თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
160

ფიზიკა • კიბერნეტიკა
PHYSICS • CYBERNETICS

თბილისი 1975 TBILISI

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
160

ФИЗИКА
КИБЕРНЕТИКА

ТБИЛИСИ 1975

Труды Тбилисского университета, начиная со 160-го тома, будут выходить только под одним нарастающим номером (общая нумерация с основания „Трудов» по н / время),

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები, დაწყებული 160-ე ტომიდან, აღინიშნება მხოლოდ ერთი—მზარდი ნომერი (საერთო ნომერაცია „შრომების" დაარსებიდან დღემდე).

From volume 160 on Proceedings of Tbilisi University will be issued under only one increasing number (general numeration—from the foundation of "Proceedings" up to now).

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

О ВЫЧИСЛЕНИИ КУЛОНОВСКОГО РАДИАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Т. Л. АБЕЛИШВИЛИ

В работе [1] была рассмотрена реакция передачи кластера при столкновении ядер в сильном кулоновском поле. В частности, в работе в квазиклассическом приближении вычислялся радиальный интеграл

$$M_{\bar{l}l}^{1,x}=\frac{1}{k_l k_f}\int\limits_0^\infty F_l(k_f r)\,\frac{\exp(-\varkappa r)}{r}F_l(k_i r)\,dr$$

$$F_l(kr)=\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}\eta+ikr\right)\right]\frac{|\Gamma(l+1+i\eta)|}{2\Gamma(2l+2)}\times$$

$$\times(2kr)^{l+1}F(l+1-i_n\eta\, 2l+2,\ 2ikr)$$

через элементарные функции, легко доступные для аналитического рассмотрения. С помощью квазиклассического приближения радиальных волновых функций $F_l(kr)$ интеграл вычислялся методом перевала при интегрировании вдоль действительной оси переменной $y=\frac{z_i z_f e^2}{r}$.

В настоящей работе вычислен интеграл $M_{l}^{-1,x}$ на основе метода Зоммерфельда [2, 3]. Как известно [4], интеграл $M_{\bar{l}l}^{1,x}$ можно представить в виде

$$M_{\bar{l}l}^{1,x}=\frac{|\Gamma(l+1+i\eta_f)||\Gamma(l+1+i\eta_i)|}{(2l+1)!}(-x_0)^l\left(\frac{k_l-k_f-ix}{k_i+k_f-ix}\right)^{i\eta_f}\times$$

$$\times\left(\frac{k_i-k_f+ix}{k_j+k_f-ix}\right)^{i\eta_i}$$

$$\frac{\exp\left[-\frac{\pi}{2}(\eta_f-\eta_i)\right]}{(k_i-k_f)^2+x^2}\,{}_2F_1(l+1-i\eta_i,\ l+1-i\eta_f,\ 2l+2;\ x_0)$$

$$x_0=-\frac{4k_i k_f}{(k_i-k_f)^2+x^2},\qquad \eta=\frac{ze^2}{\hbar V}\gg 1$$

Представляя гипергеометрическую функцию ${}_2F_1$ в виде контурного интеграла и учитывая квазиклассичность задачи, полученный интеграл можно вычислить методом перевала

$$
{}_2F_1(l+1+i\eta_f,\ l+1+i\eta_l,\ 2l+2;\ x_0)=
$$

$$
=[1-\exp\{2\pi i(l+1+i\eta_f)\}]^{-1}\frac{\Gamma(2l+2)}{|\Gamma(l+1+i\eta_f)|}\int_c u^{l+i\eta_f}(1-u)^{l-i\eta_f}\times
$$

$$
\times(1-ux_0)^{-l-1-i\eta_f}\,du=[1-\exp\{2\pi i(l+1+i\eta_f)\}]^{-1}\frac{\Gamma(2l+2)}{|\Gamma(l+1+i\eta_f)|}\times
$$

$$
\times(1-u_0x_0)^{-1}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(u_0)|}}\exp[f(u_0)],
$$

$$
f(u_0)=\ln[u^{l}{}_{+}{}^{i\eta_f}(1-u)^{l-i\eta_f}/(1-u_0x_0)^{l+i\eta_i}],
$$

где замкнутый контур интегрирования c берёт начало в точке 1 с обходом точки 0, причём на нижнем берегу разреза от 0 до 1 $arg u=0$ и $arg(1-u)=0$, а точка перевала u_0 удовлетворяет уравнению

$$
\left.\frac{df}{du}\right|_{u=u_0}=0
$$

и должна лежать в верхней полуплоскости. После преобразований, опуская в экспоненте несущественные фазовые множители, получим

$$
M_{il}^{-1,x}=\frac{|x_0|}{4k_ik_f}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(u_0)|}}\frac{1}{1+u_0^*|x_0|}\exp\{\eta_l[(\rho\varphi_f-\varphi_l)+
$$

$$
+\frac{1}{2}L_p(|x_0|,\ x)-xArch q(x)]\}
$$

$$
x=l+\frac{1}{2}\Big/\eta_i
$$

$$
\operatorname{tg}\varphi_i=\frac{2\varkappa k_i}{k_i^2-k_f^2-\varkappa^2},\qquad \operatorname{tg}\varphi_f=\frac{2\varkappa k_f}{k_i^2-k_f^2-\varkappa^2},\qquad L_p(|x_0|,\ x)=2(\psi_i-p\psi_f)
$$

$$
\cos\psi_i=\frac{(1-\rho)|x_0|+2}{2\varepsilon_i\sqrt{1+|x_0|}},\qquad \cos\psi_f=\frac{(1-\rho)|x_0|-2\rho}{2\varepsilon_f\rho\sqrt{1+|x_0|}}.
$$

$$
0\leqslant\varphi_i\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\varphi_f\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi_i\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\psi_f\leqslant\pi,
$$

$$
q(x)=\frac{1}{\varepsilon_i\varepsilon_f}\left[1+\frac{x^2(|x_0|+2)}{\rho|x_0|}\right],\qquad |f''(u_0)|^{-1}=\frac{\nu(x)}{\eta_f^2\eta_i|x_0|}
$$

$$
\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2/\rho^2}}\frac{x}{\sqrt{q^2(x)-1}}\sqrt{1+\frac{|x_0|}{1-\sqrt{1-q^{-2}(x)}}}
$$

$$
\varepsilon_i=\sqrt{1+x^2}\quad \varepsilon_f=\sqrt{1+x^2/\rho^2}\quad \rho=\eta_f/\eta_i.
$$

Здесь везде имеет место неравенство $\frac{4\rho}{|x_0|}-(1-\rho)^2>0$, в противном случае выражение, стоящее под знаком экспоненты, не будет отрицательным (что является обязательным условием при вычислении квазиклассических матричных элементов). Полученное выражение отличается от выражения, полученного в работе [1], лишь предэкспоненциальным множителем. Данный расчёт является более корректным и поэтому во всех результатах работы [1] предэкспоненциальный множитель должен быть заменён выражением

$$\frac{|x_0|}{4k_i k_f}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(u_0)|}}\cdot\frac{1}{1+u_0^*|x_0|}.$$

На рис. 1 для примера приведены зависимости функций $\nu(x)$ и $S(x)=L_\rho(\,|x_0|\,,\,x)-2xArchq(x)$ от x при $|x_0|=1$ и $\rho=0,\ 3$ (слева на оси ординат отложена функция $S(x)$, справа — $\nu(x)$).

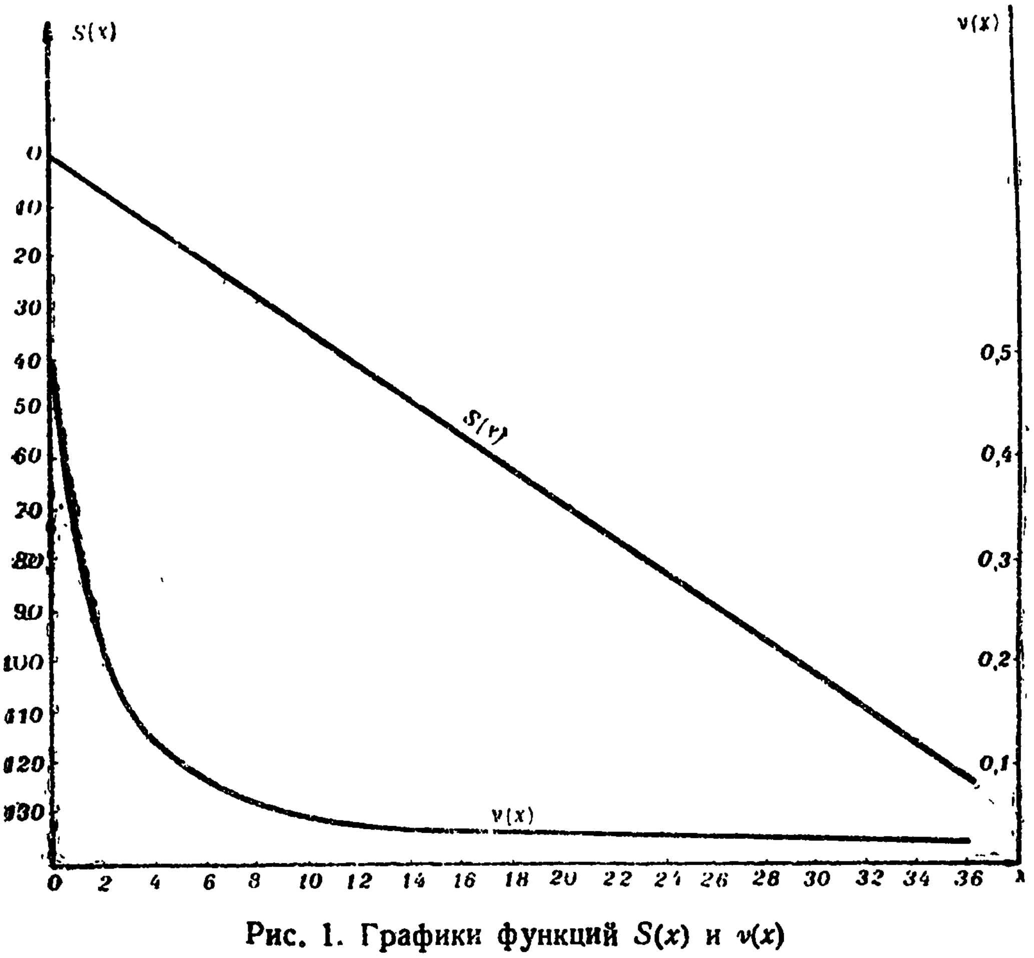

Рис. 1. Графики функций $S(x)$ и $\nu(x)$

Как видно из рис. 1, парциальное сечение, пропорциональное $|M_{l\bar{l}}^{1,x}|^2$, максимально при $l=0$, т. е. при лобовом ударе (значение $L_{0;3}(1;0)$ равно—0,22). График $L_\rho(\,|x_0|\,,0)$ при различных параметрах ρ приведён в работе Тер-Мартиросяна [5].

Как следует из этого графика, $L_\rho(\,|x_0|\,,0)$ растёт с ростом $|x_0|$, оставаясь всё время отрицательным.

Проблемная лаборатория передачи и переработки информации в больших системах управления

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Л. Абелишвили, ЯФ XIII, 5, 1042, 1971.
2. А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. II, 1956.
3. И. А. Губкин, ЯФ XI, 2, 372, 1970.
4. D. Trautmann, K. Alder, Helv. Phys. Acta, 43, 363, 1970.
5. К. А. Тер-Мартиросян, ЖЭТФ, 29, 713, 1955.

თ. აბელიშვილი

კულონური რადიალური ინტეგრალის გამოთვლის შესახებ

ნაჩვენებია, რომ კულონური რადიალური ინტეგრალის გამოთვლისას, ზომერფელდის ასიმპტოტური ფორმულის გამოყენება იძლევა უფრო ზუსტ მნიშვნელობას სხვა შრომებში მიღებულ მნიშვნელობებთან შედარებით.

T. ABELISVILI

COULOMB RADIAL INTEGRAL CALCULATION

Summary

Sommerfeld's asymptotic formula yields a more precise result in comparison with those of other authors when calculating the Coulomb radial integral for partial values of angular momenta.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

МОДЕЛИ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ И K_{l3} -ФОРМФАКТОРЫ

К. Р. НАТРОШВИЛИ

В последнее время для описания некоторых эффектов (формфакторы K_{l3}-распада, σ-члены и т. д.) в традиционной схеме нарушения киральной симметрии $SU_3 \times SU_3$ [1] учитывают также вклад октетного представления $(1.8) \oplus (8.1)$, считая, что такая схема улучшит описание этих эффектов. В работе [2] был исследован такой механизм нарушения киральной симметрии $SU_3 \times SU_3$ для $0^{\pm}$-мезонов с целью получения их спектра масс и распадных свойств, в частности формфакторов K_{l3}-распада. Было выяснено, что при этом имеются указания в пользу приближенной симметрии $SU_2 \times SU_2$ в случае присутствия представления $(1.8) \oplus (8.1)$ и при отрицательном наклоне формфактора K_{l3}-распада. Интересно было посмотреть, изменяются ли основные утверждения работы [2] при расширении рассматриваемой системы частиц, когда включены векторные и аксиальные мезоны, что и является содержанием настоящей статьи.

Рассмотрим взаимодействующую систему нонетов $0^{\pm}$ и $1^{\pm}$-мезонов:

$$L = \frac{1}{4} Tr \{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} Tr \{\Delta_\mu M \Delta^\mu M^+\} -$$

$$- L_1 (v_\mu, a_\mu) - L_2 (v_\mu, a_\mu, M, M^+) - V_0 (M, M^+) - V_{SB} (M, M^+), \quad (1)$$

где

$$v_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{8} \lambda_i v_\mu^i, \quad a_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{8} \lambda_i a_\mu^i$$

калибровочные поля Янга Миллса [3];

$$M = S + i\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{8} \lambda_i (S_i + i\Phi_i)$$ — нонеты скалярных и псевдоскалярных мезонов;

$$\Delta_\mu M = \partial_\mu M - \frac{i}{\sqrt{2}} g [v_\mu, M] - \frac{i}{\sqrt{2}} g \{a_\mu, M\}$$ — ковариантные производные $0^{\pm}$-мезонов;

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} g [v_\mu, v_\nu] - \frac{i}{\sqrt{2}} g [a_\mu, a_\nu],$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu - \frac{i}{\sqrt{2}} g [v_\mu, a_\nu] - \frac{i}{\sqrt{2}} g [v_\nu, a_\mu];$$

L_1, L_2—части лагранжианов, описывающие взаимодействия $0^\pm$ и $1^\pm$-мезонов; их конкретные виды будут приведены ниже при рассмотрении отдельных моделей векторных мезонов;

V_0—наиболее общая кирально-инвариантная часть лагранжиана $0^\pm$-мезонов;

V_{SB}—нарушает киральную симметрию; его явный вид мы также представим ниже, здесь же предположим, что V_{SB} содержит волновые функции полей в степени, не более квадратичной.

Для получения нетривиальных результатов считаем, что киральная симметрия $SU_3 \times SU_3$ нарушается как в лагранжиане, так и в вакууме. Вибираем SU_2 инвариантный вакуум:

$$\alpha_i \equiv \langle S_i \rangle_0 = \alpha_0 \delta_{i0} + \alpha_8 \delta_{i8} \tag{2}$$

и следуем методу Шехтера-Уеда [4] и работе [2], чтобы изучить в древесном приближении билинейный механизм нарушения киральной симметрии. Для этого нужно ввести „нормальные“ координаты

$$\widetilde{S}_i = S_i - \alpha_i, \quad \widetilde{\Phi}_i = \Phi_i$$

и разложить лагранжиан (1) в ряд по этим координатам.

Включение векторных частиц в систему рассматриваемых частиц ведет к перенормировке волновых функций $0^\pm$-мезонов. Процедура перенормировки обусловлена следующим фактом: из-за нарушения симметрии вакуума в лагранжиане возникают члены, смешивающие скалярные (псевдоскалярные) и векторные (аксиальные) волновые функции типа $v_\mu \partial^\mu \widetilde{S}$ и $a_\mu \partial^\mu \widetilde{\Phi}$. Чтобы разорвать это смешивание, переопределим волновые функции $1^\pm$-мезонов следующим образом:

$$\widetilde{v}^i_\mu = v^i_\mu - \xi^{in} \partial^\mu \widetilde{S}^n, \quad \widetilde{a}^i_\mu = a^i_\mu - \eta^{in} \partial_\mu \widetilde{\Phi}^n.$$

Но такое переопределение изменит формулы канонического квантования полей $0^\pm$-мезонов, поэтому последние нужно перенормировать.

$$\hat{S}_i = X_i \widetilde{S}_i, \quad \hat{\Phi}_i = Z_i \widetilde{\Phi}_i$$

После таких преобразований уже можно получить массовые формулы для $0^\pm$-мезонов:

$$\begin{aligned} m_k^2 &= -\frac{1}{Z_k^2} \frac{\sqrt{2} X_0 \sigma_0 - \frac{1}{2} X_8 \sigma_8}{\sqrt{2} \alpha^0 - \frac{1}{2} \alpha_8} + \hat{v}_{kk}, \\ m_\pi^2 &= -\frac{1}{Z_\pi^2} \frac{\sqrt{2} X_0 \sigma_0 + X_8 \sigma_8}{\sqrt{2} \alpha_0 + \alpha_8} + \hat{v}_{\pi\pi}, \\ M_\varkappa^2 &= -\frac{1}{X_\varkappa^2} \frac{X_8 \sigma_8}{\alpha_8} + \hat{v}_{\varkappa\varkappa}, \end{aligned} \tag{3}$$

Диагонализация же массовой матрицы в подпространстве (0—8) дает следующую связь между массами η и η';

$$m^2_{\eta'}=\frac{m^2_\eta(n_1-2n_0n_2)-Z_0^{-2}\left[n_2^2\left(n_0^2+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)+n_1(n_1-2n_0n_2)\right]}{m^2_\eta Z_8^2\left(n_0^2+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)-(n_1-2n_0n_2)}, \tag{4}$$

где

$$n_1=Z_0^2\hat{v}_{00}-\frac{\sqrt{2}\,\alpha_0-\alpha_8}{\sqrt{2}\,\alpha_8}\left[\frac{\sqrt{2}\,\alpha_0-\alpha_8}{\sqrt{2}\,\alpha_8}Z_8^2\hat{v}_{88}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma_8X_8-\sqrt{2}\,\sigma_0X_0}{\sqrt{2}\,\alpha_8}+\frac{\sqrt{2}\,\sigma_8X_8}{\sqrt{2}\,\alpha_0-\alpha_8}\right],$$

$$n_2=Z_0Z_8\hat{v}_{08}+\frac{\sigma_8X_8-\sqrt{2}\,\sigma_0X_0}{\sqrt{2}\,\alpha_8}+\frac{\sqrt{2}\,\alpha_0-\alpha_8}{\sqrt{2}\,\alpha_8}\hat{v}_{88}Z_8^2,$$

$$n_0=-\frac{\sqrt{2}\,\alpha_0-\alpha_8}{\sqrt{2}\,\alpha_8},$$

$$\sigma_i\equiv\left\langle\frac{\partial V_{SB}}{\partial S_i}\right\rangle_0,\quad \hat{v}_{ij}\equiv\left\langle\frac{\partial^2V_{SB}}{\partial\hat{\Psi}_i\hat{\Psi}_j}\right\rangle_0,\quad (\hat{\Psi}_i=\hat{S}_i,\ \hat{\Phi}_i).$$

Нужно отметить, что массовые формулы (3), (4) являются общими в древесном приближении, не зависящими от конкретного вида нарушителя симметрии V_{SB}.

Что касается массовых формул для $1^\pm$-мезонов, они зависят от выбора моделей для векторных мезонов, т. е. от вида L_1 и L_2.

Рассмотрим теперь дивергенции токов. В модели (1), не конкретизируя вид нарушения симметрии и лагранжианов L_1 и L_2, получим:

$$\partial_\mu V_i^\mu=f_{ijk}\alpha_kM_{jl}^2X_j\hat{S}_l+f_{ijk}\left(M_{jl}^2\frac{X_j}{X_k}\hat{S}_k\hat{S}_l+m_{jl}^2\frac{Z_j}{Z_k}\hat{\Phi}_k\hat{\Phi}_l\right)+$$

$$+\frac{1}{2}f_{ijk}\alpha_kR(g_{\hat{S}_j\hat{S}_l\hat{S}_m}X_j\hat{S}_l\hat{S}_m+g_{\hat{S}_j\hat{\Phi}_l\hat{\Phi}_m}X_l\hat{\Phi}_l\hat{\Phi}_m)+\dots$$

$$\partial_\mu A_i^\mu=d_{ijk}\alpha_km_{jl}^2Z_j\hat{\Phi}_l+d_{ijk}\left(m_{jl}^2\frac{Z_j}{X_k}\hat{S}_k\hat{\Phi}_l-M_{jl}^2\frac{X_j}{Z_k}\hat{\Phi}_k\hat{S}_l\right) \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2}d_{ijk}\alpha_k(g_{\hat{S}_l\hat{\Phi}_m\hat{\Phi}_j}Z_j\hat{\Phi}_m\hat{S}_l+g_{\hat{S}_m\hat{\Phi}_j\hat{\Phi}_l}Z_j\hat{S}_m\hat{\Phi}_l)+\dots,$$

где $g_{\hat{\psi}_i\hat{\psi}_k\hat{\psi}_l}\equiv-\left\langle\frac{\partial^3L}{\partial\hat{\Psi}_i\partial\hat{\Psi}_k\partial\hat{\Psi}_l}\right\rangle_0$, $(\hat{\Psi}_i=\hat{S}_i,\ \hat{\Phi}_i)$— константы взаимодействия соответствующих частиц в древесном приближении.

Вычисляя матричные элементы дивергенции токов в древесном приближении вида $\langle 0\mid\partial_\mu j^\mu\mid 1\ \text{частица}\rangle$, получим соотношения, связывающие параметры нарушения симметрии с константами распада мезонов f_k и f_π:

$$\langle 0\mid\partial_\mu A^\mu_{1-i2}(0)\mid\pi^+\rangle=m_\pi^2f_\pi^2=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}\,\alpha_0+\alpha_8\right)Z_\pi^3M_\pi^2,$$

$$\langle 0\mid\partial_\mu A^\mu_{4-i5}(0)\mid K^+\rangle=m_K^2f_K^2=\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}\,\alpha_0-\frac{1}{2}\alpha_8\right)Z_K^2m_K^2. \tag{6}$$

Тогда можно ввести параметр b, определяющий степень нарушения симметрии SU_3 вакуума

$$b \equiv \frac{\alpha_8}{\sqrt{2}\,\alpha_0} = -\frac{\frac{Z\pi}{Z_K}\frac{f_K}{f\pi}-1}{\frac{Z\pi}{Z_K}\frac{f_K}{f\pi}+\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

Матричные элементы вида $\langle 1$ частица $\mid \partial_\mu j^\mu$ 1 частица$\rangle$ можно связать с формфакторами распадов соответствующих частиц. Действительно, как хорошо известно, скалярный формфактор K_{l_3} - распада определяется формулой [5]

$$\langle \pi^0(p) \mid \partial_\mu V^\mu_{4-i5}(0) \mid K^+(k)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(m_k^2 - m_\pi^2) f(t).$$

Вычисление такого матричного элемента, согласно формуле (5) в древесном приближении, дает для формфактора

$$f(t) = \frac{m_K^2\frac{Z_K}{Z\pi} - m_\pi^2\frac{Z\pi}{Z_K}}{m_K^2 - m_\pi^2} + \frac{\sqrt{3}\,\alpha_8 X_\varkappa g_{\varkappa K\pi}}{m_K^2 - m_\pi^2} f(l). \tag{8}$$

Определим наклон формфактора, применяя линейную параметризацию [5]:

$$\lambda_0 = \frac{m_K^2\left(\frac{Z_K}{Z\pi}-1\right) - m_\pi^2\left(\frac{Z\pi}{Z_K}-1\right)}{m_K^2 - m_\pi^2} +$$

$$+\frac{m_\pi^2}{M_\varkappa^2}\frac{\left(m_K^2\frac{Z_K}{Z\pi} - m_\pi^2\frac{Z\pi}{Z_K}\right) + \left(\hat{v}_{\pi\pi}\frac{Z\pi}{Z_K} - \hat{v}_{kk}\frac{Z_k}{Z\pi}\right)}{m_K^2 - m_\pi^2}. \tag{9}$$

Из этой формулы видно, что наклон формфактора K_{l_3} - распада зависит от вида нарушения симметрии и, следовательно, экспериментальная оценка λ_0 может дать нам информации о механизме нарушения киральной симметрии $SU_3 \times SU_3$. К сожалению, экспериментальная ситуация для параметра γ_0 довольно запутана. В последних экспериментах было получено положительное значение [6] $\lambda_0 = 0{,}020 \pm 0{,}003$, хотя мировое среднее все же остается отрицательным [5]: $\lambda_0 = 0{,}038 \pm 0{,}020$. Мы попытаемся согласовать эти данные с модельными результатами для системы $0^\pm$ и $1^\pm$-мезонов.

Прежде всего приведем явный вид нарушения киральной симметрии

$$\chi_{SB} = \delta\{a(S_0 + cS_8) + d(U_0 + c'\,U_8)_0 + eG_8\}, \tag{10}$$

где U_i, G_i—квадратичные по полям $0^\pm$-мезонов комбинации, причем $U_i \in (3.\bar{3}) \oplus (\bar{3}.3)$ представлению группы $SU_3 \times SU_3$, а $G_i \in (1.8) \oplus (8.1)$ (их конкретный вид приведен в [2]).

Используя теперь (10) в массовых формулах (3), (4), получаем следующее квадратное уравнение для $y \equiv Z_K^2 \hat{v}_{KK} - Z_\pi^2 \hat{v}_{\pi\pi}$:

$$
\begin{aligned}
&3b^2\left(1+2\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)y^2+\left\{b^2\left[2m_K^2Z_K^2\left(1+2\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)+2m_\pi^2Z_\pi^2\left(2+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)-\right.\right.\\
&\left.-6Z_0^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)\right]+b\left[-4m_K^2Z_K^2\left(1+2\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)+2m_\pi^2Z_\pi^2\left(2+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)\right.\\
&\left.\left.+3Z_0^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)\right]\right\}y+b^2\left[\frac{1}{9}m_K^4Z_K^4\left(1+2\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)+\frac{2}{9}m_\pi^2m_K^2Z_\pi^2Z_K^2\left(2+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)\right.\\
&+\frac{1}{9}m_\pi^4Z_\pi^4\left(4+\frac{1}{2}\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)-\frac{2}{3}Z_0^2Z_K^2m_K^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)-\frac{5}{6}Z_0^2Z_\pi^2m_\pi^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)\\
&\left.+m_\eta^2m_{\eta'}^2Z_0^2Z_8^2\left(\frac{1}{2}+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)\right]+b\left[-\frac{4}{9}m_K^4Z_K^4\left(1+2\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)\right.\\
&-\frac{2}{9}m_\pi^2m_K^2Z_\pi^2Z_K^2\left(2+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)+\frac{2}{9}m_\pi^4Z_\pi^4\left(4+\frac{1}{2}\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)\qquad(11)\\
&+\frac{5}{3}Z_0^2Z_K^2m_K^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)-\frac{2}{3}Z_0^2Z_\pi^2m_\pi^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)\\
&\left.-m_\eta^2m_{\eta'}^2Z_0^2Z_8^2\right]+\frac{4}{9}m_K^4Z_K^4\left(1+2\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)-\frac{4}{9}m_\pi^2m_K^2Z_\pi^2Z_K^2\left(2+\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)\\
&+\frac{1}{9}m_\pi^4Z_\pi^4\left(4+\frac{1}{2}\frac{Z_0^2}{Z_8^2}\right)-\frac{2}{3}Z_0^2Z_K^2m_K^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)+\\
&+\frac{1}{6}Z_0^2Z_\pi^2m_\pi^2(m_\eta^2+m_{\eta'}^2)+\frac{1}{2}Z_0^2Z_8^2m_\eta^2m_{\eta'}^2=0
\end{aligned}
$$

Сравнивая формулы (9), (11), можно заметить, что они дают некое правило сумм, которое зависит лишь от масс скалярных и псевдоскалярных мезонов, распадных свойств K-мезонов и констант перенормировки; последние содержат информацию о моделях векторных мезонов. Таким образом, эти уравнения дают возможность связать спектр масс $0^\pm$—$1^\pm$-мезонов и данные по K_{l3}.

Найдем константы перенормировки волновых функций $0^\pm$-мезонов и массы $1^\pm$-мезонов, исходя из различных моделей векторных мезонов. Рассмотренные нами модели можно разделить на две группы: калибровочно-инвариантные и калибровочно-неинвариантные.

Калибровочно-неинвариантная модель. Калибровочно-неинвариантными мы называем те модели, в которых массы спиновых частиц вводятся членом $m_0^2(v_\mu^2+a_\mu^2)$; этот член нарушает калибровочную инвариантность второго рода. Рассмотрим модель, в которой

$$L_1 = -\frac{1}{2} m_0^2 \operatorname{T}_r (v_\mu v^\mu + a_\mu a^\mu) - \frac{1}{2} [\eta_v \operatorname{T}_r v_\mu + \eta_A \operatorname{T}_r a_\mu], \quad L_2 = 0,$$

и назовем ее „модель 1". Второй член в L_1 вводится для того, чтобы снять выражение ω—Φ. В такой модели массовые формулы имеют вид:

$$1^-: \quad \begin{aligned} m_\rho^2 &= m_\omega^2 = m_0^2, \\ m_{K^*}^2 &= m_0^2 + \frac{3}{2} g^2 \alpha_0^2 b^2, \\ m_\varphi^2 &= m_0^2 + \eta_v, \end{aligned} \tag{12}$$

$$1^+: \quad \begin{aligned} m_{\pi_A}^2 &= m_0^2 + \frac{2}{3} g^2 \alpha_0^2 (1+b)^2, \\ m_{K_A}^2 &= m_0^2 + \frac{2}{3} g^2 \alpha_0^2 \left(1 - \frac{b}{2}\right)^2, \\ m_{\omega_A}^2 + m_{\Phi_A}^2 &= 2m_0^2 + \frac{2}{3} g^2 \alpha_0^2 (2 - 2b + 5b^2) + \eta_A, \end{aligned} \tag{13}$$

$$m_{\omega_A}^2 m_{\Phi_A}^2 = \left[m_0^2 + \frac{2}{3} g^2 \alpha_0^2 (1 + 2b^2) + \eta_A\right]\left[m_0^2 + \frac{2}{3} g^2 \alpha_0^2 (1-b)^2 + \frac{4}{3} g^2 \alpha_0^2 b^2\right] - \frac{32}{9} g^4 \alpha_0^2 b^2 (1-b)^2.$$

Используя теперь значения масс [8]

$$m_\rho^2 = 0{,}59 \text{ Гэв}^2; \quad m_\varphi^2 = 1{,}04 \text{ Гэв}^2; \quad m_{\pi_A}^2 = m_{A_1}^2 = 1{,}14 \text{ Гэв}^2$$

$$m_{K_A}^2 = 1{,}54 \text{ Гэв}^2; \quad m_{\Phi_A}^2 \equiv m_E^2 = 2{,}02 \text{ Гэв}^2,$$

можем предположить из формул (12), (13) остальные массы (результат этих вычислений см. в таблице). Как видно из таблицы, масса K^*-мезон хорошо согласуется с экспериментальным значением, а для массы ω_A имеется существенное отличие от экспериментальной $m_D = 1286$ Мэв, хотя полученное нами значение совпадает с величиной, вычисляемой по формуле Швингера [7].

Кроме того, можно найти параметр b и константы перенормировки

$$\left(\frac{1+b}{1-\frac{b}{2}}\right)^2 = \frac{m_{A_1}^2 - m_\rho^2}{m_{K_A}^2 - m_\rho^2} \approx 0{,}58,$$

$$Z_\pi^2 = \frac{m_\rho^2}{m_{A_1}^2}; \quad Z_K^2 = \frac{m_\rho^2}{m_{K_A}^2}$$

Подставляя эти величины и массы 0^--мезонов, которые экспериментально хорошо установлены, в квадратное уравнение (11), найдем два решения y и соответственно два класса решений для наклона формфактора а λ_0.

Модели	m_ω (Мэв)	m_{K^*} (Мэв)	m_{K_A} (Мэв)	m_{ω_A} (Мэв)	b	$\frac{f_K}{f_\pi f_+(0)}$	$f_+(0)$	Z_π^2	Z_K^2	Z_0^2	Z_8^2	y решения ур. (II) в един. m_π^2	λ_0
Модель I	765	801	—	1081	−0,17	1,35	0,83	0,52	0,39	0,47	0,35	−5,03 2,91	−(0,15÷0,16) −(0,15÷0,16)
Вариант I	—	886	1251	1087	−0,09	1,15	1,005	0,51	0,52	0,51	0,51	188,93 0,79	−(0,313÷0,258) 0,016÷0,013
Вариант II	—	886	1251	1087	−0,10	—	0,669	−0,09	−0,05	−0,09	−0,09	−16,01 − 1,46	−(0,285÷0,305) −(0,319÷0,322)
Вариант III	—	896	1251	1087	−0,10	1,16	1,006	0,67	0,67	0,67	0,67	48,84 2,41	−(0,054÷0,038) 0,015÷0,013
Экспериментальные значения	784	892	1247	1286?		1,27 ± 0,03	$\frac{0,212 \pm 0,005}{\sin\theta}$						−(0,038±0,020) 0,020 ± 0,003

(В таблице приведены вычисленные в различных моделях величины. Незаполненные клетки соответствуют величинам, которые берутся за исходные. θ—угол Каббибо).

здесь мы сталкиваемся со следующей трудностью: так как масса скалярного $\varkappa$-мезона не установлена достоверно (по последним данным [8] резонанс в πK системе с квантовыми числами $\varkappa$-мезона находится в энергетическом интервале 1200—1400 Мэв), то мы не можем указать точное значение параметра λ_0 в нашей модели (см. таблицу). В этой же модели можно вычислить величину $\frac{f_K}{f_\pi f_+(0)}$.

$$\frac{f_K}{f_\pi f_+(0)}=\frac{1-b/2}{1+b}\,\frac{Z_K}{Z_\pi}\,\frac{m_K^2 Z_K/Z_\pi-m_\pi^2 Z_\pi/Z_K}{m_K^2-m_\pi^2} \tag{14}$$

Вычисление по этой формуле в рассматриваемой модели дает $\frac{f_K}{f_\pi f_+(0)}=1,35$ в то время как $\left(\frac{f_K}{f_\pi f_+(0)}\right)_{\text{эксп}}=1,27\pm 0,03$ [5].

Калибровочно-инвариантные модели. Рассмотрим модели с калибровочно-инвариантными лагранжианами:

$$L_1=\frac{1}{12}\left[\xi_\nu(\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu})^2+\xi_A(\mathrm{Tr}\,G_{\mu\nu})^2\right],$$

$$L_2=\frac{B}{8}\,\mathrm{Tr}\,\{(v_\mu+a_\mu)^2 M M^+ +(v_\mu-a_\mu)M^+M\}+$$

$$+\frac{C}{4}\,\mathrm{Tr}\,\{(v_\mu-a_\mu)\,M\,(v_\mu+a_\mu)M^+\}. \tag{15}$$

В этой модели L_1 снимает вырождение по массам $\omega-\varphi$ и $\omega_A-\Phi_A$, а L_2—по $\omega-\rho$ и $\omega_A-\pi_A$. Массовые формулы имеют следующий вид:

1^-:
$$m_\rho^2=\frac{B+C}{6}\,\alpha_0^2(1+b)^2,$$

$$m_{K^*}^2=\frac{B+C}{6}\,\alpha_0^2\left[(1+b)^2-3b\left(1-\frac{b}{2}\right)\right]+\frac{3}{2}\,b^2\alpha_0^2\left(\frac{1}{2}C-y_l^2\right),$$

$$m_\omega^2+m_\varphi^2=\frac{B+C}{6}\,\alpha_0^2\left[\frac{1+2b^2}{1+\xi_\nu}+(1+b)^2-4b\left(1-\frac{b}{2}\right)\right], \tag{16}$$

$$m_\omega^2 m_\varphi^2=\left(\frac{B+C}{6}\,\alpha_0^2\right)^2\frac{(1+b)^2(1-2b)^2}{1+\xi_\nu}.$$

Массовые формулы для соответствующих аксиально-векторных частиц получаются отсюда заменой $C\to 4g^2-C$, $\xi_\nu\to\xi_A$.

Так как число неопределенных параметров, нарушающих симметрию лагранжиана и вакуума, больше, чем число экспериментально хорошо определенных масс $1^\pm$-мезонов, то для замкнутости описания нужно ввести дополнительную известную физическую величину. Здесь имеются две возможности: ввести как известную величину $\frac{f_K}{f_\pi f_+(0)}=1{,}25$ (вариант III) или же ширину распада $\rho\to 2\pi$ $\Gamma_\rho=150$ Мэв (вариант IV), а величину $\frac{f_K}{f_\pi f_+(0)}$ определить уже в рамках модели. Кроме этих двух возможностей, мы рассмотрели модель, когда в (16) $C=0$ (вариант II). Результаты всех этих вычислений приведены в таблице.

Соответственно, наклоны формфактора в этих различных вариантах можно найти, решая сначала уравнение (II), а затем (9), причем массу $\varkappa$-мезона берем в вышеуказанном интервале (см. таблицу). Очевидно, что наиболее близким к настоящей экспериментальной ситуации оказался вариант IV при $M_\varkappa=1400$ Мэв.

Чтобы выяснить роль представления $(1.8)\oplus(8.1)$, перепишем массовые формулы (3) в явном виде для нашего нарушителя (10) и определим параметры, входящие в последний, через массы, константы перенормировки, параметры b и λ_0:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,c=\frac{(1+b)Z_\pi^2 m_\pi^2+\frac{1}{2}\left(m_K^2Z_K^2-\rho M_\varkappa^2 X_\varkappa^2\right)(1-2b)}{-\frac{1}{2}X_\varkappa^2 M_\varkappa^2[\rho+b(1-\rho)]+\frac{5-4b}{6}m_K^2Z_K^2+\frac{2}{3}(1+b)m_\pi^2Z_\pi^2-\frac{\delta_e}{\sqrt{3}}(1-2b)},$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}\,c'=\frac{m_K^2Z_K^2-\rho M_\varkappa^2X_\varkappa^2}{\frac{1}{3}\left(m_K^2Z_K^2+2m_\pi^2Z_\pi^2\right)-\frac{\rho+b}{1+b}X_\varkappa^2M_\varkappa^2-\frac{2}{\sqrt{3}}\delta_e},$$

где

$$\rho\equiv 1-\frac{Z_K^2}{X_\varkappa^2}\,\frac{m_K^2-m_\pi^2}{m_\pi^2}\times$$
$$\times\frac{1}{f_K/f_\pi-Z_K/Z_\pi}\left[\lambda_0-\frac{m_K^2(Z_K/Z_\pi-1)-m_\pi^2(Z_\pi/Z_K-1)}{m_K^2-m_\pi^2}\right].$$

Так как, число соотношений меньше числа неопределенных параметров c, c', δ_e), то имеются две возможности: или $l=0$ (не учитывается вклад представления $(1.8)\oplus(8.1)$, или же $l\neq 0$, $c=c'$ (в представлении $(3.\bar{3})\ominus(\bar{3}.3)$ не имеется „внутреннего нарушения“ симметрии). В первом случае, при $\lambda_0<0$, c существенно отличается от c' и невозможно сказать о преимуществе какой-либо приближенной симметрии. Во втором случае же, $c=c'\approx-\sqrt{2}$, т. е. предпочтительнее приближенная симметрия $SU_2\times SU_2$.

Таким образом, имеющиеся модели векторных мезонов дают возможность удовлетворительного самосогласованного описания спектра масс

$0^{\pm}$ и $1^{\pm}$-мезонов и распада K_{l_3}, при предположении, что в механизм нарушения киральной симметрии вклад дает представление $(1.8)\oplus(8.1)$ группы $SU_3 \times SU_3$. В случае положительного наклона скалярного формфактора K_{l_3}-распада и при имеющихся экспериментальных данных невозможно сделать какое-либо позитивное заключение о характере приближенной симметрии, в то время как в случае отрицательного наклона механизм нарушения киральной симметрии осуществляется по схеме $SU_3 \times SU_3 \to SU_2 \times SU_2 \to SU_2$. Самой неудовлетворительной во всех моделях векторных мезонов получается масса ω_A-частицы, хотя скудность экспериментальной информации о соответствующих резонансах не дает права отбросить возможность существования резонанса в таком массовом интервале.

Проблемная лаборатория ядерной
физики высоких энергий.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Gell-Tann, R. F. Oakes, B. Renner, Phys. Rev., 175, 1968, стр. 2195.
2. А. А. Хелашвили, Школа молодых ученых по физике высоких энергий. Сухуми, 1972, стр. 305.
3. S. Gasiorowicz, D. Geffen, Rev. Mod. Phys., 41, 1969, стр. 531.
4. J. Schechter, Y. Ueda, Phys. Rev., Д3. 1971, стр. 2874.
5. L. M. Chounet, J. M. Gaillard, M. K. Gaillard, Phys. Rev., 4C, 1972, стр. 201.
6. G. Donaldson et al, Phys. Rev. Lett., 31, 1973, стр. 337.
7. К. П. Натрошвили, А. А. Хелашвили, Сообщения АН ГССР, т. 72. № 1, 1974.
8. Particle Data Group. Rev. Mod. Phys., 45, part II, 1973,

ქ. ნატროშვილი

ვექტორული მეზონების მოდელები და K_{l_3}-დაშლის ფორმფაქტორები

რეზიუმე

$SU_3 \times SU_3$ კირალური სიმეტრიის დარღვევის მექანიზმის გამოკვლევის მიზნით შესწავლილია ვექტორული მეზონების რამდენიმე მოდელი: ამ მოდელებში მიღებულია $0^{\pm}$ და $1^{\pm}$ მეზონების სპექტრისა და K_{l_3}-დაშლის ფორმფაქტორების დამაკმაყოფილებელი თვითშეთანხმებული აღწერა იმ დაშვებით, რომ კირალური სიმეტრიის დარღვევის მექანიზმში ვითვალისწინებთ $SU_3 \times SU_3$ ჯგუფის $(1.8)\oplus(8.1)$ წარმოდგენის წვლილს.

K. NATROSHVILI

MODELS OF VECTOR MESONS AND K_{l_3}-DECAY FORM FACTOR

Summary

Some models of vector mesons have been studied with a view to investigate $SU_3 \times SU_3$ chiral symmetry breaking. Taking into account the contribution of $(1.8) \times (8.1)$ representation of $SU_3 \times SU_3$ in the symmetry-breaking scheme adequate description of the masses $0^{\pm}$ and $1^{\pm}$ mesons and K_{l_3}-decay form factor is received in the frame of these models.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

РЕАКЦИИ ПЕРЕДАЧИ С БОЛЬШИМИ ПЕРЕДАВАЕМЫМИ МОМЕНТАМИ

Т. Л. АБЕЛИШВИЛИ

В работе [1] была рассмотрена реакция передачи кластера в сильном кулоновском поле при энергиях выше и ниже кулоновского барьера. Полученные результаты, включавшие в себя как частные случаи результаты различных авторов, были ограничены случаем, когда передаваемый момент λ был равен нулю или пренебрежимо мал, по сравнению с моментами сталкивающихся и разлетающихся ядер.

Настоящая работа является обобщением работы [1] на случай, когда передаваемый момент λ, так же как и моменты сталкивающихся и разлетающихся ядер, является большим ($\lambda \gg 1$).

Рассмотрим реакцию, в которой ядро $c+n$ с массовым числом a, содержащее кластер n (массовое число A_n) в состоянии (l_i, m_1, j_1), передаёт ядру-мишени T (массовое число A) кластер n в состояние (l_2, m_2, j_3):

$$(c+n)+T \rightarrow (T+n)+c.$$

При энергиях ниже кулоновского барьера в приближении нулевого радиуса действия ядерных сил между кластерами c и n в ядре $c+n$ с учётом несущественности области интегрирования внутри ядра сечение реакции передачи в с. ц. м. сталкивающихся ядер можно представить в следующем виде [2] (формулы (3.14)).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^2 \sum_{\mu} | F_{\lambda\mu}(\vartheta, \eta_i, \eta_f, \varkappa) |^2. \tag{1.1}$$

$$F_{\lambda\mu}(\vartheta, \eta_i\ \eta_f\ \varkappa) = \sqrt{2\lambda+1} \sum_{l_i l_f} i^{l_i - l_f} (2l_i+1) \sqrt{2l_f+1}\, e^{i\sigma_{l_i}(\eta_i)+i\sigma_{l_f}(\eta_f)}$$

$$Y_{l_f \mu}(\vartheta, 0) \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} T^{\lambda\varkappa}_{l_i l_f}, \tag{1.2}$$

$$T^{\lambda\varkappa}_{l_i l_f} = \frac{1}{k_i k_f} \int_0^{\infty} F_{l_i}(k_i r)\, h_{\lambda}^{(1)}(i\chi r)\, F_{l_f}(k_f r)\, dr. \tag{1.3}$$

Здесь $F_l(kr)$—регулярное решение радиального волнового уравнения для момента l, $h_{\lambda}^{(1)}(i\chi r)$—сферическая функция Ганкеля, $\sigma_l(\eta) = \arg \Gamma(l+1+i\eta)$—кулоновский сдвиг фаз, $\bar{k}_f = \frac{A}{A+A_n} k_f$

$$\eta_i=\frac{Z_a Z_T e^2 m_i^*}{\hbar^2 k_i},\quad \eta_f=\frac{Z_l Z_{T+n} l^2 m_f^*}{\hbar^2 k_f}.\quad m_i^*=\frac{aA}{a+A}M_p,$$

$$m_f=\frac{(A-A_n)(A+A_n)}{a+A}M_p,$$

$\chi=\sqrt{2m^*|E_n|}/\hbar\Big(E_n<0$—энергия кластера n в ядре $T+n$, $m^*=$ $=\dfrac{A_n A}{A+A_n}M_p\Big)$, ϑ—угол рассеяния. Передаваемый момент λ ограничен условиями $|l_1-l_2|\leqslant\lambda\leqslant l_1+l_2$, $|j_1-j_2|\leqslant\lambda\leqslant j_1+j_2$, $l_1+l_2+\lambda$—чётное число. Учитывая связь между функциями $H\lambda(ix)$ и $K\lambda(x)$ и считая $\lambda\gg1$, используем асимптотические представление функции Макдональьда $K\lambda(x)$ для больших значений индекса λ[3].

$$K\lambda(x)=[4(\lambda^2+x^2)]^{-\frac{1}{4}}\exp\left\{-\sqrt{\lambda^2+x^2}+\lambda Az\,\mathrm{sh}\frac{\lambda}{x}\right\}\times$$

$$\times\left[\sum_m^{M-1}2^m a_m\Gamma(m+1/2).\sqrt{(\lambda^2+x^2)^{-m}}+0(x^{-m})\right],\ \lambda,x>0. \tag{2}$$

$$a_0=1,\ a_1=-\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\left(1-\frac{x^2}{\lambda^2}\right)^{-1},\quad a_2=\frac{3}{128}-\frac{77}{576}\left(1+\frac{x^2}{\lambda^2}\right)^{-1}+$$

$$\cdots\frac{385}{3456}\left(1+\frac{x^2}{\lambda^2}\right)^{-1},\cdots$$

Ограничиваясь в сумме по m первым членом, для функции Ганкеля получим следующее представление:

$$h_\lambda^{(1)}(i\chi r)=-i\sqrt{\frac{1}{\chi r}}\frac{\exp\left(-i(\lambda+1/2)\frac{\pi}{2}\right)}{[(\varkappa r)^2+(\lambda+1/2)^2]^{1/4}}\exp\left\{-\sqrt{(\lambda+1/2)^2-(\varkappa r)^2}+\right.$$

$$\left.+(\lambda+1/2)\,Ar\,\mathrm{sh}\frac{\lambda+1/2}{\varkappa r}\right\}. \tag{3}$$

Используя квазиклассическое приближение радиальных волновых функций $F_l(kr)$ [4] и выражение (3) для функций Ганкеля, интеграл $T^{\lambda\varkappa}_{l_i l_f}$ можно представить в следующем виде (см [1]):

$$T^{\lambda\varkappa}_{l_i f}=\frac{\hbar}{4k_i k_j}\frac{\exp\left(-i(\lambda+1/2)\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2m_f^*\varkappa}}\int_0^\infty\left[\frac{f_i^2(x)f_f^2(x)}{k_i^2 k_f^2}\right]^2\times$$

$$\times\left[1+\left(\frac{(\lambda+1/2)x}{\gamma^{-1/2}\sqrt{-\nu_1 E_n}}\right)^2\right]^{-1/4}e^{-\psi_1}\frac{dx}{x}, \tag{4}$$

$$\psi_1(x,\ l_i,\ l_f,\ \lambda)=\beta\sqrt{2E_i}\left\{\int\limits_{\frac{2E_i}{\varepsilon_i+1}}^{x} f_i(y)\frac{dy}{y^2}-\int\limits_{2E_f/\nu_z(\varepsilon_f+1)}^{x} f_f(y)\frac{dy}{y^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda+{}^1/_2}{\beta\sqrt{2E_i}}\left[\mathrm{Arsh}\,\frac{(\lambda+1/2)x}{\beta\sqrt{-\nu_n E_n}}-\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{-\nu_1 E_4}}{j^{-1/2}(\lambda+1/2)x}\right)^2}\right]\right\}, \qquad (5)$$

$$\nu=\frac{m_i^*}{m_f^*},\quad \nu_n=\frac{m^*}{m_f^*},\quad \nu_z=\frac{Z_l Z_{T+n}}{Z_a Z_T},\ \gamma=\frac{\hbar^2}{2m_f^*(Z_a Z_T)^2}=\frac{\nu}{4E_i\eta_i^2}=\frac{\nu_z^2}{4_f E_f\eta_f^2},$$

$$f_i(y)=\sqrt{\gamma(l_i+1/2)^2y^2+\nu(y-E_i)},\quad f_f(y)=\sqrt{\gamma(l_f+1/2)^2y^2+\nu_z y-E_f}$$

$$\varepsilon_k=\sqrt{(l_k+1/2)^2+\eta_k^2}/\eta_k\qquad \beta=\eta_i\sqrt{\frac{2}{\nu}}=\eta_f\sqrt{2E_f/\nu_z^2 E_i}>1,$$

а x и y—величины обратные r: $y=\dfrac{Z_l Z_T e^2}{r}$.

Так как параметр $\beta>1$, интеграл (4) можно вычислить методом перевала. Заменяя нижний предел интегрирования минус бесконечностью, можно написать

$$T_{l_i l_f}^{\lambda\varkappa}\approx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-\psi_1(x)}dx\approx\varphi(x_0)\sqrt{2\pi\Big/\left|\frac{d^2}{dx^2}\psi_1\right|_{x=x_0}}\;e^{-\psi_1(x_0)},\qquad (6)$$

где

$$\varphi(x)=\frac{\hbar}{4k_i k_f}\,\frac{\exp\left[-i(\lambda+1/2)\frac{\pi}{2}\right]}{\varkappa x}\left[\frac{f_i^2(x)\,f_f^2(x)}{k_i^2\,k_f^2}\right]^{-1/4}\times$$

$$\times\left[1+\left(\frac{(\lambda+1/2)x}{j^{1/2}\sqrt{-\nu_n E_n}}\right)\right]^{-1/4},\qquad (6')$$

а x_0 определяется уравнением $\dfrac{d}{dx}\psi_1=0$, т. е.

$$f_i(x_0)-f_f(x_0)=\sqrt{\gamma(\lambda+1/2)^2x_0^2-\nu_n E_n}.$$

Уравнение (6′) является уравнением четвёртой степени относительно x_0 и нам следует выбрать корень, соответствующий минимуму функции ψ_1. Так как переменная $x\sim\dfrac{1}{r}$, параметры, входящие в выражение (6′), должны удовлетворять ограничениям, обусловленным действительностью точки перевала x_0. В результате интегрирования в (5) с учётом (6′) получим

$$\psi_1(x_0,\ l_i,\ l_f,\ \lambda)=(l_i+1/2)\ \mathrm{Arch}\,\frac{2\gamma(l_i+1/2)^2x_0+\nu_i}{\nu_i\varepsilon_i}-$$

$$-(l_f+1/2)\,Ar\,\mathrm{ch}\frac{2\gamma(l_f+1/2)^2+\nu_z}{\nu_z\varepsilon_f}+\eta_i\arccos\frac{2E_i-x_0}{x_0\varepsilon_i}-$$

$$-\eta_f\arccos\frac{2E_f-\nu_z x_0}{\nu_z\varepsilon_f x_0}+(\lambda+1/2)\,\mathrm{Arsh}\frac{(\lambda+1/2)\,x_0\sqrt{\gamma}}{\sqrt{-\nu_n E_n}}, \qquad (7)$$

Можно показать, что аргументы, стоящие под знаком $Ar\mathrm{ch}$-ов больше единицы, а аргументы, стоящие под знаком arccos-ов, меньше единицы, поэтому функция ψ_1 является действительной.

При энергиях выше кулоновского барьера формулу (1.2) для выражения $F\lambda\mu$ запишем в следующем виде:

$$F\lambda\mu=\sqrt{2\lambda+1}\sum_{l_i l_f} a_{l_i}^{l_i l_f}(2l_i+1)\sqrt{2l_f+1}\; e^{i\sigma_{l_i}+i\sigma_{l_f}}\times$$

$$\times Y l_f\mu(\vartheta,0)\begin{pmatrix} l_i, & l_f, & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} T^{\lambda\mu}_{l_i l_f}, \qquad (8)$$

где $a_{l_i}=\left(1+\exp\left[\frac{L_i-l_i}{\delta}\right]\right)^{-1}$ —коэффициенты прилипания (L_i—орбитальный момент, при котором прицельное расстояние равно сумме радиусов сталкивающихся ядер R_a+R_T, т. е. $L_i=k_i(R_a+R_T)\sqrt{1-\frac{Z_a Z_T e^2}{E_i(R_a+R_T)}}$, δ—параметр, характеризующий размеры переходного слоя ядра). Заменив в выражении (8) сумму по l_i интегралом и замечая, что основной вклад в интеграл даёт окрестность точки L_i, мы можем экспоненты функций $T^{\lambda\varkappa}_{l_i l_f}$ и $e^{i\sigma_{l_i}(\eta_i)}$ разложить в ряд по (l_i-L_i) и ограничиться первым членом разложения.

3_j — символы $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ для больших значений l_1, l_2, l_3 не содержат экспоненциальной зависимости от моментов [5]. Можно показать, что и величины $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}$ так же не содержат экспоненциальной зависимости от моментов и их проекций.

Поэтому в подинтегральном выражении можно написать

$$e^{i\sigma_{l_i}(\eta_i)}\approx e^{i\sigma_{L_i}(\eta_i)}\,e^{i\theta_i(l_i-L_i)}, \qquad \theta_i=\left.\frac{d\sigma_{l_i}(\eta_i)}{dl_i}\right|_{l_i=L_i}=\mathrm{arctg}\,\frac{\eta_i}{L_i+1/2},$$

и, согласно (6),

$$T^{\lambda\varkappa}_{l_i l_f}\approx T^{\lambda\varkappa}_{L_i l_f}\exp\left(-\frac{\Delta_i}{2}(l_i-L_i)\right), \qquad \frac{\Delta_i}{2}=\frac{d}{dl_i}\psi_1(x_0, l_i, l_f, \lambda)\Big|_{l_i=L}. \qquad (9)$$

В результате интегрирования по dl_i получим

$$F\lambda\mu=\sqrt{2\lambda+1}\; e^{i\sigma_{L_i}(\eta_i)}(2L_i+1)\, i^{L_i}\pi\delta\sum\sqrt{2l_f+1}\times$$

$$\times i^{-l_f} e^{i\sigma_{l_f}(\eta_f)} \begin{pmatrix} L_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_i & l_f & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$Y_{l_f\mu}(\vartheta, 0)\, T^{\lambda\varkappa}_{L_i l_f} \operatorname{cosec}\left\{\pi\delta\left[\frac{\Delta_i}{2} - i\theta_i\right]\right\}. \qquad (10)$$

Сумму по l_f можно вычислить методом стационарной фазы. Для этой цели используем квазиклассическое представление сферической функции для больших угловых моментов l_f [6], которое для отталкивающего кулоновского потенциала можно записать в следующем виде:

$$Y_{l_f\mu}(\vartheta, 0) = \frac{\sqrt{2l_f+1}}{2\pi\left[(l_f+1/2)^2\sin^2\vartheta - \mu^2\right]^{1/4}}\, e^{-i\psi_2},$$

где

$$\psi_2 = -\pi l_f + (l_f+1/2)\arccos\frac{(l_f+1/2)\cos\vartheta}{\sqrt{(l_f+1/2)^2-\mu^2}} - |\mu|\arccos\frac{|\mu|\operatorname{ctg}\vartheta}{\sqrt{(l_f+1/2)^2-\mu^2}}.$$

Заменяя сумму по l_f в (10) интегралом и интегрируя методом стационарной фазы, получим

$$F_{\lambda\mu} = \delta\sqrt{2\lambda+1}\,(2L_f+1)(2L_i+1)\begin{pmatrix} L_i & L_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} L_i & L_f & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} e^{i\sigma_{L_i}(\eta_i)+i\sigma_{L_f}(\eta_f)}\, i^{L_i-L_f}\, T^{\lambda\varkappa}_{L_iL_f}$$

$$\frac{e^{-i\psi_2}}{2\left[(l_f+1/2)^2-\mu^2\right]^{1/4}} \operatorname{cosec}\left\{\pi\delta\left[\frac{\Delta_i}{2} - i\theta_i\right]\right\} \sqrt{2\pi/\,|\,\Phi(L_i, L_f, \vartheta\,\lambda, \mu, x_0)\,|},$$

где

$$\Phi = \frac{\vartheta^2}{\vartheta l_f^2}\left[i\sigma_{l_f}(\eta_f) - i\psi_2 - \psi_1\right]_{l_f=L_f},$$

а L_f определяется из условия

$$\frac{\vartheta}{\vartheta l_f}\left[\sigma_{l_f} - i\psi_2 - \psi_1\right]_{l_f=L_f} = i\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta_f}{L_\alpha+1/2} + i\arccos\frac{(L_i+1/2)\cos\vartheta}{\sqrt{(L_f+1/2)^2-\mu^2}} -$$

$$-\operatorname{Arch}\frac{2\gamma(l_f+1/2)^2+\nu_z}{\nu_z\varepsilon_f} - \operatorname{Arch}\frac{(\lambda+1/2)x_0}{B\sqrt{-\nu_n E_n}} = 0.$$

Таким образом, согласно (1.1), окончательно получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim \sum_\lambda \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^2 (2\lambda+1)(2L_f+1)^2(2L_i+1)^2 \begin{pmatrix} L_i & L_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 |T^{\lambda\varkappa}_{L_iL_f}|^2 \frac{\pi\delta^2}{2}\times$$

$$\times\left|\operatorname{cosec}\left\{\pi\delta\left[\frac{\Delta_i}{2} - i\theta_i\right]\right\}\right| B,$$

где

$$B = \sum_\mu \begin{pmatrix} L_i & L_f & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}^2 \{\,|\,\Phi\,|\,[L_f^2\sin^2\vartheta - \mu^2]\}^{-1},$$

а $T^{\lambda\varkappa}_{L_iL_f}$ имеет вид, определяемый формулой (6).

Полное сечение определяется формулой

$$\sigma(E) \sim \frac{\overline{k_f}}{k_i}\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{k_f}{k_i}\sum_{\lambda}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^2 \sum_{\mu}\int \mid F_{\lambda\mu} \mid ^2 d\Omega.$$

Используя ортогональность сферических функций и свойства $3j$ символов

$$\sum_{\mu}\begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_i' & l_f & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2l_i+1}\delta_{l_i' l_i},$$

с учётом формулы (8) получим

$$\sum_{\mu}\int \mid F_{\lambda\mu} \mid ^2 d\Omega = (2\lambda+1)\sum_{l_i l_f}(a_{l_i}^2 (2l_i+1)(2l_f+1)\begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid T_{l_i l_f}^{\lambda\varkappa} \mid ^2.$$

Сумму по l_i можно вычислить так же, как это было сделано при вычислении углового распределения:

$$\sum_{\mu}\int \mid F_{\lambda\mu} \mid ^2 d\Omega =$$

$$= (2\lambda+1)(2L_i+1)\pi\delta\sum_{l_f}(2l_f+1)\begin{pmatrix} L_i & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \mid T_{L_i l_f}^{\lambda\varkappa} \mid ^2 \frac{1-\Delta_i\delta}{\sin(\pi\Delta_i\delta)}.$$

Используя формулу (6) для $T_{L_i l_f}^{\lambda\varkappa}$, сумму по l_f можно вычислить методом перевала. Окончательно получим

$$\sigma(E) \sim \frac{\overline{k_f}}{k_i}\pi^{3/2}\delta\sum_{\lambda}\begin{pmatrix} j_i & j_f & \lambda \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^2 (2\lambda+1)(2L_i+1)(2L_f+1)\begin{pmatrix} L_i & L_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot$$

$$\frac{1-\delta\Delta_i}{\sin(\pi^\delta\Delta_i)} - T_{L_i L_f}^{\lambda\varkappa} \mid ^2 \left\{\left|\frac{\partial^2}{\partial l_f^2}\psi_1\right|_{l_f=L_f}\right\}^{-1/2}.$$

Более детальный анализ полученных формул связан с исследованием корней уравнения (6) для точки перевала x_0. Этот анализ и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными будут сделаны в следующей работе.

Проблемная лаборатория передачи
и обработки информации в больших
системах управления

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Л. Абелишвили, ЯФ, 13, 1042, 1971.
2. D Trautman, K. Alder. Helv. Phys. Acta, 43. 363, 1970.
3. Г. Бейтман, А. Эрдеии, Высшие трансцендентные функции, т. II, „Наука", 1965.
4. R. Alder, A. Bohr, T. Huus, B. Mottelson, A. Winter, Rev. Mod. Phys., 28, 432, 1956 (Перевод в сб. „Деформация атомных ядер", ИИЛ, 1958).
5. Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, „Наука", 1965.
6. А. Б. Мигдал. В. П. Крайнов, Приближённые методы квантовой механики „Наука", 1966.

თ. აბელიშვილი

გადაცემის რეაქციები დიდი გადაცემადი მომენტებით

რ ე ზ ი უ მ ე

კულონურ ჯებირზე ნაკლები ენერგიის შემთხვევაში გამოთვლილია კულონური რადიალური მატრიცული ელემენტი გადაცემის რეაქციისათვის, როდესაც გადაცემადი მომენტი დიდია.

კულონურ ჯებირზე მეტი ენერგიის შემთხვევაში გამოთვლილია კუთხური ენერგეტიკული განაწილება არეკვლის კოეფიციენტების გათვალისწინებით.

T. ABELISHVILI

TRANSFER REACTIONS WITH LARGE TRANSFERRED ANGULAR MOMENTA

S u m m a r y

The cluster transfer in nuclear collision is studied for energies below and above the Coulomb barrier when the transferred angular momentum is large.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

РАСЧЕТ СКОРОСТИ ВОСХОДЯЩЕГО ПОТОКА В КОНВЕКТИВНОМ ОБЛАКЕ

Г. К. СУЛАКВЕЛИДЗЕ, Я. Г. СУЛАКВЕЛИДЗЕ, Л. Г. ИНАНИШВИЛИ

Величина квадрата скорости восходящего потока в конвективном облаке определяет условия, обеспечивающие выпадение града и ливневых осадков [1,2]. Величину скорости восходящего потока в конвективном облаке можно рассчитать по методу слоя и по методу частицы, причем величины, полученные в результате расчетов, проведенных этими методами, не отличаются друг от друга до высоты Z_m, на которой разность между температурами поднимающегося (T_n) и окружающего (T_c) воздуха достигает максимального значения ($\Delta T \to \Delta T_m$).

При адиабатическом подъеме воздуха максимальную величину квадрата скорости восходящего потока w_m^2 можно получить из уравнения А. Ф. Дюбука [2, 3]:

$$W_m^2 = B \int_{P_k}^{P_m} (T_n - T_c)\, d(-\lg P), \tag{1}$$

где $B = 2\mathrm{R}\lg e$, R—удельная газовая постоянная гомогенной атмосферы, e—число Непера, P_k, R_m—давления атмосферы на уровнях конденсации Z_k и Z_m соответственно (скорость восходящего потока воздуха на нижней границе облака Z_k принимается равной нулю).

Интеграл в формуле (1) определяется графически на эммаграме как площадь, взятая в соответствующем масштабе, заключенная между кривой состояния, кривой стратификации и отрезком ΔT на уровне Z_m.

Н. С. Шишкин, Н. И. Глушкова и др. [1,2], исходя из метода слоя, предложили несколько видоизмененные формулы для расчета W_m^2, в которые входит коэффициент полезного действия

$$W_m^2 = 2\eta C_p \Delta T_m (\lg P_k - \lg P_m), \tag{2}$$

где C_p—удельная теплоемкоеть воздуха при постоянном давлении, $\eta = \frac{T_k - T_m}{T_k}$—к. п. д., T_m—температура сухого воздуха не уровне Z_m.

Величина W_m^2 как функция параметров атмосферы может быть рассчитана также более простым способом. Для центральной части облака, где $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$, дифференциальное уравнение для определения величины

w_m^2, при квазистатическом и адиабатическом процессе, можно записать в виде [1, 2[:

$$dw^2 = 2g\,\frac{\gamma-\gamma_b}{T_l(z)}(z-z_k)dz, \tag{3}$$

где γ и γ_b—соответственно градиенты по высоте температуры окружающего и влажноадиабатически поднимающего воздуха, $T_c(z)=T_k-\gamma(z-z_k)$, $T_c(z)$ и T_k—температуры окружающего воздуха на уровне z и на уровне конденсации z_k соответственно.

В реальной атмосфере γ и γ_b могут быть постоянными в интервале высот $\Delta z=z-z_k$ или же менятся по высоте. При постоянных γ и γ_b в интервале высот Δz получим:

$$w^2 = w_0^2 + 2g(\gamma-\gamma_l)\int\limits_{z_k}^{z}\frac{z-z_k}{T_k-\gamma(z-z_k)}\,dz, \tag{4}$$

Для величины w^2, при $w_0 \equiv 0$, получим:

$$w^2 = 2g\,\frac{\gamma-\gamma_b}{\gamma^2}\,T_k\left[\frac{T(z)}{T_k}+\ln\frac{T_k}{T(z)}-1\right]. \tag{5}$$

Уравнение (4) позволяет рассчитать величину w для любой высоты в интеграле $z_k \leqslant z \leqslant z_m$. При $z>z_m$ величина $\gamma-\gamma_b<0$ и уравнения (3) и (5) теряют смысл, так как $w^2<0$.

Уравнение (5) можно упростить, учитывая что γ постоянна в интервале $z_k \leqslant z \leqslant z_m$. В этом случае $T(z)$ в уравнении (4) можно заменить его средним значением

$$\overline{T}(z) = \frac{T_k+T(z)}{2}. \tag{6}$$

Внося значение $\overline{T}(z)$ из уравнения (6) в уравнение (4) и применяя теорию о среднем, обозначив $\Delta T=(\gamma-\gamma_b)\Delta z$, получим

$$w^2(z) = 2g\,\frac{\Delta T}{T_k+T_l(z)}\,\Delta z, \tag{7}$$

из которого для w_m^2 при $\Delta T=\Delta T_m$, $z=z_m$ и $z_m-z_k=\Delta z$, найдем:

$$w_m^2 = 2g\,\frac{\Delta T_m}{T_k+T_m}\,\Delta T_m. \tag{8}$$

Если для всего интервала высот Δz γ и γ_b нельзя принять постоянными величинами, то его следует разбить на n участков (обычно не больше трех), в которых $\gamma-\gamma_b=\text{const}$, и решить уравнение (7) для каждого из этих участков, суммируя w_i^2 по n.

Если $w_0 \neq 0$, то w_0^2 рассчитывается по уравнению (7), в котором $\gamma-\gamma_b$ заменяется $\gamma-\gamma_c$ и $\Delta T=(\gamma-\gamma_c)\Delta z_1$, а $\Delta z_1=z_k-z_0$, где z_0—высота поверхности земли, а γ_c—величина сухоадиабатического градиента, т. к. воздушная частица от уровня z_0 до z_k поднимается по сухоадиабате.

Уровень конденсации z_k рассчитывается с учетом вовлечения окружающего воздуха по методу, описанному в работах [2,4]. При определенной w_m^2 в мощнокучевых облаках, радиус нижнего основания которых больше 5 км, поправкой на вовлечение окружающего воздуха выше уровня конденсации $|z > z_k|$ можно пренебречь [4]. При расчете града и ливневых осадков w_m^2 можно определить по уравнению (8), усредняя величины γ и γ_b в интервале высот Δz_m. Желательно при этих расчетах для параметров, входящих в уравнение (8), использовать прогностическую стратификацию.

В результате проделанной работы удалось уточнить уравнение для расчета скорости восходящего потока воздуха. В отличие от предыдущих уравнений, в этом случае не делается никаких искусственных допущений. Уравнение (8) для определения w_m справедливо для адиабатических и квазистатических процессов, протекающих в атмосфере.

По данным радиозондирования и уравнения (8) мы рассчитали w_m для различных погодных условий. В случае погоды без осадков $w_m < 0$; когда же w_m принимало небольшие положительные значения, наблюдались слабые осадки, при интенсивных ливневых осадках ($Q \geqslant 20$ мм) $w_m > 25 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$; при граде же $w_m > 40 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Эти расчеты показали, что по новому уравнению можно более точно прогнозировать ливневые осадки и град.

Кафедры
геофизики и метеорологии,
климатологии и океанологии

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Шишкин, Облака, осадки и грозовое электричество, Л, 1964.
2. Г. К. Сулаквелидзе, Н. И. Глушкова, Л. М. Федченко, Прогноз града, гроз и ливневых осадков, Л., 1970.
3. Л. Т. Матвеев, Основы общей метеорологии, К., 1965.
4. И. А. Славин. Метеорология и гидрология, 11, 1970.
5. Г. К. Сулаквелидзе, Ливневые осадки и град, Л., 1967.

ზ. სულაქველიძე, ი. სულაქველიძე,
ლ. ინანიშვილი

კონვექტიურ ღრუბელში აღმავალი დენის სიჩქარის გამოთვლა

რეზიუმე

შრომაში მიღებულია ახალი, უფრო ზუსტი განტოლებები ატმოსფეროში აღმავალი დინებისა და არამდგრადობის ენერგიის გამოსაანგარიშებლად.

G. SULAKVELIDZE, I. SULAKVELIDZE, L. INANISHVILI

CALCULATION OF UPDRAFT VELOCITY IN CONVECTIVE CLOUDS

Summary

A new, more correct formula has been derived for the calculation of the updraft velocity valid for quasistatic ànd adiabatic processes in convective clouds.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗА ГЕОПОТЕНЦИАЛА ПО ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА РОССБИ

З. В. ХВЕДЕЛИДЗЕ

Прогноз погоды представляет собой одну из наиболее важных и сложных проблем современной науки. Научный поиск, который имел место в гидродинамической теории прогноза погоды, привел к ряду весьма полных и физически содержательных постановок задач, которые в настоящее время принимаются в качестве основы для развития численных методов. Современное состояние численных методов краткосрочного прогноза характеризуется широким их использованием в повседневной оперативной практике.

Наметившийся в настоящее время процесс уточнения постановки задачи краткосрочного прогноза погоды связан в первую очередь с отказом от гипотезы квазигеострофичности и использованием в качестве исходных уравнений полной системы уравнения термодинамики.

В последние годы, в связи с быстрым развитием вычислительной техники и прикладной математики, для прогноза метеорологических элементов часто применяются полные (примитивные, по отношению преобразований) уравнения гидротермодинамики в квазистическом приближении.

Такой подход к прогнозу метеорологических элементов позволяет с более высокой точностью описывать все процессы, протекающие в атмосфере Земли.

В рамках примитивных схем используются не только геопотенциалы исходных полей, но и скорости ветра, что дает возможность учесть дополнительную существенную информацию. В этом направлении все методы решения можно поделить на два больших класса.

К первому классу относятся конечноразностные методы решения исходной системы уравнений гидротермодинамики, во второму—методы решения полной системы уравнений гидротермодинамики, основанные на построении функций Грина соответствующих краевых задач. В предлагаемой статье сделана попытка обобщить полученные результаты на случай бароклинной атмосферы с учетом эффекта Россби.

Уравнения гидротермодинамики в предположениях о квазистичности и квазиадиабатичности атмосферных процессов записывают в следующем виде [1, 2, 3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x}-lv=-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\tau}{p}\frac{\partial u}{\partial \xi}=-B_u \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial y}+lu=-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\tau}{p}\frac{\partial v}{\partial \zeta}=B_v \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{p}\frac{\partial \tau}{\partial \zeta}=0 \qquad (3)$$

$$\zeta^2\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial \zeta}+c^2\frac{\tau}{p}=-\zeta^2\left(u\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial \zeta}+v\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial \zeta}\right)=B_T \qquad (4)$$

С помощью теоремы Гельмгольда, на основании которой имеем

$$u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где ψ—функция тока, φ—потенциал скорости, $H=gH$, перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t}+l\Delta\varphi+\beta u+\beta' v=B_\Omega \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t}+\Delta H-\beta v-\beta u-l\Delta\psi=B_D, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta}=-\Delta\varphi, \qquad (7)$$

где значения B_Ω и B_D очевидны; а остальные обозначения общеприняты [1—2—3].

Применяя оператор Карсона—Хевисайда по $t_1=lt$, $\overline{H}=\int\limits_0^\infty He^{-pt}dt$, получим:

$$p\Delta\overline{\psi}+\Delta\overline{\varphi}+\frac{\beta}{l}\overline{u}+\frac{\beta'}{l}\overline{v}=\frac{1}{l}B_\Omega+p\Delta\psi_0, \qquad (8)$$

$$p\Delta\overline{\varphi}+\frac{1}{l}\Delta H-\frac{\beta}{l}\overline{v}+\frac{\beta'}{l}\overline{u}-\Delta\overline{\psi}=\frac{1}{l}B_D+p\Delta\varphi_0, \qquad (9)$$

$$\Delta\overline{\varphi}=-\frac{\partial\overline{\tau}}{\partial \zeta}, \qquad (10)$$

$$l\zeta^2 p\frac{\partial \overline{H}}{\partial \zeta}+c^2\tau=B_T+lp\zeta^2\frac{\partial H_0}{\partial \zeta}. \qquad (11)$$

В (8) и (9) заменим $\overline{u}$ и $\overline{v}$ их геострофическими значениями и решив эту систему относительно $\overline{H}$, получим

$$\frac{o}{\partial \zeta}\zeta^2\frac{\partial \overline{H}}{\partial \zeta}+\frac{c^2}{l^2}\frac{1}{1+p^2}\Delta\overline{H}+\frac{c^2}{l^2}\frac{1}{2+p^2}\frac{\partial \overline{H}}{\partial x}\left(\frac{\beta'}{p}-\beta\right)-$$

$$-\frac{c^2}{l^2}\frac{1}{1+p^2}\frac{\partial \overline{H}}{\partial y}\left(\beta' + \frac{\beta}{p}\right) = \frac{1}{lp}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(B_T + \zeta^2 lp\frac{\partial H_p}{\partial\zeta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{1+p^2}\left[\frac{1}{l}B_\Omega + p\Delta\psi_0 + \frac{1}{l}B_D + p\,\Delta\varphi_0\right]\right\} = \overline{F}(x, y, \zeta, p). \tag{12}$$

Для решения этого уравнения нужно задать два граничных условия для ζ. как это было сделано в [2].

1) $\zeta\to\infty$ величина $\zeta\frac{\partial H}{\partial\zeta}$ ограничена

и 2) $\zeta=1$, $\frac{\partial\overline{H}}{\partial\zeta}+\alpha\overline{H}=\overline{f}(x, y, p)$,

где $\alpha=\frac{c^2}{RT}$;

$$\overline{f}(x, y, p)=\frac{1}{lp}\left\{\left[B_T-\tilde{\alpha}\left(u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)\right]_{\zeta=1}+l\left(\frac{\partial H_0}{\partial\zeta}+\alpha H_0\right)\right\} \tag{13}$$

Вводя новые переменные [3—4]

$$x_1=\frac{l}{c}\sqrt{1+p^2}\,x;\quad y=\frac{l}{c}\sqrt{1+p^2};\quad \zeta=-\ln\zeta$$

и новую функцию $\overline{H}_1^1=\overline{H}e^{-\xi}$, получаем:

$$\Delta\overline{H}_1^1+a\frac{\partial\overline{H}_1^1}{\partial x}+b\frac{\partial\overline{H}_1^1}{\partial y}-\overline{H}_1^1=\overline{F}_1. \tag{14}$$

Здесь

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2};\qquad a=\frac{\beta'-p\beta}{l^2p};\qquad b=-\frac{\beta+\beta' p}{l^2 p}.$$

Граничные условия принимают вид:

$$\text{при } \xi=0:\ \frac{\partial\overline{H}_1^1}{\partial\xi}+(1-\alpha)\overline{H}_1=e^{-\xi}f=f_1,$$
$$\text{при } \xi\to\infty:\quad \overline{H}_1^1\to 0. \tag{15}$$

Положим

$$\overline{H}_1^1=\psi e^{-\frac{ax_1+by_1}{2}}.$$

Тогда

$$\Delta\psi-\varkappa^2\psi=F, \tag{16}$$

где

$$\varkappa^2=\frac{a^2+b^2+4}{4}>0$$

а условия (15) примут вид:

$$\text{при } \xi\to\infty:\ \psi=0$$
$$\text{при } \xi=0;\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi}+(1-\alpha)\psi=f_1 e^{\frac{ax_1+by_1}{2}}=M(x, y, p) \tag{17}$$

После несложных преобразований [4—5] решение для ψ запишется как

$$\psi=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\iiint F\left(\frac{e^{-\nu|\xi-\xi'|}}{2\nu}+c_1e^{-\nu\xi}\right)\times$$

$$\times\exp\left[ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y_1-y_1')\right]dk_1dk_2dx_1'\,dy_1'\,d\xi \tag{18}$$

$$\nu-\sqrt{k_1^2+k_2^2+\varkappa^2}$$

Постоянная c_1 найдется из условия у земли. Подставляя ее в (17) получим (для упрощения, будем писать только один интеграл по ξ, выписав все в полном виде в окончательном решении):

$$\left[\int\limits_0^\infty F\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{e^{-\nu|\xi-\xi'|}}{2\nu}+c_1e^{-\nu\zeta}\right)d\xi'+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\int\limits_0^\infty\left(F\frac{e^{-\nu|\xi'-\xi|}}{2\nu}+c_1e^{-\nu\xi}d\xi'\right)\right]_{\xi=0}=M$$

или

$$\int\limits_0^\infty F\frac{1}{2}e^{-\nu|\xi'-\xi|}\,d\xi'-\nu\int\limits_0^\infty Fc_1e^{-\nu\xi}\,d\xi'+E\int\limits_0^\infty F\frac{e^{-\nu|\xi'-\xi|}}{2\nu}\,d\xi'+$$

$$+E\int\limits_0^\infty Fc_1e^{-\nu\xi}\,d\xi'\Big|_{\xi=0}=M\cdot(E=1-\alpha).$$

Отсюда

$$c_1\int\limits_0^\infty F\,d\xi'=\frac{M}{E-\nu}-\frac{E-\nu}{2\nu(E-\nu)}\int\limits_0^\infty Fe^{-\nu\xi'}\,d\xi'. \tag{19}$$

Подставляя значение $c_1\int\limits_0^\infty Fd\xi'$ в (18), найдем

$$\psi=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\iiint F\frac{e^{-\nu|\xi-\xi'|}-e^{-\nu|\xi+\xi'|}}{\nu}\times$$

$$\times\exp\left[ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y_1-y_1')\right]dk_1dk_2\,dx_1'\,dy_1'\,d\xi'+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty\iiint F\,\frac{1}{E-\nu}e^{-\nu|\xi+\zeta'|}\exp\left[ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y_1-y_1')\right]\times$$

$$\times dk_1\,dk_2\,dx_1'\,dy_1'\,d\xi'+\frac{1}{4\pi^2}\int\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{M}{E-\nu}e^{-\nu\xi}\times$$

$$\exp\left[ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y_1-y_1')\right]dk_1\,dk_2\,dx_1'\,dy_1'. \tag{20}$$

Здесь учитывалось, что

$$\frac{E+\nu}{\nu(E-\nu)}=\frac{1}{\nu}+\frac{2}{E-\nu}.$$

Перепишем уравнение (20) в следующем виде:

$$\psi=\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}F(B_1+B_2)dx_1'dy'd\xi'+\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}MB_3\,dx_1'dy_i', \tag{21}$$

где

$$B_1=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\nu|\xi-\xi'|}-e^{\nu|\xi+\xi'|}}{\nu}\exp\left[ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y_1-y_1')\right]dk_1\,dk_2;$$

$$B_2=-2\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\nu\xi}}{E-\nu}\exp\left[ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y_1-y_1')\right]dk_1\,dk_2;$$

$$B_3=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\nu\xi}}{E-\nu}\exp\left]ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y_1-y_1')\right]dk_1\,dk_2.$$

Перейдем от переменных k_1 и k_2 к переменным ρ и δ, т. е. $k_1=\rho\cos\delta$; $k_2=\rho\sin\delta$. Положим еще

$x_1-x_1'=r\sin\vartheta$; $y_1-y_1'=r\cos\vartheta$; $k_1(x_1-x_1')+k_2(y_1-y_1')=r\rho\cos(\delta-\vartheta)$

В новых переменных в выражении B_1 интеграл берется точно

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\nu|\xi-\xi'|}-e^{-\nu|\xi+\xi'|}}{\nu}\exp\left[ik_1(x_1-x_1')+ik_2(y-y_1')\right]dk_1\,dk_2=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\nu|\xi-\xi'|}-e^{-\nu|\xi+\xi'|}}{\nu}\exp\left[i\rho r\cos(\delta-\vartheta)\right]\alpha\,d\rho\,d\vartheta=$$

$$=2\pi\left[\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\pi^2+b^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+b^2)}}\right]_{b=\xi+\xi'}^{b=\xi-\zeta'}.$$

B_2 и B_3 имеют одну и ту же структуру и вместо них можно рассматривать такой интеграл:

$$B=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-\nu u}}{E-\nu}\exp\left[i\rho r\cos(\delta-\vartheta)\right|\rho\,d\rho\,d\vartheta=-2\pi e^{-Eu}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-(\nu-E)u}}{\nu-E}J_0(r,\rho)\rho d\rho,$$

т. е. надо вычислить интеграл:

$$D=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-(\nu-E)u}}{\nu-E}J^0(r,\rho)\rho d\rho,$$

где J_0—функция Бесселя нулевого порядка. Дифференцируя по u, получаем:

$$\frac{\partial D}{\partial u} = -\int\limits_0^\infty e^{-(\nu - E)u} J_0(r, \rho)\rho d\rho = e^{Eu}\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{22}$$

где

$$E = \int\limits_0^\infty \frac{1}{v} e^{-\nu u} J_0(r, \rho)\,\rho\,d\rho = \frac{\exp\left[\sqrt{\varkappa^2(\rho_2 + u^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + u^2)}}.$$

В (22) берем от обоих частей интеграл по u (интегрируя по частям). Будем иметь

$$D = \int\limits_0^\infty e^{Eu}\frac{\partial F}{\partial u}du = -e^{Eu}F + E\int\limits_u^\infty Fe^{Eu}\,du.$$

Следовательно,

$$B = 2\pi\left(F - e^{-Eu}E\int\limits_u^\infty Fe^{Eu}\,du\right). \tag{23}$$

С помощью (23) можно написать:

$$B_2 - -4\pi\left(F_1 - e^{-Eu_1}E\int\limits_{u'}^\infty F_1 e^{Eu_1}\,du_1\right),$$

$$B_3 = 2\pi\left(F_2 - e^{-Eu_2}E\int\limits_{u_2}^\infty F_2 e^{Eu_2}\,du_2\right),$$

где

$$F_1 = \frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi + \xi'|^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi + \xi'|)^2}};$$

$$F_2 = \frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + \xi^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + \xi^2)}}; \qquad \begin{aligned} u_1 &= \xi + \xi'; \\ u_2 &= \xi. \end{aligned}$$

Подставляем все полученные значения (21), для ψ получим;

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\infty F\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi - \xi'|^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi - \xi'|^2)}}\,dx_1'\,dy_1'\,d\xi' +$$

$$+\frac{3}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\infty F\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi + \xi'|^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi + \xi'|^2)}}\,dx_1'dy_1'd\xi_1' -$$

$$-\frac{1-\alpha}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^\infty e^{-(1-\alpha)u_1}\int\limits_{u_1}^\infty F\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi + \xi'|^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2 + |\xi + \xi'|^2)}}du_1dx_1'dy_1'd\xi' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} M\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi')}}\,dx_1'dy'-$$

$$-\frac{1-\alpha}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} c^{-(1-\alpha)u_2}\int\limits_{u_2}^{\infty}\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi^2)}\right[}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi^2)}}M\,dx_1'\,dy_1'\,du_2 \tag{24}$$

Возвращаясь к функциям $\overline{H}_1$, $\overline{f}_1$ и $\overline{F}_1$ получим:

$$\overline{H}_1'=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\overline{F}_1\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2\,|\,\xi-\xi'\,|^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2\,(\partial^2+\,|\,\xi-\xi'|^2)}}\,dx_1'dy_1'd\xi'+$$

$$+\frac{3}{4\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\overline{F}_1\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\,|\,\xi+\xi'\,|^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\,|\,\xi+\xi'\,|^2)}}\,dx_1'dy_1'd\xi'- \tag{25}$$

$$-\frac{1-\alpha}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}e^{-(1-\alpha)u_1}\int\limits_{u_1}^{\infty}\overline{F}_1\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\,|\,\xi+\xi'\,^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\,|\,\xi+\xi'\,|^2)}}\,dx_1'dy_1'd\xi'du_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi^2)}}\,dx_1'\,dy_1'-$$

$$-\frac{1-\alpha}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-(1-\alpha)u_2}\int\limits_{u_2}^{\infty}\overline{f}\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+\xi^2)}}\,dx_1'\,dy_1'\,du_2'.$$

Вспомнив, что $\xi=-\ln\zeta$, перенесем операцию дифференцирования с источника поля на функцию влияния. Учитывая вид функции $\overline{F}_1$, по формуле (21) будем иметь:

$$\int\limits_0^{\infty}\overline{F}_1(B_1+B_2)\,d\xi'=\int\limits_0^1\frac{1}{\zeta'}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(B_T+\zeta'^2\,lp\,\frac{\partial H_0}{\partial\zeta}\right)\times$$

$$\times(B_1+B_2)\,d\zeta'=(B_1+B_2)\Big|_{\zeta=0}^{\xi=1}\left(B_T+\zeta'^2\,lp\,\frac{\partial H_0}{\partial\zeta}\right)\Big|_{\zeta=0}^{\zeta=1}-$$

$$-\int\limits_0^1\left(B_T+\xi'^2\,\frac{\partial H_0}{\partial\zeta}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'}\,\frac{1}{\zeta'}\,(B_1+B_2)d\zeta'.$$

Но так как

$$B_1\Big|_{\zeta=0}^{\zeta-1}=0;\qquad B_2\Big|_{\zeta=0}^{\zeta=2}=-B_3,$$

то решение для H_1 запишется в виде (см. формулы (21) и (25)):

$$\overline{H}_1'=\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits^{\infty}\int\limits^{1}(B_\Omega+lp\Delta\psi_0)\,\overline{G}_1\,dx_1'dy_1'd\zeta'+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^1 (B_D+lp\Delta\varphi_0)\,\overline{G}_2\,dx_1'dy_1'd\zeta'- \tag{26}$$

$$-\frac{1}{8\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^1\left(B_T+\zeta'^2\,lp\,\frac{\partial H_0}{\partial\zeta'}\right)\overline{G}_3\,dx_1'dy_1'd\zeta'+\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f\overline{G}^4 dx_1'dy_1'.$$

где

$$G_i=\frac{\gamma}{p}\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+k^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+k^2)}};\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Здесь γ—есть число, с помощью которого коэффициенты в формуле (26) должны совпадать с коэффициентами в формуле (25), а k принимает значение

$$(\,|\,\xi-\xi'\,|\,;\quad|\,\xi+\xi'\,|\quad\text{и } \xi).$$

Чтобы перейти от изображений к оригиналам, требуется обратить операторы следующих типов:

$$\frac{1}{p}\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+k^2)}\right]}{\sqrt{\varkappa^2(\rho^2+k^2)}},\qquad\text{здесь}\qquad \varkappa^2=\frac{a^2+b^2+4}{4}$$

$$\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{\beta'^2+\beta^2}{4l^2p^2}+\frac{\beta^2+\beta'^2}{4l^2}=\frac{r}{p^2}+r,$$

где значение r очевидно, т. е.

$$\varkappa^2=\frac{r}{p^2}+r+1;\qquad \sqrt{\varkappa^2(\rho^2+k^2)}=\varkappa\sqrt{\rho^2+k_2}=$$

$$=\sqrt{\frac{r(\rho^2+k^2)}{p^2}+(r+1)(\rho^2+k^2)}=\sqrt{\frac{R}{\rho^2}+R'},$$

т. е. у нас будет оператор

$$\overline{G}=\frac{1}{p}\,\frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{R}{p^2}+R'}\right]}{\sqrt{\frac{R}{p^2}+R'}};\quad \frac{1}{p}\,\frac{p}{\frac{\sqrt{R+R'p^2}}{p}}\exp\left[-\sqrt{\frac{R+R'p^2}{p^2}}\right]=$$

$$=\frac{p}{E\sqrt{\delta^2+\rho^2}}\,\frac{1}{p}\exp\left[-\frac{1}{p}E\sqrt{\delta^2+p^2}\right],$$

где

$$E=\sqrt{R'}=\sqrt{\left(\frac{\beta^2+\beta'^2}{4l^2}+1\right)(\rho^2+k^2)},$$

$$\delta=\sqrt{\frac{R}{R'}}=\sqrt{\frac{\beta^2+\beta'^2}{\beta^2+\beta'^2+4b^2}}.$$

Теперь нужно обратить оператор [6]

$$\frac{1}{p} e^{\frac{A}{p}} \cdot \frac{p\exp\left[-E\sqrt{\delta^2+p^2}\right]}{\sqrt{\delta^2+p^2}} = f_1(p)\cdot f_2(p)$$

$$f_1(p) = \frac{1}{p} e^{\frac{A}{p}} \doteqdot J_1\left(2\sqrt{t}\right)\sqrt{t};$$

$$f_2(p) = \frac{pl\left[-E\sqrt{\delta^2+p^2}\right]}{\sqrt{\delta^2+p^2}} \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{при } t<E \\ J_0\left(\delta\sqrt{t^2-E^2}\right) & \text{при } t>E \end{cases}$$

Воспользовавшись теоремой свертки, можем написать

$$\overline{G}_i = f_1(p)\cdot f_2(p) \doteqdot$$

$$\doteqdot \int_0^t J_0\left(\sqrt{\left(\frac{\beta^2+\beta'^2}{\beta^2+\beta'^2+4l^2}l^2 - \frac{\beta^2+\beta'^2}{4l^2}\right)(\rho^2+k^2)}\right) \times$$

$$\times J_1\left(2\sqrt{A(t-\tau)}\right)\sqrt{t-\tau}\,d\tau \qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{27}$$

Таким образом, решение в окончательной форме можно представить в виде:

$$H(x,\ y,\ \zeta,\ t) = \frac{\gamma}{E}\left\{\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\left[(B_\Omega+B_D+B_T)\times\right.\right.$$

$$\times\int_0^t J_0\left(\sqrt{\left(\delta^2t^2-\frac{\beta^2+\beta'^2}{4l^2}\right)(\rho^2+k^2)}\right)J_1\left(2\sqrt{t-\tau}\right)\sqrt{A(t-\tau)}\,d\tau +$$

$$+ l\left(\Delta\psi_0+\Delta\varphi_0+\zeta'^2\frac{\partial H_0}{\partial\zeta'}\right)\int_0^t J_1\left(\delta\sqrt{t^2-E^2}\right)\times$$

$$\left.\left.\times J_0\left(2\sqrt{A(t-\tau)}\right)d\tau\right]dx'\,dy'\,d\zeta'\right\} - \frac{1-\alpha}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{-(1-\alpha)u_1}\int_{u_1}^{\infty}(B_\Omega+B_D+$$

$$+B_T)\int_0^t J_0\left(\sqrt{\left(\delta^2t^2-\frac{\beta^2+\beta'^2}{4l^2}\right)(\rho^2+k^2)}\right)J_1\left(2\sqrt{A(t-\tau)}\right)\sqrt{t-\tau}\,dtdu_1 +$$

$$+ l\left(\Delta_a\psi_0+\Delta\varphi_0+\xi'^2\frac{\partial H_0}{\partial\zeta'}\right)\int_0^t J_0\left(\delta\sqrt{t^2-E^2}\right]J_0\left(2\sqrt{A(t-\tau)}\right)\times$$

$$\left.\times d\tau du_1\right]dx'dy'd\xi' + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f\int_0^1 J_0\left(\sqrt{\left(\delta^2t^2-\frac{\beta^2+\beta'^2}{4l^2}\right)(\rho^2+k^2)}\right)\times$$

$$\times J_1\left(2\sqrt{A(t-\tau)}\right)\sqrt{t-\tau}\,d\tau dx'dy' -$$

$$-\frac{1-\alpha}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f e^{-(1-\alpha)u_2} \int\limits_0^t\int\limits_{u_2}^{\infty} J_0\left(\sqrt{\left(\delta^2 t^2-\frac{\beta^2+\beta'^2}{4l^2}\right)(\rho^2+k^2)}\right)\times$$

$$\times J_1\left(2\sqrt{A(t-\tau)}\right)\sqrt{t-\tau}\,d\tau dx' dy' du_2 \qquad (28)$$

$$\gamma=\begin{cases}\frac{1}{4\pi} \text{ при } k=|\zeta-\zeta'| \\ \frac{3}{4\pi} \text{ при } k=|\zeta+\zeta'|\end{cases}$$

Для функции влияния надо найти численные значения, а потом с помощью формулы (28) осуществить прогноз H с учетом изменения параметра Кориолиса.

Можно определить из системы (5)—(7) аналогии вертикальной скорости и подобным же путем получить прогностические соотношения для τ, а также температуру с использованием уравнения статики.

Кафедра геофизики

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Обухов, Изв. АН СССР, сер. географ, и геофиз., № 4, 1949.
2. З. В. Хведелидзе, Труды ТГУ, № 146, 1972.
3. В. В. Шпотов, Труды „ФАН" Узбекской ССР, 1968.
4. И. А. Кибель, Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, М., 1957.
5. Д. Иваненко, А. Соколов, Классическая теория поля, М., 1951.
6. В. А. Диткин, А. П. Прудников, Справочник по операционному исчислению, М., 1965.

ზ. ხვედელიძე

ჰიდროთერმოდინამიკის განტოლებათა სრული სისტემის გამოყენებით გეოპოტენციალისათვის პროგნოზური ამოცანის ამოხსნა როსბის ეფექტის გათვალისწინებით

რეზიუმე

ოპერაციული აღრიცხვის მეთოდების გამოყენებით მიღებულია გეოპოტენციალისათვის პროგნოზური განტოლების ამოხსნა ანალიზური სახით. ამოხსნის დროს გათვალისწინებულია კორიოლისის პარამეტრის ცვლილება როგორც მერიდიანის, ასევე პარალელის გასწვრივ.

Z. KHVEDELIDZE

SOLUTION OF A GEOPOTENTIAL PROGNOSTIC PROBLEM BY MEANS OF A COMPLETE SYSTEM OF HYDROTHERMODYNAMICAL EQUATIONS TAKING INTO CONSIDERATION ROSBY'S EFFECT

Summary

Prediction equations of atmospheric pressure and the wind field according to the baroclinic model are presented. The change of Coriolis force along the latitude of the geopotential field is taken into consideration.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

К ВОПРОСУ ЦИРКУЛЯЦИИ ВИХРЯ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГЕЛИИ-11

Г. А. ГАМЦЕМЛИДЗЕ, Д. Н. ЦААВА

1. При вращении частицы жидкости вокруг вихря изменение фазы φ волновой функции за один оборот по окружности с радиусом r, имеющей центром вихрь, равно

$$\oint \nabla \varphi dr = 2\pi r m v_s / \hbar, \tag{1}$$

откуда для условия квантования циркуляции получаем

$$\Gamma = 2\pi r v_s = n \frac{h}{m}. \tag{2}$$

Здесь n—целое число ($n=1, 2\cdots$), h—постоянная Планка, v_s—скорость сверхтекучей компоненты, dr—элемент контура, m—масса атома гелия.

Условие (2) справедливо и при интегрировании по замкнутой кривой, охватывающей много вихрей. Если считать, что все вихри единичны с циркуляцией $\Gamma_0 = h/m$, то общая циркуляция Γ по даннай замкнутой кривой равна

$$\Gamma = N\Gamma_0, \tag{3}$$

где N—число вихрей, содержащихся внутри замкнутого контура.

Вайнен [1] в экспериментах с проволокой (Ф—25 микрон), протянутой вдоль оси вращающегося сосуда и колеблющейся в магнитном поле, при кратковременном прохождении тока через нее, непосредственно наблюдал единичный квант циркуляции, т. е. вихри стабильной циркуляции со значением $n=1$.

Стейерт, Тейлор и Китченс [2] также измеряли циркуляцию вокруг вихря методом наблюдения за движением взвешенных частиц затвердевшей водородно-дейтериевой смеси во вращающемся гелии-11.

Результаты вычислений в указанной работе показали, что наряду с вихрями, близкими к единичной циркуляции Γ_0, встречаются вихри и с $2\Gamma_0$, $3\Gamma_0 \cdots 10\Gamma_0$, а также нецелочисленные циркуляции $\Gamma = 0{,}8\ \Gamma_0$, $1{,}5\Gamma_0$ и т. д.

В настоящей работе измеряется циркуляция вихрей с применением методики, описанной в работе [2], с той разницей, что наблюдение за частицами велось в системе, вращающейся вместе с жидким гелием. Для этой цели применялся синхронно вращающийся с жидкостью киноаппарат.

Вращающийся контейнер представлял собой цилиндр диаметром 22 мм, изготовленный из медной сетки с размерами ячеек 0,5 мм. Основанием цилиндра служили кварцевые стеклянные диски. Киносъемка производилась вдоль оси вращения цилиндра через переднее окно оптического дьюара. Освещение осуществлялось через боковые окна.

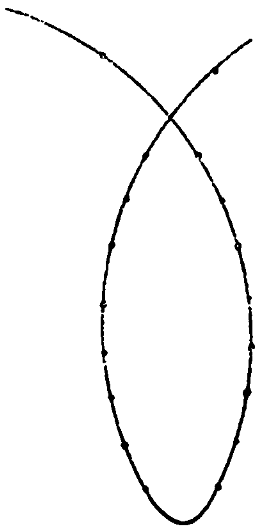

Рис. 1. Траектория частицы (петля), масштаб 1 : 16, $\theta=3{,}5$ сек, $l=0{,}63$ см, $\omega=1{,}8$сек$^{-1}$, $n=1{,}8$.

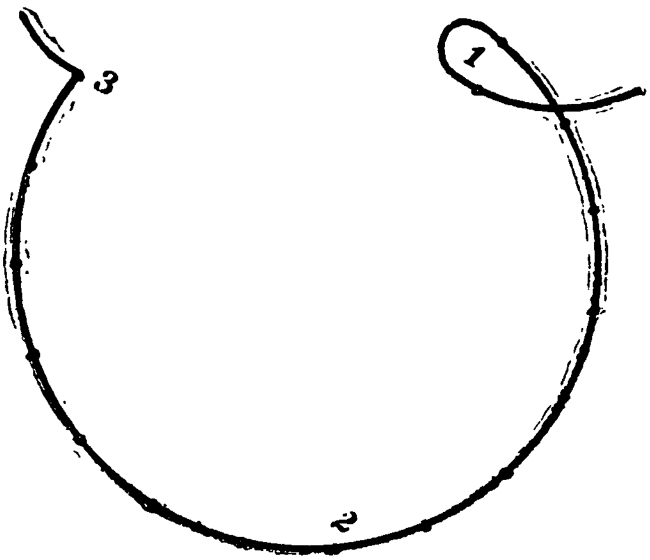

Рис. 2. Траектория частицы (окружность) масштаб 1:6,5, $\theta=7{,}2$ сек, $l=2{,}7$ см, $\omega=0{,}87$ сек$^{-1}$, $n=0{,}97$.

На рис. 1,2 даются контуры движения частиц, обработанные по кинопленкам, снятым с частотой 24 кадр/сек. Скорость вращения жидкости составляла $\omega_0=0{,}94$ сек$^{-1}$.

Средняя циркуляция частиц по данным контурам вычислялась с помощью времени обхода контура θ и его длины l:

$$\overline{\Gamma}=\frac{l}{\theta} \tag{4}$$

Для измерения характерных размеров траектории частиц производилось увеличение изображения в 32 раза. Эксперимент осуществлялся при температуре 1,52°К. Размеры частиц колебались в интервале от 500 до 50 микрон.

Наблюдение за движением частиц показало, что они двигаются как по круговым траекториям с центром на оси вращения (мы их будем именовать окружностями), так и по замкнутым петлям с центром, удаленным на разные расстояния от центра вращения сосуда. Причем на окружностях, как правило, угловая частота порядка угловой частоты вращающейся системы ω_0. Частицы опережают вращающийся жидкий гелий со скоростью ω. На петлях частота вращения составляет несколько ω_0.

В таблице 1 даются значения характерных величин для данного эксперимента.

Таблица 1

l см. Длина окружности, описанной частицей	θ сек. Период обращения	ω сек$^{-1}$ Угловая скорость вращения частицы	Sсм^2. Средняя площадь, ограниченная контуром	N. Число вихрей в площ., ограниченной контуром	Γ см^{2}сек$^{-1}$ Циркуляция по контуру	$\overline{\Gamma_0}$ см^2 сек$^{-1}$ Средняя циркуляция, приходящаяся на единичный вихрь	n. Кратность циркуляции	ω_0 сек$^{-1}$ Угловая скорость вращения контейнера	$\overline{S}$ см^2. Средняя площ., приходящаяся на единичн. вихрь	Примечания	$\Delta\Gamma_0/\Gamma_0$ Максимальная погрешность
0,28	0,6	10,5	0,0065	1	$13{,}0 \cdot 10^{-2}$	$10.0 \cdot 10^{-3}$	10,0			петля	
0,38	1,5	4,2	0,0114	5	$9{,}6 \cdot 10^{-2}$	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$	4,2			„	
0,66	3,15	2,0	0,035	34	$13{,}8 \cdot 10^{-2}$	$1{,}94 \cdot 10^{-3}$	1,9			„	
0,63	3,5	1,8	0,032	34	$11{,}3 \cdot 10^{-2}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	1,8			„	
2,2	4,8	1,3	0,36	565	1,02	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$	1,3	0,94	$5 \cdot 10^{-4}$	окружость	
3,3	6,2	1,0	0,86	1617	1,75	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	1,0			„	
2,12	6,4	0,98	0,37	718	0,71	$0{,}97 \cdot 10^{-3}$	0,97			„	20%
2,2	7,2	0,87	0,52	1009	1,01	$0{,}97 \cdot 10^{-3}$	0,97			„	

Кратность циркуляции определяется отношением угловой скорости вращения частицы ω_i вокруг данной петли к ω_0.

2. Так как нормальная компонента не может двигаться с большей угловой скоростью, чем сосуд, движение частицы с $\omega > \omega_0$ по отношению к вращающемуся гелию-II должно быть обусловлено движением сверхтекучей компоненты.

Наиболее часто встречающимися в эксперименте контурами, как и в работе [2], являются окружности. Вдоль этих контуров частицы движутся с угловой скоростью $\omega = \omega_0$. В этом случае выраженне (4) дает для кратности циркуляции в системе, вращающейся вместе с жидкостью, значение $n = 1$.

В неподвижной лабораторной системе для кратности циркуляции на больших окружностях получаем $n = 2$, так как

$$\overline{\Gamma} = \frac{1}{N} \oint (v' dl) = \frac{1}{N} \oint \left(v + [\omega_0 r], \; dl\right) = 2 \oint v_l dl = 2\Gamma_0.$$

Здесь v'—скорость движения частицы в неподвижной лабораторной системе, с которой жидкость вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. Число вихрей в плошади S

$$N = 2\omega_0 \frac{S}{\Gamma_0}.$$

На петлях ситуация немного усложняется, поэтому для них вычислялась циркуляция во вращающейся системе отсчета. Она равна циркуляции в неподвижной системе отсчета, если $\omega_i \gg \omega_0$, или если петля симметрично относительна некоторого радиуса сечения сосуда.

В работе [2] для больших окружностей циркуляции вообще не измеряли. Авторы отмечают, что большинство частиц двигается очень медленно и равномерно через жидкость, одна из 10^3 частиц возмущается и описывает единичную петлю.

Таким образом, вероятность нахождения петель достаточно мала. Если теперь учесть, что в нашем эксперименте кратность циркуляции для этих петель больше единицы, а вероятность нахождения таких петель и в нашем случае достаточно мала, то можно заключить, что наиболее часто встречающаяся циркуляция является $n = 2$.

По нашему мнению, циркуляция с кратностью $n > 1$ обусловлена тем обстоятельством, что замкнутая малая петля, описываемая частицей, не является „реальной" линией тока сверхтекучей компоненты. Она представляет собой траекторию, проходящую через разные линии тока ρ_s с отличными друг от друга скоростями.

В пользу такого допущения говорит наличие некоторых петель, вдоль которых наблюдается неравномерное движение с положительными и отрицательными ускорениями, а также с остановкой в некоторой точке (см. рис. № 3).

Вдоль петли, показанной на рис. 3, отмечены положения частиц в виде точек через каждый кадр киносъемки, т. е. через 1/24 сек.

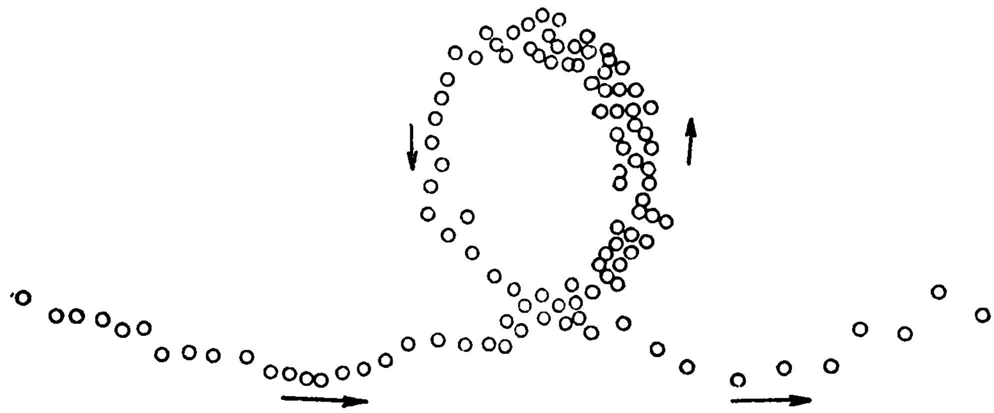

Рис. 3. Неравномерное движение частицы, интервал времени $t=1/24$ сек, $\theta=3{,}15$ сек, $l=0{,}66$ см, $\omega=2{,}0$ сек$^{-1}$, $n=1{,}9$

Различие плотностей точек в разных участках петли подтверждает наше мнение и указывает на необычное движение частицы вдоль линии тока жидкости. Нет сомнения и в том, что сверхтекучая компонента не может двигаться так странно за короткое время вокруг вихря. Естественно, что вдоль такой траектории циркуляция будет отличной от ее реального значения и будет зависеть от формы и ориентации петли независимо от ее размера.

Вычисление циркуляции вихря вдоль петли допустимо только в том случае, если петля является реальной линией тока ρ_s вдоль одного (только одного) вихря или же она представляет собой линию тока, огибающую систему вихрей, причем скорость движения частицы совпадает со скоростью движения сверхтекучей компоненты.

В нашем случае огибающей является окружность, вокруг которой циркуляция получается равной $N\Gamma_0$. Здесь N—число вихрей внутри огибающего контура.

Таким образом, приходим к выводу, что скорость движения частиц не совпадает с v_s и не может служить для определения циркуляции. Циркуляция не единична, как этого следовало ожидать, а часто равна нескольким квантам или нецелому числу квантов. Наиболее интересными являются измерения на больших окружностях, где средняя кратность циркуляции оказалась равной двум. Полученный результат означает, что сверхтекучая компонента вращается в два раза скорее нормальной практически во всем объеме сосуда, что и указывает на непригодность метода Тейлора, Стейерта, Китченса для измерения циркуляции.

Авторы пользуются случаем выразить искреннюю благодарность Э. Л. Андроникашвили, по инициативе и при руководстве которого была проведена эта работа, Ю. Г. Мамаладзе—за обсуждение результатов и ценные дискуссии.

Научно-исследовательская
лаборатория физики низких температур

გ. გამცემლიძე, ჯ. ცაავა

მბრუნავ ჰელიუმ-II-ში გრიგალის ცირკულაციის საკითხისათვის

რეზიუმე

შრომა მიძღვნილია წყალბად-დეიტერიუმის დისპერსიის მეთოდით ჰელიუმ-II-ში შინაგანი მოძრაობის ცირკულაციის გაზომვის საკითხისადმი, ჩატარებულია გაზომვები, რომლებიც ამტკიცებენ, რომ ცირკულაციის საშუალო ჯერადობა უდრის ორს. ნაჩვენებია, რომ მბრუნავ ჰელიუმ-II-ში ზედნადი კომპონენტის სიჩქარე v_s ორჯერ მეტია, ვიდრე ნორმალური კომპონენტის სიჩქარე. ახსნილია ტეილორის სტეიერტის და კიტჩენსის მიერ ცირკულაციის ჯერადობისათვის მიღებული ექსპერიმენტალური მნიშვნელობების სხვადასხვაობის მიზეზები.

G. GAMTSEMLIDZE, D. TSAAVA

ON THE CIRCULATION OF VORTEX LINE IN ROTATION HELIUM-II

Summary

The circulation of mutual movement in Helium-II has been measured by the method of hydrogen-deuterium dispersion. The measurments show that the mean value of circulation is equal to two. The superfluid component v_s in rotation Helium-II has been found to have twice the velocity of the normal component. The difference between the present experimental data and the results of Taylor, Steyert and Kitchens is discussed.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ОТРАЖЕНИЯ МОНОКРИСТАЛЛОВ КАРБИДА КРЕМНИЯ, ЛЕГИРОВАННЫХ АЗОТОМ, В ДАЛЕКОЙ ИНФРАКРАСНОЙ ОБЛАСТИ

И. М. ПУРЦЕЛАДЗЕ, Л. Г. ХАВТАСИ, Л. С. ХИТАРИШВИЛИ

Оптическое поглощение света кристаллами S_iC, легированными азотом, в далекой инфракрасной области малоизучено. Нами при исследовании коэффициентов поглощения и отражения кристаллов карбида кремния политипов $6H$ и $15R$, с концентрацией азота $N<1.10^{18}$ см$^{-3}$, в области спектра от 20 до 40 мкм было обнаружено шесть перекрывающихся полос поглощения с участием одного акустического фонона [1,2]. Однако число фононов с энергией, соответствующей этой спектральной области, больше шести. По-видимому, нам не удалось разрешить некоторые близко расположенные максимумы поглощения. В настоящей работе с целью выявления этой структуры нами изучались образцы карбида кремния как „чистые", специально нелегированные, так и сильно легированные азотом с концентрацией $N>5.10^{18}$ см$^{-3}$. Образцы были непрозрачны в исследованной нами спектральной области и поэтому для них изучалось только спектральное распределение коэффициента зеркального отражения от естественной поверхности. Концентрация азота в исследованных образцах менялась от $5 \cdot 10^{18}$ до 5.10^{19} см$^{-3}$, толщина образцов—от 300 до 500 мкм.

На спектрометрах ИКС–21 и UR—10 с приставкой для измерения коэффициента зеркального отражения изучалось спектральное распределение коэффициента отражения в довольно широкой спектральной области от 15 до 45 мкм.

К спектрометру UR—10 была сконструирована приставка [3], которая схематически приведена на рис. 1.

На рис. 2 представлено спектральное распределение коэффициента отражения образцов $6H$ S_iC, легированных азотом, в области спектра от 15 до 45 мкм для нелегированного (кривая 3), так и для легированных азотом (кривые 51, 52 и 53).

Из рисунка видно, что примерно с 15 мкм коэффициент отражения уменьшается во всех исследованных нами нелегированных и легированных образцах. Начиная с 20 мкм вплоть до 45 мкм как для специально нелегированных, так и для легированных азотом образцов $6H$ S_iC при $N<5 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ коэффициент отражения не зависит от концентрации азота, являясь почти постоянным и равным 30%. Для образцов с

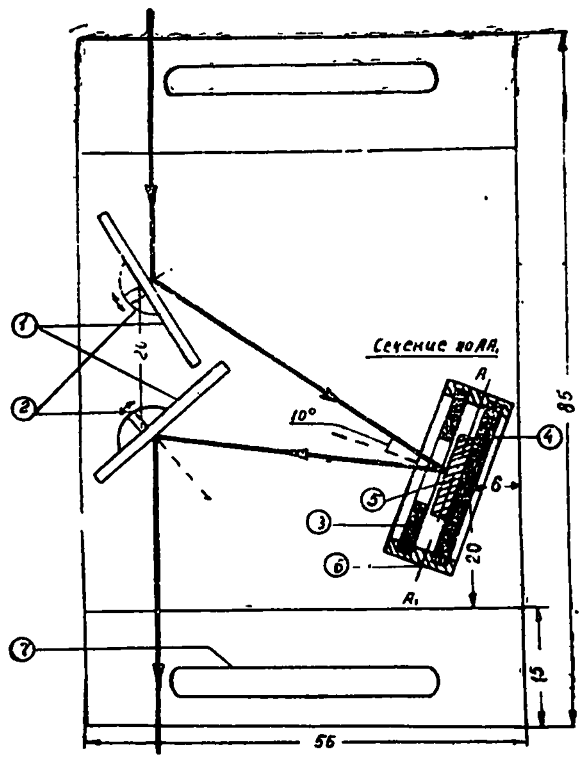

Рис. 1. Общий вид приставки для измерения коэффициента отражения: 1—алюминированные плоские зеркала; 2—вращающиеся вокруг оси площадки для крепления зеркал; 3—рамка с прямоугольной щелью; 4—подвижная площадка для крепления эталонного зеркала (образца); 5—эталонное зеркало (образец); 6—поворотное устройство; 7—отверстие крепления к подвижной платформе.

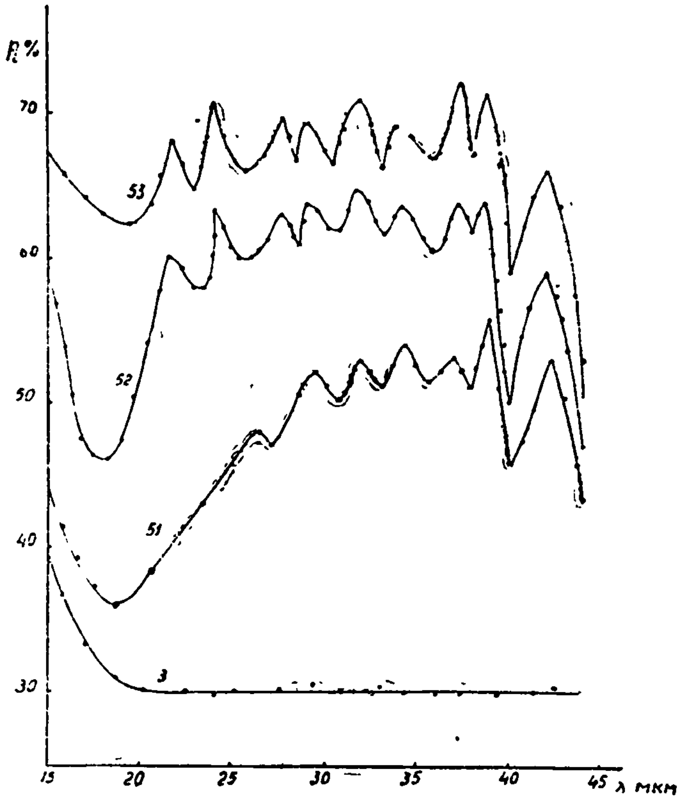

Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от длины волны $N \cdot 10^{18}$, $см^{-3}$: 51—6, 52—20, 53—50.

$N > 5.10^{18}$ $см^{-3}$ коэффициент отражения с 18 мкм начинает расти и в области 20—40 мкм наблюдаются восемь перекрывающихся полос отражения (поглощения), а при 42 мкм выделяется одна полоса. Таким образом, при исследовании коэффициента отражения сильно легированных образцов карбида кремния нам удалось разрешить некоторые близко расположенные максимумы поглощения.

В работах [4,5] при исследовании фотолюминесценции кристаллов 6H S_iC, легированных азотом, при низкой температуре вблизи края собственного поглощения были наблюдены 17 значений энергии фононов из теоретически ожидаемых 36. Из них шесть являются поперечно-акустическими ТА, и пять—продольно-акустическими LA фононами.

Энергии, соответствующие некоторым из найденных нами максимумов поглощения (отражения) в области 20—40 мкм для легированных образцов карбида кремния, в пределах погрешности эксперимента, находятся в хорошем согласии с энергиями фононов TA и, частично, LA. Поэтому мы считаем, что это поглощение индуцировано примесями и происходит с участием одного фонона.

Известно, что процесс поглощения фотона с образованием фонона должен происходить при сохранении энергии и квазиимпульса. Но, так как волновой вектор кванта света $q \approx 0$, то со светом могут взаимодействовать те колебания, волновые векторы которых в сумме равны нулю. В идеальных кристаллах это поглощение запрещено, вследствие кристаллической симметрии. По этой причине, по-видимому, отсутствует структура в спектре отражения специально нелегированных образцов карбида кремния.

Проблемная лаборатория
физики полупроводников

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Пурцеладзе, К. Г. Хавтаси, ФТТ. !2. 1283, 1970.
2, И. М. Пурцеладзе. Л. Г. Хавтаси, ФТП, 5, 1971, 1971.
3. А. А. Кухарский, ПТЭ, 2, 225. 1967.
4. W. J. Choyke, L. Patrick, Phys. Rev., 127, 1868, 1962.
5. D. R. Hamilton, W. J. Choyke, Phys. Rev., 131 127. 1963.

ი. ფურცელაძე, ლ. ხავთასი, ლ. ხითარიშვილი

აზოტით ლეგირებული სილიციუმის კარბიდის მონოკრისტალების არეკვლის კოეფიციენტები შორეულ ინფრაწითელ არეში

რეზიუმე

შრომაში შესწავლილია აზოტით ლეგირებული სილიციუმის კარბიდის მონოკრისტალების არეკვლის კოეფიციენტის სპექტრალური განაწილება (15—45) მკმ არეში. არეკვლის სპექტრში (20—40) მკმ სპექტრალურ უბანში მიღებულია რამოდენიმე ურთიერთგადაფარული მაქსიმუმიანი მრუდი. ნაჩვენებია, რომ თითოეული მაქსიმუმი ინდუცირებულია მინარევებით და წარმოადგენს შთანთქმას ერთი ფონონის მონაწილეობით·

I. PURTSELADZE, L. KHAVTASI, L. KHITARISHVILI

ON THE REFLECTION COEFFICIENT OF NITROGEN-DOPED SILICON CARBIDE IN FAR INFRARED FIELD

Summary

The spectral distribution of the reflection coefficient of nitrogen-doped silicon carbide single crystals has been studied in the (15—45) μ spectral range. In the reflection spectrum in the range (20—40) μ the same overlapped maximums have been obtained.

It is shown that each reflection maximum is induced by impurities and represents absorption with the participation of one phonon.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

МНОГОЧАСТОТНАЯ АППАРАТУРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДРЕЙФОВ В ИОНОСФЕРЕ

Г. М. АРОШИДЗЕ, Д. К. КВАВАДЗЕ, Ю. В. КУШНЕРЕВСКИЙ

Для прогнозирования состояния верхней атмосферы требуется теоретическое и экспериментальное изучение динамического режима на различных высотах. Экспериментальные данные о динамических процессах в ионосфере в основном получают исследованием дрейфа мелкомасштабных неоднородностей ионизации. Высоту наблюдения дрейфа, при использовании метода Д1 [1], можно менять, меняя частоту радиоволны, зондирующей ионосферу. Поэтому, для получения высотного профиля дрейфов в ионосфере необходимо иметь возможность одновременно зондировать ионосферу радиоволнами различных частот. Для этого нет необходимости иметь несколько передатчиков и приемников, так как одновременность, в данном случае, жестко не требуется; достаточно, чтобы за разность времени излучения радиоволн различных частот не менялся подлежащий исследованию параметр волны. Опыт показывает, что достаточно исследовать амплитуду волны через каждые 0,5 сек, поэтому необходимо обеспечить измерение этого параметра частотой не менее 2 гц. Импульсные передатчики ионозондов обычно имеют частоту повторения импульсов 50 гц, поэтому с их помощью, при трехточечном варианте метода Д1, возможно „одновременно" измерять амплитуды радиоволн восьми различных частот. С другой стороны, существуют определенные трудности непрерывной фотоиндикации величин с низкой частотой повторения. Достаточно высококачественные „фотозаписи", пригодные для обработки методом подобных замираний, получаются при частоте повторения $\sim$4 гц. В этом случае имеется возможность „одновременно" излучать радиоволны четырех частот.

В настоящей статье описывается аппаратура для исследования дрейфов с использованием трехточечного метода Д1 „одновременно" на четырех частотах.

Аппаратура создана на базе малогабаритной ионосферной станции „МИС" и состоит из следующих основных частей (см. рис. 1): „МИС", блока коммутаторов, индикаторного устройства, приемных антенн.

„МИС", разработанная и сконструированная в ИЗМИР АН СССР, представляет собой полупроводниковую, полуавтоматическую ионосферную станцию вертикального зондирования для определения действующей высоты отражающей области на ряде фиксированных частот в

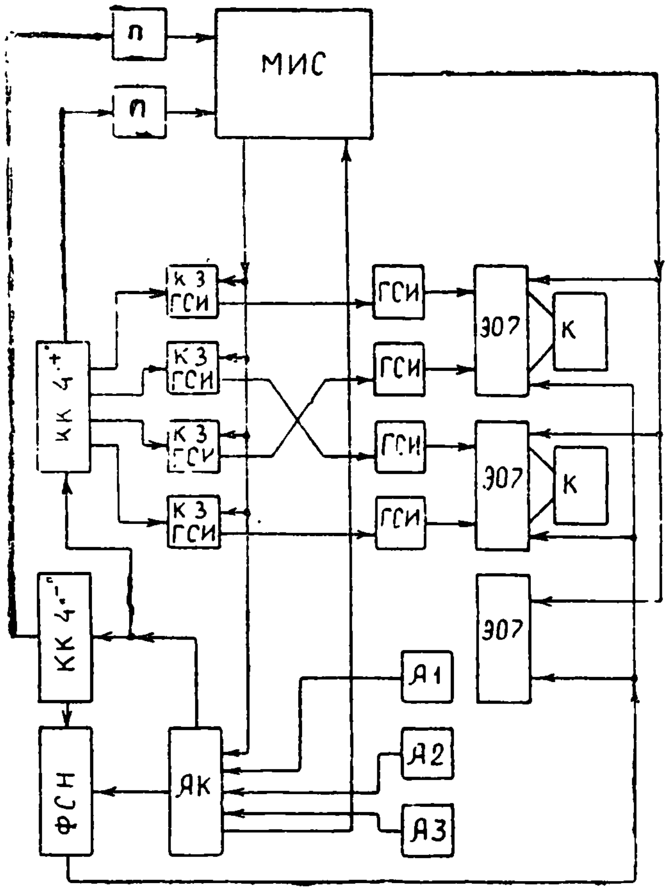

Рис. 1.

диапазоне 1—15,9 Мгц через 0,1 Мгц.

На рис. 2. приведена блок-схема системы для получения дискретного ряда излучаемых частот в „МИС". Диапазон частот получается с помощью групп кварцевых генераторов КГ—0,1 и КГ—1,0 импульсного автогенератора ИГ и смесителей СМ—1 и СМ—11. КГ—0,1 состоит из десяти кварцевых генераторов, настроенных соответственно на 16,6 Мгц, 16,7 Мгц,... 17,5 Мгц. КГ—1,0 состоит из восьми генераторов, вырабатывающих частоты в диапазоне 19—33 Мгц через 2 Мгц. Высокочастотные колебания генераторов из группы КГ—0,1 смешиваются с в. ч. колебаниями генераторов из группы КГ—1,0 в смесителе СМ—1.

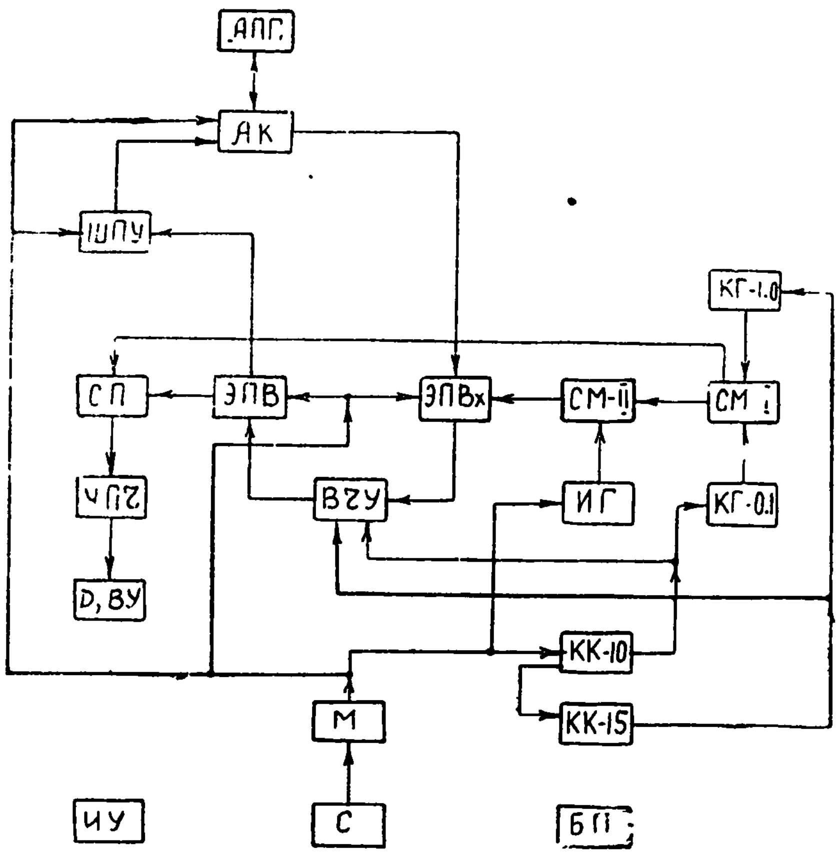

Рис. 2.

Последовательность работы отдельных кварцевых генераторов задается электронным коммутатором, состоящим из двух кольцевых генераторов на 10 и 15 каналов (КК—10 и КК—15). КК—10 запускается модулятором станции М, а КК—15—импульсом первого триггера КК—10. Таким образом, при открытом состоянии любого из триггеров КК—15, триггера КК—10 по очереди один раз открываются. Триггера КК—10 управляют работой соответствующих кварцевых генераторов из группы КГ—0,1; триггера КК—15 управляют работой кварцевых генераторов из группы КГ—1,0. Таким образом, когда одновременно открыты первые триггера КК—10 и КК—15, работают кварцевые генераторы на 17,5 и 19 Мгц и СМ—1 дает частоту 1,5 Мгц, которая смешивается с колебаниями ИГ (настроенного на 0,5 Мгц) в смесителе СМ—11 и получаются частоты 1,0 Мгц и 2,0 Мгц. Далее усилителем высокой частоты УВЧ усиливается та частота, на которую настроен УВЧ. Когда работают последние триггера, на СМ—1 поступают колебания с частотами 16,6 и 33 Мгц; получаемая разностная частота 16,4 Мгц после смешения в СМ—11 с 0,5 Мгц дает частоту 15,9 Мгц.

УВЧ состоит из 150 резонансных усилителей, настроенных на фиксированных 150 частотах, получающихся с помощью вышеописанной схемы. Каждый усилитель может работать при подаче биполярного напряжения; положительное напряжение усилители получают от КК—10, отрицательное—от КК—15. Триггера КК—10 и КК—15 к УВЧ подключаются таким образом, чтобы работал тот усилитель, резонансная частота которого выдается на выходе СМ—11.

Для излучения радиоволн четырех частот, произвольно выбираемых из дискретного ряда частот 1—15,9 Мгц через 0.1 Мгц, был создан новый блок коммутаторов, заменяющий КК—10 и КК—15.

Блок коммутаторов состоит из двух кольцевых генераторов, имеющих по четыре канала (КК—4^+ и КК—4^-), антенного коммутатора для трех приемных антенн (АКор. ан.) и четырех каскадов, вырабатывающих запускающие импульсы генераторов стробирующих импульсов (Кд. зап. ГСИ). КК—4^+ выполняет функцию КК—10, а КК—4^-—функцию КК—15. Каждый триггер КК—4^+ соответствующим переключателем можно соединить с любым из десяти кварцевых генераторов КГ—0,1, а триггера КК—4^- другой группой переключателей соединяется с любым кварцевым генератором КГ—1,0. Параллельно с кварцевыми генераторами переключаются и соответствующие УВЧ.

На пульте управления выведены две группы переключателей. В каждой группе—по четыре переключателя на десять положений. Четыре переключателя первой группы ступенчато изменяют частоту соответствующих высокочастотных колебаний с шагом в 1 Мгц, а переключатели второй группы изменяют соответствующие частоты на 0,1 Мгц. Таким образом, независимо друг от друга можно выбрать четыре частоты из дискретного ряда частот от 2,0 Мгц до 11,9 Мгц через 0,1 Мгц.

Главным элементом всех коммутирующих цепей является кольцевой генератор, который представляет собой систему последовательно соединенных в кольцо триггеров. Количество триггеров задается количеством коммутирующих каналов. Открытое состояние любого триггера генератора автоматически обеспечивает закрытое состояние остальных триггеров. При подаче запускающего импульса открытое состояние перемещается на один разряд.

Антенный коммутатор состоит из кольцевого генератора, ключей питания и антенных вентилей. Кольцевой генератор выдает импульсы, которые управляют работой ключей питания; антенные вентили соединяют соответствующие антенны с приемником, когда открыт соответствующий ключ питания.

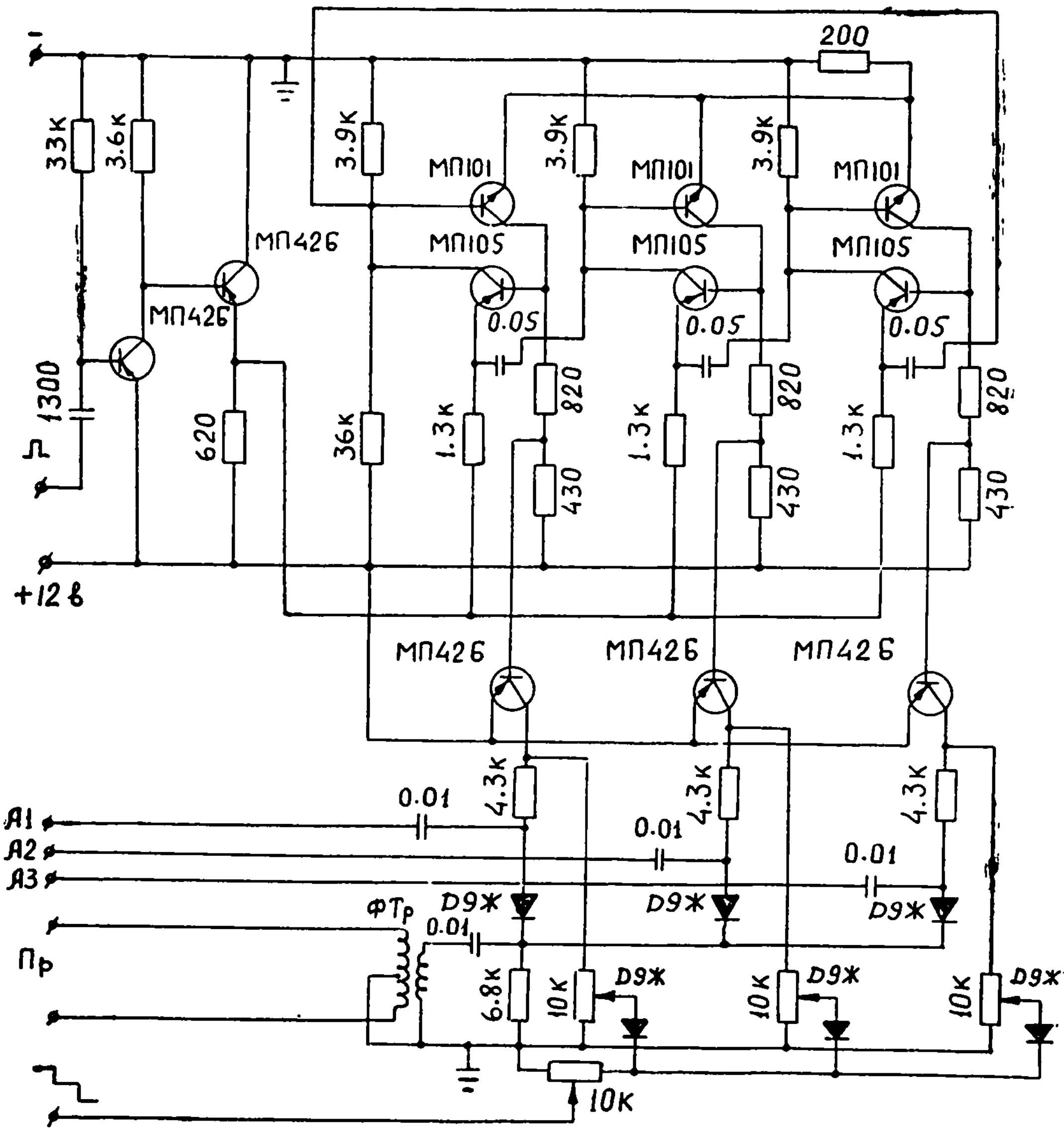

Рис. 3.

Кольцевой генератор состоит из трех триггеров, соединенных последовательно в кольцо. Триггера (Т 1, Т 2, Т 3) выполнены на транзисторах разной проводимости—МП 105 и МП 101 (рис. 3). При включении питания транзисторы всех тригерров, кроме первого, остаются в закрытом положении. Открытое положение транзисторов первого триггера обеспечивается за счет отпирающего напряжения делителя напряжения в цепи базы транзистора МП 101. Токи транзисторов первого триггера создают на общих эмитерных сопротивлениях падение напряжения, подпирающее транзисторы соответствующих типов остальных триггеров Запуск кольцевого генератора осуществляется подачей отрицательного импульса с эмитерного повторителя, выполненного на транзисторе МП 42 Б, на эмитерную шину транзисторов типа МП 105. Отрицательный импульс переводит в закрытое состояние транзистор МП 105 первого триггера. На базе транзистора МП 101 первого триггера напряжение уменьшается и транзистор закрывается. С эмитера транзистора МП 105 первого триггера положительный импульс дифференцируется цепочкой, состоящей из конденсатора 0,05 и резистора 3,9 ком, поступает на базу транзистора МП 101 второго триггера и открывает его; на базе транзистора МП 105 второго триггера напряжение уменьшается и транзистор также открывается. Постоянная времени дифференцирующей цепочки выбрана такой, что длительность передачи импульса больше, чем длительность запускающего импульса, чем обеспечивается четкое срабатывание только одного очередного триггера. При подаче следующего запускающего импульса включенное состояние перемещается на следующий триггер и т. д.

С делителя напряжения в цепи коллектора транзистора МП 101 подается управляющее напряжение на соответствующий ключ питания, собранный на транзисторе МП 42 Б, который открывается во время открытого состояния соответствующего триггера и подает напряжение питания на соответствующий антенный вентиль.

Антенными вентилями являются полупроводниковые диоды типа Д9Ж, которые открываются при подаче на них напряжения питания. Открытое состояние одного из диодов обеспечивает подачу подпирающего напряжения на остальные диоды и таким образом осуществляется поочередное подсоединение приемных антенн (А1, А2, А3) к приемнику. Вентили являются широкополосными и обеспечивают равномерный прием в диапазоне 1—15 Мгц.

КК—4^+ и КК—4^- выполнены по принципиальной схеме кольцевого генератора антенного коммутатора.

Индикаторное устройство состоит из трех осциллографов типа ЭО—7, двух кинокамер $(К)_s$ формирователя ступенчатого напряжения (ФСН) и генератора стробирующих импульсов (ГСИ).

Выделение на индикаторе принимаемых разными антеннами сигналов осуществляется подачей на вертикально отклоняющие пластины осциллографов ступенчатого напряжения, вырабатываемого в ФСН. Ступенчатое напряжение получается путем суммирования импульсов АКпр. ан. с подобранными амплитудами с импульсами двух триггеров КК—4^-. Таким образом, получается шесть „ступенек“. Каждая ступенька выделяет принимаемые одной антенной два сигнала на двух частотах. Последующее

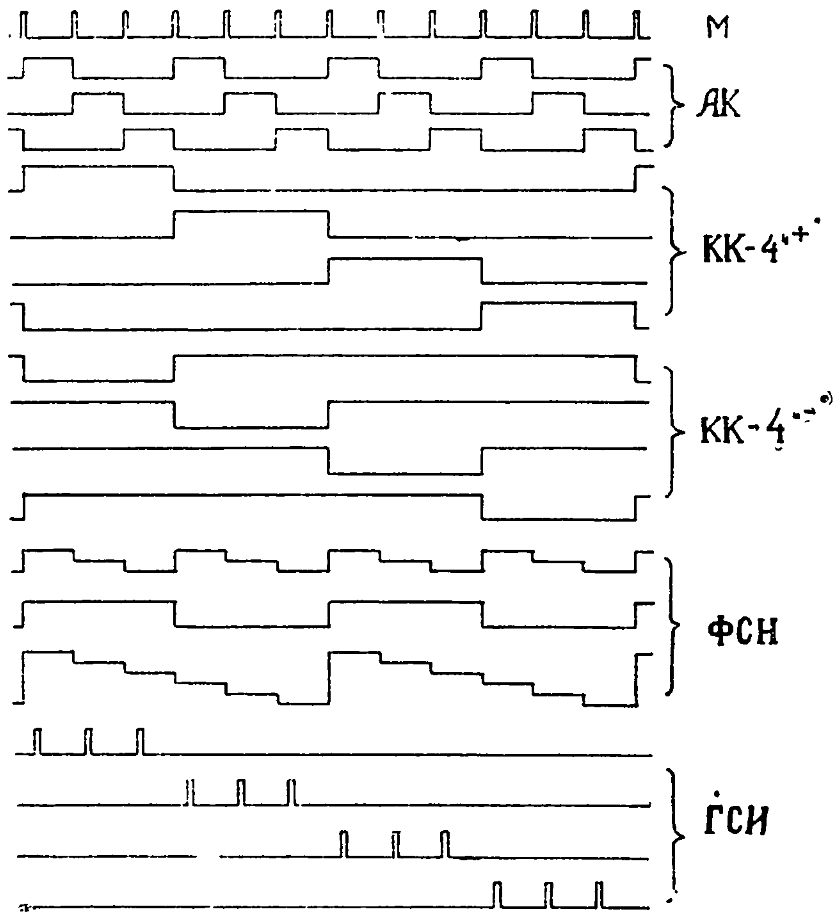

Рис. 4.

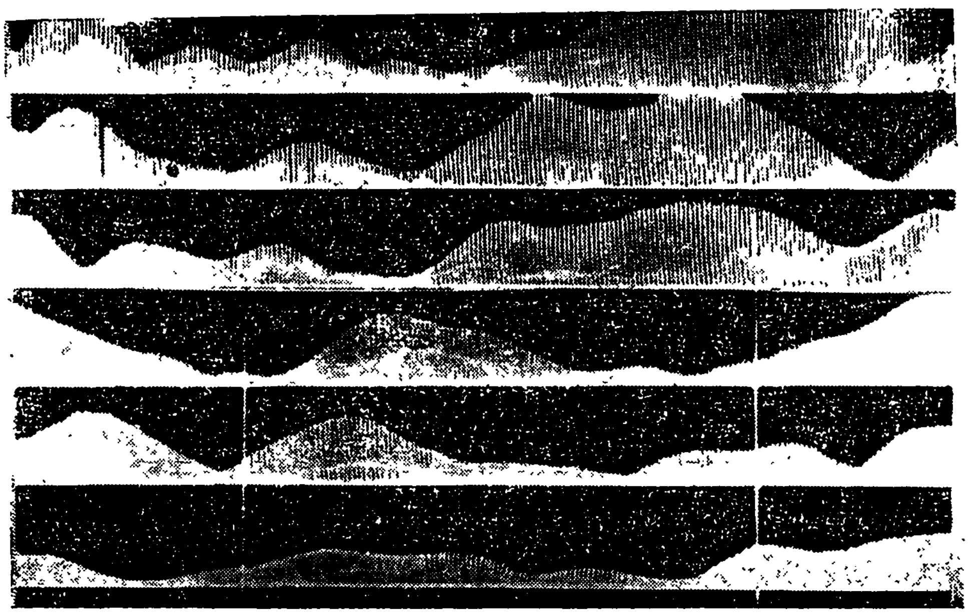

Рис. 5.

их разделение производится путем стробирования сигнала, которое осуществляется яркостной модуляцией луча осциллографа импульсом ГСИ. ГСИ состоит из двух одновибраторов, собранных на электронных лампах типа 6Н1П. Ширину импульса первого одновибратора можно менять от 0,4 до 5 Мсек, что позволяет охватить диапазон высот от 60 до 750 км. Задним фронтом этого импульса запускается второй одновибратор, который выдает импульсы шириной около 200 мксек для яркостной модуляции электронного луча осциллографа.

Запуском четырех ГСИ управляет КК—4^+ посредством четырех ключевых каскадов; эти каскады „пропускают" запускающий импульс от модулятора М МИС-а к ГСИ, когда открыт соответствующий триггер КК—4^+. Таким образом, каждой выбранной нами частоте соответствует свой стробирующий импульс. Два генератора ГСИ осуществляют яркостную модуляцию одного осциллографа ЭО—7, вторая пара ГСИ—второго осциллографа. У этих осциллографов отключена горизонтальная развертка. Эхо-сигнал от приемника подается на входы усилителей вертикального отклонения осциллографов. Таким образом, на экране одного осциллографа происходит индикация амплитуды радиоволн двух частот, принимаемых тремя антеннами. Эти два осциллографа снабжены тубусом и кинокамерой (К), обеспечивающей равномерную, непрерывную протяжку 35 мм кинопленки со скоростью 100 мм/мин. Третий осциллограф используется для визуального контроля.

Система приемных антенн состоит из трех идентичных антенн типа „дельта", расположенных на концах равностороннего треугольника, одна сторона которого ориентирована в направлении запад-восток. Антенны удалены друг от друга на 200 м. Каждая антенна имеет высоту 14 м и угол у вершины, равный 110°. Антенны подвешены на мачтах высотой 16 м, имеют активную нагрузку 300+300 ом и согласованы с высокочастотным кабелем типа РК75 с помощью ферритового трансформатора.

Работу всей системы хорошо поясняют эпюры импульсных напряжений, приведенные на рис. 4. На рис. 5 дается образец „фотозаписи" флуктуаций амплитуды, принимаемой тремя антеннами отраженных от ионосферы радиосигналов двух частот.

Научно-исследовательская
лаборатория ионосферы

ЛИТЕРАТУРА

1. S. N. Mitra, Proc. Inst. Electr. Engrs., Pt. III, 1949, 96, 441.

გ. აროშიძე, დ. ყვავაძე,
ი. კუშნერევსკი

იონოსფეროში დრეიფის შესასწავლი მრავალსიხშირიანი აპარატურა

რეზიუმე

აღწერილია რადიოაპარატურა შექმნილი მცირეგაბარიტიანი იონოსფერული სადგურის МИС-ის ბაზაზე, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია მცირემასშტაბიან არაერთგვაროვნებათა დრეიფზე დაკვირვება ერთდროულად ოთხ სიხშირეზე D1 მეთოდის გამოყენებით. იონოსფეროს ზონდირებისათვის ოთხი ნებისმიერი სიხშირის რადიოტალღის არჩევა შესაძლებელია სიხშირეთა დისკრეტული სპექტრიდან 1—15,9 მგჰც 0,1 მგჰც-ის ბიჯით.

G. AROSHIDZE, D. KVAVADZE, I. KUSHNEREVSKY

A MULTI-FREQUENCY DEVICE FOR STUDYING THE DRIFT IN THE IONOSPHERE

Summary

The description is given of a radio-apparatus constructed on the basis of the small ionosphere station MIS by means of which the drifts of small-sized heterogeneities can be observed simultaneously at four frequencies, using the D1 method. For the sounding of the ionosphere four frequnecies can be hosen from a discrete spectrum from 1—15.9 Mc through 0.1 Mc.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА КВАНТОВОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА I

Т. Г. ГАЧЕЧИЛАДЗЕ, Н. Ф. ХИРАЛЛА

1. Собственные состояния квантового гармонического осциллятора в фазовом пространстве

В работе [1] была получена „производящая функция" для фазовых собственных функций [2] оператора энергии гармонического осциллятора:

$$M(s,\ t;\ p,\ q)=\exp\left[2\alpha q\,(s+t)-2st-\frac{2ip(t-s)}{\alpha\hbar}\right]. \qquad (1.1)$$

Фазовые собственные функции вычисляются по формуле:

$$f_{lk}(p,\ q)=\alpha^{-1}\hbar^{-1}\pi^{-1/2}N_k N_l\exp\left(-\alpha^2q^2-\frac{p^2}{\alpha^2\hbar^2}\right)\lim_{s\to0}\lim_{t\to0}\frac{\partial^{l+k}}{\partial s^l\,\partial t^k}\times$$

$$\times M(s,\ t;\ p,\ q)=\left[\sum_{j=0}^{\min(l,\ k)}(-1)^j\frac{2^{\frac{l+k}{2}-j}\sqrt{l!k!}}{j!\,(l-j)!\,(k-j)!}\left(\frac{2}{\hbar\omega}\right)^{\frac{l+k}{2}-j}\times\right.$$

$$\left.\times\,h^{l-j}_{(p,q)}\,h^{*\,k-j}_{(p,q)}\right]W_0(p,\ q), \qquad (1.2)$$

где

$$W_0(p,q)=\frac{1}{\pi\hbar}\exp\left[-\frac{2}{\hbar\omega}H\,(p,\ q)\right],$$

$$N_k=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi 2^k k!}}},\quad \alpha=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}. \qquad (1.3)$$

В этих выражениях $H(p,\ q)=h^*(p,\ q)\,h(p,\ q)$—гамильтониан осциллятора, $p,\ q$—соответственно канонические импульс и координата, m—масса, ω—циклическая частота.

Диагональные фазовые собственные функции $f_{nn}\equiv F_n$ являются плотностями фазовых распределений канонически сопряжённых координаты и импульса (распределениями Вигнера [2]):

$$F_n(p,\ q)=\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^{2(n-k)}\,n!}{[(n-k)!]^2\,k!}\left[\frac{H\,(p,\ q)}{\hbar\omega}\right]^{n-k}\right\}W_0(p,\ q) \qquad (1.4)$$

Среднее значение любой физической величины, выраженной в виде функции от канонических переменных p и q в состоянии n, записывается через „вакуумные средние“:

$$\langle g(p, q)\rangle_n = \iint dp dq\, g(p, q)\, F_n(p, q) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2(n-k)}\, n!}{[(n-k)!]^2\, k!} \left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^{n-k} \langle H^{n-k}(p, q)\, g(p, q)\rangle_0. \qquad (1.5)$$

Существует связь между квазираспределением в фазовом пространстве и статистическим оператором [3]. Следуя Нейману, введем ансамбль осцилляторов, каждый из которых находится в „чистом состоянии“, а каждое состояние характеризуется некоторой частотой появления в ансамбле. Для ансамбля можно написать

$$F(p, q) = \sum_k W_k f_k(p, q). \qquad (1.6)$$

Рассмотрим полную ортонормированную систему волновых функций $\{\psi_i(q)\}$. Если $f_\nu(p, q)$ описывает чистое состояние, но каждой $f_\nu(p, q) \to \psi_\nu(p, q)$, которую можно разложить по $\{\psi_j(q)\}$:

$$\psi_\nu(q) = \sum_j a_{\nu j} \psi_l(q). \qquad (1.7)$$

Следовательно,

$$F(p, q) = \sum_\nu \sum_i \sum_j W_\nu a_{\nu i} a^*_{\nu j} f_{ij}(p, q), \qquad (1.8)$$

где собственные фазовые функции $f_{ij}(p, q)$ определяются формулой (1.2).

Заметим, что если $\{\psi_j(q)\}$ является полной ортогональной системой функций, тогда $\{(2\pi\hbar)^s\ f_{ij}(p, q)\}$ также является таковой в гильбертовом пространстве фазовых функций. Функции $f_{ij}(p, q)$ составляют базис не только для функций квазиплотностей, но охватывает всё гильбертово пространство L_2 функций, определенных на фазовом пространстве [4].

Если вычислить матрицу $\left[(2\pi\hbar)^s \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{ij}(p, q)\, F(p, q) dp dq\right]$,

получим

$$\left\| \sum_\nu W_\nu a^*_{\nu i} a_{\nu j} \right\| = \rho_{ij} \| \left(= \right\rangle F(p, q) = \sum_i \sum_j \rho_{ij} f_{ij}(p, q) \Big), \qquad (1.9)$$

представляющую статистический оператор фон Неймана.

Матрица, соответствующая величине $g(p, q)$, определяется формулой

$$\| g_{im} \| = \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(p, q)\, f^*_{im}(p, q) dp dq \right\|. \qquad (1.10)$$

Среднее значение $g(p, q)$ вычисляется по правилу Неймана:

$$\langle\hat{g}\rangle = Sp(\hat{g}\hat{\rho}) = \sum_i \sum_m g_{im}\rho_{mi} =$$

$$= \sum_i \sum_m \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(p, q) f^*_{im}(p, q) \left(\sum_\nu W_\nu a^*_{\nu m} a^\nu{}_i \right) dp dq,$$

т. к. $f^*_{im}(p, q) = f_{mi}(p, q)$,

$$Sp(\hat{g}\hat{\rho}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(p, q) \left[\sum_\nu W_\nu a^*_{\nu m} a_{\nu i} f_{mi}(p, q) \right] dp\, dq. \quad (1.11)$$

Здесь везде (p, q) обозначает $(p_1, \cdots, p_s\ q_1, \cdots, q_s)$, s—число степеней свободы системы, W_k—частота.

Полученный результат показывает, что квазиплотность эквивалента статистическому оператору.

С помощью формулы (1.10) нетрудно вычислить матрицы для „косинусной" и „синусной" скобок [4]:

$$(A, B) = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \left\{ \frac{2}{\hbar} \sum_{j=1}^n \det \begin{vmatrix} 1 & q_j & p_j \\ 1 & \tau_j & \sigma_j \\ 1 & \xi_j & \eta_j \end{vmatrix} \right\} A(\tau_k, \sigma_k) B(\xi_k, \eta_k) \times$$

$$\times d\xi_1 \cdots d\xi_n\, d\eta_1 \cdots d\eta_n\, d\tau_1 \cdots d\tau_n d\sigma_1 \cdots d\sigma_n, \quad (1.12)$$

$$[A, B] = 2 \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \left\{ \frac{2}{\hbar} \det \begin{vmatrix} 1 & q_j & p_j \\ 1 & \tau_l & \sigma_j \\ 1 & \zeta_j & \eta_j \end{vmatrix} \right\} A(\tau_k, \sigma_k) B(\xi_k, \eta_h) \times$$

$$\times d\xi_1 \cdots d\xi_n d\eta_1 \cdots d\eta_n\, d\tau_1 \cdots d\tau_n d\sigma_1 \cdots d\sigma_n. \quad (1.13)$$

Вернёмся к функциям (1.4). Рассмотрим вопрос об области отрицательных значений распределения Вингера для квантового гармонического осциллятора.

Число нулей вигнеровской фазовой плотности распределения вероятностей совпадает с квантовым числом n. Это непосредственно вытекает из вида функции Вигнера:

$$F_n(p, q) = T_n(p, q) W_0(p, q). \quad (1.14)$$

Если ввести обозначение $\xi \equiv \frac{2}{\hbar\omega} H(p, q)$, получим;

$$T_n(p, q) = T_n(\zeta) = \sum_{k=0}^n (=1)^k \frac{2^{n-k}}{[(n-k)!]^2 k!} \zeta^{n-k}, \quad (1.15)$$

и учитывая, что $W_0(p, q) > 0$ убеждаемся в очевидности нашего утверждения.

Нетрудно убедиться также, что все корни $T_n(\zeta)$ действительны и лежат в интервале $[0,\ 2n+1]$.

Ряд функций Штурма таков:

$$T_n(\zeta)=\frac{(2\zeta)^n}{n!}-\binom{n}{1}\frac{(2\zeta)^{n-1}}{(n-1)!}+\binom{n}{2}\frac{(2\zeta)^{n-2}}{(u-2)!}-$$

$$-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\frac{2\zeta}{1!}+(-1)^n,$$

$$T'_n(\zeta)=2\left\{\frac{(2\zeta)^{n-1}}{(n-1)!}-\binom{n}{1}\frac{(2\zeta)^{n-2}}{(n-2)!}+\binom{n}{2}\frac{(2\zeta)^{n-3}}{(n-3)!}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\right\},$$

$$T_n^{(1)}(\zeta)=\frac{(2\zeta)^{n-2}}{(n-2)!}-\binom{n-1}{1}\frac{(2\zeta)^{n-3}}{(n-3)!}+\binom{n-1}{2}\frac{(2\zeta)^{n-4}}{(n-4)!}-$$

$$-\ldots+(-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2},$$

. . . .

$$T_n^{(k)}(\zeta)=\frac{3+(-1)^k}{2}\left\{\frac{(2\zeta)^{n-(k+1)}}{(n-k-1)!}-\binom{n-k}{1}\frac{(2\zeta)^{n-(k+2)}}{(n-k-2)!}+\right.$$

$$\left.+\ldots+(-1)^{n-(k+1)}\binom{n-k}{n-k-1}\right\},$$

. . . .

$$T_n^{(n-1)}(\zeta)=\frac{3+(-1)^{n-1}}{2}.$$

Заметим, что $T_n^{(n-1)}(\zeta)=\mathrm{const}$, следовательно уравнение $T'_n(\zeta)=0$, кратных корней не имеет. Числа перемен знака в рядах чисел

$$T_n(0),\ T'_n(0),\ T_n^{(1)}(0),\ldots,\ T_n^{(n-1)}(0)$$

$$T_n(2n+1),\ T'_n(2n+1),\ T_n^{(1)}(2n+1),\ldots,T_n^{(n-1)}(2n+1)$$

соответственно равны $\varkappa_0=n$ и $\varkappa=0$. Разность $\varkappa_0-\varkappa=n$ даёт число действительных корней в интервале $[0,\ 2n+1]$.

Рассмотрим примеры.

Для первого возбуждённого состояния (интервал $[0,\ 3]$) ряд функций Штурма таков: $T_1(\zeta)=2\zeta-1$, $T'_1(\zeta)=2$.

Если ввести обозначения $\xi=\sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}\rho$ и $\eta=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$, то нетрудно убедиться, что $T_1(\xi,\ \eta)<0$ в круге радиуса $\zeta_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (рис. 1, заштрихованная область). Окружность $\xi^2+\eta^2=\frac{1}{2}$ соответствует $T_1(\xi,\ \eta)=0$.

Мы видим, что $W_1(\xi, \eta)<0$, если $(\xi, \eta) \in \left\{(\xi, \eta)\colon \xi^2+\eta^2 < \frac{1}{2}\right\}$. Площадь заштрихованной области $\Xi_1=\frac{1}{2}\pi$.

Второе возбуждённое состояние (интервал [0,5]):

$$T_2(\zeta)=2\zeta^2-4\zeta+1, \quad T_2'(\zeta)=4\zeta-4, \quad T_2^{(1)}(\zeta)=1.$$

$\varkappa_0-\varkappa=2\cdot W_2(\xi, \eta)=0$ при $\xi^2+\eta^2=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $W_2(\xi, \eta) < 0$, если

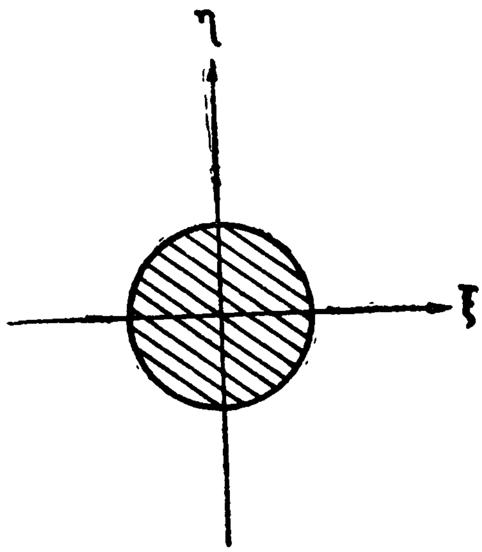

Рис. 1.

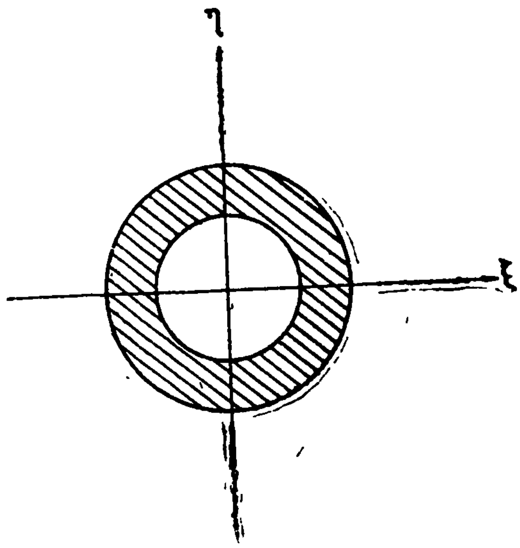

Рис 2.

$(\xi, \eta) \in \left\{(\xi, \eta): 1-\frac{1}{\sqrt{2}}<\xi^2+\eta^2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ (рис. 2. заштрихованная область). Площадь заштрихованной области $\Xi_2=\sqrt{2}\,\pi$.

Наконец, рассмотрим третье возбуждённое состояние (интервал [0, 7]):

$$T_3(\zeta)=\frac{4}{3}\zeta^3-6\zeta^2+6\zeta-1,$$

$$T_3'(\zeta)=4\zeta^2-12\zeta+6,$$

$$T_3^{(1)}(\zeta)=2\zeta-2, \quad T_3^{(2)}(\zeta)=2.$$

В этом случае $\varkappa_0-\varkappa=3$. Нули $T_3(\xi, \eta)$ определяются из уравнения:

$$4(\xi^2+\eta^2)^3-28(\xi^2+\eta^2)^2+$$
$$+18(\xi^2+\eta^2)-3=0$$

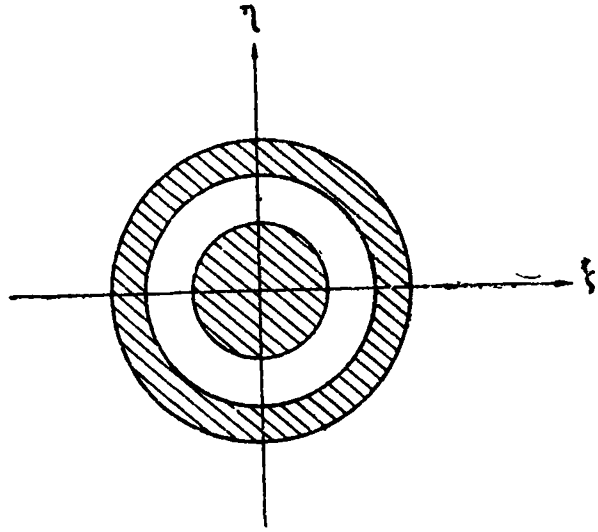

Рис. 3.

Область отрицательных значений функции $W_3(\xi, \eta)$ (см. рис. 3) такова: $\{(\xi, \eta): W_3(\xi, \eta)<0\}=\{(\xi, \eta): \xi^2+\eta^2<0{,}199\} \cup \{(\xi, \eta): 3{,}140>\xi^2+\eta^2>1{,}161\}$. Общая площадь заштрихованной области $\Xi\approx2{,}178\,\pi$.

2. Состояния квантового гармонического осциллятора с максимальной энтропией (м. э.)

В работе [1] изучались состояния гармонического осциллятора с максимальной энтропией. Такие состояния могут быть описаны с помощью плотностей фазовых функций распределения:

$$F_{\text{м. э.}}(p, q) = \exp\left[-\lambda_0 - \sum_{r=1}^{m} \lambda_r \varphi_r(p, q)\right], \tag{2.1}$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$—некоторые функции с заданными средними значениями $\langle\varphi_1\rangle, \ldots, \langle\varphi_m\rangle$, а λ_0, λ_1, λ_m—константы, определяемые из условий:

$$\langle\varphi_r\rangle = -\frac{\partial}{\partial\lambda_r}\ln Z(\lambda_1, \ldots, \lambda_m); \quad r = 1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

$$\lambda_0 = \ln Z.$$

Функцию

$$Z(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \frac{1}{2\pi\hbar}\iint dp\, dq \exp\left[-\sum_{r=1}^{m}\lambda_r \varphi_r(p, q)\right] \tag{2.3}$$

назовем обобщённым статистическим интегралом.

Для построения фазовой плотности, во всех деталях описывающей распределение вероятностей величин p и q, необходимо измерить моменты

$$G^{(r\cdot s)}(p, q) = p^r q^s. \tag{2.4}$$

Такая фазовая плотность может быть представлена в виде:

$$W(p, q) = \exp\left[-\lambda_0 - \sum_r\sum_s \chi_{rs}\, G^{(r,s)}(p, q)\right]; \tag{2.5}$$

λ_{rs} определяются по заданным средним значениям (2):

$$\langle \hat{G}^{(r,s)}\hat{p}, \hat{q})\rangle = \int dq\, \psi^*(q) \hat{G}^{(r,s)}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \hat{q}\right)\psi(q), \tag{2.6}$$

где

$$\hat{G}^{(r,s)}(\hat{p}, \hat{q}) = \exp\left(-\frac{1}{2}i\hbar\frac{\partial^2}{\partial p\partial q}\right)\hat{G}_0^{(r,s)}(\hat{p}, \hat{q}). \tag{2.7}$$

В случае квантового гармонического осциллятора, находящегося в n-ом собственном состоянии, средние (2.6) можно вычислить по формуле (1.5); имеем:

$$\langle\hat{G}^{(r's)}(\hat{p}, \hat{q})\rangle_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^{2(n-k)}n!}{[(n-k)!]^2 k!}\left(\frac{1}{\hbar\omega}\right)^{n-k}\langle H^{n-k}(p\cdot q)p^r q^s\rangle =$$

$$= B(n; s, r)\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{s/2}(m\hbar\omega)^{r/2}, \tag{2.8}$$

$$B(n;\ r,\ s)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}(-1)^k\,2^{-(n+r+s-k)}\times$$

$$\times\frac{n!\,[s+2(n-k-l)]!\,(r+2l)!}{k!\,l!\,(n-k)!\,(n-k-l)!\left(\frac{r}{2}+l\right)!\left(\frac{s}{2}+n-k-l\right)!}. \tag{2.9}$$

В работе [1] в качестве функций $\varphi_r(p,\ q)$ были использованы выражения, отличные от (2.4). В частности, были исследованы две важные функции: $H(p,\ q)$—гамильтониан и $\ln\frac{AB}{|p\,\|\,q|}$—функции структурной информации первого порядка [1]. Первая является достаточной статистикой для основного состояния осциллятора, вторая даёт правильные (соответствующие решению уравнения Шредингера) распределения в координатном и импульсном пространствах: однако она не является достаточной статистикой, т. к. не даёт правильной вигнеровской фазовой собственной функции.

Если вся информация о состоянии осциллятора заключается в знании среднего значения энергии $\langle H\rangle$, то, как известно, принцип м. э. для фазовой плотности даёт следующую оценку:

$$F_{\text{м.э.}}(p,\ q)=\frac{\omega}{2\pi\langle H\rangle}\exp\left[-\frac{H(p,\ q)}{\langle H\rangle}\right]. \tag{2.10}$$

В классическом случае $\langle H\rangle=kT$; в квантовом—$\langle H\rangle=\left(\frac{1}{2}+n\right)\hbar\omega$, причём, если осциллятор находится в равновесии со средой при температуре T, то $n=\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1\right]^{-1}$.

Дисперсия в состояниях (2.10) отлична от нуля.

Нетрудно построить фазовые плотности с заданными энергией и дисперсией. Имеем:

$$F_{\text{м.э.}}(p,\ q)=\frac{\omega}{2\pi^{3/2}}\,\frac{\langle H\rangle^3+\langle H^2\rangle^{3/2}-\langle H\rangle\langle H^2\rangle}{\langle H\rangle\langle H^2\rangle^{3/2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\langle H^2\rangle^{1/2}-\langle H\rangle}{\langle H\rangle\langle H^2\rangle^{1/2}}\,H(p,\ q)-\frac{\langle H\rangle}{2\langle H^2\rangle^{3/2}}H^2(p,\ q)\right] \tag{2.11}$$

В частности, если дисперсия равна нулю, т. е. $\langle H\rangle^2=\langle H^2\rangle$, получаем:

$$F_{\text{м.э.}}(p,\ q)=\frac{\omega}{2\pi^{3/2}}\exp\left[-\frac{H^2(p,\ q)}{2\langle H\rangle^2}\right]. \tag{2.12}$$

Исследуем вопрос о возможности построения фазовой плотности с заданной дисперсией более подробно.

М. э. оценка такой плотности имеет вид:

$$F_{\text{м.э.}}(p, q)=\exp[-\lambda_0-\lambda_1 H(p, q)-\lambda_2 H^2(p, q)] \tag{2.13}$$

Обобщенный статистический интеграл

$$Z(\lambda_1, \lambda_2)=\iint\frac{dpdq}{2\pi\hbar}\exp[-\lambda_1 H(p, q)-\lambda_2 H^2 p, q)]=$$

$$=\frac{1}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\pi}{4\lambda_2}}\exp\left(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right)\left[1+\Phi\left(\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right)\right] \tag{2.14}$$

Воспользуемся асимптотическим разложением ($\lambda_2\to 0$) интеграла вероятности:

$$\Phi\left(\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right)=1-\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right)^{k+\frac{1}{2}}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right)R_n, \tag{2.15}$$

где

$$R_n<\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\lambda_1^2/4\lambda_2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Подставив это выражение в (2.14) и ограничиваясь членами нулевого порядка, получим:

$$Z(\lambda_1, \lambda_2\to 0)=\frac{1}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\pi}{4\lambda_2}}\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda_1}\sqrt{4\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_1\hbar\omega}.$$

Система уравнений для определения λ_1 и λ_2 имеет вид:

$$\langle H(p, q)\rangle=-\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}+\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda_2}}\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right)\right]^{-1}. \tag{2.16}$$

$$\langle H^2(p, q)\rangle=\frac{1}{2\lambda_2}+\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\lambda_1}{\lambda_2^{3/2}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right)\right]^{-1}. \tag{2.17}$$

Воспользовавшись (2.15), нетрудно получить при $\lambda_2\to 0$

$$\langle H\rangle\to\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}+\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(\lambda_1^2/4\lambda_2)^{1/2}}-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2(\lambda_1^2/4\lambda_2)^{3/2}}\right]^{-1}=\frac{1}{\lambda_1},$$

$$\langle H^2\rangle \to \frac{1}{2\lambda_2}+\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2^{3/2}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(\lambda_1^2/4\lambda_2)^{1/2}}+\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{(\lambda_1^2/4\lambda_2)^{5/2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{(\lambda_1^2/4\lambda_2)^{3/2}}\right]^{-1}=\frac{2}{\lambda_1^2},$$

что находится в согласии с формулами (2.10) и (2.12). Из (2.16) и (2.17) получаем:

$$\lambda_2=\frac{1-\lambda_1\langle H\rangle}{2\langle H^2\rangle}. \tag{2.18}$$

Ниже мы рассмотрим законы взаимности (см. формулы (3.3), (3.4)). Если воспользоваться этими законами, можно написать:

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\langle H^2\rangle}=\frac{\partial\lambda_2}{\langle\partial H\rangle},\quad \frac{\partial\lambda_1}{\langle\partial H^2\rangle}=-\frac{\lambda_1}{2\langle H^2\rangle}-\frac{\langle H\rangle}{2\langle H^2\rangle}\frac{\partial\lambda_1}{\partial\langle H\rangle}. \tag{2.19}$$

Учтём, что в нашем случае $\langle H\rangle$, $\langle H^2\rangle$, λ_1, $\lambda_2>0$, следовательно

$$\lambda_1<\frac{1}{\langle H\rangle},\quad 2\langle H^2\rangle\frac{\partial\lambda_1}{\partial\langle H^2\rangle}+\langle H\rangle\frac{\partial\lambda_1}{\partial\langle H\rangle}=-\lambda_1. \tag{2.20}$$

Соотношения (2.19) и (2.20) удовлетворяются не единственной функцией от $\langle H\rangle$ и $\langle H^2\rangle$.

Рассмотрим т. н. „термодинамическое“ приближение:

$$\lambda_1=[\langle H\rangle+\sqrt{\langle H^2\rangle}\,]^{-1},$$

$$\lambda_2=\frac{1}{2}\{\sqrt{\langle H^2\rangle}\,[\langle H\rangle+\sqrt{\langle H^2\rangle}\,]\}^{-1}. \tag{2.21}$$

Приближение будет удовлетворительным, если

$$\sqrt{\pi}\exp\left(-\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}\right)\left[1-\Phi\left(\frac{\lambda_1}{2\sqrt{\lambda_2}}\right)\right]\sim 1.$$

Подставив λ_1 и λ_2 в (2.16) и (2.17), получаем значение $\approx 1{,}086$.

Рассмотрим другое приближение, соответствующее формуле (2,11). В этом случае:

$$\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2}=\frac{1}{2}\left[1\Big/\left(1+\frac{2n+1}{\sqrt{1+(2n+1)^2}}\right)\right].$$

Здесь мы воспользовались известными выражениями для $\langle H\rangle$ и $\langle H^2\rangle$. При $n\to\infty$ два рассмотренных приближения эквивалентны.

Рассмотрим более детально функцию структурной информации. В работе [1] было показано, что уже для первого возбуждённого состояния информация, извлекаемая из опыта по измерению энергии, недостаточна. Дополнительная информация может быть получена из опыта по измерению

положения осциллирующей частицы. Эта информация определяется отношением полного диапазона измеряемой величины к ошибке [6]. Т. о., будем считать, что информация, необходимая для определения фазовой плотности в возбуждённом состоянии, может быть представлена в виде

$$\langle H\rangle=\iint H(p,\ q)W(p,\ q)dpdq, \tag{2.22}$$

$$\langle I\rangle=\iint I(q)\,W(p,\ q)\,dpdq, \tag{2.23}$$

где

$$I(q)=\ln\frac{A}{|\Delta q|}=\ln\frac{A}{|q|}, \tag{2.24}$$

A—классическая амплитуда, $|\Delta q|=|q-\langle q\rangle=|q|$, т. к. $\langle q\rangle=0$. „Структура“ линейного гармонического осциллятора в координатном и импульсном пространствах одинакова [5]. Поэтому можем ввести функции:

$$I_1(q)=\ln\frac{A}{|q|},\quad I_2(p)=\ln\frac{A}{|p|}. \tag{2.25}$$

М. э. принцип позволяет написать:

$$W(p,\ q)=\exp\left[\alpha_0-\alpha_1 H(p_1 q)-\alpha_2 I_1(q)-\alpha_3 I_2(p)\right]. \tag{2.26}$$

Обобщённая статистическая сумма в этом случае имеет вид:

$$Z(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\frac{2}{\pi\hbar}A^{-\alpha_2}B^{-\alpha_3}(m\omega\alpha_1)^{-\frac{\alpha_2+1}{2}}\left(\frac{\alpha_1}{m}\right)^{-\frac{\alpha_3+1}{2}}\times$$

$$\times\Gamma(1+\alpha_2)\Gamma(1+\alpha_3)D_{-\alpha_2-1}(0)\,D_{-\alpha_3-1}(0)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\,2^{\frac{2+\alpha_2+\alpha_3}{2}}A^{-\alpha_2}B^{-\alpha_3}(m\omega\alpha_1)^{-\frac{\alpha_2+1}{2}}\left(\frac{\alpha_1}{m}\right)^{-\frac{\alpha_3+1}{2}}\times$$

$$\times\,\Gamma\left(\frac{\alpha_2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha_3+1}{2}\right),$$

где $D_p(z)$—функция параболического цилиндра, $\Gamma(z)$—эйлеров интеграл второго рода. При $\alpha_2\to 0$, $\alpha_3\to 0$ $Z(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\to(\alpha_1\omega\hbar)^{-1}$. Параметры α_1,α_2, α_3 определяются из уравнений:

$$\langle H\rangle=-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ln Z(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\frac{2+\alpha_2+\alpha_3}{2\alpha_1} \tag{2.28}$$

$$\langle I_1\rangle=-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ln Z(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\ln\left(A\sqrt{m\omega^2\alpha_1}\right)-\frac{1}{2}\,\psi\left(\frac{\alpha_2+1}{2}\right), \tag{2.29}$$

$$\langle I_2\rangle=-\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\ln Z(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\ln\left(B\sqrt{\frac{\alpha_1}{m}}\right)-\frac{1}{2}\,\psi\left(\frac{\alpha_3+1}{2}\right), \tag{2.30}$$

где $\psi(z)$—логарифмическая производная $\Gamma(z)$.

Т. к. описания состояния осциллятора в координатном и импульсном пространствах эквивалентны, количества информации $\langle I_1\rangle$ и $\langle I_2\rangle$ равны.

Если учесть, что A и B совпадают с полуосями эллипсоида, на котором отлично от нуля совместное распределение энергии $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}q^2$ и фазового угла $\vartheta=\operatorname{arctg}\frac{p}{q}$, совместимое с квантовым распределением вероятностей собственных значений энергии E_n, т. е. если $A=\sqrt{\frac{(2n+1)\hbar}{m\omega}}$ и $B=\sqrt{(2n+1)m\hbar\omega}$, то $\alpha_2=\alpha_3$.

Из вышесказанного следует, что проблема может быть сформулирована в терминах информационной функции $I(p,q)=\ln\frac{AB}{|q||p|}$. М. э. решение этой проблемы таково:

$$W(p,q)=\exp[-\lambda_0-\lambda_1 H(p,q)-\lambda_2 I(p,q)],$$

$$Z(\lambda_1,\lambda_1)=\frac{1}{\pi\hbar}2^{\lambda_2}(AB)^{-\lambda_2}(\lambda_1\omega)^{-\lambda_2-1}\Gamma^2\left(\frac{\lambda_2+1}{2}\right), \qquad (2.31)$$

$$\langle H\rangle=\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1},\quad \langle I\rangle=\ln\frac{AB\lambda_1\omega}{2}-\psi\left(\frac{\lambda_2+1}{2}\right).$$

В этих формулах $\langle I\rangle=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(q)\ln\frac{A}{|q|}dq$, где $\rho(q)$—плотность вероятности в координатном пространстве.

Предположим, что осциллятор находится в состоянии с $n\neq 0$, тогда

$$\langle I\rangle=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi_n(q)|^2\ln\frac{A}{|q|}\,dq=2N_n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\alpha^2q^2)H_n^2(\alpha q)\ln\frac{A}{|q|}dq. \qquad (2.32)$$

Эти интегралы нетрудно вычислить. Приведём в явном виде случаи с $n=0,\ 1,\ 2.$

Заметим, что если воспользоваться известным неравенством [7]:

$$|H_n|(x)|\leqslant 2^{\frac{n}{2}-E\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{n!}{\left[E\left(\frac{n}{2}\right)\right]!}\exp\left(2\sqrt{E\left(\frac{n}{2}\right)}\right),$$

то можно написать

$$\langle I\rangle\leqslant 2^{n-2E\left(\frac{n}{2}\right)+2}N_n^2(n!)^2\left\{\left[E\left(\frac{n}{2}\right)\right]!\right\}^2\times$$

$$\times\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\exp\left[4E^2\left(\frac{n}{2}\right)\right]\left[1+\Phi\left(2E\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right]+\frac{1}{4}(C+\ln 4\alpha^2)\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^2}}-\right.$$

$$-\frac{1}{4\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[E\left(\frac{n}{2}\right)\right]^k}{k!}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\left[\psi\left(\frac{k+1}{2}\right)-\ln\alpha^2\right]\Bigg\}, \tag{2.33}$$

где $\Phi(z)$—интеграл вероятности, C—постоянная Эйлера, $E(k)$—целая часть k.

Рассмотрим случай $n=1$. Имеем, согласно формуле (2.32),

$$\langle I\rangle_1=2\int_{-\infty}^{+\infty}dq\ln\frac{A}{|q|}\,|\psi_1(q)|^2=2N_1^2\int_{-\infty}^{+\infty}\ln\frac{A}{|q|}(2\alpha q)^2\exp(-\alpha^2q^2)dq=$$

$$=2\ln(\alpha A)-2+\ln 4+C=\ln 6-2+C\approx 0{,}369\text{ nit}. \tag{2.34}$$

Подставив это значение в (2.31), получим:

$$\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{3}{2}\hbar\omega,\qquad \ln\left(\frac{AB\lambda_1\omega}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)=\ln 6-2+C.$$

Из первого уравнения $\lambda_1=\dfrac{1+\lambda_2}{\frac{3}{2}\hbar\omega}$. Подставив это значение λ_1 во второе уравнение, получим:

$$\ln\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)=\ln 6-2+C.$$

Нетрудно проверить, что решением этого уравнения будет $\lambda_2=2$. В действительности $\psi\left(\frac{3}{2}\right)=-C+2-\ln 4$. Следовательно, $\lambda_1=\frac{2}{\hbar\omega}$. Таким образом, м. э. плотность распределения при $n=1$ определяется формулой:

$$W_1(p,q)=\frac{4}{\pi\hbar^3}p^2q^2\exp\left(-\frac{p^2}{m\hbar\omega}-\frac{m\omega^2q^2}{\hbar}\right). \tag{2.35}$$

Легко доказать, что $\int W_1(p,q)dq=|\varphi_1(p)|^2$ и $\int W_1(p,q)dp=|\psi_1(q)|^2$, где $\psi_1(q)$ и $\varphi_1(p)$—волновые функции осциллятора в первом возбуждённом состоянии соответственно в координатном и импульсном пространствах.

Теперь рассмотрим случай $n=2$. Имеем:

$$\langle I\rangle_2=2\int_{-\infty}^{+\infty}dq\ln\frac{A}{|q|}\,|\psi_2(q)|^2=8N_2^2\int_{-\infty}^{+\infty}dq\ln\frac{A}{|q|}\exp(-\alpha^2q^2)[4\alpha^4q^4-$$

$$-4\alpha^2q^2+1]=C-2+\ln 20\approx 1{,}573\text{ nit}. \tag{2.36}$$

$$\lambda_1=\frac{1+\lambda_2}{\frac{5}{2}\hbar\omega},\quad \ln\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)-\psi\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)=C-2+\ln 10\approx 0{,}8798. \tag{2.37}$$

Решение таково: $\lambda_1 \cong 0{,}57\,(\hbar\omega)^{-1}$, $\lambda_2 \cong 0{,}42$. Плотность распределения вероятностей при $n=2$ определяется формулой

$$W_2(p, q) \cong \frac{0{,}27}{\pi}\left(\frac{1{,}14}{\hbar}\right)^{1{,}42} |\,p\,|^{0{,}42}\,|\,q\,|^{0{,}42} \exp\left[-\frac{0{,}57}{\hbar\omega} H(p, q)\right].$$

Интересно проследить к чему приводит измерение положения в основном состоянии. Для основного состояния

$$\langle I\rangle_0 = 4N_0^2 \int\limits_0^\infty \ln\frac{A}{q}\exp(-\alpha^2 q^2)\,dq =$$

$$= \frac{4N_0^2}{\alpha}\left]\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ln(\alpha A) + \frac{\sqrt{\pi}}{4}(C + \ln 4)\right] = \ln 2 + C \approx 1{,}270\,\text{nit}. \qquad (2.39)$$

Уравнения приобретают вид:

$$\frac{1+\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \ln\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right) - \psi\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right) = \ln 2 + C. \qquad (2.40)$$

Решения этих уравнений таковы:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\hbar\omega}, \quad \lambda_2 = 0. \qquad (2.41)$$

Мы видим, что в основном состоянии измерение положения после того, как была измерена энергия, новой информации не даёт. Этого следовало ожидать, т. к. для построения собственной волновой функции основного состояния гамильтониан $H(p, q)$ является достаточной статистикой.

3. Законы взаимности для квантового гармонического осциллятора

Соотношения (2-2) показывают, что постоянные λ_r определяются в терминах имеющейся информации $\langle\varphi_1\rangle, \ldots, \langle\varphi_m\rangle$. Поэтому и максимальная информационная энтропия будет функцией имеющейся информации:

$$(S_{\mathrm{I}})_{max} = S(\langle\varphi_1\rangle, \ldots, \langle\varphi_m\rangle) \qquad (3.1)$$

Используя (2.2) и (3.1), получаем

$$\frac{\partial S}{\partial\langle\varphi_k\rangle} = \lambda_k, \quad (k = 1, \ldots, m). \qquad (3.2)$$

Рассматривая $\langle\varphi_i\rangle$ в качестве функций от $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, получаем законы взаимности:

$$\frac{\partial\langle\varphi_k\rangle}{\partial\lambda_j} = \frac{\partial\langle\varphi_j\rangle}{\partial\lambda_k} = -\frac{\partial^2}{\partial\lambda_k\partial\lambda_j}\ln Z(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = A_{jk} \qquad (3.3)$$

Аналогично, рассматривая λ_k в качестне функций от $\langle\varphi_1\rangle, \ldots, \langle\varphi_m\rangle$, находим соответствующие законы:

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \langle \varphi_j \rangle} = \frac{\partial \lambda_j}{\partial \langle \varphi_k \rangle} = - \frac{\partial^2 S}{\partial \langle \varphi_j \rangle \, \partial \langle \varphi_k \rangle} = B_{jk}. \tag{3.4}$$

Нетрудно убедиться, что вторые производные S и $\ln Z$ образуют взаимно обратные матрицы $\| A_{jk} \| = \| B_{jk} \|^{-1}$. Функции $S(\langle \varphi_1 \rangle, \ldots, \langle \varphi_m \rangle)$ и $\ln Z(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ эквивалентны в том смысле, что каждая из них даёт одинаковую информацию о распределении вероятностей в фазовом пространстве.

Рассмотрим конкретные примеры. Обобщённый статистический интеграл, соответствующий (2.5)

$$Z(\lambda_{02}^{(n)}, \lambda_{20}^{(n)}, \ldots) = \iint \frac{dp\,dq}{2\pi\hbar} \exp\left[- \sum_r \sum_s \lambda_{rs}^{(n)} G^{(r,s)}(p, q) \right]. \tag{3.5}$$

Соотношения (3.3) и (3.4) принимают вид:

$$\frac{\partial \langle G^{(r,s)}(p, q) \rangle}{\partial \lambda_{r's'}^{(n)}} = \frac{\partial \langle G^{(r',2')}(p, q) \rangle}{\partial \lambda_{rs}^{(n)}} = A_{rs\,r's'}^{(n)}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \lambda_{rs}^{(n)}}{\partial \langle G^{(r's')}(p, q) \rangle} = \frac{\partial \lambda_{r'2'}^{(n)}}{\partial \langle G^{(r,s)}(p, q) \rangle} = B_{rs,\,r's'}^{(n)}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим плотность распределения (2.11). Подставив в эту формулу выражения $\langle H \rangle$ и $\langle H^2 \rangle$, соответствующие n-тому собственному состоянию гамильтониана, получаем:

$$F_{\text{м. э.}}^{(n)}(p, q) = \frac{\sqrt{[1+(2n+1)^2[^3} - (2n+1)}{\sqrt{\pi^3}\,\hbar\,(2n+1)\sqrt{[1+(2n+1)^2]^3}} \times$$
$$\times \exp - \frac{2}{\hbar\omega} \frac{\sqrt{1+(2n+1)^2} - (2n+1)}{(2n+1)\sqrt{1+(2n+1)^2}} H(p, q) -$$
$$- \frac{2}{\hbar^2\omega^2} \frac{1}{\sqrt{[1+(2n+1)^2]^3}} H^2(p\ q) \Bigg] \tag{3.8}$$

Выпишем в явном виде матрицы $\| A_{jk} \|$ и $\| B_{jk} \|$ для рассматриваемого случая.

$$A = \left| \begin{matrix} -\dfrac{3}{4} \dfrac{(2n+1)^2 \sqrt{1+(2n+1)^2}}{\sqrt{1+(2n+1)^2} - (2n+1)} \hbar^2\omega^2 - \\ -\dfrac{1}{4} \dfrac{(2n+1)\sqrt{[1+(2n+1)^2]^3}}{\sqrt{1+(2n+1)^2} - (2n+1)} \hbar^3\omega^3 - \\ -\dfrac{1}{4} \dfrac{(2n+1)\sqrt{[1+(2n+1)^2]^3}}{\sqrt{1+(2n+1)^2} - (2n+1)} \hbar^3\omega^3 \\ -\dfrac{1}{4} \dfrac{[1+(2n+1)^2]^3}{(2n+1)\left[\sqrt{1+(2n+1)^2} - (2n+1)\right]} \hbar^4\omega^4 \end{matrix} \right|, \tag{3.9}$$

и

$$B=\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{(2n+1)^2}(\hbar\omega)^{-2} & \dfrac{4}{\sqrt{[1+(2n+1)^2]^3}}(\hbar\omega)^{-3} \\ \dfrac{4}{\sqrt{[1+(2n+1)^2]^3}}(\hbar\omega)^{-3} & \dfrac{12(2n+1)}{\sqrt{[1+(2n+1)^2]^5}}(\hbar\omega)^{-4} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Эти же матрицы для плотности (2.35) имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{4}\hbar^2\omega^2 & \dfrac{1}{2}\hbar\omega \\ \dfrac{1}{2}\hbar\omega & 4-\dfrac{\pi^2}{2} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \dfrac{8}{26-3\pi^2}(\hbar\omega)^{-2} & \dfrac{4}{26-3\pi^2}(\hbar\omega)^{-1} \\ \dfrac{4}{26-3\pi^2}(\hbar\omega)^{-1} & \dfrac{6}{26-3\pi^2} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

4 „Компенсирующее" поле

Рассмотрим м. э. состояния квантового гармонического осциллятора с энергиями $E_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Эти значения мы рассматриваем как результат измерения, которое можно представить в виде взаимодействия прибора с осциллятором.

Предположим, что этот процесс описывается уравнением Шредингера:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2+\hat{H}(\hat{\xi})+\hat{V}(\hat{q},\hat{\xi})\right]\psi(q,\xi)=i\hbar\frac{\partial\psi(q,\xi)}{\partial t},$$

где ξ—совокупность координат прибора. Если допустить, что процесс измерения происходит в момент t_0, то для $t>t_0$ функцию $\psi(q,\xi)$ можно разложить по собственным функциям прибора $\Phi_n(\xi)$ (образующим полную систему функций); получим сумму вида:

$$\sum_n A_n(q)\Phi_n(\xi),$$

где $A_n(q)$—некоторые функции q.

Если учесть классичность прибора, то в этой сумме отличен от нуля лишь один член, соответствующий показанию прибора g_n;

$$A_n(q)\Phi_n(\xi).$$

Отсюда следует, что $B_n(q)$ пропорциональна волновой функции осциллятора; она включает в себя как сведения о свойствах возникшего состояния осциллятора, так и определяемую начальным состоянием системы вероятность появления n-го показания прибора:

$$A_n(q)=a_n\psi_n(q)..$$

Прибор должен находиться в определённом состоянии, т. е.

$$\hat{H}(\hat{\xi})\psi(q,\xi)=E_\xi\psi(q,\xi).$$

Общее состояние системы (осциллятор—прибор) для $t \gg t_0$ стационарно, т. е.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} E\psi, \quad E = E_\xi + E_n.$$

Предположим, что

$$\int p(d\xi)\,\psi(q, \xi) = \psi_{\text{м. э.}}(q).$$

Проинтегрируем обе части уравнения Шредингера по ξ. Получим:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m_n^*} + \frac{m_n^* \omega^2}{2}\hat{q}^2 + \hat{V}_n(\hat{q})\right]\psi^{(0)}_{\text{м. э.}}(m_n^*) = \frac{\hbar\omega}{2}\psi^{(0)}_{\text{м. э.}}(m_n^*), \tag{4.1}$$

где

$$\hat{V}_n(\hat{q}) = \left[\int p(d\xi)\,\Phi_n(\xi)\right]^{-1}\int p(d\xi)\,\hat{V}(\hat{q}, \hat{\xi})\Phi_n(\xi) \tag{4.2}$$

—„компенсирующее“ поле. Оно добавляется к гамильтониану свободного осциллятора и обеспечивает в м. э. состоянии значение энергии E_n. Легко получить;

$$F^{(n)}_{\text{м. э.}}(p, q) = \frac{1}{2\pi}\int d\tau\,\psi_0^*\left(q - \frac{1}{2}\hbar\tau;\ m_n^*\right)\times$$

$$\times\exp(-i\tau p)\,\psi_0\left(q + \frac{1}{2}\hbar\tau; m_n^*\right). \tag{4.3}$$

Рассмотренное „компенсирующее“ поле приводит к частичному коллапсу волновой функции осциллятора.

Для описания полного коллапса, т. е. образования собственного состояния, необходимо введение других „компенсирующих“ полей, соответствующих измерению величин типа $G^{(r,s)}(p, q)$.

Проведём расчёт „компенсирующего“ поля для гармонического осциллятора. Имеем:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2\right)\psi_n = \frac{2n+1}{2}\hbar\omega\psi_n. \tag{4.4}$$

Плотность в координатном пространстве, вычисляемая на основе м. э. фазовой функции распределения, имеет вид:

$$\rho_n(q) = [(2n+1)\pi\hbar]^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2n+1}\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right)\int dp\,\exp\left(-\frac{2}{2n+1}\frac{p^2}{2m\hbar\omega}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{(2n+1)\pi\hbar}}\,\exp\left(-\frac{1}{2n+1}\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right). \tag{4.5}$$

По аналогии с основным состоянием осциллятора пишем:

$$\psi^{(n)}_{\text{м. э.}}(q) = \left[\frac{m\omega}{(2n+1)\pi\hbar}\right]^{1/4}\exp\left(-\frac{1}{2n+1}\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right). \tag{4.6}$$

Эта функция является решением уравнения (4.1), или эквивалентного:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2+\hat{V}_n(\hat{q})\right]\psi^{(n)}_{\text{м.э.}}(q)=\frac{2n+1}{2}\hbar\omega\,\psi^{(n)}_{\text{м.э}}(q). \tag{4.7}$$

Легко убедиться, что „компенсирующий" потенциал гармонического осциллятора

$$V_n(q)=\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)}\hbar\omega-\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)^2}m\omega^2q^2. \tag{4.8}$$

Можем написать:

$$H(p,q)+V_n(q)=\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}q^2(2n+1)^{-2}+\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)}\hbar\omega,$$

или

$$\frac{1}{2n+1}\left[\frac{p^2}{2(m/(2n+1))}+\frac{(m/(2n+1))\omega^2}{2}q^2\right]\psi'_n=\frac{1}{2n+1}\frac{\hbar\omega}{2}\psi'_n,$$

Введём параметр $m^*_n=\dfrac{m}{2n+1}$, тогда:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m^*_n}+\frac{m^*_n\omega^2}{2}\hat{q}^2\right]\psi'_n=\frac{\hbar\omega}{2}\psi'_n;\quad \psi'_n=\psi'_n(m^*_n). \tag{4.9}$$

Аналогично, вводя параметр $\omega^*_n=\dfrac{\omega}{2n+1}$, получаем:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m\omega^{*2}_n}{2}q'^2\right)\psi''_n=\frac{\hbar\omega^*_n}{2}\psi''_n;\quad \psi''_n=\psi''_n(\omega^*_n). \tag{4.10}$$

Приведём значение $\langle\hat{V}_n\rangle$ в м. э. состоянии. Имеем:

$$\langle\hat{V}_n(\hat{q})\rangle_{\text{м.э.}}=\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)}\hbar\omega-\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)^2}m\omega^2\langle q^2\rangle_{\text{м.э.}},$$

где

$$\langle q^2\rangle_{\text{м.э}}=\int d\,qq^2\rho_n(q)=\iint dp\,dqq^2\,F^{(n)}_{\text{м.э.}}(p,q)=\frac{2n+1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}.$$

Окончательно:

$$\langle\hat{V}'_n(\hat{q})\rangle_{\text{м.э.}}=\frac{1}{2}V_n(0)=\frac{(2n+1)^2-1}{4(2n+1)}\hbar\omega. \tag{4.11}$$

Для сопоставления интересно привести формулу квантово-механического потенциала Бома [8]. По определению

$$U(q)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R};\quad R=\mathrm{Mod}\,\psi.$$

Для осциллятора

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2R+\frac{m\omega^2}{2}q^2R=\frac{2n+1}{2}\hbar\omega R.$$

Следовательно,

$$U(q)=\frac{2n+1}{2}\hbar\omega-\frac{m\omega^2}{2}q^2. \quad (4.12)$$

Важно отметить, что если проведено измерение энергии осциллятора, то измерение „компенсирующего“ поля не даёт новой информации.

Введём параметр α_2, термодинамически сопряжённый с$\langle \hat{V}_n(q)\rangle$; тогда функцию плотности можно представить в виде:

$$F(p, q)=\exp[-\Phi_0(\alpha_1, \alpha_2)-\alpha_1 H(p, q)-\alpha_2 V_n(q)], \quad (4.13)$$

где $\Phi_0(\alpha_1, \alpha_2)=\ln Z(\alpha_1, \alpha_2)$—термодинамическая функция Массье—Планка. Обобщённый статистический интеграл

$$Z(\alpha_1, \alpha_2)=\iint dp dq \exp[-\alpha_1 H(p, q)-\alpha_2 V_n(q)]=$$

$$=\frac{2\pi}{\omega}\left\{\left[\alpha_1-\alpha_2\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\right]\alpha_1\right\}^{-1/2}\exp\left[-\alpha_2\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)}\hbar\omega\right]. \quad (4.14)$$

Уравнения, определяющие множители Лагранжа α_1 и α_2, таковы:

$$\langle H(p, q)\rangle=-\frac{\partial\Phi_0(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial\alpha_1}=-\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ln Z(\alpha_1, \alpha_2)=$$

$$=\frac{1}{2\alpha_1}+\frac{1}{2}\left[\alpha_1-\alpha_2\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)}\right]^{-1}, \quad (4.15)$$

$$\langle V_n(q)\rangle=-\frac{\partial\Phi^0(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial\alpha_2}=-\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\ln Z(\alpha_1, \alpha_2)=$$

$$=\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)}\hbar\omega-\frac{1}{2}\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\left[\alpha_1-\alpha_2\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\right]^{-1}. \quad (4.16)$$

Получается следующая система уравнений:

$$\frac{2n+1}{2}\hbar\omega=\frac{1}{2\alpha_1}+\frac{1}{2}\left[\alpha_1-\alpha_2\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\right]^{-1},$$

$$\frac{(2n+1)^2-1}{4(2n+1)}\hbar\omega=\frac{(2n+1)^2-1}{2(2n+1)}\hbar\omega-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\left[\alpha_1-\alpha_2\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\right]^{-1}.$$

Решение этой системы таково:

$$\alpha_1=\frac{2}{(2n+1)\hbar\omega}, \quad \alpha_2=0, \quad (4.17)$$

т. е. измерение $V_n(q)$ в действительности не даёт новой информации для построения плотности распределения вероятностей.

Проблемная лаборатория передачи и обработки информации в больших системах управления

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Г. Гачечиладзе, Труды Тбилисского государственного университета, т. 135, серия киберн. наук, 1970.
2. Дж. Мойэль, Сб. „Вопросы причинности в квантовой механике", „Наука", М., 1955.
3. Дж. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, „Наука", М., 1964.
4. G. A. Baker, Phys. Rev, 109, 2198 (1956).
5. Л. Д. Ландау, Е М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963.
6. К. Бриллюэн, Наука и теория информации, ГИФМЛ, М., 1960.
7. И. Градштейн, И Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведения, ГИФМЛ, М., 1963.
8. Д. Бом, Сб. „Вопросы причинности в квантовой механике" „Наука" М., 1955.
9. R. S. Ingarden, K. Urbanik, Acta Phys. Polonica, XIX, § 3 (1961).
10. R. S. Ingarden, Acta Phys. Polonica XXVII, § 2 (1965).
11. R. S. Ingarden, L. Kossakowski, Acta Phys. Polonica, XXVII, § 4. (1965).
12. R. S. Ingarden, Bull Acad. Sci., Ser. Math., Astr., Phys, 9, 541 (1963).
13. W. J. Neidhardt, Amer. J Phys., 37, 211 (1969).
14. V. Majernik, Kybernetica, 1, № 6 (1970).

თ. გაჩეჩილაძე, ნ. ჭირალა

კვანტური ჰარმონიული ოსცილატორის ინფორმაციული თერმოდინამიკა

რეზიუმე

შესწავლილია კვანტური ჰარმონიული ოსცილატორის მდგომარეობათა გარკვეული კლასი, რომელიც ხასიათდება ენტროპიის მაქსიმუმით, და ამ მდგომარეობათა შესაბამისი ვიგნერის განაწილებები ფაზურ სივრცეში.

T. GATCHETCHILADZE, N. CHIRALLA

INFORMATIONAL THERMODYNAMICS OF QUANTUM OSCILLATOR I

Summary

The class of quantum oscillator maximum entropy states and corresponding Wigner phase space distribution functions have been investigated.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА КВАНТОВОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА II

Т. Г. ГАЧЕЧИЛАДЗЕ, Н. Ф. ХИРАЛЛА

5. Энтропия

Информационная энтропия для м. э. состояний может быть определена по формулам (1-9)—(1.11), [1],I.В качестве функции $g(p, q)$ рассмотрим $-\ln F_{\text{м.э.}}(p, q)$. В этом случае

$$\| g_{im} \| = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{im}(p, q) \ln F_{\text{м.э.}}(p, q)\, dpdq, \tag{5.1}$$

$$\| \rho_{mi} \| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^*_{im}(p, q) F_{\text{м.э}}(p, q) dpdq, \tag{5.2}$$

$$\langle \hat{g} \rangle = S_p(\hat{g}\hat{\rho}) = \sum_i \sum_m g_{im} \rho_{mi} =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{\text{м.э.}}(p, q) \ln F_{\text{м.э.}}(p, q)\, dpdq = S_{\text{I}}[F_{\text{м.э.}}] \tag{5.3}$$

$S_{\text{I}}[F_{\text{м.э.}}]$ является информационной энтропией.

Подставим в эту формулу (2.1), получим:

$$S_{\text{I}}[F_{\text{м.э.}}] = \ln Z + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \langle \varphi_r(p, q) \rangle. \tag{5.4}$$

Приведём выражения для рассмотренных в [1], I, фазовых функций. Для (2.5), (2.10), (2.11) и (2.31) соответственно

$$S_{\text{I}}[W] = \lambda_0^{(n)} + \sum_r \sum_s \lambda_{r,t}^{(n)} \langle G^{(r,s)}(p, q) \rangle_n, \tag{5.5}$$

$$S_{\text{I}}[F_{\text{м.э.}}] = -\ln \frac{\hbar\omega}{\langle eH \rangle}, \tag{5.6}$$

$$S_{\text{I}}[F'_{\text{м.э.}}] = -\ln \left(\frac{\hbar\omega}{2\sqrt{\pi}} \frac{\langle H \rangle^3 + \langle H^2 \rangle^{3/2} - \langle H \rangle \langle H^2 \rangle}{\langle H \rangle \langle H^2 \rangle^{3/2}} \right) +$$

$$+ \frac{2\langle H^2 \rangle^{1/2} - \langle H \rangle}{\langle H^2 \rangle^{1/2}} \tag{5.7}$$

$$S_I[W] = \ln\left\{\frac{2\lambda_2}{\pi\hbar}(AB)^{-\lambda_2}(\lambda_1\omega)^{-\lambda_2-1}\Gamma^2\left(\frac{1+\lambda_2}{2}\right)\right\} +$$
$$+\lambda_1\langle H(p, q)\rangle + \lambda_2\langle I(p, q)\rangle. \tag{5.8}$$

В частности, для первого возбуждённого состояния осциллятора

$$S_I[W_1] = \ln\frac{e^3}{2} + 0{,}738. \tag{5.9}$$

Если состояние системы описывается статистическим оператором $\hat{\rho}$, то энтропия этого состояния по Нейману определяется формулой:

$$S_N = -S_p(\hat{\rho}\ln\hat{\rho}). \tag{5.10}$$

С целью определения оператора $\hat{\rho}$ надо разложить $F_{\text{м.э.}}(p, q)$ по собственным фазовым функциям (1.2).

Пусть в распределении (2.10) $\langle H\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. В этом случае

$$\rho_{lk}^{(n)} = \frac{2\pi\hbar N_k N_l}{\pi\sqrt{\pi}\,\alpha\hbar^2(2n+1)}\lim_{s\to 0}\lim_{t\leftarrow 0}\frac{\partial^{l+k}}{\partial s^k\,\partial t^l}\iint\exp\left\{-\frac{2H(p, q)}{(2n+1)\hbar\omega} +\right.$$
$$\left.+2\alpha(s+t)q - 2st - \frac{2ip}{\alpha\hbar}(t-s) - \alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{\alpha^2\hbar^2}\right\}. \tag{5.11}$$

Вычисления показывают, что

$$\rho_{lk}^{(n)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k\delta_{lk}, \tag{5.12}$$

а

$$S_N^{(n)} = -\sum_l \rho_{ll}^{(o)}\ln\rho_{ll}^{(n)} = (n+1)\ln(n+1) - n\ln n. \tag{5.13}$$

Заметим, что если ввести параметр $\beta = \frac{\langle H\rangle}{\hbar\omega}$, то (5.12) можно записать в виде:

$$\rho_{lk} = \frac{2}{(2\beta+1)}\left(\frac{2\beta-1}{2\beta+1}\right)^k\delta_{lk} \tag{5.14}$$

В классическом пределе $\langle H\rangle\to kT$; причём $\frac{\hbar\omega}{kT}\leqslant 1$ в случае, когда осциллятор находится в равновесии со средой. Поэтому „классическая" матрица плотности определяется соотношением:

$$\rho_{lk} = \frac{2}{2\frac{kT}{\hbar\omega}+1}\left[\frac{2\frac{kT}{\hbar\omega}-1}{2\frac{kT}{\hbar\omega}+1}\right]^k\delta_{lk}, \tag{5.15}$$

а энтропия

$$S_N \cong \ln \frac{kT}{\hbar\omega}. \tag{5.16}$$

Вычислим коэффициенты разложения плотности (2.13) по собственным фазовым функциям (1.2). Причём, пусть λ_1 и λ_2 соответствуют нулевой дисперсии энергии [1]. В рассматриваемом случае

$$\rho_{lm}^{(n)} = \frac{1}{n} \frac{N_l N_m}{\alpha\hbar\sqrt{\pi}} \lim_{s\to 0} \lim_{t\to 0} \frac{\partial^{l+m}}{\partial s^m \partial t^l} \iint dp\,dq \exp\left\{-\frac{H(p, q)}{2n\hbar\omega} - \right.$$

$$\left. - \frac{H^2(p, q)}{4n^2\hbar^2\omega^2} + 2\alpha q(s+t) - 2st - 2ip\frac{t-s}{\alpha\hbar} - \alpha^2 q^2 - \frac{p^2}{\alpha^2\hbar^2}\right\}. \tag{5.17}$$

Интеграл в этой формуле в полярных координатах имеет вид:

$$J(s, t) = \hbar \exp(-2st) \int_0^\infty \rho d\rho \left\{\exp\left[-\frac{(4n+1)}{4n}\rho^2 - \frac{1}{16n^2}\rho^4\right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{2\pi} d\rho \exp[2(s+t)\rho\cos\varphi - 2i(t-s)\rho\sin\varphi]\right\}.$$

Интеграл по φ:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \exp[2(s+t)\rho\cos\varphi - 2i(t-s)\rho\sin\varphi] =$$

$$= 2\int_0^{\pi} d\varphi \exp(4\rho\sqrt{st}\cos\varphi) = 4\pi J_0(4\rho\sqrt{st}),$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя.

$$J(s, t) = 2\pi \exp(-2st) \int_0^\infty d\rho\rho J_0(4\sqrt{st}\,\rho) \exp\left(-\frac{4n+1}{4n}\rho^2 - \frac{1}{16n^2}\rho^4\right) =$$

$$-2\pi\hbar \exp(-2st) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{1}{16n^2}\right)^k \times$$

$$\times \int_0^\infty d\rho\rho^{4k+1} J_0(4\sqrt{st}\,\rho) \exp\left(-\frac{4n+1}{4n}\rho^2\right).$$

Воспользуемся известной формулой [7]:

$$\int_0^\infty x^\mu \exp(-\alpha x^2) J_\nu(\beta x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\right)}{\beta\alpha^{1/2\mu}\Gamma(\nu+1)} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) M_{\frac{1}{2}\mu, \frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right),$$

где должны иметь $Re\alpha>0$, $Re(\mu+\nu)>-1$, $\beta>0$; $M_{\sigma,\tau}(z)$—функция Уиттекера. Её можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию [7]:

$$M_{\frac{1}{2}\mu,\,\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)=\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right)^{\frac{1}{2}\nu+1}\exp\left(-\frac{\beta^2}{16\alpha}\right)\Phi\left(\frac{1}{2}(\nu-\mu)+\frac{1}{2},\ \nu+1;\ \frac{\beta^2}{8\alpha}\right).$$

В нашем случае $\alpha=\dfrac{4n+1}{4n}$, $\beta=4\sqrt{st}$, $\nu=0$, $\mu=4k+1$. Таким образом,

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{4n+1}{4n}\rho^2\right)J_0(4\sqrt{st}\,\rho)\,\rho^{4k+1}d\rho=$$

$$=\frac{\Gamma(2k+1)\exp\left(-\dfrac{8nst}{4n+1}\right)}{4\sqrt{st}\left(\dfrac{4n+1}{4n}\right)^{2k+1/2}}M_{\frac{4k+1}{2},\,0}\left(\frac{8nst}{4n+1}\right).$$

$$=\frac{(2k)!}{2^{3/2}}\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{2k+1}\exp\left(-\frac{12nst}{4n+1}\right)\Phi\left(-2k,\ 1;\ \frac{8nst}{4n+1}\right).$$

Подставляя это выражение в вычисляемый интеграл, получим:

$$J(s,\ t)=\frac{\pi\hbar}{\sqrt{2}}\,\frac{4n}{4n+1}\exp\left[-\frac{2(10n+1)}{4n+1}st\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{1}{4n+1}\right)^{2k}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^j}{(2k-j)!\,(j!)^2}\left(\frac{8nst}{4n+1}\right)^j.$$

Окончательно,

$$\rho_{lm}^{(n)}=\delta_{lm}\,2^{5/2}(-1)^m2^{2-m}\frac{m!}{4n+1}\sum_{j=0}^{m}\frac{2^j}{[(m-j)!]^2}\left(\frac{8n}{4n+1}\right)^{m-j}\left(\frac{10n+1}{4n+1}\right)^j\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(2n-m+j)!}\left(\frac{1}{4n+1}\right)^{2k}. \tag{5.18}$$

6. Термодинамический формализм

Рассматриваемый нами формализм может быть назван информационной термодинамикой. Эта термодинамическая модель несколько отлична от рассматриваемой в работах [9], [10]. Поэтому, мы начнём рассмотрение с основных определений.

Состояние произвольной квантовой системы Q, описываемое фазовой плотностью $F(p,q)$, будем называть микросостоянием.

Рассмотрим некоторый оператор $\hat{A}$. Если $\psi_k^{\hat{A}}$—собственные функции этого оператора, то подставив эти функции в вигнеровское распределение получим:

$$f_{kl}^{\hat{A}}(p,\ q)=\frac{1}{2\pi}\int d\tau\psi_k^{\hat{A}*}\left(q-\frac{1}{2}\hbar\tau\right)e^{-i\tau p}\,\psi_l^{\hat{A}}\left(q+\frac{1}{2}\hbar\tau\right) \tag{6.1}$$

Диагональные собственные функции $f_{ll}^{\hat{A}}(p,\ q)$ определяют собственные микросостояния, соответствующие оператору $\hat{A}$. Матрица плотности в $\hat{A}$-представлении определяется по формулам (1.8) и (1.9), где разложение проводится по $f_{kf}^{\hat{A}}(p,\ q)$.

Если задано среднее значение $\hat{A}$, микросостояние $F(p,q)$, конечно, определить однозначно нельзя. Два микросостояния $F(p,\ q)$ и $F'(p,\ q)$, для которых математические ожидания оператора $\hat{A}$ равны, т. е.

$$E_{\hat{A}}[F(p,q)]=E_{\hat{A}}[F'(p,\ q)] \tag{6.2}$$

будут называться эквивалентными относительно $\hat{A}$; этот факт будем обозначать следующим образом:

$$F(p,\ q)\underset{\hat{A}}{\sim}F'(p,\ q).$$

Отношение эквивалентности „$\overset{\sim}{\hat{A}}$“ подразделяет все микросостояния на непересекающиеся классы. Эти классы назовём макросостояниями относительно $\hat{A}$ и будем обозначать через $F^{\hat{A}}$. Макросостояние квантовой системы Q однозначно определяется измерением среднего значения $\hat{A}$. В более общем случае макросостояние определяется набором средних значений $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \cdots, \hat{A}_m$. Определим среднее значение и энтропию для макросостояний. Среднее значение $E_{\hat{A}_i}[F]$ физической величины $A_i(p,q)$ в макросостоянии F, очевидно, идентично общему среднему значению $E_{\hat{A}_i}]F(p,\ q)]$ для всех микросостояний $F(p,\ q)\in F$. Не таким тривиальным является определение энтропии макросостояния. Для её определения мы используем принцип максимума информационной энтропии. Теория информации даёт простую интерпретацию максимальной энтропии как меры неопределённости, относящейся к $\hat{A}_1,\ \hat{A}_2,\cdots,\hat{A}_m$, когда известны $E_{\hat{A}_1}[F],\cdots E_{\hat{A}_m}[F]$. Таким образом, мы считаем, что энтропия макросостояния определяется по формуле (5.4), где в качестве функций $\varphi_r(p,\ q)$ взяты величины $A_i(p,\ q)$, т. е.

$$S_{I\,max}=\Phi_0(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,\langle A_j(p,\ q)\rangle, \tag{6·3}$$

где $\Phi_0(\alpha, \ldots, \alpha_m) = \ln Z(\alpha_1 \ldots \alpha_m)$ — термодинамическая функция Массье—Планка, α_j—величины, термодинамически сопряжённые по отношению к $\langle A_j(p, q)\rangle$.

Назовём совокупность операторов $\{\hat{A}_j,\ j=1, \ldots, m\}$ термодинамически регулярной, если $Z(\alpha_1, \alpha_2)$—конечння величина.

Определяемая таким образом термодинамическая теория является статистической термодинамикой квантового осциллятора с температурами высших порядков [11], [12].

Температуры r-го порядка определяется по формуле [12]:

$$\theta_r = \frac{1}{\alpha_r}. \tag{6.4}$$

Рассмотрим важный частный случай.

В качестве $A_j(p, q)$ рассмотрим гамильтониан осциллятора $H(p, q)$. Получим т. н. $\hat{H}$-термодинамику, которая полностью аналогична обычной.

Пусть $\langle H(p, q)\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. В этом случае

$$S_{\mathrm{I}max} = \ln \frac{2n+1}{2} e \tag{6.5}$$

и

$$\theta_{\hat{H}} = \frac{2n+1}{2} \hbar\omega. \tag{6.6}$$

Величины $\langle H\rangle$, $\theta_{\hat{H}}$ и $S_{\mathrm{I}max}$ являются макрофизическими характеристиками. Чтобы дополнить совокупность макрофизических характеристик, введём внешние параметры $\beta_1, \ldots, \beta_r$ (например, приложенные внешние электрические и магнитные поля, гравитационный потенциал и т. д.). В этом случае:

$$\theta_{\hat{H}} = \left(\frac{\partial\langle H(p, q)\rangle}{\partial S_{\mathrm{I}max}}\right)_{\beta_1, \ldots, \beta_r}. \tag{6.7}$$

Другие частные производные определяют обобщённые внешние силы $P^i_{\hat{H}}$, связанные с внешними параметрами β_i (например, электрические и магнитные моменты и т. д.):

$$P^i_{\hat{H}} = -\left(\frac{\partial\langle H(p, q)\rangle}{\partial\beta_i}\right)_{S_{\mathrm{I}max}}, \quad (i=1,\ 2, \ldots, r). \tag{6.8}$$

Имеет место обобщённое термодинамическое тождество:

$$d\langle H(p, q)\rangle = \theta_{\hat{H}}\, dS_{\mathrm{I}max} - \sum_{i=1}^{r} P^i_{\hat{H}}\, d\beta_i. \tag{6.9}$$

Это соотношение может быть разбито на два, выражающих содержание традиционных первого и второго законов термодинамики. Для соответствующих форм Пфаффа введём специальные обозначения:

$$\theta_{\hat{H}}\, dS_{\mathrm{I}max}=\delta Q_{\hat{H}}\,, \tag{6.10}$$

$$-\sum_{i=1}^{r} P^{i}_{\hat{H}}\, dB_i=\delta W_{\hat{H}}\,. \tag{6.11}$$

$\delta Q_{\hat{H}}$ и $\delta W_{\hat{H}}$ в общем случае не являются полными дифференциалами какой-либо функции состояния. Соотношение (6.9) записывается в форме:

$$d\langle H(p,\, q)\rangle=\delta Q_{\hat{H}}+\delta W_{\hat{H}}\,, \tag{6.12}$$

выражающей первый закон $\hat{H}$-термодинамики. Переписав это соотношение в виде

$$dS_{\mathrm{I}max}=\frac{1}{\theta_{\hat{H}}}\left(d\langle H(p,\, q)\rangle+\sum_{i=1}^{r} P^{i}_{\hat{H}}\, d\beta_i\right), \tag{6.13}$$

мы видим, что $\theta_{\hat{H}}$ является интегрирующим множителем для формы Пфаффа:

$$d\Omega_{\hat{H}}=d\langle H(p,\, q)\rangle+\sum_{i=1}^{r} P^{i}_{\hat{H}}\, d\beta_i. \tag{6.14}$$

Этот факт отражает содержание второго закона $\hat{H}$-термодинамики в формулировке Каратеодори.

В качестве основной величины информационной термодинамики мы рассматриваем обобщённый статистический интеграл, определяемый формулой (2.3). Свободная энергия определяется обычным образом. Для квантового осциллятора имеем:

$$F_{\hat{H}}=-\theta_{\hat{H}}\ln Z_{\hat{H}}=-\hbar\omega\frac{2n+1}{2}\ln\frac{2n+1}{2}. \tag{6.15}$$

Очевидно, имеет место соотношение:

$$F_{\hat{H}}=\langle H(p,\, q)\rangle-\theta_{\hat{H}}\, S_{\mathrm{I}max}. \tag{6.16}$$

Рассмотрим состояние осциллятора с определённой энергией и нулевой дисперсией. В этом случае

$$S_{\mathrm{I}max}=\lambda_0+\lambda_1\langle H(p,\, q)\rangle+\lambda_2\langle H^2(p,\, q)\rangle.$$

Если λ_1, λ_2 вычислены в термодинамическом приближении (см. (2.21)), получим

$$S_{\mathrm{I}max}=\ln\frac{2n+1}{2}+\frac{3}{4}, \tag{6.17}$$

$$\theta_1^{-1}=\frac{\partial S_{\mathrm{I}max}}{\partial\langle H(p,\, q)\rangle}=\frac{2}{(2n+1)\hbar\omega},\quad \theta_2^{-1}=\frac{\partial S_{\mathrm{I}max}}{\partial\langle H^2(p,\, q)\rangle}=\theta_1^{-2}. \tag{6.18}$$

Можно ввести эффективную температуру. Имеем

$$\frac{dS_{\mathrm{I}max}}{d\langle H(p,\ q)\rangle}=\lambda_1+2\lambda_1^2\langle H\ (p,\ q)\rangle=\frac{2}{(2n+1)\hbar\omega},$$

и если положить, что $\lambda_1=\theta_{\text{эфф}}^{-1}$, то

$$\theta_{\text{эфф}}=(1\pm3)\ \frac{2n+1}{4}\ \hbar\omega. \tag{6.19}$$

7. Информационная теория возмущений

Бывают случаи, когда измерение физической величины даёт относительно малую информацию, которой в исходном приближении можно пренебречь. В этих случаях можно развить своего рода теорию возмущений, аналогичную термодинамической теории возмущений Пайерлса [5].

Необходимо отметить, что относительная малость информации не означает малости самой измеряемой величины. В этом случае малой будет величина, термодинамически сопряжённая по отношению к измеряемой.

Для вычисления термодинамической функции Массье-Планка воспользуемся формулой:

$$\exp\left[-\Phi_0\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\right)\right]=\iint\frac{dpdq}{2\hbar\omega}\ \exp\left[-\sum_{r=1}^{m}\alpha_r A_r(p,\ q)\ \right] \tag{7.1}$$

Пусть в этом выражении $\alpha_k,\ldots,\alpha_m$ малы. Тогда, с точностью до членов второго порядка малости,

$$\exp\left[-\Phi_0\left(\alpha_1.\cdots,\alpha_m\right)\right]\cong\iint\frac{dpdq}{2\hbar\omega}\ \exp\left[-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i A_i\left(p,\ q\right)\right]\left[1-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=k}^{m}\alpha_i\ A_i(p,\ q)+\frac{1}{2}\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=k}^{m}\alpha_i\alpha_j A_i\left(p,\ q\right)A_j\left(p,\ q\right)\ \right]. \tag{7.2}$$

Логарифмируя и снова разлагая в ряд, с той же точностью имеем

$$\Phi_0\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_m\right)=\Phi_0^0\left(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m\right)+$$

$$+\sum_{i=k}^{m}\alpha_i\ \iint\frac{dpdq}{2\pi\hbar}A_i\left(p,\ q\right)\exp\left[\ \Phi_0^0\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}\right)-\ \sum_{r=1}^{k-1}\alpha_r A_r\left(p,q\right)\ \right]-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=k}^{m}\ \alpha_i\alpha_j\ \iint\frac{dpdq}{2\pi\hbar}\ A_i\left(p,\ q\right)A_j\left(p,\ q\right)\exp\left[\Phi_0^0\ \left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}-\right.\right.$$

$$-\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_r A_r(p,\ b)\Bigg]+\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{i=k}^{m}\alpha_i\iint\frac{dpdq}{2\pi\hbar}A_i(p,\ q)\exp\ [\Phi_0^0(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})-$$

$$-\sum_{r=1}^{k-1}\alpha_r A_r(p,q)\Bigg]\Bigg\}^2,$$

где $\Phi_0^0(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})=\iint\frac{dpdq}{2\pi\hbar}\exp\left[-\sum_{r=1}^{k=1}\alpha_r A_r(p,q)\right]$—невозмущённая функция Массье—Планка. Получившиеся интегралы представляют собой средние значения соответствующих величин, вычисленные с помощью невозмущённого распределения. Таким образом,

$$\Phi_0(\alpha_1,\dots,\alpha_m)=\Phi_0^0(\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1})+\sum_{i=k}^{m}\alpha_i\langle A_i(p,\ q)\rangle^\circ-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=k}^{m}\sum_{j=k}^{m}\alpha_i\alpha_j[\langle A_i(p,\ q)A_j(p,\ q)\rangle^\circ-\langle A_i(p,\ q)\rangle^\circ\langle A_j(p,\ q)\rangle^\circ]. \qquad (7.3)$$

8. Система связанных осцилляторов

Гамильтониан системы связанных осцилляторов задаётся в виде [13]:

$$H(p_1,\dots,p_N;\ q_1\dots,q_N)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{p_j^2}{2M_j}\delta_{ij}+\frac{V_{ij}}{2}q_iq_j\right), \qquad (8.1)$$

где M_j—масса j-ой частицы, p_j—импульс, q_j—координата, V_{ij}—константа связи i-той и j-той частиц.

Хорошо известно, что с помощью линейного преобразования от $(p_1,\dots,p_N;\ q_1,\dots,q_N)$ переменных можно перейти к нормальным координатам $(Q_1,\dots,Q_N)$ и сопряжённым импульсам $(K_1\dots,K_N)$. Если матрица преобразования обозначена через $\|A_{ij}\|$, то имеют место следующие соотношения:

$$q_i=\sum_j A_{ij}Q_j,\qquad p_i=\sum_j M_jA_{ij}K_j, \qquad (8.2)$$

$$Q_i=\sum_j M_jA_{ji}q_j,\quad K_i=\sum_j A_{ji}p_j. \qquad (8.3)$$

Матричные элементы A_{ij} определяются из системы уравнений:

$$\omega_l^2M_iA_{il}-\sum_j V_{ij}A_{jl}=0,\quad (i=1,\dots,N), \qquad (8.4)$$

где ω_l—частота l-го нормального колебания.

Если $V_{ij}^+=V_{ij}$, то имеют место соотношения:

$$\sum M_i A_{il}A_{jl}=\delta_{jl}. \qquad (8.5)$$

Преобразованный гамильтониан может быть переписан в следующем виде:

$$H(Q_1, \ldots, Q_N;\ K_1, \ldots, K_N) = \sum_i H_i^{(n)}, \tag{8.6}$$

где $H_i^{(n)} = \frac{1}{2} K_i^2 + \frac{\omega_i^2}{2} Q_i^2$—гамильтонианы несвязанных нормальных осцилляторов.

Фазовое распределение, соответствующее ансамблю Гиббса, находится методом, описанным в [2]. Вычисляется среднее значение оператора

$$\hat{M} = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{N} (\tau_j \hat{p}_j + \theta_j \hat{q}_j) \right\} \tag{8.7}$$

и находится соответствующий Фурье-образ. Таким образом,

$$\langle \hat{M} \rangle = M(\tau_1, \ldots, \tau_N;\ \theta_1, \ldots, \theta_N) =$$

$$= \sum_n p_n \int \cdots \int \prod_{j=1}^{N} dq_j \psi_n^*(q_1, \ldots, q_N) \exp\left[i \sum_{j=1}^{N} (\tau_j \hat{p}_j + \theta_j \hat{q}_j \right] \psi_n(q_1, \ldots, q_N); \tag{8.8}$$

плотность распределения определяется по формуле (1.6).

При переходе к нормальным координатам фазовая плотность представляется в виде произведения функции вида (1.4).

Вычислим парные корреляционные функции. Импульсная корреляционная функция имеет вид:

$$\langle p_k p_l \rangle = M_k M_l \sum_j \sum_r A_{kj} A_{lr} \langle K_j K_r \rangle = M_k M_l \sum_j A_{lj} A_{kj} \langle K_j^2 \rangle, \tag{8.9}$$

Аналогично

$$\langle q_k\ q_l \rangle \doteq \sum_i A_{kj} A_{lj} \langle Q_j^2 \rangle. \tag{8.10}$$

Рассмотрим усреднение с помощью функции (1.4). На основании формулы (1.5) имеем:

$$\langle p_k p_l \rangle = M_k M_l \sum_j \sum_{r=0}^{N} (-1)^r \frac{2^{2(n_j - r)} n_j!}{[n_j - r)!]^2 r!} \frac{A_{lj} A_{kj}}{M_j} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\hbar \omega_j} \right)^{n_j - r} \langle [H^n (Q_j', K_j')]^{n_j - r} K_j'^2 \rangle_0 \tag{8.11}$$

$$\langle q_k\ q_l \rangle = \sum_i \sum_{r=0}^{N} (-1)^r \frac{2^{2(n_j - r)} n_j!}{[(n_j - r)!]^2 r!} M_j A_{lj} A_{kj} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\hbar \omega_j} \right)^{n_j - r} \langle [H^n (Q_j';\ K_j')]^{k_j - r} Q_j'^2 \rangle_0, \tag{8.12}$$

где $K_j = M_j^{-1/2} K_j'$ и $Q_j = K^{1/2} Q_j$. Вычисления показывают, что

$$\langle [H^{(n)}(Q_j';\ K_j')]^{n_j - r} K_j'^2 \rangle_0 = \sum_{s=0}^{n_j - r} \binom{n_j - r}{s} \left(\frac{1}{2M_j}\right)^s \left(\frac{M_j \omega_j^2}{2}\right)^{n_j - r - s} \times$$

$$\times \iint dK_j'\, dQ_j'\, K_j'^{2s+2} Q_j'^{2(n_j - r - s)} W_0(K_j',\ Q_j') =$$

$$= \left(\frac{2M_j}{\pi} \frac{\hbar\omega_j}{2}\right)^{n_j - r + 1} \sum_{s=0}^{n_j - r} \binom{n_j - r}{s} (2s+1)!!\, [2\,(n_j - r - s) - 1]!!, \tag{8.13}$$

$$\langle H^{(n)}(K_j',\ Q_j')]^{n_j - r} Q_j'^2 \rangle_0 = \frac{1}{2M_j} \frac{\hbar}{\omega_j} \left(\frac{\hbar\omega_j}{4}\right)^{n_j - r} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{n_j - r} \binom{n_j - r}{s} (2s-1)!!\, [2\,(n_j - r - s) + 1]!!. \tag{8.14}$$

Подставляя (8.13) и (8.14) соответственно в (8.11) и (8.12), получаем

$$\langle p_k p_l \rangle = M_k M_l \sum_j \frac{1}{2} \hbar\omega_j A_{lj} B_{nj} A_{kj},$$

$$B_{nj} = \sum_{r=0}^{nj} (-1)^r \binom{n_j}{r} \sum_{s=0}^{nj-r} \frac{(2s+1)!!}{s!} \frac{[2(n_j - r - s) - 1]!!}{(n_j - r - s)}, \tag{8.15}$$

$$\langle q_k\, q_l \rangle = \sum_j \frac{1}{2} \frac{\hbar}{\omega_j} A_{kj} A_{lj}\, C_{nj},$$

$$C_{nj} = \sum_{r=0}^{nj} (-1)^r \binom{n_j}{r} \sum_{s=0}^{nj-r} \frac{(2s-1)!!}{s!} \frac{[2(n_j - r - s) + 1]!!}{(n_j - r - s)!}, \tag{8.16}$$

Нетрудно показать, что $B_{nj} = C_{nj} = 2\left(n_j + \dfrac{1}{2}\right)$, поэтому:

$$\langle p_k p_l \rangle = M_k M_l \sum_j A_{kj} A_{lj} \left(n_j + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_j, \tag{8.17}$$

$$\langle q_k\, q_j \rangle = \sum_j A_{kj}\, A_{lj} \frac{\hbar}{\omega_j} \left(n_j + \frac{1}{2}\right). \tag{8.18}$$

Заметим, что проводя расчёты для состояний (2.10) с $\langle H \rangle = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$ и (2.13), получим тот же результат. Наконец, приведём формулы для корреляционных функций в случае (2.10) с $\langle H \rangle = \dfrac{\hbar\omega}{2} \mathrm{cth}\left(\dfrac{\hbar\omega}{2kT}\right)$:

$$\langle p_k p_l\rangle = M_k M_l \sum_j A_{kj} A_{lj} \frac{\hbar\omega_j}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_j}{2kT}\right), \tag{8.19}$$

$$\langle q_k\, q_l\rangle = \sum_j A_{kj}\, A_{lj}\, \frac{\hbar}{2\omega_j} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_j}{2kT}\right). \tag{8.20}$$

Очевидно, что (8.17) и (8.18) можно представить в форме (8.19) и (8.20). Для этого достаточно выразить n_j в виде функции от $\hat{H}$-температуры. С этой целью воспользуемся формулами (5.10) и (5.14). Получим:

$$S_N = \left(\frac{\langle H\rangle}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{\langle H\rangle}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\langle H\rangle}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{\langle H\rangle}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right). \tag{8.21}$$

В этом случае

$$\frac{1}{\theta_{\hat{H}}} = \frac{dS_N}{d\langle H\rangle} = \frac{1}{\hbar\omega}\ln\left[\left(\frac{\langle H\rangle}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right)\Big/\left(\frac{\langle H\rangle}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{\hbar\omega}\ln\frac{n+1}{n}. \tag{8.22}$$

Выражая n через $\theta_{\hat{H}}$, получим:

$$n = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{\theta_{\hat{H}}}\right) - 1\right]^{-1}. \tag{8.23}$$

Величина $\theta_{\hat{N}}$ дискретная, положительная за исключением случая, когда $\langle H\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega$; в этом случае $\theta_{\hat{H}} = 0$. Согласно (8.23).

$$\langle H\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2\theta_{\hat{H}}}\right). \tag{8.24}$$

Следовательно, если ввести параметр ϑ и записать корреляционные функции в виде

$$\langle p_k p_l\rangle = M_k M_l \sum_j A_{kj}\, A_{lj} \frac{\hbar\omega_j}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_j}{2\vartheta_j}\right), \tag{8.25}$$

$$\langle q_k\, q_l\rangle = \sum_j A_{kj}\, A_{lj}\, \frac{\hbar}{2w_j}\, \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar w_j}{\vartheta_j}\right), \tag{8.26}$$

то при $\vartheta_j = kT$ получим обычные термические корреляционные функции (8.19) и (8.20), а при $\vartheta_j = \theta_{\hat{H}}$—корреляционные функции (8.17), (8.18).

Зависимость парных корреляционных функций от температуры определяется выражением $\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_j}{2\vartheta_i}\right)$. Поэтому нетрудно получить для этих функций приближённые выражения.

В случае, когда $\vartheta_j=\theta_{\hat{H}_j}=\hbar\omega_j\left[\ln\frac{n_i+1}{n_j}\right]^{-1}$

$$\begin{aligned}
&\langle p_k p_l\rangle \cong M_k M_l \hbar \sum_j A_{kj} A_{lj} n_j \omega_j, \quad \theta_{\hat{H}_j} \gg \hbar\omega_j,\\
&\langle p_k p_l\rangle \cong \frac{1}{2}\hbar M_k M_l \sum_j A_{kj} A_{lj}\omega_j, \quad \theta_{\hat{H}_j} \ll \hbar\omega_j,\\
&\langle q_k q_l\rangle \cong \hbar \sum_j A_{kj} A_{lj} n_j \omega_j^{-1}, \quad \theta_{\hat{H}_j} \gg \hbar\omega_j,\\
&\langle q_k\ q_l\rangle \cong \frac{1}{2}\hbar \sum_j A_{kj} A_{lj}\omega_j^{-1}, \quad \theta_{\hat{H}_j} \ll \hbar\omega_j.
\end{aligned} \tag{8.27}$$

когда $\vartheta_j=kT$

$$\begin{aligned}
&\langle p_k p_l\rangle \cong kT\ M_k\ M_l \sum_j A_{kj} A_{lj}, \quad jkT \gg \hbar\omega_j, \quad (j=1,\ldots),\\
&\langle q_k\ q_l\rangle \cong kT \sum_j A_{kj} A_{lj}\omega_j^{-2}, \quad kT \gg \hbar\omega_j, \quad (j=1,\ldots),\\
&\langle p_k\ p_l\rangle \cong \frac{1}{2}\hbar M_k M_l \sum_j A_{kj} A_{lj}\omega_j, \quad kT \ll \hbar\omega_j, \quad (j=1\ldots.),\\
&\langle q_k\ q_l\rangle \cong \frac{1}{2}\hbar \sum_j A_{kj} A_{lj}\omega_j^{-1}, \quad kT \ll \hbar\omega_j \ (j=1,\ldots).
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Предположим, что $M_1=\ldots=M_N=M$. В этом случае:

$$\sum_j A_{lj} A_{jk} = M^{-1}\delta_{lk}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\langle p_k\ p_l\rangle &= 0, && \text{для высоких } T(l\neq k),\\
&= \frac{1}{2} M^2\hbar \sum_j A_{kj} A_{lj}\omega_j, && \text{для низких } T(l\neq k),\\
&= MkT, && \text{для высоких } T(l=k),\\
&= \frac{1}{2} M^2\hbar \sum_j A_{kj} A_{lj}\omega_j, && \text{для низких } T(l=k).
\end{aligned}$$

С точки зрения импульсной корреляционной функции кооперативное поведение имеет место при низких температурах и постепенно исчезает с её повышением. Грубо говоря, поведение импульсов при высоких температурах напоминает газообразную фазу, в то время как при низких—жидкую или твёрдую.

В работе [13] рассмотрена система идентичных гармонически связанных масс с фиксированными концами. В этом случае, как известно,

$$\omega_j=\omega_0\left\{2\left[1-\cos\left(\frac{\pi j}{N+1}\right)\right]\right\}^{1/2}, \quad \omega_0=\sqrt{\frac{C}{M}},$$

$$A_{ij}=\sqrt{\frac{2}{M(N+1)}}\sin\left(\frac{\pi ij}{N+1}\right),$$

где C—константа осцилляторной связи. При вычислении среднеквадратичных флуктуаций координаты и импульса воспользуемся формулами (8.5), (8.19)—(8.28). Получим:

$$\Delta q_i\Delta p_i=\frac{1}{2\omega_0\sqrt{N+1}}\left[\sum_j \vartheta_j \frac{\sin^2\left(\frac{\pi ij}{N+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi j}{N+1}\right)}\right]^{1/2},$$

$$\cong\frac{kT}{2\omega_0}, \quad \vartheta_j=kT, \quad N\gg 1;$$

для малых ϑ_j

$$\Delta q_i\Delta p_i=\frac{\hbar}{N+1}\left[\sum_j\frac{\sin^2\left(\frac{\pi ij}{N+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi i}{2n+1}\right)}\right]^{1/2}\left[\sum_j\sin^2\left(\frac{\pi ij}{N+1}\right)\sin\left(\frac{\pi j}{2(N+1)}\right)\right]^{1/2},$$

$$\cong\hbar, \quad N\gg 1.$$

9. Элементарная термодинамическая модель канала коммуникации

Рассмотрим т. н. модель Майорника [14]. В основе этой модели лежит предположение о том, что всякая передача информации по физическим каналам сопровождается передачей действия.

В этом разделе классическая теория Майорника [4] обобщается на квантовый случай с помощью введения понятия обобщённой температуры (в частности, $\hat{H}$-температуры):

$$\theta^{(n)}_{\hat{H}}=\hbar\omega\ \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-1}. \tag{9.1}$$

Это позволяет при описании квантового канала пользоваться классическим формализмом информационной термодинамики.

Рассмотрим канал, где источник и приёмник информации могут находиться в состояниях, принадлежащих некоторому множеству физических состояний, отличающихся лишь значением параметра $\theta_{\hat{H}}$. Статистическая связь между источником и приёмником осуществляется благодаря такой физической среде, которая на определённый период времени обеспечивает между ними „тепловой“ контакт. В результате этого контакта изменяются термодинамические свойства канала связи, главным образом информационная энтропия. Очевидно, что хотя такая реализация канала связи редко встречается на практике, однако, она даёт удобную модель для изучения общих соотношений между физическими и теоретико-информационными свойствами каналов связи. Необходимо отметить, что свойства термодинамических реализаций канала одинаковы во всех случаях, когда между физическими системами, представляющими реализации источника и приёмника, происходят некоторые общие процессы переноса.

Источник информации физически представляет собой систему с различными дискретными температурными состояниями:

$$\theta^{(n)}_{\hat{H}} = x_n \Delta\theta_{\hat{H}}, \quad \Delta\theta_{\hat{H}}\, \hbar\omega, \quad x_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}, \tag{9.2}$$

где $\Delta\theta_{\hat{H}}$ —константа для данного канала, а x_n—функций макросостояния. Числа $\theta^{(n)}_{\hat{H}}$ мы рассматриваем как значения случайной величины $T_{\hat{H}1}$.

Соотношение (6.10) показывает, что передача информации (означающая изменение информационной энтропии) всегда сопровождается процессом переноса физической величины $Q_{\hat{H}}$.

Приёмник информации физически представляет собой систему с малой $Q_{\hat{H}}$-ёмкостью, которая в результате взаимодействия с источником информации меняет своё состояние ($\hat{H}$-температуру, величина которой рассматривается как значение случайной величины $T_{\hat{H}2}$).

Перед каждым актом взаимодействия приёмник находится при исходной температуре

$$\theta^{0}_{\hat{H}} = l\Delta\theta_{\hat{H}} = l\hbar\omega, \tag{9.3}$$

где l—число.

Чтобы $\hat{H}$-температура приёмника изменилась на $\Delta\theta_{\hat{H}}$ необходимо передать или отвести количество $Q_{\hat{H}}$—величины $\Delta q^{(0)}_{\hat{H}}$. В результате переноса в физической системе, представляющей канал связи, меняется информационная энтропия. Изменение энтропии ΔS_I в случае постоянной температуры приёмника информации $\theta^{(0)}_{\hat{H}}$ ($\Delta\theta_{\hat{H}} \ll 1$, малые частоты), определяется формулой:

$$\Delta S^{(n)}_{I} \stackrel{\Delta}{=} \Delta q^{(n)}_{\hat{H}} \left| \frac{1}{\theta^{(0)}_{\hat{H}}} - \frac{1}{\theta^{(n)}_{\hat{H}}} \right|, \quad n = 1,\ 2, \ldots, \tag{9.4}$$

где

$$\Delta q^{(n)}_{\hat{H}} = C \mid \theta^{(0)}_{\hat{H}} - \theta^{(n)}_{\hat{H}} \mid . \tag{9.5}$$

В этом выражении C является $Q_{\hat{H}}$-емкостью (12):

$$C = \theta^{(n)}_{\hat{H}} \left(2 \frac{\partial}{\partial\theta^{(n)}_{\hat{H}}} \ln Z + \theta^{(n)}_{\hat{H}} \frac{\partial^2}{\partial\theta^{(n)2}_{\hat{H}}} \ln Z \right).$$

Для среднего значения изменения информационной энтропии и абсолютного значения среднего количества перенесённой $Q_{\hat{H}}$ -величины можем написать:

$$\langle \Delta S_{\mathrm{I}} \rangle \overset{\Delta}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} cp_n \frac{(\theta_{\hat{H}}^{(n)} - \theta_{\hat{H}}^{(0)})^2}{\theta_{\hat{H}}^{(0)}\, \theta_{\hat{H}}^{(n)}},$$

$$|\langle \Delta q_{\hat{H}} \rangle| \overset{\Delta}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c\, p_n\, |\theta_{\hat{H}}^{(n)} - \theta_{\hat{H}}^{(0)}|, \tag{9.6}$$

где

$$p_n = \frac{1-V}{V} V^n, \quad V = \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{\theta_{\hat{H}}}\right).$$

Мы считаем, что осциллятор находится в состоянии м. э. с энергией $E_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$. Как известно (см. формулу (5.12)), p_n можно представить в виде

$$p_n = \frac{1}{1-p_0} \frac{1}{m+1} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n = \frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n. \tag{9.7}$$

Таким образом

$$\langle \Delta S^{\mathrm{I}} \rangle = c \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\hbar\omega}{m} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \frac{1 - l \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^2}{l \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{c\hbar\omega}{lm} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-1} +$$

$$+ \frac{lc\hbar\omega}{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 2c\hbar\omega = \tag{9.6'}$$

$$= c\hbar\omega\left(\frac{1}{l}\langle x_n\rangle + l\langle x_n^{-1}\rangle - 2\right),$$

где, согласно формулам (9.2) и (9.7)

$$\langle x_n \rangle = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{-1},$$

$$\langle x_n^{-1} \rangle = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+1}\right)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Выражение (9.6') зависит от начальной $\hat{H}$-температуры, определяемой числом l. Вычислим значение l, для которого изменение информационной энтропии экстремально. Имеем уравнение

$$\frac{d}{dl}\langle\Delta S_{\mathrm{I}}\rangle=0. \tag{9.8}$$

Решение этого уравнения таково:

$$l_0=\sqrt{\langle x_n\rangle\langle x_n^{-1}\rangle^{-1}}. \tag{9.9}$$

Подставляя значение l_0 в (9.6′), получим:

$$\langle\Delta S_{\mathrm{I}}\rangle_{min}=2c\hbar\omega\left(\sqrt{\langle x_n\rangle\langle x_n^{-1}\rangle}-1\right). \tag{9.10}$$

Рассмотрим вторую формулу (9.6). Имеем:

$$\langle\Delta q_{\hat{H}}\rangle=\frac{c\hbar\omega}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right)^n|l-x_n|. \tag{9.11}$$

Если через n_l обозначить целую часть

$$\left[\exp\left(\frac{1}{l}\right)-1\right]^{-1} n_l=E\left\{\exp\left[\left(\frac{1}{l}\right)-1\right]^{-1}\right\},$$

то при $l\gg1$ $n_l\approx l$ и (9.11) приближённо можно переписать в виде:

$$\langle\Delta q_{\hat{H}}\rangle\approx c\hbar\omega\,(l-\langle x_n\rangle). \tag{9.12}$$

Для произвольных l имеем:

$$\langle\Delta q_{\hat{H}}\rangle=lc\hbar\omega\left[1-2\left(\frac{m}{m+1}\right)\right]^{n_l}+$$
$$+\frac{c\hbar\omega}{m}\left[\sum_{n=n_l+1}^{\infty}x_n\left(\frac{m}{m+1}\right)^n-\sum_{n=1}^{n_l}x_n\left(\frac{m}{m+1}\right)\right]^n. \tag{9.13}$$

Информационная энтропия

$$S_{\mathrm{I}}=-\sum_{n=0}^{\infty}p_n\ln p_n=(m+1)\ln(m+1)-m\ln m. \tag{9.14}$$

Для больших m

$$S_{\mathrm{I}}=-\sum_{n=0}^{\infty}p_n\ln p_n\approx\ln m,\quad m=e^{S_{\mathrm{I}}}. \tag{9.15}$$

Эти соотношения устанавливают связь между информацией и физическими параметрами.

Оптимизация по значениям случайной величины $T_{\hat{H}}$ может быть проведена просто. Учтём дополнительное условие

$$\langle\theta_{\hat{H}}^{(n)}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\,\theta_{\hat{H}}^{(n)}=\hbar\omega\,\langle x_n\rangle. \tag{9.16}$$

Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{(i)}_{\hat{H}}}\langle\Delta S_{\mathrm{I}}\rangle+\lambda_1\frac{\partial}{\partial\theta^{(i)}_{\hat{H}}}\langle\theta^{(n)}_{\hat{H}}\rangle=0, \tag{9.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{(i)}_{\hat{H}}}\langle\Delta q_{\hat{H}}\rangle+\lambda_1'\frac{\partial}{\partial\theta^{(i)}_{\hat{H}}}\langle\theta^{(n)}_{\hat{H}}\rangle=0, \quad (i=1,\ 2,\ldots).$$

Решение первого уравнения

$$\theta^{(i)}_{\hat{H}\,\text{экстр}}=\theta^{(0)}_{\hat{H}}\sqrt{\frac{c}{c+\lambda_1\theta^{(0)}_{\hat{H}}}} \tag{9.18}$$

Второе уравнение физически разумного решения не имеет.

Уравнение для определения λ_1 имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_n\theta^{(n)}_{\hat{H}\,\text{экстр}}=\hbar\omega\langle x_n\rangle,$$

откуда

$$\lambda_1=\frac{c}{\theta^{(0)}_{\hat{H}}}\left[\left(\frac{\theta^{(0)}_{\hat{H}}}{\hbar\omega}\right)^2\langle x_n\rangle^{-2}-1\right]. \tag{9.19}$$

Мы видим, что $\theta^{(i)}_{\hat{H}\,\text{экстр}}=\langle\theta^{(n)}_{\hat{H}}\rangle$ и, следовательно, оптимальная передача информации происходит при постоянной $\hat{H}$-температуре.

Можно рассмотреть другой вариант оптимизации с применением принципа м. э. при дополнительных условиях

$$\langle\Delta S_{\mathrm{I}}\rangle=D, \qquad \langle\Delta q_{\hat{H}}\rangle=D',$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}p_i=1, \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}p_i=1$$

Решение этой задачи для квантового осциллятора совпадает с классическим, приведённым в работе Майорника ([15], формулы (23) и (24)).

Проблемная лаборатория передачи и обработки информации в больших системах управления

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Г. Гачечиладзе, Н. Хиралла, Труды Тбилисского государственного университета (настоящий сборник), стр. 61.
2. Т. Г. Гачечиладзе, Труды Тбилисского государственного университета, т, 135, серия кибернетич. наук, 1970.
3. Дж. Мойэль, Сб. „Вопросы причинности в квантовой механике“, „Наука“, М., 1955.
4. Дж. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, „Наука“, М., 1964.
5. G. A. Baker, Phys. Rev., 109, 2198 (1958).

6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГИФМЛ, М., 1963.
7. Л. Бриллюэн, Наука и теория информации, ГИФМЛ, М., 1960.
8. И. Градштейн, И. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИФМЛ, М., 1963.
9. Д. Бом, сб. „Вопросы причинности в квантовой механике“, „Наука“, М., 1955.
10. R. S. Ingarden, K. Urbanik, Acta Phys. Pol., XYI. f. 3 (1963).
11. R S. Ingarden, Acta Phys. Pol., XXVII, f. 2 (1965).
12. R. S. Ingarden, L. Kassakowski. Acta Phys. Pol., XXVII, f. 4 (1265).
13. R. S. Ingarden, Bull. Acta. Sci., Ser. Math., Astron. Phys, 9, 541 (1963).
14. W. J. Neidhardt, Amer. J. Phys., 37, 211 (1969).
15. V. Majernik, Kybernetica, 1, № 6 (1970).

თ. გაჩეჩილაძე, ნ. ჭირალა

კვანტური ჰარმონიული ოსცილატორის ინფორმაციული თერმოდინამიკა

რეზიუმე

ინფორმაციული ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე შესწავლილია კვანტური ჰარმონიული ოსცილატორის მდგომარეობათა გარკვეული კლასი, რომლისთვისაც აგებულია განზოგადებული თერმოდინამიკა.

T. GATCHETCHILADZE. N. CHIRALLA

INFORMATIONAL THERMODYNAMICS OF QUANTUM OSCILLATOR II

Summary

On the basis of the maximum entropy principle a generalized informational thermodynamics of a harmonic oscillator has been constructed.

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები
Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета
160, 1975

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ АВТОМАТОВ В СТАЦИОНАРНО ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СЛУЧАЙНЫХ СРЕДАХ

Н. Ш. ЗААЛИШВИЛИ, Г. Н. ЦЕРЦВАДЗЕ

Формальная математическая модель целесообразного поведения автоматов была создана М. Л. Цетлиным в развитой им теории поведения автоматов в случайных средах [1]. В этой теории стационарные случайные среды являются, естественно, простейшими примерами случайных сред. Существенный интерес представляют среды, параметры которых изменяются с течением времени случайными образом. В работе [2] предложена модель стационарно переключаемой случайной среды, вероятностные характеристики которой изменяются во времени специальным образом. Предполагается, что переключаемая случайная среда $K=K(C_1, C_2,\dots,C_s\,\Delta)$ составлена из стационарных случайных сред $C_1=C_1(p_1^{(1)}, p_2^{(1)},\dots,p_l^{(1)})$, $C_2=C_2(p_1^{(2)}, p_2^{(2)},\dots p_l^{(2)}),\dots, C_s=C_s(p_1^{(s)}, p_2^{(s)},\dots,p_l^{(s)})$ стационарное переключение которых осуществляется цепью Маркова с S состояниями и с матрицей вероятностей переходов $\Delta=\|\delta_{\alpha\beta}\|$, $\alpha, \beta=1, 2,\dots,s)$. Следуя [2], будем говорить, что автомат A_n функционирует в стационарно переключаемой случайной среде $K=K(C_1, C_2,\dots,C_s, \Delta)$, если в каждый момент времени он функционирует в одной из стационарных случайных сред C_α ($\alpha=1, 2,\dots,s$) и если при этом в момент t автомат функционировал в среде C_α, то в следующий момент $t+1$ он будет функционировать в среде C_β с вероятностью $\delta_{\alpha\beta}$.

В предположении, что стационарно переключаемая случайная среда K „штрафует“ автомат A_n с вероятностью, определенной для каждого из его действий, в [1, 2] было показано, что функционирование автомата при этом описывается конечной цепью Маркова. Величина математического ожидания штрафа $M(A_n\ K)$ служит мерой целесообразности поведения автомата. В частности, исследование функционирования автоматов с линейной тактикой $L_{2n,2}$ в простейшей переключаемой случайной среде $K=K(C_1, C_2, \Delta)$, где $C_1=C_1(p^{(1)}, 1-p^{(1)})$, $C_2=C_2(1-p^{(2)}, p^{(2)})$, показало (см. [2, 3]), что зависимость математического ожидания штрафа $M(L_{2n,2}, K)$ от емкости памяти n имеет немонотонный характер и, следовательно, в переключаемой случайной среде существует оптимальная емкость памяти n^*, зависящая от параметров среды.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения автоматов в переключаемых случайных средах, зависимость вероятностных свойств которых от времени определяется несимметрической цепью Маркова. В первом разделе рассматривается асимптотический оптимальный автомат $R_{2n,2}$, конструкция которого предложена в работе [4]. Использование укрупненной марковской цепи для описания поведения асимптотически оптимального автомата в стационарной случайной среде [5] делает возможным существенно упростить аналитический подход к исследованию общих закономерностей поведения в стационарно переключаемой случайной среде и получить приближенные результаты. Изложению этих результатов посвящен второй раздел настоящей работы. Здесь приведены упрощенные формулы математического ожидания штрафа M для асимптотически оптимальных автоматов $L_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$, конструкции которых рассмотрены в [1]. Заметим, что для автомата $R_{2n,2}$ полученные результаты являются точными. В статье показывается, что при достаточно большой емкости памяти n асимптотически оптимальные автоматы в процесс функционирования в стационарно переключаемой случайной среде пользуются минимаксной стратегией поведения. Впервые такое свойство выбора действий было обнаружено в [6]. В заключение приведены типичные кривые, характеризующие зависимость математического ожидания штрафа от емкости памяти n автоматов и параметров среды.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением простейшего случая, когда автоматы могут совершать два различных действия и стационарно переключаемая случайная среда $K=K(C_1, C_2\Delta)$ составлена из двух стационарных случайных сред $C_1=C_1(p_1^{(1)}, p_2^{(1)})$. $C_2=C_2(p_1^{(2)}\ p_2^{(2)})$, стационарное переключение которых осуществляется несимметрической цепью Маркова с двумя состояниями и с матрицей вероятностей переходов

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1-\delta_1 & \delta_1 \\ \delta_2 & 1-\delta_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где параметр $\delta_i\leqslant 1/2$ $(i=1, 2)$ имеет смысл средней частоты переключения состояний переключаемой случайной среды K.

1. Поведение автомата $R_{2n,2}$

Переходы состояний и, следовательно смена действий автоматом $R_{2n,2}$ в ответ па реакции стационарной случайной среды $C_\alpha=C_\alpha(p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)})$ (тактика поведения) осуществляется следующим образом. Автомат может менять действие только в моменты времени t, кратные целому числу n(n-емкость памяти автомата), причем смена действия происходит в том и только в том случае, когда на протяжении последних n тактов подряд автомат получал на вход только штрафы. Следовательно, автомат меняет i-е действие в момент времени t, кратный числу n, с вероятностью $(p_i^{(\alpha)})^n$ (соответственно не меняет i-е действие с вероятностью $1-(p_i^{(\alpha)})^n$, где $p_i^{(\alpha)}$—вероятность штрафа). Легко сметить, что процесс смены действий автомата $R_{2n,2}$ в стационарной случайной среде $C_\alpha = C_\alpha(p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)})$, вообще говоря, не является однородным марковским. Однако если рассматривать лишь моменты времени t, кратные n, то поведение автомата $R_{2n,2}$ в стационарной случайной среде $C_\alpha = C_\alpha(p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)})$ описывается однородной цепью Маркова. Соответствующая матрица $G_\alpha = \| g_{ij}^{(\alpha)} \|$ ($\alpha=1, 2, i, j=1, 2$) вероятностей переходов имеет следующий вид:

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} 1-(p_1^{(\alpha)})^n & (p_1^{(\alpha)})^n \\ (p_2^{(\alpha)})^n & 1-(p_2^{(\alpha)})^n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Будем говорить, что автономная система „автомат—переключаемая случайная среда“ находится в момент $t=kn$ ($k=1, 2\ldots$) в состоянии $\psi_i^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, i=1, 2$), если в этот момент автомат совершает i-е действие, а переключаемая случайная среда находится в состоянии C_α. Тогда поведение этой системы описывается конечной цепью Маркова. Вероятности переходов состояний этой системы задаются при этом клеточной матрицей $\Pi = \| \pi_{ij} \|$ ($i, j=1, 2$)

$$\pi_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij}^{(2)}(1-\delta_1) & g_{ij}^{(1)}\delta_1, \\ g_{ij}^{(2)}\delta_2 & \partial_{ij}^{(2)}(1-\delta_2) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь $g_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2$) — элементы матрицы G_α.

Можно показать, что эта цепь является эргодической и, следовательно, существуют финальные вероятности $r_i^{(\alpha)}$ состояний $\psi_i^{(\alpha)}$ системы, не зависящие от ее начальных состояний. Тогда математическое ожидание штрафа $M=M(R_{2n,2}, K)$ для автомата $R_{2n,2}$ в среде $K=K(C_1, C_2\Delta)$ выразится формулой

$$M(R_{2n,2}, K) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2} p_i^{(\alpha)} r_i^{(\alpha)}, \tag{4}$$

где $p_i^{(\alpha)}$—вероятность штрафа в среде $C_\alpha = C_\alpha(p_1^{(\alpha)}, p_2^{(\alpha)})$ за i-е действие.

Для вычисления финальных вероятностей $r_i^{(\alpha)}$ ($i=1, 2, \alpha=1, 2$) воспользуемся уравнением

$$\prod^T r = r, \tag{5}$$

где $r=(r_1^{(1)}, r_1^{(2)}, r_2^{(1)}, r_2^{(2)})$ — вектор-столбец, $\prod^T$—матрица транспонированная по отношению к $\prod$.

Нетрудно увидеть, что решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} r_1^{(1)} &= \frac{\delta_2[\delta_1(p_2^{(2)})^n + \delta_2(p_2^{(1)})^n + (1-\delta_1-\delta_2)d_2(n)(p_2^{(1)})^n]}{(\delta_1+\delta_2)[d_1(n)\delta_2 + d_2(n)\delta_1 + (1-\delta_1-\delta_2)d_1(n)d_2(n)}, \\ r_1^{(2)} &= \frac{\delta_1[\delta_1(p_2^{(2)})^n + \delta_2(p_2^{(1)})^n + (1-\delta_1-\delta_2)d_1(n)p_2^{(2)})^n]}{(\delta_1+\delta_2)[d_1(n)\delta_2 + d_2(n)\delta_1 + (1-\delta_1-\delta_2)d_1(n)d_2(n)]}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$r_2^{(1)}=\frac{\delta_2\left[\delta_1\left(p_1^{(2)}\right)^n+\delta_2\left(p_1^{(1)}\right)^n+(1-\delta_1-\delta_2)\,d_2(n)\cdot\left(p_1^{(1)}\right)^n\right]}{(\delta_1+\delta_2)\left[d_1(n)\,\delta_2+d_2(n)\,\delta_1+(1-\delta_1-\delta_2)\,d_1(n)\,d_2(n)\right]}, \tag{6'}$$

$$r_2^{(2)}=\frac{\delta_1\left[\delta_1\left(p_1^{(2)}\right)^n+\delta_2\left(p_1^{(1)}\right)^a+(1-\delta_1-\delta_2)\,d_1(n)\left(p_1^{(2)}\right)^n\right]}{(\delta_1+\delta_2)\left[d_1(n)\,\delta_2-d_2(n)\,\delta_1+(1-\delta_1-\delta_2)\,d_1(n)\,d_2(n)\right]},$$

где $d_\alpha(n)=\left(p_1^{(\alpha)}\right)^n+\left(p_2^{(\alpha)}\right)^n \quad \alpha=1,\ 2$

Воспользовавшись, далее формулой (4), мы приходим к следующему выражению для математического ожидания автомата $R_{2n,\,2}$, функционирующего в стационарно переключаемой случайной среде $K=K(C_1,\ C_2,\ \Delta)$:

$$M(R_{2n,2}\ K)=$$

$$=\frac{\left(\delta_1 p_1^{(2)}+\delta_2 p_1^{(1)}\right)\left[\delta_1\left(p_2^{(2)}\right)^n+\delta_2\left(p_1^{(1)}\right)^n\right]+\left(\delta_1 p_2^{(2)}+\delta_2 p_2^{(1)}\right)\right]\delta_1\left(p_1^{(2)}\right)^n+\delta_2\left(p_1^{(1)}\right)^n\right]}{(\delta_1+\delta_2)\left[d_1(n)\,\delta_2+d_2(n)\,\delta_1+(1-\delta_1-\delta_2)\,d_1(n)\,d_2(n)\right]}+$$

$$+\frac{\left(1-\delta_1-\delta_2\left\{\delta_2 d_2(n)\left[p_2^{(1)}\right)^n p_1^{(1)}+p_1^{(1)}\right)^n p_2^{(1)}\right]+\delta_1 d_1(n)\left[p_2^{(2)}\right)^n p_1^{(2)}+\left(p_1^{(2)}\right)^n p_2^{(2)}\right]\right\}}{(\delta_1+\delta_2)\left[d_1(n)\,\delta_2+d_2(n)\,\delta_1+(1-\delta_1-\delta_2)\,d_1(n)\,d_2(n)\right]}. \tag{7}$$

Проследим, также как и в [6], за тактикой поведения автомата $R_{2n,\,2}$ в таких переключаемых случайных средах $K=K(C_1,\ C_2,\ \Delta)$, в которых стационарные среды $C_1=C_1\left(p_1^{(1)},\ p_2^{(1)}\right)$, $C_2=C_2\left(p_1^{(2)},\ p_2^{(2)}\right)$ являются противоположными в том смысле, что если, например, в среде C_1 предпочтение отдается i-му ($i=1,\ 2$) действию автомата, то в среде C_2 за это действие выплачивается максимальный штраф.

Допустим для определенности, что $p_1^{(1)}=\max\left(p_1^{(1)},\ p_2^{(1)}\right)$, $p_2^{(2)}=$ $=\max\left(p_1^{(2)},\ p_2^{(2)}\right)$. Тогда выражение (7) для математического ожидания штрафа $M(R_{2n,\,2},\ K)$ при достаточно большой емкости памяти n примет вид:

$$M(R_{2n,\,2},\ K)=\begin{cases}\dfrac{\delta_1 p_1^{(2)}+\delta_2 p_1^{(1)}}{\delta_1+\delta_2}, & \text{если } \max\left(p_1^{(2)},\ p_2^{(2)}\right)>\max\left(p_1^{(1)}\ p_2^{(1)}\right)\\[2ex] \dfrac{\delta_1 p_2^{(2)}+\delta_2 p_2^{(1)}}{\delta_1+\delta_2} & \text{если } \max\left(p_1^{(1)},\ p_2^{(1)}\right)>\max\left(p_1^{(2)},\ p_2^{(2)}\right)\end{cases} \tag{8}$$

Полученный результат указывает на то, что асимптотический оптимальный автомат $R_{2n,\,2}$ в процессе функционирования в стационарной переключаемой случайной среде $K=K$ $(C_1\ C_2,\ \Delta)$ при достаточно большой емкости памяти n совершает почти исключительно то действие, для которого

$$\max_j p_j^i=\min_j \max_i p_j^i \quad (i,\ j=1,\ 2). \tag{9}$$

т. е. автомат совершает почти всегда то действие, наибольший „проигрыш" за которое имеет наименьшее значение. Этому результату может быть дано естественное объяснение. Дело в том, что вероятность смены действия автоматом определяется, в основном, моментами пребывания переключаемой случайной среды в „плоских" для этого действия состояниях, и автомат выбирает свои действия так, как если бы он функционировал в стационарной случайной среде $C=C(\max p_1^{(1)}\ p_1^{(2)}),\ \max(p_2^{(1)},\ p_2^{(2)}))$. Такое асимптотическое свойство выбора действий автоматов в переключаемой случайной среде (минимаксная стратегия поведения) впервые было обнаружено в [6].

В работе [7] было выдвинуто предположение (гипотеза медленности) о том, что при достаточно большой емкости памяти n каждый из асимптотических оптимальных автоматов A_n редко меняет действие. Доказанное выше асимптотическое свойство выбора действий автоматом $R_{2n,2}$ может служить косвенным подтверждением гипотезы медленности, выдвинутой в [7].

Выражение (7) существенно упрощается, если положить

$$p_1^{(1)}=p_2^{(2)}=p_1, \quad p_2^{(1)}=p_1^{(2)}=p_2. \tag{10}$$

В этом случае получим

$$M(R_{2n,2},K)=\frac{(\delta_1 p_1^n+\delta_2 p_2^n)(p_1+p_2)}{(p_1^n+p_2^n)[\delta_1+\delta_2+(1-\delta_1-\delta_2)(p_1^n+p_2^n)]}+$$
$$+\frac{(1-\delta_1-\delta_2)(p_1^n p_2+p_2^n p_1)}{\delta_1+\delta_2+(1-\delta_1-\delta_2)(p_1^n+p_2^n)}. \tag{11}$$

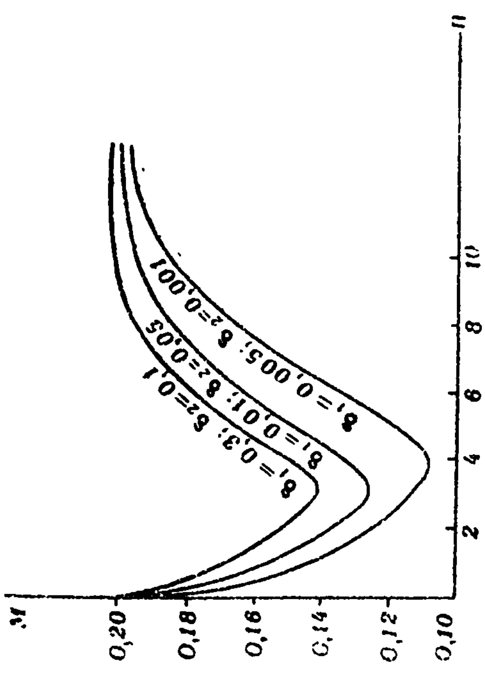

Рис. 1.

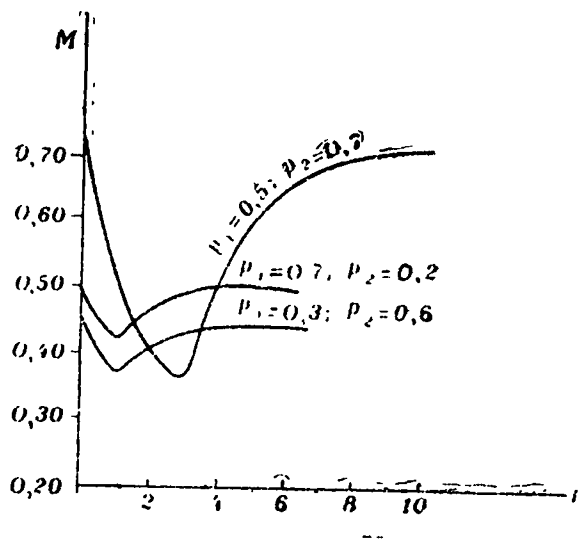

Рис. 2.

На рис. 1 приведены полученные с использованием формулы (11) кривые, характеризующие зависимость $M(R_{2n,2},\ K)$ от n при различных значениях δ_1, δ_2 и фиксированных $p_1=0,\ 1$; $p_2=0,\ 3$.

На рис. 2 приведены такие же графики для фиксированных $\delta_1=0,\ 3$; $\delta_2-0,\ 1$ и различных значениях $p_1\ p_2$.

Нетрудно убедиться в том, что $M(R_{2n,2},\ K)$ достигает минимума M_{min} при некотором значении емкости памяти $n=n^*$. Случаи $n=0$ и

n-∞ дают выигрыша в сравнении с автоматом, не обладающим целесообразным поведением. Существование оптимальной в данной среде емкости памяти $n=n^*$ для автоматов $R_{2n,2}$ позволяет строить такие автоматы, обладающие наиболее целесообразным поведением в данной стационарно переключаемой случайной среде.

2. Упрощенное описание поведения автоматов $L_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$

В этом параграфе мы приведем приближенные результаты изучения поведения асимптотически оптимальных автоматов $L_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$ в стационарно переключаемой случайной среде $K=K(C_1C_2\ \Delta)$ в предположении, что функционирование каждого из них в стационарной случайной среде $C_\alpha=C_\alpha(p_1^{(\alpha)},\ p_2^{(\alpha)})$ $(\alpha=1,\ 2)$ моделируется соответствующим „эквивалентным триггером". Такое упрощение (асимптотическое по числу n состояний в действиях, стремящееся к ∞) описания функционированния автоматов в стационарной случайной среде укрупненной цепью Маркова с двумя состояниями (по одному состоянию на действие) было проведено в [5] на основании знания асимптотических свойств спектра собственных значений соответствующих матриц вероятностей перехода. Из результатов, полученных в [5], следует, что процесс смены действий автоматов $L_{2n,2}$ и $D_{2,2}$ в стационарной случайной среде $C_\alpha=C_\alpha(p_1^{(\alpha)},\ p_2^{(\alpha)})$ описывается матрицей $G=\|g_{ij}^{(\alpha)}\|$ $(i,\ j=1,\ 2)$ переходных вероятностей, которая имеет следующий вид:

$$G_\alpha=\begin{pmatrix} 1-\mu_i^{(\alpha)}(\omega_1^{(\alpha)})^n & \mu_1^{(\alpha)}(\omega_1^{(\alpha)})^n \\ \mu_2^{(\alpha)}(\omega_2^{(\alpha)})^n & (1-\mu_2^{(\alpha)}(\omega_2^{(\alpha)})^n \end{pmatrix};$$

здесь величиины $\mu_i^{(\alpha)}$, $\omega_i^{(\alpha)}$ $(i=1,\ 2)$ определены формулами, приведенными в [5]:

$$\mu_1^{(\alpha)}=\begin{cases} \dfrac{(q_2^{(\alpha)}-p_2^{(\alpha)})\ (q_1^{(\alpha)}-p^{(\alpha)})^2}{1-p_1^{(\alpha)}-p_2^{(\alpha)}} & \text{для } L_{2n,2}, \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{p_1^{(\alpha)}}{q_1^{(\alpha)}}+\dfrac{p_2^{(\alpha)}}{q_2^{(\alpha)}}} & \text{для } D_{2n,2} \end{cases} \tag{13}$$

$$\mu_2^{(\alpha)}=\begin{cases} \dfrac{(q_1^{(\alpha)}-p_1^{(\alpha)})\ (q_2^{(\alpha)}-p_2^{(\alpha)})^2}{1-p_1^{(\alpha)}-p_2^{(\alpha)}} & \text{для } L_{2n,2}, \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{p_1^{(\alpha)}}{q_1^{(\alpha)}}+\dfrac{p_2^{(\alpha)}}{q_2^{(\alpha)}}} & \text{для } D_{2n,2}, \end{cases} \tag{14}$$

$$\omega_1^{(\alpha)}=\begin{cases} \dfrac{p_i^{(\alpha)}}{q_i^{(\alpha)}} & \text{для } L_{2n,2}, \\ p_i^{(\alpha)} & \text{для } D_{2n,2}, \end{cases} \tag{15}$$

где $q_i^{(\alpha)}=1-p_i^{(\alpha)}$.

В этих предположениях можно показать, что поведение автономной системы „автомат—переключаемая случайная среда“ описывается конечной цепью Маркова, которая является эргодической. Следовательно, существуют финальные вероятности $r_i^{(\alpha)}$ состояний $\psi_i^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2, i=1, 2$) системы „автомат—переключаемая случайная среда“, при которых автомат совершает i-е действие, а переключаемая случайная среда находится в состоянии C_α.

Опуская результаты вычислений финальных вероятностей $r_i^{(\alpha)}$, приведем окончательные выражения математического ожидания штрафа M для автоматов $L_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$ в переключаемой случайной среде $K=K(C_1\, C_2\, \Delta)$ в случае $C_1=C(p_1, p_2)$, $C_2=C(p_2, p_1)$:

$$M(L_{2n,2}, K)=$$

$$=\frac{(p_1+p_2)\left[\delta_1\mu_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n+\delta_2\mu_2\left(\frac{p_2}{q^2}\right)^n\right]}{\left[\mu_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n+\mu_2\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^n\right]\left\{\delta_1+\delta_2+(1-\delta_1-\delta_2)\left[\mu_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n+\mu_2\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^n\right]\right\}}+$$

$$+\frac{(1-\delta_1-\delta_2)\left[\mu_1 p_2\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n+\mu_2 p_1\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^n\right.}{\delta_1+\delta_2+(1-\delta_1-\delta_2)\left[\mu_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^n+\mu_2\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^n\right]}, \tag{16}$$

$$M(D_{2n,2}, K)=\frac{(p_1+p_2)\,(\delta_1 p_1^n+\delta_2 p_2^n)}{(p_1^n+p_2^n)\,[\delta_1+\delta_2+(1-\delta_1-\delta_2)\,(p_1^n+p_2^n)\,\mu]}+$$

$$+\frac{(1-\delta_1-\delta_2)\,\mu\,(p_1^n p_2+p_2^n p_1)}{\delta_1+\delta_2+\mu\,(1-\delta_1-\delta_2)\,(p_1^n+p_2^n)}. \tag{17}$$

Здесь величины μ_1, μ_2, μ определены формулами (13), (14) и имеют вид

$$\mu_1=\frac{(q_2-p_2)\,(q_1-p_1)^2}{1-p_1-p_2},$$

$$\mu_2=\frac{(q_1-p_1)\,(q_2-p_2)^2}{1-p_1-p_2},$$

$$\mu=\frac{1}{1+\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_1}}.$$

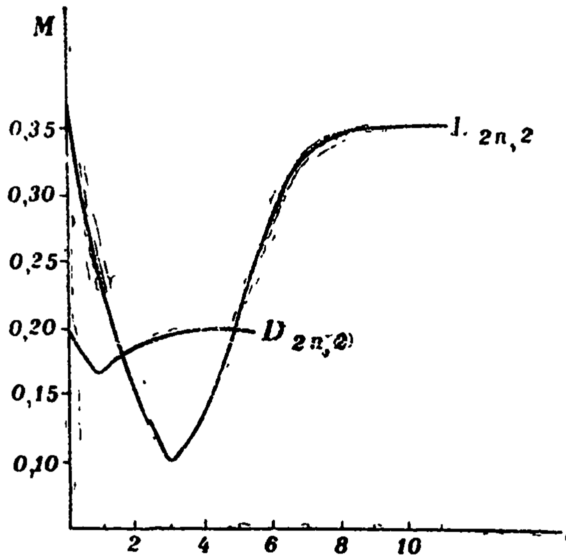

Рис. 3.

На рис. 3 приведены полученные с использованием формул (16) и (17) кривые, характеризующие зависимость $M(L_{2n,2}, K)$ и $M(D_{2n,2}, K)$ от емкости памяти n при $p_1=0,1$, $p_2=0{,}3$ и $\delta_1=0{,}01$; $\delta_2=0{,}05$.

Легко заметить, что математическое ожидание штрафа M для автоматов $L_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$, вычисленное по формулам (16) и (17) соответственно, неотрицательно, и достигает минимума M_{min} при некотором значении емкости памяти $n=n^*$. Случаи $n=0$ и $n=\infty$ не дают выигрыша в сравнении с автоматами, не обладающими целесообразным поведением.

Нетрудно убедиться в том, что автоматы $L_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$, как и автоматы $R_{2n,2}$ в процессе функционирования в стационарно переключаемой случайной среде при достаточно большой емкости памяти n используют минимаксную стратегию поведениия. Доказательство этого асимптотического свойства выбора действий для автоматов $L_{2n,2}$ и $D_{2n,2}$ совпадает с приведенным в первом разделе настоящей работы.

Заметим в заключение, что приведенные в статье результаты, касающиеся автоматов с линейной тактикой $L_{2n,2}$, нельзя сравнить с известными (см., напр., [2.3]), так как используемая упрощенная модель поведения [5] справедлива для таких стационарных случайных сред, в которых вероятности штрафов в каждом действии строго меньше 1/2.

Проблемная лаборатория передачи
и обработки информации в больших
системах управления

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Цетлин, Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем, „Наука", М., 1969.
2. М. Л. Цетлин, Автоматика и телемеханика, т. 22, № 10, 1961.
3. Д. И. Калинин, И. М. Эпштейн, Автоматика и телемеханика, т. 26, № 11, 1965.
4. H. A. Robbins, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 42, № 12, 1956.
5. Г. Н. Церцвадзе, Автоматика и телемеханика, № 8, 1968.
6. Г. Н. Церцвадзе, Автоматика и телемеханика, № 8, 1971.
7. В. А. Волконский, Проблемы передачи информации, т. 1, № 2, 1965.

ნ. ზაალიშვილი, გ. ცერცვაძე

ავტომატების ასიმპტოტური ქცევის შესახებ სტაციონარულ გადართვად შემთხვევით გარემოში

რეზიუმე

სტატიაში განხილულია ავტომატების ასიმპტოტური ქცევა ისეთ შემთხვევით გადართვად გარემოში, რომლის ალბათური თვისებები დროში განისაზღვრება მარკოვის ასიმეტრიული ჯაჭვით. გამოთვლილია ქცევის მათემატიკური მოლოდინი და ნაჩვენებია, რომ საკმარისად დიდი n-ებისათვის (n-მახსოვრობის ტევადობა) სტაციონარულ გადართვად შემთხვევით გარემოში ასიმპტოტურად ოპტიმალური ავტომატები სარგებლობენ ქცევის მინიმალური სტრატეგიით.

N ZAALISHVILI, G. TSERTSVADZE

ON THE ASYMPTOTICAL BEHAVIOUR OF AUTOMATA IN STATIONARILY SWITCHING RANDOM MEDIA

Summary

The asymptotical behaviour of automata in switching random media is considered and the dependence of probabilistic characteristics on time is determined by an asymmetrical Markovian chain. The results of the analytic determinantion of the optimal memory capacity depending on the medium parameters are presented.

МАТВЕЙ МИХАЙЛОВИЧ МИРИАНАШВИЛИ

23 января 1975 года скоропостижно скончался Матвей Михайлович Мирианашвили, профессор Тбилисского государственного университета, заслуженный деятель науки Грузинской ССР, академик Академии наук республики. Он был одним из тех ученых, кто развивал идеи современной физики в Грузии.

М. М. Мирианашвили родился 5 октября 1906 года в Тбилиси. Еще будучи студентом Тбилисского государственного университета, он участвовал в организации учебных лабораторий и создании грузинской физической терминологии. В 1930 году М. М. Мирианашвили окончил университет, где остался работать ассистентом, а через год был командирован в Харьковский физико-технический институт для преподавания теоретической физики. В 1933 году он вернулся в Тбилиси и с тех пор бессменно руководил кафедрой общей физики Тбилисского государственного университета. В течение ряда лет М. М. Мирианашвили был директором Института физики и геофизики Академии наук ГССР, деканом физического факультета, проректором университета.

М. М. Мирианашвили принадлежит свыше шестидесяти научных работ, монографий, учебников и т. д. Для его исследований характерны глубокий анализ принципиальных проблем, раскрытие их внутренних связей и объединение в строгие логические системы. Он указал метод нахождения нижнего предела энергетического спектра атомных систем, получил первые результаты в теории квадрупольного момента дейтерона и впервые высказал, вместе с сотрудниками, гипотезу о кватернионных полях, через три года повторенную зарубежными учеными. Он же получил и первые точные результаты в релятивистской теории Гайзенберга, выполнил первые подытоживающие исследования поляризации вакуума и построил теорию ферритов, впервые объяснившую ряд их особенностей. В 1963 году М. М. Мирианашвили был избран членом Всесоюзной гравитационной комиссии, а в 1964 году создал в Тбилисском государственном университете исследовательскую группу, известную как в Советском Союзе, так и за рубежом своими работами по теории гравитации и общей теории относительности, основанными на идеях М. М. Мирианашвили.

Особой заслугой М. М. Мирианашвили является его педагогическая деятельность. Вдумчивый теоретик, человек огромного обаяния, чуткий и скромный, он уже по самой своей природе был большим учителем. Ясные, глубокие, просто и точно сформулированные, иллюстрированные многими приложениями, лекции его не только содержали важные сведения, но и приучали к конкретному научному мышлению и восприятию физики как единой системы знаний. М. М. Мирианашвили один из первых положил в основу курса общей физики не толко опытные, но и теоретические принципы, и строил курс на современных представлениях о пространстве, времени и материи. В последние годы он считал целесообразным с самого же начала делить общую физику на физику поля и физику вещества. Создание такого учебника, намечавшегося М. М. Мирианашвили, является почетной задачей его последователей.

Имя Матвея Михайловича Мирианашвили навсегда останется в истории грузинской науки.

მათე მირიანაშვილი

1975 წლის 23 იანვარს გარდაიცვალა მათე მირიანაშვილი, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი, საქართველოს სსრ მეცნიერების დამსახურებული მოღვაწე, რესპუბლიკის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი. იგი იყო თანამედროვე ფიზიკის იდეების განმავითარებელი საქართველოში.

მ. მირიანაშვილი დაიბადა 1906 წელს 5 ოქტომბერს ქ. თბილისში. ჯერ კიდევ სტუდენტობის დროს მონაწილეობდა სასწავლო ლაბორატორიების მოწყობის ორგანიზაციაში და ქართული ფიზიკური ტერმინოლოგიის შექმნაში. 1930 წელს დაამთავრა სახელმწიფო უნივერსიტეტი და დაინიშნა ასისტენტად, ხოლო ერთი წლის შემდეგ მივლინებული იქნა ხარკოვის ფიზიკა-ტექნიკის ინსტიტუტში, სადაც დაიწყო თეორიული ფიზიკის სწავლება. 1933 წელს დაბრუნდა თბილისში და ამ დროიდან გარდაცვალებამდე ხელმძღვანელობდა ზოგადი ფიზიკის კათედრას თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში. წლების განმავლობაში იყო მეცნიერებათა აკადემიის ფიზიკის და გეოფიზიკის ინსტიტუტის დირექტორი, ფიზიკის ფაკულტეტის დეკანი, უნივერსიტეტის პრორექტორი.

მ. მირიანაშვილს ეკუთვნის 60-ზე მეტი სამეცნიერო ნაშრომი, მონოგრაფიები, სახელმძღვანელოები და სხვა გამოკვლევები. იგი ყოველთვის ისწრაფოდა ღრმა ანალიზი მოეხდინა ფიზიკის პრინციპული პრობლემებისა, აღმოეჩინა მათი შინაგანი კავშირი, წარმოედგინა ისინი ერთიან ლოგიკურ სისტემად, რომლის უბადლო ტალანტი მას ჰქონდა. მან მოგვცა მეთოდი ატომთა სისტემის ენერგეტიკული სპექტრის ქვედა საზღვრის მოძებნის, მიიღო პირველი ზუსტი შედეგები დეტერონის კვადრუპოლური მომენტების თეორიაში, პირველმა წამოაყენა ჰიპოტეზა, თავის თანამშრომლებთან ერთად, კვატერნიონული ველების შესახებ, რომელიც სამი წლის შემდეგ გაიმეორეს საზღვარგარეთის მეცნიერებმა. მანვე მიიღო ჰაიზენბერგის რელატივისტურ თეორიაში ზუსტი შედეგი, პირველმა შეასრულა შემაჯამებელი გამოკვლევები ვაკუუმის პოლარიზაციაში, ააგო ფერიტების თეორია, რომლითაც ახსნილი იქნა მრავალი მათი თავისებურებანი. 1963 წელს მ. მირიანაშვილი საკავშირო გრავიტაციული კომისიის წევრად აირჩიეს. 1964 წელს მან თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში შექმნა ახალგაზრდა მეცნიერ მუშაკთა ჯგუფი, რომელთა შრომები გრავიტაციისა და ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში კარგად არის ცნობილი როგორც ჩვენთან ასევე საზღვარგარეთ. შრომები ემყარება მ. მირიანაშვილის იდეებს.

მ. მირიანაშვილის განსაკუთრებულ დამსახურებად უნდა ჩაითვალოს მისი პედაგოგიური მოღვაწეობა. ჩინებული თეორეტიკოსი, ბუნებით მოკრძალებული და გულისხმიერი დიდი პედაგოგიც იყო. მის ლექციებზე თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში აღიზარდა ყველა მომდევნო თაობა. ნათელი, ღრმა, მარტივად და ზუსტად ფორმირებული, ილუსტრირებული მრავალი დამატებებით, ეს ლექ-

ციები შეიცავდნენ არა მარტო მნიშვნელოვან მონაცემებს, არამედ ანვითარებდა კონკრეტულ მეცნიერულ აზროვნებას და ფიზიკის როგორც ერთი მთლიანის სისტემის აღქმას.

მ. მირიანაშვილმა ერთ-ერთმა პირველმა ზოგადი ფიზიკის კურსში შეიტანა არა მარტო ცდებზე დამყარებული, არამედ თეორიული პრინციპები და ააგო კურსი სივრცისა, დროისა და მატერიის თანამედროვე წარმოდგენის საფუძველზე. უკანასკნელ წლებში იგი მიზანშეწონილად თვლიდა, რომ ზოგადი ფიზიკა თავიდანვე ყოფილიყო გაყოფილი ველის ფიზიკად და ნივთიერების ფიზიკად. ასეთი სახელმძღვანელოს შექმნა, რომელიც მ. მირიანაშვილის მიერ იყო გამიზნული, მისი მიმდევრების საპატიო ამოცანას შეადგენს.

მ. მირიანაშვილმა სამუდამოდ ჩაწერა თავისი კეთილშობილური სახელი ქართული კულტურის ისტორიაში.

СОДЕРЖАНИЕ

Физика

Кибернетика

შინაარსი

ფიზიკა

კიბერნეტიკა

CONTENTS

Physics

Cybernetics

Редактор из агельства Л И. Абуашвили
Техредактор И В. Хуцишвили
Корректоры Е С. Сулханишвили, Е З. Кенкишвили

Сдано в производство 12/V 75
Подписано в печать 24/X-75
Формат бумаги 70×108/16
Печатных л 10,5
Учетно-издательских л 7,21

Заказ 861 УЭ 06523 Тираж 300

Цена 80 к

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 14
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14.

Типография Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр. И. Чавчавадзе, 1
თბილისის უნივერსიტეტის სტამბა,
თბილისი, 380028, ი. ჭავჭავაძის პროსპექტი, 1.