_{f_\alpha} Y_\alpha)$$

ფაქტორ-სივრცეები არის ჰომეომორფული.

ლიტერატურა

[Ar-P]. A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomarev, Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises, Springer, 1984.

[Art-S]. J. Arthur and Jr. Seebach, Counterexamples In Topology, Dover Publications, 1995.

[Bol-E].V.G. Boltyanskii and V.A. Efremovich, Intuitive Combinatorial Topology, Springer-Verlag, New York, 2001.

[C]. G.Chogoshvili, Main Notions of General Topology (Georgian), Tbilisi State university, Tbilisi, 1974.

[Du].J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, 1966.

[En]. R. Engelking, General Topology, PWN, Warszawa, 1977.

[G].S.A. Gaal, Point Set Topology, Dover Publications, 2009.

[Ke]. J. L. Kelley, General Topology , Springer, 1975.

[Ku]. K. Kuratowski, Topology: Volume I, Academic Press, 1966.

[Ku1]. K. Kuratowski, Topology: Volume II, Academic Press, 1968.

[Mu]. J. R. Munkres, Topology, Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[Se-T].H.Seifert and W.Threlfall, A Textbook of Topology, Academic Press, 1980.

თავი III. ტოპოლოგიურ სივრცეთა ზოგიერთი კლასები

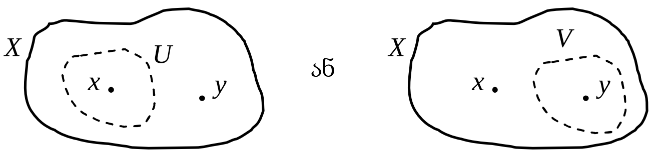
3.1. განცალების აქსიომები

წინამდებარე პარაგრაფში განვიხილავთ ტოპოლოგიურ სივრცეთა არა ზოგად კლასებს, არამედ გარკვეული პირობების, ე.წ. განცალების აქსიომების, დამაკმაყოფილებელ სივრცეთა კლასებს.

ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე არის T_0-სივრცე, თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

T_0**-აქსიომა(კოლმოგოროვი).** X სივრცის ნებისმიერი ორი განსხვავებული x და y წერტილიდან, ერთ-ერთ წერტილს მაინც გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს მეორე წერტილს.

ამრიგად, თუ X არის T_0-სივრცე, მაშინ x წერტილს გააჩნია ისეთი U მიდამო, რომ $y \notin U$ ან y წერტილს გააჩნია ისეთი V მიდამო, რომ $x \notin V$.



ცხადია, X არის T_0-სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ორი x და y განსხვავებული წერტილისთვის ან $x \notin \overline{\{y\}}$, ან $y \notin \overline{\{x\}}$.

შევნიშნოთ, რომ ანტიდისკრეტული სივრცე და 2.4.10 მაგალითში აღწერილი სივრცე არაა T_0-სივრცე. მართლაც, $\mathbb{R} \setminus I$ დამატების ნებისმიერი ორი განსხვავებული x და y წერტილიდან არცერთს არ გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც არ მოიცავს მეორეს. $\mathbb{R}$ ღერძზე განმარტებული ტოპოლოგიური სტრუქტურის თანახმად, x და y წერტილებს გააჩნიათ ერთადერთი მიდამო $\mathbb{R}$. ამრიგად, T_0-აქსიომა არ სრულდება.

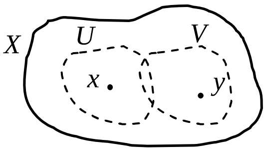
ცხადია, $X = \{a,b\}$ ორწერტილიანი სივრცე $^{2} = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ ტოპოლოგიური სტრუქტურით არის T_0-სივრცე.

ყველა T_0-სივრცეთა კლასს აღვნიშნავთ $\mathscr{T}_0$ სიმბოლოთი.

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება T_1-სივრცე, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას:

T_1**-აქსიომა(ფრეშე).** X სივრცის ნებისმიერი ორი განსხვავებული x და y წერტილიდან, თითოეულ წერტილს გააჩნია ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს მეორე წერტილს.

ამრიგად, თუ X არის T_1-სივრცე, მაშინ x წერტილისთვის არსებობს ისეთი U მიდამო, რომ $y \notin U$ და y წერტილისთვის არსებობს ისეთი V მიდამო, რომ $x \notin V$.



ცხადია, X არის T_1-სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ორი x და y განსხვავებული წერტილისთვის $x \notin \overline{\{y\}}$ და $y \notin \overline{\{x\}}$.

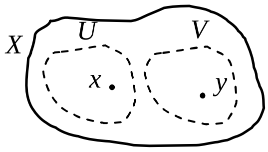
შევნიშნოთ, რომ $X = \{a,b\}$ ორწერტილიანი სივრცე $^{2} = \{X, \varnothing, \{a\}\}$ სტრუქტურით არაა T_1-სივრცე, რადგან b წერტილის ერთადერთი X მიდამო შეიცავს a წერტილს.

2.4.6 მაგალითში აღწერილი სივრცე არის T_1-სივრცე, რადგან, თუ $x \neq y$, მაშინ $U = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ და $V = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ არის ისეთი ღია სიმრავლეები, რომ $x \in U$ და $y \notin U$, ასევე, $y \in V$ და $x \notin V$.

T_1-სივრცეთა კლასი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathscr{T}_1$. ცხადია, ყოველი T_1-სივრცე არის T_0-სივრცე, ე.ი. $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_0$.

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება T_2-სივრცე, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას:

T_2-აქსიომა (ჰაუსდორფი). X სივრცის ნებისმიერ ორ განსხვავებულ x და y წერტილს გააჩნია ისეთი მიდამოები, რომელთა თანაკვეთა არის ცარიელი სიმრავლე.



T_2-სივრცეს აგრეთვე უწოდებენ ჰაუსდორფის სივრცეს.

2.4.6 მაგალითში აღწერილი სივრცე არაა T_2-სივრცე, რადგან ყოველი ორი $x \neq y$ წერტილის ნებისმიერი $U = \mathbb{R} \setminus F_1$ და $V = \mathbb{R} \setminus F_2$ მიდამოსთვის, სადაც F_1 და F_2 არის სასრული სიმრავლეები, თანაკვეთა

$$U \bigcap V = (\mathbb{R} \setminus F_1) \bigcap (\mathbb{R} \setminus F_2) = \mathbb{R} \setminus (F_1 \bigcup F_2)$$

არაა ცარიელი, რადგან $F_1 \bigcup F_2$ არის სასრული სიმრავლე, ხოლო მისი დამატება არის არაცარიელი სიმრავლე.

ცხადია, ყოველი T_2-სივრცე არის T_1-სივრცე. T_2-სივრცეთა კლასი

აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathscr{T}_2$. ამრიგად, $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.

წინადადება 3.1.1. *X ტოპოლოგიური სივრცე არის T_1 -სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ყოველი ერთწერტილიანი სიმრავლე არის ჩაკეტილი სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის T_1 -სივრცე. ნებისმიერი $x \in X$ წერტილის $X \setminus \{x\}$ დამატების ყოველ y წერტილს გააჩნია ისეთი V მიდამო, რომ $x \notin V$, ე.ი. $V \subset X \setminus \{x\}$. აქედან გამომდინარე, y წერტილი არის $X \setminus \{x\}$ სიმრავლის შიგა წერტილი, ანუ $X \setminus \{x\}$ არის ღია სიმრავლე. ეს კი ნიშნავს, რომ $\{x\}$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

ვთქვათ, შებრუნებით, X სივრცის ყოველი ერთწერტილიანი სიმრავლე არის ჩაკეტილი. ნებისმიერი ორი x და y განსხვავებული წერტილის $U = X \setminus \{y\}$ და $V = X \setminus \{x\}$ მიდამოები აკმაყოფილებს პირობებს $x \in U$ და $y \notin U$, ასევე, $y \in V$ და $x \notin V$. ამრიგად, X სივრცე არის T_1 -სივრცე. □

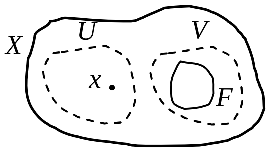
წინდადადება 3.1.2. *X ტოპოლოგიური სივრცე არის T_2 -სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ყოველი ერთწერტილიანი სიმრავლე არის მისი მიდამოების ჩაკეტვების თანაკვეთა.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის T_2 -სივრცე. ვაჩვენოთ, x წერტილის ნებისმიერი მიდამოების ჩაკეტვების თანაკვეთა არ შეიცავს x წერტილისგან განსხვავებულ y წერტილს. მართლაც, x წერტილს გააჩნია U მიდამო და y წერტილს გააჩნია V მიდამო, რომელთა თანაკვეთა არის ცარიელი. აქედან გამომდინარე, $y \notin \overline{U}$. ეს კი ნიშნავს, რომ y წერტილი არ ეკუთვნის x წერტილის მიდამოების ჩაკეტვების თანაკვეთას. ამრიგად, x წერტილის მიდამოების ჩაკეტვების თანაკვეთა არის $\{x\}$ სიმრავლე.

ვთქვათ, შებრუნებით, x წერტილის მიდამოების ჩაკეტვების თანაკვეთა არის $\{x\}$ სიმრავლე. ცხადია, ნებისმიერი სხვა $y \neq x$ წერტილი არ შედის x წერტილის რომელიმე U მიდამოს $\overline{U}$ ჩაკეტვაში. ამიტომ არსებობს y წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $V \bigcap U = \varnothing$. ეს კი ნიშნავს, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე არის T_2 -სივრცე. □

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება T_3 -სივრცე, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას:

T_3 -აქსიომა. X სივრცის ყოველი x წერტილისა და მისი არმომცველი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $x \in U$, $F \subset V$ და $U \bigcap V = \varnothing$.



ვთქვათ, $X = \{a, b, c\}$. განვიხილოთ ტოპოლოგიური სტრუქტურა $² = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. ცხადია, ამ ² ოჯახში შემავალი ელემენტები აგრეთვე არის ჩაკეტილი სიმრავლეები. X სივრცე T_3-სივრცეა, მაგრამ ის არაა T_2-სივრცე, რადგან b და c წერტილების განცალება შეუძლებელია ღია სიმრავლეებით. ასევე ეს სივრცე არაა არც T_1-სივრცე და არც T_0-სივრცე.

$\mathscr{T}_3$ კლასი არ შედის არც $\mathscr{T}_0$, არც $\mathscr{T}_1$ და არც $\mathscr{T}_2$ კლასებში.

მაგალითი 3.1.3. ვთქვათ X არის ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძი, ხოლო $F = \{1/n \mid n = 1, 2, \dots\}$. ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის სიმბოლოთი $U_i(x)$ აღვნიშნოთ სიმრავლე $(x - 1/i, x + 1/i)$, $i = 1, 2, \dots$.

განვიხილოთ სისტემა

$$\pm(x) = \begin{cases} U_i(x), & i = 1, 2, \dots, x \neq 0, \\ U_i(x) \setminus F, & i = 1, 2, \dots, x = 0. \end{cases}$$

სისტემა $\pm(X) = \{\pm(x)\}_{x \in X}$ აკმაყოფილებს BN1)-BN4) პირობებს. X სიმრავლეზე განვიხილოთ $\pm(X)$ სისტემით წარმოქმნილი ² ტოპოლოგიური სტრუქტურა. მიღებული $(X, ²)$ სივრცე არის T_2-სივრცე. ყოველი U და V ღია სიმრავლისთვის, რომელთაგან U მოიცავს 0 რიცხვს, ხოლო V მოიცავს F ჩაკეტილ სიმრავლეს, თანაკვეთა $U \bigcap V$ არაცარიელია. ამრიგად, X სივრცე არ არის T_3-სივრცე, მაგრამ ის არის T_2-სივრცე.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1.4. *თუ ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს T_0-აქსიომას და T_3 - აქსიომას, მაშინ ის არის T_2 -სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x, y \in X$ და $x \neq y$. T_0-აქსიომის თანახმად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს ისეთი U ღია სიმრავლე, რომ $x \notin U$ და $y \in U$. T_3-აქსიომის თანახმად, y წერტილისთვის და $F = X \setminus U$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი V და G ღია სიმრავლეები, რომ $y \in V$, $F \subset G$ და $V \bigcap G = \varnothing$. ამრიგად, $x \in F \subset G$, $y \in V$ და $V \bigcap G = \varnothing$. ეს კი ნიშნავს, რომ X სივრცე არის T_2-სივრცე. □

ტოპოლოგიურ სივრცეს, რომელიც აკმაყოფილებს T_0-აქსიომას და T_3-აქსიომას, ეწოდება რეგულარული სივრცე. 3.1.4 თეორემის თანახმად $\mathscr{T}_0 \bigcap \mathscr{T}_3 \subset \mathscr{T}_2$.

ყველა რეგულარულ სივრცეთა კლასი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathscr{R}$. ცხადია, $\mathscr{R} \subset \mathscr{T}_2$.

ტოპოლოგიის ზოგიერთ სახელმძღვანელოში რეგულარული სივრცე განმარტებულია როგორც სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს T_1 და T_3 აქსიომებს (იხ.მაგ.,[En]). 3.1.4 თეორემის თანახმად ეს ორი განმარტება ექვივალენტურია. ჩვენ შემდგომში ვისარგებლებთ რეგულარულობის მეორე განმარტებით.

ახლა მოვიყვანოთ სივრცის რეგულარულობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

თეორემა 3.1.5. T_1-სივრცე X არის რეგულარული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის და მისი ნებისმიერი V მიდამოსთვის არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $\bar{U} \subset V$.

დამტკიცება. ვთქვათ X არის რეგულარული სივრცე. $x \in X$ წერტილისა და მისი ნებისმიერი V მიდამოსთვის განვიხილოთ $F = X \setminus V$ ჩაკეტილი სიმრავლე. ცხადია, $x \notin F$. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი U და G ღია სიმრავლეები, რომ $x \in U$, $F \subset G$ და $U \bigcap G = \varnothing$. შევნიშნოთ, რომ

$$U \subset X \setminus G \subset X \setminus F = X \setminus (X \setminus V) = V .$$

რადგან $X \setminus G$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ამიტომ

$$\bar{U} \subset \overline{X \setminus G} = X \setminus G \subset V .$$

ვთქვათ, შებრუნებით, X სივრცე აკმაყოფილებს T_1-აქსიომას და სრულდება თეორემის პირობა. განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი და ნებისმიერი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს x წერტილს. $V = X \setminus F$ ღია სიმრავლეს ეკუთვნის x წერტილი. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი U ღია სიმრავლე, რომ $x \in U \subset \bar{U} \subset V$. შევნიშნოთ, რომ $G = X \setminus \bar{U}$ ღია სიმრავლე აკმაყოფილებს პირობას

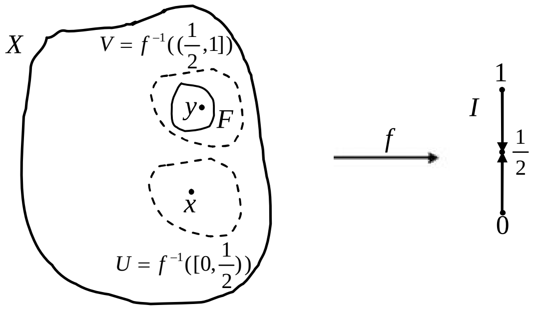
$$G = X \setminus \bar{U} \supset X \setminus V = X \setminus (X \setminus F) = F$$

ეს კი ნიშნავს, რომ G სიმრავლე არის F სიმრავლის მიდამო და $G \bigcap U = \varnothing$. ამრიგად, T_1-სივრცე X არის T_3-სივრცე. აქედან გამომდინარე, X სივრცე არის რეგულარული სივრცე. □

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება $T_{3\frac{1}{2}}$-სივრცე, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას:

$T_{3\frac{1}{2}}$**-აქსიომა.** X სივრცის ყოველი x წერტილისა და მისი არშემცველი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f(x) = 0$ და $f(y) = 1$ ნებისმიერი $y \in F$

წერტილისთვის.



$T_{3\frac{1}{2}}$-სივრცეთა კლასი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathscr{T}_{3\frac{1}{2}}$.

ტოპოლოგიურ სივრცეს, რომელიც აკმაყოფილებს T_1-აქსიომას და $T_{3\frac{1}{2}}$-აქსიომას ეწოდება ტიხონოვის სივრცე, ან სავსებით რეგულარული სივრცე. ყველა სავსებით რეგულარულ სივრცეთა კლასი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathscr{CR}$.

ვთქვათ X არის $T_{3\frac{1}{2}}$-სივრცე. ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისა და მისი არშემცველი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $f: X \to [0,1]$ ფუნქცია, რომ $f(x)=0$ და $f(y)=1$ ყოველი $y \in F$ წერტილისთვის. ცხადია, $U = f^{-1}([0,1/2))$ და $V = f^{-1}((1/2,1])$ ღია სიმრავლეები აკმაყოფილებს $x \in U$, $F \subset V$ და $U \bigcap V = \varnothing$ პირობებს. ამრიგად, $T_{3\frac{1}{2}}$-სივრცე არის T_3-სივრცე. აქედან გამომდინარე, ყოველი სავსებით რეგულარული სივრცე არის რეგულარული სივრცე, ანუ $\mathscr{CR} \subset \mathscr{R}$.

თეორემა 3.1.6. *T_1-სივრცე X არის სავსებით რეგულარული სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის და $\mathscr{P}$ წინარებაზისის ნებისმიერი V ელემენტისთვის, რომელიც შეიცავს x წერტილს, არსებობს ისეთი $f: X \to Y$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f(x)=0$ და $f(y)=1$ ყოველი $y \in X \setminus V$ წერტილისთვის.*

დამტკიცება. ვთქვათ X სივრცე არის სავსებით რეგულარული. განვიხილოთ $x \in X$ წერტილის V მიდამო, რომელიც ეკუთვნის $\mathscr{P}$ წინარებაზისს. ცხადია, x არ ეკუთვნის $X \setminus V$ ჩაკეტილ სიმრავლეს. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $f: X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f(x)=0$ და $f(y)=1$ ნებისმიერი $y \in X \setminus V$ წერტილისთვის.

ვთქვათ, შებრუნებით, სრულდება თეორემის პირობა. X T_1-სივრცის $x \in X$ წერტილისთვის და მისი არშემცველი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის განვიხილოთ $V = X \setminus F$ ღია სიმრავლე. $\mathscr{P}$ წინარებაზისში არსებობს ისეთი $V_1, V_2, \dots, V_n$ ელემენტები, რომ

$x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset V$. ყოველი V_i, $i = 1, 2, ..., n$ ღია სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $f_i : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f_i(x) = 0$ და $f_i(y) = 1$ ნებისმიერი $y \in X \setminus V_i$ წერტილისთვის. განვიხილოთ $f : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$f(y) = \max\{f_1(y), f_2(y), ..., f_n(y)\}, \ y \in X .$$

ცხადია, $f(x) = 0$. ვაჩვენოთ, რომ $y \in F$ წერტილისთვის $f(y) = 1$. თავდაპირველად შევნიშნოთ

$$F = X \setminus V \subset X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} V_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus V_i) .$$

აქედან გამომდინარე, $y \in F$ წერტილი ეკუთვნის რომელიმე $X \setminus V_i$ სიმრავლეს. ამრიგად, $f_i(y) = 1$ რომელიმე $i \in \{1, 2, ..., n\}$ ინდექსისთვის. f ფუნქციის განმარტებიდან მიიღება

$$f(y) = \max\{f_1(y), f_2(y), ..., f_n(y)\} = 1$$

ტოლობა. □

მაგალითი 3.1.7. ვთქვათ $X = \mathbb{R}$ არის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. განვიხილოთ ოჯახი

$$\pm = \{[a, r) \mid a, r \in \mathbb{R}, \ a < r, \ r \in \mathbb{Q}\}.$$

$\pm$ ოჯახს აქვს B1) და B2) თვისებები. $\pm$ ოჯახის ყველა ქვეოჯახის სიმრავლეთა გაერთიანებები არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X სიმრავლეზე. მიღებული ტოპოლოგიური სივრცე ლიტერატურაში ცნობილია როგორც ზორგენფრეის ხაზი.

ცხადია, $[a, r)$ არის ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე განმარტებულ სივრცეში. განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი და მისი შემცველი $\pm$ ოჯახის $[a, r)$ ელემენტი. განვიხილოთ $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, მოცემული ფორმულით

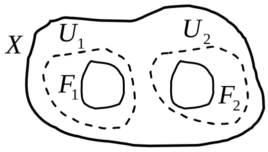
$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \in [a, r), \\ 1, & y \in \mathbb{R} \setminus [a, r). \end{cases}$$

ზორგენფრეის ხაზი არის სავსებით რეგულარული სივრცე, რადგან $f(x) = 0$ და $f(y) = 1$ ყოველი $y \in \mathbb{R} \setminus [a, r)$ წერტილისთვის, სადაც $[a, r) \in \pm$.

ისეთ სივრცეთა აღწერა, რომელიც არის რეგულარული, მაგრამ არაა სავსებით რეგულარული, ემყარება ზოგადი ტოპოლოგიის იმ თეორიულ მასალას და მეთოდებს, რომელთა გადმოცემა არ შედის ტოპოლოგიის საუნივერსიტეტო კურსის მიზნებში, ამიტომ ასეთ მაგალითებს აქ ჩვენ არ მოვიყვანთ. დაინტერესებულ მკითხველს ამ და სხვა საინტერესო მაგალითების გაცნობა შეუძლია სხვა კლასიკურ, ენციკლოპედიური ტიპის სახელმძღვანელოებში (იხ. მაგ., [Art-S], [En]).

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება T_4-სივრცე, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას:

T_4-აქსიომა. X სივრცის ნებისმიერი ორი თანაუკვეთი F_1 და F_2 ჩაკეტილი სიმრავლეებისთვის არსებობს ისეთი U_1 და U_2 ღია სიმრალეები, რომ $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$ და $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$.



თუ სივრცე აკმაყოფილებს T_1-აქსიომას და T_4-აქსიომას, მაშინ მას ეწოდება ნორმალური სივრცე.

ყველა ნორმალურ სივრცეთა კლასი ავღნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathscr{N}$.

ცხადია, ყოველი ნორმალური სივრცე არის რეგულარული სივრცე, ანუ $\mathscr{N} \subset \mathscr{R}$.

თეორემა 3.1.8. *T_1-სივრცე X ნორმალურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის და მისი ნებიმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი V ღია სიმრავლე, რომ $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ნორმალური სივრცე. განვიხილოთ X სივრცის F ჩაკეტილი სიმრავლის U მიდამო. X სივრცის ნორმალურობის გამო F და $F_1 = X \setminus U$ ჩაკეტილ თანაუკვეთ სიმრავლეებს შესაბამისად გააჩნიათ V და V_1 ღია თანაუკვეთი მიდამოები. ცხადია,

$$F \subset V \subset X \setminus V_1 \subset X \setminus F_1 = X \setminus (X \setminus U) = U.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset \overline{X \setminus V_1} = X \setminus V_1 \subset U .$$

ვთქვათ, X სივრცისთვის, რომელიც არის T_1-სივრცე, სრულდება თეორემის პირობა. განვიხილოთ X სივრცის ნებისმიერი ორი F და F_1 ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე. ცხადია, $F \subset U = X \setminus F_1$. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი V სიმრავლე, რომ $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. შევნიშნოთ, რომ

$$U_1 = X \setminus \overline{V} \supset X \setminus U = X \setminus (X \setminus F_1) = F_1.$$

ცხადია, $U \bigcap U_1 = \varnothing$. ამრიგად, X არის ნორმალური სივრცე. □

ახლა დავამტკიცოთ პ.ურისონის ლემა ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეების უწყვეტი ფუნქციებით განცალების შესახებ.

თეორემა 3.1.9.(ურისონის ლემა). *თუ F_0 და F_1 არის X ნორმალური*

სივრცის ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები, მაშინ არსებობს ისეთი $f : X \to [0,1]$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ ყოველი $x \in F_0$ წერტილისთვის $f(x) = 0$ და ყოველი $x \in F_1$ წერტილისთვის $f(x) = 1$.

დამტკიცება. ვთქვათ $G_1 = X \setminus F_1$. 3.1.8 თეორემის თანახმად არსებობს F_0 სიმრავლის ისეთი G_0 მიდამო, რომ $\overline{G_0} \subseteq G_1$.

დავუშვათ, მოცემული n ნატურალური რიცხვისა და $k = 0,1,\ldots,2^n$ რიცხვებისთვის აგებულია ისეთი $G_{k/2^n}$ ღია სიმრავლეები, რომ ყოველი $k < k'$ წყვილისთვის $\overline{G}_{k/2^n} \subseteq G_{k'/2^n}$. ცხადია, $n = 0$ რიცხვისთვის ეს სრულდება. 3.1.8 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი $G_{2k+1/2^{n+1}}$ ღია სიმრავლეები, რომ

$$\overline{G}_{k/2^n} \subseteq G_{2k+1/2^{n+1}} \subseteq \overline{G}_{2k+1/2^{n+1}} \subseteq G_{k+1/2^n} .$$

აქედან გამომდინარე, ყოველი $l = k/2^n$, $0 \le l \le 1$, რიცხვისთვის X სივრცეში არსებობს ისეთი G_l ღია სიმრავლეები, რომ $F_0 \subseteq G_0$ და $\overline{G}_l \subseteq G_{l'}$, $l < l'$. ვთქვათ ყოველი m, $0 < m < 1$ რიცხვისთვის $G_m = \bigcup\limits_{l<m} G_l$. ვაჩვენოთ, ყოველი $m < m'$ წყვილისთვის $\overline{G}_m \subseteq G_{m'}$.

მართლაც, l და l' რაციონალური რიცხვებისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $m < l < l' < m'$, გვაქვს $G_m \subseteq G_l$. აქედან გამომდინარე, მივიღებთ

$$\overline{G}_m \subseteq \overline{G}_l \subseteq G_{l'} \subseteq G_{m'} .$$

გარდა ამისა ვიგულისხმობთ, რომ $G_m = \varnothing$, როცა $m < 0$ და $G_m = X$, როცა $m > 1$.

ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ავაგოთ განკვეთა (R_x^1, R_x^2) შემდეგი წესით:

რიცხვი m მივაკუთვნოთ R_x^1 ქვედა კლასს, თუ $x \notin G_m$ და R_x^2 ზედა კლასს, თუ $x \in G_m$.

განმარტებული განკვეთა განსაზღვრავს ისეთ r_x ნამდვილ რიცხვს, რომ $0 \le r_x \le 1$.

ვთქვათ $f : X \to [0,1]$ არის ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$f(x) = r_x , \ x \in X .$$

ცხადია, ყოველი $x \in F_0$ წერტილისთვის $f(x) = 0$ და ყოველი $x \in F_1$ წერტილისთვის $f(x) = 1$. შევნიშნოთ, რომ f ფუნქცია უწყვეტია ყოველი $x \in X$ წერტილში. მართლაც, ნებისმიერი $\pounds > 0$ რიცხვისთვის განვიხილოთ x წერტილის $U = G_{r_x+\pounds} \setminus \overline{G}_{r_x-\pounds}$ მიდამო. ამ მიდამოს ყოველი x' წერტილისთვის სრულდება უტოლობა

$$r_x - £ \le r_{x'} \le r_x + £ ,$$

ანუ $| f(x) - f(x') | \le £$. □

ურისონის ლემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

შედეგი 3.1.10. *X ნორმალური სივრცის ნებისმიერი ორი F_0 და F_1 ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $f : X \to [a,b]$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f(x) = a,\ x \in F_0$ და $f(x) = b,\ x \in F_1$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $g : X \to [0,1]$ არის 3.1.9 თეორემაში აგებული ისეთი ფუნქცია, რომ $g(F_0) = 0$ და $g(F_1) = 1$. განვიხილოთ $f = ¨ \circ g : X \to [a,b]$ კომპოზიცია, სადაც $¨ : [0,1] \to [a,b]$ არის ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$¨(t) = a + (b-a) \cdot t ,\ 0 \le t \le 1 .$$

ცხადია, ნებისმიერი $x \in F_0$ წერტილისთვის

$$f(x) = (¨ \circ g)(x) = ¨(g(x)) = ¨(0) = a$$

და ნებისმიერი $x \in F_1$ წერტილისთვის

$$f(x) = (¨ \circ g)(x) = ¨(g(x)) = ¨(1) = b . \ □$$

თეორემა 3.1.11.(ტიტცე-ურისონის თეორემა). *თუ A არის X ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, ხოლო $g : A \to [-1,1]$ უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ არსებობს ისეთი $f : X \to [-1,1]$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ ნებისმიერი $x \in A$ წერტილისთვის $f(x) = g(x)$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $B_1 = g^{-1}([1/3, 1])$ და $B_{-1} = f^{-1}([-1, -1/3])$. ცხადია, B_1 და B_{-1} არის X სივრცის თანაუკვეთი ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები. ურისონის ლემის თანახმად, არსებობს ისეთი $g_1 : X \to [-1/3, 1/3]$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $g_1(B_1) = 1/3$ და $g_1(B_{-1}) = -1/3$. ყოველი $x \in A$ წერტილისთვის $| g(x) - g_1(x) | \le 2/3$.

განვიხილოთ $g - g_1 : A \to [-2/3, 2/3]$ უწყვეტი ფუნქცია და X სივრცის $B_2 = (g - g_1)^{-1}([2/9, 2/3])$ და $B_{-2} = (g - g_1)^{-1}([-2/3, -2/9])$ ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები. ურისონის ლემის თანახმად არსებობს ისეთი $g_2 : X \to [-2/9, 2/9]$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $g_2(B_2) = 2/9$ და $g_2(B_{-2}) = -2/9$. ყოველი $x \in A$ წერტილისთვის $| g(x) - g_1(x) - g_2(x) | \le 4/9$.

ინდუქციის წესით ყოველი n მთელი რიცხვისთვის განვმარტოთ ფუნქციები

$$g_n : X \to [-2^{n-1}/3^n , 2^{n-1}/3^n] .$$

ნებისმიერი $x \in A$ წერტილისთვის

$$| g(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x) | \le (2/3)^n .$$

ჩვენ შეგვიძლია g_n ფუნქციებს შევხედოთ როგორც ისეთ $g_n : X \to [-1,1]$ ფუნქციებს, რომელთათვისაც $|g_n(x)| \le 2^{n-1}/3^n$.

მწკრივი $\sum_{i=1}^{\infty} g_n$ თანაბრად კრებადია რაიმე $f : X \to [-1,1]$ უწყვეტი ფუნქციისკენ. შევნიშნოთ, რომ

$$|g(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |g(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x)| \le \lim_{n\to\infty} (2/3)^n = 0 \,, \; x \in A \,.$$

ამრიგად, $f(x) = g(x)$ ყოველი $x \in A$ წერტილისთვის. □

შედეგი 3.1.12. *თუ A არის X ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, მაშინ A ქვესივრცის n-განზომილებიან I^n კუბში ყოველი $g : A \to I^n$ უწყვეტი ასახვა გაგრძელებადია $f : X \to I^n$ უწყვეტ ასახვამდე.*

დამტკიცება. ვთქვათ p_i არის $I^n = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ კუბის პროექცია $I_i = [0,1]$, $1 \le i \le n$ თანამამრავლზე. ცხადია, $p_i \circ g : A \to I_i$, $1 \le i \le n$ ასახვებს აქვს უწყვეტი გაგრძელებები $f_i : X \to I_i$. განვიხილოთ ასახვა

$$f = \mathop{\Delta}_{i=1}^{n} f_i : X \to I^n \,.$$

განმარტების თანახმად, ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$. ცხადია, ყოველი $a \in A$ წერტილისთვის

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a), ..., f_n(a)) = (p_1 \circ g(a), p_2 \circ g(a), ..., p_n \circ g(a)) = g(a).$$

ამრიგად, $f_{|A} = g$.□

შედეგი 3.1.13. *X ნორმალური სივრცის A ჩაკეტილი სიმრავლიდან n-განზომილებიან S^n სფეროში ყოველ $f : A \to S^n$ უწყვეტ ასახვას აქვს F უწყვეტი გაგრძელება A სიმრავლის X სივრცეში რაიმე მიდამოს ჩაკეტვამდე.*

დამტკიცება. ცხადია, $S^n = \partial I^{n+1}$, სადაც $I^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ არის $n+1$-განზომილებიანი კუბი. $i \circ f : A \to S^n$ ასახვისთვის, სადაც $i : S^n \to I^{n+1}$ არის ჩადგმის ასახვა, არსებობს ისეთი $h : X \to I^{n+1}$ უწყვეტი ასახვა, რომ $h_{|A} = i \circ f$. I^{n+1} კუბის O ცენტრისთვის განვიხილოთ $B(0,£)$ მიდამო, სადაც £ არის O ცენტრიდან S^n საზღვრამდე მანძილზე ნაკლები დადებითი რიცხვი. $I^{n+1} \setminus B(0,£)$ ჩაკეტილი სიმრავლის $h^{-1}(I^{n+1} \setminus B(0,£))$ წინარესახე შეიცავს A ჩაკეტილი სიმრავლის რაიმე V მიდამოს $\overline{V}$ ჩაკეტვას. ვთქვათ $® : I^{n+1} \setminus B(0,£) \to S^n$ არის O ცენტრიდა S^n საზღვარზე პროექცია. ცხადია, $F = ® \circ h : \overline{V} \to S^n$ კომპოზიცია არის f ასახვის გაგრელება. □

ყოველი ნორმალური სივრცე არის სავსებით რეგულარული სივრცე. მართლაც, ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის და მისი არშემცველი F

ჩაკეტილი სიმრავლისთვის, ურისონის ლემის თანახმად, არსებობს ისეთი $f : X \to Y$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f(x) = 0$ და $f(y) = 1$, $y \in F$.

შევნიშნოთ, არსებობს ისეთი სავსებით რეგულარული სივრცეები, რომლებიც არაა ნორმალური (იხ.მაგ., [En], [Ke], [Art-S]).

ახლა მოვიყვანოთ ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი G_δ -ტიპის და ღია F_σ -ტიპის სიმრავლეების აღწერა.

წინადადება 3.1.14. *X ნორმალური სივრცის A ჩაკეტილი ქვესიმრავლე არის G_δ -ტიპის სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $A = f^{-1}(0)$.*

დამტკიცება. ვთქვათ A არის X ნორმალური სივრცის G_δ -ტიპის ქვესიმრავლე, მაშინ მისი $X \setminus A$ დამატება არის F_σ -ტიპის სიმრავლე, ე.ი. $X \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, სადაც ყოველი F_n არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ურისონის ლემის თანახმად არსებობს ისეთი $f_n : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f_n(x) = 0$ ყოველი $x \in A$ წერტილისთვის და $f_n(x) = 1$ ყოველი $x \in F_n$ წერტილისთვის. 2.3.29 თეორემის თანახმად $f : X \to I$ ფუნქცია, განსაზღვრული ფორმულით

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n \; f_n(x)\,,\; x \in X\;,$$

არის უწყვეტი. გარდა ამისა, ყოველი $x \in A$ წერტილისთვის $f(x) = 0$. თუ $x \notin A$, მაშინ არსებობს ისეთი n ნატურალური რიცხვი, რომ $x \in F_n$. ამიტომ

$$f(x) > 1/2^n \; f_n(x) = 1/2^n > 0\,,$$

ე.ი. $A = f^{-1}(0)$.

ვთქვათ, შებრუნებით, არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $A = f^{-1}(0)$. ცხადია, $\{0\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [0, 1/n)$. აქედან მიიღება

$$A = f^{-1}(0) = f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} [0, 1/n)\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([0, 1/n))\,.$$

ყოველი $f^{-1}([0, 1/n))$, $n = 1, 2, \ldots$ წინარესახე არის ღია სიმრავლე. ამიტომ A არის G_δ -ტიპის სიმრავლე. □

წინადადება 3.1.15. *X ნორმალური სივრცის A ღია ქვესიმრავლე არის F_σ -ტიპის სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $A = f^{-1}((0,1])$.*

დამტკიცება. ვთქვათ A არის ღია F_σ -ტიპის სიმრავლე. მაშინ $X \setminus A$ არის ჩაკეტილი G_δ -ტიპის სიმრავლე. 3.1.14 წინადადების თანახმად, არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $X \setminus A = f^{-1}(0)$. ცხადია,

$$A = X \setminus (X \setminus A) = X \setminus f^{-1}(0) = X \setminus (f^{-1}([0,1] \setminus (0,1])) =$$
$$= X \setminus (f^{-1}([0,1]) \setminus f^{-1}((0,1])) = X \setminus (X \setminus f^{-1}((0,1])) = f^{-1}((0,1]).$$

ვთქვათ, შებრუნებით, არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $A = f^{-1}((0,1])$. აქედან გამომდინარე,

$$X \setminus A = X \setminus f^{-1}((0,1]) = X \setminus f^{-1}([0,1] \setminus \{0\}) =$$
$$= X \setminus (f^{-1}([0,1]) \setminus f^{-1}\{0\}) = X \setminus (X \setminus f^{-1}\{0\}) = f^{-1}\{0\}.$$

ამრიგად $X \setminus A$ არის G_{δ} -ტიპის ჩაკეტილი სიმრავლე, რაც ნიშნავს, რომ A არის F_{σ} -ტიპის ქვესიმრავლე. □

X ტოპოლოგიური სივრცის A და B ქვესიმრავლეებს ეწოდება სავსებით განცალებადი, თუ არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f(x) = 0$ ყოველი $x \in A$ წერტილისთვის და $f(x) = 1$ ყოველი $x \in B$ წერტილისთვის.

წინადადება 3.1.16. *ნორმალური სივრცის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე არის სავსებით განცალებადი.*

დამტკიცება. ვთქვათ A და B არის X ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები. ურისონის ლემის თანახმად, არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ ყოველი $x \in A$ წერტილისთვის $f(x) = 0$ და ყოველი $x \in B$ წერტილისთვის $f(x) = 1$, ე.ი. A და B სიმრავლეები არის განცალებადი სიმრავლეები. □

X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება ფუნქციონალურად ჩაკეტილი, თუ არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $A = f^{-1}(0)$.

X ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება ფუნქციონალურად ღია, თუ არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $A = f^{-1}((0,1])$.

შევნიშნოთ, რომ ტოპოლოგიური სივრცის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი და ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეები შესაბამისად არის ამ სივრცის ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეები.

წინადადება 3.1.17. *ტოპოლოგიური სივრცის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლეების სასრული გაერთიანება და სასრული თანაკვეთა არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე.*

დამტკიცება. დამტკიცება მიმდინარეობს ინდუქციის წესით. ამიტომ დამტკიცება ჩავატაროთ მხოლოდ $n = 2$ შემთხვევისთვის.

ვთქვათ A_1 და A_2 არის X ტოპოლოგიური სივრცის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლეები. ვთქვათ $f_1, f_2 : X \to I$ არის ისეთი უწყვეტი ასახვები, რომ $A_1 = f_1^{-1}(0)$ და $A_2 = f_2^{-1}(0)$. ასახვა $g : X \to I$, მოცემული ფორმულით $g = f_1 \cdot f_2 : X \to I$, არის უწყვეტი.

სამართლიანია ტოლობა $g^{-1}(0) = f_1^{-1}(0) \bigcup f_2^{-1}(0)$. მართლაც, ვთქვათ, $x \in g^{-1}(0)$, მაშინ $g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. აქედან გამომდინარე, ან $f_1(x) = 0$ ან, $f_2(x) = 0$. ამრიგად, ან $x \in f_1^{-1}(0)$, ან $x \in f_2^{-1}(0)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x \in f_1^{-1}(0) \bigcup f_2^{-1}(0)$.

ვთქვათ $x \in f_1^{-1}(0) \bigcup f_2^{-1}(0)$, მაშინ ან $x \in f_1^{-1}(0)$, ან $x \in f_2^{-1}(0)$, ე.ი. ან $f_1(x) = 0$, ან $f_2(x) = 0$. ცხადია, $g(x) = 0$, რადგან $g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. ამრიგად, $x \in g^{-1}(0)$.

დამტკიცებული ტოლობებიდან გამომდინარეობს ტოლობა $g^{-1}(0) = A_1 \bigcup A_2$. ეს კი ნიშნავს, რომ $A_1 \bigcup A_2$ არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე.

ახლა, ვთქვათ, $h : X \to I$ არის $h = 1/2(f_1 + f_2)$ ფორმულით მოცემული ასახვა.

სამართლიანია ტოლობა $h^{-1}(0) = f_1^{-1}(0) \bigcap f_2^{-1}(0)$. მართლაც, ვთქვათ, $x \in h^{-1}(0)$, მაშინ $h(x) = 0$. ამიტომ $1/2(f_1(x) + f_2(x)) = 0$, რაც ნიშნავს, რომ $f_1(x) = 0$ და $f_2(x) = 0$. ამრიგად $x \in f_1^{-1}(0)$ და $x \in f_2^{-1}(0)$. საბოლოოდ შეგვიძლია ვთქვათ $x \in f_1^{-1}(0) \bigcap f_2^{-1}(0)$.

ასევე $x \in f_1^{-1}(0) \bigcap f_2^{-1}(0)$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $x \in f_1^{-1}(0)$ და $x \in f_2^{-1}(0)$, ანუ $f_1(x) = 0$ და $f_2(x) = 0$. ამრიგად, $h(x) = 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x \in h^{-1}(0)$. დამტკიცებული სიმრავლური ტოლობებიდან გამომდინარეობს $h^{-1}(0) = A_1 \bigcap A_2$ ტოლობა. ამრიგად, $A_1 \bigcap A_2$ არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე. □

წინადადება 3.1.18. *ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლეების თვლადი თანაკვეთა არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ A_n, $n = 1, 2, \ldots$ არის X ტოპოლოგიური სივრცის ფუნქიონალურად ჩაკეტილი სიმრავლეები. ვთქვათ $A_n = f_n^{-1}(0)$, სადაც f_n არის $f_n : X \to I$, $n = 1, 2, \ldots$ უწყვეტი ასახვები. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x), \; x \in X .$$

ცხადია, $f^{-1}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}(0)$, ანუ $f^{-1}(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. ამრიგად, ფუნქციონალურად ჩაკეტილი A_n, $n = 1, 2, \ldots$ სიმრავლეების თვლადი თანაკვეთა $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე. □

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლის დამატება არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე და, პირიქით, ფუნქციონალურად ღია სიმრავლის დამატება არის ფუნქციონალურად

ჩაკეტილი სიმრავლე.

წინადადება 3.1.19. *ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეების სასრული თანაკვეთა არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ A_n, $n=1,2,...k$ არის ფუნქიონალურად ღია სიმრავლეები. ვაჩვენოთ, რომ $\bigcap_{n=1}^{k} A_n$ არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე. ცხადია, $X \setminus \bigcap_{n=1}^{k} A_n$ სიმრავლე, ანუ $\bigcup_{n=1}^{k}(X \setminus A_n)$ სიმრავლე, როგორც ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრალეების გაერთიანება, არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე. ამრიგად, $\bigcap_{n=1}^{k} A_n$ არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე. □

წინადადება 3.1.20. *ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ A_n, $n=1,2,...$ არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეები. $X \setminus A_n$ ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლეების $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n)$ თანაკვეთა არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე. ტოლობიდან $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ გამომდინარეობს, რომ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ გაერთიანება არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე. □

თეორემა 3.1.21. *ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ორი თანაუკვეთი A_1 და A_2 ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე არის სავსებით განცალებადი. უფრო მეტიც, არსებობს ისეთი $f: X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $A_1 = f^{-1}(0)$ და $A_2 = f^{-1}(1)$.*

დამტკიცება. ვთქვათ A_1 და A_2 არის ისეთი ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლეები, რომ $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$. ვთქვათ $f_1, f_2 : X \to I$ არის ისეთი უწყვეტი ასახვები, რომ $A_1 = f_1^{-1}(0)$ და $A_2 = f_2^{-1}(0)$.

ვთქვათ $f: X \to I$ არის ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x)+f_2(x)}, \ x \in X .$$

ვაჩვენოთ, რომ $A_1 = f^{-1}(0)$ და $A_2 = f^{-1}(1)$.

ვთქვათ $x \in A_1$. ცხადია, $f(x)=0$, რადგან $f_1(x)=0$. ამრიგად, $x \in f^{-1}(0)$. ვთქვათ, შებრუნებით, $x \in f^{-1}(0)$. რადგან $f(x)=0$, ამიტომ $f_1(x)=0$, ანუ $x \in f_1^{-1}(0) = A_1$. ამრიგად, $A_1 = f^{-1}(0)$.

ვთქვათ $x \in A_2$. ტოლობიდან $f_2(x)=0$ მივიღებთ, რომ $f(x)=1$, ანუ $x \in f^{-1}(1)$. ვთქვათ, შებრუნებით, $x \in f^{-1}(1)$. რადგან $f(x)=1$, ამიტომ $f_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$, ე.ი. $f_2(x)=0$, ანუ $x \in f_2^{-1}(0) = A_2$. ამრიგად,

$A_2 = f^{-1}(0)$. □

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება სრულყოფილად ნორმალური, თუ ის არის ნორმალური სივრცე და მისი ყოველი ღია სიმრავლე არის $F_{\pm}$ -ტიპის სიმრავლე.

ყველა სრულყოფილად ნომრალურ სივრცეთა კლასი აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $\mathscr{PN}$.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1.22. *ყოველი X ტოპოლოგიური T_1 -სივრცისთვის ექვივალენტურია წინადადებები:*

i). *X არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე.*

ii). *X სივრცის ღია სიმრავლეები არის ფუნქციონალურად ღია.*

დამტკიცება. ვთქვათ სრულდება i) წინადადება და U არის X სივრცის ღია სიმრავლე. სრულყოფილად ნორმალურობის თანახმად U არის $F_{\pm}$ -ტიპის სიმრავლე. 3.1.15 წინადადების თანახმად არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $U = f^{-1}((0,1])$. ამრიგად, U არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე და იმპლიკაცია i) $\Rightarrow$ ii) არის სამართლიანი.

ვთქვათ სრულდება ii) წინადადება და U ღია სიმრავლე არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე, ამიტომ არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $U = f^{-1}((0,1])$. შევნიშნოთ, რომ 3.1.15 წინადადების თანახმად, U არის $F_{\pm}$ -ტიპის სიმრავლე. განვიხილოთ X სივრცის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი F_1 და F_2 სიმრავლე. ii) წინადადების თანახმად მათი დამატებები $X \setminus F_1$ და $X \setminus F_2$ არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლეები. აქედან გამომდინარე, F_1 და F_2 არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები. ამიტომ, 3.1.21 წინადადების თანახმად, F_1 და F_2 არის სავსებით განცალებადი სიმრავლეები. ეს კი ნიშნავს X სივრცის ნორმალურობას. ამრიგად, X არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე. ამით ii) $\Rightarrow$ i) იმპლიკაცია ნაჩვენებია. □

თეორემა 3.1.23. *ყოველი X ტოპოლოგიური T_1 -სივრცისთვის ექვივალენტურია წინადადებები:*

i). *X არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე.*

ii). *X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლეები არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ i) $\Rightarrow$ ii) იმპლიკაცია. ავიღოთ X სივრცის ნებისმიერი F ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. X სივრცის სრულყოფილად ნორმალურობიდან გამომდინარეობს, რომ $X \setminus F$ ღია სიმრავლე არის $F_{\pm}$ -ტიპის სიმრავლე. ამიტომ F არის $G_{¢}$ -ტიპის ჩაკეტილი სიმრავლე.

3.1.14 წინადადების თანახმად, არსებობს ისეთი $f: X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f^{-1}(0) = F$. ამრიგად, F ჩაკეტილი სიმრავლე არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე.

ახლა ვაჩვენოთ ii) $\Rightarrow$ i) იმპლიკაცია. ვთქვათ U არის X სივრცის ღია სიმრავლე. ii) პირობის თანახმად, $X \setminus U$ ჩაკეტილი სიმრავლე არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე. ამიტომ 3.1.14 წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ ის არის G_{δ} -ტიპის სიმრავლე. ცხადია, მისი დამატება $U = X \setminus (X \setminus U)$ არის F_{σ} -ტიპის სიმრავლე. X სივრცის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე, როგორც ფუნქციონალურად ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე, არის სავსებით განცალებადი. აქედან გამომდინარე, X არის ნორმალური სივრცე და, მაშასადამე, სრულყოფილად ნორმალური სივრცე. □

თეორემა 3.1.24. *ყოველი X ტოპოლოგიური T_1 -სივრცისთვის ექვივალენტურია წინადადებები:*

i). *X არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე.*

ii). *X სივრცის ყოველი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი A და B სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $f: X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $A = f^{-1}(0)$ და $B = f^{-1}(1)$.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ i) $\Rightarrow$ ii) იმპლიკაცია. ვთქვათ A და B არის ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები. 3.1.23 თეორემის ii) წინადადების თანახმად A და B არის თანაუკვეთი ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლეები. 3.1.21 წინადადების გამოყენებით მიიღება ii) წინადადება.

იმპლიკაცია ii) $\Rightarrow$ i) არის ცხადი. □

დამტკიცებული 3.1.22, 3.1.23 და 3.1.24 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1.25.(ვედენისოვის თეორემა). *ნებისმიერი X ტოპოლოგიური T_1 -სივრცისთვის ექვივალენტურია წინადადებები:*

i). *X არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე.*

ii). *X სივრცის ღია ქვესიმრავლე არის ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე.*

iii). *X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე.*

iv). *X სივრცის ნებისმიერი ორი A და B თანაუკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $f: X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $A = f^{-1}(0)$ და $B = f^{-1}(1)$.* □

X ტოპოლოგიურ სივრცეს, ეწოდება მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე, თუ მისი ყოველი Y ქვესივრცე არის ნორმალური სივრცე.

ყველა მემკვიდრეობით ნორმალურ სივრცეთა კლასი აღვნიშნოთ

სიმბოლოთი $\mathscr{HN}$.

X ტოპოლოგიური სივრცის A და B ქვესიმრავლეებს ეწოდება დაცილებადი, თუ $\overline{A} \cap B = \varnothing = A \cap \overline{B}$.

წინადადება 3.1.26. *ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ორი ღია თანაუკვეთი სიმრავლე არის დაცილებადი.*

დამტკიცება. წინადადება გამომდინარეობს 2.2.6 და 2.2.7 შედეგებიდან. □

წინადადება 3.1.27. *ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე არის დაცილებადი.*

დამტკიცება. ეს წინადადება არის 2.2.3 წინადადების პირდაპირი შედეგი. □

თეორემა 3.1.28. *ყოველი X ტოპოლოგიური T_1-სივრცისთვის ექვივალენტურია წინადადებები:*

i). *X არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე.*

ii). *X სივრცის ყოველი ღია სიმრავლე არის ნორმალური სივრცე.*

დამტკიცება. იმპლიკაცია i) $\Rightarrow$ ii) გამომდინარეობს X სივრცის მემკვიდრეობით ნორმალურობიდან.

ახლა ვაჩვენოთ ii) $\Rightarrow$ i) იმპლიკაცია. ვთქვათ A არის X სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცე, ხოლო F_1 და F_2 მისი ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები. ვთქვათ $F = \overline{F}_1^X \cap \overline{F}_2^X$. განვიხილოთ $G = X \setminus F$ ღია სიმრავლე. პირობის ძალით G არის ნორმალური ქვესივრცე. ცხადია, G ქვესივრცეში ჩაკეტილ და თანაუკვეთ $\overline{F}_1^X \cap G$ და $\overline{F}_2^X \cap G$ სიმრავლეებს გააჩნიათ მომცველ G ქვესივრცეში ღია თანაუკვეთი U_1 და U_2 მიდამოები. შევნიშნოთ, რომ $F_1 \subset \overline{F}_1^X \cap G$ და $F_2 \subset \overline{F}_2^X \cap G$. გარდა ამისა, $U_1 \cap A$ და $U_2 \cap A$ შესაბამისად არის F_1 და F_2 ქვესიმრავლეების A ქვესივრცეში თანაუკვეთი მიდამოები. ამრიგად, A არის ნორმალური ქვესივრცე. □

თეორემა 3.1.29. *ყოველი X ტოპოლოგიური T_1-სივრცისთვის ექვივალენტურია წინადადებები:*

i). *X არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე.*

ii). *X სივრცის ყოველი ორი A და B დაცილებადი სიმრავლისთვის არსებობს მათი თანაუკვეთი U და V მიდამოები.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ იმპლიკაცია i) $\Rightarrow$ ii) . ვთქვათ A და B არის X მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცის დაცილებადი სიმრავლეები. განვიხილოთ $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$ ქვესივრცე. პირობის ძალით, $A \cap \overline{B} = \varnothing$. ცხადია, $A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $A \subseteq X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B}) = Y$. ანალოგიურად $B \subseteq Y$.

განვიხილოთ Y ქვესივრცის $F = Y \cap \overline{A}$ და $G = Y \cap \overline{B}$ ჩაკეტილი

ქვესიმრავლეები. შევნიშნოთ, რომ

$$F\bigcap G = Y\bigcap \overline{A}\bigcap \overline{B} = \varnothing .$$

პირობის თანახმად, Y არის ნორმალური სივრცე. ამიტომ მის ჩაკეტილ F და G სიმრავლეებს გააჩნიათ თანაუკვეთი U და V მიდამოები Y ქვესივრცეში. ცხადია, U და V არის ღია X სივრცეში, რადგან Y არის მისი ღია ქვესიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ $A\subset Y\bigcap \overline{A} = F \subseteq U$ და $B\subset Y\bigcap \overline{B} = G \subseteq V$. ამრიგად, ii) წინადადება სრულდება.

ახლა ვაჩვენოთ იმპლიკაცია ii)$\Rightarrow$ i). ვთქვათ A და B არის X სივრცის Y ქვესივრცის ნებისმიერი ორი თანაუკვეთი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ცხადია, $A\bigcap \overline{B} = \varnothing = \overline{A}\bigcap B$. პირობის თანახმად A და B სიმრავლეებს X სივრცეში გააჩნიათ თანაუკვეთი U' და V' მიდამოები. ვთქვათ $U = U'\bigcap Y$ და $V = V'\bigcap Y$. აქედან გამომდინარე, $U\bigcap V = \varnothing$. ამრიგად, Y არის ნორმალური სივრცე, ხოლო X არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე. □

მემკვიდრეობით ნორმალურ სივრცეს ზოგჯერ უწოდებენ T_5-სივრცეს, ხოლო სრულყოფილად ნორმალურ სივრცეს T_6-სივრცეს. სიმბოლოებით $\mathscr{T}_5$ და $\mathscr{T}_6$ შესაბამისად აღვნიშნოთ T_5-სივრცეების და T_6-სივრცეების კლასები.

თეორემებიდან 3.1.28 და 3.1.29 მიიღება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.1.30. *ყოველი X ტოპოლოგიური T_1-სივრცისთვის ექვივალენტურია წინადადებები:*

i). *X არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე.*

ii). *X სივრცის ყოველი ღია სიმრავლე არის ნორმალური ქვესივრცე.*

iii). *X სივრცის ყოველი ორი A და B დაცილებადი სიმრავლისთვის არსებობს X სივრცეში მათი ისეთი U და V ღია მიდამოები, რომ $U\bigcap V = \varnothing$.* □

ამრიგად, ტოპოლოგიურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა **Top** კატეგორიას გააჩნია შემდეგი სრული ქვეკატეგორიები:

$\mathbf{Top}_{T_0}$ - T_0-სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია.

$\mathbf{Top}_{T_1}$ - T_1-სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია.

$\mathbf{Top}_{T_2}$ - T_2-სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია.

$\mathscr{R}$ -რეგულარულ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია.

$\mathscr{CR}$ -სავსებით რეგულარულ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია.

$\mathscr{N}$ -ნორმალურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია.

$\mathscr{HN}$ -მემკვიდრეობით ნორმალურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა

კატეგორია.

$\mathscr{PN}$ -სრულყოფილად ნორმალურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია.

ცხადია,

$$ob(\mathscr{PN}) \subset ob(\mathscr{HN}) \subset ob(\mathscr{N}) \subset ob(\mathscr{CR}) \subset$$
$$\subset ob(\mathscr{R}) \subset ob(\mathbf{Top}_{T_2}) \subset ob(\mathbf{Top}_{T_1}) \subset ob(\mathbf{Top}_{T_0}).$$

სავარჯიშო 3.1.31. 1). აჩვენეთ, თუ τ და μ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურები X სიმრავლეზე და $\tau \le \mu$, მაშინ, თუ $(X,²)$ არის T_1-სივრცე, $(X,«)$ სივრცეც იქნება T_1-სივრცე.

2).აჩვენეთ, ჰაუსდორფის სივრცის რეტრაქტი არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

3).ვთქვათ X არის უსასრულო სიმრავლე, ხოლო $² = \{\varnothing, U \mid |X \setminus U| < \aleph_0\}$. აჩვენეთ, ყოველი $x \in X$ წერტილი არის ნებისმიერი $A \subset X$ უსასრულო სიმრავლის დაგროვების წერტილი.

4).აჩვენეთ, წინა სავარჯიშოს პირობებში, ყოველი $A \subset X$ უსასრულო სიმრავლისთვის $\overline{A} = X$.

5).აჩვენეთ, თუ X ტოპოლოგიური T_1-სივრცის x წერტილს X სივრცეში გააჩნია სასრული რაოდენობის ელემენტებისგან შემდგარი ბაზა, მაშინ x წერტილი არის იზოლირებული წერტილი.

6).ვთქვათ $\mathbb{Z}_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge k\}$ და $² = \{\mathbb{Z}\} \bigcup \{\varnothing\} \bigcup \{\mathbb{Z}_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. აჩვენეთ, $(\mathbb{Z},²)$ არის T_0-სივრცე და არცერთი მისი წერტილი არაა ჩაკეტილი სიმრავლე.

7).აჩვენეთ, თუ X არის T_1-სივრცე, მაშინ მისი $A \subset X$ სიმრავლის A^d წარმოებული სიმრავლე არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

8).დაამტკიცეთ, იზოლირებული წერტილების არმქონე T_1-სივრცის მკვრივ ქვესივრცეს არ გააჩნია იზოლირებული წერტილები.

9).დაამტკიცეთ, თვლად ბაზისიანი რეგულარული სივრცე არის სრულყოფილად ნორმალური.

10).დაამტკიცეთ, თუ ჰაუსდორფის სივრცის არაიზოლირებულ წერტილთა სიმრავლე სასრულია, მაშინ ის არის ნორმალური სივრცე.

3.2. ტოპოლოგიური ოპერაციები და განცალების აქსიომები

მოცემულ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ სხვადასხვა სახის განცალების აქსიომების მქონე ტოპოლოგიური სივრცეების ტოპოლოგიურ ოპერაციებს და მოვიყვანთ იმ წინდადადებებს, რომლებშიც აღწერილია ის თვისებები, რასაც სივრცე ინარჩუნებს სხვადასხვა ტოპოლოგიური ოპერაციისას.

თეორემა 3.2.1. *T_0-სივრცის, T_1-სივრცის, T_2-სივრცის, რეგულარული სივრცის, სავსებით რეგულარული სივრცის, მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცის და სრულყოფილად ნორმალური სივრცის ქვესივრცეები შესაბამისად არის T_0-სივრცე, T_1-სივრცე, T_2-სივრცე, რეგულარული სივრცე, სავსებით რეგულარული სივრცე, მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე და სრულყოფილად ნორმალური სივრცე.*

დამტკიცება. i). ვთქვათ X არის T_0-სივრცე, ხოლო Y მისი ქვესივრცე. Y ქვესივრცის ნებისმიერი ორი x და y განსხვავებული წერტილიდან ერთს მაინც X სივრცეში გააჩნია მიდამო, რომელიც არ შეიცავს მეორე წერტილს. ვთქვათ x წერტილს X სივრცეში გააჩნია ისეთი U მიდამო, რომ $y \notin U$. ცხადია, x წერტილის Y ქვესივრცეში $V = U \bigcap Y$ მიდამო არ შეიცავს y წერტილს. ამრიგად, Y არის T_0-სივრცე.

ii). ვთქვათ X არის T_1-სივრცე, ხოლო Y მისი ქვესივრცე. Y ქვესივრცის ნებისმიერი ორი x და y განსხვავებული წერტილისთვის X სივრცეში არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $x \in U$, $y \notin U$ და $y \in V$, $x \notin V$. ცხადია, Y ქვესივრცის $G = U \bigcap Y$ და $Q = V \bigcap Y$ ღია სიმრავლეები აკმაყოფილებს პირობებს $x \in G$, $y \notin G$ და $y \in Q$, $x \notin Q$, ე.ი. Y ქვესივრცე არის T_1-სივრცე.

iii). ვთქვათ X არის T_2-სივრცე, ხოლო Y მისი ქვესივრცე. განვიხილოთ Y ქვესივრცის ნებისმიერი ორი x და y განსხვავებული წერტილები. ცხადია $x, y \in X$ და X სივრცეში არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო და y წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $U \bigcap V = \varnothing$. ვთქვათ $G = U \bigcap Y$ და $Q = V \bigcap Y$. ცხადია, $x \in G$, $y \in Q$ და $G \bigcap Q = \varnothing$. ეს კი ნიშნავს, რომ Y ქვესივრცე არის T_2-სივრცე.

iv). ვთქვათ X არის რეგულარული სივრცე, ხოლო Y მისი ქვესივრცე. ვთქვათ $x \in Y$, $F \subset Y$ არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და $x \notin F$. განვიხილოთ X სივრცის ისეთი F_1 ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $F_1 \bigcap Y = F$. ცხადია $x \notin F_1$. რადგან X არის რეგულარული სივრცე, ამიტომ ის არის T_1-სივრცე და T_3-სივრცე. აქედან გამომდინარე, X სივრცეში არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $x \in U$, $F_1 \subset V$ და $U \bigcap V = \varnothing$. ცხადია, $G = U \bigcap Y$ და $Q = V \bigcap Y$ არის Y ქვესივრცის ღია ქვესიმრავლეები და აკმაყოფილებს პირობებს $x \in G$, $F \subset Q$ და $G \bigcap Q = \varnothing$. ამრიგად, Y არის T_3-სივრცე. გარდა ამისა, ის ამავე დროს არის T_1-სივრცე. ეს კი ნიშნავს, რომ Y არის რეგულარული ქვესივრცე.

v). ვთქვათ X არის სავსებით რეგულარული სივრცე, ხოლო Y მისი ნებისმიერი ქვესივრცე. ვთქვათ $x \in Y$, $F \subset Y$ არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და $x \notin F$. X სივრცეში არსებობს ისეთი F_1 ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $F_1 \bigcap Y = F$. ცხადია, $x \notin F_1$. პირობის ძალით, X სივრცე არის T_1-სივრცე და $T_{3\frac{1}{2}}$-სივრცე. ამიტომ არსებობს ისეთი $f: X \to Y$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f(x)=0$ და $f(y)=1$ ყოველი $y \in F_1$ წერტილისთვის. f ფუნქციის შემოსაზღვრა $f_{|Y}: Y \to I$ აკმაყოფილებს პირობებს $f_{|Y}(x)=0$ და $f_{|Y}(y)=1$ ყოველი $y \in F$ წერტილისთვის. ამრიგად, Y არის $T_{3\frac{1}{2}}$-სივრცე. ის, ამავე დროს, არის T_1-სივრცე. ეს კი ნიშნავს, რომ Y არის სავსებით რეგულარული სივრცე.

vi). ვთქვათ X არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე, ხოლო Y მისი ნებისმიერი ქვესივრცე. ცხადია, Y ქვესივრცის ყოველი ქვესივრცე, როგორც X სივრცის ქვესივრცე, არის ნორმალური სივრცე. ამრიგად, Y არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე.

vii). ვთქვათ X არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე, ხოლო Y მისი ნებისმიერი ქვესივრცე. ვთქვათ F არის Y ქვესივრცის ნებისმიერი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. X სივრცეში არსებობს ისეთი F_1 ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, რომ $F_1 \bigcap Y = F$. რადგან X არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე, ამიტომ 3.1.23 თეორემის თანახმად F_1 არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი სიმრავლე, ე.ი. არსებობს ისეთი $f: X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f^{-1}(0) = F_1$. ცხადია, $f \circ i: Y \to I$ კომპოზიცია, სადაც $i: Y \to X$ არის ჩადგმის ასახვა, აკმაყოფილებს პირობას $(f \circ i)^{-1}(0) = i^{-1}(f^{-1}(0)) = i^{-1}(F_1) = F$. ამრიგად, F არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. 3.1.23 თეორემის თანახმად, Y არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე. □

ნორმალური სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცე საზოგადოდ არაა ნორმალური სივრცე.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.2.2. *ნორმალური სივრცის ყოველი ჩაკეტილი ქვესივრცე არის ნორმალური სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ Y არის X ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. Y ქვესივრცის ყოველი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე არის ჩაკეტილი X სივრცეში. ამიტომ, X სივრცის ნორმალურობის გამო Y ქვესივრცის ნებისმიერ ორ F_1 და F_2 ჩაკეტილ თანაუკვეთ სიმრავლეებს X სივრცეში გააჩნიათ თანაუკვეთი U_1 და U_2 ღია მიდამოები. ცხადია, $U_1 \bigcap Y$ და $U_2 \bigcap Y$ არის F_1 და F_2 ქვესიმრავლეების ღია თანაუკვეთი

მიდამოები Y ქვესივრცეში. Y ქვესივრცე ამავდროულად არის T_1-სივრცე. ამრიგად, Y არის ნორმალური ქვესივრცე. □

ახლა განვიხილოთ გარკვეული აქსიომების მქონე ტოპოლოგიურ სივრცეთა ტოპოლოგიური ჯამის თვისებები. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.2.3. *T_0-სივრცეების, T_1-სივრცეების, T_2-სივრცეების, რეგულარული სივრცეების, სავსებით რეგულარული სივრცეების, ნორმალური სივრცეების, მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცეების და სრულყოფილად ნორმალურ სივრცეების ჯამი შესაბამისად არის T_0-სივრცე, T_1-სივრცე, T_2-სივრცე, რეგულარული სივრცე, სავსებით რეგულარული სივრცე, ნორმალური სივრცე, მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე და სრულყოფილად ნორმალური სივრცე.*

დამტკიცება. i). ვთქვათ $X_\alpha, \alpha\in A$ არის T_0-სივრცეები, ხოლო x და y არის $\underset{\alpha\in A}{\oplus} X_\alpha$ ჯამის ნებისმიერი ორი $x\neq y$ განსხვავებული წერტილი. თუ x და y ეკუთვნის რაიმე X_α სივრცეს, მაშინ მათგან რომელიმეს, მაგალითად, x წერტილს გააჩნია X_α სივრცეში ისეთი U მიდამო, რომელიც არ მოიცავს y წერტილს. ცხადია, U არის x წერტილის ღია მიდამო $\underset{\alpha\in A}{\oplus} X_\alpha$ სივრცეში. ვთქვათ $x\in X_\alpha$ და $y\in X_{\alpha'}$, სადაც $\alpha\neq\alpha'$. ცხადია, $U=X_\alpha$ არის x წერტილის ღია მიდამო და $y\notin X_\alpha$, რადგან $X_\alpha\bigcap X_{\alpha'}=\varnothing$. ამრიგად, $\underset{\alpha\in A}{\oplus} X_\alpha$ არის T_0-სივრცე.

ii). ვთქვათ $X_\alpha, \alpha\in A$ არის T_1-სივრცეები. თუ $x,y\in X_\alpha$ და $x\neq y$, მაშინ X_α სივრცეში x წერტილს აქვს U მიდამო, რომელიც არ შეიცავს y წერტილს და y წერტილს აქვს V მიდამო, რომელიც არ შეიცავს x წერტილს. ცხადია, U და V არის ღია სიმრავლეები $\underset{\alpha\in A}{\oplus} X_\alpha$ სივრცეში. ვთქვათ, ახლა $x\in X_\alpha$ და $y\in X_{\alpha'}$, სადაც $\alpha\neq\alpha'$. მაშინ U და V მიდამოების როლში შეგვიძლია განვიხილოთ X_α და $X_{\alpha'}$ სივრცეები. ამრიგად, $\underset{\alpha\in A}{\oplus} X_\alpha$ არის T_1-სივრცე.

iii). ვთქვათ $X_\alpha, \alpha\in A$ არის T_2-სივრცეები, ხოლო x და y არის $\underset{\alpha\in A}{\oplus} X_\alpha$ სივრცის ორი განსხვავებული წერტილი. თუ $x,y\in X_\alpha$ სივრცეს, მაშინ პირობიდან გამომდინარე, X_α სივრცეში არსებობს x და y წერტილების ისეთი U და V ღია მიდამოები, რომ $U\bigcap V=\varnothing$. ცხადია, U და V არის $\underset{\alpha\in A}{\oplus} X_\alpha$ სივრცის ღია სიმრავლეები. იმ შემთხვევაში, როცა $x\in X_\alpha$ და $y\in X_{\alpha'}$, $\alpha\neq\alpha'$, მაშინ U და V სიმრავლეების როლში შეგვიძლია განვიხილოთ X_α და $X_{\alpha'}$ სივრცეები. აქედან გამომდინარე,

$\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ არის T_2-სივრცე.

iv). ვთქვათ $X_\sim, \sim\in A$ არის რეგულარული სივრცეები, ხოლო $x\in \underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ და $F\subset \underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ არის $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ სივრცის ისეთი წერტილი და ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $x\notin F$. თუ რომელიმე $\sim\in A$ ინდექსისთვის $x\in X_\sim$ და $F\subset X_\sim$, მაშინ არსებობს $X_\sim$ სივრცეში x წერტილის ისეთი U და F სიმრავლის ისეთი V მიდამოები, რომ $U\bigcap V=\varnothing$. ცხადია, U და V არის ღია სიმრავლეები $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ სივრცეში.

ახლა, ვთქვათ, $x\in X_{\sim'}$, $F\subset \underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ და $x\notin F$. ცხადია, $F\bigcap X_\sim$, $\sim\in A$ სიმრავლეები არის $X_\sim$ სივრცეების ჩაკეტილი სიმრავლეები. ვთქვათ $x\in X_{\sim'}$ შევნიშნოთ, რომ $X_{\sim'}$ სივრცეში არსებობს ისეთი $U_{\sim'}$ და $V_{\sim'}$ ღია სიმრავლეები, რომ $U_{\sim'}\bigcap V_{\sim'}=\varnothing$, $x\in U_{\sim'}$ და $F\bigcap X_{\sim'}\subset V_{\sim'}$. ნებისმიერი $\sim\neq\sim'$ ინდექსისთვის $F\bigcap X_\sim$ ჩაკეტილი სიმრავლის მიდამოს როლში განვიხილოთ $V_\sim = X_\sim$ სივრცეები. ვთქვათ $U=U_{\sim'}$ და $V=V_{\sim'}\bigcup(\underset{\sim\neq\sim'}{\bigcup} X_\sim)$. ცხადია, U სიმრავლე არის x წერტილის მიდამო, ხოლო V სიმრავლე F ჩაკეტილი სიმრავლის მიდამო $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ $U\bigcap V=\varnothing$. ამრიგად, $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ არის რეგულარული სივრცე.

v). ვთქვათ $X_\sim$, $\sim\in A$ არის სავსებით რეგულარული სივრცეები. განვიხილოთ $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ ჯამის ისეთი x წერტილი და F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $x\notin F$. არსებობს ისეთი $\sim'\in A$ ინდექსი, რომ $x\in X_{\sim'}$. თანაკვეთები $F\bigcap X_\sim$, $\sim\in A$ არის $X_\sim$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები. ცხადია, რომ $x\notin F\bigcap X_{\sim'}$. პირობის ძალით არსებობს ისეთი $f_{\sim'}: X_{\sim'}\to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f_{\sim'}(x)=0$ და $f_{\sim'}(y)=1$ ყოველი $y\in F\bigcap X_{\sim'}$ წერტილისთვის. ნებისმიერი $\sim\neq\sim'$ ინდექსისთვის განვიხილოთ $f_\sim : X_\sim\to I$ ფუნქციები, რომლებიც $X_\sim$ სივრცის ყოველ წერტილში ღებულობს ერთის ტოლ მნიშვნელობას. ცხადია, $f_\sim$, $\sim\in A$ ასახვათა კომბინირებული ჯამი $f=\underset{\sim\in A}{\nabla} f_\sim : \underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim\to I$ აკმაყოფილებს პირობებს $f(x)=0$ და $f(y)=1$ ნებისმიერი $y\in F$ წერტილისთვის. ეს კი ნიშნავს, რომ $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ არის სავსებით რეგულარული სივრცე.

vi). ვთქვათ $X_\sim$, $\sim\in A$ არის ნორმალური სივრცეები, ხოლო F_1 და F_2 არის $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_\sim$ სივრცის ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები. ყოველი $\sim\in A$ ინდექსისთვის $F_1\bigcap X_\sim$ და $F_2\bigcap X_\sim$ სიმრავლეებს, რომლებიც ჩაკეტილია $X_\sim$ სივრცეში, გააჩნიათ $U_\sim$ და $V_\sim$ ღია თანაუკვეთი

მიდამოები X_α სივრცეში. ვთქვათ $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ და $V = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$. ცხადია, U და V არის $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ სივრცეში ღია სიმრავლეები. ისინი, შესაბამისად, შეიცავენ F_1 და F_2 სიმრავლეებს და მათი თანაკვეთა არის ცარიელი სიმრავლე. აქედან გამომდინარე, $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ არის ნორმალური სივრცე.

vii). ვთქვათ X_α, $\alpha \in A$ არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცეები, ხოლო F_1 და F_2 არის $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ სივრცის Y ქვესივრცის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე. ცხადია, $F_1 \bigcap Y \bigcap X_\alpha$ და $F_2 \bigcap Y \bigcap X_\alpha$ არის X_α მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცის $Y \bigcap X_\alpha$ ქვესივრცის ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეები. პირობიდან გამომდინარე, მათ $Y \bigcap X_\alpha$ ქვესივრცეში გააჩნიათ ცარიელი თანაკვეთის მქონე U_α და V_α ღია მიდამოები. ცხადია, $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$ და $V = \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$ გაერთიანებები არის Y ქვესივრცის ისეთი ღია სიმრავლეები, რომ $F_1 \subset U$ და $F_2 \subset V$ და $U \bigcap V = \varnothing$. ამრიგად, Y არის ნორმალური ქვესივრცე. ეს კი ნიშნავს, რომ $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე.

viii).ვთქვათ X_α, $\alpha \in A$ არის სრუყოფილად ნორმალური სივრცეები, ხოლო F_1 და F_2 არის $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ ჯამის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე. X_α სივრცის $F_1 \bigcap X_\alpha$ და $F_2 \bigcap X_\alpha$ თანაუკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლეებისთვის, 3.1.24 თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი $f_\alpha : X_\alpha \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f_\alpha^{-1}(0) = F_1 \bigcap X_\alpha$ და $f_\alpha^{-1}(1) = F_2 \bigcap X_\alpha$. ასევე შევნიშნოთ, რომ f_α, $\alpha \in A$ ასახვების $f = \mathop{\nabla}\limits_{\alpha \in A} f_\alpha : \bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to I$ კომბინირებული ჯამი აკმაყოფილებს პირობებს $f^{-1}(0) = F_1$ და $f^{-1}(1) = F_2$. ამრიგად, $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ არის სრულყოფილად ნორმალური. □

ახლა ვნახოთ ტოპოლოგიურ სივრცეთა რომელ განცალების აქსიომებს გააჩნია მულტიპლიკაციურობის თვისება. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.2.4. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ დეკარტული ნამრავლი არის T_0-სივრცე, T_1-სივრცე, T_2-სივრცე, რეგულარული სივრცე და სავსებით რეგულარული სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $\alpha \in A$ ინდექსისთვის X_α ტოპოლოგიური სივრცეები შესაბამისად არის T_0-სივრცე, T_1-სივრცე, T_2-სივრცე, რეგულარული სივრცე და სავსებით რეგულარული სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ არის არაცარიელ სივრცეთა ნამრავლი. განვიხილოთ მისი $X^{*}_{\sim_0} = \prod\limits_{\sim\in A} A_{\sim}$ ქვესიმრავლე, სადაც ყოველი $\sim\neq\sim_0$ ინდექსისთვის $A_{\sim}$ არის ფიქსირებული $x_{\sim}$ წერტილი $X_{\sim}$ სივრცეში, ხოლო $A_{\sim_0} = X_{\sim_0}$. ცხადია, $p_{\sim_0} : \prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim} \to X_{\sim_0}$ პროექციის შემოსაზღვრა $X^{*}_{\sim_0}$ სიმრავლეზე $p_{\sim_0}|_{X^{*}_{\sim_0}} : X^{*}_{\sim_0} \to X_{\sim_0}$ არის ჰომეომორფიზმი. ამრიგად, ნებისმიერი $X_{\sim}$, $\sim\in A$ სივრცე შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლის ქვესივრცე. ამიტომ, 3.2.1 თეორემის თანახმად, თუ $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ არის T_0-სივრცე, T_1-სივრცე, T_2-სივრცე, რეგულარული სივრცე და სავსებით რეგულარული სივრცე, მაშინ ყოველი $\sim\in A$ ინდექსისთვის $X_{\sim}$ შესაბამისად არის T_0-სივრცე, T_1-სივრცე, T_2-სივრცე, რეგულარული სივრცე და სავსებით რეგულარული სივრცე.

ახლა ვაჩვენოთ შებრუნებული დებულების სამართლიანობა.

i). ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim\in A$ არის T_0-სივრცე, $x = (x_{\sim}), y = (y_{\sim}) \in \prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ და $x \neq y$. ცხადია, არსებობს ისეთი $\sim_0 \in A$ ინდექსი, რომ $x_{\sim_0} \neq y_{\sim_0}$. რადგან $X_{\sim_0}$ არის T_0-სივრცე, ამიტომ $x_{\sim_0}$ და $y_{\sim_0}$ წერტილებიდან ერთერთს, მაგალითად, $x_{\sim_0}$ წერტილს აქვს ისეთი $U_{\sim_0}$ მიდამო, რომ $y_{\sim_0} \notin U_{\sim_0}$.

ვთქვათ $U = \prod\limits_{\sim\in A} U_{\sim}$, სადაც $U_{\sim} = U_{\sim_0}$, როცა $\sim = \sim_0$ და $U_{\sim} = X_{\sim}$, როცა $\sim\neq\sim_0$. ცხადია, $x = (x_{\sim}) \in U$ და $y = (y_{\sim}) \notin U$. ამრიგად, $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ არის T_0-სივრცე.

ii). ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim\in A$ არის T_1-სივრცეები, ხოლო $x = (x_{\sim})$ და $y = (y_{\sim})$ არის $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლის ორი განსხვავებული წერტილი. ცხადია, რომელიმე $\sim_0 \in A$ ინდექსისთვის $x_{\sim_0} \neq y_{\sim_0}$. ამიტომ არსებობს $x_{\sim_0}$ წერტილის ისეთი $U_{\sim_0}$ და $y_{\sim_0}$ წერტილის ისეთი $V_{\sim_0}$ მიდამოები, რომ $y_{\sim_0} \notin U_{\sim_0}$ და $x_{\sim_0} \notin V_{\sim_0}$. განვიხილოთ $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ სივრცის $U = \prod\limits_{\sim\in A} U_{\sim}$ და $V = \prod\limits_{\sim\in A} V_{\sim}$ ღია სიმრავლეები, სადაც $U_{\sim} = U_{\sim_0}$ და $V_{\sim} = V_{\sim_0}$, თუ $\sim = \sim_0$, ასევე, $U_{\sim} = X_{\sim}$ და $V_{\sim} = X_{\sim}$, თუ $\sim\neq\sim_0$. ცხადია, $x = (x_{\sim}) \in U$ და $y = (y_{\sim}) \notin U$, ასევე $x = (x_{\sim}) \notin V$ და $y = (y_{\sim}) \in V$. ამრიგად, $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლი არის T_1-სივრცე.

iii). ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim\in A$ არის T_2-სივრცეები, ხოლო $x = (x_{\sim})$ და $y = (y_{\sim})$ არის $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ დეკარტული ნამრავლის ორი განსხვავებული

წერტილი. ვთქვათ $x_{\sim_0} \neq y_{\sim_0}$. პირობის ძალით, არსებობს მათი ისეთი $U_{\sim_0}$ და $V_{\sim_0}$ მიდამოები, რომ $U_{\sim_0} \bigcap V_{\sim_0} = \varnothing$. ვთქვათ $U = \prod\limits_{\sim \in A} U_{\sim}$ და $V = \prod\limits_{\sim \in A} V_{\sim}$, სადაც $U_{\sim} = U_{\sim_0}$ და $V_{\sim} = V_{\sim_0}$, თუ $\sim = \sim_0$, ასევე, $U_{\sim} = X_{\sim}$ და $V_{\sim} = X_{\sim}$, თუ $\sim \neq \sim_0$. ცხადია, $x = (x_{\sim}) \in U$, $y = (y_{\sim}) \in V$ და $U \bigcap V = \varnothing$. ამრიგად, $\prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim}$ ნამრავლი არის T_2-სივრცე.

iv). ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim \in A$ არის რეგულარული სივრცეები, ხოლო $x = (x_{\sim})$ და V არის $\prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim}$ ნამრავლის ისეთი წერტილი და ღია სიმრავლე, რომ $x \in V$. როგორც ვიცით, $\prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim}$ ნამრავლის ბაზისში არსებობს ისეთი U ელემენტი, რომ $x \in U \subset V$. ცხადია, $U = \prod\limits_{\sim \in A} U_{\sim}$, სადაც $U_{\sim_1} \subset X_{\sim_1}$, $U_{\sim_2} \subset X_{\sim_2}, \ldots,$ $U_{\sim_n} \subset X_{\sim_n}$ სასრული რაოდენობის $\sim = \sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_n$ ინდექსისთვის და $U_{\sim} = X_{\sim}$ ნებისმიერი $\sim \neq \sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_n$ ინდექსისთვის. პირობის ძალით, $\sim = \sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_n$ ინდექსებისთვის $X_{\sim_1}, X_{\sim_2}, \ldots, X_{\sim_n}$ სივრცეებში არსებობს ისეთი $G_{\sim_1}, G_{\sim_2}, \ldots, G_{\sim_n}$ ღია სიმრავლეები, რომ $x_{\sim_i} \in G_{\sim_i} \subset \overline{G}_{\sim_i} \subset U_{\sim_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. განვიხილოთ $x = (x_{\sim})$ წერტილის $G = \prod\limits_{\sim \in A} G_{\sim}$ მიდამო, სადაც ყოველი $\sim = \sim_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ინდექსისთვის $G_{\sim} = G_{\sim_i}$ და ყოველი $\sim \neq \sim_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ინდექსისთვის $G_{\sim} = X_{\sim}$. შევნიშნოთ, რომ

$$(x_{\sim}) \in \prod_{\sim \in A} G_{\sim} \subset \overline{\prod_{\sim \in A} G_{\sim}} = \prod_{\sim \in A} \overline{G}_{\sim} \subset \prod_{\sim \in A} U_{\sim} = U \subset V .$$

3.1.5 თეორემის თანახმად, $\prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim}$ ნამრავლი არის რეგულარული სივრცე.

v). ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim \in A$ სივრცეები არის სავსებით რეგულარული სივრცეები. განვიხილოთ $\prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim}$ ნამრავლის ნებისმიერი $x = (x_{\sim})$ წერტილი და მისი მომცველი, $\mathscr{P}$ წინარებაზისში შემავალი $p_{\sim_0}^{-1}(U_{\sim_0})$, $\sim_0 \in A$ სახის სიმრავლე, სადაც $U_{\sim_0}$ არის $X_{\sim_0}$ სივრცის ისეთი ღია სიმრავლე, რომ $x_{\sim_0} \in U_{\sim_0}$. რადგან $X_{\sim_0}$ არის სავსებით რეგულარული სივრცე, ამიტომ არსებობს ისეთი $f_{\sim_0} : X_{\sim_0} \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f_{\sim_0}(x_{\sim_0}) = 0$ და $f_{\sim_0}(X_{\sim_0} \setminus U_{\sim_0}) \subset \{1\}$. განვიხილოთ კომპოზიცია $f = f_{\sim_0} \circ p_{\sim_0} : \prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim} \to I$. ცხადია, $f((x_{\sim})) = 0$ და $f(y) = 1$ ნებისმიერი $y \in \prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim} \setminus p_{\sim_0}^{-1}(U_{\sim_0})$ წერტილისთვის. 3.1.6 თეორემის თანახმად, $\prod\limits_{\sim \in A} X_{\sim}$ დეკარტული ნამრავლი არის სავსებით რეგულარული სივრცე. □

შევნიშნოთ, რომ ნორმალურ, მემკვიდრეობით ნორმალურ და

სრულყოფილად ნორმალურ სივრცეთა როგორც ნებისმიერი, ისე სასრული დეკარტული ნამრავლები საზოგადოდ არაა ნორმალური, მემკვიდრეობით ნორმალური და სრულყოფილად ნორმალური სივრცეები, თუმცა სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.2.5. *თუ სივრცეთა $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ნამრავლი არის ნორმალური, მემკვიდრეობით ნორმალური და სრულყოფილად ნორმალური სივრცე, მაშინ X_α, $\alpha \in A$, სივრცეები შესაბამისად არის ნორმალური, მემკვიდრეობით ნორმალური და სრულყოფილად ნორმალური.*

დამტკიცება. წინა თეორემის მტკიცებისას ნაჩვენები იქნა, რომ ყოველი X_α, $\alpha \in A$ სივრცე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სივრცის ქვესივრცე X_α^*. შევნიშნოთ, თუ $i \geq 1$, მაშინ ყოველი X_α, $\alpha \in A$ ტოპოლოგიური T_i-სივრცე არის ჩაკეტილად და ჰომეომორფულად ჩადგმადი $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ნამრავლში. 3.2.2 თეორემის თანახმად, თუ $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ არის ნორმალური სივრცე, მაშინ X_α^* და, მაშასადამე, X_α სივრცე არის ნორმალური. ასევე, რადგან მემკვიდრეობით ნორმალურობა და სრულყოფილად ნორმალურობა არის მემკვიდრეობითი თვისება, ამიტომ X_α^* და, მაშასადამე, X_α სივრცე შესაბამისად არის მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე და სრულყოფილად ნორმალური სივრცე. □

ტოპოლოგიური თვისებები, რომლებსაც ინარჩუნებს ფაქტორ-სივრცის წარმოქმნის ოპერაცია, არის ის თვისებები, რომლებსაც ინარჩუნებს ფაქტორ-ასახვა. თავდაპირველად დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.2.6. *ტოპოლოგიური სივრცეების თვისება იყოს T_1-სივრცე, ნორმალური სივრცე, ან სრულყოფილად ნორმალური სივრცე არის ინვარიანტული ჩაკეტილი სურექციული ასახვების მიმართ.*

დამტკიცება.i). X სივრცის თვისება იყოს T_1-სივრცე შენარჩუნებადია ჩაკეტილი სურექციული ასახვებისას. ეს გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ყოველი ერთწერტილიანი ქვესივრცე $\{x\}$ ჩაკეტილია X სივრცეში და მისი ანასახი X სივრციდან Y სივრცეზე უწყვეტი ჩაკეტილი ასახვისას იქნება ჩაკეტილი Y სივრცეში, ე.ი. Y სივრცის ყოველი y წერტილი, როგორც რაიმე $x \in X$ წერტილის ანასახი, იქნება ჩაკეტილი სიმრავლე. ამრიგად, Y არის T_1-სივრცე.

ii). ვთქვათ $f: X \to Y$ არის ჩაკეტილი ასახვა X ნორმალური სივრცისა Y სივრცეზე. განვიხილოთ Y სივრცის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი F_1 და F_2 სიმრავლე. $f^{-1}(F_1)$ და $f^{-1}(F_2)$ ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეებისთვის X სივრცეში არსებობს

ისეთი U_1 და U_2 ღია სიმრავლეები, რომ $f^{-1}(F_1) \subset U_1$, $f^{-1}(F_2) \subset U_2$ და $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$. f ასახვის ჩაკეტილობის გამო Y სივრცეში არსებობს F_1 და F_2 სიმრავლეების ისეთი V_1 და V_2 მიდამოები, რომ $f^{-1}(V_1) \subset U_1$ და $f^{-1}(V_2) \subset U_2$. შევნიშნოთ, რომ

$$f^{-1}(V_1 \bigcap V_2) = f^{-1}(V_1) \bigcap f^{-1}(V_2) \subset U_1 \bigcap U_2 = \varnothing .$$

ამრიგად, $f^{-1}(V_1 \bigcap V_2) = \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$, ეს კი ნიშნავს, რომ Y არის ნორმალური სივრცე.

iii). ვთქვათ $f : X \to Y$ არის X სრულყოფილად ნორმალური სივრცის Y სივრცეზე ჩაკეტილი ასახვა. ცხადია, Y სივრცის ნებისმიერი U ღია სიმრავლის წინარესახე არის $F_\pm$ -ტიპის სიმრავლე, ე.ი. $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, სადაც F_i არის ჩაკეტილი სიმრავლე X სივრცეში. ყოველი $i = 1, 2, \ldots$ მთელი რიცხვისთვის $f(F_i)$ ანასახი არის ჩაკეტილი სიმრავლე Y სივრცეში. ამრიგად,

$$U = f(f^{-1}(U)) = f(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(F_i) .$$

ამრიგად, U არის $F_\pm$ -ტიპის სიმრავლე. ეს კი ნიშნავს, რომ Y არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე. □

იმისთვის, რომ X სივრციდან მივიღოთ გარკვეული თვისების მქონე X/E ფაქტორ-სივრცე, საჭირო ხდება გარკვეული დამატებითი პირობების მოთხოვნა E ექვივალენტობის მიმართებაზე. X ტოპოლოგიურ სივრცეზე E ექვივალენტობის მიმართებას ეწოდება ჩაკეტილი, თუ $q : X \to X/E$ ფაქტორ-ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა.

წინდადადება 3.2.7. *ვთქვათ E არის ექვივალენტობის მიმართება X ტოპოლოგიურ სივრცეზე. $q : X \to X/E$ ფაქტორ-ასახვა ჩაკეტილია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის გაერთიანება ყველა იმ კლასებისა, რომლებიც კვეთს F სიმრავლეს, არის ჩაკეტილი X სივრცეში.*

დამტკიცება. ვთქვათ $q : X \to X/E$ არის ჩაკეტილი ფაქტორ-ასახვა, ხოლო F სიმრავლე X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. $q(F)$ ჩაკეტილი სიმრავლის წინარესახე $q^{-1}(q(F))$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ცხადია, $q^{-1}(q(F))$ არის გაერთიანება ყველა იმ ექვივალენტობის კლასებისა, რომლებიც იკვეთება F სიმრავლესთან, ე.ი. ის არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

ვთქვათ, შებრუნებით, F არის X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. $q(F)$ ანასახი არის ჩაკეტილი X/E ფაქტორ-სივრცეში, რადგან მისი $q^{-1}(q(F))$ წინარესახე, როგორც F სიმრავლესთან თანაკვეთადი

ექვივალენტობის კლასების გაერთიანება, პირობის თანახმად, არის ჩაკეტილი სიმრავლე. □

სამართლიანია შემდეგი მარტივი დებულებები.

წინდადადება 3.2.8. *ვთქვათ E არის ექვივალენტობის მიმართება X ტოპოლოგიურ სივრცეზე. X/E ფაქტორ-სივრცე არის T_1-სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ექვივალენტობის კლასები არის X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები.* □

წინდადადება 3.2.9. *თუ X სივრცე არის ნორმალური სივრცე, ხოლო E ჩაკეტილი ექვივალენტობის მიმართება X სივრცეზე, მაშინ X/E ფაქტორ-სივრცე არის ნორმალური.* □

სავარჯიშო 3.2.10. 1). აჩვენეთ, თუ Y არის X რეგულარული ტოპოლოგიური სივრცის მკვრივი ქვესივრცე, მაშინ ნებისმიერი $y \in Y$ წერტილისთვის $¡(Y,y) = ¡(X,y)$.

2). აჩვენეთ, ნორმალურობა არის მემკვიდრეობითი თვისება $F_{\pm}$-ტიპის სიმრავლეების მიმართ.

3).აჩვენეთ, თუ $X_{\sim}$, $\sim \in A$ ტოპოლოგიური სივრცეები დისკრეტულია, მაშინ $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ ჯამი აგრეთვე არის დისკრეტული სივრცე.

4).აჩვენეთ, ნამდვილ რიცხვთა ღერძი $\mathbb{R}$ შეუძლებლია წარმოდგეს როგორც არაცარიელი X_1 და X_2 სიმრავლეების $X_1 \oplus X_2$ ჯამი.

5).ვთქვათ $f_i : X \to Y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ არის ჩაკეტილი ასახვები Y_1 ტოპოლოგიურ T_1-სივრცეში და Y_2, $Y_3, \ldots, Y_n$ რეგულარულ სივრცეებში. აჩვენეთ, $\overset{n}{\underset{i=1}{\Delta}} f_i : X \to \prod_{i=1}^{n} Y_i$ არის ჩაკეტილი ასახვა.

6).აჩვენეთ, X ტოპოლოგიური სივრცე არის T_2-სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \times X$ ნამრავლის დიაგონალი $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე.

7).ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე. განვსაზღვროთ E ექვივალენტობის მიმართება X სივრცეზე:

$$xEy \Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}},\ x, y \in X\ .$$

აჩვენეთ, X/E ფაქტორ-სივრცე არის T_0-სივრცე.

8).ვთქვათ E არის ექვივალენტობის მიმართება X ტოპოლოგიურ სივრცეზე. აჩვენეთ, თუ X/E ფაქტორ-სივრცე არის T_2-სივრცე, მაშინ E არის $X \times X$ ნამრავლის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე.

9).აჩვენეთ, თუ $f_s : X \to Y_s$, $s \in S$ ასახვათა დიაგონალური ნამრავლი არის ღია ასახვა, მაშინ f_s, $s \in S$ ასახვები აგრეთვე არის ღია ასახვები.

10).აჩვენეთ, რომ ნორმალური სივრცის ნებისმიერ ორ ჩაკეტილ თანაუკვეთ სიმრავლეს გააჩნია თანაუკვეთი ჩაკეტვების მქონე ღია მიდამოები.

3.3.კომპაქტური,ლოკალურად კომპაქტური და პარაკომპაქტური სივრცეები, კომპაქტური გაფართოებები

ეს პარაგრაფი ეხება ტოპოლოგიურ სივრცეთა იმ კლასებს, რომლებიც განიმარტება დაფარვების მეშვეობით. აქ აღწერილია კომპაქტურ და მათ მონათესავე, ლოკალურად კომპაქტურ და პარაკომპაქტურ სივრცეთა ძირითადი თვისებები. გარდა ამისა, აგებულია ტოპოლოგიურ სივრცეთა კომპაქტური გაფართოებები, ე.წ. სტოუნ-ჩეხის კომპაქტური გაფართოება და ალექსანდროვის ერთწერტილიანი კომპაქტური გაფართოება.

I. კომპაქტური სივრცეები

ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცის $\alpha = \{U_s\}_{s\in S}$ დაფარვა ჩაწერილია მის $\beta = \{V_t\}_{t\in T}$ დაფარვაში, თუ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის არსებობს ისეთი $t \in T$ ინდექსი, რომ $U_s \subseteq V_t$. ამ შემთხვევაში გამოვიყენებთ აღნიშვნას $\alpha \geq \beta$ ან $\beta \leq \alpha$.

X ტოპოლოგიური სივრცის ყველა დაფარვების სიმრავლე არის წინარედალაგებული სიმრავლე. მართლაც, $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ დაფარვის ყოველი U_s ელემენტისთვის $U_s \subseteq U_s$. ამიტომ $\sim \leq \sim$. ვთქვათ $\sim \leq \quad = \{V_t\}_{t\in T}$ და $\leq ¥ = \{W_r\}_{r\in R}$, მაშინ ნებისმიერი $r \in R$ ინდექსისთვის არსებობს ისეთი $t \in T$, რომ $W_r \subseteq V_t$. ასევე, $t \in T$ ინდექსისთვის არსებობს ისეთი $s \in S$ ინდექსი, რომ $V_t \subseteq U_s$. ამრიგად, $W_r \subseteq U_s$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\sim \leq ¥$.

X ტოპოლოგიური სივრცის ყველა დაფარვების სიმრავლე არ არის დალაგებული სიმრავლე, რადგან, თუ $\sim \leq$ და $\leq \sim$, მაშინ საზოგადოდ $\sim \neq$. ვთქვათ $|X| \geq 2$. X სივრცის $\sim = \{X, U\}$ და $= \{X, V\}$ დაფარვებისთვის, სადაც U და V არის X სივრცის განსხვავებული ქვესიმრავლეები, სრულდება $\sim \leq$ და $\geq \sim$ მიმართებები, მაგრამ $\sim \neq$.

X ტოპოლოგიური სივრცის ყველა დაფარვების სიმრავლე არის მიმართული სიმრავლე. მართლაც, X სივრცის ნებისმიერი ორი $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ და $= \{V_t\}_{t\in T}$ დაფარვისთვის, დაფარვა $¥ = \{W_{(s,t)}\}_{(s,t)\in S\times T}$, სადაც $W_{(s,t)} = U_s \bigcap V_t$, $(s,t) \in S \times T$ ჩაწერილია როგორც $\sim$, ისე დაფარვებში, რადგან $W_{(s,t)} \subseteq U_s$ და $W_{(s,t)} \subseteq V_t$.

X ტოპოლოგიური სივრცის $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ დაფარვას ეწოდება

$=\{V_t\}_{t\in T}$ დაფარვის ქვედაფარვა, თუ ~ დაფარვის ნებისმიერი U_s ელემენტი ეკუთვნის დაფარვას.

ცხადია, ყოველი დაფარვის ქვედაფარვა ჩაწერილია მასში.

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კომპაქტური სივრცე, თუ მის ყოველ ღია დაფარვაში შეიძლება ჩაიწეროს სასრული ღია დაფარვა.

წინადადება 3.3.1. *ტოპოლოგიური სივრცე კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მის ყოველ ღია დაფარვას გააჩნია სასრული ღია ქვედაფარვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის კომპაქტური სივრცე, ხოლო $\sim=\{U_s\}_{s\in S}$ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვა. პირობის ძალით არსებობს ~ დაფარვაში ჩაწერილი $=\{V_1,V_2,...,V_n\}$ სასრული ღია დაფარვა. ყოველი $V_i, i=1,2,...,n$ სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $U_{s_i}\in\sim$, $i=1,2,...,n$ ელემენტი, რომ $V_i\subseteq U_{s_i}$. სისტემა $\sim=\{U_{s_1},U_{s_2},...,U_{s_n}\}$ არის ~ ღია დაფარვის ქვედაფარვა, რადგან $X=\bigcup_{i=1}^{n}V_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}U_{s_i}$ ჩართვიდან მიიღება $X=\bigcup_{i=1}^{n}U_{s_i}$ ტოლობა.

ვთქვათ, შებრუნებით, X ტოპოლოგიური სივრცის ყოველ $\sim=\{U_s\}_{s\in S}$ ღია დაფარვას გააჩნია $=\{V_1,V_2,...,V_n\}$ სასრული ქვედაფარვა. ცხადია, სასრული ღია დაფარვა ჩაწერილია ~ დაფარვაში. ამრიგად, X სივრცე არის კომპაქტური სივრცე. □

ახლა მოვიყვანოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ ტოპოლოგიური სივრცე იყოს კომპაქტური.

თეორემა 3.3.2. *ტოპოლოგიური სივრცე კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერ ცენტრირებულ სისტემას გააჩნია არაცარიელი თანაკვეთა.*

დამტკიცება. ვთქვათ X ტოპოლოგიური სივრცე არის კომპაქტური სივრცე. განვიხილოთ X სივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი $\{F_s\}_{s\in S}$ ცენტრირებული სისტემა. ვაჩვენოთ $\bigcap_{s\in S}F_s\neq\varnothing$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $\bigcap_{s\in S}F_s=\varnothing$. ცხადია, X სივრცის $X\setminus F_s$, $s\in S$ ღია სიმრავლეთა $\sim=\{X\setminus F_s\}_{s\in S}$ ოჯახი არის ღია დაფარვა. მართლაც, დე მორგანის ფორმულის თანახმად,

$$\bigcup_{s\in S}(X\setminus F_s)=X\setminus\bigcap_{s\in S}F_s=X\setminus\varnothing=X\,.$$

პირობის თანახმად, ~ დაფარვას გააჩნია სასრული ქვედაფარვა $\{X\setminus F_{s_1},X\setminus F_{s_2},...,X\setminus F_{s_n}\}$, ე.ი. $X=\bigcup_{i=1}^{n}(X\setminus F_{s_i})$. აქედან გამომდინარე, დე მორგანის ფორმულის თანახმად, $X=X\setminus\bigcap_{i=1}^{n}F_{s_i}$. ამრიგად, $\bigcap_{i=1}^{n}F_{s_i}=\varnothing$. ეს

ნიშნავს, რომ $\{F_s\}_{s\in S}$ ოჯახი არაა ცენტრირებული, ე.ი. დაშვება არასწორია. ამიტომ $\bigcap\limits_{s\in S} F_s \neq \varnothing$.

ვთქვათ, შებრუნებით, X ტოპოლოგიური სივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერ ცენტრირებულ სისტემას გააჩნია არაცარიელი თანაკვეთა. ვაჩვენოთ X სივრცე არის კომპაქტური. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ X სივრცე არაა კომპაქტური, მაშინ არსებობს ისეთი $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ ღია დაფარვა, რომლიდანაც ვერ გამოვყოფთ სასრულ $U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_n}$ ქვედაფარვას, ე.ი. ნებისმიერი ასეთი ქვესისტემისთვის $X \neq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$. ცხადია,

$$\varnothing \neq X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} (U_{s_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus U_{s_i}).$$

ამიტომ $\{X \setminus U_s\}_{s\in S}$ ჩაკეტილ სიმრავლეთა სისტემა არის ცენტრირებული. პირობის თანახმად, $\bigcap\limits_{s\in S} (X \setminus U_s) \neq \varnothing$. დე მორგანის ფორმულის ძალით

$$\varnothing \neq \bigcap_{s\in S} (X \setminus U_s) = X \setminus \bigcup_{s\in S} U_s .$$

აქედან გამომდინარე, ღია სიმრავლეთა $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ ოჯახი არაა X სივრცის დაფარვა, ამრიგად, ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. X სივრცე არის კომპაქტური. □

თავდაპირველად მოვიყვანოთ არაკომპაქტური სივრცის მაგალითი.

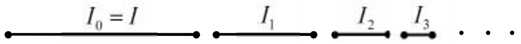
მაგალითი 3.3.3. ვთქვათ X არის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე ნამდვილ რიცხვთა ღერძი $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. განვიხილოთ $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის ღია დაფარვა $\sim = \{(n, n+2)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

$\sim$ დაფარვას გამოვაკლოთ რომელიმე $(n', n'+2)$ ინტერვალი, მაშინ $\sim$ ოჯახის დარჩენილი $\sim' = \{n, n+2\}_{n\in Z} \setminus \{(n', n'+2)\}$ ქვეოჯახი არ იქნება $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის დაფარვა, რადგან $n'+1$ რიცხვის შესაბამის წერტილს არ შეიცავს $\sim'$ ქვეოჯახის არც ერთი ელემენტი. ამიტომ $\sim$ დაფარვას არ გააჩნია სასრული ქვედაფარვა.

ახლა კი მოვიყვანოთ კომპაქტური სივრცის მაგალითი.

მაგალითი 3.3.4. ვთქვათ $X = I_0 = [0,1]$. ვაჩვენოთ, რომ I_0 კომპაქტურია. დავუშვათ X არაა კომპაქტური, მაშინ არსებობს მისი ისეთი $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ ღია დაფარვა, რომლიდანაც შეუძლებელია სასრული ქვედაფარვის გამოყოფა. I_0 მონაკვეთი გავყოთ ორ $[0, 1/2]$ და $[1/2, 1]$ მონაკვეთად. ამ ორი მონაკვეთიდან ერთერთი მაინც არ დაიფარება $\sim$ დაფარვის სასრული რაოდენობის ელემენტებით. ეს მონაკვეთი აღვნიშნოთ I_1 სიმბოლოთი. I_1 მონაკვეთი გავყოთ შუაზე, ორ ტოლ მონაკვეთად. მიღებული მონაკვეთებიდან, რომელთა სიგრძეა $1/4$,

ერთერთი მაინც არ დაიფარება ~ დაფარვის სასრული რაოდენობის ელემენტებით. ეს მონაკვეთი აღვნიშნოთ I_2 სიმბოლოთი. ამ პროცესის გაგრძელებით მიიღება $I_0, I_1, I_2, \ldots$ თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა.



ცხადია, ყოველი I_k, $k = 0,1,2,\ldots$ სეგმენტის სიგრძეა $1/2^k$, $I_k \supset I_{k+1}$ და არცერთი I_k არ იფარება ~ დაფარვის სასრული რაოდენობის ელემენტებით. ამ მონაკვეთების საერთო x წერტილი დაიფარება ~ დაფარვის რაიმე U_s ელემენტით. ცხადია, არსებობს ისეთი $£ = 1/2^k$ დადებითი რიცხვი, რომ $(x-£, x+£) \subset U_s$. აქედან გამომდინარე, ასევე არსებობს ისეთი $l > k$ რიცხვი, რომ ყოველი I_l სეგმენტი მდებარეობს $£$ -მიდამოში და, მაშასადამე, U_s ელემენტში. ეს კი ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ ყოველი I_k სეგმენტი არ იფარება ~ დაფარვის სასრული რაოდენობის ელემენტებით. ამრიგად, ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. $[0,1]$ მონაკვეთი არის კომპაქტური.

მაგალითი 3.3.5. $X = I_0^2 = [0,1] \times [0,1]$ კვადრატი არის კომპაქტური. შემოწმება მიმდინარეობს ანალოგიურად, X კვადრატის $I_0^2, I_1^2, I_2^2, \ldots$ თავმოყრილ კვადრატთა მიმდევრობის აგებით.

მაგალითი 3.3.6. ნამდვილ რიცხვთა ღერძის $X = \{0\} \bigcup \{1/n \mid n = 1,2,\ldots\}$ ქვესივრცე არის კომპაქტური სივრცე.

გამოვიყენოთ ის ფაქტი, რომ $\lim\limits_{x\to\infty} 1/n = 0$. X სივრცის ნებისმიერი $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ ღია დაფარვის რომელიმე U_{s_0} ელემენტი შეიცავს 0 რიცხვს. ცხადია, არსებობს ისეთი $£ > 0$ რიცხვი, რომ $(x-£, x+£) \subset U_{s_0}$. ზღვრის განმარტების თანახმად, მოიძებნება $£$ რიცხვის შესაბამისი ისეთი n_0 ნატურალური რიცხვი, რომ ყოველი $n > n_0$ რიცხვისთვის $1/n \in U_{s_0}$. ახლა განვიხილოთ $1, 1/2, \ldots, 1/n_0$ რიცხვების მომცველი $U_1, U_2, \ldots, U_{n_0}$ ელემენტები ~ დაფარვიდან. ოჯახი $\sim' = \{U_{s_0}, U_1, U_2, \ldots, U_{n_0}\}$ არის X ქვესივრცის ~ დაფარვის სასრული ქვედაფარვა. ამრიგად, X არის კომპაქტური სივრცე.

თეორემა 3.3.7. *X ტოპოლოგიური სივრცის Y ქვესივრცე კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცის ღია ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახიდან, რომელთა გაერთიანება მოიცავს Y ქვესივრცეს, შეიძლება გამოვყოთ სასრული ქვეოჯახი, რომლის ელემენტთა გაერთიანება მოიცავს Y ქვესივრცეს.*

დამტკიცება. ვთქვათ Y არის X სივრცის კომპაქტური ქვესივრცე, ხოლო $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ არის X სივრცის ღია სიმრავლეთა ისეთი ოჯახი,

რომ $\bigcup_{s\in S} U_s \supseteq Y$. ცხადია, $\{U_s \bigcap Y\}_{s\in S}$ არის Y ქვესივრცის ღია დაფარვა. პირობის თანახმად, მას გააჩნია $\{U_{s_1} \bigcap Y, U_{s_2} \bigcap Y, ..., U_{s_n} \bigcap Y\}$ სასრული ქვედაფარვა. აქედან გამომდინარე, $\{U_{s_1}, U_{s_2}, ..., U_{s_n}\}$ არის ~ ოჯახის ისეთი ქვეოჯახი, რომ $\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} \supseteq Y$.

ვთქვათ, შებრუნებით, X სივრცის Y ქვესივრცისთვის სრულდება პირობა, X სივრცის ღია ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახიდან, რომელთა გაერთიანება მოიცავს Y ქვესივრცეს, გამოიყოფა სასრული ქვეოჯახი, რომლის ელემენტთა გაერთიანება მოიცავს Y ქვესივრცეს. ვაჩვენოთ Y არის კომპაქტური სივრცე. ვთქვათ $=\{V_s\}_{s\in S}$ არის Y ქვესივრცის ღია დაფარვა. განვიხილოთ X სივრცის ღია ქვესიმრავლეთა ოჯახი $\sim =\{U_s\}_{s\in S}$, სადაც U_s , $s \in S$ არის ისეთი ღია სიმრავლეები, რომ $U_s \bigcap Y = V_s$, $s \in S$. პირობის ძალით, ~ ოჯახიდან გამოიყოფა ისეთი $\{U_{s_1}, U_{s_2}, ..., U_{s_n}\}$ ქვეოჯახი, რომ $\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} \supseteq Y$. ცხადია,

$$\{V_{s_1} = U_{s_1} \bigcap Y, V_{s_2} = U_{s_2} \bigcap Y, ..., V_{s_n} = U_{s_n} \bigcap Y\}$$

არის დაფარვის სასრული ქვედაფარვა. □

განვიხილოთ კომპაქტური სივრცის ზოგიერთი თვისება. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.

თეორემა 3.3.8. *კომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე არის კომპაქტური.*

დამტკიცება. ვთქვათ Y არის X კომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. Y ქვესივრცის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი $\{F_s\}_{s\in S}$ ცენტრირებული სისტემა იქნება X სივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ცენტრირებული სისტემა. X სივრცის კომპაქტურობის გამო $\bigcap_{s\in S} F_s \neq \varnothing$. ამრიგად, 3.3.2 თეორემის თანახმად, Y ქვესივრცე არის კომპაქტური. □

შევნიშნოთ, რომ 3.3.8 თეორემა მარტივად მტკიცდება 3.3.7 თეორემის გამოყენებით.

ამისთვის განვიხილოთ X სივრცის $\{U_s\}_{s\in S}$ ღია სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახი, რომლის ელემენტთა გაერთიანება მოიცავს Y ქვესივრცეს. ცხადია, $\{U_s, X \setminus Y\}_{s\in S}$ არის X სივრცის ღია დაფარვა. 3.3.7 თეორემიდან გამომდინარეობს Y ქვესივრცის კომპაქტურობა.

აგრეთვე შევნიშნოთ, რომ სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე შეიძლება არ იყოს ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ასე მაგალითად, ანტიდისკრეტული სივრცის ნებისმიერი ქვესიმრავლე არის კომპაქტური, მაგრამ არაა ჩაკეტილი მთელ სივრცეში. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3.3.9. *ჰაუსდორფის სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე*

არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ჰაუსდორფის სივრცე, ხოლო Y მისი კომპაქტური ქვესიმრავლე. ვაჩვენოთ, რომ $X \setminus Y$ დამატების ნებისმიერ x წერტილს და Y ქვესიმრავლეს გააჩნია თანაუკვეთი მიდამოები. X სივრცის ჰაუსდორფულობის გამო x წერტილს და $y \in Y$ წერტილს გააჩნიათ ისეთი U_y^x და V_y მიდამოები, რომ $x \in U_y^x$, $y \in V_y$ და $U_y^x \bigcap V_y = \varnothing$. Y ქვესივრცის კომპაქტურობის გამო $\{V_y\}_{y \in Y}$ დაფარვიდან გამოიყოფა $\{V_{y_1}, V_{y_2}, ..., V_{y_n}\}$ სასრული ღია ქვედაფარვა. განვიხილოთ x წერტილის $U_{y_1}^x, U_{y_2}^x, ..., U_{y_n}^x$ მიდამოთა სისტემა. ვთქვათ $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}^x$ და $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. ცხადია, $x \in U$, $Y \subset V$ და $U \bigcap V = \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $U \bigcap Y = \varnothing$. ე.ი. $U \subset X \setminus Y$. ამრიგად, $X \setminus Y$ დამატების ნებისმიერი x წერტილი არის მისი შიგა წერტილი. ეს კი ნიშნავს, $X \setminus Y$ არის ღია სიმრავლე და, მაშასადამე, Y არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. □

თეორემის დამტკიცებისას ჩვენ ფაქტიურად ვაჩვენეთ შემდეგი წინადადება.

წინადადება 3.3.10. *ჰაუსდორფის სივრცის ნებისმიერ წერტილსა და მის არამომცველ ნებისმიერ კომპაქტურ ქვესიმრავლეს გააჩნიათ თანაუკვეთი ღია მიდამოები.* □

წინადადება 3.3.11. *ჰაუსდორფის სივრცის თანაუკვეთ კომპაქტურ ქვესიმრავლეებს გააჩნიათ თანაუკვეთი მიდამოები.*

დამტკიცება. ვთქვათ F_1 და F_2 არის X ჰაუსდორფის სივრცის თანაუკვეთი კომპაქტური ქვესიმრავლეები. 3.3.10 წინადადების თანახმად $x \in F_1$ წერტილს და F_2 კომპაქტურ სიმრავლეს გააჩნიათ U_x და $V_x^{F_2}$ თანაუკვეთი მიდამოები. F_1 ქვესიმრავლის $\{U_x\}_{x \in F_1}$ ღია დაფარვიდან გამოვყოთ $\{U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}\}$ სასრული ქვედაფარვა და განვიხილოთ F_2 სიმრავლის მიდამოთა $\{V_{x_1}^{F_2}, V_{x_2}^{F_2}, ..., V_{x_n}^{F_2}\}$ სასრული სისტემა. ვთქვათ $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ და $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{s_i}^{F_2}$. ცხადია, $F_1 \subset U$, $F_2 \subset V$ და $U \bigcap V = \varnothing$. □

3.3.9 და 3.3.11 წინადადებებიდან გამომდინარეობს

თეორემა 3.3.12. *ჰაუსდორფის კომპაქტური სივრცე არის ნორმალური სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ F_1 და F_2 არის X ჰაუსდორფის კომპაქტური სივრცის თანაუკვეთი ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები. 3.3.9 წინადადების თანახმად, F_1 და F_2 არის კომპაქტური ქვესიმრავლეები. 3.3.11 წინადადების თანახმად კი მათ გააჩნიათ თანაუკვეთი ღია მიდამოები. ამრიგად, X არის ნორმალური სივრცე. □

წინადადება 3.3.13. *X რეგულარული სივრცის F_1 ჩაკეტილ ქვესიმრავლესა და მასთან თანაუკვეთ F_2 კომპაქტურ ქვესიმრავლეს გააჩნიათ თანაუკვეთი ღია მიდამოები.*

დამტკიცება. X სივრცის რეგულარულობის გამო ნებისმიერ $x \in F_2$ წერტილს და F_1 სიმრავლეს გააჩნიათ თანაუკვეთი U_x და $V_x^{F_1}$ ღია მიდამოები. ამის შემდეგ ამ წინადადების მტკიცების დანარჩენი ნაწილი მიმდინარეობს 3.3.11 წინადადების მტკიცების მსგავსად. □

თეორემა 3.3.14. *X სავსებით რეგულარული სივრცის F კომპაქტური და G ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეებისთვის არსებობს ისეთი $f : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ ნებისმიერი $x \in F$ წერტილისთვის $f(x) = 0$ და ნებისმიერი $y \in G$ წერტილისთვის $f(y) = 1$.*

დამტკიცება. ყოველი $x \in F$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $f_x : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f_x(x) = 0$ და $f_x(y) = 0$, $y \in G$. შევნიშნოთ, რომ $[0,1]$ სეგმენტის $[0,1/2)$ ღია სიმრავლის წინარესახე $f_x^{-1}([0,1/2))$ მოიცავს x წერტილს. ცხადია, $F \subset \bigcup_{x \in F} f_x^{-1}([0,1/2))$. ამიტომ 3.3.7 წინადადების თანახმად, $\{f_x^{-1}([0,1/2))\}_{x\in F}$ დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა

$$\{f_{x_1}^{-1}([0,1/2)), f_{x_2}^{-1}([0,1/2)), \dots, f_{x_n}^{-1}([0,1/2))\}.$$

ვთქვათ, $g : X \to I$ არის ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$g(x) = \min\{f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x)\}, x \in X.$$

ცხადია, g არის უწყვეტი ასახვა და აკმაყოფილებს $F \subset g^{-1}([0,1/2))$ და $g(G) \subset \{1\}$ პირობებს.

ასევე განვიხილოთ $f : X \to I$ ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$f(x) = 2 \cdot \max\{g(x) - 1/2, 0\},\ x \in X\ .$$

ცხადია, $f(x) = 0$, როცა $x \in F$ და $f(x) = 1$, როცა $x \in G$. □

ახლა განვიხილოთ კომპაქტურ სივრცეებზე განსაზღვრული უწყვეტი ასახვების ზოგიერთი თვისება. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.

წინადადება 3.3.15. *თუ $f : X \to Y$ არის X კომპაქტური სივრცის Y სივრცეში უწყვეტი ასახვა, მაშინ $f(X)$ ანასახი არის Y სივრცის კომპაქტური ქვესივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\{U_s\}_{s\in S}$ არის Y სივრცის ღია სიმრავლეთა ისეთი ოჯახი, რომ $\bigcup_{s\in S} U_s \supseteq f(X)$. ცხადია, f ასახვის მიმართ $U_s, s \in S$ ღია სიმრავლეების $f^{-1}(U_s)$, $s \in S$ წინარესახეები არის X სივრცის ღია სიმრავლეები, ხოლო $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in S}$ სისტემა არის X სივრცის ღია დაფარვა. X სივრცის კომპაქტურობის გამო ამ დაფარვიდან შეგვიძლია

გამოვყოთ სასრული ქვედაფარვა $\{f^{-1}(U_{s_1}), f^{-1}(U_{s_2}),..., f^{-1}(U_{s_n})\}$. ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი $X=\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{s_i})$ ტოლობა. ცხადია, $\{U_{s_1}, U_{s_2},..., U_{s_n}\}$ ქვეოჯახი აკმაყოფილებს პირობას $\bigcup_{i=1}^{n} U_{s_i} \supseteq f(X)$. ამიტომ 3.3.7 თეორემის თანახმად, $f(X)$ არის Y სივრცის კომპაქტური ქვესივრცე. □

წინადადება 3.3.16. *თუ $f: X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა X კომპაქტური სივრცისა Y ჰაუსდორფის სივრცეში, მაშინ X სივრცის ყოველი A ქვესიმრავლისთვის $f(\bar{A})=\overline{f(A)}$.*

დამტკიცება. ჩართვიდან $A \subset \bar{A}$ მიიღება $f(A) \subset f(\bar{A})$. ცხადია, X კომპაქტური სივრცის $\bar{A}$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლე არის კომპაქტური. ამიტომ კომპაქტური იქნება $f(\bar{A})$ ანსახი. გარდა ამისა, $f(\bar{A})$ ანსახი Y ჰაუსდორფის სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა. ამიტომ $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\bar{A})} = f(\bar{A})$. როგორც ვიცით სამართლიანია ჩართვა $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. ამრიგად, $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$. □

ამ წინადადებიდან მიიღება შემდეგი

თეორემა 3.3.17. *კომპაქტური სივრცის ჰაუსდორფის სივრცეში უწყვეტი ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა.*

დამტკიცება. X კომპაქტური სივრცის A ჩაკეტილი სიმრავლის $f: A \to Y$ უწყვეტი ასახვის მიმართ $f(A)$ ანსახი აკმაყოფილებს პირობას $f(A)=f(\bar{A})=\overline{f(A)}$. ამრიგად, $f(A)$ ჩაკეტილი სიმრავლეა, რაც ნიშნავს, რომ f არის ჩაკეტილი ასახვა. □

დამტკიცებული დებულებებიდან გამომდინარეობს

თეორემა 3.3.18. *კომპაქტური სივრცის ჰაუსდორფის სივრცეზე ურთიერთცალსახა უწყვეტი ასახვა არის ჰომეომორფიზმი.* □

ამრიგად, ტოპოლოგიური სივრცის თვისება იყოს კომპაქტური, არის ტოპოლოგიური ინვარიანტი.

ახლა ვნახოთ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი და ნამრავლი რა შემთხვევაში ინარჩუნებს შესაკრებ თანამამრავლ სივრცეთა კომპაქტურობის თვისებას.

თეორემა 3.3.19. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ არის კომპაქტური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $X_{\sim}$ სივრცე არის კომპაქტური და $|A|<\aleph_0$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ ჯამი არის კომპაქტური სივრცე. ამ შემთხვევაში ყოველი $X_{\sim}$ სივრცე, როგორც $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, იქნება კომპაქტური. ცხადია, $|A|<\aleph_0$, რადგან $\{X_{\sim}\}_{\sim\in A}$

ღია, წყვილწყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეებისგან შედგენილ დაფარვას არ ექნება სასრული დაფარვა, თუ $|A| \geq \aleph_0$.

ვთქვათ $A=\{1,2,...,n\}$ და X_i არის კომპაქტური სივრცე ყოველი $i \in A$ ინდექსისთვის. განვიხილოთ $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} X_i$ ჯამის ნებისმიერი $\sim =\{U_s\}_{s\in S}$ ღია დაფარვა. ყოველი X_i , $1 \leq i \leq n$ სივრცის კომპაქტურობის გამო $\{U_s \bigcap X_i\}_{s\in S}$ ღია დაფარვიდან შეგვიძლია გამოვყოთ სასრული ქვედაფარვა $\{U_{s_1^i} \bigcap X_i, U_{s_2^i} \bigcap X_i, ..., U_{s_{n_i}^i} \bigcap X_i\}_{s\in S}$. ცხადია, $\{U_{s_j^i}\}$ სიმრავლეები, სადაც $i=1,2,...,n$ და $j=1,2,...,n_i$ ქმნის $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} X_i$ სივრცის $\sim$ დაფარვის სასრულ ქვედაფარვას. ამრიგად, კომპაქტურ სივრცეთა $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} X_i$ ჯამი არის კომპაქტური სივრცე. □

ახლა დავამტკიცოთ ზოგადი ტოლოპოგიისთვის და, საერთოდ, ტოპოლოგიისთვის ფუნდამენტური მნიშვნელობის თეორემა კომპაქტურ სივრცეთა ნამრავლის შესახებ.

თეორემა 3.3.20. (ტიხონოვი). *კომპაქტურ სივრცეთა ნამრავლი კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული თანამამრავლი სივრცე არის კომპაქტური სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim \in A$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ნამრავლი $\prod_{\sim\in A} X_{\sim}$ არის კომპაქტური. 3.3.15 თეორემის თანახმად $p_{\sim} : \prod_{\sim\in A} X_{\sim} \to X_{\sim}$ უწყვეტი ასახვის მიმართ $p_{\sim}(\prod_{\sim\in A} X_{\sim}) = X_{\sim}$ ანასახი არის კომპაქტური სივრცე.

ვთქვათ, შებრუნებით, $X_{\sim}$, $\sim \in A$ ტოპოლოგიური სივრცე არის კომპაქტური. ვაჩვენოთ, მის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერ $\mathscr{F}_0$ ცენტრირებულ სისტემას გააჩნია არაცარიელი თანაკვეთა. $\prod_{\sim\in A} X_{\sim}$ სივრცის ქვესიმრავლეთა $\mathscr{F}_0$ სისტემის თვისება იყოს ცენტრირებული, არის სასრული ხასიათის თვისება. ამიტომ ტეიხმიულერი-ტიუკის ლემის თანახმად, არსებობს $\prod_{\sim\in A} X_{\sim}$ სივრცის ქვესიმრავლეთა მაქსიმალური ცენტრირებული სისტემა $\mathscr{F}$, რომელიც მოიცავს $\mathscr{F}_0$ სისტემას. ვაჩვენოთ, არსებობს ისეთი $x \in \prod_{\sim\in A} X_{\sim}$ წერტილი, რომ ნებისმიერი $F \in \mathscr{F}$ ელემენტისთვის $x \in \overline{F}$.

შევამოწმოთ, რომ $\mathscr{F}$ სისტემას აქვს შემდეგი თვისებები:

i). თუ $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathscr{F}$, მაშინ $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathscr{F}$.

ii).თუ $F_0 \subset \prod_{\sim\in A} X_{\sim}$ და ნებისმიერი $F \in \mathscr{F}$ ელემენტისთვის $F_0 \bigcap F \neq \varnothing$, მაშინ $F_0 \in \mathscr{F}$.

თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ სრულდება i) პირობა. მართლაც, ყოველი $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathscr{P}$ ელემენტისთვის $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \neq \varnothing$. ამ თანაკვეთის $\mathscr{P}$ სისტემასთან მიერთება არ შეცვლის სისტემის ცენტრირებულობას. $\mathscr{P} \bigcup \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\}$ სისტემის ნებისმიერი სასრული რაოდენობის $F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_n} \in \mathscr{P}$ ელემენტების თანაკვეთა არაცარიელია. გარდა ამისა, არაცარიელია $F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_m}, \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i$ ელემენტების თანაკვეთა, რადგან

$$F_{i_1} \bigcap F_{i_2} \bigcap ... \bigcap F_{i_m} \bigcap \bigcap_{i=1}^{n} F_i = F_{i_1} \bigcap F_{i_2} \bigcap ... \bigcap F_{i_m} \bigcap F_1 \bigcap F_2 \bigcap ... \bigcap F_n$$

სიმრავლე, როგორც $\mathscr{P}$ სისტემაში შემავალი სასრული რაოდენობის ელემენტთა თანაკვეთა, არაცარიელია. ამრიგად, $\mathscr{P} \bigcup \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\}$ არის ცენტრირებული სისტემა. $\mathscr{P}$ სისტემის მაქსიმალურობის გამო $\mathscr{P} \bigcup \{\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i\} = \mathscr{P}$, ე.ი. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i \in \mathscr{P}$.

ახლა შევამოწმოთ ii) პირობა. ვთქვათ $F_0 \subset \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ და ნებისმიერი $F \in \mathscr{P}$ ელემენტისთვის $F_0 \bigcap F \neq \varnothing$. $\mathscr{P}$ სისტემას მიუერთოთ F_0 ელემენტი. მიღებული $\mathscr{P} \bigcup \{F_0\}$ სისტემის ნებისმიერი $F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_n} \in \mathscr{P}$ ელემენტის თანაკვეთა არაცარიელია $\mathscr{P}$ სისტემის ცენტრირებულობის გამო. შევნიშნოთ, რომ არაცარიელია $F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_n}, F_0 \in \mathscr{P} \bigcup \{F_0\}$ სასრული რაოდენობის ელემენტთა თანაკვეთა

$$F_{i_1} \bigcap F_{i_2} \bigcap ... \bigcap F_{i_m} \bigcap F_0 = \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} \bigcap F_0,$$

რადგან i) პირობის თანახმად, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{i_k} \in \mathscr{P}$ სისტემას და F_0 ელემენტის თანაკვეთა $\mathscr{P}$ ოჯახის ნებისმიერ ელემენტთან, მათ შორის $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{i_k} \in \mathscr{P}$ ელემენტთანაც, არაცარიელია. ამრიგად, $\mathscr{P} \bigcup \{F_0\}$ ოჯახი არის ცენტრირებული. $\mathscr{P}$ ოჯახის მაქსიმალურობის გამო $\mathscr{P} = \mathscr{P} \bigcup \{F_0\}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $F_0 \in \mathscr{P}$.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული $\alpha \in A$ ინდექსისთვის $\mathscr{P}_\alpha = \{\overline{p_\alpha(F)}\}_{F \in \mathscr{P}}$ სისტემა არის ცენტრირებული. მართლაც, ყოველი $F_1, F_2, ..., F_n \in \mathscr{P}$ სასრული რაოდენობის ელემენტისთვის

$$\bigcap_{i=1}^{n} \overline{p_\alpha(F_i)} \supset \bigcap_{i=1}^{n} p_\alpha(F_i) \supset p_\alpha(\bigcap_{i=1}^{n} F_i) \neq \varnothing .$$

შევნიშნოთ, რომ X_α სივრცის კომპაქტურობის გამო $\bigcap\limits_{F \in \mathscr{P}} \overline{p_\alpha(F)} \neq \varnothing$. ამიტომ არსებობს წერტილი $x_\alpha \in \bigcap\limits_{F \in \mathscr{P}} \overline{p_\alpha(F)} \subset X_\alpha$. ამ წერტილის X_α

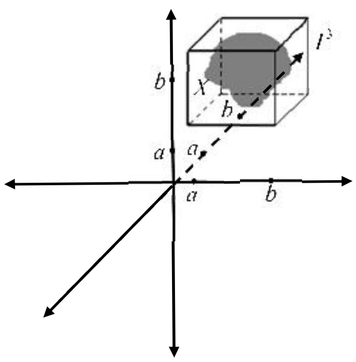
სივრცეში ნებისმიერი U_α მიდამოსთვის და ყოველი $F \in \mathscr{P}$ ელემენტისთვის $U_\alpha \bigcap p_\alpha(F) \neq \varnothing$. აქედან გამომდინარე, ყოველი $F \in \mathscr{P}$ ელემენტისთვის $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \bigcap F \neq \varnothing$. ii) პირობის თანახმად, $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathscr{P}$, ხოლო i) პირობის თანახმად, $\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \in \mathscr{P}$. ამრიგად, $x = (x_\alpha)$ წერტილის ნებისმიერი, $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ სივრცის ბაზისში შემავალი, $\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ მიდამოსთვის და ყოველი $F \in \mathscr{P}$ ელემენტისთვის $\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \bigcap F \neq \varnothing$. ამიტომ $x = (x_\alpha) \in \overline{F}$, $F \in \mathscr{P}$. ეს კი ნიშნავს, რომ x წერტილი ეკუთვნის $\mathscr{P}_0$ ცენტრირებული სისტემის ნებისმიერ F ელემენტს. 3.3.2 თეორემის თანახმად, $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ დეკარტული ნამრავლი არის კომპაქტური სივრცე. □

დამტკიცებული თეორემა საშუალებას გვაძლევს ავღწეროთ ევკლიდური სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლეები.

ვთქვათ $[a,b]^n$ არის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის $[a,b]$ სეგმენტის თავსი თავზე n-ჯერ ნამრავლი, ე.ი. $[a,b]^n = [a,b] \times [a,b] \times \ldots \times [a,b]$.

$[a,b]^n$ არის n-განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის ქვესივრცე. $[a,b]$ სეგმენტი, როგორც $[0,1]$ კომპაქტური სეგმენტის ჰომეომორფული სივრცე, არის კომპაქტური. ამიტომ ტიხონოვის თეორემის თანახმად, კომპაქტური იქნება $[a,b]^n$ დეკარტული ნამრავლი.

n-განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის X ქვესივრცეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი $[a,b]$ სეგმენტი, რომ $X \subset [a,b]^n$.



ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიურ სივრცეზე განსაზღვრული ნამდვილმნიშვნელობებიანი f უწყვეტი ასახვა არის შემოსაზღვრული, თუ $f(X)$ ანასახი არის შემოსაზღვრული $\mathbb{R}$ სივრცეში.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.3.21. *ევკლიდური სივრცის ქვესივრცე კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არის ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის კომპაქტური ქვესივრცე. განვიხილოთ X სივრცის $\sim = \{U_i^n\}_{i\in\mathbb{Z}}$ ღია დაფარვა, რომელიც შედგება

$$U_i^n = \overbrace{(-i,i)\times(-i,i)\times\ldots\times(-i,i)}^{n-\text{ჯერ}}$$

სიმრავლეებისგან.

ცხადია, ყოველი $i \le j$ მთელი რიცხვებისთვის $U_i^n \subset U_j^n$. $\sim$ დაფარვიდან გამოვყოთ $U_{i_1}^n, U_{i_2}^n, \ldots, U_{i_k}^n$ სასრული ქვედაფარვა. ვთქვათ $i_0 = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. ცხადია, $X \subseteq U_{i_0}^n$. შევნიშნოთ, რომ $U_{i_0}^n \subset [-i_0, i_0]^n$. ამრიგად, X არის შემოსაზღვრული სივრცე. X სივრცე, როგორც $\mathbb{R}^n$ ჰაუსდორფის სივრცის კომპაქტური ქვესივრცე, არის ჩაკეტილი.

ვთქვათ, შებრუნებით, X არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული ქვესივრცე. ამიტომ არსებობს ისეთი $[a,b]$ სეგმენტი, რომ $X \subseteq [a,b]^n$. X სივრცე არის კომპაქტური, რადგან ის არის $[a,b]^n$ კომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. □

დამტკიცებული თეორემის თანახმად, კომპაქტურ სივრცეზე განსაზღვრული ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქცია არის შემოსაზღვრული.

განვიხილოთ სავსებით რეგულარული სივრცეების კომპაქტურ სივრცეებში ჩადგმის ამოცანა.

ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე, $\{Y_\sim\}_{\sim\in A}$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ოჯახი, ხოლო $\mathscr{A} = \{f_\sim : X \to Y_\sim\}_{\sim\in A}$ უწყვეტ ასახვათა რაიმე ოჯახი.

ვიტყვით, რომ $\mathscr{A}$ ოჯახი განაცალებს წერტილებს, თუ X სივრცის ნებისმიერი ორი განსხვავებული x და y წერტილისთვის არსებობს $\mathscr{A}$ ოჯახის ისეთი $f_\sim : X \to Y_\sim$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f_\sim(x) \ne f_\sim(y)$.

ასევე, ვიტყვით, რომ $\mathscr{A}$ ოჯახი განაცალებს წერტილებსა და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისა და მისი არშემცველი ნებისმიერი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს $\mathscr{A}$ ოჯახის ისეთი $f_\sim : X \to Y_\sim$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f_\sim(x) \notin \overline{f_\sim(F)}$.

წინადადება 3.3.22. *ვთქვათ X არის T_0-სივრცე. თუ $\mathscr{A} = \{f_\sim : X \to Y_\sim\}_{\sim\in A}$ ოჯახი ერთმანეთისგან განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, მაშინ ის განაცალებს წერტილებსაც.*

დამტკიცება. ვთქვათ x და y არის X T_0-სივრცის ორი

განსხვავებული წერტილი. მაშინ არსებობს ისეთი U მიდამო, რომ $x \in U$ და $y \notin U$. ვთქვათ, $F = X \setminus U$. ცხადია, $x \notin F$. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $f_\sim \in \mathscr{A}$ ფუნქცია, რომ $f_\sim(x) \notin \overline{f_\sim(F)}$. ცხადია, $y \in F$ და $f_\sim(y) \in \overline{f_\sim(F)}$. აქედან გამომდინარე, $f_\sim(x) \neq f_\sim(y)$. □

წინადადება 3.3.23. *თუ $f : X \to Y$ არის ურთიერთცალსახა უწყვეტი ასახვა და ერთელემენტიანი $\mathscr{A} = \{ f : X \to Y\}$ ოჯახი განაცალებს X სივრცის წერტილებსა და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, მაშინ $f : X \to Y$ ასახვა არის ჰომეომორფული ჩადგმა.*

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $f_X : X \to f(X)$ ასახვა არის ჩაკეტილი. ვთქვათ F არის X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ვაჩვენოთ, რომ $f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}$. ცხადია, $f(F) \subset f(X) \cap \overline{f(F)}$. შევამოწმოთ შებრუნებული ჩართვა $f(X) \cap \overline{f(F)} \subset f(F)$. ნებისმიერი $y \in f(X) \cap \overline{f(F)}$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $x \in X$ წერტილი, რომ $y = f(x)$. ამრიგად, $y = f(x) \in f(X)$ და $y = f(x) \in \overline{f(F)}$. იმისთვის, რომ ვაჩვენოთ $y = f(x) \in f(F)$ საკმარისია შევამოწმოთ $x \in F$. დავუშვათ, $x \notin F$. პირობიდან გამომდინარე, $y = f(x) \notin \overline{f(F)}$. ეს კი ეწინააღმდეგება პირობას $y \in f(X) \cap \overline{f(F)}$.ამრიგად, $f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}$, რაც ასევე ნიშნავს, რომ $f(F)$ არის $f(X)$ ქვესივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. აქედან გამომდინარე, $f_X : X \to f(X)$ ასახვა არის ჰომეომორფიზმი. ცხადია, $f : X \to Y$ ასახვა წარმოიდგინება, როგორც f_X ასახვის და $i : f(X) \to Y$ ჩადგმის ასახვის კომპოზიცია, ე.ი. $f : X \to Y$ არის ჰომეომორფული ჩადგმა. □

თეორემა 3.3.24. თუ $\mathscr{A} = \left\{ f_\sim : X \to Y_\sim \right\}_{\sim \in A}$ უწყვეტ ასახვათა ოჯახი ერთმანეთისგან განაცალებს X ტოპოლოგიური სივრცის წერტილებს და, აგრეთვე, წერტილებსა და ჩაკეტილ სიმრავლეებს, მაშინ არსებობს X სივრცის $\prod_{\sim \in A} Y_\sim$ დეკარტულ ნამრავლში ჰომეომორფული ჩადგმა.

დამტკიცება. ვთქვათ $f = \Delta_{\sim \in A} f_\sim : X \to \prod_{\sim \in A} Y_\sim$. ნებისმიერი x და y განსხვავებული წერტილისთვის არსებობს ისეთი $f_\sim \in \mathscr{A}$ ასახვა, რომ $f_\sim(x) \neq f_\sim(y)$. აქედან გამომდინარე, $f(x) \neq f(y)$. ამრიგად, f ასახვა არის ურთიერთცალსახა ასახვა.

ვაჩვენოთ, რომ $\{f\}$ ერთელემენტიანი ოჯახი განაცალებს წერტილებსა და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. ვთქვათ $x \in X$ და F ჩაკეტილი სიმრავლე არ შეიცავს x წერტილს. პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $\sim \in A$ ინდექსი, რომ $f_\sim(x) \notin \overline{f_\sim(F)}$. შევამოწმოთ, რომ $f(x) \notin \overline{f(F)}$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $f(x) \in \overline{f(F)}$. ცხადია,

$$f_\sim(x) = p_\sim(f(x)) \in p_\sim(\overline{f(F)}) \subset \overline{p_\sim(f(F))} = \overline{f_\sim(F)}\ .$$

ეს კი ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ $f_\sim(x) \notin \overline{f_\sim(F)}$. ამრიგად, 3.3.23 წინადადების თანახმად $f : X \to \prod_{\sim\in A} Y_\sim$ ასახვა არის ჰომეომორფული ჩადგმა. □

ვთქვათ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა. $\mathscr{A}$ ოჯახი, შემდგარი $1_X : X \to X$ და $f : X \to Y$ უწყვეტი ასახვებისგან, განაცალებს წერტილებს და, აგრეთვე, წერტილებსა და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. 3.3.24 თეორემის თანახმად $1_X \Delta f : X \to X \times Y$ ასახვა არის ჰომეომორფული ჩადგმა. ამრიგად, f ასახვის $\Gamma(f)$ გრაფიკი არის X სივრცის ჰომეომორფული ანასახი $1_X \Delta f$ ასახვის მიმართ.

წინადადება 3.3.25. *თუ $f : X \to Y$ არის X ტოპოლოგიური სივრცის Y ჰაუსდორფის სივრცეში უწყვეტი ასახვა, მაშინ $\Gamma(f)$ გრაფიკი არის $X \times Y$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე.*

დამტკიცება. განვიხილოთ $f \times 1_Y : X \times Y \to Y \times Y$ ასახვა. ვაჩვენოთ, $Y \times Y$ სივრცის დიაგონალი $\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ არის ჩაკეტილი $Y \times Y$ ნამრავლში. ვთქვათ $(x, y) \notin \Delta$, ე.ი. $x \neq y$. Y სივრცის ჰაუსდორფულობის გამო არსებობს x და y წერტილების ისეთი U და V მიდამოები, რომ $U \cap V = \varnothing$. ცხადია, $U \times V$ დეკარტული ნამრავლის ყოველი წერტილის კოორდინატები განსხვავებულია. ამიტომ Δ დიაგონალის $Y \times Y$ ნამრავლში დამატება არის ღია, ე.ი. Δ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ $(f \times 1_Y)^{-1}(\Delta) = \Gamma(f)$. ამრიგად, $\Gamma(f)$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. □

წინადადება 3.3.26. *ვთქვათ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა. $X \times Y$ დეკარტული ნამრავლის X თანამამრავლზე პროექციის შემოსაზღვრა $\Gamma(f)$ გრაფიკზე არის ჰომეომორფიზმი.*

დამტკიცება. განვიხილოთ $1_X \Delta f : X \to X \times Y$ დიაგონალური ასახვა და $p : X \times Y \to X$ პროექციის ასახვა. ამ ასახვების შემოსაზღვრის ასახვები $(1_X \Delta f)_X : X \to \Gamma(f)$ და $p_{|\Gamma(f)} : \Gamma(f) \to X$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$(p_{|\Gamma(f)} \circ (1_X \Delta f)_X)(x) = p_{|\Gamma(f)}(x, f(x)) = x\ ,\ x \in X$$

და

$$((1_X \Delta f)_X \circ p_{|\Gamma(f)})(x, f(x)) = (1_X \Delta f)(x) = (x, f(x))\ ,\ (x, f(x)) \in \Gamma(f)\ .$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $p_{|\Gamma(f)} : \Gamma(f) \to X$ შემოსაზღვრის ასახვა არის ჰომეომორფიზმი. □

$X = \prod_{\sim\in A} I_\sim$ ტოპოლოგიურ სივრცეს, სადაც ნებისმიერი $\sim \in A$ ინდექსისთვის $I_\sim = I = [0,1]$ და $|A| = m$, ეწოდება ტიხონოვის კუბი და

აღინიშნება სიმბოლოთი I^m. თუ $m=\aleph_0$, მაშინ $I^{\aleph_0}$ ნამრავლს ეწოდება ჰილბერტის კუბი.

ცხადია, ტიხონოვის კუბი და ჰილბერტის კუბი არის კომპაქტური სივრცეები.

თეორემა 3.3.27. *ნებისმიერი $m \geq \aleph_0$ წონის მქონე სავსებით რეგულარული სივრცე შეიძლება ჰომეომორფულად ჩაიდგას I^m ტიხონოვის კუბში.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $\pm$ არის X სავსებით რეგულარული სივრცის ისეთი ბაზისი, რომ $|\pm| = m$. განვიხილოთ $\pm$ ბაზისის ელემენტთა ისეთი (U,V) წყვილების $\mathscr{P}$ ოჯახი, რომელთათვისაც არსებობს ისეთი $f: X \to Y$ უწყვეტი ფუნქციები, რომ $f(U) \subset [0,1/2)$ და $f(X \setminus V) \subset \{1\}$.

ასეთი $\mathscr{P}$ ოჯახი არსებობს. მართლაც, ვთქვათ $x \in X$ და $V \in \pm$ არის x წერტილის მიდამო. $X \setminus V$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის და x წერტილისთვის არსებობს ისეთი $f: X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ $f(x)=0$ და $f(y)=1$ ნებისმიერი $y \in X \setminus V$ წერტილისთვის. $[0,1]$ სეგმენტის $[0,1/2)$ ღია სიმრავლის წინარესახე შეიცავს x წერტილს. ამიტომ არსებობს ისეთი $U \in \pm$ ელემენტი, რომ $x \in U \subset f^{-1}([0,1/2))$. შევნიშნოთ, რომ $f(X \setminus V) \subset \{1\}$. ამიტომ

$$X \setminus V \subset f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}([0,1] \setminus [0,1)) = X \setminus f^{-1}([0,1)),$$

ანუ

$$X \setminus (X \setminus f^{-1}([0,1))) = f^{-1}([0,1)) \subset X \setminus (X \setminus V) = V.$$

ცხადია,

$$f^{-1}([0,1/2)) \subset f^{-1}([0,1)) \subset V.$$

ამრიგად,

$$x \in U \subset f^{-1}([0,1/2)) \subset V.$$

აქედან გამომდინარე, $(U,V) \in \mathscr{P}$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი $(U,V) \in \mathscr{P}$ წყვილის შესაბამისი f ფუნქციების $\mathscr{A}$ ოჯახისთვის $|\mathscr{A}| \leq m$, რადგან $|\mathscr{A}| = m$. ვაჩვენოთ, $\mathscr{A}$ ოჯახი განაცალებს წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. ვთქვათ $x \in X$ და F არის X სივრცის ისეთი ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $x \notin F$. ცხადია, არსებობს ისეთი V ღია სირავლე, რომ $x \in V \subset X \setminus F$ და $V \in \pm$. როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, არსებობს ისეთი $U \in \pm$, რომ $x \in U$ და $(U,V) \in \mathscr{P}$. ასეთი (U,V) წყვილის შესაბამისი f ფუნქციისთვის, რომელიც ეკუთვნის $\mathscr{A}$ ოჯახს, გვაქვს

$$f(x) < 1/2$$

და

$$\overline{f(F)} \subset \overline{f(X \setminus V)} \subset \overline{\{1\}} = \{1\}.$$

ამრიგად, $f(x) \notin \overline{f(F)}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\mathscr{A}$ ოჯახი განაცალებს X სივრცის წერტილებს და ჩაკეტილ სიმრავლეებს. X სივრცე არის T_0-

სივრცე. ამიტომ, 3.3.22 წინადადების თანახმად, $\mathscr{A}$ ოჯახი განაცალებს X სივრცის წერტილებს. 3.3.24 წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს X სივრცისა I^m ტიხონოვის კუბში ჰომეომორფული ჩადგმა. □

შედეგი 3.3.28. I^m *ტიხონოვის კუბის წონა* $w(I^m) = m$ *.*

დამტკიცება. 2.4.23 თეორემის თანახმად $w(I^m) \le m$. ცხადია, m კარდინალური რიცხვის სიმძლავრის მქონე X დისკრეტული სივრცის წონა $w(X) = m$. 3.3.27 თეორემის თანახმად ასეთი სივრცე ჩადგმადია I^m ტიხონოვის კუბში. ამიტომ $w(I^m) \ge m$. ამრიგად, $w(I^m) = m$. □

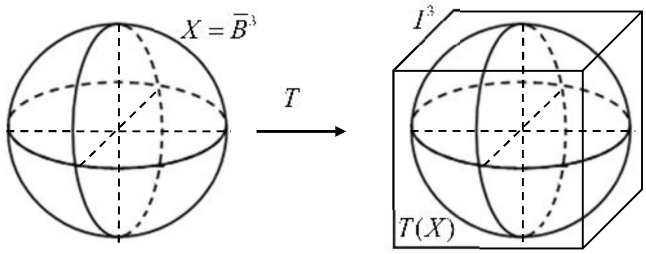
X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება უნივერსალური სივრცეთა $\mathscr{K}$ კლასის მიმართ, თუ $X \in \mathscr{K}$ და ნებისმიერი $Y \in \mathscr{K}$ სივრცე ჰომეომორფულად ჩადგმადია X სივრცეში.

3.3.27 თეორემიდან და 3.3.28 შედეგიდან მიიღება შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.3.29. *ტიხონოვის* I^m *კუბი უნივერსალურია* $m \ge \aleph_0$ *წონის მქონე სავსებით რეგულარულ სივრცეთა კლასის მიმართ.* □

შედეგი 3.3.30. *ტოპოლოგიური სივრცე არის* m *წონის სავსებით რეგულარული სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არის* I^m *ტიხონოვის კუბის ქვესივრცე.* □

m წონის X სავსებით რეგულარული სივრცის I^m ტიხონოვის კუბში ჰომეომორფული ჩადგმის ასახვა ავღნიშნოთ სიმბოლოთი $T : X \to I^m$ და ვუწოდოთ ტიხონოვის ჩადგმის ასახვა.



II. ლოკალურად კომპაქტური სივრცეები

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ლოკალურად კომპაქტური, თუ მის ყოველ წერტილს გააჩნია მიდამო, რომლის ჩაკეტვა არის კომპაქტური.

ცხადია, ყოველი კომპაქტური სივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური, მაგრამ პირიქით, საზოგადოდ არაა სამართლიანი.

ასე მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა ღერძი $\mathbb{R}$ არის ლოკალურად კომპაქტური, რადგან ყოველ $x \in \mathbb{R}$ წერტილს გააჩნია მიდამო $(x-\pounds, x+\pounds)$, $\pounds > 0$, რომლის ჩაკეტვა $[x-\pounds, x+\pounds]$ არის კომპაქტური. როგორც ვიცით, $\mathbb{R}$ ღერძი არაა კომპაქტური. ასევე, უსასრულო

დისკრეტული სივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური, მაგრამ არაა კომპაქტური. ადვილი დასანახია, რომ არალოკალურად კომპაქტური სივრცის მაგალითია $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ რაციონალურ რიცხვთა ქვესივრცე.

წინადადება 3.3.31. *ნებისმიერი ჰაუსდორფის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე არის სავსებით რეგულარული სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე, ხოლო $x \in X$ და $F \subset X$ მისი ისეთი წერტილი და ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $x \notin F$. პირობის თანახმად, x წერტილს აქვს ისეთი U ღია მიდამო, რომ $\bar{U}$ არის კომპაქტური. განვიხილოთ $\bar{U}$ ქვესივრცის $(\bar{U} \setminus U) \bigcup (\bar{U} \bigcap F)$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ცხადია, $x \notin (\bar{U} \setminus U) \bigcup (\bar{U} \bigcap F)$ და $\bar{U}$ არის ნორმალური სივრცე. 3.1.9 თეორემის თანახმად, $\bar{U}$ ნორმალური სივრცის $\{x\}$ და $(\bar{U} \setminus U) \bigcup (\bar{U} \bigcap F)$ ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეებისთვის არსებობს ისეთი $f : \bar{U} \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ

$$f(x) = 0$$

და

$$f((\bar{U} \setminus U) \bigcup (\bar{U} \bigcap F)) \subset \{1\}.$$

ვთქვათ $g : X \setminus U \to I$ არის ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$g(x) = 1, x \in X \setminus U.$$

ცხადია, $\bar{U} \bigcap (X \setminus U) = \bar{U} \setminus U$. შევნიშნოთ, რომ $\bar{U} \bigcap (X \setminus U)$ სიმრავლის ყოველ x წერტილში $f(x) = g(x)$. ამრიგად, $\bar{U}$ და $X \setminus U$ ჩაკეტილ სიმრავლეებზე განსაზღვრული f და g უწყვეტი ფუნქციები არის თავსებადი. 2.3.25 თეორემის თანახმად f და g ასახვების $h = f \nabla g : X \to I$ კომბინირებული ჯამი აკმაყოფილებს პირობებს

$$f(x) = 0$$

და

$$f(y) = 1, \ y \in F.$$

ამრიგად, X არის სავსებით რეგულარული სივრცე. □

წინადადება 3.3.32. *ჰაუსდორფის ლოკალურად კომპაქტური X სივრცის ყოველი $x \in X$ წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი V მიდამო, რომ $x \in V \subset \bar{V} \subset U$ და $\bar{V}$ არის კომპაქტური.*

დამტკიცება. 3.3.31 წინადადების თანახმად ლოკალურად კომპაქტური სივრცე X არის სავსებით რეგულარული და, მაშასადამე, რეგულარული სივრცე. ამიტომ არსებობს ისეთი V' ღია სიმრავლე, რომ $x \in V' \subset \bar{V}' \subset U$. ასევე x წერტილს გააჩნია ისეთი V'' ღია მიდამო, რომ $\bar{V}''$ არის კომპაქტური. ვთქვათ $V = V' \bigcap V''$. ცხადია, V არის x წერტილის მიდამო. გარდა ამისა,

$$\bar{V} = \overline{V' \bigcap V''} \subset \bar{V}''.$$

ამიტომ $\bar{V}$ არის კომპაქტური. შევნიშნოთ, რომ

$$x \in V \subset \bar{V} = \overline{V' \bigcap V''} \subset \bar{V}' \subset U .$$

ამით 3.3.32 წინადადება დამტკიცებულია. □

წინადადება 3.3.33. *ლოკალურად კომპაქტური სივრცის ყოველი ჩაკეტილი ქვესივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური.*

დამტკიცება. ვთქვათ F არის X ლოკალურად კომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. F ქვესივრცის ყოველ x წერტილს X სივრცეში გააჩნია ისეთი U მიდამო, რომ $\bar{U}^X$ არის კომპაქტური. ცხადია, $U \bigcap F$ არის ღია სიმრავლე F ქვესივრცეში და $x \in U \bigcap F$. შევნიშნოთ, რომ

$$\overline{U \bigcap F}^F = \overline{U \bigcap F}^X \bigcap F \subset \overline{U}^X \bigcap F \subset \overline{U}^X .$$

ამრიგად, $\overline{U \bigcap F}^X \bigcap F$ არის $\overline{U}^X$ კომპაქტური სიმრავლის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ამიტომ ის, ანუ, $\overline{U \bigcap F}^F$ არის კომპაქტური ქვესივრცე. □

წინადადება 3.3.34. *ჰაუსდორფის ლოკალურად კომპაქტური სივრცის ყოველი ღია ქვესივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური.*

დამტკიცება. ვთქვათ G არის X ლოკალურად კომპაქტური სივრცის ღია ქვესივრცე და $x \in G$. შევნიშნოთ, რომ 3.3.32 თეორემის თანახმად, X სივრცეში არსებობს x წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $\overline{V}$ არის კომპაქტური და $x \in V \subset \overline{V} \subset G$. ცხადია, $\overline{V}$ არის G ქვესივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. ამრიგად, G არის ლოკალურად კომპაქტური ქვესივრცე. □

შედეგი 3.3.35. *X ჰაუსდორფის ლოკალურად კომპაქტური სივრცის ყოველი Y ქვესივრცე, რომელიც წარმოდგება X სივრცის F ჩაკეტილი და U ღია სიმრავლეების თანაკვეთით, არის ლოკალურად კომპაქტური.*

დამტკიცება. 3.3.33 წინადადების თანახმად, F არის ლოკალურად კომპაქტური ქვესივრცე. ასევე, 3.3.34 წინადადების თანახმად, F ლოკალურად კომპაქტური ქვესივრცის $F \bigcap U$ ღია ქვესიმრავლე არის ლოკალურად კომპაქტური. □

წინადადება 3.3.36. *X ჰაუსდორფის სივრცის მკვრივი ლოკალურად კომპაქტური Y ქვესივრცე არის X სივრცის ღია ქვესიმრავლე.*

დამტკიცება. Y ქვესივრცის ლოკალურად კომპაქტურობის გამო ნებისმიერ $x \in Y$ წერტილს Y ქვესივრცეში გააჩნია ისეთი U ღია მიდამო, რომ $\bar{U}^Y$ არის კომპაქტური. ცხადია, $\overline{U}^Y = \overline{U}^X \bigcap Y$ სიმრავლე კომპაქტურია X ჰაუსდორფის სივრცეში. ამიტომ $\overline{U}^X \bigcap Y$ არის X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ცხადია, $U \subset \overline{U}^X \bigcap Y$ ჩართვიდან მივიღებთ

$$\bar{U}^X \subset \overline{\bar{U}^X \bigcap Y}^X = \bar{U}^X \bigcap Y \subset Y .$$

შევნიშნოთ, X სივრცეში არსებობს ისეთი V ღია სიმრავლე, რომ

$V \bigcap Y = U$. რადგან Y სივრცე მკვრივია, ამიტომ მივიღებთ

$$x \in V \subset \overline{V}^X = \overline{V \bigcap Y}^X = \overline{U}^X \subset Y.$$

ამრიგად, Y სივრცის ნებისმიერი x წერტილი არის მისი შიგა წერტილი, ე.ი. Y არის X სივრცის ღია სიმრავლე. □

3.3.36 წინადადებიდან მიიღება შემდეგი

წინადადება 3.3.37. *X ჰაუსდორფის სივრცის Y ლოკალურად კომპაქტური ქვესივრცე არის X სივრცეში მისი $\overline{Y}$ ჩაკეტვის ღია ქვესივრცე.*

დამტკიცება. X ჰაუსდორფის სივრცის Y ქვესივრცის $\overline{Y}$ ჩაკეტვა არის ჰაუსდორფის სივრცე. ამრიგად, Y ლოკალურად კომპაქტური სივრცე არის $\overline{Y}$ ჰაუსდორფის სივრცის მკვრივი ქვესიმრავლე. 3.3.36 წინადადების თანახმად, Y არის ღია ქვესიმრავლე $\overline{Y}$ ქვესივრცეში. □

თეორემა 3.3.38. *ჰაუსდორფის სივრცე ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არის კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცის ღია ქვესივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ჰაუსდორფის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. X სავსებით რეგულარული სივრცე, შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც I^m ტიხონოვის კუბის ქვესივრცე. $\overline{X}$ ჩაკეტვა არის კომპაქტური, და მაშასადამე, ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. 3.3.36 წინადადების თანახმად, X არის $\overline{X}$ კომპაქტური სივრცის ღია ქვესიმრავლე.

ვთქვათ, შებრუნებით, X არის რაიმე Y კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცის ღია ქვესივრცე. 3.3.34 წინადადების თანახმად, X არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. □

ახლა აღვწეროთ ლოკალურად კომპაქტურ სივრცეთა ჯამები და დეკარტული ნამრავლები.

თეორემა 3.3.39. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი $\bigoplus_{\sim \in A} X_{\sim}$ არის ლოკალურად კომპაქტური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $X_{\sim}$ სივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური.*

დამტკიცება. ვთქვათ $X_{\sim}, \sim \in A$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი $\bigoplus_{\sim \in A} X_{\sim}$ არის ლოკალურად კომპაქტური. ნებისმიერი $X_{\sim}, \sim \in A$ როგორც $\bigoplus_{\sim \in A} X_{\sim}$ ჯამის ღია ქვესივრცე, არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე.

ვთქვათ, შებრუნებით, ნებისმიერი $X_{\sim}, \sim \in A$ სივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური. $\bigoplus_{\sim \in A} X_{\sim}$ ჯამის ნებისიერი x წერტილისთვის არსებობს ისეთი $\sim$ ინდექსი, რომ $x \in X_{\sim}$. პირობის ძალით, $X_{\sim}$ სივრცეში არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $\overline{U}^{X_{\sim}}$ არის

კომპაქტური. ცხადია, U არის x წერტილის მიდამო $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ ჯამში. შევნიშნოთ, რომ $\overline{U}^{\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}} = \overline{U}^{X_{\sim}}$. ამრიგად, $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. □

თეორემა 3.3.40. ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლი ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $X_{\sim}$ სივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე და არსებობს ისეთი A_0 სასრული სიმრავლე, რომ ნებისმიერი $\sim\in A\setminus A_0$ ინდექსისთვის $X_{\sim}$ სივრცე არის კომპაქტური.

დამტკიცება. ვთქვათ $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. ნებისმიერი ფიქსირებული $\sim_0$ ინდექსისთვის ვაჩვენოთ, რომ $X_{\sim_0}$ სივრცე არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. განვიხილოთ $X_{\sim_0}$ სივრცის ნებისმიერი x წერტილი და $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლის $(x_{\sim})$ წერტილი, სადაც $\sim\neq\sim_0$ ინდექსისთვის $x_{\sim}$ არის $X_{\sim}$ სივრცის ნებისმიერი წერტილი, ხოლო $\sim=\sim_0$ ინდექსისთვის $x_{\sim_0}=x$. პირობის თანახმად, $(x_{\sim})$ წერტილს აქვს კომპაქტური ჩაკეტვის მქონე U მიდამო. $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლის ბაზისში არსებობს $(x_{\sim})$ წერტილის ისეთი $\prod\limits_{\sim\in A} U_{\sim}$ მიდამო, რომ $(x_{\sim})\in\prod\limits_{\sim\in A} U_{\sim}\subset U$. ცხადია, $\overline{\prod\limits_{\sim\in A} U_{\sim}}\subset\overline{U}$. აქედან გამომდინარე, $\overline{\prod\limits_{\sim\in A} U_{\sim}}$ სიმრავლე არის კომპაქტური. როგორც ვიცით, სამართლიანია $\prod\limits_{\sim\in A}\overline{U}_{\sim}=\overline{\prod\limits_{\sim\in A} U_{\sim}}$ ტოლობა. ამიტომ $\prod\limits_{\sim\in A}\overline{U}_{\sim}$ სიმრავლე აგრეთვე არის კომპაქტური. 3.3.20 თეორემის თანახმად, ნებისმიერი $\overline{U}_{\sim}$ და, კერძოდ, $\overline{U}_{\sim_0}$ არის კომპაქტური სიმრავლე. ამრიგად, $X_{\sim_0}$ არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე.

ვთქვათ, შებრუნებით, $X_{\sim}$, $\sim\in A$ ტოპოლოგიური სივრცეები ლოკალურად კომპაქტურია ნებისმიერი $\sim\in A$ ინდექსისთვის და არსებობს ისეთი $A_0\subset A$ სასრული სიმრავლე, რომ ყოველი $\sim\in A\setminus A_0$ ინდექსისთვის $X_{\sim}$ არის კომპაქტური სივრცე. ცხადია, $\prod\limits_{\sim\in A} X_{\sim}$ ნამრავლი ჰომეომორფულია $(\prod\limits_{\sim\in A\setminus A_0} X_{\sim})\times(\prod\limits_{\sim\in A_0} X_{\sim})$ ნამრავლის. თეორემის დამტკიცებისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ სასრული რაოდენობის ლოკალურად კომპაქტურ სივრცეთა ნამრავლი არის ლოკალურად კომპაქტური.

ვთქვათ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცეები და $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ არის ნებისმიერი წერტილი. ყოველ x_i წერტილს

X_i სივრცეში გააჩნია ისეთი U_i მიდამო, რომ $\overline{U_i}$ არის კომპაქტური. ცხადია, $x \in \prod_{i=1}^{n} U_i$. ტიხონოვის თეორემის თანახმად, $\prod_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ ნამრავლი არის კომპაქტური. $\overline{\prod_{i=1}^{n} U_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{U_i}$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\prod_{i=1}^{n} U_i$ სიმრავლის $\overline{\prod_{i=1}^{n} U_i}$ ჩაკეტვა არის კომპაქტური სიმრავლე. ამრიგად, $\prod_{i=1}^{n} X_i$ არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. □

III. პარაკომპაქტური სივრცეები

ეს პუნქტი ეხება ტოპოლოგიურ სივრცეთა იმ კლასს, რომლებიც, კომპაქტურ სივრცეთა კლასის მსგავსად, განიმარტება ღია დაფარვების-ე.წ. ლოკალურად სასრული ღია დაფარვების მეშვეობით.

ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე არის პარაკომპაქტური, თუ მის ყოველ ღია დაფარვაში შეიძლება ჩაიწეროს ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა.

პარაკომპაქტურობის ცნება არის კომპაქტურობის ცნების განზოგადება. ცხადია, კომპაქტური სივრცე არის პარაკომპაქტური სივრცე. პარაკომპაქტურ სივრცეთა კლასი მოიცავს ტოპოლოგიურ სივრცეთა მნიშვნელოვან კლასებს. პარაკომპაქტური სივრცის მარტივ მაგალითს წარმოადგენს დისკრეტული სივრცე.

ვაჩვენოთ, რომ ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძი არის პარაკომპაქტური სივრცე. ვთქვათ $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ არის $\mathbb{R}$ სივრცის ნებისმიერი ღია დაფარვა. ყოველი $n \in \mathbb{Z}$ რიცხვისთვის განვიხილოთ $F_n = [n, n+1]$ ჩაკეტილი სეგმენტი და მისი მომცველი $G_n = (n-1/2, n+3/2)$ ღია ინტერვალი. ყოველი $x \in F_n$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U_{s_x} \in \sim$ ელემენტი, რომ $x \in U_{s_x}$. ვთქვათ, $V_x = U_{s_x} \bigcap G_n$. ცხადია, $\{V_x \mid x \in F_n\}$ არის F_n სიმრავლის მომცველი ღია დაფარვა, ე.ი. $F_n \subseteq \bigcup_{x\in F_n} V_x$. ამ დაფარვიდან გამოვყოთ სასრული ქვედაფარვა ${}_{F_n}$. ვთქვათ $= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} {}_{F_n}$. ცხადია, არის $\mathbb{R}$ ღერძის ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა და $\geq \sim$.

პარაკომპაქტურ სივრცეთა კლასს აგრეთვე მიეკუთვნება m-განზომილებიანი $\mathbb{R}^m$ ევკლიდური სივრცეეები. ამ ფაქტის შემოწმებაც მიმდინარეობს მარტივად.

მოვიყვანოთ პარაკომპაქტურ სივრცეთა ზოგიერთი თვისების დამტკიცება. ამისთვის დაგვჭირდება შემდეგი

წინადადება 3.3.41. *ვთქვათ X არის პარაკომპაქტური სივრცე, ხოლო $F_1 \subset X$ და $F_2 \subset X$ ჩაკეტილი თანაუკვეთი ქვესიმრავლეები. თუ ნებისმიერი $x \in F_2$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი ღია U_x^1 და U_x^2*

სიმრავლეები, რომ $x \in U_x^2$, $F_1 \subset U_x^1$ *და* $U_x^1 \bigcap U_x^2 = \varnothing$ *, მაშინ არსებობს ისეთი* U_1 *და* U_2 *ღია სიმრავლეები, რომ* $F_1 \subset U_1$ *,* $F_2 \subset U_2$ *და* $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$ *.*

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ოჯახი $\{U_x^2\}_{x \in F_2} \bigcup \{X \setminus F_2\}$ არის X პარაკომპაქტური სივრცის ღია დაფარვა. ამიტომ არსებობს მასში ჩაწერილი ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა $\{U_\sim\}_{\sim \in A}$.

ვთქვათ $A_0 = \{\sim \in A \,|\, U_\sim \bigcap F_2 \neq \varnothing\}$. შევნიშნოთ, რომ $\bar{U}_\sim \bigcap F_1 = \varnothing$, $\sim \in A_0$ და $F_2 \subset \bigcup\limits_{\sim \in A_0} U_\sim$. ცხადია, $\{\bar{U}_\sim\}_{\sim \in A_0}$ არის ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა. აქედან გამომდინარე, $\bigcup\limits_{\sim \in A_0} \bar{U}_\sim$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე. სიმრავლეები $U_1 = X \setminus \bigcup\limits_{\sim \in A_0} \bar{U}_\sim$ და $U_2 = \bigcup\limits_{\sim \in A_0} U_\sim$ არის X სივრცის ისეთი ღია სიმრავლეები, რომ $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$ და $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$. □

თეორემა 3.3.42. *ნებისმიერი პარაკომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცე არის ნორმალური.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in X$ არის X პარაკომპაქტური სივრცის წერტილი, ხოლო $F \subset X$ ისეთი ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, რომ $x \notin F$. X სივრცის ჰაუსდორფულობის გამო x და $y \in F$ წერტილებს გააჩნიათ თანაუკვეთი მიდამოები. 3.3.41 წინადადების თანახმად, x წერტილს და F ჩაკეტილ სიმრავლეს გააჩნიათ თანაუკვეთი მიდამოები, ე.ი. X არის რეგულარული სივრცე.

ვთქვათ F_1 და F_2 არის X სივრცის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე. X სივრცის რეგულარულობის გამო ნებისმიერი $x \in F_2$ წერტილისთვის და F_1 ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს თანაუკვეთი ღია მიდამოები. 3.3.41 წინადადების თანახმად, F_1 და F_2 სიმრავლეებს გააჩნიათ თანაუკვეთი ღია მიდამოები, ე.ი. X არის ნორმალური სივრცე. □

თეორემა 3.3.43. *პარაკომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე არის პარაკომპაქტური.*

დამტკიცება. ვთქვათ F არის X პარაკომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე, ხოლო $\sim = \{U_s\}_{s \in S}$ არის F სიმრავლის ნებისმიერი ღია დაფარვა. ყოველი $s \in S$ ინდექსისათვის განვიხილოთ ისეთი V_s სიმრავლეები, რომ $V_s \bigcap F = U_s$. ცხადია, $\sim' = \{V_s, X \setminus F\}_{s \in S}$ არის X სივრცის ღია დაფარვა. მას გააჩნია ლოკალურად სასრული ღია ჩაწერილობა $= \{G_t\}_{t \in T}$. ვთქვათ $' = \{G_t \bigcap F \,|\, G_t \bigcap F \neq \varnothing\}_{t \in T}$. ცხადია, $'$ არის F სიმრავლის ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა და ის ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში. □

თეორემა 3.3.44. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი პარაკომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესაკრები სივრცეები არის*

პარაკომპაქტური.

დამტკიცება. ვთქვათ X_{α}, $\alpha \in A$ სივრცეთა ჯამი $\bigoplus_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ არის პარაკომპაქტური. 3.3.43 წინადადების თანახმად ყოველი $X_{\alpha}, \alpha \in A$ სივრცე, როგორც $\bigoplus_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ ჯამის ჩაკეტილი ქვესივრცე, არის პარაკომპაქტური.

ვთქვათ, შებრუნებით, $X_{\alpha}, \alpha \in A$ სივრცეები არის პარაკომპაქტური, ხოლო $= \{U_s\}_{s \in S}$ არის $\bigoplus_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ ჯამის ღია დაფარვა. ცხადია, ${}_{\alpha} = \{U_s \bigcap X_{\alpha}\}_{s \in S}$ არის X_{α} სივრცის ღია დაფარვა. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი ${}'_{\alpha}$ ლოკალურად სასრული ღია დაფარვები, რომ ${}'_{\alpha} \geq {}_{\alpha}$. შევნიშნოთ, რომ $' = \bigcup_{\alpha \in A} {}'_{\alpha}$ ოჯახი არის $\bigoplus_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ ჯამის ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა და ის ჩაწერილია დაფარვაში. ამრიგად, $\bigoplus_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ ჯამი არის პარაკომპაქტური. □

შევნიშნოთ, რომ პარაკომპაქტურ სივრცეთა ნამრავლი საზოგადოდ არაა პარაკომპაქტური (იხ. მაგ.[En]).

სიმბოლოებით $\mathscr{C}$, $\mathscr{LC}$ და $\mathscr{P}$ შესაბამისად აღვნიშნოთ **Top** კატეგორიის შემდეგი სრული ქვეკატეგორიები:

$\mathscr{C}$ -კომპაქტური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია. ამ კატეგორიაში არსებობს ობიექტის სასრული ჯამები და უსასრულო ნამრავლები, მაგრამ ობიექტების უსასრულო ჯამები საზოგადოდ არ არსებობს.

$\mathscr{LC}$ -ლოკალურად კომპაქტური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია. ამ კატეგორიაში არსებობს ობიექტის უსასრულო ჯამები და სასრული ნამრავლები, მაგრამ ობიექტთა უსასრულო ნამრავლები საზოგადოდ არ არსებობს.

$\mathscr{P}$ -პარაკომპაქტური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია. ამ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების უსასრულო ჯამები, მაგრამ ობიექტთა ნებისმიერი ან სასრული ნამრავლები საზოგადოდ არ არსებობს.

IV. ტოპოლოგიურ სივრცეთა კომპაქტიფიკაციები

ტიხონოვის თეორემის თანახმად, ყოველი სავსებით რეგულარული სივრცე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ტიხონოვის კუბის რაიმე კომპაქტური ქვესივრცის მკვრივი ქვესივრცე. მართლაც, თუ $c : X \to I^m$ არის ჰომეომორფული ჩადგმა X სავსებით რეგულარული სივრცისა $m = w(X)$ წონის მქონე I^m ტიხონოვის კუბში, მაშინ X სივრცის ჰომეომორფული $c(X)$ ანასახი არის $Y = \overline{c(X)}$ კომპაქტური ქვესივრცის მკვრივი ქვესივრცე. ამრიგად, არსებობს (Y, c) წყვილი, სადაც Y არის კომპაქტური სივრცე, ხოლო c ჰომეომორფული მკვრივი ჩადგმა X სივრცისა Y სივრცეში.

ცხადია, არსებობს $X = (0,1)$ სივრცის ჰომეომორ ფული მკვრივი

ჩადგმები $c_1 : X \to Y_1 = [0,1]$ და $c_2 : X \to Y_2 = S^1$ კომპაქტურ Y_1 და Y_2 სივრცეებში. (Y_1, c_1) და (Y_2, c_2) წყვილებს უწოდებენ X სივრცის კომპაქტურ გაფართოებებს, ან კომპაქტიფიკაციებს.

აქედან გამომდინარე, შემოვიტანოთ შემდეგი განმარტება.

ვიტყვით, რომ (Y, c) წყვილი არის X ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაცია, თუ Y არის კომპაქტური სივრცე, ხოლო $c : X \to Y$ ისეთი ჰომეომორფული ჩადგმა X სივრცისა Y სივრცეში, რომ $c(X)$ ანასახი არის Y სივრცის მკვრივი ქვესივრცე, ანუ $\overline{c(X)} = Y$.

სიმრატივისთვის X ტოპოლოგიური სივრცის (Y, c) კომპაქტიფიკაციას ხშირად აღვნიშნავთ სიმბოლოთი cX. ამრიგად, თუ cX არის X სივრცის კომპაქტიფიკაცია, მაშინ არსებობს ისეთი $c : X \to cX$ ასახვა, რომ $c_X : X \to c(X)$ შემოსაზღვრის ასახვა არის ჰომეომორფიზმი და $\overline{c(X)} = cX$. თეორემებიდან 3.2.4 და 3.3.27 გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.

თეორემა 3.3.45. *ტოპოლოგიურ სივრცეს გააჩნია კომპაქტიფიკაცია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არის სავსებით რეგულარული სივრცე.* □

თეორემა 3.3.46. *ნებისმიერ სავსებით რეგულარულ სივრცეს გააჩნია მისი წონის მქონე კომპაქტიფიკაცია.* □

$\mathscr{C}(X)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაციათა ოჯახი. $\mathscr{C}(X)$ ოჯახზე შემოვიტანოთ X ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაციებს შორის მიმართება.

ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცის c_1X და c_2X კომპაქტიფიკაციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია $\sim$ მიმართებით და ასე ჩავწერთ $c_1X \sim c_2X$, თუ არსებობს ისეთი $f : c_1X \to c_2X$ ჰომეომორფიზმი, რომ $f \cdot c_1 = c_2$, ანუ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{array}{ccc} c_1X & \xrightarrow{f} & c_2X \\ & c_1 \nwarrow \quad \nearrow c_2 & \\ & X & . \end{array}$$

$\mathscr{C}(X)$ ოჯახზე განსაზღვრული $\sim$ მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება.

ცხადია, $1_{cX} \cdot c = c$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $cX \sim cX$. ასევე, თუ $c_1X \sim c_2X$, მაშინ $c_2X \sim c_1X$. ტოლობიდან $f \cdot c_1 = c_2$ მიიღება $f^{-1} \cdot (f \cdot c_1) = f^{-1} \cdot c_2$, ანუ $c_1 = f^{-1} \cdot c_2$. შებრუნებული ასახვა $f^{-1} : c_2X \to c_1X$ არის ჰომეომორფიზმი, ამიტომ $c_2X \sim c_1X$. ვთქვათ $c_1X \sim c_2X$ და $c_2X \sim c_3X$. მაშინ არსებობს ისეთი $f_1 : c_1X \to c_2X$ და $f_2 : c_2X \to c_3X$ ჰომეომორფიზმები, რომ $f_1 \cdot c_1 = c_2$ და $f_2 \cdot c_2 = c_3$.

ცხადია, $f_2 \cdot f_1 : c_1X \to c_3X$ ჰომეომორფიზმი აკმაყოფილებს პირობას
$$(f_2 \cdot f_1) \cdot c_1 = f_2 \cdot (f_1 \cdot c_1) = f_2 \cdot c_2 = c_3 .$$
ამრიგად, $c_1X \sim c_3X$.

სიმარტივისათვის $\mathscr{C}(X)/\sim$ ფაქტორ-ოჯახი ისევ აღვნიშნოთ $\mathscr{C}(X)$ სიმბოლოთი. ამრიგად, $\mathscr{C}(X)$ ფაქტორ-ოჯახის ელემენტებია X ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაციების ექვივალენტობის კლასები. ამ შემთხვევაშიც, სიმარტივისთვის cX კომპაქტიფიკაციის $[cX]$ ექვივალენტობის კლასი აღვნიშნოთ cX სიმბოლოთი.

ვთქვათ $c_1X = ([0,1], c_1)$ და $c_2X = ([0,2], c_2)$ არის $X = (0,1)$ სივრცის კომპაქტიფიკაციები, სადაც $c_1 : X \to c_1X$ და $c_2 : X \to c_2X$ არის ჰომეომორფული ჩადგმები, მოცემული $c_1(x) = x$, $x \in X$ და $c_2(x) = 2 \cdot x$, $x \in X$ ფორმულებით. $f : c_1X \to c_2X$ ჰომეომორფიზმი, განსაზღვრული ტოლობით $f(x) = 2 \cdot x$, $x \in [0,1]$, აკმაყოფილებს პირობას $f \cdot c_1 = c_2$. ამრიგად, $c_1X \sim c_2X$. ზემონათქვამიდან გამომდინარე, $X = (0,1)$ სივრცის ამ ორ კომპაქტიფიკაციას აღვიქვამთ, როგორც ერთი და იგივე კომპაქტიფიკაციას.

ახლა $\mathscr{C}(X)$ ოჯახზე შემოვიტანოთ $\leq$ დალაგების მიმართება. ვიტყვით, რომ $c_1X \leq c_2X$, თუ არსებობს ისეთი $f : c_2X \to c_1X$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f \cdot c_2 = c_1$, ანუ კომუტაციურია დიაგრამა
$$\begin{tikzcd} c_1X & & c_2X \arrow[ll, "f"'] \\ & X \arrow[ul, "c_1"] \arrow[ur, "c_2"'] & \end{tikzcd}$$

ვთქვათ $c_1X = S^1$ და $c_2X = [0,1]$ არის $X = (0,1)$ ინტერვალის კომპაქტიფიკაციები $c_1(x) = (\cos 2® x, \sin 2® x)$, $x \in (0,1)$ და $c_2(x) = x$, $x \in (0,1)$ ფორმულებით განსაზღვრული $c_1 : X \to c_1X$ და $c_2 : X \to c_2X$ ჰომეომორფული ჩადგმების ასახვებით.

ვთქვათ $f : c_2X \to c_1X$ არის ასახვა მოცემული ფორმულით
$$f(x) = (\cos 2® x, \sin 2® x), x \in [0,1].$$
ცხადია, $f \cdot c_2 = c_1$. ამრიგად, $c_1X \leq c_2X$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.

წინადადება 3.3.47. *თუ $f, g : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვები X ტოპოლოგიური სივრციდან Y ჰაუსდორფის სივრცეში, მაშინ სიმრავლე ყველა იმ $x \in X$ წერტილებისა, რომელთათვისაც $f(x) = g(x)$, ჩაკეტილია X სივრცეში.*

დამტკიცება. ვთქვათ $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$. ავიღოთ $X \setminus F$ დამატების ნებისმიერი x' წერტილი. ცხადია, $f(x') \neq g(x')$. პირობის თანახმად, არსებობს $f(x')$ და $g(x')$ წერტილების U და V თანაუკვეთი

მიდამოები. f და g ფუნქციები არის უწყვეტი. ამიტომ მოიძებნება x' წერტილის ისეთი G_1 და G_2 მიდამოები, რომ $f(G_1)\subset U$ და $g(G_2)\subset V$. ვთქვათ $G=G_1\bigcap G_2$. ცხადია, $x'\in G$ და $f(G)\subset U$ და $g(G)\subset V$. ამრიგად, G სიმრავლის ყოველ წერტილში f და g ფუნქციები ღებულობს განსხვავებულ მნიშვნელობებს. აქედან გამომდინარე, $G\subset X\setminus F$, ე.ი. $X\setminus F$ სიმრავლის ყოველი x' წერტილი არის შიგა წერტილი. ეს კი ნიშნავს, რომ $X\setminus F$ არის ღია სიმრავლე, ხოლო F ჩაკეტილი სიმრავლე. □

წინადადება 3.3.48. *თუ Y ჰაუსდორფის სივრცეში მნიშვნელობების მქონე $f,g:X\to Y$ უწყვეტი ასახვების შემოსაზღვრა $A\subset X$ მკვრივ ქვესიმრავლეზე ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ $f=g$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $F=\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$. ცხადია, A არის F სიმრავლის ქვესიმრავლე. 3.3.47 წინადადების თანახმად, F არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ამიტომ $X=\overline{A}\subset\overline{F}=F$. ეს კი ნიშნავს, რომ $X=F$, ე.ი. ყოველი $x\in X$ წერტილისთვის $f(x)=g(x)$. ამრიგად, $f=g$. □

წინადადება 3.3.49. *სავსებით რეგულარული X სივრცის $\mathscr{C}(X)$ კომპაქტიფიკაციათა ოჯახი არის დალაგებული ოჯახი.*

დამტკიცება. ცხადია, $\mathscr{C}(X)$ ოჯახის ყოველი cX ელემენტისთვის სამართლიანია ტოლობა $1_{cX}\cdot c=c$, ე.ი. $cX\le cX$.

ვთქვათ $c_1X\le c_2X$ და $c_2X\le c_1X$. მაშინ არსებობს ისეთი $f_2:c_2X\to c_1X$ და $f_1:c_1X\to c_2X$ უწყვეტი ასახვები, რომ $f_2\cdot c_2=c_1$ და $f_1\cdot c_1=c_2$. განვიხილოთ $f_2f_1,1_{c_1X}:c_1X\to c_1X$ და $f_1f_2,1_{c_2X}:c_2X\to c_2X$ უწყვეტი ასახვები. ეს ასახვები $c_1(X)$ და $c_2(X)$ მკვრივ ქვესიმრავლეებზე ერთმანეთს ემთხვევა, ე.ი. $f_2f_1|_{c_1(X)}=1_{c_1X}|_{c_1(X)}$ და $f_1f_2|_{c_2(X)}=1_{c_2X}|_{c_2(X)}$. მართლაც, ვთქვათ $c_1(x)\in c_1(X)$. შევნიშნოთ, რომ f_2f_1 და 1_{c_1X} ფუნქციები მკვრივი $c_1(X)$ სიმრავლის ყოველ $c_1(x)$ წერტილში ღებულობენ ერთსა და იგივე მნიშვნელობებს. 3.3.48 წინადადების თანახმად, $f_2f_1=1_{c_1X}$. ანალოგიურად შემოწმდება $f_1f_2=1_{c_2X}$ ტოლობა. ამრიგად, $f_1:c_1X\to c_2X$ ასახვა არის ჰომეომორფიზმი და $f_1\cdot c_1=c_2$, ე.ი. $c_1X\sim c_2X$ და ისინი ითვლებიან X სივრცის ერთი და იგივე კომპაქტიფიკაციებად.

ვთქვათ $c_1X\le c_2X$ და $c_2X\le c_3X$. მაშინ არსებობს ისეთი $f:c_2X\to c_1X$ და $g:c_3X\to c_2X$ უწყვეტი ასახვები, რომ $f\cdot c_2=c_1$ და $g\cdot c_3=c_2$. შევნიშნოთ, რომ $f\cdot g:c_3X\to c_1X$ უწყვეტი ასახვისთვის სრულდება ტოლობა

$$(f\cdot g)\cdot c_3=f\cdot(g\cdot c_3)=f\cdot c_2=c_1.$$

ამრიგად, $c_1 X \le c_3 X$. □

თეორემა 3.3.50. *სავსებით რეგულარული X ტოპოლოგიური სივრცის ყველა კომპაქტიფიკაციათა $\mathscr{C}(X)$ სიმრავლეში არსებობს უდიდესი ელემენტი.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\mathscr{A}(X) = \{c_{\sim} X\}_{\sim \in A}$ არის $\mathscr{C}(X)$ ოჯახის ნებისმიერი ქვეოჯახი. განვიხილოთ დიაგონალური ასახვა

$$c_{\mathscr{A}} = \mathop{\Delta}_{\sim \in A} c_{\sim} : X \to \prod_{\sim \in A} c_{\sim} X \ .$$

შევნიშნოთ, რომ $c_{\mathscr{A}}$ არის ჰომეომორფული ჩადგმა. ვთქვათ $c_{\mathscr{A}} X = \overline{c_{\mathscr{A}}(X)} \subset \prod_{\sim \in A} c_{\sim} X$. ნებისმიერი $\sim \in A$ ინდექსისთვის $c_{\sim} X \le c_{\mathscr{A}} X$. ცხადია, კომუტაციური დიაგრამიდან

$$\begin{tikzcd}
c_{\sim} X & & \prod\limits_{\sim \in A} c_{\sim} X \arrow[ll, "p_{\sim}"'] \\
& X \arrow[ul, "c_{\sim}"] \arrow[ur, "c_{\mathscr{A}}"'] &
\end{tikzcd}$$

მიიღება კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
c_{\sim} X & & c_{\mathscr{A}} X \arrow[ll, "p_{\sim}|_{c_{\mathscr{A}} X}"'] \\
& X \arrow[ul, "c_{\sim}"] \arrow[ur, "c_{\mathscr{A}}"'] &
\end{tikzcd} .$$

ამრიგად, $c_{\sim} X \le c_{\mathscr{A}} X$.

ვთქვათ cX არის X ტოპოლოგიური სივრცის ისეთი კომპაქტიფიკაცია, რომ ნებისმიერი $\sim \in A$ ინდექსისთვის $c_{\sim} X \le cX$. ვაჩვენოთ, რომ $c_{\mathscr{A}} X \le cX$. პირობის თანახმად არსებობს ისეთი $f_{\sim} : cX \to c_{\sim} X$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f_{\sim} \cdot c = c_{\sim}$, $\sim \in A$. ცხადია, $f = \mathop{\Delta}_{\sim \in A} f_{\sim} : cX \to \prod_{\sim \in A} c_{\sim} X$ დიაგონალური ასახვა აკმაყოფილებს პირობას $f \cdot c = c_{\mathscr{A}}$, ე.ი. კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\sim \in A} c_{\sim} X & & cX \arrow[ll, "f"'] \\
& X \arrow[ul, "c_{\mathscr{A}}"] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

აქედან კი მიიღება კომუტაციური დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
c_{\mathscr{A}} X & & cX \arrow[ll, "f"'] \\
& X \arrow[ul, "c_{\mathscr{A}}"] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

ე.ი. $f \cdot c = c_{\mathscr{A}}$. ამრიგად, $c_{\mathscr{A}} X \le cX$. ეს კი ნიშნავს, რომ $c_{\mathscr{A}} X$ არის $\mathscr{A}(X)$ ოჯახის ზუსტი ზედა საზღვარი.

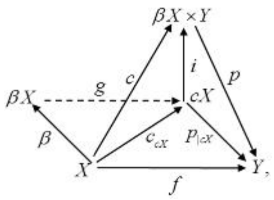
ზემონათქვამიდან გამომდინარე, $(\mathscr{C}(X), \le)$ დალაგებული ოჯახის

ყოველი არაცარიელი ქვეოჯახისთვის $\mathscr{C}(X)$ ოჯახში არსებობს ზუსტი ზედა საზღვარი. ამრიგად, სავსებით რეგულარული X სივრცის კომპაქტიფიკაციათა $\mathscr{C}(X)$ ოჯახში არსებობს უდიდესი ელემენტი. □

X ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაციათა $\mathscr{C}(X)$ ოჯახის უდიდეს ელემენტს ეწოდება X სივრცის სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაცია. ის აღინიშნება X სიმბოლოთი. X სივრცის X კომპაქტიფიკაციაში ჰომეომორფულ ჩადგმას აღნიშნავენ $: X \to \quad X$ სიმბოლოთი. მოვიყვანოთ ამ კომპაქტიფიკაციის რამდენიმე თვისება.

თეორემა 3.3.51. *X სავსებით რეგულარული სივრცის Y კომპაქტურ სივრცეში ყოველ $f : X \to Y$ უწყვეტ ასახვას აქვს უწყვეტი გაგრძელება $\tilde{f} : \quad X \to Y$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $c = \quad \Delta f : X \to \quad X \times Y$ და $cX = \overline{c(X)} \subset \quad X \times Y$. ცხადია, cX არის X სივრცის კომპაქტიფიკაცია. განვიხილოთ კომუტაციური დიაგრამა



სადაც $i : cX \to \quad X \times Y$ არის ჩადგმის ასახვა, ხოლო $p : \quad X \times Y \to Y$ პროექცია მეორე თანამამრავლზე. $c_{cX} : X \to cX$ და $p_{|cX} : cX \to Y$ შემოსაზღვრის ასახვები აკმაყოფილებენ პირობებს $i \cdot p = p_{|cX}$ და $i \cdot c_{cX} = c$. ტოლობიდან $p \cdot c = f$ მიიღება $p_{|cX} \cdot c_{cX} = f$. გარდა ამისა, პირობიდან $X \geq cX$ გამომდინარეობს ისეთი $g : \quad X \to cX$ უწყვეტი ასახვის არსებობა, რომ $g \cdot \quad = c_{cX}$.

ვთქვათ $\tilde{f} = p_{|cX} \cdot g : \quad X \to Y$. შევნიშნოთ, რომ

$$f = p_{|cX} \cdot c_{cX} = p_{|cX} \cdot g \cdot \quad = \tilde{f} \cdot \quad .$$

ამრიგად, $\tilde{f}_{|X} = f$. □

თეორემა 3.3.52. *თუ X სავსებით რეგულარული სივრცის კომპაქტურ სივრცეში ყოველი უწყვეტი ასახვა გაგრძელებადია $\sim X$ კომპაქტიფიკაციაზე, მაშინ $\sim X$ კომპაქტიფიკაცია ექვივალენტურია X კომპაქტიფიკაციის.*

დამტკიცება. როგორც ვიცით, $\sim X \leq \quad X$. ვაჩვენოთ, სამართლიანია $X \geq \sim X$ მიმართება. პირობის ძალით, არსებობს ასახვის $g : \sim X \to \quad X$ უწყვეტი გაგრძელება, ე.ი. $g \cdot \sim = \quad$. ამრიგად, $X \leq \sim X$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\sim X \sim \quad X$. □

შედეგი 3.3.53. *X ნორმალური სივრცის Y ჩაკეტილი ქვესივრცის X სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაციაში ჩაკეტვა არის Y ქვესივრცის კომპაქტიფიკაცია, რომელიც ჰომეომორფულია Y სივრცის Y სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაციისა.* □

ახლა აღვწეროთ ლოკალურად კომპაქტური X სივრცის μX ალექსანდროვის კომპაქტიფიკაცია, რომელიც მიიღება სივრცეზე ერთი Ω წერტილის მიერთებით. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.3.54. (ალექსანდროვი). ნებისმიერ *არაკომპაქტურ, მაგრამ ლოკალურად კომპაქტურ, ჰაუსდორფის X სივრცეზე ერთი Ω წერილის მიერთებით მიიღება ისეთი μX კომპაქტიფიკაცია, რომელიც არის $\mathscr{C}(X)$ ოჯახის უმცირესი ელემენტი და* $w(\mu X) = w(X)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $(X, {}^2)$ არის არაკომპაქტური, ლოკალურად კომპაქტური სივრცე, ხოლო Ω მასში არამდებარე წერილი. $\mu X = X \bigcup \{\Omega\}$ სიმრავლეზე შემოვიტანოთ ${}^2{}_\Omega$ ტოპოლოგიური სტრუქტურა. ვთქვათ

$$ {}^2{}_\Omega = \{U, \{\Omega\} \bigcup (X \setminus F) \mid U \in {}^2, F \subset X\}, $$

სადაც F არის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. ვაჩვენოთ ${}^2{}_\Omega$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\mu X = X \bigcup \{\Omega\}$ გაერთიანებაზე.

O1). μX და $\varnothing$ არის ${}^2{}_\Omega$ ოჯახის ელემენტები, რადგან $\varnothing \in {}^2$ და $\mu X = \{\Omega\} \bigcup (X \setminus \varnothing)$.

O2). ვთქვათ $U, V \in {}^2{}_\Omega$. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

ა). ვთქვათ $U, V \in {}^2$, თანაკვეთა $U \bigcap V \in {}^2{}_\Omega$, რადგან $U \bigcap V \in {}^2$.

ბ).ვთქვათ $U = \{\Omega\} \bigcup (X \setminus F)$ და $V = \{\Omega\} \bigcup (X \setminus Q)$, სადაც F და Q არის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლეები. შევნიშნოთ, რომ

$$ U \bigcap V = \{\Omega\} \bigcup ((X \setminus F) \bigcap (X \setminus Q)) = \{\Omega\} \bigcup (X \setminus (F \bigcup Q)). $$

ცხადია, $F \bigcup Q$ არის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. ამიტომ $U \bigcap V \in {}^2{}_\Omega$.

გ).ვთქვათ $U \in {}^2$ და $V = \{\Omega\} \bigcup (X \setminus F)$, სადაც F არის კომპაქტური ქვესიმრავლე X სივრცეში. ცხადია, $U \bigcap V = U \setminus F$ და $U \setminus F$ არის ღია სიმრავლე X სივრცეში. ამრიგად, $U \bigcap V \in {}^2$. აქედან გამომდინარე, $U \bigcap V \in {}^2{}_\Omega$.

O3). ვთქვათ $U_{\sim} \in {}^2{}_\Omega$, $\sim \in A$. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები.

ა). თუ $U_{\sim} \in {}^2$, მაშინ $\bigcup_{\sim \in A} U_{\sim} \in {}^2$ და ამიტომ $\bigcup_{\sim \in A} U_{\sim} \in {}^2{}_\Omega$.

ბ).ვთქვათ $U_{\sim} = \{\Omega\} \bigcup (X \setminus F_{\sim})$, სადაც $F_{\sim}$ არის კომპაქტური ქვესიმრავლე X სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ

$$ \bigcup_{\sim \in A} U_{\sim} = \{\Omega\} \bigcup (\bigcup_{\sim \in A} (X \setminus F_{\sim})) = \{\Omega\} \bigcup (X \setminus \bigcap_{\sim \in A} F_{\sim}). $$

ცხადია, $\bigcap\limits_{\sim\in A} F_{\sim}$ არის $F_{\sim}$ კომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ამიტომ $\bigcap\limits_{\sim\in A} F_{\sim}$ არის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. ამრიგად, $\bigcup\limits_{\sim\in A} U_{\sim} \in {}^{2}{}_{\Omega}$.

გ). ვთქვათ $U_{\sim'} \in {}^{2}, \sim' \in A', U_{\sim''} = \{\Omega\}\bigcup(X \setminus F_{\sim''})$, $\sim'' \in A''$ და $A = A'\bigcup A''$. O3) პირობის ა) და ბ) პუნქტების თანახმად,

$$U' = \bigcup_{\sim'\in A'} U_{\sim'} \in {}^{2}$$

და

$$U'' = \bigcup_{\sim''\in A''} U_{\sim''} = \{\Omega\}\bigcup(X \setminus \bigcap_{\sim''\in A''} F_{\sim''}).$$

ვთქვათ $F = \bigcap\limits_{\sim''\in A''} F_{\sim''}$. ვაჩვენოთ, რომ $U'\bigcup(\{\Omega\}\bigcup(X \setminus F)) \in {}^{2}{}_{\Omega}$. შევნიშნოთ, რომ

$$U'\bigcup(\{\Omega\}\bigcup(X \setminus F)) = \{\Omega\}\bigcup(X \setminus (F \setminus U')).$$

$F \setminus U'$ სიმრავლე, როგორც F კომპაქტური სიმრავლის ჩაკეტილი ქვესივრცე, არის კომპაქტური. ამიტომ $U'\bigcup(\{\Omega\}\bigcup(X \setminus F)) \in {}^{2}{}_{\Omega}$.

ვაჩვენოთ, რომ μX არის კომპაქტური სივრცე. ვთქვათ $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ არის μX სივრცის ღია დაფარვა. μX სივრცის Ω წერტილი ეკუთვნის რომელიმე $U_{s_0} = \{\Omega\}\bigcup(X \setminus F_{s_0})$ ღია სიმრავლეს, სადაც F_{s_0} არის X სივრცის კომპაქტური ქვესივრცე.

$\sim$ დაფარვიდან ამოვარჩიოთ $U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_n}$ სიმრავლეები, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $F_{s_0} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$. სისტემა $U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_n}, \{\Omega\}\bigcup(X \setminus F_{s_0})$ იქნება $\sim$ დაფარვის სასრული ქვედაფარვა. ამრიგად, μX არის კომპაქტური სივრცე.

Ω წერტილი არის X სივრცის შეხების წერტილი, რადგან მისი ნებისმიერი მიდამო არის $\{\Omega\}\bigcup(X \setminus F)$ სახის და იკვეთება X სივრცესთან. ამრიგად, $\overline{X} = \mu X$.

X სივრცის ყოველი F კომპაქტური ქვესიმრავლე იფარება იმ $\pm = \{U_t\}_{t\in T}$ ბაზისის სასრული რაოდენობის $U_{t_1}, U_{t_2}, \ldots, U_{t_n}$ ელემენტებით, რომლის სიმძლავრე $|\pm| = w(X) = m$. ამრიგად, X სივრცის ყოველ F კომპაქტურ ქვესიმრავლეს შეესაბამება T სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლეები. ცხადია, T სიმრავლის ყველა სასრული ქვესიმრავლეების სიმრავლის სიმძლავრე $\le m$. ამიტომ ${}^{2}{}_{\Omega}$ ტოპოლოგიური სტრუქტურის $\{\Omega\}\bigcup(X \setminus F)$ სახის ელემენტების ოჯახის სიმძლავრე $\le m$. ამრიგად, ${}^{2}{}_{\Omega}$ ტოპოლოგიურ სტრუქტურაში არსებობს ქვეოჯახი $\pm_{\Omega}$, რომელიც არის $(\mu X, {}^{2}{}_{\Omega})$ სივრცის ბაზისი. ასეთი ოჯახია

$$\pm_{\Omega} = \pm \bigcup \{\{\Omega\} \bigcup (X \setminus F) \mid F \subset X\},$$

სადაც F არის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. ცხადია, $|\pm_{\Omega}| \le m$. ამრიგად, $w(\mu X) = m = w(X)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ X სივრცის ნებისმიერი cX კომპაქტიფიკაციისთვის $\mu X \le cX$. განვმარტოთ $f : cX \to \mu X$ ასახვა. ვთქვათ

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in c(X), \\ \Omega, & x \in cX \setminus c(X). \end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ f არის უწყვეტი ასახვა. ვთქვათ, U არის $\mu(X)$ კომპაქტიფიკაციის ისეთი ღია სიმრავლე, რომ $U \in {}^{2}$. ცხადია, $f^{-1}(U) = U$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე. 3.3.36 წინადადების თანახმად, X არის cX კომპაქტიფიკაციის ღია ქვესივრცე. ამიტომ $f^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია cX სივრცეში. ვთქვათ μX სივრცის ღია სიმრავლე არის $\{\Omega\} \bigcup (X \setminus F)$ სახის, სადაც F არის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. შევნიშნოთ, რომ $f^{-1}(\{\Omega\} \bigcup (X \setminus F)) = cX \setminus F$. ეს სიმრავლე, როგორც კომპაქტური სიმრავლის დამატება არის ღია. გარდა ამისა $f \cdot c = \mu$. ამრიგად, $\mu X \le cX$. □

სავარჯიშო 3.3.55.1). განვიხილოთ $A = \{0,1\}$ სიმრავლე ${}^{2} = \{A, \varnothing, \{0\}\}$ ტოპოლოგიური სტრუქტურით და $A^m = \prod_{s \in S} A_s$ დეკარტული ნამრავლი, სადაც $A_s = A$ და $|S| = m$. A^m დეკარტულ ნამრავლს ეწოდება ალექსანდროვის კუბი.

ვთქვათ X არის T_0-სივრცე, ხოლო $U \subset X$ ღია ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, $f : X \to A$ ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in U, \\ 1, & x \in X \setminus U, \end{cases}$$

არის უწყვეტი, ხოლო A^m ალექსანდროვის კუბი უნივერსალური სივრცე $m \ge \aleph_0$ წონის მქონე T_0-სივრცეთა კლასის მიმართ.

2).აჩვენეთ, ყოველ უსასრულო კომპაქტურ სივრცეში არსებობს თვლადი არაჩაკეტილი ქვესიმრავლე.

3).აჩვენეთ, ყოველი ურთიერთცალსახა უწყვეტი ასახვა ერთი კომპაქტური სივრცისა მეორე კომპაქტურ სივრცეზე არაა ჰომეომორფიზმი. მოიყვანეთ მაგალითი.

4).აჩვენეთ, ყოველი X კომპაქტური სივრცის წონა არ აღემატება მის სიმძლავრეს.

5).ვთქვათ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი ასახვა X სივრცისა Y კომპაქტურ სივრცეზე. დაამტკიცეთ, $w(Y) \le w(X)$.

6). ვთქვათ $A=\{(x,1/x)\,|\,0<x\le 1\}$ და $B=\{(x,\sin 1/x)\,|\,0<x\le 1\}$ არის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე $\mathbb{R}^2$ სიბრტყის ქვესიმრავლეები. აჩვენეთ, A და B არაა კომპაქტური სივრცეები.

ვთქვათ $\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე მოცემულია ტოპოლოგიური სტრუქტურა

$$^2=\{U,\varnothing\,|\,U=\mathbb{R}\setminus F, F\subset\mathbb{R}\},$$

სადაც F არის სასრული სიმრავლე. აჩვენეთ, $(\mathbb{R},^2)$ სივრცე არის კომპაქტური და ნებისმიერი $A\subset\mathbb{R}$ უსასრულო სიმრავლისთვის $\overline{A}=\mathbb{R}$.

7).აჩვენეთ, ყოველი სივრცე, რომელიც წარმოიდგინება ლოკალურად კომპაქტური ჩაკეტილი ქვესივრცეების ლოკალურად სასრული სისტემის ელემენტთა გაერთიანებით, არის ლოკალურად კომპაქტური.

8).აჩვენეთ, სავსებით რეგულარული სივრცე X ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ყოველი cX კომპაქტიფიკაციის $cX\setminus c(X)$ ნაზრდი არის ჩაკეტილი cX სივრცეში.

9).აჩვენეთ, S^1 წრეწირი და S^2 სფერო შესაბამისად არის $\mathbb{R}$ ღერძის და $\mathbb{R}^2$ სიბრტყის ერთწერტილიანი კომპაქტიფიკაციების ჰომეომორფული.

10).აჩვენეთ, X ჰაუსდორფის სივრცე ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს X სივრცის $\sim=\{U_s\}_{s\in S}$ ღია დაფარვა, რომლის U_s, $s\in S$ ელემენტების ჩაკეტვები $\overline{U}_s$, $s\in S$ არის კომპაქტური ქვესივრცეები X სივრცეში.

3.4. მეტრიკული და მეტრიზებადი სივრცეები

მეტრიკული სივრცე არის ტოპოლოგიური სივრცის კლასიკური მაგალითი. თანამედროვე ანალიზური ტოპოლოგიის ფუნდამენტური ცნებების შემოტანა და მთავარი შედეგების მიღება უპირველესად უკავშირდება სწორედ ასეთ სივრცეთა კლასებს.

ამ პარაგრაფის მიზანია მეტრიკულ სივრცეთა ძირითადი თვისებების გადმოცემა და სიმრავლეზე ტოპოლოგიური სტრუქტურის აგება მასზე განმარტებული მეტრიკის მეშვეობით.

ვთქვათ X ნებისმიერი სიმრავლეა. მეტრიკა X სიმრავლეზე ეწოდება $^\circ : X\times X\to[0,+\infty)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

M1). $^\circ(x,y)=0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x=y$.

M2). ნებისმიერი $x,y\in X$ წერტილისთვის $^\circ(x,y)={}^\circ(y,x)$.

M3). ნებისმიერი $x,y,z\in X$ წერტილისთვის $^\circ(x,y)+{}^\circ(y,z)\ge{}^\circ(x,z)$.

$(X,{}^\circ)$ წყვილს ეწოდება მეტრიკული სივრცე, მას სიმარტივისთვის ხშირად ავღნიშნავთ მხოლოდ სიმბოლოთი X, როცა ცნობილია

რომელი მეტრიკაა მასზე განსაზღვრული და არაა საჭირო მისი დაფიქსირება. x და y ელემენტების (x, y) წყვილზე ° ფუნქციის $°(x, y)$ მნიშვნელობას ეწოდება მანძილი x და y წერტილებს შორის. ° მეტრიკის M1), M2) და M3) პირობებს ეწოდება მეტრიკის აქსიომები. ისინი გამოხატავენ მანძილის შემდეგ თვისებებს:

M1). იგივეობის აქსიომა. მანძილი ორ წერტილს შორის ნულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ერთმანეთს ემთხვევა.

M2). სიმეტრიულობის აქსიომა. x და y წერტილებს შორის მანძილი ტოლია y და x წერტილებს შორის მანძილის.

M3). სამკუთხედის აქსიომა. x წერტილიდან y წერტილამდე და y წერტილიდან z წერტილამდე მანძილების ჯამი მეტია ან ტოლი x წერტილიდან z წერტილამდე მანძილის.

სიმბოლოთი $B(x,£)$ აღვნიშნოთ X მეტრიკული სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, საიდანაც x წერტილამდე მანძილი ნაკლებია £ დადებით რიცხვზე, ხოლო სიმბოლოთი $\overline{B(x,£)}$ აღვნიშნოთ ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, საიდანაც x წერტილამდე მანძილი ნაკლებია ან ტოლი £ დადებით რიცხვზე. სხვაობა $\overline{B(x,£)} \setminus B(x,£)$ აღვნიშნოთ სიმბოლოთი $S(x,£)$.

$B(x,£)$ სიმრავლეს ეწოდება £ რადიუსიანი ღია ბირთვი ცენტრით x წერტილში.

$\overline{B(x,£)}$ სიმრავლეს ეწოდება £ რადიუსიანი ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით x წერტილში.

$S(x,£)$ სიმრავლეს ეწოდება £ რადიუსიანი სფერო ცენტრით x წერტილში.

$(X, °)$ მეტრიკული სივრცის A არაცარიელი სიმრავლის დიამეტრი ეწოდება A სიმრავლის წერტილებს შორის მანძილების სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს და აღინიშნება სიბოლოთი $¢(A)$. განმარტების თანახმად,

$$¢(A) = \sup\{°(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

მიღებულია, რომ $¢(\varnothing) = 0$.

მეტრიკული სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ $¢(A) < \infty$.

X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ° მეტრიკას ეწოდება შემოსაზღვრული a ნამდვილი რიცხვით, თუ $¢(X) < a$.

$(X, °)$ მეტრიკული სივრცის $x \in X$ წერტილიდან $A \subset X$ ქვესიმრავლემდე მანძილი განისაზღვრება ფორმულით

$$°(x, A) = \inf\{°(x, y) \mid x \in A\}, \quad A \neq \varnothing.$$

მიღებულია, რომ $° (x,\varnothing)=1$.

$(X, °)$ მეტრიკული სივრცის A და B ქვესიმრავლეებს შორის მანძილი მოიცემა ფორმულით

$$° (A,B)=\inf\{° (x,y) \mid x\in A, y\in B\}, A\neq\varnothing, B\neq\varnothing .$$

მიღებულია, რომ $° (A,\varnothing)=1$ და $° (\varnothing,B)=1$.

$(X, °)$ მეტრიკულ სივრცეზე ავაგოთ ტოპოლოგიური სტრუქტურა. ამ მიზნით ყოველ $x\in X$ წერტილში განვიხილოთ ოჯახი $\pm (x)=\{B(x,£)\}_{£\in\mathbb{R}}$, $x\in X$. ვაჩვენოთ, რომ $\pm (X)=\{\pm (x)\}_{x\in X}$ ოჯახს გააჩნია შემდეგი თვისებები.

BN1). ნებისმიერი $x\in X$ წერტილისთვის $\pm (x)\neq\varnothing$ და ყოველი $B(x,£)\in\pm (x)$ ელემენტისთვის $x\in B(x,£)$. ეს გამომდინარეობს $\pm (x)$ ოჯახის განმარტებიდან.

BN2). თუ $x\in B(y,£)\in\pm (y)$, მაშინ არსებობს ისეთი $£'>0$, რომ $B(x,£')\in\pm (x)$ და $B(x,£')\subset B(y,£)$.

ვთქვათ $£'=£-° (x,y)$. განვიხილოთ $B(x,£')$ ბირთვის ნებისმიერი z წერტილი. ვაჩვენოთ, რომ $z\in B(y,£)$. შევნიშნოთ,

$$° (y,z)\leq ° (y,x)+° (x,z)< ° (y,x)+£'= ° (y,x)+£-° (x,y)<£ .$$

ამრიგად, $z\in B(y,£)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $B(x,£')\subset B(y,£)$.

BN3). თუ $B(x,£'),B(x,£'')\in\pm (x)$, მაშინ არსებობს ისეთი $B(x,£)\in\pm (x)$, რომ $B(x,£)\subset B(x,£')\bigcap B(x,£'')$. ეს ცხადია, რადგან $£$ რიცხვის როლში შეგვიძლია ავიღოთ $£=\min(£',£'')$.

ვთქვათ $²_{\circ}$ არის X სიმრავლის იმ ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა, რომლებიც წარმოიდგინება $\bigcup_{x\in X}\pm (x)$ ოჯახის ნებისმიერი ქვეოჯახის ელემენტების გაერთიანებით. 2.4.3 თეორემის თანახმად, $²_{\circ}$ არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა X მეტრიკულ სივრცეზე.

მიღებულ $(X,²_{\circ})$ ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება $°$ მეტრიკით წარმოქმნილი ტოპოლოგიური სივრცე.

ცხადია, $U\subset X$ სიმრავლე არის ღია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $x\in U$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $£>0$ რიცხვი, რომ $B(x,£)\subset U$.

$(X, °)$ მეტრიკული სივრცის ყოველი $Y\subset X$ ქვესიმრავლე შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მეტრიკული სივრცე. ამისთვის საკმარისია Y სიმრავლის ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილად ავიღოთ X მეტრიკული სივრცეში ამ წერტილებს შორის მანძილი.

ცხადია, Y მეტრიკული სივრცით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სივრცე წარმოადგენს X მეტრიკული სივრცით ინდუცირებული

ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცეს.

ვთქვათ $(X,²)$ არის ტოპოლოგიური სივრცე. $(X,²)$ ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება მეტრიზებადი, თუ არსებობს ისეთი $°$ მეტრიკა X ტოპოლოგიურ სივრცეზე, რომ $°$ მეტრიკით ინდუცირებული $²_°$ ტოპოლოგიური სტრუქტურა ემთხვევა $²$ ტოპოლოგიურ სტრუქტურას.

X სიმრავლეზე მოცემულ ორ $°_1$ და $°_2$ მეტრიკას ეწოდება ექვივალენტური, თუ ისინი ინდუცირებს ერთი და იგივე ტოპოლოგიურ სტრუქტურას, ე.ი. $²_{°_1} = ²_{°_2}$.

განვმარტოთ $(X,°)$ მეტრიკულ სირცეში წერტილთა $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ მიმდევრობის კრებადობის ცნება. ამ მიმდევრობას სიმარტივისთვის აღვნიშნავთ სიმბოლოთი (x_n). ვიტყვით, რომ $(X,°)$ მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა (x_n) კრებადია $x \in X$ წერტილისკენ და დავწერთ $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$, თუ $(X,²_°)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში x წერტილის ნებისმიერი $U \subset X$ ღია მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $x_n \in U$. x წერტილს ეწოდება (x_n) მიმდევრობის ზღვარი.

წინადადება 3.4.1. $(X,°)$ *მეტრიკული სივრცის* (x_n) *წერტილთა მიმდევრობა კრებადია* $x \in X$ *წერტილისკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რიცხვითი მიმდევრობა* $(°(x, x_n))$ *კრებადია ნულისკენ.*

დამტკიცება. ვთქვათ (x_n) მიმდევრობა კრებადია $x \in X$ წერტილისკენ. ამიტომ ნებისმიერი $£ > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ $x_n \in B(x,£)$ ღია მიდამოს ყოველი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის. ეს კი ნიშნავს, რომ ყოველი $£ > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $°(x, x_n) < £$. ცხადია, $-£ < 0 \le °(x, x_n) < £$, ანუ $|°(x, x_n) - 0| < £$. ამრიგად, $\lim_{n\to\infty}(°(x, x_n)) = 0$.

ვთქვათ, შებრუნებით, $(X,°)$ მეტრიკული სივრცის წერტილთა (x_n) მიმდევრობა ისეთია, რომ $\lim_{n\to\infty}(°(x, x_n)) = 0$. ცხადია, x წერტილის ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $£ > 0$ რიცხვი, რომ $B(x,£) \subset U$. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $|°(x, x_n) - 0| < £$, ანუ $°(x, x_n) < £$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x_n \in B(x,£) \subset U$. □

კრებადობის ტერმინებში ავღწეროთ $(X,°)$ მეტრიკული სივრცით წარმოქმნილი $(X,²_°)$ ტოპოლოგიური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები. სამართლიანია შემდეგი წინადადება.

წინადადება 3.4.2. *ვთქვათ $(X, °)$ არის მეტრიკულ სივრცე, ხოლო A მისი ქვესიმრავლე. $(X, ²_{°})$ ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილი ეკუთვნის A სიმრავლის $\overline{A}$ ჩაკეტვას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს x წერტილისკენ კრებადი A სიმრავლის წერტილთა მიმდევრობა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in \overline{A}$. ცხადია, ყოველი $£ = 1/n$ რიცხვისთვის თანაკვეთა $B(x, 1/n) \bigcap A \neq \varnothing$. ყოველი თანაკვეთიდან ავიღოთ ნებისმიერი x_n წერტილი. შევნიშნოთ, რომ მიიღება მიმდევრობა $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, რომლის ყოველი x_n წევრისთვის $°(x, x_n) < 1/n$, $n = 1, 2, ...$. ცხადია, ტოლობიდან $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ გამომდინარეობს $\lim_{n\to\infty}(°(x, x_n)) = 0$. ამიტომ, 3.4.1 წინადადების თანახმად, $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$.

ვთქვათ, შებრუნებით, A სიმრავლეში არსებობს $x \in X$ წერტილისკენ კრებადი (x_n) მიმდევრობა. ნებისმიერი $U \subset X$ ღია სიმრავლისთვის, რომელიც მოიცავს x წერტილს, არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $x_n \in U$. ამრიგად, $U \bigcap A \neq \varnothing$. ეს კი ნიშნავს, $x \in \overline{A}$. □

შედეგი 3.4.3. $(X, °)$ *მეტრიკული სივრცის $A \subset X$ ქვესიმრავლე ჩაკეტილია $(X, ²_{°})$ ტოპოლოგიურ სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა A ქვესიმრავლის ყოველი კრებადი მიმდევრობის ზღვარი ეკუთვნის A სიმრავლეს.*

დამტკიცება. ვთქვათ A არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, მაშინ A ქვესიმრავლის ყოველი კრებადი მიმდევრობის ზღვარი ეკუთვნის $\overline{A}$ ჩაკეტვას, ანუ A სიმრავლეს, რადგან $\overline{A} = A$.

ვთქვათ, შებრუნებით, A სიმრავლის ყოველი კრებადი მიმდევრობის ზღვარი ეკუთვნის A სიმრავლეს. ვაჩვენოთ, რომ $\overline{A} = A$. ერთის მხრივ $A \subset \overline{A}$. ვაჩვენოთ $\overline{A} \subset A$. ვთქვათ $x \in \overline{A}$. მაშინ არსებობს A სიმრავლის x წერტილისკენ კრებადი (x_n) მიმდევრობა. პირობიდან გამომდინარე, $x \in A$. ამრიგად, $\overline{A} \subset A$. აქედან გამომდინარე, მივიღებთ $\overline{A} = A$, ე.ი. A არის $(X, ²_{°})$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. □

თეორემა 3.4.4. *X სიმრავლეზე განსაზღვრული $°_1$ და $°_2$ მეტრიკები ექვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ისინი ინდუცირებს ერთი და იგივე კრებადობას.*

დამტკიცება. ვთქვათ X სიმრავლეზე განსაზღვრული $°_1$ და $°_2$ მეტრიკები განსაზღვრავს ერთი და იგივე კრებადობას. ვაჩვენოთ $²_{°_1} = ²_{°_2}$. ყოველი $U \in ²_{°_1}$ ღია სიმრავლისთვის $X \setminus U$ ჩაკეტილია

(X,τ_{ρ_1}) ტოპოლოგიურ სივრცეში, ე.ი. $X\setminus U$ ემთხვევა მის ჩაკეტვას (X,τ_{ρ_1}) სივრცეში. პირობიდან გამომდინარე $X\setminus U$ დამატების ჩაკეტვა (X,τ_{ρ_1}) სივრცეში ემთხვევა $X\setminus U$ დამატების ჩაკეტვას (X,τ_{ρ_2}) სივრცეში. ამრიგად, $X\setminus U$ ემთხვევა მის ჩაკეტვას (X,τ_{ρ_2}) სივრცეში, ე.ი. $X\setminus U$ არის ჩაკეტილი (X,τ_{ρ_2}) სივრცეში. ეს კი ნიშნავს, რომ U არის ღია (X,τ_{ρ_2}) სივრცეში და $U\in\tau_{\rho_2}$. ანალოგიურად შემოწმდება, თუ $U\in\tau_{\rho_2}$, მაშინ $U\in\tau_{\rho_1}$. ამრიგად, ρ_1 და ρ_2 მეტრიკები არის ექვივალენტური.

ვთქვათ, შებრუნებით, X სიმრავლეზე განსაზღვრული ρ_1 და ρ_2 მეტრიკები არის ექვივალენტური. ექვივალენტური მეტრიკების განმარტების თანახმად $\tau_{\rho_1}=\tau_{\rho_2}$. ვთქვათ (x_n) არის (X,τ_{ρ_1}) მეტრიკული სივრცის x წერტილისკენ კრებადი მიმდევრობა. განვიხილოთ x წერტილის ნებისმიერი U მიდამო (X,τ_{ρ_2}) სივრცეში. ის ამავე დროს არის ღია სიმრავლე (X,τ_{ρ_1}) სივრცეში. (x_n) მიმდევრობის კრებადობის გამო არსებობს ისეთი $n_0\in\mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n>n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $x_n\in U$. ეს კი ნიშნავს, რომ (x_n) მიმდევრობის ზღვარი ρ_2 მეტრიკის მიმართაც არის იგივე x წერტილი. □

მოვიყვანოთ მეტრიკულ სივრცეთა მაგალითები.

მაგალითი 3.4.5. ვთქვათ X არის ნებისმიერი სიმრავლე. X სიმრავლის ნებისმიერი ორი x და y წერტილისთვის განვსაზღვროთ მანძილი $\rho(x,y)$ შემდეგი ფორმულით

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

ამ ფორმულით განისაზღვრება ფუნქცია $\rho: X\times X\to[0,+\infty)$, რომელიც აკმაყოფილებს აქსიომებს. ცხადია, $B(x,1)=\{x\}$. ამიტომ (X,τ_ρ) ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი ერთწერტილიანი სიმრავლე არის ღია, ე.ი. (X,τ_ρ) არის დისკრეტული სივრცე. აქედან გამომდინარეობს, ყოველი დისკრეტული სივრცე არის მეტრიზებადი.

მაგალითი 3.4.6. ვთქვათ $X=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ არის რიცხვითი ღერძი. X სიმრავლის ყოველი ორი x და y წერტილისთვის განვსაზღვროთ მანძილი

$$\rho(x,y)=|x-y|,\ x,y\in\mathbb{R}.$$

ამ ფორმულით განსაზღვრული ფუნქცია $\rho:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ აკმაყოფილებს მეტრიკის აქსიომებს. ρ მეტრიკით წარმოქმნილ τ_ρ ტოპოლოგიური სიტრუქტურა $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძზე არის ბუნებრივი

ტოპოლოგიური სტრუქტურა. ამრიგად, $\mathbb{R}$ ღერძი, როგორც ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე ტოპოლოგიური სივრცე, არის მეტრიზებადი.

მაგალითი 3.4.7. ვთქვათ $X=\mathbb{R}^n$. როგორც 2.1.4 მაგალითში ვთქვით, X ევკლიდური სივრცის ორ $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ წერტილს შორის მანძილი მოიცემა ფორმულით

$$^\circ(x,y)=\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\}^{1/2} .$$

ამ ფორმულით განსაზღვრული $^\circ:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეტრიკის აქსიომებს. იგივეობის და სიმეტრიულობის აქსიომები მარტივად მოწმდება, ხოლო სამკუთხედის აქსიომა გამომდინარეობს კოში-ბუნიაკოვსკის ცნობილი უტოლობიდან

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i\le\{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\}^{1/2}\cdot\{\sum_{i=1}^{n}y_i^2\}^{1/2} .$$

ამ მეტრიკით წარმოქმნილი ²。 ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\mathbb{R}^n$ ევკლიდურ სივრცეზე არის 2.1.4 მაგალითში განმარტებული ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურა $\mathbb{R}^n$ ევკლიდურ სივრცეზე. ამრიგად, $\mathbb{R}^n$, როგორც ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე სივრცე, არის მეტრიზებადი.

მაგალითი 3.4.8. ვთქვათ X არის ჰილბერტის $\mathbb{R}^\infty$ სივრცე, რომლის ელემენტებია ისეთი $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ მიმდევრობები, რომ $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2$ მწკრივები არის კრებადი. ნებისმიერი $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ უსასრულო რიცხვითი მიმდევრობებისთვის სამართლიანია კოში-ბუნიაკოვსკის განზოგადოებული ფორმულა

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i\cdot y_i\le\{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\}^{1/2}\cdot\{\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2\}^{1/2},$$

რომლის მეშვეობით მტკიცდება, თუ $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2$ და $\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2$ კრებადია, მაშინ აგრეთვე კრებადია მწკრივი $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$. აქედან გამომდინარე, ჰილბერტის სივრცის ნებისმიერი ორი $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ წერტილისთვის განიმარტება მანძილი

$$^\circ(x,y)=\{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\}^{1/2},$$

რომელიც აკმაყოფილებს მეტრიკის აქსიომებს.

მაგალითი 3.4.9. ვთქვათ X არის n-განზომილებიანი გეგმილური სივრცე, ანუ $n+1$-განზომილებიანი $\mathbb{R}^{n+1}$ სივრცის სათავეზე გამავალი ყველა წრფეების სიმრავლე. X სიმრავლის ნებისმიერ ორ a და b

ელემენტს, ანუ a და b წრფეებს შორის მანძილი $°(a,b)$ განვსაზღვროთ როგორც a და b წრფეებს შორის კუთხე. ამ წესით განისაზღვრება ფუნქცია $° : X \times X \to [0,+\infty)$, რომლისთვისაც სრულდება მეტრიკის M1) და M2) აქსიომები. სამკუთხედის უტოლობის M3) აქსიომა გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ სამწახნაგა კუთხეში ნებისმიერი ორი ბრტყელი კუთხის ჯამი მეტია მესამე ბრტყელ კუთხეზე. $n = 2$ შემთხვევისთვის X მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ გეგმილურ სიბრტყეს.

ყოველი $(X,°)$ მეტრიკული სივრცით წარმოქმნილი $(X,²_{°})$ ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს T_2-აქსიომას. ყოველი x და y განხვავებული წერტილისთვის განვიხილოთ $£ = 1/2\,°(x,y)$ რიცხვი. ცხადია, x და y წერტილების $B(x,£)$ და $B(y,£)$ მიდამოების თანაკვეთა არის ცარიელი. ამრიგად, $(X,²_{°})$ სივრცე არის T_2-სივრცე, ანუ ჰაუსდორფის სივრცე.

თეორემა 3.4.10. *ყოველი $(X,°)$ მეტრიკული სივრცისთვის X სიმრავლეზე არსებობს ერთით შემოსაზღვრული $°'$ მეტრიკა, რომელიც მასზე წარმოქმნის იგივე ტოპოლოგიურ სტრუქტურას, რასაც $°$ მეტრიკა, ანუ $²_{°} = ²_{°'}$.*

დამტკიცება. X სიმრავლის ნებისმიერი ორი x და y წერტილისთვის განვსაზღვროთ მანძილი

$$°'(x,y) = \min\{1, °(x,y)\},\ x,y \in X .$$

ვაჩვენოთ $°' : X \times X \to [0,+\infty)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეტრიკის აქსიომებს.

M1). იგივეობის აქსიომა. ვთქვათ $x = y$, მაშინ

$$°'(x,x) = \min\{1, °(x,x)\} = \min\{1,0\} = 0 .$$

ვთქვათ, პირიქით, $°'(x,y) = 0$. მაშინ

$$°'(x,y) = \min\{1, °(x,y)\} = 0 = °(x,y).$$

ამიტომ $x = y$.

M2). სიმეტრიის აქსიომა. შევნიშნოთ, რომ

$$°'(x,y) = \min\{1, °(x,y)\} = \min\{1, °(y,x)\} = °'(y,x) .$$

M3). სამკუთხედის აქსიომა. ვთქვათ $x,y,z \in X$. ვაჩვენოთ,

$$°'(x,z) \le °'(x,y) + °'(y,z) .$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\min\{1+°(x,y), 1+°(y,z), °(x,y)+°(y,z), 2\} \ge \min\{1, °\{x,z\}\}.$$

აქედან გამომდინარე,

$$°'(x,y) + °'(y,z) = \min\{1, °(x,y)\} + \min\{1, °(y,z)\} =$$
$$= \min\{1+°(x,y), 1+°(y,z), °(x,y)+°(y,z), 2\} \ge \min\{1, °\{x,z\}\} = °'(x,z).$$

შევნიშნოთ, რომ (X,ρ) და (X,ρ') მეტრიკული სივრცეებით ინდუცირებულ (X,τ_ρ) და $(X,\tau_{\rho'})$ ტოპოლოგიურ სივრცეებში ღია ბირთვები, რომელთა ε რადიუსები ნაკლებია ერთზე, ქმნის ბაზისს. ცხადია, (X,τ_ρ) და $(X,\tau_{\rho'})$ სივრცეების ყოველი $x\in X$ წერტილის ε ბირთვები $B(x,\varepsilon)$, $\varepsilon<1$, როგორც პირველი, ისე მეორე მეტრიკის შემთხვევაში ერთი და იგივეა. აქედან მივიღებთ, რომ τ_ρ და $\tau_{\rho'}$ ტოპოლოგიური სტრუქტურები ემთხვევა ერთმანეთს. □

მოვიყვანოთ მეტრიზებად სივრცეთა ასახვების უწყვეტობის დახასიათება.

თეორემა 3.4.11. $f:(X,\tau_\rho)\to(Y,\tau_\sigma)$ *ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი* $x\in X$ *წერტილისთვის და ნებისმიერი* $\varepsilon>0$ *რიცხვისთვის არსებობს ისეთი* $\delta>0$ *რიცხვი, რომ როცა* $\rho(x,x')<\delta$ *, მაშინ* $\sigma(f(x),f(x'))<\varepsilon$ *.*

დამტკიცება. ვთქვათ f არის უწყვეტი ასახვა. მოცემული $x\in X$ წერტილისა და $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის განვიხილოთ $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ წინარესახე, რომელიც არის ღია X სივრცეში და მოიცავს x წერტილს. ამიტომ იარსებებს x წერტილის მომცველი ისეთი $B(x,\delta)$ ღია ბირთვი, რომ

$$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))\,.$$

აქედან გამომდინარე, $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$. ამრიგად, თუ $x'\in B(x,\delta)$, მაშინ $f(x')\in B(f(x),\varepsilon)$. ეს კი ნიშნავს, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $\rho(x,x')<\delta$, მაშინ $\sigma(f(x),f(x'))<\varepsilon$.

ვთქვათ, შებრუნებით, სრულდება $\varepsilon-\delta$ პირობა. ვაჩვენოთ f ასახვა არის უწყვეტი. განვიხილოთ (Y,τ_σ) სივრცის ნებისმიერი U ღია ქვესიმრავლის $f^{-1}(U)$ წინარესახე და მისი x წერტილი. ცხადია, $f(x)\in U$. ამიტომ არსებობს ისეთი $B(f(x),\varepsilon)$ ბირთვი, რომ $B(f(x),\varepsilon)\subset U$. პირობის თანახმად, მოიძებნება ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $\rho(x,x')<\delta$, მაშინ $\sigma(f(x),f(x'))<\varepsilon$, ანუ არსებობს ისეთი $B(x,\delta)$ ბირთვი, რომ $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$. აქედან გამომდინარე,

$$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))\subset f^{-1}(U).$$

ამრიგად, x არის $f^{-1}(U)$ სიმრავლის შიგა წერტილი. ეს კი ნიშნავს, რომ $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე, ხოლო f უწყვეტი ასახვა. □

თეორემა 3.4.12. *ვთქვათ* $f:(X,\tau_\rho)\to(Y,\tau_\sigma)$ *არის ასახვა.* f *ასახვა უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* X *მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი* x *წერტილისთვის და ამ წერტილისკენ კრებადი* X

მეტრიკული სივრცის ელემენტების ნებისმიერი (x_n) *მიმდევრობისთვის* $(f(x_n))$ *მიმდევრობა კრებადია* $f(x)$ *წერტილისკენ* Y *მეტრიკულ სივრცეში.*

დამტკიცება. ვთქვათ f არის უწყვეტი ასახვა, ხოლო (x_n) x წერტილისკენ კრებადი X მეტრიკული სივრცის მიმდევრობა. განვიხილოთ $f(x)$ წერტილის ნებისმიერი U მიდამო. $f^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია სიმრავლე და შეიცავს x წერტილს. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $x_n \in f^{-1}(U)$. ამრიგად, $f(x)$ წერტილის ნებისმიერი U ღია მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $f(x_n) \in U$. ეს კი ნიშნავს, $(f(x_n))$ მიმდევრობა კრებადია $f(x)$ წერტილისკენ.

ვთქვათ, შებრუნებით, სრულდება თეორემის პირობა. ვაჩვენოთ f არის უწყვეტი ფუნქცია. ამისთვის საკმარისია შევამოწმოთ, რომ X სივრცის ნებისმიერი A ქვესიმრავლისთვის $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. ყოველი $x \in \overline{A}$ წერტილისთვის არსებობს x წერტილისკენ კრებადი A სიმრავლის ელემენტთა (x_n) მიმდევრობა. დაშვების თანახმად, $(f(x_n))$ მიმდევრობა კრებადია $f(x)$ წერტილისკენ. ამიტომ $f(x) \in \overline{f(A)}$. აქედან გამომდინარე, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. 2.3.7 წინადადების თანახმად, f ასახვა არის უწყვეტი ასახვა. □

წინადადება 3.4.13. *თუ* A *არის* $(X, ^{\circ})$ *მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლე, მაშინ* $f(x) = {^{\circ}}(x, A)$, $x \in X$ *ფორმულით მოცემული* $f: X \to \mathbb{R}$ *ფუნქცია არის უწყვეტი.*

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ X მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი $x, y \in X$ წერტილისთვის და A ქვესიმრავლისთვის სამართლიანია უტოლობა $|{^{\circ}}(x, A) - {^{\circ}}(y, A)| \leq {^{\circ}}(x, y)$. იმ შემთხვევაში, როცა $A = \varnothing$ გვაქვს $|{^{\circ}}(x, \varnothing) - {^{\circ}}(y, \varnothing)| = |1 - 1| \leq {^{\circ}}(x, y)$. ვთქვათ $A \neq \varnothing$. ყოველი $a \in A$ წერტილისთვის

$$^{\circ}(x, A) \leq {^{\circ}}(x, a) \leq {^{\circ}}(x, y) + {^{\circ}}(y, a) \leq {^{\circ}}(x, y) + {^{\circ}}(y, A)$$

ამრიგად, ${^{\circ}}(x, A) - {^{\circ}}(y, A) \leq {^{\circ}}(x, y)$. ანალოგიურად, ყოველი $a \in A$ წერტილისთვის

$$^{\circ}(y, A) \leq {^{\circ}}(y, a) \leq {^{\circ}}(y, x) + {^{\circ}}(x, a) \leq {^{\circ}}(y, x) + {^{\circ}}(x, A).$$

აქედან გამომდინარე,

$$^{\circ}(x, A) - {^{\circ}}(y, A) \geq -{^{\circ}}(y, x) = -{^{\circ}}(x, y).$$

ამრიგად,

$$-{^{\circ}}(x, y) \leq {^{\circ}}(x, A) - {^{\circ}}(y, A) \leq {^{\circ}}(x, y).$$

ეს კი ნიშნავს, $|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\le\rho(x,y)$. X მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი $x\in X$ წერტილისთვის და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, კერძოდ $\delta=\varepsilon$, რომ, როცა $\rho(x,x')<\delta=\varepsilon$, მაშინ $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, რადგან

$$|f(x)-f(x')|=|\rho(x,A)-\rho(x',A)|\le\rho(x,x')<\varepsilon\ .\square$$

წინადადება 3.4.14. (X,ρ) *მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი* $A\subset X$ *ქვესიმრავლისთვის* $\overline{A}=\{x\in X\mid\rho(x,A)=0\}$.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_0\in\overline{A}$. ცხადია 3.4.2 წინადადების თანახმად, არსებობს x_0 წერტილისკენ კრებადი A სიმრავლის (x_n) მიმდევრობა, ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x,x_n)=0$. ადვილი დასანახია, რომ $\inf\{\rho(x,a)\}_{a\in A}=0$. მართლაც, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი n_0 ნატურალური რიცხვი, რომ როცა $n>n_0$, მაშინ (x_n) მიმდევრობის ყოველი $x_n\in A$ წევრისთვის $\rho(x_0,x_n)<\varepsilon$. ამრიგად, $\inf\{\rho(x_0,a)\}_{a\in A}=0$, ანუ $\rho(x_0,A)=0$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x_0\in\{x\mid\rho(x,A)=0\}$.

ვთქვათ, შებრუნებით, $x_0\in\{x\in X\mid\rho(x,A)=0\}$, ანუ $\rho(x_0,A)=0$. ნებისმიერი $\varepsilon=1/n$, $n=1,2,\ldots$, რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $x_n\in A$, რომ $\rho(x_0,x_n)<\varepsilon=1/n$. ამრიგად, (x_n) მიმდევრობა კრებადია x_0 წერტილისკენ, ე.ი. $x_0\in\overline{A}$. □

წინადადება 3.4.15. *მეტრიზებადი სივრცის ყოველი ჩაკეტილი სიმრავლე არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი* G_δ *-ტიპის სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ A არის (X,τ) მეტრიზებადი სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, ხოლო ρ ისეთი მეტრიკა X სივრცეზე, რომ $\tau=\tau_\rho$. 3.4.13 წინადადების თანახმად $f:X\to\mathbb{R}$ ფუნქცია, მოცემული ფორმულით $f(x)=\rho(x,A)$, $x\in X$, არის უწყვეტი. რადგან $A=\overline{A}$, ამიტომ 3.4.14 წინადადების თანახმად, $A=f^{-1}(0)$. ამრიგად, A სიმრავლე არის ფუნქციონალურად ჩაკეტილი. ცხადია, ამავე დროს A არის G_δ -ტიპის სიმრავლე, რადგან $\{0\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}([0,1/n))$ და $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f^{-1}([0,1/n))$. □

შედეგი 3.4.16. *ყოველი მეტრიზებადი სივრცე არის სრულყოფილად ნორმალური.*

დამტკიცება. 3.4.15 წინადადების და 3.1.23 თეორემის თანახმად, ყოველი მეტრიზებადი სივრცე არის სრულყოფილად ნორმალური სივრცე. □

თეორემა 3.4.17. *მეტრიკული სივრცის ყოველი კომპაქტური*

სიმრავლე არის შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. ვთქვათ A არის $(X, °)$ მეტრიკული სივრცის კომპაქტური სიმრავლე. ნებისმიერი ფიქსირებული $a \in X$ წერტილისთვის განვიხილოთ ოჯახი $\{B(a,r)\}_{r>0}$. ცხადია, ეს ოჯახი არის მთელი X სივრცის, და მაშასადამე, A ქვესივრცის მომცველი დაფარვა. A სიმრავლის კომპაქტურობის გამო არსებობს ისეთი სასრული რაოდენობის $r_1, r_2, ..., r_n$ რიცხვები, რომ $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(a, r_i)$. ვთქვათ $r = \max\{r_1, r_2, ..., r_n\}$. ცხადია, $A \subseteq B(a,r)$.

A სიმრავლის ნებისმიერი ორი x და y წერტილისთვის

$$°(x,y) \le °(x,a) + °(a,y) \le r + r = 2r .$$

აქედან გამომდინარე, $¢(A) = \sup\{°(x,y) \mid x, y \in A\} \le 2r$. ამრიგად, A არის შემოსაზღვრული სიმრავლე. □

თეორემა 3.4.18. (ლებეგის თეორემა). $(X, °)$ *კომპაქტური მეტრიკული სივრცის ყოველი* $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ *ღია დაფარვისთვის ასრებობს ისეთი* $£ > 0$ *რიცხვი, რომ* $= \{B(x,£)\}_{x\in X}$ *დაფარვა ჩაწერილია* $\sim$ *დაფარვაში.*

დამტკიცება. ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $s \in S$ ინდექსი, რომ $x \in U_s$. $(X, °)$ მეტრიკული სივრცის მეტრიკული ტოპოლოგიის განმარტების თანახმად, არსებობს ისეთი $£_x > 0$ რიცხვი, რომ $B(x,£_x) \subset U_s$. ცხადია, რომ $\{B(x,£_x)\}_{x\in X}$ ღია დაფარვა და, მაშასადამე, $\{B(x,\frac{£_x}{2})\}_{x\in X}$ ღია დაფარვა ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში. X სივრცის კომპაქტურობიდან გამომდინარე, არსებობს ისეთი $x_1, x_2, ..., x_n$ სასრული რაოდენობის წერტილები, რომ $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{£_{x_i}}{2})$. ვთქვათ, $£ = \min\{\frac{£_{x_1}}{2}, \frac{£_{x_2}}{2}, ..., \frac{£_{x_n}}{2}\}$. ვაჩვენოთ, რომ $= \{B(x,£)\}_{x\in X}$ ღია დაფარვა ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში.

ვთქვათ $y \in B(x,£)$. ცხადია, არსებობს ისეთი $1 \le j \le n$ ინდექსი, რომ $x \in B(x_j, \frac{£_{x_j}}{2})$. შევნიშნოთ, რომ

$$°(y,x_j) \le °(y,x) + °(x,x_j) < £ + \frac{£_{x_j}}{2} < \frac{£_{x_j}}{2} + \frac{£_{x_j}}{2} = £_{x_j} .$$

ამრიგად, $y \in B(x_j, £_{x_j})$. ცხადია, არსებობს ისეთი $s \in S$, რომ $B(x_j, £_{x_j}) \subset U_s$. აქედან გამომდინარე, $B(x,£) \subset U_s$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\ge \sim$. □

დაფარვის განმსაზღვრელ £ რიცხვს ეწოდება ლებეგის რიცხვი.

ახლა განვიხილოთ ტოპოლოგიური ოპერაციები მეტრიზებად სივრცეებზე. როგორც ვნახეთ, მეტრიზებადი სივრცის ყოველი ქვესივრცე არის მეტრიზებადი. მოვიყვანოთ თეორემები, რომლებშიც აღწერილია მეტრიზებად სივრცეთა ტოპოლოგიური ჯამის და ნამრავლის თვისებები.

თეორემა 3.4.19. *მეტრიზებად სივრცეთა ტოპოლოგიური ჯამი მეტრიზებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა შესაკრები სივრცე არის მეტრიზებადი.*

დამტკიცება. ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim\in A$ სივრცეთა ჯამი არის მეტრიზებადი. ცხადია $X_{\sim}$, როგორც $\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ მეტრიზებადი სივრცის ქვესივრცე, არის მეტრიზებადი.

ვთქვათ, შებრუნებით, $X_{\sim}$, $\sim\in A$ არის მეტრიზებადი სივრცეები. 3.4.10 თეორემის თანახმად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, $X_{\sim}$, $\sim\in A$ მეტრიზებადი სივრცის ტოპოლოგიური სტრუქტურა წარმოქმნილია ერთით შემოსაზღვრული $\circ_{\sim}$ მეტრიკით, ანუ ნებისმიერი $x, y\in X_{\sim}$ წერტილისთვის $\circ_{\sim}(x, y)\le 1$.

$X=\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ ტოპოლოგიურ ჯამზე შემოვიტანოთ მეტრიკა. ვთქვათ, ყოველი $x, y\in \underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$ წერტილისთვის

$$\circ(x, y)=\begin{cases}\circ_{\sim}(x, y), & x, y\in X_{\sim},\\ 1, & x\in X_{\sim}, y\in X_{\sim'}, \quad \sim\neq\sim'.\end{cases}$$

ვაჩვენოთ $\circ:(\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim})\times(\underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim})\to[0,+\infty)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს მეტრიკის M1)-M3) აქსიომებს. ცხადია, M1) და M2) აქსიომები სრულდება. შევამოწმოთ, რომ სრულდება M3) აქსიომა.

ვთქვათ $x, y, z\in \underset{\sim\in A}{\oplus} X_{\sim}$. ვაჩვენოთ $\circ(x,z)\le\circ(x,y)+\circ(y,z)$. განვიხილოთ შემდეგი კონკრეტული შემთხვევები.

ა). ვთქვათ $x, y, z\in X_{\sim}$, $\sim\in A$. ცხადია

$$\circ(x,z)=\circ_{\sim}(x,z)\le\circ_{\sim}(x,y)+\circ_{\sim}(y,z)=\circ(x,y)+\circ(y,z).$$

ბ). ვთქვათ $x, z\in X_{\sim}$ რომელიმე $\sim\in A$ ინდექსისთვის და $y\notin X_{\sim}$. ამ შემთხვევაში $\circ(x,z)=\circ_{\sim}(x,z)\le 1$ და $\circ(x,y)+\circ(y,z)=1+1=2$. ამრიგად, $\circ(x,z)\le\circ(x,y)+\circ(y,z)$.

გ). ვთქვათ $x\in X_{\sim_1}$ და $z\in X_{\sim_2}$ რომელიმე $\sim_1\neq\sim_2$ ინდექსებისთვის. შევნიშნოთ, თუ $y\in X_{\sim_1}$ და $y\notin X_{\sim_2}$, მაშინ $\circ(x,z)=1$, $\circ(x,y)\le 1$ და $\circ(y,z)=1$. აქედან გამომდინარე, $\circ(x,z)\le\circ(x,y)+\circ(y,z)$. ასევე, იმ შემთხვევაში, როცა $y\notin X_{\sim_1}$ და $y\notin X_{\sim_2}$, მაშინ $\circ(x,z)=1$, $\circ(x,y)=1$ და

$°(y,z)=1$. ამიტომ $°(x,z)\le °(x,y)+°(y,z)$.

ცხადია, ყოველი $\sim \in A$ ინდექსისთვის $X_{\sim}$ არის ღია ქვესიმრავლე $°$ მეტრიკით X სიმრავლეზე ინდუცირებულ ტოპოლოგიურ სივრცეში. $°$ მეტრიკით $X_{\sim}$ სიმრავლეზე ინდუცირებული მეტრიკა ემთხვევა $°_{\sim}$ მეტრიკას. ამიტომ ის $X_{\sim}$ სიმრავლეზე განსაზღვრავს $X_{\sim}$ სივრცის ტოპოლოგიას. 2.4.13 თეორემის თანახმად, $°$ მეტრიკით X სიმრავლეზე განსაზღვრული ტოპოლოგია არის $X_{\sim}$, $\sim \in A$ სივრცეთა ჯამის ტოპოლოგია. □

ვთქვათ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ არის მეტრიზებად სივრცეთა ოჯახი, ხოლო $°_i$ არის X_i სივრცეზე განსაზღვრული, ერთით შემოსაზღვრული მეტრიკა. $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ სიმრავლეზე შემოვიტანოთ ნებისმიერ ორ $x=(x_i)$ და $y=(y_i)$ წერტილს შორის მანძილი. განმარტების თანახმად,

$$°(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}°_i(x_i,y_i).$$

თეორემა 3.4.20. *ვთქვათ $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ არის მეტრიზებად სივრცეთა ოჯახი, ხოლო $°_i$ X_i სივრცეზე განსაზღვრული, ერთით შემოსაზღვრული მეტრიკა. $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ დეკარტულ ნამრავლზე*

$$°(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}°_i(x_i,y_i),\ x=(x_i),\ y=(y_i)$$

მეტრიკით ინდუცირებული ტოპოლოგია ემთხვევა X_i, $i=1,2,\ldots$ სივრცეთა დეკარტული ნამრავლის ტოპოლოგიას.

დამტკიცება. ვთქვათ $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ და $p_i : X \to X_i$, $i=1,2,\ldots$ არის პროექციები. ცხადია, $°_i(x_i,y_i)<£$, როცა $°((x_i),(y_i))<£/2^i$. ამრიგად, 3.4.11 თეორემის თანახმად, $p_i : X \to X_i$ პროექცია არის უწყვეტი ასახვა $°$ მეტრიკით ინდუცირებული ტოპოლოგიის მიმართ. ნამრავლის ტოპოლოგიის განმარტებიდან გამომდინარე, $°$ მეტრიკით X სიმრავლეზე ინდუცირებული ტოპოლოგია უფრო ძლიერია, ვიდრე X სიმრავლეზე დეკარტული ნამრავლის ტოპოლოგია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $V \subset X$ სიმრავლე, რომელიც არის ღია $°$ მეტრიკით ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში, არის აგრეთვე ღია დეკარტული ნამრავლის ტოპოლოგიაში.

ვთქვათ $x=(x_i)\in V$. ცხადია, არსებობს ისეთი $£>0$ რიცხვი, რომ $B(x,£)\subset V$. შევამოწმოთ, რომ ასევე არსებობს n ნატურალური რიცხვი და $U_i \subset X_i$, $i=1,2,\ldots,n$ ღია სიმრავლეები, რომლებიც აკმაყოფილებს

პირობას

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i) \subset B(x,\pounds) \subset V \ .$$

ვთქვათ n არის ისეთი დადებითი მთელი რიცხვი, რომ

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} 1/2^i = 1/2^n < 1/2 \cdot \pounds$$

და

$$U_i = B(x_i, 1/2 \cdot \pounds) = \{z \in X_i \mid {}^\circ{}_i(x_i, z) < 1/2 \cdot \pounds\} \ , i = 1, 2, ..., n \ .$$

ნებისმიერი $y = (y_i) \in \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(U_i)$ წერტილისთვის და $i \le n$ ინდექსისთვის ${}^\circ(x_i, y_i) < 1/2 \cdot \pounds$. შევნიშნოთ, რომ

$$^\circ(x, y) = \sum_{i=1}^{n} 1/2^i \cdot {}^\circ{}_i(x_i, z) + \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/2^i \cdot {}^\circ{}_i(x_i, y_i) < 1/2 \cdot \pounds + 1/2 \cdot \pounds = \pounds \ . \square$$

შედეგი 3.4.21. ჰილბერტის კუბი არის მეტრიზებადი. □

სიმბოლოთი $\mathscr{M}$ აღვნიშნოთ მეტრიზებადი სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია. ზემონათქვამიდან გამომდინარე, $\mathscr{M}$ კატეგორიაში არსებობს ნებისმიერი რაოდენობის ობიექტების ჯამი და თვლადი (სასრული) რაოდენობის ობიექტების ნამრავლი.

ვთქვათ $(X, {}^\circ)$ არის მეტრიკული სივრცე, ხოლო (x_n) მის წერტილთა მიმდევრობა. (x_n) მიმდევრობას ეწოდება კოშის მიმდევრობა, თუ ყოველი $\pounds > 0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ${}^\circ(x_n, x_{n'}) < \pounds$, როცა $n, n' \ge n_0$.

ცხადია, $(X, {}^\circ)$ მეტრიკული სივრცის ყოველი კრებადი მიმდევრობა არის კოშის მიმდევრობა.

$(X, {}^\circ)$ მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება სრული, თუ მისი ყოველი კოშის მიმდევრობა კრებადია.

შევნიშნოთ, რომ $(X, {}^\circ)$ სრული მეტრიკული სივრცის ყოველი Y ჩაკეტილი ქვესიმრავლე არის სრული მეტრიკული სივრცე ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ. ცხადია, $(Y, {}^\circ)$ ქვესივრცის ყოველი კოშის მიმდევრობა არის კოშის მიმდევრობა $(X, {}^\circ)$ სივრცეში. ამიტომ Y სიმრავლის ჩაკეტილობის გამო მას ეკუთვნის ამ მიმდევრობის ზღვარი.

ვთქვათ $(X, {}^\circ)$ და $(X', {}^\circ{}')$ არის მეტრიკული სივრცეები. ვიტყვით, რომ $(X, {}^\circ)$ და $(X', {}^\circ{}')$ მეტრიკული სივრცეები არის იზომეტრული, თუ არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $f : X \to X'$, რომ

$$^\circ(x, y) = {}^\circ{}'(f(x), f(y)) \ , \ x, y \in X \ .$$

ცხადია, იზომეტრული მეტრიკული სივრცეები არის ჰომეომორფული სივრცეები.

ასევე შევნიშნოთ, თუ (X,ρ) არის სრული მეტრიკული სივრცე, მაშინ ρ მეტრიკით X სიმრავლეზე ინდუცირებული სტანდარტული მეტრიკა $\rho'(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$ განსაზღვრავს (X,ρ') სრულ მეტრიკულ სივრცეს. ასევე, პირიქით, თუ (X,ρ') არის სრული მეტრიკული სივრცე, მაშინ (X,ρ) აგრეთვე არის სრული მეტრიკული სივრცე.

ვთქვათ (X,ρ) არის სრული მეტრიკული სივრცე, ხოლო ρ' სტანდარტული მეტრიკა X სიმრავლეზე. ინდექსთა A სიმრავლიდან X სიმრავლეში ფუნქციების X^A სიმრავლეზე, ანუ $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ დეკარტულ ნამრავლზე, სადაც $X_\alpha = X$ ყოველი $\alpha\in A$ ინდექსისთვის, შემოვიტანოთ სპეციალური მეტრიკა, ე.წ. თანაბარი მეტრიკა $\bar{\rho}$. განმარტების თანახმად, ნებისმიერი $x=(x_\alpha)$ და $y=(y_\alpha)$ ელემენტისთვის

$$\bar{\rho}(x,y)=\sup\{\rho'(x_\alpha,y_\alpha)\,|\,\alpha\in A\}.$$

ვთქვათ $f,g:A\to X$ არის ფუნქციები. ასახვების მეშვეობით $\bar{\rho}$ მეტრიკა მოიცემა ფორმულით

$$\bar{\rho}(f,g)=\sup\{\rho'(f(\alpha),g(\alpha)\,|\,\alpha\in A)\}.$$

წინადადება 3.4.22. *თუ (X,ρ) არის სრული მეტრიკული სივრცე, მაშინ $(X^A,\bar{\rho})$ არის სრული მეტრიკული სივრცე.*

დამტკიცება. თავდაპირველად შევნიშნოთ, (X,ρ') არის სრული მეტრიკული სივრცე. ვთქვათ $(X^A,\bar{\rho})$ მეტრიკული სივრცის (f_n) მიმდევრობა არის კოშის მიმდევრობა. მოცემული $\alpha\in A$ ინდექსისთვის და ნებისმიერი $n,n'\in\mathbb{N}^+$ რიცხვებისთვის $\rho'(f_n(\alpha),f_{n'}(\alpha))\le\bar{\rho}(f_n,f_{n'})$. ამიტომ $(f_n(\alpha))$ არის (X,ρ') მეტრიკული სივრცის კოშის მიმდევრობა. ვთქვათ ეს მიმდევრობა კრებადია რაიმე $x_\alpha\in X$ ელემენტისკენ. განვმარტოთ ფუნქცია $f:A\to X$. განმარტების თანახმად,

$$f(\alpha)=x_\alpha,\ \alpha\in A.$$

ვაჩვენოთ, რომ (f_n) მიმდევრობა კრებადია f ფუნქციისკენ $(X,\bar{\rho})$ მეტრიკულ სივრცეში.

მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი საკმარისად დიდი n_0 ნატურალური რიცხვი, რომ $\bar{\rho}(f_n,f_{n'})<\varepsilon/2$, როცა $n,n'\ge n_0$. ამრიგად, $\rho'(f_n(\alpha),f_{n'}(\alpha))<\varepsilon/2$, როცა $n,n'\ge n_0$ და $\alpha\in A$. დავუშვათ, n და α არის ფიქსირებული, ხოლო n' იმდენად დიდი, რომ $\rho'(f_n(\alpha),f(\alpha))\le\varepsilon/2$. ეს უტოლობა სრულდება ყოველი $\alpha\in A$ ინდექსისთვის, როცა $n\ge n_0$. ამრიგად, $\bar{\rho}(f_n,f)<\varepsilon/2<\varepsilon$ ყოველი $n\ge n_0$

რიცხვისთვის, ე.ი. $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n)=f$. □

ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე, ხოლო $(Y,°)$ მეტრიკული სივრცე. განვიხილოთ X სივრციდან Y სივრცეში ყველა ასახვათა Y^X სიმრავლის $\mathscr{C}(X,Y)$ და $\mathscr{B}(X,Y)$ ქვესიმრავლეები, შესაბამისად შემდგარი უწყვეტი ასახვებისაგან და შემოსაზღვრული ასახვებისგან.

მეორე თავის 2.3 პარაგრაფში განმარტებული იყო $(X,²)$ ტოპოლოგიური სივრციდან $I=[0,1]$ ან $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ სივრცეში უწყვეტი ასახვების (f_n) მიმდევრობის თანაბარი კრებადობის ცნება.

ანალოგიურად განიმარტება $(X,²)$ ტოპოლოგიური სივრციდან $(Y,°)$ მეტრიკული სივრცეში ასახვების მიმდევრობის თანაბარი კრებადობის ცნება.

ვიტყვით, რომ $(X,²)$ ტოპოლოგიური სივრციდან $(Y,°)$ მეტრიკულ სივრცეში $f_n:(X,²)\to(Y,°)$ ასახვების (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $f:(X,²)\to(Y,°)$ ასახვისკენ, თუ ნებისმიერი $£>0$ რიცხვისთვის არსებობს ისეთი $n_0\in\mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n>n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის და ნებისმიერი $x\in X$ წერტილისთვის $°(f_n(x),f(x))<£$.

თეორემა 3.4.23. *ვთქვათ* $f_n:(X,²)\to(Y,°)$, $n\in\mathbb{N}^+$ *არის უწყვეტი ფუნქციები. თუ* (f_n) *მიმდევრობა თანაბრად კრებადია* $f:(X,²)\to(Y,°)$ *ასახვისკენ, მაშინ* f *არის უწყვეტი ფუნქცია.*

დამტკიცება. ვთქვათ U არის $(Y,°)$ მეტრიკული სივრცის ღია სიმრავლე. ვაჩვენოთ $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე. ავიღოთ ნებისმიერი $x_0\in f^{-1}(U)$ წერტილი. ვთქვათ $y_0=f(x_0)$. არსებობს $y_0\in U$ წერტილის ისეთი $B(y_0,£)$ ღია ბირთვი, რომ $B(y_0,£)\subset U$. თანაბრად კრებადობის თანახმად, არსებობს ისეთი $n_0\in\mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ყოველი $n\geq n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის და ნებისმიერი $x\in X$ წერტილისთვის $°(f_n(x),f(x))<£/3$. ასევე, f_{n_0} ფუნქციის უწყვეტობის გამო ამოირჩევა x_0 წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $f_{n_0}(V)\subset B(f_{n_0}(x_0),£/3)$. შევნიშნოთ, რომ ყოველი $x\in V$ წერტილისთვის სრულდება უტოლობები

$$°(f(x),f_{n_0}(x))<£/3,$$
$$°(f_{n_0}(x),f_{n_0}(x_0))<£/3,$$
$$°(f_{n_0}(x_0),f(x_0))<£/3.$$

ცხადია, ყოველი $x\in V$ წერტილისთვის $°(f(x),f(x_0))<£$. ამრიგად, ნებისმიერი $x\in V$ წერტილისთვის

$$f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon) = B(y_0,\varepsilon) \subset U \ ,$$

ანუ $f(V) \subset U$. შევნიშნოთ, რომ $x \in V \subset f^{-1}(U)$. აქედან გამომდინარე, $x_0 \in V \subset f^{-1}(U)$, ე.ი. x_0 წერტილი არის $f^{-1}(U)$ სიმრავლის შიგა წერტილი. ამიტომ $f^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე. ეს კი ნიშნავს f ფუნქციის უწყვეტობას. □

თეორემა 3.4.24. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე, ხოლო (Y,ρ) მეტრიკული სივრცე. სიმრავლეები $\mathscr{C}(X,Y)$ და $\mathscr{B}(X,Y)$ არის $(Y^X,\tilde{\rho})$ სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები. გარდა ამისა, თუ (Y,ρ) არის სრული მეტრიკული სივრცე, მაშინ $\mathscr{C}(X,Y)$ და $\mathscr{B}(X,Y)$ არის სრული $\tilde{\rho}$ თანაბარი მეტრიკის მიმართ.*

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, თუ Y^X სივრცის ელემენტთა (f_n) მიმდევრობა კრებადია $f \in Y^X$ ელემენტისკენ $\tilde{\rho}$ მეტრიკის მიმართ, მაშინ (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ელემენტისკენ Y სივრცის ρ' მეტრიკის მიმართ.

ვთქვათ ε არის ნებისმიერი დადებითი რიცხვი. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $n > n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის $\tilde{\rho}(f,f_n) < \varepsilon$. ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის და ნებისმიერი $n \geq n_0$ ნატურალური რიცხვისთვის

$$\rho'(f_n(x), f(x)) \leq \tilde{\rho}(f_n, f) < \varepsilon \ .$$

ამრიგად, (f_n) მიმდევრობა თანაბრად კრებადია f ელემენტისკენ.

ახლა შევამოწმოთ $\mathscr{C}(X,Y)$ არის ჩაკეტილი Y^X სივრცეში $\tilde{\rho}$ მეტრიკის მიმართ. ვთქვათ Y^X სივრცის f ელემენტი არის $\mathscr{C}(X,Y)$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. არსებობს $\mathscr{C}(X,Y)$ სიმრავლის ელემენტთა (f_n) მიმდევრობა, რომელიც კრებადია f ელემენტისკენ $\tilde{\rho}$ მეტრიკის მიმართ. ცხადია, f არის უწყვეტი ასახვა და $f \in \mathscr{C}(X,Y)$. აქედან გამომდინარე, $\mathscr{C}(X,Y)$ არის ჩაკეტილი, რადგან ის შეიცავს მის ყველა დაგროვების წერტილს.

და ბოლოს ვაჩვენოთ, რომ $\mathscr{B}(X,Y)$ არის Y^X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ვთქვათ f არის $\mathscr{B}(X,Y)$ სიმრავლის დაგროვების წერტილი. არსებობს $\mathscr{B}(X,Y)$ სიმრავლის ელემენტთა (f_n) მიმდევრობა, რომელიც კრებადია f ელემენტისკენ. ამოვარჩიოთ იმდენად დიდი $n_0 \in \mathbb{N}^+$ რიცხვი, რომ $\tilde{\rho}(f_{n_0}, f) < 1/2$. ცხადია, $x \in X$ წერტილისთვის $\rho'(f_{n_0}(x), f(x)) < 1/2$. აქედან მივიღებთ $\rho(f_{n_0}(x), f(x)) < 1/2$. ამრიგად, თუ $f_{n_0}(X)$ ანასახის დიამეტრი არის d, მაშინ $f(X)$ ანასახს აქვს სულ მცირე $d+1$-დიამეტრი. ამრიგად,

$f \in \mathcal{B}(X,Y)$.

ზემონათქვამიდან გამომდინარე, $\mathcal{C}(X,Y)$ და $\mathcal{B}(X,Y)$ არის სრული ქვესივრცეები, თუ $(Y, {}^{\circ})$ არის სრული მეტრიკული სივრცე. □

ვთქვათ $(Y, {}^{\circ})$ არის მეტრიკული სივრცე. $\mathcal{B}(X,Y)$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ახალი მეტრიკა

$$d(f,g) = \sup\{ {}^{\circ}(f(x), g(x)) \mid x \in X\}.$$

ნებისმიერი $f,g \in \mathcal{B}(X,Y)$ ელემენტისთვის

$$ {}^{\sigma}(f,g) = \min\{d(f,g),1\}.$$

თეორემა 3.4.25. *ყოველი მეტრიკული სივრცისთვის არსებობს იზომეტრული ჩადგმა სრულ მეტრიკულ სივრცეში.*

დამტკიცება. ვთქვათ $(X, {}^{\circ})$ არის მეტრიკული სივრცე. განვიხილოთ X სივრცის $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძში ყველა შემოსაზღვრული ასახვების $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ სიმრავლე მეტრიკით

$$d(f,g) = \sup\{| f(x) - g(x) | \mid x \in X\}, \; f,g \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$$

მეტრიკით.

$(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}),d)$ წყვილი არის სრული მეტრიკული სივრცე. ვთქვათ $a \in X$ არის რაიმე ფიქსირებული წერტილი. $(X, {}^{\circ})$ სივრცის ყოველ $x \in X$ წერტილს შევუსაბამოთ ასახვა $f_x : X \to \mathbb{R}$, მოცემული ფორმულით

$$f_x(z) = {}^{\circ}(z,x) - {}^{\circ}(z,a), \; z \in X \; .$$

სამკუთხედის აქსიომის თანახმად, $x,z,a \in X$ წერტილებისთვის

$$ {}^{\circ}(z,x) \le {}^{\circ}(z,a) + {}^{\circ}(a,x),$$

ანუ

$$ {}^{\circ}(z,x) - {}^{\circ}(z,a) \le {}^{\circ}(a,x).$$

ასევე, უტოლობიდან

$$ {}^{\circ}(z,a) \le {}^{\circ}(z,x) + {}^{\circ}(x,a)$$

გამომდინარეობს

$$ -{}^{\circ}(a,x) = -{}^{\circ}(x,a) \le {}^{\circ}(z,x) - {}^{\circ}(z,a)$$

უტოლობა.

ამრიგად, ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის

$$| f_x(z) | = | {}^{\circ}(z,x) - {}^{\circ}(z,a) | \le {}^{\circ}(a,x).$$

ამიტომ $f_x \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. განვმარტოთ ასახვა $\Phi : X \to \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. ვთქვათ

$$\Phi(x) = f_x, x \in X \; .$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$d(\Phi(x),\Phi(y)) = {}^{\circ}(x,y), \; x,y \in X \; .$$

შევნიშნოთ, რომ

$$(\Phi(x))(z) - (\Phi(y))(z) = f_x(z) - f_y(z) =$$

$$= °(z,x) - °(z,a) - °(z,y) + °(z,a) \leq °(y,x).$$

სიმეტრიულობიდან გამომდინარე, მივიღებთ უტოლობას

$$| f_x(z) - f_y(z) | \leq °(x,y),$$

ე.ი. $d(f_x, f_y) \leq °(x,y)$. შევნიშნოთ, რომ

$$f_x(y) - f_y(y) = °(y,x) - °(y,a) + °(y,a) = °(y,x).$$

ამიტომ გვექნება $d(f_x, f_y) \geq °(x,y)$. ამრიგად, $d(f_x, f_y) = °(x,y)$. ეს კი ნიშნავს,რომ $d(\Phi(x), \Phi(y)) = °(x,y)$ ყოველი $x, y \in X$ წერტილებისთვის. □

ვთქვათ $(X, °)$ არის მეტრიკული სივრცე. თუ $\Phi : X \to Y$ არის იზომეტრული ჩადგმა Y სრულ მეტრიკულ სივრცეში, მაშინ $\overline{\Phi(X)} \subset Y$ არის სრული მეტრიკული სივრცე. $\overline{\Phi(X)}$ სივრცეს ეწოდება X სივრცის გასრულება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\tilde{X}$.

სავარჯიშო 3.4.26. 1).ვთქვათ $(X, °)$ არის მეტრიკული სივრცე. აჩვენეთ, $° : X \times X \to \mathbb{R}$ ასახვა არის უწყვეტი.

2).ვთქვათ $(X, °)$ არის მეტრიკული სივრცე. აჩვენეთ, $°' : X \times X \to [0, +\infty)$ ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$°'(x,y) = \frac{°(x,y)}{1 + °(x,y)}, \quad x, y \in X,$$

არის შემოსაზღვრული მეტრიკა X სივრცეზე.

3). ვთქვათ $f, g : X \to \mathbb{R}$ არის უწყვეტი ფუნქციები. აჩვენეთ, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ ფუნქციები, მოცემული ფორმულებით

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X,$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in X,$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in X,$$

არის უწყვეტი ფუნქციები.

4).ვთქვათ $(X, °)$ არის მეტრიკული სივრცე, ხოლო A მისი კომპაქტური ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, A სიმრავლის ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $£ > 0$ რიცხვი, რომ $B(A, £) \subset U$.

5).ვთქვათ $(X, °)$ და $(Y, ±)$ არის მეტრიკული სივრცეები. აჩვენეთ:

i). ფორმულა

$$¢((x,y),(x',y')) = °(x,x') + ±(y,y'),\ (x,y),(x',y') \in X \times Y$$

ინდუცირებს მეტრიკას $X \times Y$ დეკარტულ ნამრავლზე.

ii).თუ $(X, °)$ და $(Y, ±)$ არის სრული მეტრიკული სივრცეები, მაშინ $(X \times Y, ¢)$ აგრეთვე არის სრული მეტრიკული სივრცე.

6).აჩვენეთ, $\mathbb{R}^n$ ევკლიდურ სივრცეზე 3.4.7 მაგალითით მოცემული მეტრიკით ინდუცირებული მეტრიკული ტოპოლოგია და ნამრავლის

ტოპოლოგია ერთმანეთს ემთხვევა.

7).აჩვენეთ, $(X,°)$ მეტრიკული სივრცის A ქვესიმრავლის დიამეტრი ტოლია მისი ჩაკეტვის დიამეტრისა.

8).აჩვენეთ, $[0,1]$ სეგმენტსა და ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძს შორის უწყვეტი ასახვების $\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ სიმრავლეზე

$$°(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx\,,\ \ f,g\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$$

ფორმულით განსაზღვრული $°:\mathscr{C}(I,\mathbb{R})\times\mathscr{C}(I,\mathbb{R})\to[0,+\infty)$ ფუნქცია არის მეტრიკა.

9).აჩვენეთ, თუ $°$ და $°'$ არის მეტრიკები X სიმრავლეზე, მაშინ $°+°'$ არის მეტრიკა X სიმრავლეზე.

10).ვთქვათ X არის ვექტორული სივრცე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლის მიმართ. აჩვენეთ, ფორმულა

$$°(x,y)=\|x-y\|,\ \ x,y\in X\ ,$$

განსაზღვრავს მეტრიკას X სიმრავლეზე.

3.5. ბმული და წრფივად ბმული სივრცეები

მოცემულ პარაგრაფში განმარტებულია ტოპოლოგიურ სივრცეთა ბმულობის და წრფივად ბმულობის ცნებები. ბმულობის და წრფივად ბმულობის ცნებები ეფუძნება სივრცეებში გარკვეული სახის განცალებადი ღია სიმრავლეების არარსებობას. ბმულ და წრფივად ბმულ სივრცეთა თვისებები, რომლებიც აღწერილია აქ, არის განსხვავებული ხასიათის და არაა იმ შინაარსის თვისებები, რაც გააჩნიათ წინა პარაგრაფებში განმარტებულ სივრცეებს.

I. ბმული სივრცეები

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ბმული სივრცე, თუ შეუძლებელია მისი წარმოდგენა ორი არაცარიელი, ღია და თანაუკვეთი სიმრავლის გაერთიანებით.

X სივრცეს, რომელიც არაა ბმული, გააჩნია თვისება: X სივრცეში არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $U\neq\varnothing$, $V\neq\varnothing$, $U\bigcap V=\varnothing$ და $X=U\bigcup V$.

წინადადება 3.5.1. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე. ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

i). *X არის ბმული სივრცე.*

ii). *X სივრცეში არ არსებობს ორი ჩაკეტილი, თანაუკვეთი და არაცარიელი სიმრავლე, რომელთა გაერთიანება არის X.*

iii). *X სივრცეში ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეებია მხოლოდ X და $\varnothing$.*

დამტკიცება. i)$\Rightarrow$ ii). ვთქვათ ii) წინადადება არ სრულდება, მაშინ X სივრცეში არსებობს ისეთი F და G ჩაკეტილი სიმრავლეები, რომ $F \neq \varnothing$, $G \neq \varnothing$, $F \bigcap G = \varnothing$ და $X = F \bigcup G$. ვთქვათ $U = X \setminus G$ და $V = X \setminus F$. ცხადია, რომ $U \supset F$ და $U \neq \varnothing$, $V \supset G$ და $V \neq \varnothing$. გარდა ამისა,

$$U \bigcap V = (X \setminus G) \bigcap (X \setminus F) = X \setminus (F \bigcup G) = X \setminus X = \varnothing$$

და

$$U \bigcup V = (X \setminus G) \bigcup (X \setminus F) = X \setminus (F \bigcap G) = X \setminus \varnothing = X \ .$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ X არაა ბმული სივრცე. ეს კი შეუძლებელია, რადგან ეწინააღმდეგება i) წინადადებას.

ii)$\Rightarrow$ iii). ვთქვათ iii) წინადადება არ სრულდება, მაშინ X სივრცეში არსებობს A სიმრავლე, რომელიც განსხვავდება X და $\varnothing$ სიმრავლეებისგან და არის ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე. ვთქვათ $F = X \setminus A$. ცხადია, F არის ჩაკეტილი და არაცარიელი სიმრავლე, რადგან A არის ღია და $A \neq X$. აქედან გამომდინარე, X წარმოდგება როგორც ჩაკეტილი, არაცარიელი და თანაუკვეთი F და A სიმრავლეების გაერთიანება. ეს კი ეწინააღმდეგება ii) წინადადებას. ამრიგად, ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. iii) სრულდება.

iii)$\Rightarrow$i). ვთქვათ i) წინადადება არ სრულდება, ე.ი. X არაბმული სივრცეა. X სივრცეში არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $U \neq \varnothing$, $V \neq \varnothing$, $U \bigcap V = \varnothing$ და $X = U \bigcup V$. ცხადია, $U = X \setminus V$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე, $U \neq \varnothing$ და $U \neq X$. ამრიგად, X სივრცეში არსებობს X და $\varnothing$ სიმრავლეებისგან განსხვავებული U სიმრავლე, რომელიც არის ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე. ეს ეწინააღმდეგება iii) წინადადებას, ე.ი. ჩვენი დაშვება არაწორია. ამრიგად, i) წინადადება სრულდება. □

(X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის Y ქვესიმრავლეს ეწოდება ბმული, თუ ის, როგორც (X,τ) სივრცის ქვესივრცე, არის ბმული სივრცე.

წინადადება 3.5.2. *ვთქვათ Y არის (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე. ექვივალენტურია შემდეგი წინადადებები:*

i). *Y არის ბმული სიმრავლე.*

ii). *Y შეუძლებელია დაიფაროს X სივრცის ისეთი U და V ღია სიმრავლეებით, რომ $U \bigcap Y \neq \varnothing$, $V \bigcap Y \neq \varnothing$ და $U \bigcap V \bigcap Y = \varnothing$.*

დამტკიცება. i)$\Rightarrow$ii). დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ X სივრცეში არსებობს ისეთი ორი $U,V \in \tau$ სიმრავლე, რომ $U \bigcap Y \neq \varnothing$, $V \bigcap Y \neq \varnothing$, $U \bigcap V \bigcap Y = \varnothing$ და $Y \subset U \bigcup V$. ცხადია, $U \bigcap Y, V \bigcap Y \in \tau_Y$. გარდა ამისა,

$$(U \bigcap Y) \bigcup (V \bigcap Y) = (U \bigcup V) \bigcap Y = Y$$

და

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \varnothing .$$

ეს ნიშნავს, რომ Y არაა ბმული სივრცე, რაც ეწინააღმდეგება i) წინადადებას. ამდენად ii) წინადადება სრულდება.

ii) $\Rightarrow$ i). ვთქვaთ i) წინადადება არ სრულდება. ამიტომ Y სივრცეში არსებობს ისეთი ღია, არაცარიელი და თანაუკვეთი G და Q სიმრავლეები, რომ $Y = G \cup Q$. ვთქვათ $G = U \cap Y$ და $Q = V \cap Y$. სადაც $U,V \in {}^2$. ამრიგად, X სივრცეში არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $U \cap Y \neq \varnothing, V \cap Y \neq \varnothing$, $U \cap V \cap Y = \varnothing$ და $Y \subset U \cup V$. ეს ეწინააღმდეგება ii) წინადადებას. ამიტომ ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. i) წინადადება სრულდება. □

ახლა მოვიყვანოთ ტოპოლოგიური სივრცის ბმულობის ერთი კრიტერიუმი.

თეორემა 3.5.3. *ტოპოლოგიური სივრცე ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ნებისმიერი ორი წერტილი მდებარეობს ბმულ სიმრავლეში.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ბმული სივრცე. ცხადია, X სივრცის ნებისმიერი ორი x, y წერტილი მდებარეობს ბმულ სიმრავლეში, კერძოდ, X სიმრავლეში.

ვთქვათ, შებრუნებით, X სივრცის ნებისმიერი ორი წერტილი მდებარეობს ბმულ ქვესიმრავლეში. ვაჩვენოთ, რომ X არის ბმული სივრცე. დავუშვათ X არაბმულია, მაშინ არსებობს ისეთი ღია, არაცარიელი და თანაუკვეთი U და V სიმრავლეები, რომ $X = U \cup V$. ვთქვათ x და y არის X სივრცის ისეთი წერტილები, რომ $x \in U$ და $y \in V$. პირობის თანახმად, x და y ეკუთვნის რაიმე $C \subset X$ ბმულ ქვესიმრავლეს. $U \cap C$ და $V \cap C$ არის ღია სიმრავლეები C ქვესივრცეში. გარდა ამისა,

$$\begin{aligned}
&U \cap C \neq \varnothing, \\
&V \cap C \neq \varnothing, \\
&(U \cap C) \cap (V \cap C) = (U \cap V) \cap C = \varnothing \cap C = \varnothing, \\
&(U \cap C) \cup (V \cap C) = (U \cup V) \cap C = X \cap C = C .
\end{aligned}$$

ამრიგად, C არის არაბმული სიმრავლე, რაც პირობის თანახმად შეუძლებელია. აქედან გამომდინარე, ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. X არის ბმული სივრცე. □

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

წინადადება 3.5.4. *ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძის $[a,b]$ ჩაკეტილი სეგმენტი არის ბმული სიმრავლე.*

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $[a,b]$ არაა ბმული სიმრავლე, ანუ არსებობს ისეთი U და V არაცარიელი ღია

სიმრავლეები, რომ $U \bigcap V = \varnothing$ და $[a,b] = U \bigcup V$. ვთქვათ $a \in U$ და $[a,\sim)$ არის უდიდესი მარჯვნიდან ღია სეგმენტი, რომელიც შედის U სიმრავლეში. $\sim$ წერტილი არ შეიძლება ეკუთვნოდეს V ღია სიმრავლეს. დავუშვათ, $\sim \in V$. ცხადია, $\sim \in \overline{[a,\sim)}$. ამიტომ $V \bigcap [a,\sim) \neq \varnothing$, ანუ $V \bigcap U \neq \varnothing$, რაც შეუძლებელია. ასევე $\sim \notin U$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში მისი რაიმე £-მიდამო $(\sim - £, \sim + £)$ იქნება U ღია სიმრავლის ქვესიმრავლე და $[a, \sim + £) \subset U$. ეს მარჯვნიდან ღია სეგმენტი მოიცავს $[a,\sim)$ მარჯვნიდან ღია სეგმენტს, რაც ეწინააღმდეგება იმ პირობას, რომ $[a,\sim)$ არის უდიდესი ელემენტი. ამრიგად, $a \notin U$ და $a \notin V$, რაც შეუძლებელია, რადგან U და V სიმრავლეები ქმნის $[a,b]$ სეგმენტის დაფარვას. აქედან გამომდინარე, ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. $[a,b]$ სეგმენტი არის ბმული. □

3.5.3 თეორემიდან და 3.5.4 წინადადებიდან გამომდინარეობს

შედეგი 3.5.5. *ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძი არის ბმული.* □

$\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის ქვესიმრავლეს ეწოდება ინტერვალი, თუ ის მის ყოველ ორ წერტილთან ერთად შეიცავს მათ შორის მდებარე ნებისმიერ წერტილს. ინტერვალებს მიეკუთვნება $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის (a,b), $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$, $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,b]$ და $[a,+\infty)$ ქვესიმრავლეები. 3.5.3 თეორემიდან და 3.5.4 წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის ინტერვალები არის ბმული ქვესიმრავლეები.

$\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის Y ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს x, y წერტილს, მაგრამ არ შეიცავს მათ შორის მდებარე რაიმე z წერტილს, არის არაბმული ქვესიმრავლე. მართლაც, $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის $U = (-\infty, z)$ და $V = (z, +\infty)$ ღია ქვესიმრავლეებისთვის $U \bigcap Y \neq \varnothing$, $V \bigcap Y \neq \varnothing$ და $(U \bigcap Y) \bigcap (V \bigcap Y) = \varnothing$ და $U \bigcup V \supset Y$.

ცხადია, $\mathbb{R}$ რიცხვითი ღერძის $\mathbb{N}$ და $\mathbb{Q}$ ქვესიმრავლეები არაბმული ქვესიმრავლეებია.

მოვიყვანოთ ბმული სიმრავლის ზოგიერთი თვისება.

თეორემა 3.5.5. *სივრცის ბმული ქვესიმრავლის ჩაკეტვა არის ბმული ქვესიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ Y არის X ტოპოლოგიური სივრცის ბმული სიმრავლე. ვაჩვენოთ $\overline{Y}$ არის ბმული სიმრავლე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $\overline{Y}$ არაა ბმული. მაშინ X სივრცეში არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $U \bigcap \overline{Y} \neq \varnothing$, $V \bigcap \overline{Y} \neq \varnothing$, $U \bigcap V \bigcap \overline{Y} = \varnothing$ და $U \bigcup V \supset \overline{Y}$. აქედან გამომდინარეობს $U \bigcap Y \neq \varnothing$,

$V \bigcap Y \neq \varnothing$, $U \bigcap V \bigcap Y = \varnothing$ და $U \bigcup V \supset Y$. ეს შეუძლებელია, რადგან Y არის ბმული სიმრავლე. ამრიგად, ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. $\overline{Y}$ არის ბმული სიმრავლე. □

თეორემა 3.5.6. *არაცარიელი თანაკვეთის მქონე ორი ბმული სიმრავლის გაერთიანება არის ბმული.*

დამტკიცება. ვთქვათ Y_1 და Y_2 არის X სივრცის ისეთი ბმული ქვესიმრავლეები, რომ $Y_1 \bigcap Y_2 \neq \varnothing$. ვაჩვენოთ, $Y = Y_1 \bigcup Y_2$ არის ბმული სიმრავლე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ Y არაა ბმული, მაშინ არსებობს X სივრცის ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $U \bigcap Y \neq \varnothing$, $V \bigcap Y \neq \varnothing$, $U \bigcap V \bigcap Y = \varnothing$ და $Y \subset U \bigcup V$. ცხადია, Y_1 და Y_2 სიმრავლეების ბმულობის გამო, ისინი მთლიანად შედის U და V სიმრავლეებიდან მხოლოდ ერთში და არ იკვეთება მეორესთან.

ა).ვთქვათ $Y_1 \subset U$ და $Y_2 \subset U$. ამ შემთხვევაში $V \bigcap Y = \varnothing$, რაც შეუძლებელია.

ბ).ვთქვათ $Y_1 \subset U$ და $Y_2 \subset V$. ამ შემთხვევაში $Y_1 \bigcap Y_2 \subset U \bigcap V \bigcap Y = \varnothing$, რაც შეუძლებელია, რადგან $Y_1 \bigcap Y_2 \neq \varnothing$.

ამრიგად, დაშვება არასწორია, ე.ი. $Y = Y_1 \bigcup Y_2$ არის ბმული სიმრავლე. □

თეორემა 3.5.7. *არაცარიელი თანაკვეთის მქონე ბმულ სიმრავლეთა გაერთიანება არის ბმული.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ არის X ტოპოლოგიური სივრცის ბმულ ქვესიმრავლეთა ისეთი ოჯახი, რომ $\bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha \neq \varnothing$. ვთქვათ $y_0 \in \bigcap_{\alpha \in A} Y_\alpha$, ხოლო y_1 და y_2 არის $Y = \bigcup_{\alpha \in A} Y_\alpha$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი წერტილი. ვთქვათ $y_1 \in Y_{\alpha_1}$ და $y_2 \in Y_{\alpha_2}$. 3.5.6 თეორემიდან გამომდინარე $Y_{\alpha_1} \bigcup Y_{\alpha_2}$ არის ბმული სიმრავლე. ამრიგად, Y სიმრავლის ნებისმიერი ორი წერტილი მდებარეობს ბმულ ქვესიმრავლეში. ამიტომ, 3.5.3 თეორემის თანხამად, Y არის ბმული სიმრავლე. □

X ტოპოლოგიური სივრცის ბმულობის კომპონენტა ეწოდება ნებისმიერ Y არაცარიელ ბმულ სიმრავლეს, რომელიც ემთხვევა მის მომცველ ნებისმიერ $Z \subset X$ ბმულ სიმრავლეს.

ცხადია, X სივრცის ნებისმიერ ორ განსხვავებულ Y_1 და Y_2 კომპონენტას არ შეიძლება ჰქონდეს საერთო წერტილი. მართლაც, თუ $Y_1 \bigcap Y_2 \neq \varnothing$, მაშინ 3.5.6 თეორემის თანახმად, $Y_1 \bigcup Y_2$ არის ბმული სიმრავლე და მოიცავს Y_1, Y_2 ბმულ სიმრავლეებს. Y_1 და Y_2 არის ბმულობის კომპონენტები, ამიტომ $Y_1 = Y_1 \bigcup Y_2 = Y_2$. ეს კი შეუძლებელია, რადგან $Y_1 \neq Y_2$.

X სივრცის არაცარიელი Y ქვესიმრავლის მომცველი ყველა ბმული

$Y_{\sim}$, $\sim \in A$ სიმრავლეების $\bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ გაერთიანება არის ბმული სიმრავლე. ცხადია, ნებისმიერი Z ბმული სიმრავლე, რომელიც მოიცავს $\bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ სიმრავლეს, ემთხვევა $\bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ გაერთიანებას. მართლაც, Z ამავე დროს მოიცავს Y სიმრავლეს და, მაშასადამე, ეკუთვნის $\{Y_{\sim}\}_{\sim \in A}$ ოჯახს. ამრიგად, $Z \subset \bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ და $\bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim} \subset Z$. ეს კი ნიშნავს, რომ $Z = \bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ და $\bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ არის ბმულობის კომპონენტა. $\bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ სიმრავლეს ეწოდება Y სიმრავლის ბმულობის კომპონენტა. იმ შემთხვევაში, როცა $Y = \{x\}$, მაშინ $\bigcup\limits_{\sim \in A} Y_{\sim}$ სიმრავლეს ეწოდება x წერტილის ბმულობის კომპონენტა.

X სივრცის ნებისმიერი Y ბმულობის კომპონენტა არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. მართლაც, $\overline{Y}$ ჩაკეტვა, როგორც ბმული სიმრავლე, მოიცავს Y კომპონენტას და ემთხვევა მას, ე.ი. $Y = \overline{Y}$.

ზემონათქვამიდან გამომდინარე, მივიღეთ შემდეგი

თეორემა 3.5.8. *ყოველი X ტოპოლოგიური სივრცე არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ჩაკეტილი სიმრავლეების გაერთიანება, რომელთაგან თითოეული არის X სივრცის ბმულობის კომპონენტა.* □

სივრცის თვისება იყოს ბმული, არის ტოპოლოგიური ინვარიანტი. ეს გამომდინარეობს შემდეგი თეორემიდან.

თეორემა 3.5.9. *ბმული სივრცის უწყვეტი ანასახი არის ბმული სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის X ბმული ტოპოლოგიური სივრციდან Y ტოპოლოგიურ სივრცეში უწყვეტი ასახვა. ვაჩვენოთ, რომ $f(X)$ ანასახი არის ბმული სიმრავლე. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $f(X)$ არაა ბმული. მაშინ Y სივრცეში არსებობს ორი ისეთი U და V ღია სიმრავლე, რომ $U \bigcap f(X) \neq \varnothing$, $V \bigcap f(X) \neq \varnothing$, $U \bigcap V \bigcap f(X) = \varnothing$ და $f(X) \subset U \bigcup V$. ცხადია, $f^{-1}(U)$ და $f^{-1}(V)$ არის X სივრცის ისეთი ღია სიმრავლეები, რომ $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, $f^{-1}(V) \neq \varnothing$ $f^{-1}(U) \bigcap f^{-1}(V) = \varnothing$ და $X = f^{-1}(U) \bigcup f^{-1}(V)$. ამრიგად, მივიღეთ საწინააღმდეგო, X არაა ბმული სივრცე. ეს კი ნიშნავს, რომ ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. $f(X)$ არის Y სივრცის ბმული ქვესიმრავლე. □

შედეგი 3.5.10. *სივრცის ბმულობის კომპონენტების რიცხვი არის ტოპოლოგიური ინვარიანტი.* □

ახლა განვიხილოთ ნამრავლის ოპერაცია ბმულ ტოპოლოგიურ სივრცეებზე. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3.5.11. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა ნამრავლი ბმულია მაშინ*

და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული თანამამრავლი სივრცე არის ბმული.

დამტკიცება. ვთქვათ $X_{\sim}$, $\sim \in A$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\prod_{\sim \in A} X_{\sim}$ დეკარტული ნამრავლი არის ბმული სივრცე. ცხადია, ნებისმიერი $\sim \in A$ ინდექსისთვის $X_{\sim}$, როგორც $\prod_{\sim \in A} X_{\sim}$ ბმული სივრცის უწყვეტი ანასახი $p_{\sim} : \prod_{\sim \in A} X_{\sim} \to X_{\sim}$ უწყვეტი პროექციის მიმართ, არის ბმული სივრცე.

ვთქვათ $X_{\sim_1}$ და $X_{\sim_2}$ სივრცეები არის ბმული. ავიღოთ ნებისმიერი ორი $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_{\sim_1} \times X_{\sim_2}$ წერტილი. შევნიშნოთ, რომ სიმრავლე $X_{\sim_1} \times \{y_1\} \bigcup \{x_2\} \times X_{\sim_2}$ არის ბმული, რადგან $X_{\sim_1} \times \{y_1\}$ და $\{x_2\} \times X_{\sim_2}$ ბმული სიმრავლეები იკვეთება (x_2, y_1) წერტილში. ამრიგად, $X_{\sim_1} \times X_{\sim_2}$ დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერი ორი წერტილი მდებარეობს ბმულ ქვესიმრავლეში. აქედან გამომდინარე, $X_{\sim_1} \times X_{\sim_2}$ ნამრავლი არის ბმული. ინდუქციის წესით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $X_{\sim_1}$, $X_{\sim_2}, \dots, X_{\sim_n}$ სასრული რაოდენობის ბმული სიმრავლეების ნამრავლი არის ბმული.

ახლა, ვთქვათ, $\{X_{\sim}\}_{\sim \in A}$ არის ბმულ სიმრავლეთა ოჯახი. ყოველი $\sim \in A$ ინდექსისთვის განვიხილოთ წერტილი $x_{\sim} \in X_{\sim}$. ვთქვათ, $\mathscr{B}$ არის A ინდექსთა სიმრავლის ყველა სასრული F ქვესიმრავლისაგან შემდგარი ოჯახი. შევნიშნოთ, $C_F = \prod_{\sim \in A} Y_{\sim}$ სიმრავლე, სადაც $Y_{\sim} = \{x_{\sim}\}$, თუ $\sim \notin F$ და $Y_{\sim} = X_{\sim}$, თუ $\sim \in F$, არის ბმული სიმრავლე. ამრიგად, $\{C_F\}_{F \in \mathscr{B}}$ ოჯახი შედგება ბმული სიმრავლეებისაგან. ცხადია, $\{x_{\sim}\} \in \bigcap_{F \in \mathscr{B}} C_F$. 3.5.7 თეორემის თანახმად, $C = \bigcup_{F \in \mathscr{B}} C_F$ არის ბმული სიმრავლე. გარდა ამისა, ბმულია $\overline{C}_F$ ჩაკეტვა და $\overline{C}_F = \prod_{\sim \in A} X_{\sim}$. აქედან გამომდინარე, $\prod_{\sim \in A} X_{\sim}$ არის ბმული სივრცე. □

შედეგი 3.5.12. *n-განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცე, $I^{\aleph_0}$ ჰილბერტის კუბი, I^m ტიხონოვის კუბი და A^m ალექსანდროვის კუბი არის ბმული სივრცეები.* □

სიმბოლოთი $\mathscr{Con}$ აღვნიშნოთ ბმული სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია. 3.5.11 თეორემის თანახმად $\mathscr{Con}$ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების ნამრავლი, მაშინ როცა ობიექტების ჯამი არაა განსაზღვრული.

II. წრფივად ბმული სივრცეები

განვიხილოთ ბმულ ტოპოლოგიურ სივრცეთა კლასისგან განსხვავებული, ე.წ. წრფივად ბმული სივრცეების კლასი. მოვიყვანოთ

სივრცეთა თვისების-წრფივად ბმულობის განმარტება. წრფივად ბმულობა არის სივრცის უფრო ძლიერი და ადვილად შემოწმებადი თვისება, ვიდრე ბმულობა.

X ტოპოლოგიური სივრცის x წერტილიდან y წერტილამდე გზა ეწოდება ისეთ $¨ :[0,1]\to X$ უწყვეტ ასახვას, რომლისთვისაც $¨(0)=x$ და $¨(1)=y$.

ბუნებრივი წესით განიმარტება x წერტილიდან y წერტილამდე $¨$ გზის და y წერტილიდან z წერტილამდე $\cdot :[0,1]\to X$ გზის კომპოზიცია. განმარტების თანახმად,

$$(¨\cdot\cdot)(t)=\begin{cases} ¨(2t), & 0\le t\le 1/2,\\ \cdot(2t-1), & 1/2\le t\le 1.\end{cases}$$

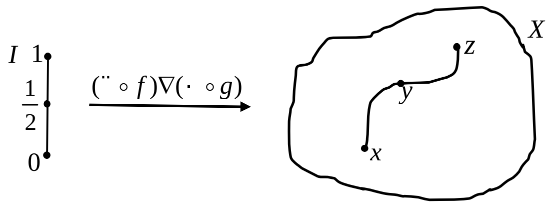
ვაჩვენოთ, რომ $¨\cdot\cdot :[0,1]\to X$ არის უწყვეტი ასახვა და $(¨\cdot\cdot)(0)=x$ და $(¨\cdot\cdot)(1)=z$. ცხადია, $f(t)=2t$, $0\le t\le 1/2$ ფორმულით მოცემული $f:[0,1/2]\to[0,1]$ ასახვისა და $¨:[0,1]\to X$ ასახვის $¨\circ f:[0,1/2]\to X$ კომპოზიცია, ასევე $g(t)=2t-1$, $1/2\le t\le 1$ ფორმულით მოცემული $g:[1/2,1]\to[0,1]$ ასახვისა და $\cdot :[0,1]\to X$ ასახვის $\cdot\circ g:[1/2,1]\to X$ კომპოზიცია არის ერთმანეთთან თავსებადი ასახვები. მართლაც,

$$(¨\circ f)(1/2)=¨(f(1/2))=¨(1)=y$$

და

$$(\cdot\circ g)(1/2)=\cdot(g(1/2))=\cdot(0)=y.$$

ცხადია, $¨\cdot\cdot$ კომპოზიცია, როგორც $¨\circ f$ და $\cdot\circ g$ უწყვეტი ასახვების $(¨\circ f)\nabla(\cdot\circ g)$ კომბინირებული ჯამი, არის უწყვეტი ასახვა.



x წერტილიდან y წერტილამდე $¨:[0,1]\to X$ გზის შებრუნებული გზა $\cdot :[0,1]\to X$ მოიცემა ფორმულით

$$\cdot(t)=¨(1-t),\ t\in[0,1].$$

ცხადია, $\cdot(0)=¨(1)=y$ და $\cdot(1)=¨(0)=x$.

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება წრფივად ბმული სივრცე, თუ მისი ნებისმიერი ორი x და y წერტილისთვის არსებობს ისეთი $¨:[0,1]\to X$ გზა, რომ $¨(0)=x$ და $¨(1)=y$.

ნებისმიერი წრფივად ბმული X სივრცე არის ბმული სივრცე. მართლაც, X სივრცის ყოველი ორი x და y წერტილი მდებარეობს

მათი შემაერთებელი γ გზის მიმართ $I=[0,1]$ მონაკვეთის $\gamma(I)$ ანასახზე, ე.ი. $\gamma(I)$ ბმულ სიმრავლეზე. ამიტომ, 3.5.3 თეორემის თანახმად, X არის ბმული სივრცე.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი. ყოველი X ანტიდისკრეტული სივრცე არის წრფივად ბმული. X სივრცის ნებისმიერი ორი x და y წერტილისთვის განვიხილოთ $\gamma: I \to X$ ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$\gamma(t)=\begin{cases} x, & 0 \le t < 1/2, \\ y, & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

ცხადია, γ არის უწყვეტი ასახვა, რადგან X სივრცეში არსებული მხოლოდ ორი ღია სიმრავლის, X და $\varnothing$ სიმრავლეების $\gamma^{-1}(X)=I$ და $\gamma^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ წინარესახეები არის I სეგმენტის ღია ქვესიმრავლეები. განმარტებული ასახვა არის გზა x და y წერტილებს შორის, რადგან $\gamma(0)=x$ და $\gamma(1)=y$.

X დისკრეტული სივრცე, რომლის სიმძლავრე $|X|\ge 2$ არაა წრფივად ბმული. ყოველი $\gamma: I \to X$ უწყვეტი ფუნქცია მუდმივია. ამიტომ ნებისმიერი ორი $x \ne y$ წერტილისთვის $\gamma(0)=x$ და $\gamma(1)=y$ ტოლობები ერთდროულად არ სრულდება.

n-განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცე არის წრფივად ბმული, რადგან მისი ნებისმიერი ორი განსხვავებული $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ წერტილისთვის არსებობს $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ უწყვეტი ფუნქცია, მოცემული ფორმულით

$$\gamma(t)=(1-t)\cdot x+t\cdot y\,,\ \ t\in I\,,$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\gamma(0)=x$ და $\gamma(1)=y$.

$\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის ნებისმიერი ამოზნექილი სიმრავლე, n-განზომილებიანი ღია სიმპლექსი და ჩაკეტილი სიმპლექსი არის წრფივად ბმული ქვესივრცეები შემდეგი გაგებით.

(X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის (Y,τ_Y) ქვესივრცეს ეწოდება წრფივად ბმული ქვესივრცე, თუ იგი წრფივად ბმულია, როგორც ქვესივრცე.

თეორემა 3.5.13. *X სივრცის არაცარიელი თანაკვეთის მქონე წრფივად ბმულ ქვესივრცეთა გაერთიანება არის წრფივად ბმული ქვესივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ არის X სივრცის წრფივად ბმულ ქვესიმრავლეთა ისეთი ოჯახი, რომ $\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \ne \varnothing$. ვთქვათ $z\in \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha$. განვიხილოთ $Y=\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი x და y

წერტილი. ვთქვათ $x \in X_\alpha$ და $y \in X_{\alpha'}$. ამ სიმრავლეთა წრფივად ბმულობის გამო არსებობს ისეთი $\varphi : I \to X_\alpha$ და $\psi : I \to X_{\alpha'}$ უწყვეტი ასახვები, რომ $\varphi(I) \subset X_\alpha$, $\psi(I) \subset X_{\alpha'}$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = z$, $\psi(0) = z$ და $\psi(1) = y$. ვთქვათ $i_\alpha : X_\alpha \to Y$ და $i_{\alpha'} : X_{\alpha'} \to Y$ არის ჩადგმის ასახვები. ცხადია, $(i_\alpha \circ \varphi) \cdot (i_{\alpha'} \circ \psi) : I \to Y$ ასახვა აკმაყოფილებს

$$(i_\alpha \circ \varphi) \cdot (i_{\alpha'} \circ \psi)(0) = x$$

და

$$(i_\alpha \circ \varphi) \cdot (i_{\alpha'} \circ \psi)(1) = y$$

პირობებს. ამრიგად, $Y = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ არის X სივრცის წრფივად ბმული ქვესივრცე. □

X ტოპოლოგიური სივრცის არაცარიელ Y წრფივად ბმულ ქვესიმრავლეს ეწოდება X სივრცის წრფივად ბმულობის კომპონენტა, თუ X სივრცის ყოველი წრფივად ბმული Z სიმრავლისთვის, რომელიც მას მოიცავს, სრულდება პირობა $Z = Y$.

X ტოპოლოგიური სივრცის ორ განსხვავებულ Y_1 და Y_2 წრფივად ბმულობის კომპონენტას არ შეიძლება ჰქონდეთ საერთო წერტილი. ვთქვათ Y_1 და Y_2 არის ორი განსხვავებული წრფივად ბმულობის კომპონენტა. თუ $Y_1 \bigcap Y_2 \neq \varnothing$, მაშინ მათი გაერთიანება $Y_1 \bigcup Y_2$ არის წრფივად ბმული და $Y_1 \subset Y_1 \bigcup Y_2$, $Y_2 \subset Y_1 \bigcup Y_2$. ცხადია, $Y_1 = Y_1 \bigcup Y_2 = Y_2$. ეს კი შეუძლებელია, რადგან $Y_1 \neq Y_2$. ამრიგად, X ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ორი წრფივად ბმულობის კომპონენტის თანაკვეთა ან ცარიელია, ან ერთმანეთს ემთხვევა.

X ტოპოლოგიური სივრცის ყოველი x წერტილი შედის მის რომელიმე წრფივად ბმულობის კომპონენტაში. ვთქვათ $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ არის x წერტილის მომცველ ყველა წრფივად ბმულობის კომპონენტების ოჯახი. ცხადია, ეს ოჯახი არაცარიელია, რადგან მას ეკუთვნის x წერტილის მომცველი ერთ-ერთი კომპონენტა, კერძოდ, $\{x\}$. გაერთიანება $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ არის წრფივად ბმულობის კომპონენტა. მართლაც, $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ სიმრავლის მომცველი ნებისმიერი Z წრფივად ბმული სიმრავლე შეიცავს x წერტილს, შედის $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ოჯახში და, აქედან გამომდინარე, ემთხვევა $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ გაერთიანებას. ზემონათქვამიდან მიიღება შემდეგი

თეორემა 3.5.14. *ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე წარმოიდგინება მისი წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი წრფივად ბმულობის კომპონენტების გაერთიანებით.* □

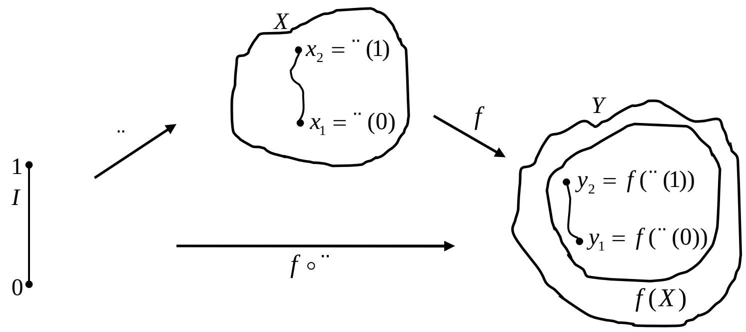
სიმბოლოთი $\mathscr{LCon}$ აღვნიშნოთ წრფივად ბმული სივრცეების და

უწყვეტი ასახვების კატეგორია. ცხადია, $\mathscr{LCon}$ კატეგორია არის $\mathscr{Con}$ კატეგორიის სრული ქვეკატეგორია.

სივრცის თვისება იყოს წრფივად ბმული არის ტოპოლოგიური თვისება. ეს გამომდინარეობს შემდეგი თეორემიდან.

თეორემა 3.5.15. *წრფივად ბმული სივრცის უწყვეტი ანასახი არის წრფივად ბმული.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის წრფივად ბმული სივრცე, ხოლო $f: X \to Y$ უწყვეტი ასახვა. ვაჩვენოთ $f(X)$ ანასახი არის წრფივად ბმული. ვთქვათ $y_1, y_2 \in f(X)$ არის ნებისმიერი ორი წერტილი. არსებობს ისეთი $x_1, x_2 \in X$ წერტილები, რომ $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. X სივრცის წრფივად ბმულობის გამო არსებობს ისეთი $\gamma : I \to X$ უწყვეტი ასახვა, რომ $\gamma(0) = x_1$ და $\gamma(1) = x_2$. ცხადია, $f \circ \gamma : I \to Y$ ასახვა აკმაყოფილებს პირობებს $(f \circ \gamma)(I) \subset f(X)$, $(f \circ \gamma)(0) = y_1$ და $(f \circ \gamma)(1) = y_2$. ამრიგად, $f(X)$ არის წრფივად ბმული. □



S^1 წრეწირი არის წრფივად ბმული, რადგან ის არის $[0, 2\pi]$ სეგმენტის, წრფივად ბმული სიმრავლის, უწყვეტი ანასახი იმ $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ უწყვეტი ასახვის მიმართ, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$f(x) = (\cos x, \sin x), \quad x \in [0, 2\pi].$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3.5.16. *ტოპოლოგიურ სივრცეთა ნამრავლი წრფივად ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თითოეული თანამამრავლი სივრცე არის წრფივად ბმული.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ არის წრფივად ბმული სივრცეების ოჯახი. ვაჩვენოთ $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ არის წრფივად ბმული სივრცე. ვთქვათ $x = (x_\alpha)$ და $y = (y_\alpha)$ არის $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერი ორი წერტილი. პირობის თანახმად, ყოველი $\alpha \in A$ ინდექსისთვის არსებობს

ისეთი $¨_{\sim} : I \to X_{\sim}$ უწყვეტი ასახვა, რომ $¨_{\sim}(0) = x_{\sim}$ და $¨_{\sim}(1) = y_{\sim}$. ცხადია, ფუნქცია $¨ = \underset{\sim \in A}{\Delta} ¨_{\sim} : I \to \prod_{\sim \in A} X_{\sim}$ აკმაყოფილებს პირობებს

$$¨(0) = \underset{\sim \in A}{\Delta} ¨_{\sim}(0) = (¨_{\sim}(0)) = (x_{\sim}) = x$$

და

$$¨(1) = \underset{\sim \in A}{\Delta} ¨_{\sim}(1) = (¨_{\sim}(1)) = (y_{\sim}) = y \,.$$

ამრიგად, $\prod_{\sim \in A} X_{\sim}$ სივრცე არის წრფივად ბმული სივრცე.

ვთქვათ, შებრუნებით, $\prod_{\sim \in A} X_{\sim}$ დეკარტული ნამრავლი არის წრფივად ბმული. 3.5.15 თეორემის თანახმად, $p_{\sim}(\prod_{\sim \in A} X_{\sim}) = X_{\sim}$ არის წრფივად ბმული. □

დამტკიცებული თეორემის თანახმად, $\mathscr{LC}on$ კატეგორიაში არსებობს ობიექტების ნებისმიერი ნამრავლი.

ასევე შევნიშნოთ, $f : (0,1/®] \to \mathbb{R}$ ასახვა, რომელიც მოცემულია ფორმულით

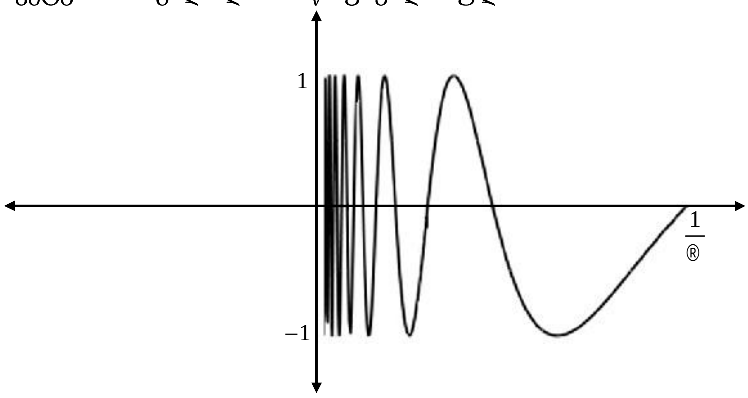
$$f(x) = \sin 1/x \,,\ \ x \in (0,1/®] \,,$$

არის ისეთი ასახვა, რომ მისი გრაფიკი

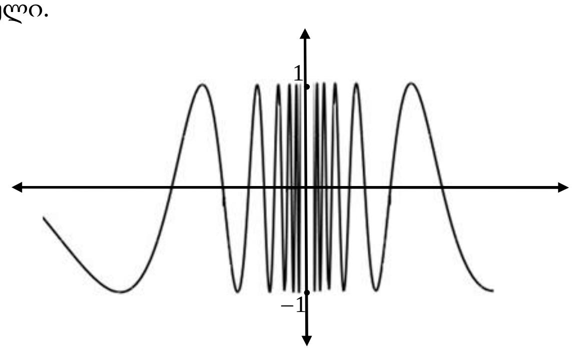
$$\Gamma_f = \{(x, \sin 1/x) \mid 0 < x \le 1/®\}$$

არის $1_{(0,1/®]} \Delta f : (0,1/®] \to (0,1/®] \times \mathbb{R}$ ჰომეომორფული ჩადგმის მიმართ $(0,1/®]$ წრფივად ბმული ქვესივრცის ანასახი.

ცხადია, $p : (0,1/®] \times \mathbb{R} \to (0,1/®]$ პროექციის ასახვის შემოსაზღვრა $p_{|_{\Gamma_f}} : \Gamma_f \to (0,1/®]$ არის ჰომეომორფიზმი. ამდენად, Γ_f არის წრფივად ბმული და, მაშასადამე, ბმული სიმრავლე. ვთქვათ $Y = A \bigcup \Gamma_f \subset \mathbb{R}^2$, სადაც $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \le y \le 1\}$. ცხადია, $Y = \overline{\Gamma}_f$. ამიტომ Y არის ბმული, მაგრამ ის არაა წრფივად ბმული. ამრიგად, წრფივად ბმული სიმრავლის ჩაკეტვა საზოგადოდ არაა წრფივად ბმული.



ვთქვათ $X=\{(x,\sin\frac{1}{x})\mid x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\}\subset\mathbb{R}$ და $Y=X\bigcup A$, სადაც $A=\{(0,y)\mid -1\le y\le 1\}$. ცხადია, $X\subset\mathbb{R}^2$ არც ბმულია და არც წრფივად ბმული. შევნიშნოთ, რომ მისი ჩაკეტვა $\overline{X}=Y$ არის ბმული, მაგრამ არაა წრფივად ბმული.



სავარჯიშო 3.5.17. 1).ვთქვათ $f:X\to\mathbb{R}$ არის უწყვეტი ასახვა X ბმული სივრციდან $\mathbb{R}$ ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა ღერძს შორის. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $x,x'\in X$ წერტილისთვის f ასახვა ღებულობს ყველა მნიშვნელობას $f(x)$ და $f(x')$ რიცხვებს შორის.

2).ვთქვათ $X_1=\{(x,y)\mid y=0\}$ და $X_2=\{(x,y)\mid x>0, y=1/x\}$ არის $\mathbb{R}^2$ სიბრტყის ქვესიმრავლეები. აჩვენეთ, $X_1\bigcup X_2$ არაა $\mathbb{R}^2$ ევკლიდური სიბრტყის ბმული ქვესიმრავლე.

3).ვთქვათ A და B არის X სივრცის ორი ისეთი ბმული ქვესიმრავლე, რომ $A\bigcap\overline{B}\ne\varnothing$. აჩვენეთ, $A\bigcup B$ არის ბმული სიმრავლე.

4).ვთქვათ Y არის X სივრცის ბმული ქვესიმრავლე. აჩვენეთ, თუ $A\subset X$, $Y\bigcap A\ne\varnothing$ და $Y\bigcap(X\setminus A)\ne\varnothing$, მაშინ $Y\bigcap\mathrm{Fr}A\ne\varnothing$.

5).აჩვენეთ, თუ A არის X სივრცის ბმული სიმრავლე და $A\subset B\subset\overline{A}$, მაშინ B არის ბმული სიმრავლე.

6).აჩვენეთ, $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის A ბმული სიმრავლის ყოველი U მიდამო შეიცავს A სიმრავლის V ბმულ მიდამოს.

7).ვთქვათ, X არის $\mathbb{R}^2$ ევკლიდური სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა ერთობლიობა, რომელთა აბსცისები არის რაციონალური რიცხვები. აჩვენეთ, X სივრცის ბმულობის კომპონენტებია $x=r$ წრფეები, სადაც $r\in\mathbb{R}$ არის რაციონალური რიცხვი.

8).აჩვენეთ, თუ U არის $\mathbb{R}^2$ ევკლიდური სიბრტყის ღია ბმული ქვესივრცე, მაშინ U არის წრფივად ბმული.

9).ვთქვათ $\mathbb{Q}$ არის $\mathbb{R}$ ღერძის რაციონალურ რიცხვთა ქვესივრცე. აჩვენეთ, $\mathbb{Q}$ ქვესივრცის ყოველი კომპონენტა შედგება ერთი

წერტილისგან.

10).ვთქვათ $A \subset X$ და $B \subset X$. აჩვენეთ, თუ X და Y არის ბმული სივრცეები, მაშინ $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ არის ბმული ქვესიმრავლე.

ლიტერატურა

[Ar-P]. A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomarev, Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises, Springer, 1984.
[Art-S]. J. Arthur and Jr. Seebach, Counterexamples In Topology, Dover Publications, 1995.
[Br]. G. E. Bredon, Topology and Geometry, Springer-Verlag, New York, 2002.
[Du].J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, 1966.
[En]. R. Engelking, General Topology, PWN, Warszawa, 1977.
[G].S.A. Gaal, Point Set Topology, Dover Publications, 2009.
[Ke]. J. L. Kelley, General Topology , Springer, 1975.
[Ku]. K. Kuratowski, Topology: Volume I, Academic Press, 1966.
[Mu]. J. R. Munkres, Topology, Prentice Hall, Incorporated, 2000.

თავი IV. ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილების თეორიის ელემენტები

წინამდებარე თავი ეხება ტოპოლოგიურ სივრცეთა კლასიკური ინვარიანტის-განზომილების განმარტებას და მათი ზოგადი თვისებების აღწერას. აქ სამი განსხვავებული გზით, განმარტებულია ტოპოლოგიური სივრცის განზომილება-ე.წ. მცირე ინდუქციური განზომილება, დიდი ინდუქციური განზომილება და დაფარვითი განზომილება, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევა თვლადბაზისიანი სივრცეების კლასზე, მაგრამ სივრცეთა უფრო ზოგად კლასებზე, ერთმანეთისაგან განსხვავდება.

ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილების თეორიაში მთავარ განზომილების ფუნქციად ითვლება დაფარვითი განზომილება. ამ თავში მთავარი ყურადღება ეთმობა ტოპოლოგიურ სივრცეთა და მათ კომპაქტიფიკაციათა დაფარვით განზომილებას.

4.1. ტოპოლოგიურ სივრცეთა განზომილების ფუნქციები

განმარტება 4.1.1. X რეგულარული ტოპოლოგიური სივრცის მცირე ინდუქციური განზომილება, იგივე მენგერ-ურისონის განზომილება, ეწოდება $\operatorname{ind} X$ მთელ რიცხვს, რომელიც მოიცემა შემდეგი წესით:

MU1). $\operatorname{ind} X = -1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X = \varnothing$.

MU2). $\operatorname{ind} X \le n$, $n = 0,1,\ldots$, თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის და მისი ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $V \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $x \in V \subset U$ და $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V \le n-1$.

MU3). $\operatorname{ind} X = n$, თუ $\operatorname{ind} X \le n$ და $\operatorname{ind} X \not\le n-1$, ანუ $\operatorname{ind} X > n-1$.

MU4). $\operatorname{ind} X = \infty$, თუ $\operatorname{ind} X > n$ ყოველი $n = -1, 0, \ldots$ მთელი რიცხვისთვის.

ამრიგად, მცირე ინდუქციური განზომილება არის რეგულარულ ტოპოლოგიურ სივრცეთა კლასზე განსაზღვრული და $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge -1\} \bigcup \{\infty\}$ სიმრავლეში მნიშვნელობების მქონე, ზემოთ მოყვანილი წესით მოცემული $\operatorname{ind} : \mathscr{R} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge -1\} \bigcup \{\infty\}$ ფუნქცია.

წინადადება 4.1.2. *თუ X და Y არის ჰომეომორფული ტოპოლოგიური სივრცეები, მაშინ* $\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} Y$.

დამტკიცება. წინადადება მტკიცდება ინდუქციის წესით. ვთქვათ $\operatorname{ind} X = -1$, მაშინ $X = \varnothing$. ცხადია, $Y = \varnothing$ და, აქედან გამომდინარე, $\operatorname{ind} Y = -1$. დავუშვათ, დასამტკიცებელი ტოლობა სრულდება ყოველი $\operatorname{ind} X = n \ge -1$ მთელი რიცხვისთვის და მისი სამართლიანობა შევამოწმოთ იმ შემთხვევაში, როცა $\operatorname{ind} X = n+1$. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ჰომეომორფიზმი X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის და $y = f(x)$ არის Y სივრცის ნებისმიერი წერტილი. ვაჩვენოთ $\operatorname{ind} Y = n+1$.

თავდაპირველად შევამოწმოთ $\operatorname{ind} Y \le n+1$. შევნიშნოთ, რომ y წერტილის ნებისმიერი U მიდამოს წინარესახე $f^{-1}(U)$ არის x წერტილის მიდამო. ამიტომ არსებობს ისეთი $W \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $x \in W \subset f^{-1}(U)$ და $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} W \le n$. ცხადია, $V = f(W) \subset U$ არის y წერტილის მიდამო და ის ჰომეომორფულია W ქვესივრცის. ასევე, ერთმანეთის ჰომეომორფულია $\operatorname{Fr} V$ და $\operatorname{Fr} W$ ქვესივრცეები. ამიტომ ინდუქციის თანახმად, $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V = \operatorname{ind} \operatorname{Fr} W \le n$. ამრიგად, $\operatorname{ind} Y \le n+1$.

ადვილად შემოწმდება $\operatorname{ind} Y \not\le n$ უტოლობა. მართლაც, რადგან $\operatorname{ind} X \not\le n$, ამიტომ არსებობს ისეთი $x \in X$ წერტილი და მისი ისეთი U მიდამო, რომ X სივრცის ყოველი $V \subset U$ ღია სიმრავლისთვის, რომელიც შეიცავს x წერტილს, $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V > n-1$.

განვიხილოთ $y = f(x)$ წერტილის $f(U)$ მიდამო. y წერტილის ყოველი $G \subset f(U)$ მიდამოსთვის $x \in f^{-1}(G) \subset U$. ცხადია, $\operatorname{Fr} f^{-1}(G)$ საზღვარი ჰომეომორფულია $\operatorname{Fr} G$ საზღვრის. ზემოთაღნიშნულის თანახმად, $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} f^{-1}(G) > n-1$. ამიტომ y წერტილის ასეთი G მიდამოებისთვის $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} G > n-1$, რადგან, თუ $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} G \le n-1$ უტოლობა შესრულდებოდა, მაშინ აგრეთვე შესრულდებოდა $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} f^{-1}(G) \le n-1$ უტოლობა. ამრიგად, $\operatorname{ind} Y \not\le n$, ე.ი. $\operatorname{ind} Y = n+1$. □

განმარტება 4.1.3. X ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცის დიდი ინდუქციური განზომილება, იგივე ბრაუერ-ჩეხის განზომილება, ეწოდება $\operatorname{Ind} X$ მთელ რიცხვს, რომელიც მოიცემა შემდეგი წესით:

BČ1). $\operatorname{Ind} X = -1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X = \varnothing$.

BČ2). $\operatorname{Ind} X \le n,\quad n = 0,1,\ldots,$ თუ ყოველი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის და მისი ნებისმიერი $U \subset X$ მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $V \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $F \subset V \subset U$ და $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V \le n-1$.

BČ3). $\operatorname{Ind} X = n$, თუ $\operatorname{Ind} X \le n$ და $\operatorname{Ind} X \not\le n-1$, ანუ $\operatorname{Ind} X > n-1$.

BČ4). $\operatorname{Ind} X = \infty$, თუ $\operatorname{Ind} X > n$ ყოველი $n = -1, 0, \ldots$ მთელი რიცხვისთვის.

ამრიგად, დიდი ინდუქციური განზომილება არის ნორმალურ ტოპოლოგიურ სივრცეთა $\mathscr{N}$ კლასზე განსაზღვრული და $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge -1\} \bigcup \{\infty\}$ სიმრავლეში მნიშვნელობების მქონე, ზემოთმოყვანილი წესით მოცემული $\operatorname{Ind} : \mathscr{N} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge -1\} \bigcup \{\infty\}$ ფუნქცია.

4.1.2 წინადადების ანალოგიურად მტკიცდება

წინადადება 4.1.4. *თუ X და Y არის ჰომეომორფული სივრცეები, მაშინ* $\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y$. □

ახლა მოვიყვანოთ ინდუქციურ განზომილებათა მონოტონურობის თეორემები.

თეორემა 4.1.5. *რეგულარული სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცის მცირე ინდუქციური განზომილება არ აღემატება ამ სივრცის მცირე*

ინდუქციურ განზომილებას.

დამტკიცება. ვთქვათ Y არის X რეგულარული სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცე. ცხადია, უტოლობა სრულდება, როცა $\operatorname{ind} X = \infty$. დავუშვათ $\operatorname{ind} X = k < \infty$. დავამტკიცოთ $\operatorname{ind} Y \le k$. იმ შემთხვევაში, როცა $k = -1$, მაშინ $X = \varnothing = Y$ და $\operatorname{ind} Y = -1$, ანუ $\operatorname{ind} Y \le \operatorname{ind} X$. ვიგულისხმოთ უტოლობა დამტკიცებულია $k \le n$ შემთხვევისთვის და დავამტკიცოთ $k = n+1$ შემთხვევისთვის.

დავუშვათ $\operatorname{ind} X = n+1$. ვთქვათ $y \in Y$ არის ნებისმიერი წერტილი, ხოლო $G \subset Y$ მისი ნებისმიერი მიდამო. ცხადია, არსებობს X სივრცეში ისეთი U ღია სიმრავლე, რომ $U \bigcap Y = G$. დაშვების თანახმად, არსებობს y წერტილის ისეთი $V \subset X$ მიდამო, რომ $y \in V \subset U$ და $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V \le n$.

ვთქვათ $Y \bigcap V = Q$. ცხადია, $y \in Q \subset G$ და სამართლიანია შემდეგი ფორმულები

$$\operatorname{Fr}_Y Q = \overline{Q}^Y \bigcap \overline{Y \setminus Q}^Y = (Y \bigcap \overline{Q}^X) \bigcap (Y \bigcap \overline{Y \setminus Q}^X) = Y \bigcap \overline{Y \bigcap V}^X \bigcap (Y \bigcap \overline{Y \setminus (Y \bigcap V)}^X)$$

$$= Y \bigcap \overline{Y \bigcap V}^X \bigcap \overline{Y \setminus (Y \bigcap V)}^X = Y \bigcap \overline{Y \bigcap V}^X \bigcap \overline{Y \setminus V}^X \subset \overline{V}^X \bigcap \overline{X \setminus V}^X = \operatorname{Fr} V.$$

აქედან გამომდინარე, $\operatorname{Fr}_Y Q \subset \operatorname{Fr} V$. ინდუქციის თანახმად, $\operatorname{ind} \operatorname{Fr}_Y Q \le n$. ამრიგად, $\operatorname{ind} Y \le n+1 = \operatorname{ind} X$. □

თეორემა 4.1.6. *ნორმალური სივრცის ნებისმიერი ჩაკეტილი ქვესივრცის დიდი ინდუქციური განზომილება არ აღემატება ამ სივრცის დიდ ინდუქციურ განზომილებას.*

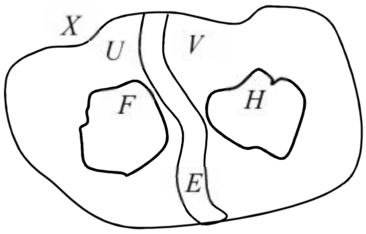
დამტკიცება. ვთქვათ Y არის X ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცე. ცხადია, უტოლობა სრულდება, როცა $\operatorname{Ind} X = \infty$. ვთქვათ $\operatorname{Ind} X = k < \infty$. დავამტკიცოთ $\operatorname{Ind} Y \le k$. იმ შემთხვევაში, როცა $k = -1$, მაშინ $X = \varnothing = Y$ და $\operatorname{Ind} Y = -1$, ანუ $\operatorname{Ind} Y \le \operatorname{Ind} X$. ვიგულისხმოთ უტოლობა დამტკიცებულია $k \le n$ შემთხვევისთვის და დავამტკიცოთ $k = n+1$ შემთხვევისთვის.

დავუშვათ, $\operatorname{Ind} X = n+1$. ვთქვათ F არის Y სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ცხადია, ის ჩაკეტილია X სივრცეში. F სიმრავლის Y ქვესივრცეში ნებისმიერი G მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $U \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $Y \bigcap U = G$. დაშვების თანახმად, F ჩაკეტილ ქვესიმრავლეს X სივრცეში გააჩნია ისეთი V მიდამო, რომ $F \subset V \subset U$ და $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \le n$.

ვთქვათ $V \bigcap Y = Q$. ცხადია, $F \subset Q \subset G$. როგორც 4.1.5 თეორემის დამტკიცებისას, ისე შეგვიძლია ვაჩვენოთ $\operatorname{Fr}_Y Q \subseteq \operatorname{Fr} V$. ცხადია, $\operatorname{Fr}_Y Q$ არის $\operatorname{Fr} V$ ქვესივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. ინდუქციის თანახმად, $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr}_Y Q \le \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V \le n$. ამრიგად, $\operatorname{Ind} Y \le n+1 = \operatorname{Ind} X$. □

X ტოპოლოგიური სივრცის F და H თანაუკვეთ ქვესიმრავლეებს შორის ტიხარი ეწოდება $E \subset X$ ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც X სივრცეში არსებობს ისეთი U და V ღია სიმრავლეები, რომ $F \subset U$,

$H \subset V$, $U \bigcap V = \varnothing$ და $X \setminus E = U \bigcup V$.



ახლა მოვიყვანოთ ტიხარის მეშვეობით სივრცის მცირე და დიდი ინდუქციური განზომილებების დახასიათებანი.

სამართლიანია შემდეგი წინადადებანი

წინადადება 4.1.7. *რეგულარული X ტოპოლოგიური სივრცის მცირე ინდუქციური განზომილება* $\operatorname{ind} X \le n \ge 0$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სივრცის ნებისმიერ x წერტილსა და მის არამომცველ ყოველ F ჩაკეტილ სიმრავლეს შორის არსებობს E ტიხარი, რომლის განზომილება* $\operatorname{ind} E \le n-1$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\operatorname{ind} X \le n \ge 0$. განვიხილოთ X რეგულარული სივრცის $x \in X$ წერტილი და ისეთი F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $x \notin F$. სივრცის რეგულარულობის გამო არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $x \in \overline{U} \subset X \setminus F$. გარდა ამისა, არსებობს x წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $x \in V \subset U$ და $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V \le n-1$.

ვთქვათ $E = \operatorname{Fr} V$. ჩართვიდან

$$V \subset \overline{V} \subset \overline{U} \subset X \setminus F$$

მიიღება ჩართვა

$$F = X \setminus (X \setminus F) \subset X \setminus \overline{U} \subset X \setminus \overline{V} .$$

გარდა ამისა, $x \in V$ და $V \bigcap (X \setminus \overline{V}) = \varnothing$. შევნიშნოთ, რომ

$$X = V \bigcup \operatorname{Fr} V \bigcup (X \setminus \overline{V}) .$$

ამრიგად, $X \setminus E = V \bigcup (X \setminus \overline{V})$. აქედან გამომდინარე, E არის ისეთი ტიხარი x წერტილსა და F ჩაკეტილ სიმრავლეს შორის, რომ $\operatorname{ind} E \le n-1$.

ვთქვათ, შებრუნებით, X რეგულარული სივრცე აკმაყოფილებს პირობას: ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის და მისი არმომცველი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი E ტიხარი, რომ $\operatorname{ind} E \le n-1$. ვაჩვენოთ $\operatorname{ind} X \le n$.

ვთქვათ $x \in X$ და $U \subset X$ არის x წერტილის მიდამო. განვიხილოთ $F = X \setminus U$ ჩაკეტილი სიმრავლე. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი $V, G \subset X$ ღია სიმრავლეები, რომ $x \in V$, $F \subset G$, $V \bigcap G = \varnothing$, $X \setminus E = V \bigcup G$ და $\operatorname{ind} E \le n-1$. ცხადია,

$$x \in V \subset X \setminus G \subset X \setminus F = X \setminus (X \setminus U) = U$$

და

$$\operatorname{Fr}V=\overline{V}\bigcap\overline{X\setminus V}\subset\overline{X\setminus G}\bigcap\overline{X\setminus V}=(X\setminus G)\bigcap(X\setminus V)=X\setminus(V\bigcup G)=E\,.$$

4.1.5 თეორემის თანახმად $\operatorname{ind}\operatorname{Fr}V\le\operatorname{ind}E\le n$. ამრიგად, $\operatorname{ind}X\le n$.□

წინადადება 4.1.8. *ნორმალური X ტოპოლოგიური სივრცის დიდი ინდუქციური განზომილება $\operatorname{Ind}X\le n\ge 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცის ნებისმიერ ორ F და H ჩაკეტილ თანაუკვეთ სიმრავლეს შორის არსებობს E ტიხარი, რომლის განზომილება $\operatorname{Ind}E\le n-1$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\operatorname{Ind}X\le n\ge 0$. განვიხილოთ X ტოპოლოგიური სივრცის ნებისმიერი ორი F და H ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლე. ცხადია, არსებობს F სიმრავლის ისეთი $U\subset X$ და $V\subset X$ ღია მიდამოები, რომ $\overline{U}\subset X\setminus H$, $V\subset U$ და $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr}V\le n-1$. ვთქვათ $E=\operatorname{Fr}V$. როგორც წინა 4.1.7 წინადადების მტკიცებისას, ისე შემოწმდება $H\subset X\setminus\overline{V}$ და $X\setminus E=V\bigcup(X\setminus\overline{V})$. ამრიგად, E არის ტიხარი და $\operatorname{Ind}E\le n-1$.

ვთქვათ, შებრუნებით, სრულდება თეორემის პირობა. ვაჩვენოთ $\operatorname{Ind}X\le n$. ვთქვათ $F\subset X$ არის ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე, ხოლო $U\subset X$ მისი ნებისმიერი ღია მიდამო. პირობის თანახმად, F და $H=X\setminus U$ ჩაკეტილი თანაუკვეთი სიმრავლეებისთვის არსებობს ისეთი $V,G\subset X$ ღია სიმრავლეები და E ტიხარი, რომ $F\subset V$, $H\subset G$, $V\bigcap G=\varnothing$, $X\setminus E=V\bigcup G$ და $\operatorname{Ind}E\le n-1$. როგორც 4.1.7 თეორემის მტკიცებისას, ანალოგიურად შემოწმდება, $\operatorname{Fr}V$ არის E ტიხარის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr}V\le n-1$.□

თეორემა 4.1.9. *ყოველი ნორმალური X ტოპოლოგიური სივრცისთვის $\operatorname{ind}X\le\operatorname{Ind}X$.*

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ინდუქციის წესი $\operatorname{Ind}X$ რიცხვის მიმართ. თუ $\operatorname{Ind}X=-1$, მაშინ $X=\varnothing$. ამიტომ $\operatorname{ind}X=-1=\operatorname{Ind}X$.

ვთქვათ უტოლობა $\operatorname{ind}X\le\operatorname{Ind}X$ სამართლიანია, როცა $\operatorname{Ind}X=n$ და მისი სამართლიანობა ვაჩვენოთ $\operatorname{Ind}X=n+1$ შემთხვევისთვის. ნებისმიერი $x\in X$ წერტილი არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ამიტომ მისი ნებისმიერი U ღია მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $V\subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $x\in V\subset U$ და $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr}V\le n$. ინდუქციის დაშვების თანახმად, $\operatorname{ind}\operatorname{Fr}V\le\operatorname{Ind}\operatorname{Fr}V\le n,$ ანუ $\operatorname{ind}X\le n+1=\operatorname{Ind}X$.□

გარდა მცირე და დიდი ინდუქციური განზომილებებისა ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეებისთვის დაფარვების მეშვეობით განიმარტება მესამე, ე.წ. დაფარვითი განზომილების ფუნქცია. მოვიყვანოთ ზოგიერთი ცნებები, რომლებიც დაგვჭირდება ამ განზომილების ფუნქციის განმარტებისათვის.

ვთქვათ X არის სიმრავლე, ხოლო $\sim$ მის ქვესიმრავლეთა რაიმე ოჯახი. $\sim$ ოჯახის ჯერადობა $x\in X$ წერტილში და $\sim$ ოჯახის ჯერადობა შესაბამისად ეწოდება

$$\operatorname{ord}_x\sim=|\{U\in\sim\mid x\in U\}|$$

და

$$\operatorname{ord}\sim = \sup\{\operatorname{ord}_x \sim \mid x \in X\}.$$

კარდინალურ რიცხვებს.
ამრიგად, თუ X სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\sim$ ოჯახის ჯერადობა $\operatorname{ord}\sim = n$, მაშინ n არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც $\sim$ ოჯახში არსებობს n რაოდენობის არაცარიელი თანაკვეთის მქონე ელემენტი. ცხადია, თუ $\operatorname{ord}\sim = n$, მაშინ $\sim$ ოჯახის ნებისმიერი $n+1$ რაოდენობის ელემენტის თანაკვეთა არის ცარიელი სიმრავლე.

განმარტება 4.1.10. ნორმალური X ტოპოლოგიური სივრცის დაფარვითი განზომილება, იგივე ჩეხ-ლებეგის განზომლება, ეწოდება $\dim X$ მთელ რიცხვს, რომელიც მოიცემა წესით:

ČL1). $\dim X \le n$, $n = -1, 0, \ldots$, თუ X სივრცის ყოველ სასრულ ღია დაფარვაში შეიძლება ჩაიწეროს სასრული ღია დაფარვა, რომლის ჯერადობა $\le n+1$.

ČL2). $\dim X = n$, თუ $\dim X \le n$ და $\dim X \not\le n-1$.

ČL3). $\dim X = \infty$, თუ $\dim X > n$ ყოველი $n = -1, 0, \ldots$ მთელი რიცხვისთვის.

წინადადება 4.1.11. *თუ X და Y არის ჰომეომორფული ტოპოლოგიური სივრცეები, მაშინ* $\dim X = \dim Y$.

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის ჰომეომორფიზმი X და Y ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის და $\dim X = n$. შევნიშნოთ, რომ Y სივრცის ყოველი $\sim$ სასრული ღია დაფარვის წინარესახე $f^{-1}(\sim)$ არის X სივრცის სასრული ღია დაფარვა. პირობის თანახმად, არსებობს მასში ჩაწერილი ისეთი სასრული ღია დაფარვა, რომ $\operatorname{ord} \ \le n+1$. ცხადია, $f(\ )$ არის Y სივრცის სასრული ღია დაფარვა, $\operatorname{ord} f(\ ) \le n+1$ და $f(\ ) \ge \sim$. ამრიგად, $\dim Y \le n$. ვაჩვენოთ, რომ $\dim Y \not\le n-1$. ვიცით, რომ $\dim X \not\le n-1$. ამიტომ არსებობს X სივრცის ისეთი სასრული ღია დაფარვა, რომ მასში ჩაწერილი ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვის ჯერადობა $> n$. შევნიშნოთ, $f(\ )$ არის Y სივრცის სასრული ღია დაფარვა და მასში ჩაწერილი ყოველი სასრული ღია დაფარვის ჯერადობა $> n$. ამრიგად, $\dim Y \not\le n-1$ არ სრულდება, ე.ი. $\dim Y = n$. მარტივად შემოწმდება $\dim X = \dim Y$ ტოლობა $\dim X = -1$ და $\dim X = \infty$ შემთხვევებისთვისაც. □

თეორემა 4.1.12. *X ნორმალური სივრცის Y ჩაკეტილი ქვესივრცის განზომილება* $\dim Y \le \dim X$.

დამტკიცება. თუ $\dim X = \infty$, მაშინ $\dim Y \le \dim X$ უტოლობა სამართლიანია. დავუშვათ $\dim X = n < \infty$. განვიხილოთ Y ქვესივრცის ნებისმიერი $\sim = \{V_i\}_{i=1}^{m}$ სასრული ღია დაფარვა. ვთქვათ $U_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots, m$ არის X სივრცის ისეთი ღია სიმრავლეები, რომ $U_i \bigcap Y = V_i$,

$i = 1, 2, \ldots, m$. ოჯახი

$$\tilde{\ } = \{U_1, U_2, \ldots, U_m, X \setminus Y\}$$

არის X სივრცის სასრული ღია დაფარვა. ამიტომ არსებობს ისეთი $' = \{V_1', V_2', \ldots, V_{m'}'\}$ ღია სასრული დაფარვა, რომ $' > \tilde{\ }$ და $\operatorname{ord} \ ' \leq n+1$. ოჯახი $= \{V_1' \bigcap Y, V_2' \bigcap Y, \ldots, V_{m'}' \bigcap Y\}$ არის Y ქვესივრცის სასრული ღია დაფარვა, $\geq \sim$ და $\operatorname{ord} \ \leq n+1$. ამრიგად, $\dim Y \leq n = \dim X$.□

ზოგადი ტოპოლოგიის ამოცანების გამოკვლევაში კლასიკურ განზომილებების ფუნქციებთან ერთად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს სივრცეთა რაიმე ტოპოლოგიურად ჩაკეტილი კლასის მიმართ განმარტებული განზომილების ტიპის ფუნქციები. ეს ფუნქციები განიმარტება მცირე და დიდი ინდუქციური განზომილებების და დაფარვითი განზომილების მსგავსად.

ვთქვათ $\mathscr{P}$ არის სივრცეთა ტოპოლოგიურად ჩაკეტილი კლასი, ანუ $\mathscr{P}$ არის ისეთი კლასი, რომ თუ $X \in \mathscr{P}$ და X არის ჰომეომორფული Y სივრცის, მაშინ $Y \in \mathscr{P}$.

სივრცეთა $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით მცირე ინდუქციური განზომილება არის ფუნქცია $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} : \mathscr{R} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -1\} \bigcup \{\infty\}$, რომელიც მოიცემა შემდეგი წესით:

i). $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X = -1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \in \mathscr{P}$.

ii). $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X \leq n$, $n = 0, 1, \ldots,$ თუ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის და მისი ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $V \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $x \in V \subset U$ და $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} \operatorname{Fr} V \leq n-1$.

iii). $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X = n$, თუ $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X \leq n$ და $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X \not\leq n-1$, ანუ $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X > n-1$.

iv). $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X = \infty$, თუ $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X > n$ ყოველი $n = -1, 0, \ldots$ მთელი რიცხვისთვის.

ასევე, სივრცეთა $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით დიდი ინდუქციური განზომილება არის ფუნქცია $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} : \mathscr{N} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -1\} \bigcup \{\infty\}$, რომელიც მოიცემა შემდეგი წესით:

i). $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X = -1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X \in \mathscr{P}$.

ii). $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X \leq n$, $n = 0, 1, \ldots,$ თუ ყოველი $F \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის და მისი ნებისმიერი U მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $V \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $F \subset V \subset U$ და $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} \operatorname{Fr} V \leq n-1$.

iii). $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X = n$, თუ $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X \leq n$ და $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X \not\leq n-1$,ანუ $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X > n-1$.

iv). $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X = \infty$, თუ $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X > n$ ყოველი $n = -1, 0, \ldots$ მთელი რიცხვისთვის.

გარდა $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით მცირე და დიდი ინდუქციური განზომილებებისა, ტოპოლოგიური სივრცეებისათვის განიმარტება მესამე, $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით დაფარვითი განზომილება.

X სივრცის ღია ქვესიმრავლეთა $\sim = \{U_s\}_{s \in S}$ ოჯახს ეწოდება მისი

სასრული ღია დაფარვა, თუ $X \setminus \bigcup_{s\in S} U_s \in \mathscr{P}$.

სივრცეთა $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით დაფარვითი განზომილება არის ფუნქცია $\dim_{\mathscr{P}} : \mathscr{N} \to \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq -1\} \bigcup \{\infty\}$, რომელიც მოიცემა შემდეგი წესით:

i). $\dim_{\mathscr{P}} X \leq n$, $n = -1, 0, ...$, *თუ* X *სივრცის ყოველ სასრულ სასრულ ღია დაფარვაში შეიძლება ჩაიწეროს სასრული სასრული ღია დაფარვა, რომლის ჯერადობა* $\leq n+1$.

ii). $\dim_{\mathscr{P}} X = n$, *თუ* $\dim_{\mathscr{P}} X \leq n$ *და* $\dim_{\mathscr{P}} X \not\leq n-1$.

iii). $\dim_{\mathscr{P}} X = \infty$, *თუ* $\dim_{\mathscr{P}} X > n$ *ყოველი* $n = -1, 0, ...$ *მთელი რიცხვისთვის.*

სივრცეთა $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}}$, $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}}$ და $\dim_{\mathscr{P}}$ განზომილებების სისტემატური გამოკვლევა და მათი გამოყენებანი გადმოცემულია მონოგრაფიაში [Aa-N] და შრომაში [B].

განმარტებული ინვარიანტების მეშვეობით შესაძლებელია შეფასდეს შემდეგი ინვარიანტები:

$\operatorname{Sur}_{\mathscr{P}} X = \min\{\operatorname{Ind}(X \setminus G) \mid G \subset X, G \in \mathscr{P}\}$.

$\operatorname{Sur}_{\mathscr{S}_{\pm}} X = \min\{\operatorname{Ind}(X \setminus G) \mid G \subset X, G \in \mathscr{S}_{\pm}\}$, სადაც $\mathscr{S}_{\pm}$ არის ± - კომპაქტების კლასი, ანუ თვლადი რაოდენობის კომპაქტური ქვესივრცეების გაერთიანებებით წარმოდგენადი სივრცეების კლასი.

$\operatorname{def} X = \min\{\operatorname{ind}(cX \setminus X) \mid cX \in \mathscr{K}(X)\}$, სადაც $\mathscr{P} = \mathscr{C}$ არის კომპაქტურ სივრცეთა კლასი, ხოლო $\mathscr{K}(X)$ არის X სეპარაბელური მეტრიზებადი სივრცის ყველა cX მეტრიზებადი კომპაქტიფიკაციების სიმრავლე.

$\operatorname{def}_{\mathscr{Compl}} X = \min\{\operatorname{Ind}(Y \setminus X) \mid X \subset Y, Y \in \mathscr{Compl}\}$, სადაც $\mathscr{P} = \mathscr{Compl}$ არის სრულ მეტრიზებად სივრცეთა კლასი.

$\operatorname{def}_{\mathscr{P}} X = \min\{\dim(Y \setminus X) \mid X \subset Y, Y \in \mathscr{P}\}$.

$\operatorname{Def}_{\mathscr{P}} X = \min\{\operatorname{Ind}(Y \setminus X) \mid X \subset Y, Y \in \mathscr{P}\}$.

ამ თავის 4.1, 4.2 და 4.3 პარაგრაფებში სავარჯიშოების სახით მოვიყვანთ სივრცეთა $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით განზომილების ფუნქციებთან დაკავშირებულ ზოგიერთ ამოცანას. საჭიროების შემთხვევაში, სივრცეთა კლასის მოდულით განზომილების თეორიის შესწავლით და კვლევით დაინტერესებულ მკითხველს ვურჩევთ მიმართოს დასახელებულ წყაროებს.

სავარჯიშო 4.1.13. 1).აჩვენეთ, X სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის განზომილება $\operatorname{ind} X \leq n \geq 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცეს აქვს ისეთი ± ბაზისი, რომ ნებისმიერ $U \in ±$ ელემენტისთვის $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leq n-1$.

2).დაამტკიცეთ, X სეპარაბელურ მეტრიკულ სივრცეს აქვს განზომილება $\operatorname{ind} X \leq 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველ $x \in X$ წერტილსა და მის არმომცველ F ჩაკეტილ სიმრავლეს შორის ტიხარი არის ცარიელი სიმრავლე.

3).შეამოწმეთ, რომ ყოველი X ნულგანზომილებიანი სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე შეიძლება ჩაიდგას ბუნებრივი ტოპოლოგიის მქონე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძში.

4).ვთქვათ X არის რეგულარული სივრცე და $\operatorname{ind} X = n \geq 1$. აჩვენეთ, ყოველი $k = 0,1,\ldots,n-1$ რიცხვისთვის არსებობს X სივრცის ისეთი F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $\operatorname{ind} F = k$.

5).დაამტკიცეთ, X მეტრიკული სივრცის Y სეპარაბელურ ქვესივრცეს აქვს განზომილება $\operatorname{ind} Y \leq n \geq 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $x \in Y$ წერტილისა და მისი ნებისმიერი $U \subset X$ მიდამოსთვის არსებობს ისეთი $V \subset X$ ღია სიმრავლე, რომ $x \in V \subset U$ და $\operatorname{ind}(Y \bigcap \operatorname{Fr} V) \leq n-1$.

6).შეამოწმეთ, $\operatorname{ind} \mathbb{R} = 1$.

7).აჩვენეთ, თუ X ნორმალური სივრცის განზომილება $\operatorname{Ind} X = n \geq 1$, მაშინ ყოველი $k = 0,1,\ldots,n-1$ რიცხვისთვის არსებობს X სივრცის ისეთი F ჩაკეტილი სიმრავლე, რომ $\operatorname{Ind} F = k$.

8).აჩვენეთ, სივრცეთა კლასის მოდულით $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}}$, $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}}$ და $\dim_{\mathscr{P}}$ განზომილების ფუნქციები არის ტოპოლოგიური ინვარიანტები.

9).აჩვენეთ, თუ $\mathscr{P}$ და $\mathscr{Q}$ კლასები ისეთია, რომ $\mathscr{P} \subset \mathscr{Q}$, მაშინ $\operatorname{ind}_{\mathscr{Q}} X \leq \operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X$, $\operatorname{Ind}_{\mathscr{Q}} X \leq \operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X$ და $\dim_{\mathscr{Q}} X \leq \dim_{\mathscr{P}} X$.

10). ვთქვათ $\mathscr{P}$ კლასი არის ჩაკეტილად მონოტონური კლასი, ანუ $\mathscr{P}$ კლასი მასში შემავალ ყოველ სივრცესთან ერთად შეიცავს ამ სივრცის ნებისმიერ ჩაკეტილ ქვესივრცეს. აჩვენეთ:

i). X რეგულარული სივრცის ყოველი Y ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{P}} Y \leq \operatorname{ind}_{\mathscr{P}} X$.

ii). X ნორმალური სივრცის ყოველი Y ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} Y \leq \operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X$.

iii). X ნორმალური სივრცის ყოველი Y ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის $\dim_{\mathscr{P}} Y \leq \dim_{\mathscr{P}} X$.

4.2. ტოპოლოგიურ სივრცეთა კომპაქტიფიკაციების განზომილებები

ვთქვათ მოცემულია X ტოპოლოგიური სივრცე და მისი $\sim = \{U_s\}_{s \in S}$ დაფარვა. ~ დაფარვის შეკუმშვა ეწოდება $= \{F_s\}_{s \in S}$ დაფარვას, თუ ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $F_s \subset U_s$. თუ დაფარვის ნებისმიერი ელემენტი არის ღია (ჩაკეტილი), მაშინ დაფარვას ეწოდება ღია (ჩაკეტილი) შეკუმშვა.

ვთქვათ მოცემულია X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეთა $\sim = \{F_s\}_{s \in S}$ ოჯახი. ~ ოჯახის გაჭიმვა ეწოდება X სივრცის

ქვესიმრავლეთა ისეთ $\quad = \{U_s\}_{s\in S}$ ოჯახს, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

i). ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $F_s \subset U_s$.

ii). S სიმრავლის ყოველი $s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსისთვის $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{s_i} = \varnothing$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_{s_i} = \varnothing$.

გაჭიმვას ეწოდება ღია, თუ მისი ყოველი ელემენტი არის ღია სიმრავლე.

თეორემა 4.2.1. *X ნორმალური სივრცის ყოველი $\sim = \{F_i\}_{i=1}^{k}$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლეების ოჯახისთვის არსებობს ისეთი $\quad = \{U_i\}_{i=1}^{k}$ ღია სიმრავლეების ოჯახი, რომელიც არის $\sim$ ოჯახის გაჭიმვა. გარდა ამისა, თუ ¥ $= \{V_i\}_{i=1}^{k}$ არის ღია სიმრავლეთა ისეთი ოჯახი, რომ ყოველი $i = 1, 2, ..., k$ ინდექსისთვის $F_i \subset V_i$, მაშინ U_i, $i = 1, 2, ..., k$ ღია სიმრავლეები შეგვიძლია შევარჩიოთ ისე, რომ $\bar{U}_i \subset V_i$, $i = 1, 2, ..., k$.*

დამტკიცება. სიმბოლოთი G_1 აღვნიშნოთ მოცემული $\sim$ ოჯახის ყველა იმ $F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_m}$ ელემენტების $\bigcap\limits_{j=1}^{m} F_{i_j}$ თანაკვეთების გაერთიანება, რომელთათვისაც $(\bigcap\limits_{j=1}^{m} F_{i_j}) \bigcap F_1 = \varnothing$. ამრიგად, $G_1 \bigcap F_1 = \varnothing$. ცხადია, $F_1 \subset X \setminus G_1$. აქედან გამომდინარე, არსებობს F_1 ჩაკეტილი სიმრავლის ისეთი U_1 ღია მიდამო, რომ

$$F_1 \subseteq U_1 \subseteq \bar{U}_1 \subset X \setminus G_1 .$$

$\sim_1 = \{\bar{U}_1, F_i\}_{i=2}^{k}$ ოჯახი არის $\sim = \{F_i\}_{i=1}^{k}$ ოჯახის გაჭიმვა. ვთქვათ ყოველი $i = 1, 2, ..., n-1$ ინდექსისთვის ამ გზით აგებულია $\sim = \{F_i\}_{i=1}^{k}$ ოჯახის გაჭიმვა $\sim_{n-1} = \{\bar{U}_1, \bar{U}_2, ..., \bar{U}_{n-1}, F_i\}_{i=n}^{k}$. განვიხილოთ გაერთიანება ამ ოჯახის იმ ელემენტების თანაკვეთებისა, რომლებიც არ იკვეთება F_n ელემენტთან. ეს გაერთიანება აღვნიშნოთ სიმბოლოთი G_n. ცხადია, $F_n \subset X \setminus G_n$. ამიტომ არსებობს ისეთი U_n ღია სიმრავლე, რომ

$$F_n \subseteq U_n \subseteq \bar{U}_n \subset X \setminus G_n .$$

$\sim_n = \{\bar{U}_1, \bar{U}_2, ..., \bar{U}_n, F_i\}_{i=n+1}^{k}$ ოჯახი არის $\sim$ ოჯახის გაჭიმვა. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ მივიღებთ $\sim_k = \{\bar{U}_i\}_{i=1}^{k}$ ოჯახს, რომელიც არის $\sim$ ოჯახის გაჭიმვა. ცხადია, $\quad = \{U_i\}_{i=1}^{k}$ ოჯახი არის $\sim$ ოჯახის ღია გაჭიმვა.

ვთქვათ ყოველი $i = 1, 2, ..., k$ ინდექსისთვის W_i არის ისეთი ღია სიმრავლე, რომ

$$F_i \subset W_i \subseteq \overline{W}_i \subset V_i \,.$$

განვიხილოთ $U_1{}' = U_1 \bigcap W_1, U_2{}' = U_2 \bigcap W_2, \ldots, U_k{}' = U_k \bigcap W_k$ ღია სიმრავლეთა $'$ ოჯახი.

ცხადია, ყოველი $1 \le i \le k$ ინდექსისთვის

$$F_i \subset U_i' \subseteq \overline{W}_i \subset V_i, U_i{}' \subset U_i, \overline{U}_i{}' \subset V_i \,.$$

აგებული $'$ ოჯახი არის ~ ოჯახის ღია გაჭიმვა. მართლაც, ყოველი $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ინდექსისთვის

$$\bigcap_{j=1}^{n} F_{s_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U'_{s_j} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U_{s_j} \,.$$

ამიტომ, თუ $\bigcap_{j=1}^{n} F_{s_j} \ne \varnothing$, მაშინ $\bigcap_{j=1}^{n} U'_{s_j} \ne \varnothing$. ასევე, თუ $\bigcap_{j=1}^{n} U'_{s_j} \ne \varnothing$, მაშინ თანაკვეთა $\bigcap_{j=1}^{n} F_{s_j} \ne \varnothing$, რადგან თანაკვეთა $\bigcap_{j=1}^{n} U_{s_j} \ne \varnothing$. □

თეორემა 4.2.2. *X ნორმალური სივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვისთვის არსებობს მისი სასრული ჩაკეტილი შეკუმშვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\sim = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ არის X ნორმალური სივრცის სასრული ღია დაფარვა. განვიხილოთ X სივრცის ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი $\{X \setminus U_1, X \setminus U_2, \ldots, X \setminus U_n\}$. ზემოთ დამტკიცებული, 4.2.1 თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი $U_1', U_2', \ldots, U_n'$ ღია სიმრავლეები, რომ

$$X \setminus U_1 \subseteq U_1', X \setminus U_2 \subseteq U_2', \ldots, X \setminus U_n \subseteq U_n'$$

და $\{U_1', U_2', \ldots, U_n'\}$ ოჯახი არის $\{X \setminus U_1, X \setminus U_2, \ldots, X \setminus U_n\}$ ოჯახის გაჭიმვა. ამავე თეორემის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $\{U_1'', U_2'', \ldots, U_n''\}$ ღია გაჭიმვა, რომ $\overline{U}_1'' \subset U_1{}', \overline{U}_2{}'' \subset U_2{}', \ldots, \overline{U}_n{}'' \subset U_n{}'$. თანაკვეთა $\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus U_i) = \varnothing$, რადგან $\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X$. აქედან გამომდინარე, $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{U}_i{}'' = \varnothing$. ცხადია,

$$\{U_1{}''' = X \setminus \overline{U}_1{}'', U_2{}''' = X \setminus \overline{U}_2{}'', \ldots, U_n{}''' = X \setminus \overline{U}_n{}''\}$$

ოჯახი არის X სივრცის ღია დაფარვა. შევნიშნოთ, რომ

$$\overline{U}_i''' = \overline{X \setminus \overline{U}_i''} \subseteq \overline{X \setminus U_i''} = X \setminus U_i'' \subset X \setminus (X \setminus U_i) = U_i$$

ყოველი $i = 1, 2, \ldots, n$ ინდექსისთვის. ცხადია,

$$= \{\overline{U}_1{}''', \overline{U}_2{}''', \ldots, \overline{U}_n{}'''\}$$

ოჯახი არის X სივრცის ~ ღია დაფარვის ჩაკეტილი შეკუმშვა. □

წინადადება 4.2.3. *ყოველი X ნორმალური სივრცისთვის ექვივალენტურია შემდეგი პირობები:*

i). $\dim X \le n$.

ii). *X სივრცის ყოველი ღია სასრული დაფარვისთვის არსებობს $\le n+1$ ჯერადობის მქონე ღია შეკუმშვა.*

iii). *X სივრცის ყოველი სასრული ღია დაფარვისთვის არსებობს მასში ჩაწერილი $\le n+1$ ჯერადობის მქონე ჩაკეტილი შეკუმშვა.*

iv). *X სივრცის ყოველი სასრული ღია დაფარვისთვის არსებობს მასში ჩაწერილი $\le n+1$ ჯერადობის მქონე სასრული ჩაკეტილი დაფარვა.*

დამტკიცება. i) $\Rightarrow$ ii). ვთქვათ $\sim = \{U_i\}_{i=1}^{l}$ არის სასრული ღია დაფარვა, ხოლო $' = \{V_j'\}_{j=1}^{m}$ არის $\le n+1$ ჯერადობის მქონე, $\sim$ დაფარვაში ჩაწერილი სასრული ღია დაფარვა. ყოველი $j \le m$ ინდექსისთვის ამოვარჩიოთ ისეთი $i(j) \le l$ ინდექსი, რომ $V_j' \subset U_{i(j)}$. ვთქვათ

$$V_i = \bigcup \{V_j' \mid i(j) = i\} .$$

ცხადია, $= \{V_i\}_{i=1}^{l}$ ოჯახი არის X სივრცის სასრული ღია დაფარვა, მისი ჯერადობა ord $\le n+1$ და ყოველი i , $1 \le i \le l$ რიცხვისთვის $V_i \subset U_i$.

ii) $\Rightarrow$ iii). ვთქვათ $\sim = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ არის X სივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვა. ii) პირობის თანახმად არსებობს $\sim$ დაფარვაში ჩაწერილი $\le n+1$ ჯერადობის მქონე სასრული ღია შეკუმშვა. 4.2.2 თეორემის თანახმად არსებობს დაფარვის ჩაკეტილი ¥ შეკუმშვა. ცხადია, ord¥ $\le n+1$.

iii) $\Rightarrow$ iv). იმპლიკაცია ცხადია სრულდება.

iv) $\Rightarrow$ i). ვთქვათ $\sim$ არის X სივრცის სასრული ღია დაფარვა. iv) პირობის თანახმად, ამ დაფარვისთვის არსებობს $\le n+1$ ჯერადობის მქონე მასში ჩაწერილი ჩაკეტილი სასრული დაფარვა. 4.2.1 თეორემის თანახმად არსებობს $\sim$ დაფარვაში ჩაწერილი $\le n+1$ ჯერადობის მქონე დაფარვის ღია გაჭიმვა. □

წინადადება 4.2.4. *თუ X მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცის ყოველი ღია ქვესიმრავლის განზომილება ნაკლებია ან ტოლი X სივრცის განზომილებაზე, მაშინ X სივრცის ნებისმიერი Y ქვესივრცის განზომილება* $\dim Y \le \dim X$.

დამტკიცება. თუ $\dim X = \infty$, მაშინ წინადადება სრულდება. ვიგულისხმოთ $\dim X = n < \infty$. განვიხილოთ Y ქვესივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვა $\sim = \{U_i\}_{i=1}^{m}$. ვთქვათ V_i არის X სივრცის ისეთი ღია სიმრავლე, რომ $U_i = V_i \bigcap Y$, $i = 1, 2, ..., m$. პირობის თანახმად,

$X_0 = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ ღია ქვესივრცისთვის $\dim X_0 \le n$. აქედან გამომდინარე, X_0 ქვესივრცის $= \{V_i\}_{i=1}^{m}$ დაფარვისთვის არსებობს ისეთი ¥ $= \{W_j\}_{j=1}^{l}$ სასრული ღია დაფარვა, რომ ¥ $\ge$ და ord¥ $\le n+1$.

ცხადია, ¥$_{|Y} = \{W_j \bigcap Y\}_{j=1}^{l}$ არის Y სივრცის სასრული ღია დაფარვა, ¥$_{|X} \ge \sim$ და ord¥$_{|X} \le n+1$. ამრიგად, $\dim Y \le n = \dim X$.□

თეორემა 4.2.5. *ვთქვათ* $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ *არის* X *ნორმალური სივრცის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეთა ოჯახი. თუ* $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$ *და* $\dim Y_j \le n$ *ყოველი* $j = 1, 2, \ldots$ *ინდექსისთვის, მაშინ* $\dim X \le n$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\sim = \{U_i\}_{i=1}^{k}$ არის X სივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვა. ინდუქციის წესით ავაგოთ X სივრცის $\{\sim_j\}_{j=0}^{\infty}$ ღია დაფარვების ისეთი მიმდევრობა, რომ ნებისმიერი $\sim_j = \{U_{j,i}\}_{i=1}^{k}$ დაფარვისთვის სრულდება პირობები:

I).ყოველი $j \ge 1$ ინდექსისთვის $\bar{U}_{j,i} \subset U_{j-1,i}$ და $U_{0,i} \subset U_i$.

II). $\mathrm{ord}(Y_j \bigcap \bar{U}_{j,i})_{i=1}^{k} \le n+1$, $Y_0 = \varnothing$.

ვთქვათ $i = 1, 2, \ldots, k$ რიცხვებისთვის $U_{0,i} = U$. მაშინ ორივე პირობა სრულდება $j = 0$ რიცხვისთვის. დავუშვათ $\sim_j$ დაფარვები, რომლებიც აკმაყოფილებს I) და II) პირობებს, აგებულია ყოველი $j < m \ge 1$ რიცხვისთვის. X სივრცის Y_m ქვესივრცის $\{Y_m \bigcap U_{m-1,i}\}_{i=1}^{k}$ ღია დაფარვას აქვს $\le n+1$ ჯერადობის მქონე $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ ღია შეკუმშვა. შევნიშნოთ, რომ $\{G_i\}_{i=1}^{k}$ ოჯახი, სადაც $G_i = (U_{m-1,i} \setminus Y_m) \bigcup V_i \subset U_{m-1,i}$, არის X სივრცის ღია დაფარვა და $\mathrm{ord}(\{G_i \bigcap Y_m\}_{i=1}^{k}) \le n+1$. გარდა ამისა, არსებობს ამ დაფარვის ისეთი $\sim_m = \{U_{m,i}\}_{i=1}^{k}$ ღია შეკუმშვა, რომ ყოველი $i = 1, 2, \ldots, k$ რიცხვისთვის $\bar{U}_{m,i} \subset G_i$. $\sim_m$ დაფარვა აკმაყოფილებს I) და II) პირობებს $j = m$ ინდექსისთვის.

ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $i(x) \le k$ ინდექსი, რომ x ეკუთვნის უსასრულოდ ბევრ $U_{j,i(x)}$ სიმრავლეს. I) პირობის თანახმად, $x \in \bigcap_{j=1}^{m} U_{j,i(x)}$. გარდა ამისა, I) და II) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\{\bigcap_{j=1}^{\infty} \bar{U}_{j,i}\}_{i=1}^{k}$ ოჯახი არის $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ დაფარვის ჩაკეტილი შეკუმშვა და აქვს $\le n+1$ ჯერადობა. ამრიგად, 4.2.3 წინადადების თანახმად, $\dim X \le n$.□

წინადადება 4.2.6. *ვთქვათ X ნორმალური სივრცე შეიძლება წარმოდგეს როგორც $Y_1, Y_2, \ldots$ ქვესივრცეების გაერთიანება. თუ X სივრცის ყოველი X_0 ჩაკეტილი, Y_i სიმრავლეში შემავალი ქვესივრცითვის $\dim X_0 \le n$ და გაერთიანება $\bigcup_{j \le i} Y_j$ ჩაკეტილია ყოველი $i = 1, 2, \ldots$ ინდექსისთვის, მაშინ $\dim X \le n$.*

დამტკიცება. ამ წინადადების მტკიცება მიმდინარეობს 4.2.5 თეორემის მტკიცების უმნიშვნელო ცვლილებით. □

ლებეგის დაფარვითი განზომილებისთვის ჯამის თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება შემდეგი წინადადება.

წინადადება 4.2.7. *ვთქვათ X ნორმალური სივრცე არის Y_1 ნორმალური ქვესივრცის და Y_2 ქვესივრცის გაერთიანება. თუ $\dim Y_1 \le n$ და Y_2 ქვესივრცის, X სივრცეში ჩაკეტილი, ნებისმიერი X_0 ქვესიმრავლისთვის $\dim X_0 \le m$, მაშინ*

$$\dim X \le n + m + 1.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ Y_1 სიმრავლის $\overline{Y}_1$ ჩაკეტვის $\sim = \{U_i\}_{i=1}^{k}$ სასრული ღია დაფარვა. პირობიდან გამომდინარე, არსებობს $\overline{Y}_1$ ქვესივრცის ღია სიმრავლეებისგან შემდგარი ისეთი $= \{V_i\}_{i=1}^{k}$ ოჯახი, რომ ნებისმიერი $i = 1, 2, \ldots, k$ ინდექსისთვის $Y_1 \bigcap V_i \subset Y_1 \bigcap U_i$, $Y_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ და $\operatorname{ord}(\{Y_1 \bigcap V_i\}_{i=1}^{k}) \le n + 1$. ცხადია, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $V_i \subset U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. სხვაობა $X_0 = \overline{Y}_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i \subset Y_2$ არის X სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. პირობის თანახმად, $\dim X_0 \le m$. აქედან გამომდინარე, არსებობს X_0 სიმრავლის ისეთი $\{F_i\}_{i=1}^{k}$ ჩაკეტილი დაფარვა, რომ ყოველი $i = 1, 2, \ldots, k$ ინდექსისთვის $F_i \subset X_0 \bigcap U_i$ და $\operatorname{ord}(\{F_i\}_{i=1}^{k}) \le m + 1$. ცხადია, 4.2.1 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $\{F_i\}_{i=1}^{k}$ ოჯახს გააჩნია ისეთი $¥ = \{G_i\}_{i=1}^{k}$ ღია გაჭიმვა $\overline{Y}_1$ ქვესივრცეში, რომ ყოველი $i = 1, 2, \ldots, k$ ინდექსისთვის $G_i \subset U_i$. შევნიშნოთ, რომ

$$X_0 = \overline{Y}_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} G_i$$

და

$$\operatorname{ord}(\{G_i\}_{i=1}^{k}) \le m + 1.$$

ცხადია, $\bigcup ¥$ ოჯახი არის $\overline{Y}_1$ ქვესივრცის დაფარვა, $\bigcup ¥ > \sim$ და $\operatorname{ord}(\bigcup ¥) \le n + m + 2$. ამრიგად, $\dim \overline{Y}_1 \le n + m + 1$. ზემოთდამტკიცებული 4.2.6 წინადადების თანახმად, $\dim X \le n + m + 1$. □

დამტკიცებული თეორემიდან მიიღება

თეორემა 4.2.8. *მემკვიდრეობით ნორმალური X სივრცის ნებისმიერი ორი Y_1 და Y_2 ქვესივრცისთვის*

$$\dim(Y_1 \bigcup Y_2) \le \dim Y_1 + \dim Y_2 + 1 . \square$$

შედეგი 4.2.9. *თუ X მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე წარმოიდგინება $n+1$ რაოდენობის ≤ 0 განზომილების $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}$ ქვესივრცეების გაერთიანებით, მაშინ* $\dim X \le n$. $\square$

ახლა აღვწეროთ ნორმალური სივრცის სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაციის გაზომილება. სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 4.2.10. *ნებისმიერი X ნორმალური სივრცისთვის* $\dim \beta X = \dim X$.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ $\dim X \le \dim \beta X$. იმ შემთხვევაში, როცა $\dim \beta X = \infty$, მაშინ ეს უტოლობა სრულდება. ვიგულისხმოთ $\dim \beta X = n < \infty$. ვთქვათ $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ არის X სივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვა. 4.2.2 თეორემის თანახმად, არსებობს $\mathcal{U}$ დაფარვის $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^k$ სასრული ჩაკეტილი შეკუმშვა. ნებისმიერი $i = 1, 2, \ldots, k$ ინდექსისთვის $F_i \bigcap (X \setminus U_i) = \varnothing$. ამიტომ ყოველი i ინდექსისთვის არსებობს ისეთი $f_i : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ

$$f_i(x) = 0 , \ x \in X \setminus U_i$$

და

$$f_i(y) = 1 , \ y \in F .$$

ცხადია, ყოველ $f_i : X \to I$ უწყვეტ ასახვას გააჩნია $\tilde{f}_i : \beta X \to I$ უწყვეტი გაგრძელება. განვიხილოთ [0,1] ჩაკეტილი სეგმენტის (0,1] ღია სიმრავლის G_i წინარესახეები $\tilde{f}_i$ ასახვების მიმართ. ოჯახი $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i=1}^k$ არის βX სივრცის სასრული ღია დაფარვა და ყოველი $i = 1, 2, \ldots, k$ ინდექსისთვის $X \bigcap G_i \subset U_i$. ჩვენი დაშვებიდან და 4.2.3 წინადადებიდან გამომდინარე, არსებობს βX სივრცის $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i=1}^k$ დაფარვის $\le n+1$ ჯერადობის მქონე $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i=1}^k$ ღია სასრული შეკუმშვა. ოჯახი $\mathcal{V}_{|X} = \{X \bigcap V_i\}_{i=1}^k$ არის $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ დაფარვის სასრული ღია შეკუმშვა. ცხადია, $\operatorname{ord} \mathcal{V}_{|X} \le n+1$. ამიტომ $\dim X \le n = \dim \beta X$.

ახლა ვაჩვენოთ პირიქით, $\dim \beta X \le \dim X$. თუ $\dim X = \infty$, მაშინ უტოლობა სამართლიანია. დავუშვათ $\dim X = n < \infty$. ვთქვათ $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^k$ არის βX სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაციის სასრული ღია დაფარვა. ცხადია, არსებობს $\mathcal{U}$ დაფარვის ისეთი $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i=1}^k$ ღია შეკუმშვა, რომ

$\overline{G_i}^{\,X} \subset U_i$, $i = 1,2,...,n$. რადგან $\dim X = n$, ამიტომ ¢$_{|X} = \{X \bigcap G_i\}_{i=1}^k$ დაფარვას გააჩნია $\le n+1$ ჯერადობის ღია შეკუმშვა ¥ $= \{V_i\}_{i=1}^k$, რომელსაც თავისმხრივ გააჩნია ¡ $= \{Q_i\}_{i=1}^k$ ჩაკეტილი შეკუმშვა. ვთქვათ

$$F_i = \overline{Q_i}^{\,X}, \quad i = 1,2,...,k.$$

ცხადია, ¡ არის X სივრცის დაფარვა. შევნიშნოთ, რომ « $= \{F_i\}_{i=1}^k$ არის ~ დაფარვის ჩაკეტილი შეკუმშვა. მართლაც, ყოველი $i = 1,2,...,k$ ინდექსისთვის

$$F_i = \overline{Q_i}^{\,X} \subset \overline{V_i}^{\,X} \subset \overline{X \bigcap G_i}^{\,X} = \overline{G_i}^{\,X} \subset U_i.$$

ახლა ვაჩვენოთ ord« $\le n+1$. როგორც ვიცით, $Q_i \subset V_i$, $i = 1,2,...,k$. ყოველი Q_i და $X \setminus V_i$ წყვილისთვის არსებობს ისეთი $f_i : X \to I$ უწყვეტი ასახვა, რომ

$$f_i(x) = 0, \; x \in Q_i$$

და

$$f_i(y) = 1, \; y \in X \setminus V_i.$$

განვიხილოთ f_i ასახვის $\tilde{f}_i : \; X \to I$ უწყვეტი გაგრძელება. ვთქვათ $\{F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_m}\}$ არის « დაფარვის ისეთი ქვეოჯახი, რომ $\bigcap\limits_{j=1}^m F_{i_j} \ne \varnothing$. განვიხილოთ $\tilde{f} = \max(\tilde{f}_{i_1}, \tilde{f}_{i_2}, ..., \tilde{f}_{i_m}) : \; X \to I$ ასახვა და $U = \tilde{f}^{-1}([0,1))$ წინარესახე. რადგან $\bigcap\limits_{j=1}^m F_{i_j} \subset U$, ამიტომ $U \ne \varnothing$. ცხადია, $U \bigcap X \ne \varnothing$ და $U \bigcap X \subset \bigcap\limits_{j=1}^m V_{i_j}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $\bigcap\limits_{j=1}^m V_{i_j} \ne \varnothing$. როგორც ვიცით, ord¥ $\le n+1$. აქედან გამომდინარე, $m \le n+1$. ამრიგად, « დაფარვის ჯერადობა ord« $\le n+1$, ანუ $\dim \; X \le n = \dim X$. □

შედეგი 4.2.11. *ვთქვათ X არის ნორმალური სივრცე. თუ $Y \subset X$ მკვრივი ნორმალური ქვესივრციდან $I = [0,1]$ მონაკვეთში ნებისმიერი $f : Y \to I$ უწყვეტი ასახვა გაგრძელებადია მთელ X სივრცეზე, მაშინ* $\dim Y = \dim X$. □

შედეგი 4.2.12. *ყოველი X ნორმალური სივრცისა და X სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაციის Y ნორმალური, X სიმრავლის მომცველი ქვესივრცისთვის* $\dim Y = \dim X$. □

3.3.46 თეორემის თანახმად, ყოველ X სავსებით რეგულარულ სივრცეს გააჩნია cX კომპაქტიფიკაცია, რომლისთვისაც $w(cX) = w(X)$. გარდა ამისა, 3.3.29 თეორემის თანახმად, I^{τ} ტიხონოვის კუბი არის უნივერსალური სივრცე τ წონის მქონე სავსებით რეგულარულ

სივრცეთა კლასისთვის. ბუნებრივად ისმის კითხვა, რა შემთხვევაში გააჩნია X ტოპოლოგიურ სივრცეს მისი წონის და განზომილების მქონე cX კომპაქტიფიკაცია, ან არსებობს თუ არა სივრცე, რომელიც უნივერსალურია მოცემული განზომილებისა და წონის მქონე სივრცეთა რაიმე კლასისთვის. ამ პარაგრაფის ერთერთ მთავარ მიზანს წარმოადგენს ამ ამოცანების განხილვა.

თავდაპირველად მოვიყვანოთ იმ დებულებების დამტკიცება, რომლებიც მთავარ როლს თამაშობს სივრცეთა კომპაქტიფიკაციების განზომილებების თვისებების დადგენისას.

ვთქვათ მოცემულია X ტოპოლოგიური სივრცის $\sim = \{U_s\}_{s\in S}$ და $= \{G_t\}_{t\in T}$ დაფარვები. დაფარვის G_t ელემენტის ვარსკვლავი ეწოდება სიმრავლეს

$$\mathrm{st}(G_t,\ ) = \bigcup\{G_{t'} \mid G_{t'} \in\ , G_{t'} \bigcap G_t \neq \varnothing\}.$$

ვიტყვით, რომ დაფარვა ვარსკვლავურად ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში, თუ დაფარვის ყოველი G_t ელემენტისთვის არსებობს $\sim$ დაფარვის ისეთი U_s ელემენტი, რომ $\mathrm{st}(G_t,\ ) \subset U_s$.

წინადადება 4.2.13. *ნორმალური სივრცის ყოველი $\sim$ სასრული ღია დაფარვისთვის არსებობს მასში ვარსკვლავურად ჩაწერილი სასრული ღია დაფარვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\sim = \{U_i\}_{i=1}^n$ არის X ნორმალური სივრცის სასრული ღია დაფარვა, ხოლო $= \{F_i\}_{i=1}^n$ მისი ჩაკეტილი შეკუმშვა. ყოველი $X \setminus U_i$ და F_i ჩაკეტილ სიმრავლეთა წყვილისთვის არსებობს ისეთი $f_i : X \to I$ უწყვეტი ფუნქცია, რომ

$$f_i(x) = 0,\ x \in X \setminus U_i$$

და

$$f_i(y) = 1,\ y \in F_i.$$

ვთქვათ $I_0 = [0,1/2)$, $I_1 = (1/4, 3/4)$ და $I_2 = (1/2, 1]$. განვიხილოთ სიმრავლეები

$$G_{j_1, j_2, \dots, j_n} = f_1^{-1}(I_{j_1}) \bigcap f_2^{-1}(I_{j_2}) \bigcap \dots \bigcap f_n^{-1}(I_{j_n}),$$

სადაც ყოველი $i = 1, 2, \dots, n$ ინდექსისთვის $j_i \in \{0,1,2\}$. ასეთი სიმრავლეების ოჯახი ქმნის X სივრცის სასრულ ღია დაფარვას. ყოველი არაცარიელი $G = G_{m_1, m_2, \dots, m_n} \in$ სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $i \le n$ ინდექსი, რომ $G \bigcap F_i \neq \varnothing$. ცხადია, $m_i = 2$. გარდა ამისა, თუ $G_{j_1, j_2, \dots, j_n}$ სიმრავლე კვეთს G სიმრავლეს, მაშინ $j_i = 1$ ან $j_i = 2$. ამრიგად, $\mathrm{st}(G,\ ) \subset U_i$, ანუ დაფარვა ვარსკვლავურად ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში. □

თეორემა 4.2.14 (მარდეჟიჩი). *თუ* $f : X \to Y$ *არის* X *კომპაქტური სივრცის* Y *კომპაქტურ სივრცეში უწყვეტი ასახვა, მაშინ არსებობს ისეთი* Z *კომპაქტური სივრცე და* $g : X \to Z$, $h : Z \to Y$ *უწყვეტი ასახვები, რომ*

i). $f = h \circ g$.

ii). $\dim Z \le \dim X$.

iii). $w(Z) \le w(Y)$.

დამტკიცება. თუ $\dim X = \infty$, ან $w(Y) < \aleph_0$, მაშინ $Z = f(X)$, $g = f_{f(X)} : X \to f(X)$ და $h = i_{f(Z)} : f(Z) \to Z$. ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $\dim X = n < \infty$ და $w(Y) = m \ge \aleph_0$.

ვთქვათ $\pm$ არის Y სივრცის ისეთი $\pm = \{U_s\}_{s \in S}$ ბაზისი, რომ $|S| = m$. ინდუქციის წესით ავაგოთ $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$ X სივრცის სასრულ ღია დაფარვათა კლასები. სიმბოლოთი $\mathscr{A}_0$ აღვნიშნოთ $f^{-1}(\pm) = \{f^{-1}(U_s)\}_{s \in S}$ ოჯახის ყველა სასრული რაოდენობის ელემენტისგან შედგენილი X სივრცის დაფარვების ოჯახი. ცხადია, თუ ნებისმიერი $x, x' \in X$ ელემენტისთვის $f(x) \ne f(x')$, მაშინ $\pm$ ბაზისში არსებობს ისეთი $U_{f(x)}$ ელემენტი, რომ $f(x) \in U_{f(x)}$ და $f(x') \notin U_{f(x)}$. ნებისმიერი $y \in Y \setminus \{f(x)\}$ წერტილს გააჩნია ისეთი U_y მიდამო, რომ $U_y \subset Y \setminus \{f(x)\}$. ეს მიდამოები ქმნის Y სივრცის ღია დაფარვას. ამ დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა $\{U_{f(x)}, U_{y_i}\}_{i=1}^{n}$. ცხადია, $\sim = \{f^{-1}(U_{f(x)}), f^{-1}(U_{y_i})\}_{i=1}^{n}$ არის X სივრცის სასრული ღია დაფარვა და ის ეკუთვნის $\mathscr{A}_0$ ოჯახს. შევნიშნოთ, რომ $x' \notin \mathrm{st}(x, \sim)$.

დავუშვათ ყოველი $i < k$ ნატურალური რიცხვისთვის აგებულია $\mathscr{A}_i$ კლასები. ვთქვათ $\sim$ და $\sim'$ არის $\mathscr{A}_{k-1}$ კლასის ნებისმიერი ორი დაფარვა. 4.2.13 წინადადების თანახმად არსებობს $\sim \wedge \sim'$ თანაკვეთაში ვარსკვლავურად ჩაწერილი სასრული ღია დაფარვა. ამ დაფარვისთვის, 4.2.1 წინადადების თანახმად, არსებობს $\le n+1$ ჯერადობის მქონე $\sim''$ ღია შეკუმშვა. ცხადია, $\sim''$ არის $\sim \wedge \sim'$ თანაკვეთაში ვარსკვლავურად ჩაწერილი $\le n+1$ ჯერადობის მქონე სასრული ღია დაფარვა. $\mathscr{A}_k$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ამ გზით მიღებული X სივრცის ყველა სასრული ღია დაფარვების კლასი. აგებული $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \ldots$ მიმდევრობის ყველა წევრის სიმძლავრე $|\mathscr{A}_i| \le m$. ამიტომ $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$ ოჯახის სიმძლავრე $|\mathscr{A}| \le m$.

X სიმრავლეზე განვსაზღვროთ $\sim$ მიმართება. ვიტყვით, რომ X სიმრავლის x და y ელემენტებს შორის არსებობს $x\sim y$ მიმართება, თუ ნებისმიერ $\sim\in\mathscr{A}$ დაფარვას გააჩნია ისეთი U ელემენტი, რომ $x,y\in U$. განმარტებული მიმართება არის ექვივალენტობის მიმართება. E1) და E2) პირობები სრულდება. ვაჩვენოთ, რომ E3) პირობაც სრულდება. ვთქვათ $x\sim y$ და $y\sim z$. ნებისმიერი $\sim\in\mathscr{A}$ დაფარვისთვის არსებობს მასში ვარსკვლავურად ჩაწერილი $\sim'\in\mathscr{A}$ დაფარვა. რადგან $x\sim y$, ამიტომ არსებობს ისეთი $U_1'\in\sim'$ ელემენტი, რომ $x,y\in U_1'$, ანუ $y\in\mathrm{st}(x,\sim')$. ასევე, რადგან $y\sim z$, ამიტომ არსებობს $U_2'\in\sim'$ ელემენტი, რომ $y,z\in U_2'$, ანუ $z\in\mathrm{st}(y,\sim')$. ცხადია, $U_1'\bigcap U_2'\neq\varnothing$. აქედან გამომდინარე, $U_2'\subset\mathrm{st}(U_1',\sim')$. პირობის თანახმად, $\sim'$ დაფარვა ვარსკვლავურად ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში. ამიტომ არსებობს $\sim$ დაფარვის ისეთი U ელემენტი, რომ $\mathrm{st}(U_1',\sim')\subset U$. ამრიგად, $U_1',U_2'\subset U$, ე.ი. $x,z\in U\in\sim\in\mathscr{A}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x\sim z$. შევნიშნოთ, რომ $X/\sim$ ფაქტორ-სიმრავლის ყოველი $[x]$ ელემენტი არის ტოლი $\bigcap\limits_{\sim\in\mathscr{A}}\mathrm{st}(x,\sim)$ თანაკვეთის.

განმარტებული $\sim$ ექვივალენტობის მიმართება არის ჩაკეტილი. ამისთვის საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $[x]$ ექვივალენტობის კლასისა და მისი ყოველი მომცველი $U\subset X$ ღია სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი $G\subset X$ ღია სიმრავლე და $\sim\in\mathscr{A}$ დაფარვა, რომ

$$[x]\subset G\subset\bigcup_{y\in G}[y]\subset\mathrm{st}(G,\sim)\subset U\,.$$

მართლაც, თუ $\sim'$ ვარსკვლავურად ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში, მაშინ $\overline{\mathrm{st}(x,\sim')}\subset\mathrm{st}(x,\sim)$. აქედან გამომდინარე, $[x]=\bigcap\limits_{\sim\in\mathscr{A}}\overline{\mathrm{st}(x,\sim)}$. ცხადია, X სივრცის კომპაქტურობის გამო არსებობს ისეთი $\sim_1,\sim_2,\ldots,\sim_k\in\mathscr{A}$ სასრული მიმდევრობა, რომ $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathrm{st}(x,\sim_i)\subset U$. განვიხილოთ $\sim_0\in\mathscr{A}$ დაფარვა, რომელიც ჩაწერილია $\sim_1,\sim_2,\ldots,\sim_k$ დაფარვებში. ვთქვათ, $\sim\in\mathscr{A}$ არის $\sim_0$ დაფარვაში ვარსკვლავურად ჩაწერილი დაფარვა. $\sim$ დაფარვის მიმართ $x\in X$ წერტილის $G=\mathrm{st}(X,\sim)$ ვარსკვლავიანი აკმაყოფილებს პირობას

$$[x]\subset G\subset\bigcup_{y\in G}[y]\subset\mathrm{st}(G,\sim)\,.$$

ზემონათქვამიდან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ სრულდება ჩართვა $\mathrm{st}(G,\sim)\subset U$.

ვთქვათ $Z = X/\sim$ და $g = q : X \to Z = X/\sim$. ამიტომ, რადგან $\sim$ მიმართება არის ჩაკეტილი, Z არის კომპაქტური სივრცე.

შევნიშნოთ, თუ $x \sim y$, მაშინ $f(x) = f(y)$. ახლა განვმარტოთ $h : Z \to Y$ ასახვა. განმარტების თანახმად,

$$h([x]) = f(x)\,,\ \ [x] \in Z\ .$$

ცხადია, $f = h \cdot g$. ამრიგად, h არის უწყვეტი ასახვა.

X სივრცის ყოველი $U \subset X$ ღია სიმრავლისთვის განვიხილოთ $\tilde{U} = Z \setminus q(X \setminus U)$ სიმრავლე. ცხადია, $g^{-1}(\tilde{U}) = q^{-1}(\tilde{U}) \subset U$ და $\tilde{U}$ სიმრავლე არის Z სივრცის ღია სიმრავლე.

ვთქვათ $\sim \in \mathscr{A}$. სიმბოლოთი $\tilde{\sim}$ აღვნიშნოთ დაფარვა $\tilde{\sim} = \{\tilde{U} \mid U \in \sim\}$. შევნიშნოთ, თუ $\sim'$ დაფარვა ვარსკვლავურად ჩაწერილია $\sim$ დაფარვაში, მაშინ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $U \in \sim$, რომ $[x] \subset \mathrm{st}(x, \sim') \subset U$. ამრიგად, ყოველი $\sim \in \mathscr{A}$ დაფარვისთვის $\tilde{\sim}$ არის Z კომპაქტური სივრცის სასრული ღია დაფარვა და $\mathrm{ord}\,\tilde{\sim} \le n+1$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ Z სივრცის ყოველი $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ სასრული ღია დაფარვისთვის არსებობს მასში ჩაწერილი $\tilde{\sim}$ დაფარვა, რომელიც შეესაბამება რაიმე $\sim \in \mathscr{A}$ დაფარვას. ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $i \le k$ ინდექსი, რომ $[x] \subset g^{-1}(U_i)$. გარდა ამისა, არსებობს x წერტილის ისეთი $G_x \subset X$ მიდამო და $\sim(x) \in \mathscr{A}$ დაფარვა, რომ $\mathrm{st}(G_x, \sim(x)) \subset g^{-1}(U_i)$. მიღებული $\{G_x\}_{x \in X}$ ღია დაფარვიდან გამოვყოთ $\{G_{x_i}\}_{i=1}^{m}$ სასრული ქვედაფარვა. განვიხილოთ ისეთი $\sim \in \mathscr{A}$ დაფარვა, რომელიც ჩაწერილია ყველა $\sim(x_i), i = 1, 2, ..., m$ დაფარვაში. ნებისმიერი $U \in \sim$ ელემენტისთვის არსებობს ისეთი $i \le k$ ინდექსი, რომ $U \subset g^{-1}(U_i)$. აქედან გამომდინარე, $\tilde{U} \subset U_i$. ამრიგად, $\tilde{\sim}$ ჩაწერილია $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ დაფარვაში. ეს კი ნიშნავს, რომ $\dim Z \le n = \dim Z$. ოჯახი $\pm = \bigcup\limits_{\sim \in \mathscr{A}} \tilde{\sim}$ არის Z სივრცის ბაზისი. ცხადია,

$$w(Z) \le |\pm| \le m \cdot \aleph_0 = m = w(Y)\ . \square$$

ახლა დავამტკიცოთ კომპაქტიფიკაციის თეორემა dim განზომილებისთვის. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.2.15 (სკლიარენკო). *X ნორმალური სივრცისთვის არსებობს ისეთი cX კომპაქტიფიკაცია, რომ* $\dim cX \le \dim X$ *და* $w(cX) = w(X)$.

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, რომ $\dim X = n < \infty$ და $w(X) = m \ge \aleph_0$. როგორც ვიცით, არსებობს $i : X \to I^m$ ჰომეომორფული ჩადგმა X

ნორმალური სივრცისა m წონის მქონე I^m ტიხონოვის კუბში. განვიხილოთ ისეთი $f: X \to I^m$ უწყვეტი ასახვა, რომ $f_{|X} = i$. ცხადია, 4.2.14 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი cX კომპაქტური სივრცე, $g: X \to cX$ და $h: cX \to I^m$ უწყვეტი ასახვები,რომ $\dim cX \le \dim X = \dim X$, $w(cX) \le w(I^m) = m$ და $f = h \circ g$.

ვთქვათ $h_0 = h_{|g(X)} : g(X) \to i(X) \subset I^m$ და $g_0 = g_X : X \to g(X) \subset cX$. ამ ასახვების კომპოზიცია $h_0 \circ g_0$ არის ჰომეომორფიზმი. აქედან გამომდინარე, g_0 ასახვა აგრეთვე არის ჰომეომორფიზმი. ცხადია, cX არის X ნორმალური სივრცის კომპაქტიფიკაცია. □

ახლა ავაგოთ კომპაქტური უნივერსალური სივრცე Π_n^m მოცემული n განზომილების და m წონის მქონე ნომრალურ სივრცეთა კლასისთვის. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.2.16 (ზარელუა, პასინკოვი). *ყოველი* $n \ge 0$ *მთელი რიცხვისა და* $m \ge \aleph_0$ *კარდინალური რიცხვისთვის არსებობს ისეთი* Π_n^m *კომპაქტური სივრცე, რომელიც არის უნივერსალური სივრცე ყველა იმ ნორმალურ სივრცეთა კლასის მიმართ, რომელთა დაფარვითი განზომილება* $\le n$ *და წონა* $\le m$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\{X_s\}_{s\in S}$ არის ყველა იმ ნორმალურ სივრცეთა კლასი, რომელთა განზომილება $\dim X_s \le n$ და წონა $w(X_s) \le m$. განვიხილოთ $i_s : X_s \to I^m$, $s \in S$ ჰომეომორფული ჩადგმების $\{i_s\}_{s\in S}$ ოჯახი და X_s, $s \in S$ სივრცეების ჯამი $X = \underset{s\in S}{\oplus} X_s$. ცხადია, $\dim X \le n$. შევნიშნოთ, რომ $i_s : X_s \to I^m$, $s \in S$ ჩადგმის ასახვების

$$i = \underset{s\in S}{\nabla} i_s : X = \underset{s\in S}{\oplus} X_s \to I^m$$

კომბინირებულ ჯამს გააჩნია უწყვეტი გაგრძელება $f: X \to I^m$ და $\dim X = \dim X = n$. ამიტომ 4.2.14 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი კომპაქტური Π_n^m სივრცე, $g: X \to \Pi_n^m$ და $h: \Pi_n^m \to I^m$ უწყვეტი ასახვები, რომ $\dim \Pi_n^m \le \dim X = \dim X \le n$, $w(\Pi_n^m) \le m$ და $f = h \circ g$.

ვთქვათ Y არის ნებისმიერი $\dim Y \le n$ განზომილების და $w(Y) \le m$ წონის მქონე ნორმალური სივრცე. ცხადია, არსებობს ისეთი $s \in S$ ინდექსი, რომ Y ჰომეომორფულია X_s სივრცის. ვთქვათ $g_0 = g_{|X_s} : X_s \to g(X_s) \subset \Pi_n^m$ და $h_0 = h|_{g(X_s)} : g(X_s) \to X_s \subset I^m$. ცხადია, $h_0 \circ g_0$ კომპოზიცია არის ჰომეომორფიზმი. ასევე, ჰომეომორფიზმი იქნება g_0 ასახვაც. ამრიგად, Π_n^m არის უნივერსალური სივრცე. □

სავარჯიშო 4.2.23. 1).ვთქვათ $\{X_s\}_{s\in S}$ არის ტოპოლოგიურ სივრცეთა

ოჯახი და $X = \bigoplus_{s\in S} X_s$.

i).ვთქვათ X_s , $s \in S$ არის რეგულარული სივრცეები. აჩვენეთ, $\operatorname{ind} X \le n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $s \in S$ ინდექსისთვის $\operatorname{ind} X_s \le n$.

ii).ვთქვათ X_s , $s \in S$ არის ნორმალური სივრცეები. აჩვენეთ, $\operatorname{Ind} X \le n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $\operatorname{Ind} X_s \le n$.

iii).ვთქვათ X_s , $s \in S$ არის ნორმალური სივრცეები. აჩვენეთ, $\dim X \le n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $\dim X_s \le n$.

2). აჩვენეთ:

i).თუ X სივრცე ჰომეომორფულია Y სივრცის, მაშინ $\operatorname{Sur}_{\mathscr{P}} X = \operatorname{Sur}_{\mathscr{P}} Y$.

ii). თუ $\mathscr{P} \subset \mathscr{Q}$, მაშინ $\operatorname{Sur}_{\mathscr{Q}} X \le \operatorname{Sur}_{\mathscr{P}} X$.

iii).მოძებნეთ პირობები, როცა ყოველი X მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცისთვის $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X \le \operatorname{Sur}_{\mathscr{P}} X$.

iv).მოძებნეთ პირობები, როცა X სივრცის ყოველი Y ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის $\operatorname{Sur}_{\mathscr{P}} Y \le \operatorname{Sur}_{\mathscr{P}} X$.

3).ვთქვათ A და B არის X მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები და $X = A \bigcup B$. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $\mathscr{P}$ კლასი, რომ შესრულდეს ტოლობა

$$\dim_{\mathscr{P}} X = \max\{\dim_{\mathscr{P}} A, \dim_{\mathscr{P}} B\}.$$

4).მოძებნეთ პირობები, რომელთა შესრულების შემთხვევაში $X = A \bigcup B$ სივრცისთვის შესრულდება უტოლობა

$$\dim_{\mathscr{P}} X \le \dim_{\mathscr{P}} A + \dim_{\mathscr{P}} B + 1.$$

5).მოძებნეთ ის პირობები, რომელთათვისაც $\dim_{\mathscr{P}} X \le \operatorname{def}_{\mathscr{P}} X$ და $\operatorname{Ind}_{\mathscr{P}} X \le \operatorname{Def}_{\mathscr{P}} X$.

6).ვთქვათ $\mathscr{P} = \mathscr{C}$ არის კომპაქტურ სივრცეთა კლასი. აჩვენეთ, ნებისმიერი X მეტრიზებადი სივრცისთვის $\dim(\quad X \setminus X) = \dim_{\mathscr{C}} X$.

7).აჩვენეთ:

i).თუ X და Y არის ჰომეომორფული სივრცეები, მაშინ $\operatorname{def} X = \operatorname{def} Y$.

ii). X სეპარაბელური მეტრიზებადი სივრცისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{C}} X \le \operatorname{def} X$.

iii).ყოველი X სეპარაბელური მეტრიზებადი სივრცისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{C}} X \le n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X სივრცეს აქვს ისეთი ± ბაზისი, რომ $\operatorname{ind}_{\mathscr{C}} U \le n-1$ ყოველი $U \in$ ± ელემენტისთვის.

iv). X სეპარაბელური მეტრიზებადი სივრცის ნებისმიერი $Y \subset X$

ჩაკეტილი ქვესივრცისთვის $\mathrm{def}_{\mathscr{C}} Y \le \mathrm{def}_{\mathscr{C}} X$.

8).აჩვენეთ, ყოველი სეპარაბელური მეტრიზებადი X სივრცისთვის $\mathrm{def}\, X \le \mathrm{ind}\, X$.

9).დაამტკიცეთ, რომ ყოველი სეპარაბელური მეტრიზებადი X სივრცისთვის $\mathrm{Ind}_{\mathscr{C}} X \le \mathrm{def}\, X$.

10).ვთქვათ X არის ნორმალური სივრცე, ხოლო $\mathscr{T}$ არის X სივრცის თავისთავში ჰომეომორფიზმთა ისეთი ოჯახი, რომ $|\mathscr{T}| \le w(X)$. აჩვენეთ, არსებობს X სივრცის ისეთი cX კომპაქტიფიკაცია, რომ $\dim cX \le \dim X$, $w(cX) = X$ და ნებისმიერ $f \in \mathscr{T}$ ასახვას გააჩნია $\tilde{f} : cX \to cX$ ჰომეომორფული გაგრძელება.

4.3. თვლადბაზისიან სივრცეთა განზომილებების თვისებები

ამ პარაგრაფის მიზანია დავადგინოთ ინდუქციურ და დაფარვით განზომილების ფუნქციებს შორის ის დამოკიდებულებანი, საიდანაც გამომდინარეობს თვლადბაზისიან სივრცეთა კლასისთვის მათი ერთმანეთზე დამთხვევის ტოლობები.

ვთქვათ $£ > 0$ არის რაიმე რიცხვი. X მეტრიკული სივრცის Y ტოპოლოგიურ სივრცეში $f : X \to Y$ ასახვას ეწოდება $£$ -ასახვა, თუ ნებისმიერი $y \in Y$ წერტილისთვის $¢(f^{-1}(y)) < £$.

ვთქვათ $\sim = \{U_s\}_{s \in S}$ არის X მეტრიკული სივრცის ღია დაფარვა. $\sim$ დაფარვის ზომა ეწოდება სიდიდეს $¢(\sim) = \sup\{¢(U_s) \mid s \in S\}$.

$f : X \to Y$ უწყვეტ ასახვას ეწოდება $\sim$ -ასახვა, თუ არსებობს Y სივრცის ისეთი $\ \ = \{V_t\}_{t \in T}$ ღია დაფარვა, რომ $f^{-1}(\ \ ) = \{f^{-1}(V_t)\}_{t \in T} \ge \sim$.

წინადადება 4.3.1. *თუ X არის კომპაქტური მეტრიკული სივრცე, მაშინ მისი ყოველი $\sim = \{U_s\}_{s \in S}$ ღია დაფარვისთვის არსებობს ისეთი $£ > 0$ რიცხვი, რომ X სივრცის Y ჰაუსდორფის სივრცეში ნებისმიერი $£$ -ასახვა, არის $\sim$ -ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $£$ არის $(X, °)$ მეტრიკული სივრცის $\sim$ ღია დაფარვის ლებეგის რიცხვი, ხოლო $f : X \to Y$ რაიმე $£$ -ასახვა. ნებისმიერი $y \in Y$ წერტილის $f^{-1}(y)$ წინარესახის დიამეტრი $¢(f^{-1}(y)) < £$. ვთქვათ $x_0 \in f^{-1}(y)$. ყოველი $x \in f^{-1}(y)$ წერტილისთვის $°(x_0, x) < £$. ამრიგად, $f^{-1}(y) \subset B(x_0, £)$. ლებეგის რიცხვის განმარტების თანახმად, არსებობს ისეთი $U_{s_y} \in \sim$ ელემენტი, რომ $B(x_0, £) \subset U_{s_y}$, ანუ $f^{-1}(y) \subset U_{s_y}$. წინადადების პირობიდან გამომდინარე, $f : X \to Y$ არის ჩაკეტილი ასახვა. ამიტომ $f(X \setminus U_{s_y})$ არის Y სივრცის ჩაკეტილი

სიმრავლე. ამრიგად, $V_y = Y \setminus f(X \setminus U_{s_y})$ არის Y სივრცის ღია სიმრავლე. ახლა ვაჩვენოთ $y \in V_y$. ვთქვათ $y \notin V_y$. ამ შემთხვევაში $y = f(x_0) \in f(X \setminus U_{s_y})$, ანუ $x_0 \in X \setminus U_{s_y}$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x_0 \notin U_{s_y}$, რაც შეუძლებელია. ამრიგად, $y \in V_y$. გარდა ამისა,

$$f^{-1}(V_y) = f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U_{s_y})) = X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U_{s_y})) \subset X \setminus (X \setminus U_{s_y}) = U_{s_y}.$$

ამრიგად, $\ \ = \{V_y\}_{y \in Y}$ არის Y სივრცის ისეთი ღია დაფარვა, რომ $f^{-1}(\ \ ) \ge \sim$, ე.ი. $f : X \to Y$ ასახვა არის $\sim$ -ასახვა. □

წინადადება 4.3.2. *თუ X ნორმალური სივრცის ყოველი $\sim$ სასრული ღია დაფარვისთვის არსებობს $f : X \to Y$ $\sim$ -ასახვა $\dim Y \le n$ განზომილების მქონე კომპაქტურ სივრცეში, მაშინ $\dim X \le n$.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\sim$ არის X ნორმალური სივრცის ნებისმიერი სასრული ღია დაფარვა, ხოლო $f : X \to Y$ $\sim$ -ასახვა $\dim Y \le n$ განზომილების მქონე კომპაქტურ სივრცეში. ვთქვათ არის Y სივრცის ისეთი ღია დაფარვა, რომ $f^{-1}(\ \ ) \ge \sim$. ცხადია, დაფარვას გააჩნია $\ '$ სასრული ღია ქვედაფარვა. ასევე, არსებობს ისეთი ¥ სასრული ღია ქვედაფარვა, რომ $¥ \ge \ '$ და $\mathrm{ord}¥ \le n+1$. ცხადია, რომ $f^{-1}(¥)$ სასრული ღია დაფარვის ჯერადობა $\mathrm{ord}\, f^{-1}(¥) \le n+1$ და $f^{-1}(¥) \ge f^{-1}(\ ') \ge f^{-1}(\ \ ) \ge \sim$. ამრიგად, $\dim X \le n$. □

შედეგი 4.3.3. *თუ X არის კომპაქტური მეტრიკული სივრცე და ყოველი $£ > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $f : X \to Y$ £ -ასახვა $\dim Y \le n$ განზომილების მქონე Y კომპაქტურ სივრცეში, მაშინ $\dim X \le n$.* □

ვთქვათ $(X, °)$ კომპაქტური მეტრიკული სივრციდან $(Y, «)$ ნებისიერ მეტრიკულ სივრცეში ყველა უწყვეტი ასახვების Y^X სიმრავლეზე მოცემულია $\hat{«} : Y^X \times Y^X \to [0, +\infty)$ მეტრიკა:

$$\hat{«}(f, g) = \sup\{«(f(x), g(x)) \mid x \in X\}, \quad f, g \in Y^X.$$

წინადადება 4.3.4. *ვთქვათ $(X, °)$ არის კომპაქტური მეტრიკული სივრცე. ნებისმიერი $£ > 0$ რიცხვისთვის ყველა £ -ასახვების სიმრავლე არის $(Y^X, \hat{«})$ მეტრიკული სივრცის ღია სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : X \to Y$ არის £ -ასახვა. განვიხილოთ

$$A = \{(x, x') \in X \times X \mid °(x, x') \ge £\}.$$

ცხადია, $° : X \times X \to [0, +\infty)$ ასახვა არის უწყვეტი. ამიტომ $[0, +\infty)$ ჩაკეტილი სიმრავლის წინარესახე $°^{-1}([£, +\infty)) = A$ არის ჩაკეტილი. აქედან გამომდინარე, $X \times X$ კომპაქტური სივრცის A ჩაკეტილი ქვესივრცე არის კომპაქტური.

ნებისმიერი $(x,x')\in A$ წერტილისთვის $«(f(x),f(x'))>0$. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი., თუ $«(f(x),f(x'))=0$, მაშინ $f(x)=f(x')$, ანუ $x,x'\in f^{-1}(f(x))$. აქედან გამომდინარე, რადგან $¢(f^{-1}(f(x)))<£$,მივიღებთ $°(x,x')<£$. ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან $(x,x')\in A$. ზემონათქვამის თანახმად, არსებობს ისეთი $¬>0$ რიცხვი, რომ ყოველი $(x,x')\in A$ წყვილისთვის $«(f(x),f(x'))\geq ¬$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ f ასახვა არის $£$ -ასახვათა სიმრავლის შიგა წერილი. განვიხილოთ f ასახვის $B(f,¬/2)$ მიდამო და მისი ნებისმიერი $g\in B(f,¬/2)$ ელემენტი. ვაჩვენოთ g არის $£$ -ასახვა. ვთქვათ $y\in Y$ და $x,x'\in g^{-1}(y)$, ანუ $g(x)=y=g(x')$. პირობის თანახმად,
$\hat{«}(f,g)<¬/2$. შევნიშნოთ, რომ

$$«(f(x),f(x'))\leq «(f(x),g(x))+«(g(x'),f(x'))<¬/2+¬/2=¬ .$$

ამიტომ $°(x,x')<£$, ანუ $¢(g^{-1}(y))<£$. ამრიგად, g არის $£$ -ასახვა. □

წინადადება 4.3.5. *ვთქვათ $(X,°)$ არის კომპაქტური მეტრიკული სივრცე. $(Y,«)$ მეტრიკული სივრცის ყოველი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის*

$$M=\{f\in Y^X \mid f(X)\bigcap F=\varnothing\}$$

სიმრავლე არის Y^X ასახვათა სივრცის ღია სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ $f:X\to Y$ არის ისეთი უწყვეტი ასახვა, რომ $f\in M$, ანუ $f(X)\bigcap F=\varnothing$. შევნიშნოთ, რომ $f(X)$ ანასახი არის Y სივრცის კომპაქტური ქვესივრცე. ამიტომ $f(X)$ კომპაქტურ ანასახსა და F ჩაკეტილ სიმრავლეს შორის $¢$ მანძილი არის დადებითი რიცხვი.

განვიხილოთ f ასახვის $B(f,¢)$ მიდამო $(Y^X,\hat{«})$ მეტრიკულ სივრცეში. ვთქვათ $g\in B(f,¢)$ არის ნებისმიერი ელემენტი, ანუ $\hat{«}(f,g)<¢$. აქედან გამომდინარე, $g(X)\bigcap F=\varnothing$, ანუ $g\in M$. ამრიგად, $B(f,¢)\subset M$. ეს კი ნიშნავს, რომ f არის M სიმრავლის შიგა წერტილი, ე.ი. M არის ღია სიმრავლე. □

თეორემა 4.3.6. *ყოველი X თვლადბაზისიანი მეტრიკული სივრცე, რომლის განზომილება $0\leq \dim X\leq n$, ჰომეომორფულად ჩადგმადია $2n+1$ განზომილებიან $\mathbb{R}^{2n+1}$ ევკლიდურ სივრცეში. გარდა ამისა, თუ X სივრცე არის კომპაქტური, მაშინ X სივრცის $\mathbb{R}^{2n+1}$ სივრცეში ნებისმიერი ჰომეომორფული ჩადგმა ქმნის $(\mathbb{R}^{2n+1})^X$ ასახვათა სივრცის $G_¢$ -ტიპის მკვრივ ქვესიმრავლეს.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ისეთი კომპაქტური მეტრიკული სივრცე, რომ $0 \le \dim X \le n$. განვიხილოთ $(\mathbb{R}^{2n+1})^X$ ასახვათა სივრცის $1/n$ -ასახვების G_n სიმრავლეების $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ოჯახი. შევნიშნოთ, რომ 4.3.4 წინადადების და 1.11.3 ლემის (იხ. [En1]) თანახმად G_n , $n = 1, 2, \dots$ სიმრავლეები არის $(\mathbb{R}^{2n+1})^X$ სივრცის ღია და მკვრივი ქვესიმრავლეები. გარდა ამისა, $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_n$ არის $(\mathbb{R}^{2n+1})^X$ სივრცის $G_{¢}$ -ტიპის მკვრივი ქვესიმრავლე. (იხ. ბერის კატეგორიული თეორემა, [En]) ცხადია, G არის X სივრცის $\mathbb{R}^{2n+1}$ სივრცეში ყველა ჰომეომორფული ჩადგმების სიმრავლე.

ახლა ვთქვათ, X არის ისეთი სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე, რომ $0 \le \dim X \le n$. კომპაქტიფიკაციის შესახებ 4.2.15 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი cX კომპაქტი, რომელიც შეიცავს X სივრცეს, როგორც მკვრივ ქვესივრცეს და აქვს განზომილება $\dim \tilde{X} \le n$. ზემონათქვამის თანახმად $\tilde{X}$ და, მაშასადამე, X შეიძლება ჩაიდგას $\mathbb{R}^{2n+1}$ სივრცეში. □

შედეგი 4.3.7. (იხ.[En1], თეორემა 1.11.5). $(2n+1)$ *განზომილებიანი $\mathbb{R}^{2n+1}$ სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაც აქვთ არაუმეტეს n რაციონალური კოორდინატი, არის თვლადბაზისიან მეტრიკულ სივრცეთა კლასის უნივერსალური სივრცე.* □

დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე დებულებები.

წინადადება 4.3.8. *ვთქვათ X არის თვლადბაზისიანი სივრცე და* $\operatorname{ind} X \le n$. *ნებისმიერი ~ დაფარვისთვის არსებობს ისეთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ღია სიმრავლეთა* $=\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ *ოჯახი და ჩაკეტილ სიმრავლეთა* ¥ $=\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ *ოჯახი, რომელთათვისაც სრულდება პირობები:*

i). $\ge$ ~ და ¥ $\ge$ ~ .

ii). $\operatorname{ind} F_i \le n-1$, $i = 1, 2, \dots$.

iii). $X = (\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$.

დამტკიცება. პირობის თანახმად, $\operatorname{ind} X \le n$. ამიტომ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს ~ დაფარვის რომელიმე ელემენტში შემავალი მისი ისეთი O_x მიდამო, რომ $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} O_x \le n-1$. ცხადია, X სივრცის $\{O_x\}_{x\in X}$ ღია დაფარვა შეიცავს $\{O_{x_i}\}_{i=1}^{\infty}$ თვლად ქვედაფარვას. ვთქვათ ¥ $=\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$, სადაც ყოველი $i = 1, 2, \dots$ ინდექსისთვის $F_i = \operatorname{Fr} O_{x_i}$ და $\operatorname{ind} F_i \le n-1$.

ახლა განვიხილოთ სიმრავლეები

$$U_1 = O_{x_1}, U_2 = O_{x_2} \setminus \overline{O}_{x_1}, \ldots, U_i = O_{x_i} \setminus \overline{\bigcup_{j<i} O_{x_j}}, \ldots .$$

ცხადია, $\quad = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ არის X სივრცის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ღია სიმრავლეთა ოჯახი. შევნიშნოთ, რომ $\quad \geq \sim$ და $¥ \geq \sim$. ვაჩვენოთ, რომ $X = (\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$.

ვთქვათ x არის X სივრცის ნებისმიერი წერტილი, ხოლო i_0 , ის მინიმალური i ინდექსი, რომლისთვისაც $x \in O_{x_i}$. აქედან გამომდინარე, $x \notin \bigcup_{i<i_0} O_{x_i}$. თუ $x \in \overline{\bigcup_{i<i_0} O_{x_i}}$, მაშინ არსებობს ისეთი i ინდექსი, რომ $x \in \overline{O}_{x_i} \setminus O_{x_i} = \mathrm{Fr}\, O_{x_i} = F_i$. ცხადია, თუ $x \notin \overline{\bigcup_{i<i_0} O_{x_i}}$, მაშინ $x \in U_{i_0}$. ამრიგად, $x \in (\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$. □

წინადადება 4.3.9. *ვთქვათ X თვლადბაზისიანი სივრცის ყოველი F ჩაკეტილი სიმრავლისთვის, რომლის განზომილება* $\mathrm{ind}\, F \leq n-1$ *, სრულდება უტოლობა* $\dim F \leq n-1$ *. თუ $\sim = \{G_1, G_2, \ldots, G_k\}$ სასრული დაფარვისთვის არსებობს 4.3.8 წინადადებით განსაზღვრული,* i)-iii) *პირობების მქონე $\quad$ და ¥ დაფარვები, მაშინ ~ დაფარვაში შეიძლება ჩაიწეროს ისეთი ¢ ღია დაფარვა, რომ* $\mathrm{ord}\, ¢ \leq n+1$ *.*

დამტკიცება. ვთქვათ $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. პირობის თანახმად, ყოველი i ინდექსისთვის $\mathrm{ind}\, F_i \leq n-1$ და $\dim F_i \leq n-1$. ამიტომ 4.2.5 თეორემის თანახმად $\dim F \leq n-1$.

ვთქვათ $C = X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. ცხადია, C ჩაკეტილი სიმრავლე შედის F სიმრავლეში. აქედან გამომდინარე, $\dim C \leq n-1$. ამიტომ C ქვესივრცის $\sim_C = \{G_1 \bigcap C, G_2 \bigcap C, \ldots, G_k \bigcap C\}$ ღია დაფარვაში შეგვიძლია ჩავწეროთ C ქვესივრცის $« = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k\}$ ჩაკეტილი $\mathrm{ord}\, « \leq n$ ჯერადობის მქონე დაფარვა. 4.2.1 თეორემის თანახმად, არსებობს « დაფარვის ისეთი $¬ = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ გაჭიმვა, რომ $\mathrm{ord}\, ¬ \leq n$ და $¬ \geq \sim$. შევნიშნოთ, რომ $\bigcup_{i=1}^{k} V_i$ არის C სიმრავლის მიდამო. განვიხილოთ ¬ და $\quad$ სისტემების $¶ = ¬ \bigcup \quad$ გაერთიანება. ცხადია, ¶ არის X სივრცის თვლადი ღია დაფარვა, $\mathrm{ord}\, ¶ \leq n+1$ და $¶ \geq \sim$. აქედან გამომდინარე, არსებობს X სივრცის ისეთი ¢ სასრული ღია დაფარვა, რომ $¢ \geq \sim$ და $\mathrm{ord}\, ¢ \leq n+1$. □

თეორემა 4.3.10. *ნებისმიერი X თვლადბაზისიანი სივრცისთვის* $\dim X \leq \mathrm{ind}\, X$ *.*

დამტკიცება. დამტკიცება ვაწარმოოთ ინდუქციის წესით $\operatorname{ind} X$ რიცხვის მიმართ. უტოლობა სამართლიანია, როცა $\operatorname{ind} X = -1$. მართლაც, ამ შემთხვევაში $X = \varnothing$ და $\dim \varnothing = -1 = \operatorname{ind} X$.

ვთქვათ უტოლობა დამტკიცებულია ყველა X სივრცისთვის, რომელთა განზომილება $\operatorname{ind} X \le n-1$. ვთქვათ $\operatorname{ind} X = n$. 4.3.8 და 4.3.9 წინადადებების თანახმად, X სივრცის ნებისმიერ ~ სასრულ ღია დაფარვაში შეგვიძლია ჩავწეროთ ისეთი ¢ სასრული ღია დაფარვა, რომ $\operatorname{ord} ¢ \le n+1$. ამრიგად, $\dim X \le n = \operatorname{ind} X$.□

თეორემა 4.3.11. ნებისმიერი X თვლადბაზისიანი სივრცისთვის $\operatorname{Ind} X \le \operatorname{ind} X$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\operatorname{ind} X = -1$, მაშინ $X = \varnothing$. ამიტომ $\operatorname{Ind} X = -1$ და უტოლობა სამართლიანია. დავუშვათ, უტოლობა სრულდება, როცა $\operatorname{ind} X < n$ და ვთქვათ $\operatorname{ind} X = n$. განვიხილოთ X სივრცის ნებისმიერი P ჩაკეტილი სიმრავლე და მისი ნებისმიერი W მიდამო. პირობის თანახმად, არსებობს ისეთი G მიდამო, რომ $P \subset G \subset \overline{G} \subset W$. ვთქვათ $\sim = \{W, X \setminus \overline{G}\}$. მიღებული ~ დაფარვისთვის ავაგოთ 4.3.8 წინადადებაში მოცემული და ~ დაფარვაში ჩაწერილი ისეთი $= \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ და $¥ = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ ოჯახები, რომელთათვისაც $\operatorname{ind} F_i \le n-1$ და $X = (\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \bigcup (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$. ვთქვათ $' = \{U_i \in \sim \mid U_i \bigcap \overline{G} \ne \varnothing\}$ და $'' = \ \setminus \ '$. სიმბოლოებით U' და U'' , შესაბამისად, აღვნიშნოთ $'$ და $''$ ოჯახებში შემავალი ელემენტების გაერთიანებები. დაუშვათ, $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. შევნიშნოთ, რომ $X = U' \bigcup U'' \bigcup F$, $U' \bigcap U'' = \varnothing$ და $\overline{G} \bigcap U'' = \varnothing$. რადგან $= \ ' \bigcup \ ''$ ჩაწერილია ~ ოჯახში და $\sim'$ ოჯახის ელემენტები არ შედის $X \setminus \overline{G}$ დამატებაში, ამიტომ $\sim'$ ოჯახის ყველა ელემენტი შედის W მიდამოში. ამრიგად, $U' \subset W$. ცხადია, $(U' \bigcup G) \bigcap U'' = \varnothing$. აქედან გამომდინარე $\operatorname{Fr}(U' \bigcup G) \bigcap U'' = \varnothing$ და $\operatorname{Fr}(U' \bigcup G) \subset F$. შევნიშნოთ, რომ $\dim X = \operatorname{ind} X$. ამიტომ $\dim F_i = \operatorname{ind} F_i \le n-1$. ჯამის თეორემის თანახმად, $\dim F \le n-1$, ე.ი. $\operatorname{ind} F \le n-1$. ინდუქციის თანახმად, $\operatorname{Ind} F \le n-1$. ასევე, რადგან $\operatorname{Fr}(U' \bigcup G) \subseteq F$, სრულდება $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr}(U' \bigcup G) \le n-1$ უტოლობა.

ვთქვათ $V = U' \bigcup G$. ცხადია, $P \subset V \subset W$ და $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V \le n-1$. ამრიგად, $\operatorname{Ind} X \le n = \operatorname{ind} X$.□

ვთქვათ Q^{2n+1} არის $2n+1$ განზომილებიანი ერთეულოვანი კუბი, ხოლო $Q_n^{2n+1} \subset Q^{2n+1}$ არის იმ წერტილთა ქვესიმრავლე, რომელთაც აქვთ არაუმეტეს n რაციონალური კოორდინატი. ასევე, ვთქვათ Y_n^{2n+1} არის

$\mathbb{R}^{2n+1}$ ევკლიდური სივრცის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაც აქვთ არაუმეტეს n რაციონალური კოორდინატი. ამრიგად,
$$Q_n^{2n+1} = Q^{2n+1} \bigcap Y_n^{2n+1} .$$

ცნობილია, რომ $\dim X = n$ განზომილების მქონე თვლადბაზისიანი X სივრცისთვის არსებობს ისეთი $f : X \to Q_n^{2n+1}$ ტოპოლოგიური ასახვა, რომ $\overline{f(X)} \subset Q_n^{2n+1}$.

ცნობილია, რომ $\operatorname{ind} Y_n^{2n+1} \le n$ (იხ.[Al-P], [En1], [N]). აქედან გამომდინარე, $\operatorname{ind} Q_n^{2n+1} \le n$ და, მაშასადამე, $\operatorname{ind} X \le n$.

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4.3.12. ნებისმიერი X თვლადბაზისიანი სივრცისთვის $ind\ X \le \dim X$.□

ზემოთ მიღებული თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 4.3.13. ნებისმიერი თვლადბაზისიანი X სივრცისთვის
$$\dim X = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X. \square$$

სავარჯიშო 4.3.14. 1).აჩვენეთ, X მეტრიზებადი სივრცისთვის
$$\operatorname{ind}_{\mathscr{Compl}} X \le \operatorname{ind}_{\mathscr{C}} X \le \operatorname{ind} X .$$

2).დაამტკიცეთ, X მეტრიზებადი სივრცის $G_{¢}$ -ტიპის Y სიმრავლისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{Compl}} Y \le \operatorname{ind}_{\mathscr{Compl}} X$.

3).ვთქვათ X არის სეპარაბელური მეტრიკული სივრცე და $n \in \mathbb{N}$. აჩვენეთ, $\operatorname{ind}_{\mathscr{Compl}} X \le n$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს X სივრცის ისეთი თვლადი $\pm$ ბაზისი, რომ $\operatorname{ind}_{\mathscr{Compl}} \operatorname{Fr} U \le n-1$ ყოველი $U \in \pm$ ელემენტისთვის.

4).აჩვენეთ, X სეპარაბელური მეტრიკული სივრცისთვის
$$\dim_{\mathscr{Compl}} X = \operatorname{ind}_{\mathscr{Compl}} X = \operatorname{Ind}_{\mathscr{Compl}} X = \operatorname{def}_{\mathscr{Compl}} X .$$

5).აჩვენეთ, X მეტრიზებად სივრცეს აქვს Y ტოპოლოგიურად სრული გაფართოება $\operatorname{Ind}(Y \setminus X) \le n$ განზომილების მქონე $Y \setminus X$ ნაზრდით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\operatorname{Ind}_{\mathscr{Compl}} X \le n$.

6).აჩვენეთ, რეგულარული სივრცის ყოველი Y $F_{\pm}$ -ტიპის სიმრავლისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} Y \le \operatorname{ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} X$.

7).აჩვენეთ, X ნორმალური სივრცის ყოველი Y $F_{\pm}$ -ტიპის სიმრავლისთვის $\operatorname{Ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} Y \le \operatorname{Ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} X$.

8).აჩვენეთ, ნებისმიერი X რეგულარული სივრცისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} X \le \operatorname{ind}_{\mathscr{C}} X$.

9).აჩვენეთ, ნებისმიერი X ნორმალური სივრცისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} X \le \operatorname{Ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} X$.

10).დაამტკიცეთ, ნებისმიერი X სეპარაბელური მეტრიზებადი სივრცისთვის $\operatorname{ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} X = \operatorname{Ind}_{\mathscr{S}_{\pm}} X = \operatorname{Sur}_{\mathscr{S}_{\pm}} X$.

ლიტერატურა

[Aa-N]. J. M. Aarts and T. Nishiura, Dimension and extensions. North-Holland Math. Library, Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1993.
[Al-P]. P. Alexandroff and B.A. Pasynkov, Introduction to Dimension Theory, Moscow, 1973.
[B]. V.H. Baladze, On Functions of dimensional type, Trudy Tbilisskogo Mathematicheskogo Instituta, 68, 1982, 5-41.
[En1]. R.Engelking, Dimension theory, North-Holland Publishing Company, 1978.
[Hu-W]. W.Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton University Press, 1941.
[N]. K. Nagami, Dimension Theory, Academic Press, 1970.
[Sm]. Yu. M. Smirnov, On the Dimensions of Remainders of Compactifications of Proximity and Topological Spaces II, American Mathematical Society, Series 2, 84, 1969, 197-251.

თავი V. უწყვეტ ჯგუფთა თეორიის ელემენტები

5.1.ტოპოლოგიური ჯგუფები

მოცემულ პარაგრაფში გავეცნობით ტოპოლოგიურ სივრცეთა იმ კლასს, რომელსაც ქმნის ტოპოლოგიური ჯგუფები, ანუ სიმრავლეები, რომლებზეც მოცემულია როგორც ტოპოლოგიური სტრუქტურა, ისე მასთან გარკვეული აქსიომებით, ბუნებრივად დაკავშირებული ჯგუფის სტრუქტურა.

ტოპოლოგიური ჯგუფის სტრუქტურები ზეგავლენას ახდენს სივრცის ტოპოლოგიურ თვისებებზე და იძლევიან გეომეტრიისა და ტოპოლოგიისთვის მნიშვნელოვანი მათემატიკური ობიექტების აგებისა და გამოკვლევის ეფექტურ მეთოდებს.

ტოპოლოგიური ჯგუფის განმარტებისას ჩვენ არ მოვითხოვთ სივრცე აკმაყოფილებდეს განცალების რაიმე აქსიომებს. წიგნის ინტერესებიდან გამომდინარე ეს ზოგადი მოთხოვნა მომგებიანია, თუმცა იმასაც შევნიშნავთ, რომ ლიტერატურაში ხშირია შემთხვევები, როცა ტოპოლოგიური ჯგუფის განმარტებისას მოითხოვება ჯგუფის სტრუქტურის მქონე სივრცე იყოს T_0-სივრცე, T_1-სივრცე, T_2-სივრცე და ა.შ.

ახლა განვიხილოთ ტოპოლოგიური ჯგუფები და მათი ზოგიერთი თვისებები.

ვთქვათ A არის ¯ ჯგუფის ოპერაციის და ² ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე სიმრავლე. ვიგულისხმოთ, რომ ¯ არის მულტიპლიკაციური ოპერაცია, ე.ი. ¯ $=\cdot$ (ცხადია, ¯ ოპერაციის როლში აგრეთვე შეგვიძლია განვიხილოთ ¯ $=+$ ადიციური ოპერაცია).

A სიმრავლეს ეწოდება ტოპოლოგიური ჯგუფი, თუ სრულდება პირობები-აქსიომები:

TG1). A სიმრავლის ნებისმიერი a და b ელემენტისთვის და ab ელემენტის ნებისმიერი W მიდამოსთვის არსებობს a ელემენტის ისეთი U მიდამო და b ელემენტის ისეთი V მიდამო, რომ $UV \subset W$.

TG2). A სიმრავლის ნებისმიერი a ელემენტისთვის და a^{-1} ელემენტის ნებისმიერი V მიდამოსთვის არსებობს a ელემენტის ისეთი U მიდამო, რომ $U^{-1} \subset V$.

ადვილი დასანახია, რომ TG1) და TG2) აქსიომები შეიძლება შეიცვალოს შემდეგი პირობით-აქსიომით:

TG3). A სიმრავლის ყოველი a და b ელემენტისთვის და ab^{-1} ელემენტის ნებისმიერი W მიდამოსთვის არსებობს a და b ელემენტების ისეთი U და V მიდამოები, რომ $UV^{-1} \subset W$.

მოკლედ რომ ვთქვათ, A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, თუ $A\times A\to A$ კომპოზიციის ასახვა და შებრუნებული ელემენტის აღების $A\to A$ ასახვა, მოცემული $(a,b)\to ab,\ a,b\in A$ და $a\to a^{-1},\ \ a\in A$ შესაბამისობებით, არის უწყვეტი ასახვები.

ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო B მისი ქვეჯგუფი.

ინდუცირებული ტოპოლოგიის მქონე B ქვეჯგუფი არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. ვთქვათ $x,y\in B$ და $xy=z$. ცხადია, $z\in B$. როგორც ვიცით, B ქვესივრცეში z ელემენტის ყოველი W' მიდამო ისეთია, რომ $W'=W\bigcap B$, სადაც W არის ღია A სივრცეში. ამიტომ x და y ელემენტებს A სივრცეში გააჩნიათ ისეთი U და V მიდამოები, რომ $UV\subset W$. ვთქვათ $U'=U\bigcap B$ და $V'=V\bigcap B$. ცხადია, U' და V' შესაბამისად არის x და y ელემენტების მიდამოები B ქვესივრცეში. შევნიშნოთ, რომ $U'V'\subset W$ და $U'V'\subset B$. აქედან გამომდინარე, $U'V'\subset W\bigcap B=W'$.

ყოველი $x\in B$ ელემენტისთვის $x^{-1}\in B$. ვთქვათ V' არის x^{-1} ელემენტის ნებისმიერი მიდამო B ქვესივრცეში. A სივრცეში არსებობს ისეთი V ღია სიმრავლე, რომ $V\bigcap B=V'$. ცხადია, $x^{-1}\in V$. აქედან გამომდინარე, A სივრცეში არსებობს x ელემენტის ისეთი U მიდამო, რომ $U^{-1}\subset V$. ვთქვათ $U'=U\bigcap B$. შევნიშნოთ, რომ $U'^{-1}\subset U^{-1}\subset V$ და $U'^{-1}\subset B$. ამრიგად, $U'^{-1}\subset V\bigcap B=V'$.

ვთქვათ A და A' არის ტოპოლოგიური ჯგუფები. $f:A\to A'$ ასახვას ეწოდება ტოპოლოგიური ჯგუფების ჰომომორფიზმი, თუ f არის როგორც ჰომომორფიზმის ასახვა, ისე უწყვეტი ასახვა.

ცხადია, თუ $f:A\to A'$ და $g:A'\to A''$ არის ტოპოლოგიური ჯგუფების ჰომომორფიზმები, მაშინ $g\circ f:A\to A''$ კომპოზიცია არის ტოპოლოგიური ჯგუფების ჰომომორფიზმი. ასევე შევნიშნოთ, A ჯგუფის A ჯგუფზე $1_A:A\to A$ იგივური ასახვა არის ტოპოლოგიური ჯგუფის თავისთავზე ჰომომორფიზმი.

ამრიგად, ტოპოლოგიური ჯგუფები და მათ შორის ტოპოლოგიური ჯგუფების ჰომომორფიზმები ქმნის კატეგორიას $\mathbf{Gr_T}$. თუ, დამატებით, ტოპოლოგიური ჯგუფი აკმაყოფილებს პირობას, არის კომპაქტური სივრცე, ლოკალურად კომპაქტური სივრცე, ბმული სივრცე და ა.შ., მაშინ ტოპოლოგიურ ჯგუფს შესაბამისად ეწოდება კომპაქტური ჯგუფი, ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი, ბმული ჯგუფი და ა.შ. ცხადია, აღნიშნული ჯგუფები ქმნის ტოპოლოგიური ჯგუფებისა და მათი ჰომომორფიზმების $\mathbf{Gr_T}$ კატეგორიის სრულ ქვეკატეგორიებს.

ახლა მოვიყვანოთ ტოპოლოგიური ჯგუფების რამდენიმე

მაგალითი.

ვთქვათ $\mathbb{R}$ არის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე ნამდვილ რიცხვთა ღერძი შეკრების ოპერაციით. $\mathbb{R}$ არის ადიციური ტოპოლოგიური ჯგუფი. ასევე დადებით რიცხვთა $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ ქვესიმრავლე $\mathbb{R}$ ღერძით ინდუცირებული, ქვესივრცის ტოპოლოგიით არის მულტიპლიკაციური ტოპოლოგიური ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. გარდა ამისა, რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ქვესიმრავლე $\mathbb{R}$ ღერძით ინდუცირებული ქვესივრცის ტოპოლოგიით, შეკრების ოპერაციის მიმართ ქმნის ადიციურ ტოპოლოგიურ ჯგუფს.

ვთქვათ S^1 არის სიბრტყის იმ z წერტილთა სიმრავლე, რომელთა მოდული არის 1. S^1 ქმნის მულტიპლიკაციურ ტოპოლოგიურ ჯგუფს $\mathbb{R}^2$ ევკლიდური სიბრტყის ბუნებრივი ტოპოლოგიით ინდუცირებული ქვესივრცის ტოპოლოგიის მიმართ.

ნებისმიერი A ჯგუფი დისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურით ქმნის ტოპოლოგიურ ჯგუფს. ასევე, A ჯგუფი ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სტრუქტურით არის ტოპოლოგიური ჯგუფი.

n-განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის ვექტორები ქმნის ადიციურ ტოპოლოგიურ ჯგუფს შეკრების ოპერაციის და $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურის მიმართ.

ვთქვათ A ტოპოლოგიური ჯგუფისთვის განმარტებულია ასახვები $L_a : A \to A$ და $R_a : A \to A$. განმარტების თანახმად, ნებისმიერი $a \in A$ ფიქსირებული ელემენტისთვის

$$L_a(x) = a\,x, \quad x \in A$$

და

$$R_a(x) = x\,a, \quad x \in A.$$

განმარტებულ L_a და R_a ასახვებს შესაბამისად ეწოდებათ A ჯგუფის მარცხენა და მარჯვენა გარდაქმნები, ან გადაადგილებები.

წინადადება 5.1.1. *ვთქვათ a არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის ელემენტი. L_a და R_a მარცხენა და მარჯვენა გარდაქმნები არის ჰომეომორფიზმები.*

დამტკიცება. $L_a : A \to A$ ასახვა არის ურთიერთცალსახა ასახვა A ტოპოლოგიური ჯგუფისა A ტოპოლოგიურ ჯგუფზე. ვთქვათ b არის A მნიშვნელობათა არის ნებისმიერი ელემენტი და $x = a^{-1}b$. ცხადია, x ეკუთვნის A განსაზღვრის არეს და $L_a(x) = b.$ მართლაც,

$$L_a(x) = L_a(a^{-1}b) = a\,(a^{-1}\,b) = (a\,a^{-1})\,b = e\,b = b.$$

A განსაზღვრის არის ყოველი $x_1 \neq x_2$ ელემენტისთვის $L_a(x_1) \neq L_a(x_2)$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $L_a(x_1) = L_a(x_2)$, ანუ $a\,x_1 = a\,x_2$. აქედან მივიღებთ $a^{-1}(a\,x_1) = a^{-1}(a\,x_2)$. ამრიგად,

$(a^{-1}a)x_1 = (a^{-1}a)x_2$, ანუ $e\,x_1 = e\,x_2$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x_1 = x_2$, რაც ეწინააღმდეგება $x_1 \neq x_2$ პირობას, ე.ი. დაშვება არასწორია. ამრიგად, $L_a(x_1) \neq L_a(x_2)$. ახლა ვაჩვენოთ L_a ასახვის უწყვეტობა. ვთქვათ $x \in A$ და W არის $L_a(x) = a\,x$ ანასახის ნებისმიერი მიდამო. ტოპოლოგიური ჯგუფის განმარტების თანახმად არსებობს a და x ელემენტების ისეთი U და V მიდამოები, რომ $UV \subset W$. ცხადია, $aV \subset W$ ანუ $L_a(V) \subset W$. ამრიგად, A განსაზღვრის არის ყოველი x წერტილისთვის და $L_a(x)$ ანასახის ნებისმიერი W მიდამოსთვის არსებობს x წერტილის ისეთი V მიდამო, რომ $L_a(V) \subset W$, ე.ი. L_a არის უწყვეტი ასახვა.

ახლა შევამოწმოთ $L_a^{-1} : A \to A$ ასახვის უწყვეტობა. ვთქვათ $y \in A$ და $y = L_a(x),\ x \in A.$ ცხადია, $L_a^{-1}(y) = x$. შევნიშნოთ, რომ x ელემენტი განისაზღვრება $y = L_a(x)$, ანუ $y = a\,x$ ტოლობით. ამრიგად, $x = a^{-1}\,y$. აქედან გამომდინარე, სამართლიანია ტოლობა

$$L_a^{-1}(y) = x = a^{-1}\,y = L_{a^{-1}}(y),$$

ანუ L_a ასახვის შებრუნებული ასახვა L_a^{-1} არის იგივე $L_{a^{-1}}$ გადაადგილება. ამიტომ $L_{a^{-1}}$ ასახვის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს L_a^{-1} შებრუნებული ასახვის უწვეტობა. ამრიგად, L_a ასახვა არის ჰომეომორფიზმი. ანალოგიურად შემოწმდება R_a გარდაქმნის ჰომეომორფულობა. □

წინადადება 5.1.2. *A ტოპოლოგიური ჯგუფის ყოველი a და b ელემენტისთვის სამართლიანია*

$$L_a \circ L_b = L_{a \cdot b}$$

და

$$R_b \circ R_a = R_{a\,b}$$

ტოლობები.

დამტკიცება. ვთქვათ x არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი.ცხადია, ტოლობებიდან

$$(L_a \circ L_b)(x) = L_a(L_b(x)) = L_a(b\,x) = a\,(b\,x) = (a\,b)\,x = L_{a\,b}(x)$$

და

$$(R_b \circ R_a)(x) = R_b(R_a(x)) = R_b(x\,a) = (x\,a)\,b = x\,(a\,b) = R_{a\,b}(x)$$

მიიღება $L_a \circ L_b = L_{a\,b}$ და $R_b \circ R_a = R_{a\,b}$ ტოლობები. □

ვთქვათ a არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის ფიქსირებული ელემენტი. A ტოპოლოგიური ჯგუფის A ტოპოლოგიურ ჯგუფზე ასახვას, რომელიც მოიცემა შესაბამისობით

$$x \to axa^{-1}, \quad x \in A,$$

ეწოდება შეუღლების ასახვა.

შეუღლების ასახვა მოიცემა, როგორც L_a და $R_{a^{-1}}$ ასახვების $L_a \circ R_{a^{-1}}$ კომპოზიცია. მართლაც,

$$(L_a \circ R_{a^{-1}})(x) = L_a(R_{a^{-1}}(x)) = L_a(xa^{-1}) = a\,x\,a^{-1}.$$

ამრიგად, შეუღლების ასახვა, როგორც ჰომეომორფიზმების კომპოზიცია, არის ჰომეომორფიზმი.

წინადადება 5.1.3. *თუ F არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, მაშინ $F^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in F\}$ აგრეთვე არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ასევე, ყოველი $a \in A$ ელემენტისათვის $aF = \{ax \mid x \in F\}$ და $Fa = \{xa \mid x \in F\}$ სიმრავლეები არის ჩაკეტილი სიმრავლეები.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\ddot{} : A \to A$ არის $\ddot{}(x) = x^{-1}$, $x \in A$ ფორმულით მოცემული ასახვა.

ცხადია, $\ddot{}(F) = F^{-1}$. ამიტომ F^{-1}, როგორც F ჩაკეტილი სიმრავლის ჰომეომორფული ანასახი, არის ჩაკეტილი სიმრავლე.

5.1.1 წინადადების თანახმად L_a და R_a არის ჰომეომორფული ასახვები. აქედან გამომდინარე, $L_a(F) = aF$ და $R_a(F) = Fa$ ანასახები არის ჩაკეტილი სიმრავლეები. □

წინადადება 5.1.4. *თუ U არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის ღია სიმრავლე, B ნებისმიერი ქვესიმრავლე, ხოლო a ნებისმიერი ელემენტი, მაშინ aU, Ua და $U\,B, BU$ სიმრავლეები არის ღია ქვესიმრავლეები.*

დამტკიცება. L_a და R_a გარდაქმნების ჰომეომორფულობის გამო $L_a(U) = aU$ და $R_a(U) = Ua$ ანასახები არის ღია სიმრავლეები. ცხადია, რომ $U\,B = \bigcup_{b \in B} U\,b$ და $BU = \bigcup_{b \in B} bU$. ამიტომ $U\,B$ და BU სიმრავლეები არის ღია სიმრავლეები. □

წინადადება 5.1.5. *თუ C და D არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის კომპაქტური ქვესიმრავლეები, მაშინ $C\,D$ აგრეთვე არის კომპაქტური ქვესიმრავლე.*

დამტკიცება. ცხადია, $C \times D$ დეკარტული ნამრავლი არის $A \times A$ სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე. ვთქვათ $\bar{} : A \times A \to A$ არის კომპოზიციის ასახვა. ცხადია, $\bar{}_{|C \times D} : C \times D \to A$ შემოსაზღვრის ასახვა არის უწყვეტი ასახვა და $\bar{}_{|C \times D}(C \times D) = C\,D.$ ამრიგად, $C\,D$ როგორც კომპაქტური სიმრავლის უწყვეტი ანასახი, არის კომპაქტური. □

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ერთგვაროვანი, თუ მისი ნებისმიერი ორი x და y წერტილისთვის არსებობს ისეთი $f : X \to X$ ჰომეომორფიზმი, რომ $f(x) = y$.

ნებისმიერი A ტოპოლოგიური ჯგუფი არის ერთგვაროვანი სივრცე. მართლაც, ვთქვათ $x, y \in A$. განვიხილოთ $a = x^{-1} y$ ელემენტის შესაბამისი $R_a : A \to A$ გარდაქმნა. შევნიშნოთ, რომ

$$R_a(x) = x a = x(x^{-1} y) = (x x^{-1}) y = e y = y.$$

ამრიგად, A ტოპოლოგიური ჯგუფი არის ერთგვაროვანი სივრცე. აქედან გამომდინარე, ტოპოლოგიურ ჯგუფს გააჩნია $\mathscr{P}$ ტოპოლოგიური თვისება ლოკალურად მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას $\mathscr{P}$ თვისება გააჩნია ერთ რომელიმე წერტილში. ეს კი ნიშნავს, რომ ტოპოლოგიური ჯგუფის ლოკალური თვისებების დადგენისთვის საკმარისია ამ თვისების შემოწმება მხოლოდ ერთ რომელიმე წერტილში. ასე მაგალითად, თუ A ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულს გააჩნია კომპაქტური ჩაკეტვის მქონე მიდამო, ან ბმული მიდამო, მაშინ A არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე, ან ლოკალურად ბმული სივრცე.

A ტოპოლოგიური ჯგუფის B ქვესიმრავლეს ეწოდება სიმეტრიული, თუ $B = B^{-1}$.

წინადადება 5.1.6. *A ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულის სიმეტრიული მიდამოები ქმნის e ელემენტის მიდამოთა სისტემას.*

დამტკიცება. ვთქვათ U არის e ელემენტის რაიმე მიდამო. U^{-1} არის ღია სიმრავლე და შეიცავს e ელემენტს, რადგან $e = e^{-1} \in U^{-1}$. ამრიგად, U^{-1} აგრეთვე არის e ელემენტის მიდამო. ცხადია, $U \bigcap U^{-1}$ არის e ერთეულის მიდამო. როგორც ვიცით, $\ddot{} : A \to A$ ფუნქცია, განმარტებული ფორმულით $\ddot{}(x) = x^{-1}$, $x \in A$ არის ჰომეომორფიზმი. შევნიშნოთ, რომ

$$(U \bigcap U^{-1})^{-1} = \ddot{}(U \bigcap U^{-1}) = \ddot{}(U) \bigcap \ddot{}(U^{-1}) = U^{-1} \bigcap U.$$

ამრიგად, $U \bigcap U^{-1}$ არის სიმეტრიული ღია სიმრავლე და აკმაყოფილებს პირობას

$$e \in U \bigcap U^{-1} \subset U. \ \square$$

წინადადება 5.1.7. *A ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულის მიდამოთა $\pm(e)$ ბაზისის ყოველი $U \in \pm(e)$ ელემენტისთვის არსებობს ისეთი $V \in \pm(e)$ ელემენტი, რომ $V^2 \subset U$.*

დამტკიცება. $ee = e$ ტოლობის თანახმად არსებობს e ერთეულის ისეთი V_1 და V_2 მიდამოები, რომ $V_1 V_2 \subset U$. ვთქვათ $V = V_1 \bigcap V_2$. ცხადია, V არის e ელემენტის ღია მიდამო და აკმაყოფილებს პირობას

$$V^2 = V V \subset V_1 V_2 \subset U. \ \square$$

წინადადება 5.1.8. *A ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულის მიდამოთა $\pm(e)$ ბაზისის ყოველი $U \in \pm(e)$ ელემენტისთვის არსებობს*

ისეთი $V \in \pm(e)$ *ელემენტი, რომ* $V^{-1} \subset U$.

დამტკიცება. შებრუნებული ელემენტის აღებით ინდუცირებული შესაბამისობა $x \to x^{-1}$ განსაზღვრავს უწყვეტ ასახვას. ამიტომ $e \to e^{-1} = e$ შესაბამისობის გამო e ელემენტის $U \in \pm(e)$ მიდამოსთვის არსებობს ისეთი G მიდამო, რომ $e \in G$ და $G^{-1} \subset U$. რადგან $\pm(e)$ არის მიდამოთა ბაზისი e წერტილში, ამიტომ არსებობს ისეთი $V \in \pm(e)$, რომ $e \in V \subset G$. შევნიშნოთ, რომ $V^{-1} \subset G^{-1} \subset U$. ამრიგად, e ერთეულისთვის არსებობს ისეთი $V \in \pm(e)$, რომ $V^{-1} \subset U$. □

წინადადება 5.1.9. *A ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულის მიდამოთა $\pm(e)$ ბაზის ყოველი $U \in \pm(e)$ ელემენტის ნებისმიერი $x \in U$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $V \in \pm(e)$ ელემენტი, რომ $xV \subset U$.*

დამტკიცება. ტოლობიდან $xe = x$ გამომდინარეობს, რომ x წერტილის U მიდამოსთვის არსებობს x და e წერტილების ისეთი G და V_1 მიდამოები, რომ $GV_1 \subset U$. რადგან $\pm(e)$ არის ბაზისი e წერტილში, ამიტომ არსებობს e წერტილის ისეთი $V \in \pm(e)$ ელემენტი, რომ $V \subset V_1$. ცხადია,

$$GV \subset GV_1 \subset U.$$

აქედან გამომდინარე, $xV \subset U$. □

წინადადება 5.1.10. *ვთქვათ $\pm(e)$ არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულის მიდამოთა ბაზისი, ხოლო $x \in A$ რაიმე ელემენტი. ნებისმიერი $U \in \pm(e)$ ელემენტისთვის არსებობს ისეთი $V \in \pm(e)$ ელემენტი, რომ $xVx^{-1} \subset U$.*

დამტკიცება. განვიხილოთ x წერტილის Ux ღია მიდამო. რადგან $xe = x$, ამიტომ არსებობს x წერტილის ისეთი G მიდამო და e წერტილის ისეთი V_1 მიდამო, რომ $GV_1 \subset Ux$. ვთქვათ $V \in \pm(e)$ არის e ერთეულის ისეთი მიდამო, რომ $V \subset V_1$. ცხადია, $GV \subset GV_1 \subset Ux$. აქედან გამომდინარე, $xV \subset Ux$. ნებისმიერი $y \in V$ ელემენტისთვის $xy \in Ux$, ანუ არსებობს ისეთი $z \in U$ ელემენტი, რომ $xy = zx$. ეს კი ნიშნავს, რომ $xyx^{-1} = z \in U$. ამრიგად, xVx^{-1} სიმრავლის ნებისმიერი xyx^{-1} ელემენტი ეკუთვნის U სიმრავლეს, ე.ი. $xVx^{-1} \subset U$. □

წინადადება 5.1.11. *A ტოპოლოგიური ჯგუფის e ერთეულის ყოველი U მიდამოსთვის არსებობს მისი ისეთი V მიდამო, რომ $\overline{V} \subset U$.*

დამტკიცება. 5.1.6 და 5.1.7 წინადადებების თანახმად არსებობს e ერთეულის ისეთი სიმეტრიული V მიდამო, რომ $V^2 \subset U$. ვაჩვენოთ, რომ $\overline{V} \subset U$. ვთქვათ $x \in \overline{V}$. ცხადია, $(xV) \bigcap V \neq \varnothing$. ამიტომ არსებობს

ისეთი y წერტილი, რომ $y \in xV$ და $y \in V$.ცხადია, $y = xv$, სადაც $v \in V$. აქედან გამომდინარე, $x = y v^{-1} \in V V^{-1} = V^2 \subset U$. ამრიგად, $\overline{V} \subset U$.□

წინადადება 5.1.12. *ყოველი* T_0 *-ტოპოლოგიური ჯგუფი არის რეგულარული სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ A არის T_0 -ტოპოლოგიური ჯგუფი. ვაჩვენოთ A აკმაყოფილებს T_3 -აქსიომას. როგორც ვიცით, ყოველი $x \in A$ ელემენტისთვის $R_{x^{-1}} : A \to A$ არის ჰომეომორფიზმი და $R_{x^{-1}}(x) = x x^{-1} = e$.

ვთქვათ U არის x წერტილის ნებისმიერი მიდამო. $R_{x^{-1}}(U) = U x^{-1}$ ანასახი არის e ერთეულის მიდამო. 5.1.11 წინადადების თანახმად არსებობს e ერთეულის ისეთი V მიდამო, რომ $\overline{V} \subset U x^{-1}$. შევნიშნოთ, რომ $R_x(V)$ არის x წერტილის მიდამო და

$$\overline{V x} = \overline{R_x(V)} = R_x(\overline{V}) \subset R_x(U x^{-1}) = U x^{-1} x = U .$$

ვთქვათ $V x = G$. ამრიგად, A ტოპოლოგიური ჯგუფის ნებისმიერი x წერტილის ყოველი U მიდამოსთვის არსებობს x წერტილის ისეთი G მიდამო, რომ $\overline{G} \subset U$, ე.ი. A ტოპოლოგიური ჯგუფი არის რეგულარული სივრცე. □

წინადადება 5.1.13. *თუ* B *არის* A *ტოპოლოგიური ჯგუფის ქვეჯგუფი, მაშინ* $\overline{B}$ *აგრეთვე არის* A *ჯგუფის ქვეჯგუფი.*

დამტკიცება. ვთქვათ $x, y \in \overline{B}$. განვიხილოთ xy ელემენტის ნებისმიერი W მიდამო. A სივრცეში არსებობს x და y ელემენტების ისეთი U და V მიდამოები, რომ $UV \subset W$. ცხადია, $U \bigcap B \neq \varnothing$ და $V \bigcap B \neq \varnothing$. ამიტომ არსებობს $x' \in U \bigcap B$ და $y' \in V \bigcap B$. აქედან გამომდინარე, $x' y' \in UV$ და $x' y' \in B$, ანუ $x' y' \in W$ და $x' y' \in B$. ამრიგად, $W \bigcap B \neq \varnothing$. ეს კი ნიშნავს, $x y$ არის B სიმრავლის შეხების წერტილი, ე.ი. $x y \in \overline{B}$. ახლა, ვთქვათ, x არის $\overline{B}$ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი. ვაჩვენოთ $x^{-1} \in \overline{B}$. ვთქვათ V არის x^{-1} წერტილის ნებისმიერი მიდამო A სივრცეში. ამიტომ არსებობს x ელემენტის ისეთი U მიდამო A ტოპოლოგიურ ჯგუფში, რომ $U^{-1} \subset V$. შევნიშნოთ, $U \bigcap B \neq \varnothing$. ამრიგად, არსებობს ისეთი x' ელემენტი, რომ $x' \in U$ და $x' \in B$. ცხადია, $x'^{-1} \in U^{-1}$ და $x'^{-1} \in B$. ეს კი ნიშნავს, რომ $x'^{-1} \in V$ და $x'^{-1} \in B$. ამრიგად, $x'^{-1} \in V \bigcap B$, ე.ი. $V \bigcap B \neq \varnothing$. აქედან გამომდინარე, $x^{-1} \in \overline{B}$. ამით ჩვენ შევამოწმეთ, რომ $\overline{B}$ არის A ალგებრული ჯგუფის ქვეჯგუფი. □

წინადადება 5.1.14. *თუ* B *არის* A *ტოპოლოგიური ჯგუფის*

ნორმალური ქვეჯგუფი, მაშინ $\overline{B}$ აგრეთვე არის A ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი.

დამტკიცება. ავიღოთ $\overline{B}$ ქვეჯგუფის ნებისმოერი b ელემენტი და A ჯგუფის ნებისმიერი a ელემენტი. ვაჩვენოთ $a^{-1}b\,a \in \overline{B}$. ვთქვათ V არის $a^{-1}b\,a$ ელემენტის ნებისმიერი მიდამო A სივრცეში. ცხადია, არსებობს a^{-1}, b და a ელემენტების ისეთი U_1, U და U_2 მიდამოები, რომ $U_1 U U_2 \subset V$. შევნიშნოთ, $a^{-1}U\,a$ არის $a^{-1}b\,a$ ელემენტის მიდამო და $a^{-1}U\,a \subset V$. გარდა ამისა, არსებობს ისეთი $x \in B$ ელემენტი, რომ $x \in U$. აქედან გამომდინარე, $a^{-1}x\,a \in V$. B ქვეჯგუფის ნორმალურობის გამო $a^{-1}x\,a \in B$. ამრიგად, $a^{-1}b\,a$ ელემენტის ნებისმიერი V მიდამოს თანაკვეთა B სიმრავლესთან არაცარიელია. ეს კი ნიშნავს, $a^{-1}b\,a \in \overline{B}$, ანუ $\overline{B}$ არის ნორმალური ქვეჯგუფი. □

წინადადება 5.1.15. *თუ A ტოპოლოგიური ჯგუფის B ქვეჯგუფი არის ღია სიმრავლე, მაშინ ის აგრეთვე არის ჩაკეტილი სიმრავლე.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, $B = \overline{B}$. ამისთვის საკმარისია შევამოწმოთ $\overline{B} \subset B$. ვთქვათ $a \in \overline{B}$. ცხადია, a ელემენტის $a\,B$ ღია მიდამოსთვის $a\,B \bigcap B \neq \varnothing$. ე.ი. არსებობს ისეთი y ელემენტი, რომ $y \in a\,B$ და $y \in B$. ამიტომ $y = a\,x$, $x \in B$. ცხადია, $a = y\,x^{-1} \in B$. ამრიგად, $\overline{B} \subset B$. აქედან გამომდინარე, $B = \overline{B}$. □

ვთქვათ A არის ^{2} ტოპოლოგიური სტრუქტურის მქონე ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო B მისი ქვეჯგუფი. A/B სიმრავლეზე ავაგოთ ტოპოლოგიური სტრუქტურა $^2{}_{A/B}$.

ვთქვათ $q : A \to A/B$ არის ფაქტორ-ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$q(a) = a\,B\,,\ a \in A\,.$$

სიმრავლე $\{x\,B \mid x \in X\}$ არის $^2{}_{A/B}$ ოჯახის ელემენტი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $q^{-1}(\{x\,B \mid x \in X\})$ სიმრავლე არის ღია A სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ

$$q^{-1}(\{x\,B \mid x \in X\}) = \bigcup\{x\,B \mid x \in X\}.$$

ამრიგად, $\{x\,B \mid x \in X\}$ ღიაა A/B ფაქტორ-სივრცეში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $X\,B = \bigcup_{x \in X} x\,B$ არის ღია A სივრცეში. რადგან $\{x\,B \mid x \in X\} = \{x\,B \mid x \in X\,B\}$, ამიტომ A/B ფაქტორ-სივრცის ყოველ ღია სიმრავლეს აქვს სახე $\{U\,B \mid x \in U\}$, სადაც U არის A სივრცის რაიმე ღია სიმრავლე. ამრიგად, $^2{}_{A/B}$ ტოპოლოგიური სტრუქტურა შედგება ყველა იმ $\{u\,B \mid u \in U\}$ სახის სიმრავლეებისგან, სადაც U არის A სივრცის ღია სიმრავლე.

წინადადება 5.1.16. *² $_{A/B}$ ოჯახი არის ტოპოლოგიური სტრუქტურა A/B ფაქტორ-სიმრავლეზე. $q: A \to A/B$ ფაქტორ-ასახვა არის უწყვეტი და ² $_{A/B}$ არის ყველაზე ძლიერი A/B ფაქტორ-სიმრავლეზე განმარტებულ იმ ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა შორის, რომელთა მიმართაც q ასახვა არის უწვეტი.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, ² $_{A/B}$ ოჯახი აკმაყოფილებს O1), O2) და O3) აქსიომებს.

O1).ცხადია, $A/B = \{u\,B \mid u \in A\}$ არის ² $_{A/B}$ ოჯახის ელემენტი. ასევე, $\varnothing = \{u\,B \mid u \in \varnothing\}$ ეკუთვნის ² $_{A/B}$ ოჯახს.

O2).ვთქვათ $\{u\,B \mid u \in U_i\}_{i=1}^{n} \in$ ² $_{A/B}$. ტოლობიდან

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{u\,B \mid u \in U_i\} = \{u\,B \mid u \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i\}$$

მივიღებთ

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{u\,B \mid u \in U_i\} \in ²_{A/B}\,.$$

O3). ვთქვათ $\{u\,B \mid u \in U_s\}_{s\in S} \in$ ² $_{A/B}$. ტოლობიდან

$$\bigcup_{s\in S}\{u\,B \mid u \in U_s\} = \{u\,B \mid u \in \bigcup_{s\in S} U_s\}$$

გამომდინარეობს, რომ $\bigcup_{s\in S}\{u\,B \mid u \in U_s\} \in$ ² $_{A/B}$.

ახლა ვაჩვენოთ $q:(A,²) \to (A/B, ²_{A/B})$ არის უწყვეტი ასახვა. ყოველი $\{u\,B \mid u \in U\} \in ²_{A/B}$ ელემენტისთვის $q^{-1}\{u\,B \mid u \in U\} \in ²$, ე.ი. q არის უწყვეტი ასახვა.

ვთქვათ $q:(A,²) \to (A/B, «)$ არის უწყვეტი ასახვა. « ოჯახის ნებისმიერი $V = \{u\,B \mid u \in X\}$ ღია ელემენტისთვის

$$q^{-1}V = q^{-1}\{u\,B \mid u \in X\} \in ²\,.$$

აქედან გამომდინარე, $V = \{u\,B \mid u \in X\} \in ²_{A/B}$, ე.ი. $« \le ²_{A/B}$. □

მოვიყვანოთ $q:(A,²) \to (A/B, ²_{A/B})$ ფაქტორ-ასახვის კიდევ ერთი თვისება.

წინადადება 5.1.17. *$q:(A,²) \to (A/B, ²_{A/B})$ ფაქტორ-ასახვა არის ღია ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $U \in ²$. ცხადია, $U\,B$ არის A სივრცის ღია სიმრავლე. $q(U)$ ანასახი არის A/B ფაქტორ-სივრცის ღია სიმრავლე, რადგან მისი წინარესახე

$$q^{-1}(q(U)) = q^{-1}\{u\,B \mid u \in U\} = U\,B$$

არის ღია A სივრცეში. □

წინადადება 5.1.18. *ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, B*

მისი ქვეჯგუფი, ხოლო U *და* V *სიმრავლეები* e *ერთეულის ისეთი მიდამოები* A *სივრცეში, რომ* $V^{-1}V \subset U$ *. მაშინ* $q : A \to A/B$ *ფაქტორ-ასახვა აკმაყოფილებს პირობას* $\overline{q(V)} \subset q(U)$ *.*

დამტკიცება. ვთქვათ A/B ფაქტორ-სივრცის xB ელემენტი ისეთია, რომ $xB \in \overline{q(V)}$. ცხადია, xB ელემენტის $\{vxB \mid v \in V\}$ მიდამო აკმაყოფილებს პირობას $\{vxB \mid v \in V\} \bigcap q(V) \neq \varnothing$. ამიტომ არსებობს ისეთი $v_1 \in V$ ელემენტი, რომ $v_1 xB \in q(V) = \{vB \mid v \in V\}$. აქედან გამომდინარე, არსებობს ისეთი $v_2 \in V$, რომ $v_1 xB = v_2 B$, ანუ

$$xB = v_1^{-1} v_2 B \in \{wB \mid w \in V^{-1}V\} \subset \{uB \mid u \in U\} = q(U) . \square$$

ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო B მისი ქვეჯგუფი. ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის განვმარტოთ ასახვა ${}_a p : A/B \to A/B$. განმარტების თანახმად,

$${}_a p(xB) = (ax)B , \ xB \in A/B .$$

ცხადია, ${}_a p : A/B \to A/B$ არის ურთიერთცალსახა ასახვა A/B სივრცისა A/B სივრცეზე.

შევნიშნოთ, $\{{}_a p \mid a \in A\}$ სიმრავლე არის ჯგუფი კომპოზიციის მიმართ.

ვთქვათ xB , $yB \in A/B$. ცხადია, ${}_{yx^{-1}} p : A/B \to A/B$ ასახვა ისეთია, რომ

$${}_{yx^{-1}} p(xB) = (yx^{-1}x)B = yB .$$

გარდა ამისა, $({}_a p)^{-1} = {}_{a^{-1}} p$. მართლაც, ყოველი $xB \in A/B$ ელემენტისთვის ${}_{a^{-1}} p(xB) = (a^{-1}x)B$. ასევე, $({}_a p)^{-1}(xB) = (a^{-1}x)B$, რადგან ${}_a p(a^{-1}xB) = (aa^{-1}x)B = xB$.

წინადადება 5.1.19. *თუ* A *არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო* B *მისი ქვეჯგუფი, მაშინ* $(A/B , {}^{2}{}_{A/B})$ *სივრცე არის ერთგვაროვანი სივრცე.*

დამტკიცება. როგორც ვნახეთ, ${}_a p : A/B \to A/B$ ასახვა არის ურთიერთცალსახა ასახვა A/B სივრცისა თავისთავზე. ვაჩვენოთ, ${}_a p : A/B \to A/B$ არის ჰომეომორფიზმი. ზემონათქვამიდან გამომდინარე, საკმარისია შევამოწმოთ, რომ ${}_a p$ არის ღია ასახვა. ვთქვათ, $\{uB \mid u \in U\}$ არის A/B სივრცის ღია სიმრავლე. ცხადია, aU არის A სივრცის ღია სიმრავლე. აქედან გამომდინარე,

$${}_a p(\{uB \mid u \in U\}) = \{auB \mid u \in U\} = \{vB \mid v \in aU\}$$

ანასახი არის A/B ფაქტორ-სივრცის ღია სიმრავლე. $\square$

წინადადება 5.1.20. *ვთქვათ* B *არის* A *ტოპოლოგიური ჯგუფის*

ქვეჯგუფი. თუ B არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, მაშინ A/B არის რეგულარული სივრცე, ხოლო თუ A/B არის T_0-სივრცე, მაშინ B არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე, A/B კი რეგულარული სივრცე.

დამტკიცება. ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის aB არის ჩაკეტილი სიმრავლე A სივრცეში. ცხადია, $\bigcup\{xB \mid xB \neq aB\}$ არის ღია A სივრცეში. აქედან გამომდინარე, ყოველი $\{aB\}$ სიმრავლის A/B სივრცეში დამატება არის ღია A/B სიმრავლეში. ამიტომ A/B ფაქტორ-სივრცის ყოველი წერტილი არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ე.ი. A/B სივრცე აკმაყოფილებს T_1-აქსიომას. ამიტომ 5.1.18 წინადადების თანახმად A/B სივრცე არის რეგულარული სივრცე.

ახლა ვთქვათ A/B არის T_0-სივრცე. 5.1.18 წინადადების თანახმად ის აგრეთვე არის T_1- სივრცე. ამიტომ სიმრავლე $\{xB \mid xB \neq B\}$ არის ღია A/B სივრცეში. ამრიგად, $B = A/B \setminus \bigcup\{xB \mid xB \neq B\}$ ქვეჯგუფი არის ჩაკეტილი A სივრცეში. აქედან თავის მხრივ, ზემონათქვამის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ A/B არის რეგულარული სივრცე. □

წინადადება 5.1.21. *ვთქვათ A ტოპოლოგიური ჯგუფი არის კომპაქტური ან ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი, ხოლო B ნებისმიერი ქვეჯგუფი. მაშინ A/B ფაქტორ-სივრცე არის კომპაქტური ან ლოკალურად კომპაქტური სივრცე.*

დამტკიცება. თუ A არის კომპაქტური, მაშინ მისი $q(A)$ ანასახი $q : A \to A/B$ ფაქტორ-ასახვის მიმართ არის კომპაქტური.

ვთქვათ A არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე, ხოლო U ჯგუფის ერთეულის კომპაქტური ჩაკეტვის მქონე მიდამო. ცხადია, $q(U)$ ანასახს აქვს კომპაქტური ჩაკეტვა A/B სივრცეში. A/B სივრცე არის ერთგვაროვანი. ამიტომ ის არის ლოკალურად კომპაქტური. □

წინადადება 5.1.22. *თუ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო B ნორმალური ქვეჯგუფი, მაშინ A/B არის ტოპოლოგიური ჯგუფი.*

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, სრულდება TG3) აქსიომა. ვთქვათ M და N არის A/B ფაქტორ-ჯგუფის ელემენტები. განვიხილოთ $M\,N^{-1}$ ელემენტის რაიმე $\{wB \mid w \in W\}$ მიდამო. ცხადია, არსებობს ისეთი $w \in W$ ელემენტი, რომ $MN^{-1} = wB$. ვთქვათ $n \in N$ არის ნებისმიერი ელემენტი და $m = wn$. ცხადია, $m \in M$ და $w = m\,n^{-1}$. რადგან A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ამიტომ არსებობს m და n ელემენტების ისეთი U და V მიდამოები, რომ $U\,V^{-1} \subset W$. განვიხილოთ M კლასის $\{uB \mid u \in U\}$ მიდამო და N კლასის $\{vB \mid v \in V\}$ მიდამო. შევნიშნოთ, რომ $(uB)(vB)^{-1} = uv^{-1}B$. ცხადია, $uv^{-1}B \in \{wB \mid w \in W\}$, რადგან $uv^{-1} \in UV^{-1} \subset W$.

ამრიგად,

$$\{uB \mid u \in U\} \cdot \{vB \mid v \in V\}^{-1} \subset \{wB \mid w \in W\} . \square$$

A ტოპოლოგიური ჯგუფის A' ტოპოლოგიურ ჯგუფზე $f : A \to A'$ ასახვას ეწოდება ტოპოლოგიური ჯგუფების იზომორფული ასახვა, ან იზომორფიზმი, თუ f არის როგორც ჯგუფების იზომორფული ასახვა, ისე ტოპოლოგიური სივრცეების ჰომეომორფული ასახვა. ხშირად f ასახვას უწოდებენ ტოპოლოგიურ იზომორფიზმს.

თეორემა 5.1.23. *ვთქვათ A და A' არის ტოპოლოგიური ჯგუფები, ხოლო $f : A \to A'$, A ტოპოლოგიური ჯგუფის A' ტოპოლოგიურ ჯგუფზე ღია ჰომომორფიზმის ასახვა. მაშინ $B = \ker f$ არის ნორმალური ქვეჯგუფი და A' ტოპოლოგიური ჯგუფი იზომორფულია A/B ტოპოლოგიური ჯგუფის.*

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ B არის A ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი. ნებისმიერი $x' \in A'$ ელემენტის $M = f^{-1}(x')$ წინარესახე არის A/B ფაქტორ-ჯგუფის მოსაზღვრე კლასი. ვთქვათ $g(x') = M$. განვიხილოთ ამ ფორმულით მოცემული $g : A' \to A/B$ ასახვა. როგორც ცნობილია, $g : A' \to A/B$ არის იზომორფიზმი A' ჯგუფისა A/B ჯგუფზე. ვაჩვენოთ, g ასახვა ამასთანავე არის ჰომეომორფიზმი. ამისთვის თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ g არის უწყვეტი ასახვა. ვთქვათ $a' \in A'$ და $g(a') = N$. დავუშვათ, $\tilde{U}$ არის N ელემენტის რაიმე მიდამო A/B სივრცეში. როგორც ვიცით, $\tilde{U} = \{xB \mid x \in U\}$, სადაც U არის A სივრცის ღია სიმრავლე. ვთქვათ a არის U სიმრავლის ისეთი ელემენტი, რომ $N = aB$. პირობის თანახმად, f არის ღია ასახვა და $f(a) = a'$. ამიტომ არსებობს a' ელემენტის A' სივრცეში ისეთი V' მიდამო, რომ $V' \subset f(U)$. ვაჩვენოთ, $g(V') \subset \tilde{U}$. ყოველი $x' \in V'$ ელემენტისთვის არსებობს ისეთი $x \in U$ ელემენტი, რომ $f(x) = x'$. ამრიგად, $g(x') = xB \in \tilde{U}$ და g ასახვა არის უწყვეტი.

ვთქვათ $N = aB \in A/B$ და $g^{-1}(N) = a'$. დავუშვათ, U' არის a' ელემენტის რაიმე მიდამო. f ასახვა არის უწყვეტი და $f(a) = a'$. ამიტომ არსებობს a ელემენტის ისეთი V მიდამო, რომ $f(V) \subset U'$. განვიხილოთ N ელემენტის $\tilde{V} = \{xB \mid x \in V\}$ მიდამო. რადგან $f(V) \subset U'$, ამიტომ $g^{-1}(\tilde{V}) \subset U'$. ამრიგად, g^{-1} არის უწყვეტი ასახვა. აქედან გამომდინარე, $g : A' \to A/B$ არის იზომორფული ასახვა A' ტოპოლოგიური ჯგუფისა A/B ტოპოლოგიურ ჯგუფზე. $\square$

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 5.1.24. ვთქვათ A და A' არის ტოპოლოგიური ჯგუფები,

ხოლო $f : A \to A'$ არის ღია უწყვეტი ჰომომორფიზმი A ჯგუფისა A' ჯგუფზე. თუ H' არის A' ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი, $H = f^{-1}(H')$ და $B = f^{-1}(e')$, მაშინ A/H, A'/H' და $(A/B)/(H/B)$ ჯგუფები არის ტოპოლოგიურად იზომორფული ჯგუფები.

დამტკიცება. ვთქვათ $q' : A' \to A'/H'$ არის ფაქტორ-ასახვა. როგორც ვიცით, q' არის ღია უწყვეტი ჰომომორფიზმი. ამიტომ $q'f$ ასახვაც არის ღია უწყვეტი ჰომომორფიზმი A ჯგუფისა A'/H' ჯგუფზე და $\ker(q'f) = H$. აქედან გამომდინარე, A'/H' ტოპოლოგიურად იზომორფულია A/H ჯგუფის. შესაბამისობა $x' \to f^{-1}(x')$, $x' \in A'$ ინდუცირებს ტოპოლოგიურ იზომორფიზმს A' და A/B ჯგუფებს შორის. ამ იზომორფიზმის მიმართ H' ქვეჯგუფის ანასახი არის H/B. ცხადია, A'/H' ფაქტორ-ჯგუფი ტოპოლოგიურად იზომორფულია $(A/B)/(H/B)$ ფაქტორ-ჯგუფის. □

შედეგი 5.1.25. *ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. თუ B და C არის მისი ისეთი ნორმალური ქვეჯგუფები, რომ $C \subset B$, მაშინ A/B ჯგუფი ტოპოლოგიურად იზომორფულია $(A/C)/(B/C)$ ჯგუფის.* □

ვთქვათ მოცემულია ტოპოლოგიური ჯგუფების $\{A_s\}_{s\in S}$ ოჯახი. A_s, $s \in S$ ალგებრული ჯგუფების $\prod\limits_{s\in S} A_s$ დეკარტულ ნამრავლზე განვიხილოთ A_s, $s \in S$ ტოპოლოგიური სივრცეების ნამრავლის ტოპოლოგიური სტურქტურა. $\prod\limits_{s\in S} A_s$ ჯგუფს ნამრავლის ტოპოლოგიით ეწოდება A_s, $s \in S$ ტოპოლოგიური ჯგუფების ნამრავლი.

$\prod\limits_{s\in S} A_s$ ალგებრული ჯგუფის $\bigoplus\limits_{s\in S} A_s$ ქვეჯგუფზე განვიხილოთ ქვესივრცის ტოპოლოგიური სტრუქტურა. $\bigoplus\limits_{s\in S} A_s$ ჯგუფს ქვესივრცის ტოპოლოგიით ეწოდება A_s, $s \in S$ ტოპოლოგიური ჯგუფების ჯამი.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 5.1.26. *ტოპოლოგიური ჯგუფების ნამრავლი არის ტოპოლოგიური ჯგუფი.*

დამტკიცება. ვთქვათ (a_s) და (a'_s) არის $\prod\limits_{s\in S} A_s$ ჯგუფის ნებისმიერი ორი ელემენტი. ვთქვათ W არის $(a_s)\cdot(a'_s)$ ნამრავლის ნებისმიერი მიდამო და $\prod\limits_{s\in S} W_s \subset W$ არის $\prod\limits_{s\in S} A_s$ ნამრავლის ბაზისის ისეთი ელემენტი, რომელიც მოიცავს $(a_s)\cdot(a'_s) = (a_s a'_s)$ ელემენტს. ვთქვათ $s \neq s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსებისთვის $W_s = A_s$, ხოლო $s = s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსებისთვის $W_{s_i} \subset A_{s_i}$ არის A_{s_i} სივრცეების ღია ქვესიმრავლეები. ნებისმიერ A_s, $s \in S$ ჯგუფში არსებობს a_s და a'_s ელემენტების ისეთი

U_s და V_s მიდამოები, რომ ნებისმიერი $s \in S$ ინდექსისთვის $U_sV_s \subset W_s$. შევნიშნოთ, რომ $U_{s_i} \subset A_{s_i}$ და $V_{s_i} \subset A_{s_i}$ ყოველი $s = s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსისთვის, ხოლო $U_s = V_s = A_s$ ყოველი $s \neq s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსისთვის. ვთქვათ $U = \prod_{s\in S} U_s$ და $V = \prod_{s\in S} V_s$. ცხადია, $UV \subset W$.

ვთქვათ $(a_s) \in \prod_{s\in S} A_s$ არის ნებისმიერი ელემენტი. განვიხილოთ (a_s) ელემენტის შებრუნებული (a_s^{-1}) ელემენტის A_s, $s \in S$ ჯგუფთა ნამრავლის ბაზისში შემავალი ნებისმიერი $U = \prod_{s\in S} U_s$ მიდამო. ვთქვათ $U_s = A_s$, როცა $s \neq s_1, s_2, ..., s_n$ და $U_{s_i} \subset A_{s_i}$, როცა $s = s_1, s_2, ..., s_n$.

ნებისმიერი s_i, $i = 1, 2, ..., n$ ინდექსისთვის არსებობს a_{s_i} ელემენტის ისეთი V_{s_i} მიდამო, რომ $V_{s_i}^{-1} \subset U_{s_i}$. ვთქვათ ყოველი $s \neq s_i$ ინდექსისთვის $V_s = A_s$. ცხადია, $V = \prod_{s\in S} V_s$ არის ტოპოლოგიურ ჯგუფთა ნამრავლის ბაზისში შემავალი, (a_s) ელემენტის მომცველი მიდამო. შევნიშნოთ, რომ $V^{-1} \subset U$.ამრიგად, $\prod_{s\in S} A_s$ არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. □

შედეგი 5.1.27. $\{A_s\}_{s\in S}$ *ტოპოლოგიურ ჯგუფთა ოჯახის* $\bigoplus_{s\in S} A_s$ *ჯამი არის* $\prod_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფის მკვრივი ქვეჯგუფი.*

დამტკიცება. ცხადია, $\bigoplus_{s\in S} A_s$ არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. ვთქვათ $\prod_{s\in S} U_s$ არის $\prod_{s\in S} A_s$ ტოპოლოგიური ჯგუფის ბაზისის ელემენტი. $s \neq s_1, s_2, ..., s_n$ ინდექსისთვის $U_s = A_s$ და ყოველი $s = s_i$, $i = 1, 2, ..., n$ ინდექსისთვის $U_{s_i} \subseteq A_{s_i}$.

ვთქვათ a_s არის A_s ჯგუფის e_s ერთეული. როცა $s \neq s_1, s_2, ..., s_n$, ხოლო a_{s_i}, $i = 1, 2, ..., n$ არის U_{s_i} ღია სიმრავლეების ფიქსირებული ელემენტები. ცხადია, $(a_s) \in \bigoplus_{s\in S} A_s$ და $(a_s) \in \prod_{s\in S} U_s$. ამრიგად, $\prod_{s\in S} A_s$ ტოპოლოგიური ჯგუფის ბაზისის ნებისმიერი ელემენტის თანაკვეთა $\bigoplus_{s\in S} A_s$ ქვეჯგუფთან არაცარიელია,ე.ი. $\bigoplus_{s\in S} A_s$ არის მკვრივი ქვესიმრავლე. □

შედეგი 5.1.28. *ვთქვათ* $\{A_s\}_{s\in S}$ *არის ტოპოლოგიურ ჯგუფთა ოჯახი. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.*

i). $\prod_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი ბმულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ბმულია* A_s, $s \in S$ *ტოპოლოგიური ჯგუფები.*

ii). $\prod_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი სავსებით რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სავსებით რეგულარულია* A_s, $s \in S$

ტოპოლოგიური ჯგუფები.

iii). $\prod_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი რეგულარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა რეგულარულია* $A_s, s\in S$ *ტოპოლოგიური ჯგუფები.*

iv). $\prod_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი არის* T_i *-სივრცე,* $i=0,1,2$ *, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი* A_s *,* $s\in S$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი არის* T_i *-სივრცე,* $i=0,1,2$ *.*

v). $\prod_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კომპაქტურია ყოველი* A_s *,* $s\in S$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი.*

vi). $\prod_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი* A_s *,* $s\in S$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი ლოკალურად კომპაქტურია და არსებობს ისეთი* $S_0\subset S$ *სასრული სიმრავლე, რომ ყოველი* $s\in S\setminus S_0$ *ინდექსისთვის* A_s *არის კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი.* □

შევნიშნოთ, რომ ნორმალურ ტოპოლოგიურ ჯგუფთა ნამრავლი საზოგადოდ არაა ნორმალური ტოპოლოგიური ჯგუფი.

შედეგი 5.1.29. *ვთქვათ* $\{A_s\}_{s\in S}$ *არის ტოპოლოგიურ ჯგუფთა ოჯახი. სამართლიანია შემდეგი წინადადებები.*

i). $\bigoplus_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი არის* T_0 *-სივრცე (*T_1 *-სივრცე,* T_2 *-სივრცე, რეგულარული სივრცე, სავსებით რეგულარული სივრცე, ნორმალური სივრცე, მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე, სრულყოფილად ნორმალური სივრცე) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი* A_s *,* $s\in S$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი არის* T_0 *-სივრცე (*T_1 *-სივრცე,* T_2 *-სივრცე, რეგულარული სივრცე, სავსებით რეგულარული სივრცე, ნორმალური სივრცე, მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე, სრულყოფილად ნორმალური სივრცე).*

ii). $\bigoplus_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი* A_s *,* $s\in S$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი არის კომპაქტური და* $|S|<\aleph_0$ *.*

iii). $\bigoplus_{s\in S} A_s$ *ტოპოლოგიური ჯგუფი ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი* A_s *,* $s\in S$ *არის ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი.* □

სავარჯიშო 5.1.30. 1).ვთქვათ $f:A\to A'$ არის ტოპოლოგიური ჯგუფების ჰომომორფიზმი. აჩვენეთ, f უწყვეტია მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როცა $e' \in A'$ ერთეულის ყოველი U' მიდამოსთვის A' ჯგუფში არსებობს $e \in A$ ერთეულის A ჯგუფში ისეთი U მიდამო, რომ $f(U) \subset U'$.

2).ვთქვათ B არის A ტოპოლოგიური ჯგუფის ქვეჯგუფი. აჩვენეთ, $w(A/B) \le w(A)$.

3).აჩვენეთ, ტოპოლოგიური ჯგუფის ქვეჯგუფი დისკრეტულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის შეიცავს იზოლირებულ წერტილს.

4).აჩვენეთ, მთელ რიცხვთა ადიციური ტოპოლოგიური ჯგუფი $\mathbb{Z}$ არის $\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ადიციური ტოპოლოგიური ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი.

5).აჩვენეთ, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ტოპოლოგიური ფაქტორ-ჯგუფი ტოპოლოგიურად იზომორფულია S^1 ტოპოლოგიური ჯგუფის.

6).ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო B მისი ჩაკეტილი ქვეჯგუფი. აჩვენეთ, რომ თუ B და A/B არის ბმული, მაშინ A აგრეთვე არის ბმული.

7).აჩვენეთ, თუ A არის კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, $a \in A$ და $B = \{a^n \mid n = 1, 2, \dots\}$, მაშინ $\bar{B}$ არის A ჯგუფის ქვეჯგუფი.

8).ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო B მისი ერთეულის მომცველი ბმულობის კომპონენტა. აჩვენეთ, B არის ჩაკეტილი ნორმალური ქვეჯგუფი.

9).ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო N ერთეულის კომპონენტა. აჩვენეთ, A/N ფაქტორ-ჯგუფის კომპონენტები წარმოადგენს ერთელემენტიან სიმრავლეებს.

10).ვთქვათ, A არის ბმული ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო B მისი ქვეჯგუფი. აჩვენეთ, A/B არის ბმული სივრცე.

5.2. უწყვეტ გარდაქმნათა ჯგუფები

A ტოპოლოგიური ჯგუფის X ტოპოლოგიურ სივრცეზე მოქმედება ეწოდება ¯ $: A \times X \to X$ უწყვეტ ასახვას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

i). A ჯგუფის ნებისმიერი $a, b \in A$ ელემენტისთვის და X სივრცის ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის ¯$(b,$ ¯$(a, x)) =$ ¯(ab, x).

ii). A ჯგუფის e ერთეულისთვის და X სივრცის ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის ¯$(e, x) = x$.

¯ უწყვეტ ასახვას უწოდებენ A ტოპოლოგიური ჯგუფის მოქმედებას X ტოპოლოგიურ სივრცეზე, ხოლო ¯ უწყვეტი ასახვის მქონე X სივრცეს A-სივრცეს. სიმარტივისთვის (a, x) წყვილის ¯(a, x) ანასახს აღვნიშნავთ ax სიმბოლოთი.

ამრიგად, X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება A-სივრცე, თუ

სრულდება პირობები:

i).ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის და $a, b \in A$ ელემენტისათვის

$$a(bx) = (ab)x.$$

ii).ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის და $e \in A$ ერთეულისთვის

$$ex = x\,.$$

X და Y A-სივრცეებს შორის $f : X \to Y$ უწყვეტ ასახვას ეწოდება A-ასახვა, თუ ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისთვის და $x \in X$ წერტილისთვის

$$f(ax) = a\, f(x).$$

წინადადება 5.2.1. *ნებისმიერი $f : X \to Y$ და $g : Y \to Z$ A-ასახვისთვის $g \circ f : X \to Z$ კომპოზიცია არის A-ასახვა.*

დამტკიცება. მართლაც, ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის და $x \in X$ წერტილისთვის

$$(g \circ f)(a\,x) = g(\,f(a\,x)) = g(a\;f(x)) = a\,g(\,f(x)) = a\,(g \circ f)(x)\,.\square$$

ცხადია, $1_X : X \to X$ იგივური ასახვა არის A-ასახვა. მართლაც, ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის და $x \in X$ წერტილისთვის

$$1_X\,(a\,x) = a\,x = a1_X\,(a)\,.$$

ამრიგად, A ჯგუფის უწყვეტი მოქმედების მქონე A-სივრცეები და მათ შორის A-ასახვები ქმნის კატეგორიას. ამ კატეგორიას აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\mathbf{Top_A}$.

A-სივრცის ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის სიმრავლეს

$$A(x) = \{ax \mid a \in A\}$$

ეწოდება x წერტილის ორბიტა, ხოლო სიმრავლეს

$$A_x = \{a \in A \mid ax = x\}$$

A ჯგუფის სტაბილიზატორი x წერტილში.

X სივრცეზე A ჯგუფის მოქმედებას ეწოდება ტრანზიტული, თუ არსებობს მხოლოდ ერთი ორბიტა - მთელი სივრცე.

წინადადება 5.2.2. *თუ A არის კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო X ჰაუსდორფის A-სივრცე, მაშინ A/A_x და $A(x)$ არის ერთმანეთის ჰომეომორფული სივრცეები.*

დამტკიცება. ვთქვათ $f : A/A_x \to A(x)$ არის ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$f(a\,A_x) = ax\,,\;\; x \in X\;,\;\; a \in A\,.$$

A/A_x ფაქტორ-სიმრავლეზე ტოპოლოგიის განმარტების თანახმად f არის უწყვეტი ასახვა.

ვთქვათ $a_1 x = a_2 x$, მაშინ $a_1^{-1} a_2 \in A_x$.აქედან გამომდინარე, $a_1 A_x = a_2 A_x$. ამრიგად, f არის ურთიერთცალსახა ასახვა A/A_x სივრცისა $A(x)$ სივრცეზე.

შევნიშნოთ, რომ A/A_x ფაქტორ-სივრცე, როგორც $q : A \to A/A_x$

ფაქტორ-ასახვის მიმართ A კომპაქტური სივრცის უწყვეტი ანასახი, არის კომპაქტური. $f : A/A_x \to A(x)$ უწყვეტი და ურთიერთცალსახა ასახვა A/A_x კომპაქტური სივრცისა $A(x)$ ჰაუსდორფის სივრცეზე არის ჰომეომორფიზმი. □

ვთქვათ, $B \subset A$ და $Y \subset X$. დავუშვათ,

$$BY = \{bx \mid b \in B, x \in Y\}.$$

Y სიმრავლეს ეწოდება ინვარიანტული, თუ $AY = Y$. ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის განვმარტოთ $\bar{\ }_a : X \to X$ ასახვა. განმარტების თანახმად,

$$\bar{\ }_a(x) = ax = \bar{\ }(ax)\,, \quad x \in X \;.$$

ცხადია, $\bar{\ }_a \circ \bar{\ }_b = \bar{\ }_{ab}$ და $\bar{\ }_e = 1_X$. მართლაც, ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის

$$(\bar{\ }_a \circ \bar{\ }_b)(x) = \bar{\ }_a(\bar{\ }_b(x)) = \bar{\ }_a(bx) = (ab)x$$

და

$$(\bar{\ }_{ab})(x) = (ab)x \,.$$

ასევე ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის

$$\bar{\ }_e(x) = ex = x = 1_X(x) \,.$$

აქედან გამომდინარე, ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის

$$(\bar{\ }_a \circ \bar{\ }_{a^{-1}})(x) = \bar{\ }_{aa^{-1}}(x) = (aa^{-1})x = ex = x = 1_X(x).$$

ამრიგად, $\bar{\ }_a \circ \bar{\ }_{a^{-1}} = 1_X$.

ანალოგიურად შემოწმდება, $\bar{\ }_{a^{-1}} \circ \bar{\ }_a = 1_X$ ტოლობა. ცხადია, $\bar{\ }_a : X \to X$ ასახვა არის

$$X \xrightarrow{\;i\;} \{a\} \times X \xrightarrow{\;\bar{\ }|_{\{a\}\times X}\;} X$$

ასახვების კომპოზიცია, სადაც $X \to \{a\} \times X$ არის ასახვა განსაზღვრული ფორმულით

$$i(x) = (a, x)\,, \quad x \in X \;,$$

ხოლო $\bar{\ }|_{\{a\}\times X} : \{a\} \times X \to X$ არის $\bar{\ } : A \times X \to X$ ასახვის შემოსაზღვრის ასახვა. ცხადია, ყოველი $a \in A$ ელემენტისთვის და $x \in X$ წერტილისთვის

$$(\bar{\ }|_{\{a\}\times X} \circ i)(x) = \bar{\ }|_{\{a\}\times X}((a, x)) = \bar{\ }((a, x)) = \bar{\ }_a(x) \;.$$

აქედან გამომდინარე, $\bar{\ }_a$ და $\bar{\ }_{a^{-1}}$ არის უწყვეტი ასახვები. ზემოთქმულის თანახმად, $\bar{\ }_a : X \to X$ არის ჰომეომორფიზმი.

ვთქვათ $\mathrm{Homeo}(X)$ არის X სივრცის თავისთავზე ყველა ჰომეომორფიზმების ჯგუფი კომპოზიციის ოპერაციით. განვმარტოთ ჰომომორფიზმი $\bar{\ } : A \to \mathrm{Homeo}(X)$. განმარტების თანახმად,

$$\bar{\ }(a) = \bar{\ }_a\,, \; a \in A \,.$$

$\bar{\ }$ ჰომომორფიზმის $\ker \bar{\ }$ ბირთვს ეწოდება $\bar{\ }$ მოქმედების ბირთვი.

ცხადია, $\ker$¯ არის A ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი. ის, ამასთანავე A ჯგუფის ჩაკეტილი ქვესიმრავლეა.

წინადადება 5.2.3. *ვთქვათ* ¯ $: A\times X \to X$ *არის* A *ტოპოლოგიური ჯგუფის მოქმედება* X *ტოპოლოგიურ სივრცეზე. მაშინ სამართლიანია ტოლობა*

$$\ker¯ = \{b \in A \mid bx = x, \forall x \in X\}\,.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $a \in \ker$¯ . ცხადია, ¯$(a) =$ ¯$_a : X \to X$ და ¯$_a$ არის იგივური ასახვა-იგივური ჰომომორფიზმი, ე.ი. ¯$_a(x) = ax = x$ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილისთვის. ამრიგად, $a \in \{b \in A \mid bx = x,\ x \in X\}$. ვთქვათ, პირიქით, $a \in \{b \in A \mid bx = x,\ \forall x \in X\}$. ცხადია, $a \in A$ და $ax = x$ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის. აქედან გამომდინარე, ¯$_a(x) = ax = x$ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის, ე.ი. ¯$_a$ არის იგივური ჰომომორფიზმი. ამრიგად, ¯$(a) =$ ¯$_a$ არის იგივური ჰომომორფიზმი. ეს კი ნიშნავს, რომ $a \in \ker$¯ . □

¯ $: A\times X \to X$ მოქმედებას ეწოდება ეფექტური, თუ $\ker$¯ არის ტრივიალური ქვეჯგუფი.

სამართლიანია შემდეგი წინადადება

წინადადება 5.2.4. *ვთქვათ* ¯ $: A\times X \to X$ *არის* A *ტოპოლოგიური ჯგუფის მოქმედება* X *ტოპოლოგიურ სივრცეზე და* $B = \ker$¯ *. მაშინ არსებობს* A/B *ჯგუფის* ¯$/\ker$¯ $: (A/B)\times X \to X$ *ეფექტური მოქმედება* X *სივრცეზე.*

დამტკიცება. განვმარტოთ ¯$/\ker$¯ $: (A/B)\times X \to X$ ასახვა. განმარტების თანახმად,

$$¯/\ker¯\,(aB, x) = ax\,,\ \ aB \in A/B\,,\ \ x \in X\,.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$¯ = (¯/\ker¯)\circ(q\times 1_X)\,.$$

მართლაც, ყოველი $(a, x) \in A\times X$ წყვილისთვის

$$((¯/\ker¯)\circ(q\times 1_X))(a, x) = (¯/\ker¯)(aB, x) = ax = ¯(a, x).$$

ვაჩვენოთ, რომ ¯$/\ker$¯ არის უწყვეტი ასახვა. როგორც ვიცით, $q : A \to A/B$ არის ღია ასახვა. ცხადია, $q\times 1_X$ ასახვაც არის ღია ასახვა. ნებისმიერი $U \subset X$ ღია სიმრავლისთვის ¯$^{-1}(U)$ წინარესახე არის ღია $A\times X$ სივრცეში. ამიტომ $(q\times 1_X)($¯$^{-1}(U))$ არის ღია $(A/B)\times X$ სივრცეში. შევნიშნოთ, რომ

$$(¯/\ker¯)^{-1}(U) = (q\times 1_X)(¯^{-1}(U)).$$

ამ ტოლობის თანახმად, $($¯$/\ker$¯$)^{-1}(U)$ არის ღია სიმრავლე. ცხადია, განმარტებული მოქმედება არის ეფექტური. □

წინადადება 5.2.5. *თუ* A *არის კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ* X *ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეზე* ¯ $: A\times X \to X$ *მოქმედება არის*

ჩაკეტილი ასახვა.

დამტკიცება. ვთქვათ $F \subset A \times X$ არის ჩაკეტილი სიმრავლე და $y \in \overline{{}^{-}(F)}$. ცხადია, F სიმრავლეში არსებობს ისეთი $(a_{\sim}, x_{\sim})$, $\sim \in \mathrm{A}$ ბადე, რომ ${}^{-}(a_{\sim}, x_{\sim}) = a_{\sim}\, x_{\sim}$, $\sim \in \mathrm{A}$ კრებადია y წერტილისკენ. რადგან A არის კომპაქტური, ამიტომ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $a_{\sim}$ კრებადია A ჯგუფის რომელიმე a ელემენტისკენ. შევნიშნოთ, რომ $x_{\sim} = {}^{-}(a_{\sim}^{-1}, a_{\sim}\, x_{\sim})$ კრებადია ${}^{-}(a^{-1}, y) = a^{-1}y$ ელემენტისკენ. რადგან F არის ჩაკეტილი სიმრავლე, ამიტომ $\{(a_{\sim}, x_{\sim})\}$ ბადე კრებადია $(a, a^{-1}\, y) \in F$ ელემენტისკენ. აქედან გამომდინარე, $y = {}^{-}(a, a^{-1}y) \in {}^{-}(F)$. □

შედეგი 5.2.6. *თუ A არის კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო X ჰაუსდორფის A-სივრცე, მაშინ ყოველი $Y \subset X$ ჩაკეტილი სიმრავლისთვის AY არის ჩაკეტილი სიმრავლე X სივრცეში. გარდა ამისა, თუ Y არის კომპაქტური სიმრავლე, მაშინ AY არის კომპაქტური სიმრავლე.* □

წინადადება 5.2.7. *ნებისმიერი A-სივრცის ორი ორბიტა არის ან ტოლი ან თანაუკვეთი სიმრავლეები.*

დამტკიცება. ვთქვათ $A(x)$ და $A(y)$ არის X სივრცის ნებისმიერი ორი ორბიტა. დავუშვათ $ax = by$, სადაც $ax \in A(x)$ და $by \in A(y)$. ყოველი $a' \in A$ ელემენტისთვის

$$a'x = (a'a^{-1}a)x = (a'a^{-1})(ax) = (a'a^{-1})(by) = (a'a^{-1}b)y .$$

ამრიგად, $a'x \in A(y)$, ე.ი. $A(x) \subset A(y)$.

ანალოგიურად შემოწმდება $A(y) \subset A(x)$ ჩართვა. მართლაც, ვთქვათ, $a' \in A$. ტოლობიდან

$$a'y = (a'b^{-1}b)y = (a'b^{-1})(by) = (a'b^{-1})(ax) = a'(b^{-1}a)x = (a'b^{-1}a)x$$

მივიღებთ $a'y \in A(x)$, ე.ი. $A(y) \subset A(x)$.

შემოწმებული ჩართვებიდან გამომდინარეობს $A(x) = A(y)$ ტოლობა.

ამრიგად, თუ ორ ორბიტას გააჩნია საერთო წერტილი, მაშინ ისინი ერთმანეთს ემთხვევა. □

X/A სიმბოლოთი აღვნიშნოთ სიმრავლე, რომლის ელემენტებია X A-სივრცის ორბიტები. ვთქვათ $q : X \to X/A$ არის ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$q(x) = A(x) ,\ x \in X .$$

X/A სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ტოპოლოგიური სტრუქტურა. ვიტყვით, რომ $U \subset X/A$ არის ღია სიმრავლე, თუ $q^{-1}(U)$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე. ამრიგად, X/A სივრცის წერტილებად აღიქმება $A(x)$ ორბიტები.

წინადადება 5.2.8. *ნებისმიერი* X A *-სივრცისთვის* $q : X \to X/A$ *ფაქტორ-ასახვა არის ღია ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ $U \subset X$ არის X სივრცის ღია სიმრავლე. განვიხილოთ $AU = \bigcup\limits_{a \in A} aU$ სიმრავლე. შევნიშნოთ, $aU = \bar{\ }_a(U)$. ამიტომ aU, როგორც $\bar{\ }_a$ ჰომომორფიზმის მიმართ U სიმრავლის ანასახი, არის ღია სიმრავლე.

შევნიშნოთ, $q^{-1}(q(U)) = AU$. ამიტომ $q(U)$ არის X/A ფაქტორ-სივრცის ღია სიმრავლე. □

წინადადება 5.2.9. *თუ* X *არის* A *კომპაქტური ჯგუფის მოქმედების მქონე ჰაუსდორფის სივრცე, მაშინ* $q : X \to X/A$ *ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა.*

დამტკიცება. ვთქვათ F არის X სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. ცხადია, AF არის ჩაკეტილი სიმრავლე. ამიტომ $AF = q^{-1}(q(F))$ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $q(F)$ არის X/A ფაქტორ-სივრცის ჩაკეტილი სიმრავლე. ამრიგად, q ფაქტორ-ასახვა არის ჩაკეტილი ასახვა. □

წინადადება 5.2.10. *თუ* X *არის* A *კომპაქტური ჯგუფის მოქმედების მქონე ჰაუსდორფის სივრცე, მაშინ* X/A *ორბიტების სივრცე არის ჰაუსდორფის სივრცე.*

დამტკიცება. ვთქვათ $A(x)$ და $A(y)$ არის X/A ორბიტების სივრცის ორი განსხვავებული წერტილი. ცხადია, $a \to (a, y)$, $a \in A$ შესაბამისობა, ინდუცირებს $A \to A \times \{y\}$ უწყვეტ ასახვას. აქედან გამომდინარე, $A(y)$ არის კომპაქტური სიმრავლე. ვინაიდან ჰაუსდორფის სივრცის ორი თანაუკვეთი კომპაქტური სიმრავლე განცალებადია ღია სიმრავლეებით, ამიტომ არსებობს x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ $\bar{U} \bigcap A(y) = \varnothing$. შევნიშნოთ, რომ $q(y) \notin q(\bar{U})$. აქედან გამომდინარე, $q(U) \bigcap (X/A \setminus q(\bar{U})) = \varnothing$. ამრიგად, $q(U)$ და $X/A \setminus q(\bar{U})$ არის თანაუკვეთი ღია სიმრავლეები და ისინი ერთმანეთისგან განაცალებს $A(x)$ და $A(y)$ ორბიტებს, როგორც X/A ორბიტების სივრცის წერტილებს. □

ვიტყვით, რომ $f : X \to Y$ უწყვეტი ასახვა საკუთრივია, თუ Y სივრცის ყოველი C კომპაქტური ქვესიმრავლის წინარესახე არის X სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლე.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე წინადადება.

წინადადება 5.2.11. $f : X \to Y$ *ჩაკეტილი ასახვა არის საკუთრივი ასახვა, თუ* Y *სივრცის ყოველი* y *წერტილის წინარესახე არის კომპაქტური.*

დამტკიცება. ვთქვათ $C \subset Y$ არის კომპაქტური სიმრავლე, ხოლო

$\sim=\{U_s\}_{s\in S}$ არის $f^{-1}(C)$ წინარესახის ნებისმიერი ღია დაფარვა. ყოველი $y\in C$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი $S_y\subset S$ სასრული სიმრავლე, რომ $\bigcup\limits_{s\in S_y}U_s\supset f^{-1}(y)$. ვთქვათ $U_y=\bigcup\limits_{s\in S_y}U_s$. განვიხილოთ ღია სიმრავლე $V_y=Y\setminus f(X\setminus U_y)$. ცხადია, $y\in V_y$ და $f^{-1}(V_y)\subset U_y$. ამრიგად, მივიღეთ ღია სიმრავლეთა ისეთი $\{V_y\}_{y\in C}$ ოჯახი, რომ $\bigcup\limits_{y\in C}V_y\supset C$. რადგან C არის კომპაქტური სიმრავლე, ამიტომ არსებობს მისი $\{V_{y_i}\}_{i=1}^{n}$ სასრული ქვედაფარვა, ე.ი. $C\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}V_{y_i}$.

შევნიშნოთ, რომ

$$f^{-1}(C)\subset\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(V_{y_i})\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_{y_i}=\bigcup_{i=1}^{n}(\bigcup_{s\in S_{y_i}}U_s).$$

ცხადია, $|\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_{y_i}|<\aleph_0$. ამრიგად, $f^{-1}(C)$ არის კომპაქტური სიმრავლე. □

წინადადება 5.2.12. *თუ X არის A კომპაქტური ჯგუფის მოქმედების მქონე ჰაუსდორფის სივრცე, მაშინ $q:X\to X/A$ ფაქტორ-ასახვა არის საკუთრივი ასახვა.*

დამტკიცება. 5.2.9 წინადადების თანახმად, q არის ჩაკეტილი ასახვა, ხოლო X/A სივრცის ყოველი ელემენტის წინარესახე კომპაქტური ორბიტა. 5.2.11 წინადადების თანახმად, q ფაქტორ-ასახვა არის საკუთრივი ასახვა. □

5.2.10 და 5.2.12 წინადადებებიდან გამომდინარეობს

შედეგი 5.2.13. *X ჰაუსდორფის A-სივრცე კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X/A ორბიტების სივრცე კომპაქტურია.* □

შედეგი 5.2.14. *X ჰაუსდორფის A-სივრცე ლოკალურად კომპაქტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X/A არის ლოკალურად კომპაქტური.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე და $y\in X/A$. ცხადია, y არის რაიმე x წერტილის ანასახი. $x\in X$ წერტილისთვის არსებობს ისეთი U მიდამო, რომ $\bar{U}$ არის კომპაქტური სიმრავლე. ცხადია, $y=q(x)\in q(U)\subset q(\bar{U})$. ამიტომ $q(U)$ არის y წერტილის მიდამო. შევნიშნოთ, რომ $q(\bar{U})$ არის კომპაქტური სიმრავლე და $\overline{q(U)}\subset q(\bar{U})$. ამრიგად, $\overline{q(U)}$ არის $y=q(x)$ წერტილის კომპაქტური მიდამო.

ვთქვათ X/A არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე, $x\in X$ და U არის $y=q(x)$ წერტილის ისეთი მიდამო, რომ $\bar{U}$ არის კომპაქტური. ცხადია, $q^{-1}(U)$ არის x წერტილის მიდამო. შევნიშნოთ, რომ

$\overline{q^{-1}(U)} \subset q^{-1}(\bar{U})$. რადგან q ასახვა არის საკუთრივი, ამიტომ $q^{-1}(\bar{U})$ წინარესახე არის კომპაქტური. ასევე კომპაქტური იქნება მისი $\overline{q^{-1}(U)}$ ჩაკეტილი ქვესიმრავლე . ამრიგად, X არის ლოკალურად კომპაქტური სივრცე. □

სავარჯიშო 5.2.15. 1).ვთქვათ A არის კომპაქტური ჯგუფი, ხოლო X A-სივრცე. აჩვენეთ, ორბიტის ნებისმიერი მიდამო მოიცავს ამ ორბიტის ინვარიანტულ მიდამოს.

2).ვთქვათ X არის A-სივრცე და $Y \subset X$. განვიხილოთ სიმრავლე $A_Y = \{a \mid a \in A, ay = y, \forall y \in Y\}$. აჩვენეთ, თუ $Y \subset Z$, მაშინ $A_Y \supset A_Z$.

3).აჩვენეთ, თუ $f : X \to Y$ არის A-სივრცეთა A-ასახვა, მაშინ $A_x \subset A_{f(x)}$.

4).ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, ხოლო $\{X_\sim\}_{\sim\in A}$ A-სივრცეთა ოჯახი. აჩვენეთ, $\prod_{\sim\in A} X_\sim$ ნამრავლი არის A-სივრცე.

5).ვთქვათ A არის ტოპოლოგიური ჯგუფი, B ნორმალური ქვეჯგუფი, ხოლო X A-სივრცე. აჩვენეთ, $\bar{\ } : A/B \times X/B \to X/B$ ასახვა, განსაზღვრული ფორმულით

$$\bar{\ }(aB, B(x)) = B(ax)\,,$$

არის A/B ჯგუფის მოქმედება X/B ორბიტების სივრცეზე.

6).ვთქვათ X არის A-სივრცე, ხოლო $f : A' \to A$ ტოპოლოგიური ჯგუფების უწყვეტი ჰომომორფიზმი. აჩვენეთ, $\bar{\ } : A' \times X \to X$ ასახვა, მოცემული ფორმულით

$$\bar{\ }(a', x) = f(a')x\,,\quad a' \in A'\,,\quad x \in X\,,$$

არის A' ჯგუფის მოქმედება X სივრცეზე.

7).აჩვენეთ, შესაბამისობა

$$(a, t) \to ta^{-1}\,,\quad a, t \in A$$

ინდუცირებს A ჯგუფის თავისთავზე მოქმედებას.

8).ვთქვათ X არის კომპაქტური A-სივრცე, Y მეტრიკული სივრცე, ხოლო $\mathcal{C}(X,Y)$ ყველა $f : X \to Y$ უწყვეტი ასახვების სიმრავლე მეტრიკით

$$^\circ(f, f') = \sup\{d(f(x), f'(x)) \mid x \in X\}.$$

აჩვენეთ, არსებობს A ჯგუფის უწყვეტი მოქმედება $\mathcal{C}(X,Y)$ სივრცეზე. მითითება: $(a\,f)(x) = f(a^{-1}x)$, $a \in A$, $x \in X$, $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

9). ვთქვათ X არის კომპლექსურ რიცხვთა სივრცე, ხოლო A ერთის ტოლი მოდულის მქონე ყველა კომპლექსური რიცხვების ჯგუფი S^1. აჩვენეთ, $\mathcal{C}(S^1, X)$ არის A-სივრცე.

მითითება: $(a\,f)(s) = f(sa)$, $s \in S^1$, $a \in S^1$, $f \in \mathcal{C}(S^1, X)$.

10).აჩვენეთ, A კომპაქტური ჯგუფის მოქმედების მქონე X ტიხონოვის სივრცეს გააჩნია A ჯგუფის მოქმედების მქონე ისეთი cX კომპაქტიფიკაცია, რომ $w(cX) = w(X)$.

ლიტერატურა

[An]. S. A. Antonian, Equivariant embeddings into G-AR's, Glasnik Math., 22, 1987, 503–533.
[Br1].G.Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press,1972.
[H-K]. E. Hewitt and A. R.Kenneth, Abstract Harmonic Analysis, Springer, 1994.
[Mor]. S. A. Morris, Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups, Cambridge University Press, 1977.
[P]. R. Palais, The classification of G-spaces, Memoirs of the AMS, 36,1960.
[Po]. L. S. Pontryagin, Continuous groups, Nauka, Moscow, 1973.

ლიტერატურა

[A]. I. T. Adamson, A General Topology Workbook, Birkhäuser, 1995.
[Aa-N]. J. M. Aarts and T. Nishiura, Dimension and extensions. North-Holland Math. Library, Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1993.
[Al-P]. P. Alexandroff and B.A. Pasynkov, Introduction to Dimension Theory, Moscow, 1973.
[An]. S. A. Antonian, Equivariant embeddings into G-AR's, Glasnik Math., 22, 1987, 503–533.
[Ar-P]. A.V. Arkhangel'skii and V.I. Ponomarev, Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises, Springer, 1984.
[Art-S]. J. Arthur and Jr. Seebach, Counterexamples In Topology, Dover Publications, 1995.
[B]. V.H. Baladze, On Functions of dimensional type, Trudy Tbilisskogo Mathematicheskogo Instituta, 68, 1982, 5-41.
[Ba-M]. A.D. Bates and A. Maxwell, DNA Topology, Oxford University Press, 2005.
[Bo-Bl]. B. Booss and D.D. Bleecker, Topology and Analysis, Springer, 1985.
[Bol-E].V.G. Boltyanskii and V.A. Efremovich, Intuitive Combinatorial Topology, Springer-Verlag, New York, 2001.
[Bor]. K. C. Border, Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, Cambridge University Press, 1989.
[Bo]. N. Bourbaki, General Topology.Springer,1995.
[Br]. G. E. Bredon, Topology and Geometry, Springer-Verlag, New York, 2002.
[Br1].G.Bredon, Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press,1972.
[Bu-D]. I. Bucur and A. Deleanu, Introduction to the Theory of Categories and Functions, London-New York-Sydney, 1968.
[C]. G.Chogoshvili, About the basic concepts of General Topology(Georgian), Tbilisi State university, Tbilisi, 1974.
[Co].R. A. Conover, A First Course in Topology: An Introduction to Mathematical Thinking, Dover Publications, 2014.
[Con]. J. B. Conway, A Course in Point Set Topology, Springer, 2014.
[Cr]. F. H. Croom, Principles of Topology, Dover Publications, 2016.
[Cro]. M. D. Crossley, Essential Topology,Springer, 2010.
[D]. J. Dixmier, General Topology. Springer, 1984.
[Do]. A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.
[Du].J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, 1966.
[E-S]. S. Eilenberg and N. Steenrod, Foundations Of Algebraic Topology, Princeton University Press, 1952.
[En]. R. Engelking, General Topology, PWN, Warszawa, 1977.
[En1]. R.Engelking, Dimension theory, North-Holland Publishing Company, 1978.
[F]. L. Fuchs, Infinite Abelian Groups, Academic Press, 1973.
[G].S.A. Gaal, Point Set Topology, Dover Publications, 2009.

[H-K]. Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross., Abstract Harmonic Analysis, I. Springer, 1994.
[Hu-W]. W.Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton University Press, 1941.
[J]. K. Jänich, Topology, Springer,1984.
[Je]. T. Jech, Set Theory, Springer, 2006.
[Ke]. J. L. Kelley, General Topology , Springer, 1975.
[Ku]. K. Kuratowski, Topology: Volume I, Academic Press, 1966.
[Ku1]. K. Kuratowski, Topology: Volume II, Academic Press, 1968.
[L]. S. Leng, Algebra, Springer, 2005.
[Li].S. Lipschutz, Theory and Problems of General Topology, McGraw Hill,1965.
[M].S. Mac Lane, Homology, Academic Press, 1963.
[M1]. S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, Springer-Verlag, New York,1971.
[Md-Ka-U-Kh]. L.Mdzinarishvili, N. Kachakhidze, D. Ugulava and N. Khomeriki, Discrete Mathemathics, Georgian Technical University, 2012.
[Me-S]. R. E. Merrifield and H. E. Simmons, Topological Methods in Chemistry, Wiley-Interscience, 1989.
[Mo-Z]. D. Montgomery and L. Zippin, Topological Transformation Groups, Interscience, 1955.
[Mor]. S. A. Morris, Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups, Cambridge University Press, 1977.
[Mu].J. R. Munkres, Topology, Prentice Hall, Incorporated, 2000.
[N]. K. Nagami, Dimension Theory, Academic Press, 1970.
[Na]. J. Nagata, Modern General Topology, North Holland,1985.
[Na1]. J. Nagata, Modern Dimension Theory, Heldermann-Verlag, Berlin, 1983.
[Nak].M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Second Edition, CRC, 2003.
[P]. R. Palais, The classification of G-spaces, Memoirs of the AMS, 36,1960.
[Po]. L. S. Pontryagin, Continuous groups, Nauka, Moscow, 1973.
[Sa]. K. Sakai, Geometric Aspects of General Topology,Springer, 2013.
[Sc-Le]. A. S. Schwarz and S. Levy, Topology for Physicists, Springer, 2002.
[Se-T].H.Seifert and W.Threlfall, A Textbook of Topology, Academic Press, 1980.
[Ser-Sc]. J. P. Serre and L. L. Scott, Linear Representations of Finite Groups, Springer, 1996.
[Si].W. Sierpinski, General Topology. Dover Publications, 2012.
[Sm]. Yu. M. Smirnov, On the Dimensions of Remainders of Compactifications of Proximity and Topological Spaces II, American Mathematical Society, Series 2, 84, 1969, 197-251.
[Sp]. E.Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill,1966.
[St]. M. Stroppel, Locally Compact Groups, European Mathematical Society, 2006.
[Z].A. J.Zomorodian, Topology for Computing, Cambridge University Press 2009.

ინდექსი

ა

აბელური ჯგუფი 32
აბელური ჯგუფების და ჰომომორფიზმების კატეგორია 43
ადიციური ჯგუფი 32
ავტომორფიზმი 35
ალგებრული ოპერაცია 31
ალეფ-ნული $\aleph_0$ 28
ალექსანდროვის ერთწერტილიანი კომპაქტიფიკაცია 173
ალექსანდროვის კუბი 175
ამორჩევის აქსიომა 25
ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცე 54
არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე 11
ასახვა 17
ასახვათა დეკარტული ნამრავლი 21
ასახვათა დიაგონალური ნამრავლი 22
ასახვათა კომბინირებული ჯამი 23
ასახვების კომპოზიცია 18
ასახვის გრაფიკი 17
ასახვის ცილინდრი 110
ასოციაციური ალგებრული ოპერაცია 31

ბ

ბადის ზღვარი 72
ბადის ყველა ზღვრების სიმრავლე 72
ბერშტეინ-შრიოდერის თეორემა 27
ბიექციური ასახვა 18
ბირთვის ოპერატორი 61
ბმული სივრცე 196
ბმული სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია 202
ბმული ქვესიმრავლე 197
ბმულობის კომპონენტა 200
ბრაუერ-ჩეხის განზომილება 212

გ

გამრავლების ალგებრული ოპერაცია 32
n -განზომილებიანი კუბი 14
განზომილების ფუნქცია 211, 212, 215, 216,217,218
განცალების აქსიომები 115
გზათა კომპოზიცია 203

დ

დაგროვების წერტილი 70
დადებით მთელ რიცხვთა, ანუ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე 11
დალაგების მიმართება 23
დალაგებული სიმრავლე 23
დაფარვითი განზომილება 216
დაფარვის გაჭიმვა 219,220
დაფარვის ვარსკვლავურად ჩაწერილობა 227
დაფარვის ზომა 233
დაფარვის ღია გაჭიმვა 220
დაფარვის ღია შეკუმშვა 219
დაფარვის ჩაკეტილი შეკუმშვა 219
დაფარვის ჯერადობა 215,216
დაცილებადი სიმრავლეები 132
დე მორგანის ფორმულები 16
დიდ ინდუქციური

განზომილება 212
დისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცე 54

ე

ევკლიდური სიბრტყე 13
ევკლიდური სივრცე 13
ევკლიდური სივრცის ბუნებრივი ტოპოლოგიური სტრუქტურა 55
ელემენტების კომპოზიცია 31
ელემენტის ექვივალენტობის კლასი 20
ენდომორფიზმი 35
ეპიმორფიზმი 34,35
ერთგვაროვანი სივრცე 245
ექვივალენტობის მიმართება 20
ექვივალენტური მეტრიკები 179
ექვივალენტური სიმრავლეები 25

ვ

ვედენისოვის თეორემა 131

ზ

ზარელუა-პასინკოვის თეორემა 231
ზორგენფრეის ხაზი 121
ზუსტი მიმდევრობა 36

თ

თავისუფალი ჯგუფი 39
თავისუფალი ჯგუფის ბაზისი 39
თანაბარი მეტრიკა 191
თანაბრად კრებადი მიმდევრობა 88,89,192
თვლადბაზისიანი სივრცე 59
თვლადი სიმრავლე 25
თვლადი ჯამის თეორემა 224
თვლადობის მეორე აქსიომა 58
თვლადობის პირველი აქსიომა 58

ი

იგივური ასახვა 17
იგივური ფუნქტორი 45
იზოლირებული წერტილი 71
იზომეტრული მეტრიკული სივრცეები 190
იზომეტრული ჩადგმა 194
იზომორფიზმი 34,35, 44
ინდექსთა სიმრავლე 14
ინექციური ასახვა 18
ინტერვალი 199
ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე 11

კ

კანტორის თეორემა 25
კარდინალური რიცხვების ნამრავლი 29
კარდინალური რიცხვების სადარობა 26,28
კარდინალური რიცხვების ხარისხი 29
კარდინალური რიცხვების ჯამი 28,29
კატეგორია 42
კატეგორიის იგივური მორფიზმი 42
კატეგორიის მორფიზმები 41
კატეგორიის ობიექტები 41
კატეგორიის ობიექტთა ნამრავლი 48
კატეგორიის ობიექტთა ჯამი 48
კატეგორიის ფიქსირებულ ობიექტში მორფიზმების კატეგორია 50
კლასი 16, 17
კომპაქტური გაფართოება 167
კომპაქტიფიკაცია 168
კომპაქტიფიკაციათა

დალაგებული სიმრავლე 169
კომპაქტიფიკაციათა ოჯახი 169
კომპაქტიფიკაციათა სიმრავლის უდიდესი ელემენტი 171,172
კომპაქტიფიკაციების განზომილებები 230,231
კომპაქტიფიკაციის ექვივალენტობის კლასი 169
კომპაქტიფიკაციის თეორემა 230
კომპაქტური სივრცე 146
კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი 242
კომუტაციური ალგებრული ოპერაცია 31
კონტინუმი 28
კოფინალური ქვესიმრავლე 24
კოფუნქტორი 44
კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა 182
კოშის მიმდევრობა 190
კურატოვსკი-ცორნის ლემა 25

ლ

ლებეგის თეორემა 187
ლებეგის რიცხვი 188
ლემა ხუთი ჰომომორფიზმის შესახებ 37
ლოკალურად კომპაქტური სივრცე 160
ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი 242
ლოკალურად სასრული ოჯახი 66

მ

მარდეჟიჩის თეორემა 228
მარცხენა მოსაზღვრე კლასი 35
მარცხნიდან ღია სეგმენტი 11
მარჯვენა მოსაზღვრე კლასი 35
მარჯვნიდან ღია სეგმენტი 11
მაქსიმალური ელემენტი 24
მებიუსის ფურცელი 108
მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცე 131
მემკვიდრეობით ნორმალური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია133,134
მენგერ-ურისონის განზომილება 211
მეტრიზებადი სივრცე 179
მეტრიზებადი სივრცეების კატეგორია 190
მეტრიკა სიმრავლეზე 176
მეტრიკულ სივრცეთა ნამრავლი 189
მეტრიკულ სივრცეთა ჯამი 188
მეტრიკულ სივრცეში ასახვათა სივრცეები 192
მეტრიკული სივრცე 176
მეტრიკული სივრცის წერტილთა კრებადობა 179
მთელ რიცხვთა სიმრავლე 11
მიერთების სივრცე 108
მივიწყების ფუნქტორი 45
მიმართება სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლზე 17
მიმართება სიმრავლის ელემენტებს შორის 17
მიმართული სიმრავლე 24
მინიმალური ელემენტი 24
მკვრივი ქვესიმრავლე 71
მოკლე ზუსტი მიმდევრობა 36
მონიშნულწერტილიანი სიმრავლე 18
მონიშნულწერტილიანი სიმრავლეების ასახვა 18
მონიშნულწერტილიანი სიმრავლეების და მათ შორის ასახვების კატეგორია 42
მონომორფიზმი 34
მორფიზმის მარცხენა

შებრუნებული 44
მორფიზმის მარჯვენა
შებრუნებული 44
მოცემული განზომილების და
წონის უნივერსალური სივრცე
231
მუდმივი ფუნქტორი 45
მულტიპლიკაციური ჯგუფი 32
მცირე ინდუქციური
განზომილება 211

ნ
ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე 11
ნამდვილ რიცხვთა ღერძის
ბუნებრივი ტოპოლოგიური
სტრუქტურა 55
ნებისმიერი კატეგორიის
მორფიზმების კატეგორია 43
ნეიტრალური ელემენტი 31
ნემიცკის სივრცე 93
ნიოტერის თეორემა 37
ნორმალური სივრცე 122
ნორმალური სივრცეების და
უწყვეტი ასახვების კატეგორია
133
ნორმალური ქვეჯგუფი 35

ო
ობიექტების იზომორფიზმი 44

პ
პარაკომპაქტური სივრცე 165
პერიოდული ჯგუფი 34
პროექციის ასახვა 22

რ
რაციონალურ რიცხვთა
სიმრავლე 11
რეგულარული სივრცე 118,119
რეგულარული სივრცეების და
უწყვეტი ასახვების კატეგორია
133
რეტრაქტი 90
რეტრაქცია 90

ს
სავსებით განცალებადი
ქვესიმრავლეები 127
სავსებით დალაგებული
სიმრავლე 23
სავსებით რეგულარული სივრცე
120
სავსებით რეგულარული
სივრცეების და უწყვეტი
ასახვების კატეგორია 133
საზღვრის წერტილი 69
საკუთრივი ასახვა 262
სასრული სიმრავლეების და
ასახვების კატეგორია 42
სასრული ტოპოლოგიის მქონე
ტოპოლოგიური სივრცე 57
სასრული ხასიათის თვისება
24,25
სასრული ჯგუფი 33
სასრულოდ წარმოქმნილი
ჯგუფი 34
სეპარაბელური სივრცე 72
სიბრტყის პროექცია 22,84
სივრცეზე ჯგუფის მოქმედება
257
სივრცეთა კლასის მოდულით
დაფარვითი განზომილება 218
სივრცეთა კლასის მოდულით
დიდი ინდუქციური
განზომილება 217
სივრცეთა კლასის მოდულით
მცირე ინდუქციური
განზომილება 217
სივრცეთა ნამრავლის ბაზისი
100,101
სივრცის ბადე 72

სივრცის გასრულება 195
სივრცის თავისთავზე ჰომეომორფიზმების ჯგუფი 259
სივრცის ორბიტების სიმრავლე 261
სივრცის სიმკვრივე 71,72
სივრცის ტოპოლოგიური ტიპი 75
სიმეტრიული ელემენტი 31
სიმეტრიული ქვესიმრავლე 246
სიმრავლე 11
სიმრავლეების და ასახვების კატეგორია 42
სიმრავლეების და ინექციური ასახვების კატეგორია 43
სიმრავლეების და სურექციური ასახვების კატეგორია 43
სიმრავლეთა გაერთიანება 12,13,14
სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი 12,13,14
სიმრავლეთა თანაკვეთა 12,13,14
სიმრავლეთა ინდექსირებული ოჯახი 14
სიმრავლეთა ოჯახი 14
სიმრავლეთა სხვაობა 12
სიმრავლეთა ტოლობა 11
სიმრავლის ანასახი 17,18
სიმრავლის ბირთვი 60
სიმრავლის დაფარვა 17
სიმრავლის დაყოფა 17
სიმრავლის დიამეტრი 177
სიმრავლის ინდექსი 14
სიმრავლის კარდინალური რიცხვი 27
სიმრავლის მაქსიმალური ელემენტი 24
სიმრავლის მინიმალური ელემენტი 24
სიმრავლის საზღვარი 68
სიმრავლის ქვესიმრავლე 11
სიმრავლის ჩაკეტვა 64
სიმრავლის წინარესახე 18
სკლიარენკოს თეორემა 230
სრული მეტრიკული სივრცე 190
სრული ქვეკატეგორია 44
სრულყოფილად ნორმალური სივრცე 130
სრულყოფილად ნორმალური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია 134
სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაცია 172
სურექციური ასახვა 18
სუსტი ტოპოლოგიური სტრუქტურა 57

ტ

ტეიხმიულერი-ტიუკის ლემა 25
ტიტცე-ურისონის თეორემა 124
ტიხონოვის თეორემა 153
ტიხონოვის კუბი 158
ტიხონოვის სივრცე 120
ტოლი ასახვები 17
ტოლსიმძლავრიანი სიმრავლეები 25
ტოპოლოგიურ სივრცეთა ნამრავლი 100,101
ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილების ასახვა 111
ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია 111
ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილი 111
ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი 98
ტოპოლოგიურ სტრუქტურათა დალაგების მიმართება 57

ტოპოლოგიურად ჩაკეტილი კლასი 217
ტოპოლოგიური ინვარიანტი 84
ტოპოლოგიური სივრცე 53
ტოპოლოგიური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია 74
ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი 58
ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი წერტილში 58
ტოპოლოგიური სივრცის გზა 203
ტოპოლოგიური სივრცის მახასიათებელი 58
ტოპოლოგიური სივრცის მახასიათებელი წერტილში 58
ტოპოლოგიური სივრცის მიდამოთა სისტემა 60
ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე 56
ტოპოლოგიური სივრცის წინარებაზისი 58
ტოპოლოგიური სივრცის წონა 58
ტოპოლოგიური სტრუქტურა 53
ტოპოლოგიური სტრუქტურა მეტრიკულ სივრცეზე 178
ტოპოლოგიური სტრუქტურა ტოპოლოგიური ჯგუფის ფაქტორ-სიმრავლეზე 249
ტოპოლოგიური სტრუქტურების შემოტანის მეთოდები 91
ტოპოლოგიური ჯგუფების და მათ შორის უწყვეტი ჰომომორფიზმების კატეგორია 242
ტოპოლოგიური ჯგუფების იზომორფიზმი 253
ტოპოლოგიური ჯგუფების ნამრავლი 254
ტოპოლოგიური ჯგუფების ჯამი 254
ტოპოლოგიური ჯგუფი 241
ტოპოლოგიური ჯგუფის მკვრივი ქვეჯგუფი 255
ტოპოლოგიური ჯგუფის ნორმალური გამყოფი 252
ტოპოლოგიური ჯგუფის ფაქტორ-ასახვა 249
ტოპოლოგიური ჯგუფის ქვეჯგუფი 242
ტორი 102
ტრანზიტული მოქმედება 258
ტრივიალური ქვეჯგუფი 33

უ

ურისონის ლემა 122,123
უსასრულო მარცხნიდან ღია ინტერვალი 11
უსასრულო მარცხნიდან ჩაკეტილი სეგმენტი 11
უსასრულო მარჯვნიდან ღია ინტერვალი 11
უსასრულო მარჯვნიდან ჩაკეტილი სეგმენტი 12
უსასრულო ჯგუფი 33
უწყვეტი ასახვა 74

ფ

ფაქტორ-ასახვა 21
ფაქტორ-სივრცე 104
ფაქტორ-სიმრავლე 20
ფაქტორ-ჯგუფი 36
ფაქტორ-ჰომომორფიზმი 36
ფუნქტორების ბუნებრივი გარდაქმნა 46,47
ფუნქტორების კომპოზიცია 45
ფუნქტორი 44
ფუნქციონალურად ღია სიმრავლე 127

ფუნქციონალურად ჩაკეტილი
სიმრავლე 127

ქ

ქვედაფარვა 145,146
ქვეკატეგორია 43,44
ქვესივრცის ტოპოლოგიური
სტრუქტურა 55,56
ქვესიმრავლეებს შორის მანძილი
178
დალაგებული სიმრავლის
ქვესიმრავლის ზუსტი ზედა
საზღვარი 24
დალაგებული სიმრავლის
ქვესიმრავლის ზუსტი ქვედა
საზღვარი 24
ქვეჯგუფი 33

ღ

ღია ასახვა 84
ღია ბირთვი 55,177
ღია ინტერვალი 11
ღია სიმრავლე 53
ღია ჰომეომორფული ჩადგმა
87,88
ღია-ჩაკეტილი ასახვა 84
ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე 64

შ

შებრუნებული გზა 203
შეკრების ალგებრული ოპერაცია
32
შემოსაზღვრული ასახვა 155
შემოსაზღვრული მეტრიკა 177
შემოსაზღვრული სიმრავლე 177
შემოსაზღვრული ქვესივრცე 155
შეუღლების ასახვა 244,245
შეხების წერტილი 65
შიგა წერტილი 54

ჩ

ჩაკეტვის ოპერატორი 67
ჩაკეტილი ასახვა 84
ჩაკეტილი ექვივალენტობის
მიმართება 143
ჩაკეტილი სეგმენტი 11
ჩაკეტილი სიმრავლე 63
ჩაკეტილი ჰომეომორფული
ჩადგმა 88
ჩეხ-ლებეგის განზომილება 216

ც

ცარიელი სიმრავლე 11
ცენტრირებული ოჯახი 14
ცერმოლოს თეორემა 25
ციკლური ჯგუფი 34

წ

წერტილების განცალება
ასახვებით 156
წერტილების და ჩაკეტილი
სიმრავლეების განცალება
ასახვებით 156
წერტილიდან სიმრავლემდე
მანძილი 177
წერტილის მიდამო 53
წერტილის ორბიტა 258
წერტილისკენ კრებადი ბადე 72
წინარედალაგებული სიმრავლე
24
წინარედალაგებული სიმრავლის
კატეგორია 43
წრფივად ბმული სივრცე 203
წრფივად ბმული ქვესივრცე 204
წრფივად ბმულობის
კომპონენტა 205
წრფივად დალაგების მიმართება
23
წრფივად დალაგებული
სიმრავლე 23

ჯ

ჯამის თეორემა 225

ჯგუფების და ჰომომორფიზმების კატეგორია 43
ჯგუფთა და ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა 36
ჯგუფთა ნამრავლი 37,38
ჯგუფთა ჯამი 38
ჯგუფი გრეხის გარეშე 34
ჯგუფის ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი 32
ჯგუფის ელემენტის რიგი 34
ჯგუფის ერთეულის მიდამოთა სისტემა 246
ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი 32
ჯგუფის ეფექტური მოქმედება 260
ჯგუფის მარცხენა გადაადგილება, გარდაქმნა 243
ჯგუფის მარჯვენა გადაადგილება, გარდაქმნა 243
ჯგუფის მოქმედების ბირთვი 259
ჯგუფის ნულოვანი ელემენტი 32
ჯგუფის რიგი 33
ჯგუფის სტაბილიზატორი წერტილში 258
ჯგუფის შებრუნებული ელემენტი 32
ჯგუფის წარმოდგენა ნამრავლის სახით 39
ჯგუფის წარმოდგენა ჯამის სახით 39
ჯგუფის წარმომქმნელი ელემენტები 39

ჰ

ჰილბერტის კუბი 158,159
ჰომეომორფული სივრცეები 74,75
ჰომეომორფული ჩადგმა 87,88
ჰომომორფიზმთა ჯგუფი 35
ჰომომორფიზმი 34
ჰომომორფიზმის ანასახი 34
ჰომომორფიზმის ბირთვი 34

სიმბოლოების ინდექსი

$A \subset X$	სიმრავლის ქვესიმრავლე,11
$X = Y$	სიმრავლეთა ტოლობა,11
$\mathbb{N}$	არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$,11
$\mathbb{N}^{+}$	დადებით მთელ რიცხვთა, ანუ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{N}^{+} = \{1,2,3,\dots\}$,11
$\mathbb{Z}$	მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$,11
$\mathbb{Q}$	რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^{+}\}$,11
$\mathfrak{I}$	ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე,11
$\mathbb{R}^{+}$	დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე,11
$\mathbb{R}$	ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$,11
$[a,b] = \{x \mid\ a \le x \le b\}$	ჩაკეტილი სეგმენტი,11
$(a,b) = \{x \mid\ a < x < b\}$	ღია ინტერვალი,11
$[a,b) = \{x \mid\ a \le x < b\}$	მარჯვნიდან ღია სეგმენტი,11
$(a,b] = \{x \mid\ a < x \le b\}$	მარცხნიდან ღია სეგმენტი,11
$[a,+\infty) = \{x \mid a \le x < +\infty\}$	უსასრულო მარცხნიდან ჩაკეტილი სეგმენტი,11
$(-\infty,a] = \{x \mid -\infty < x \le a\}$	უსასრულო მარჯვნიდან ჩაკეტილი სეგმენტი,12
$(a,+\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$	უსასრულო მარცხნიდან ღია ინტერვალი,11
$(-\infty,a) = \{x \mid -\infty < x < a\}$	უსასრულო მარჯვნიდან ღია ინტერვალი,11
$I = [0,1]$	ჩაკეტილი სეგმენტი,11
$X \bigcup Y$	სიმრავლეთა გაერთიანება,12
$X \bigcap Y$	სიმრავლეთა თანაკვეთა,12
$X \setminus Y$	სიმრავლეთა სხვაობა,12
$X \times Y$	სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი,12
$\{X_s\}_{s \in S}$	სიმრავლეთა ინდექსირებული ოჯახი,14
$\bigcup\limits_{s \in S} X_s$	სიმრავლეთა ინდექსირებული ოჯახის გაერთიანება,14
$\bigcap\limits_{s \in S} X_s$	სიმრავლეთა ინდექსირებული ოჯახის თანაკვეთა,14
$\prod\limits_{s \in S} X_s$	სიმრავლეთა ინდექსირებული ოჯახის დეკარტული ნამრავლი,14
$X \xrightarrow{f} Y$, $f : X \to Y$	სიმრავლეთა ასახვა,17

Γ_f	ასახვის გრაფიკი,17
$f = g$	ასახვების ტოლობა,17
1_X	იგივური ასახვა,17
$f(A)$	სიმრავლის ანასახი,17,18
$f^{-1}(B)$	სიმრავლის წინარესახე,18
$f_{\vert A} : A \to Y$	$f : X \to Y$ ასახვის შემოსაზღვრა $A \subset X$ ქვესიმრავლეზე,18
f_B	$f : X \to Y$ ასახვის შემოსაზღვრა $B \subset Y$ ქვესიმრავლეზე,18
$g \circ f$	ასახვების კომპოზიცია,18
$Map(X,Y)$	სიმრავლეებს შორის ასახვების სიმრავლე,19
A^B	B სიმრავლიდან A სიმრავლეში ასახვების სიმრავლე,29
$E \subset X \times X$	მიმართება სიმრავლეზე,20
xEy	მიმართება x და y ელემენტებს შორის,17
$[x]$	ელემენტის ექვივალენტობის კლასი,20
X/E	ფაქტორ-სიმრავლე,20
$q : X \to X/E$	ფაქტორ-ასახვა,21
$p_{\sim} : \prod_{\sim \in A} X_{\sim} \to X_{\sim}$	პროექციის ასახვა,22
$\prod_{s \in S} f_s$	ასახვების დეკარტული ნამრავლი,21
$\Delta_{s \in S} f_s$	ასახვების დიაგონალური ნამრავლი,22
$E =<$	წრფივად დალაგების მიმართება,23
$E =\leq$	დალაგების მიმართება,23
$\vert A \vert$	სიმრავლის სიმძლავრე, კარდინალური რიცხვი,27
Card	კარდინალური რიცხვების ოჯახი,27
$\aleph_0$	ალეფ-ნული, $\mathbb{N}^+$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის კარდინალური რიცხვი, 28
C	კონტინუმი, ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლის კარდინალური რიცხვი,28
$\vert 2^X \vert$	X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლის კარდინალური რიცხვი,28
$2 + a$	კარდინალური რიცხვების ჯამი,29
$2\ a$	კარდინალური რიცხვების ნამრავლი,29
$\sum_{s \in S} 2_s$	კარდინალური რიცხვების ოჯახის ჯამი,29

$\prod_{s\in S} 2_{s}$	კარდინალური რიცხვების ოჯახის ნამრავლი,29
2^{a}	კარდინალური რიცხვების ხარისხი,29
aQb	ჯგუფის ელემენტების კომპოზიცია,31
$a+b$	ჯგუფის ელემენტების ჯამი,32
0	ჯგუფის ნულოვანი ელემენტი,32
$-a$	ჯგუფის a ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი,32
ab	ჯგუფის ელემენტების ნამრავლი,32
e	ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი,32
a^{-1}	ჯგუფის a ელემენტის შებრუნებული ელემენტი,32
$\|A\|$	ჯგუფის რიგი,33
$< X >$	X სიმრავლით წარმოქმნილი ქვეჯგუფი,33
$\mathrm{Ker}(f)$	$f: A \to B$ ჰომომორფიზმის ბირთვი,34
$\mathrm{Im}(f)$	$f: A \to B$ ჰომომორფიზმის ანასახი,34
$\mathrm{Hom}(A,B)$	ჯგუფთა ჰომომორფიზმების ჯგუფი,35
$a+B$	მარცხენა მოსაზღვრე კლასი,35
$B+a$	მარჯვენა მოსაზღვრე კლასი,35
A/B	ფაქტორ-ჯგუფი,36
$\mathrm{Coim}(f) = A/\mathrm{Ker}(f)$	ფაქტორ-ჯგუფი,36
$\mathrm{Coker}(f) = B/\mathrm{Im}(f)$	ფაქტორ-ჯგუფი,36
$\prod_{s\in S} A_s$	ჯგუფების ნამრავლი,38
$\bigoplus_{s\in S} A_s$	ჯგუფების ჯამი,38
$\Delta_{s\in S} f_s$	ჰომომორფიზმების დიაგონალური
	ნამრავლი,38
$\nabla_{s\in S} g_s$	ჰომომორფიზმების კომბინირებული ჯამი,39
$ob(\mathscr{K})$	კატეგორიის ობიექტების კლასი,42
$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}(X,Y)$	კატეგორიის ობიექტებს შორის მორფიზმების სიმრავლე,42
$g \circ f$	f და g მორფიზმების კომპოზიცია, 42
Sets	სიმრავლეების და ასახვების კატეგორია,42
$\mathbf{Sets_f}$	სასრული სიმრავლეების და ასახვების კატეგორია,42
$\mathbf{Sets_I}$	სიმრავლეების და ინექციური ასახვების კატეგორია,43

$\mathbf{Sets}_{\mathbf{S}}$	სიმრავლეების და სურექციული ასახვების კატეგორია,43
$\mathbf{Sets}_{*}$	მონიშნულწერტილიანი სიმრავლეების და მონიშნული წერტილების შემნახველი ასახვების კატეგორია,43
$\mathbf{Gr}$	ჯგუფების და ჰომომორფიზმების კატეგორია, 43
$\mathbf{Gr}_{\mathbf{T}}$	ტოპოლოგიური ჯგუფების და ტოპოლოგიური ჯგუფების ჰომომორფიზმების კატეგორია,242
$\mathbf{Ab}$	აბელური ჯგუფების და ჰომომორფიზმების კატეგორია,43
$\mathrm{Mor}_{\mathscr{K}}$	ნებისმიერი $\mathscr{K}$ კატეგორიის მორფიზმების კატეგორია,43
$\mathbf{Top}$	ტოპოლოგიური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,74
$\mathbf{Top}_{\mathbf{A}}$	A -სივრცეების და A -ასახვების კატეგორია,258
$\mathscr{M}$	მეტრიზებადი სივრცეების კატეგორია, 190
$\mathbf{Top}^2$	ტოპოლოგიურ სივრცეთა წყვილების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,111
$\mathbf{Top}_{T_0}$	T_0 -სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,133
$\mathbf{Top}_{T_1}$	T_1-სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,133
$\mathbf{Top}_{T_2}$	T_2 -სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,133
$\mathscr{R}$	რეგულარულ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია,133
$\mathscr{CR}$	სავსებით რეგულარულ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია,133
$\mathscr{N}$	ნორმალურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია,133
$\mathscr{HN}$	მემკვიდრეობით ნორმალურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია,133,134
$\mathscr{PN}$	სრულყოფილად ნორმალურ სივრცეთა და უწყვეტ ასახვათა კატეგორია,134
I^m	ტიხონოვის კუბი,158
$I^{\aleph_0}$	ჰილბერტის კუბი,159
A^m	ალექსანდროვის კუბი, 175

$\mathscr{C}$	კომპაქტური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,167
$\mathscr{LC}$	ლოკალურად კომპაქტური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,167
$\mathscr{P}$	პარაკომპაქტური სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,167
$\mathscr{C}(X)$	ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაციების კლასი,168
$\mathscr{S}_{\pm}$	± -კომპაქტების კლასი, 218
$\mathscr{Compl}$	სრულ მეტრიზებად სივრცეთა კლასი, 218
$\mathscr{P}$	სივრცეთა ტოპოლოგიურად ჩაკეტილი კლასი 217
$\mathscr{K}(X)$	X სეპარაბელური მეტრიზებადი სივრცის ყველა cX მეტრიზებადი კომპაქტიფიკაციების სიმრავლე, 218
$\bigoplus\limits_{s\in S} X_s$	$\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ჯამი,48
$\prod\limits_{s\in S} X_s$	$\mathscr{K}$ კატეგორიის ობიექტთა $\{X_s\}_{s\in S}$ ოჯახის ნამრავლი,49
$(X,{}^2)$	ტოპოლოგიური სივრცე ² ტოპოლოგიური სტრუქტურით,53
$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}^{n-ჯერ}$	n -განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე,54
$(Y,{}^2{}_Y)$	$(X,{}^2)$ -ტოპოლოგიური სივრცის ქვესივრცე,56
$I^n = \overbrace{I\times I\times\ldots\times I}^{n-ჯერ}$	$\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის ქვესივრცე,56
±	ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი,58
$w(X)$	ტოპოლოგიური სივრცის წონა,58
$\pm(x)$	ტოპოლოგიური სივრცის ბაზისი x წერტილში, 58
ª(X,x)	ტოპოლოგიური სივრცის მახასიათებელი x წერტილში,58
ª(X)	ტოპოლოგიური სივრცის მახასიათებელი,58
$\{\pm(x)\}_{x\in X}$	ტოპოლოგიური სივრცის მიდამოთა სისტემა,60
$\mathrm{Int}\,A$	ტოპოლოგიური სივრცის A ქვესიმრავლის ბირთვი,60
$\mathrm{Int}: 2^X \to 2^X$	ბირთვის ოპერატორი,61
$\overline{A}$	ტოპოლოგიური სივრცის A სიმრავლის

	ჩაკეტვა,64
$\mathrm{CL}: 2^X \to 2^X$	ჩაკეტვის ოპერატორი,67
$\mathrm{Fr}A$	ტოპოლოგიური სივრცის A სიმრავლის საზღვარი, 68
A^d	სიმრავლის დაგროვების წერტილების სიმრავლე, 71
$d(X)$	სივრცის სიმკვრივე,71,72
$\lim \mathscr{N}$	ბადის ყველა ზღვრების სიმრავლე, 72
$G_¢$	$G_¢$ -ტიპის სიმრავლე,72
$F_±$	$F_±$ -ტიპის სიმრავლე,72
$X \approx Y$	ჰომეომორფული სივრცეები,74,75
$[X]$	სივრცის ტოპოლოგიური ტიპი,75
$\nabla_{s\in S} f_s : X \to Y$	ასახვების კომბინირებული ჯამი,23
$\oplus_{s\in S} X_s$	ტოპოლოგიურ სივრცეთა ჯამი,98
$\prod_{s\in S} X_s$	ტოპოლოგიურ სივრცეთა დეკარტული ნამრავლი,100,101
X/E	ფაქტორ-სივრცე,104,105
$X \cup_f Y$	მიერთების სივრცე,108
$\mathrm{Cyl}(f)$	ასახვის ცილინდრი,110
cX	ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტიფიკაცია,168
$c_1X \sim c_2X$	ექვივალენტური კომპაქტიფიკაციები,168
$c_1X \le c_2X$	დალაგების მიმართება $\mathscr{C}(X)$ ოჯახზე, 169
X	სივრცის სტოუნ-ჩეხის კომპაქტიფიკაცია,172
μX	ალექსანდროვის ერთწერტილიანი კომპაქტიფიკაცია,173
$° : X \times X \to [0,+\infty)$	მეტრიკა X სიმრავლეზე,176
$(X, °)$	მეტრიკული სივრცე,176
$B(x,£)$	£ რადიუსიანი ღია ბირთვი ცენტრით x წერტილში,177
$\overline{B(x,£)}$	£ რადიუსიანი ჩაკეტილი ბირთვი ცენტრით x წერტილში,177
$S(x,£)$	£ რადიუსიანი სფერო ცენტრით x წერტილში,177
$¢(A)$	მეტრიკული სივრცის სიმრავლის დიამეტრი,177
$°(x, A)$	მეტრიკული სივრცის $x \in X$ წერტილიდან

	$A\subset X$ ქვესიმრავლემდე მანძილი,177
$^\circ(A,B)$	მეტრიკული სივრცის A და B ქვესიმრავლეებს შორის მანძილი,178
$^\circ(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\,{}^\circ{}_i(x,y)$	მეტრიკულ სივრცეთა ნამრავლის მეტრიკა,189
$^\circ(x,y)=\begin{cases}0, x=y,\\ 1, x\neq y\end{cases}$	მეტრიკა ნებისმიერ სიმრავლეზე,181
$^\circ{}'(x,y)=\min\{1, {}^\circ(x,y)\}$	ერთით შემოსაზღვრული და $^\circ$ მეტრიკის ექვივალენტური სტანდარტული მეტრიკა $(X, {}^\circ)$ მეტრიკულ სივრცეზე,183
$^\circ(x,y)=\|x-y\|$	მეტრიკა $\mathbb{R}$ რიცხვით ღერძზე,181
$^\circ(x,y)=\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)\}^{1/2}$	მეტრიკა $\mathbb{R}^n$ ევკლიდურ სივრცეზე,182
$^\circ(x,y)=\{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\}^{1/2}$	მეტრიკა $\mathbb{R}^\infty$ ჰილბერტის სივრცეზე,182
$\mathbb{R}^\infty$	ჰილბერტის სივრცე,182
$\lim_{n\to\infty}(x_n)$	მეტრიკული სივრცის (x_n) მიმდევრობის ზღვარი,179
$^2{}_\circ$	ტოპოლოგიური სტრუქტურა $(X, {}^\circ)$ მეტრიკულ სივრცეზე,178
˘(x,y), $x,y\in\prod_{\sim\in A}X_\sim$	თანაბარი მეტრიკა დეკარტულ ნამრავლზე $\prod_{\sim\in A}X_\sim$, $X_\sim=X$, $\sim\in A$,191
˘(f,g)	თანაბარი მეტრიკა $(X, {}^\circ)$ მეტრიკულ სივრცეში $f,g:A\to X$ ასახვებს შორის,191
$\mathscr{C}(X,Y)$	X სივრციდან $^\circ$ მეტრიკის მქონე Y სივრცეში უწყვეტი ასახვების ქვესიმრავლე192
$\mathscr{B}(X,Y)$	X სივრციდან $^\circ$ მეტრიკის მქონე Y სივრცეში შემოსაზღვრული ასახვების ქვესიმრავლე,192
$d(f,g)$	მეტრიკა $\mathscr{B}(X,Y)$ სიმრავლეზე,194
$\tilde{X}$	მეტრიკული სივრცის გასრულება, 195
$\mathscr{Con}$	ბმული სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,202
$\mathscr{LCon}$	წრფივად ბმული სივრცეების და უწყვეტი ასახვების კატეგორია,205,206
ind X	ტოპოლოგიური სივრცის მცირე ინდუქციური განზომილება,211
Ind X	ტოპოლოგიური სივრცის დიდი ინდუქციური

	განზომილება,212
$\dim X$	ტოპოლოგიური სივრცის დაფარვითი განზომილება,216
$\mathrm{ind}_{\mathscr{P}} X$	ტოპოლოგიური სივრცის მცირე ინდუქციური განზომილება $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით,217
$\mathrm{Ind}_{\mathscr{P}} X$	ტოპოლოგიური სივრცის დიდი ინდუქციური განზომილება $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით,217
$\dim_{\mathscr{P}} X$	ტოპოლოგიური სივრცის დაფარვითი განზომილება $\mathscr{P}$ კლასის მოდულით,218
$\mathrm{Sur}_{\mathscr{P}} X$	ფუნქცია $\mathscr{P}$ კლასის მიმართ, 218
$\mathrm{Sur}_{\mathscr{S}_{\pm}} X$	ფუნქცია $\mathscr{S}_{\pm}$ კლასის მიმართ, 218
$\mathrm{def}\ X$	ფუნქცია $\mathscr{C}$ კლასის მიმართ,218
$\mathrm{def}_{\mathscr{C}ompl} X$	ფუნქცია $\mathscr{C}ompl$ კლასის მიმართ,218
$\mathrm{def}_{\mathscr{P}} X$	ფუნქცია $\mathscr{P}$ კლასის მიმართ, 218
$\mathrm{Def}_{\mathscr{P}} X$	ფუნქცია $\mathscr{P}$ კლასის მიმართ, 218
Π_n^m	უნივერსალური კომპაქტური სივრცე,231
L_a	ჯგუფის მარცხენა გადაადგილება,243
R_a	ჯგუფის მარჯვენა გადაადგილება,243
2 $_{A/B}$	ტოპოლოგიური სტრუქტურა A/B ფაქტორ-ჯგუფზე,249
¯ $: A\times X \to X$	ტოპოლოგიური ჯგუფის მოქმედება ტოპოლოგიურ სივრცეზე,257
$A(x)=\{a\cdot x \mid a\in A\}$	x წერტილის ორბიტა,258
$\mathrm{A}x=\{a\in A \mid a\cdot x = x\}$	სტაბილიზატორი x წერტილში,258
$\mathrm{Homeo}(X)$	სივრცის თავისთავზე ყველა ჰომეომორფიზმების ჯგუფი,259
ker¯	¯ მოქმედების ბირთვი,259

ვლადიმერ ბალაძე-ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი.

სამეცნიერო ინტერესების სფერო:

ზოგადი ტოპოლოგია (განზომილების თეორია, უწყვეტ გარდაქმნათა ჯგუფების თეორია), ალგებრული ტოპოლოგია (ჰომოლოგიის თეორია, ჰომოტოპიის თეორია), გეომეტრიული ტოპოლოგია (რეტრაქტების თეორია, შეიპების თეორია), კატეგორიათა თეორია.

განათლება

1969-1974-ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი, მათემატიკოსი.

სამუშაო გამოცდილება:

2008-დღემდე-ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი.

2006-2007-ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, რექტორი.

2005-2006-ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, რექტორის მოადგილე სასწავლო აკადემიურ დარგში.

1996-2005-ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ალგებრა-გეომეტრიის კათედრის პროფესორი.

1991-2005-შეთავსებით, ბათუმის შოთა რუსთაველის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის კათედრის დოცენტი, პროფესორი.

1978-1996- ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ალგებრა-გეომეტრიის კათედრის ასისტენტი, დოცენტი.

1976-1980- საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის ანდრია რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის ასპირანტი.

1969-1974-ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის სტუდენტი.