ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ТБИЛИССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Гецадзе Ростом Давидович

О РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ ПО ОРТОНОРМИРОВАННЫМ СИСТЕМАМ ОГРАНИЧЕННЫМ В СОВОКУПНОСТИ

[illegible]

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат.наук, член-корр. АН ГССР
профессор Л.В. Жижиашвили

Тбилиси-1977

ВВЕДЕНИЕ

Давно возникла проблема исследований связей между метрическими свойствами функций и сходимостью её ряда Фурье по тригонометрической системе. Эту проблему можно поставить для произвольных ортонормированных систем, для тех систем, которые удовлетворяют определенно общим условиям, или для конкретных систем. Кроме этого, сходимость можно рассматривать в различном смысле - в классическом смысле, почти всюду, относительно определенной метрики, в смысле некоторого метода суммирования и т.д.

Теория тригонометрических и ортогональных рядов активно развивается. От её исследований возникли идеи и методы, которые значительно повлияли на другие области математической науки, такие как теория аналитических функций, функциональный анализ, теория вероятностей и др.

В теории тригонометрических и ортогональных рядов одним из актуальных стали вопросы, связанные с расходящимися рядами Фурье. Особенно активно разрабатывалось это направление после известного исследования А.Н.Колмогорова / I / и обзорных работ П.Л.Ульянова / 2-4 /.

Хорошо известна (см./I/) следующая фундаментальная

Теорема А.Н.Колмогорова. Существует такая функция $f \in L([0,2\pi])$, что её ряд Фурье $\sigma[f]$ расходится почти всюду.

Известна также (см. /5/)

<u>Теорема И.Стейна</u>. Существует такая функция $\Psi \in L([0,1])$, что её ряд Фурье-Уолш-Пэли расходится почти всюду.

Ф.Риссу принадлежит следующая (см.,например, /6/,стр.

<u>Теорема Ф.Рисса.</u> Существует такая функция $g \in L([0,2\pi])$, что её ряд Фурье $\sigma[g]$ расходится в смысле метрики $L([0,2\pi])$.

В настоящее время существуют более общие результаты, вышеотмеченные теоремы А.Н.Колмогорова, И.Стейна и Ф.Рисса (разные обобщения теоремы А.Н.Колмогорова можно найти в /9-I4/, теоремы Ф.Рисса - в /I4/, а что касается усиления теоремы И.Стейна, то они имеются в статьях /I5-I7/).

В работе Ч.Феффермана /I8/ приведен (см. и /I9/) пример такой непрерывной функции двух переменных φ, что её ряд Фурье по двойной тригонометрической системе всюду расходится по Прингсхейму.

Диссертационная работа посвящена изучению следующих вопросов: I). Расходимость почти всюду рядов Фурье по некоторым ограниченным в совокупности[ж)] ортонормированным системам; 2). Расходимость в смысле метрики $L([0,1])$ ряда Фурье по произвольной ограниченной ортонормированной системе; 3). Расходимость ограниченных кратных ортогональных рядов Фурье по Прингсхейму

ж) В дальнейшем под термином "ограниченная ортонормированная система" будем иметь в виду ортонормированную систему, ограниченную в совокупности.

множестве положительной меры, почти всюду и в смысле метрики L. Материал распределен в двух главах. В первой главе рассматриваются вопросы расходимости простых ортогональных рядов Фурье.

Известна следующая (см. /7/)

<u>Теорема С.В.Бочкарева.</u> П у с т ь $(f_k)_{k\geq 1}$ о р т о н о р м и р о в а н н а я н а $[0,1]$ с и с т е м а (ОНС)[ж] ф у н к ц и й , у д о в л е т в о р я ю щ а я у с л о в и ю

$$|f_k(t)|\leqslant M,\quad M>0,\quad t\in[0,1],(k=1,2,3,\dots).$$

Т о г д а с у щ е с т в у е т т а к а я ф у н к ц и я $\psi\in L([0,1])$, ч т о е ё р я д Ф у р ь е п о с и с т е м е $(f_k)_{k\geq 1}$

$$\psi(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\psi)f_k(t),\qquad a_k(\psi)=(\psi,f_k)$$

н е о г р а н и ч е н н о р а с х о д и т с я н а н е к о т о р о м м н о ж е с т в е $E\subset[0,1]$, $mes\,E>0$.

Легко видеть, что даже для всех тех ортонормированных и ограниченных систем, для которых $f_k(t)=0$ при $t\in[\frac{1}{2},1]\,(k=1,2,\dots)$, невозможно достигнуть $mes\,E=1$ ни при какой функции $\psi\in L([0,1])$.

Следовательно, при сравнении теорем А.Н.Колмогорова, И.Стейна и С.В.Бочкарева естественно возникает вопрос: какие (наиболее общие) дополнительные условия надо требовать от функции f_k

---

[ж] В некоторых случаях вместо "ортонормированная система" будем писать ОНС.

$(K=1,2,\ldots)$, кроме равномерной ограниченности, чтобы существовала функция из $L([0,1])$, ряд Фурье которой по данной системе расходится почти всюду?

В §I главы I доказывается справедливость следующего утверждения

<u>Теорема I.I.I.</u> Пусть $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система функций, удовлетворяющая условиям

$$1).\ |\varphi_n(x)|\leqslant M,\ M>0,\ x\in[0,1],\ (n=1,2,\ldots),$$

$$2).\ \varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=nl}^{(n+1)l-1}\varphi_j^2(x)>0$$

почти всюду на $[0,1]$ при некотором натуральном l, которое не зависит от x. Тогда существует такая функция $g\in L([0,1])$, что её ряд Фурье по системе $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$.

В том же параграфе приведены разные обобщения теоремы I.I.I.

В §2 главы I доказывается

<u>Теорема I.2.I</u>. Пусть $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система функций, удовлетворяющая условию

$$|\varphi_n(x)|\leqslant M,\ M>0,\ x\in[0,1],\ (n=1,2,\ldots).$$

Тогда существует такая функция $\varphi\in L([0,1])$, что её ряд Фурье по систе

$(\varphi_n)_{n\geq 1}$ неограниченно расходится в смысле метрики $L([0,1])$.

В работе /8/ было доказано, что расходимость ряда Фурье по любой ограниченной ОНС на $[0,1]$ имеет место в смысле метрики $L([0,1])$. Однако заметим, что отмеченная нами в теореме I.2.I функция $\varphi \in L([0,1])$, для которой ряд Фурье по данной ограниченной ОНС расходится в смысле метрики $L([0,1])$, строится, в определенном смысле, в явном виде, а в /8/ (стр. 24-25) утверждается лишь существование такой функции. Из теоремы I.2.I следует теорема Ф.Рисса.

Во второй главе диссертационной работы приводятся результаты, касающиеся расходимости по Прингсхейму кратных ортогональных рядов Фурье (ввиду громоздкости выкладок доказательства ведутся для функции двух переменных). В §I главы II приводятся леммы, являющиеся многомерными аналогами соответствующих лемм С.В. Бочкарева /7/. В §2 главы II рассматривается вопрос о расходимости кратных ортогональных рядов в смысле метрики $L([0,1]^2)$ по Прингсхейму и устанавливается

<u>Теорема 2.2.I</u>. Пусть $(f_{ik})_{i,k\geq 1}$ двойная ортонормированная система на $[0,1]^2$, удовлетворяющая условию

$$|f_{ik}(x,y)| \leq M, \ M>0, (i,k=1,2,\dots), (x,y)\in[0,1]^2.$$

Тогда существует такая функция $\psi \in L([0,1]^2)$, что её двойной ряд Фурье по системе $(f_{ik})_{i,k\geq 1}$

$$\psi(x,y)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}(\psi)\cdot f_{ik}(x,y),\quad a_{ik}(\psi)=(\psi,f_{ik})$$

неограниченно расходится по Пр... схейму в смысле метрики $L([0,1]^2)$,

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\psi)\cdot f_{ik}(x,y)\right|dx\,dy=\infty .$$

Анализируя доказательства теоремы С.В.Бочкарева, теоре... главы I и §1 – §2 главы II, убеждаемся, что эти утверждения ...ны для любой размерности $N\,(N\geqslant 2)$, если сходимость рас...вать по Прингсхейму. В последнем третьем параграфе второй г... приведены результаты относительно расходимости по Прингсхе... кратных ортогональных рядов Фурье в смысле метрики $L([0,...$, на множестве положительной меры и почти всюду. Они являются ...логами соответствующей теоремы С.В.Бочкарева и утверждени... I и §1 – §2 главы II. Приведем одну из них:

<u>Теорема</u>. Пусть $(f_{i_1 i_2 \dots i_N})_{i_1,i_2,\dots,i_N\geqslant 1}$ N - кр...ная ортонормированная система н... $[0,1]^N\,(N\geqslant 3)$, удовлетворяющая условию

$$\left|f_{i_1,i_2,\dots,i_N}(x_1,x_2,\dots,x_N)\right|\leqslant M,\quad M>0,\quad i_1,i_2,\dots,i_N=1,2,\dots$$

$$(x_1,x_2,\dots,x_N)\in[0,1]^N.$$

Тогда существует такая функция $\varphi\in L([0,1]^N)$, что её N - кратный ряд

Фурье по системе $(f_{i_1 i_2 \dots i_N})_{i_1, i_2, \dots, i_N \geqslant 1}$ неограниченно расходится по Прингсхейму на множестве положительной меры (в смысле N-мерной меры Лебега).

Результаты диссертационной работы были анонсированы в статьях /21-23/.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность научному руководителю, профессору Тбилисского государственного университета Л.В.Жижиашвили за постоянное внимание и ценные замечания при выполнении настоящей работы.

ГЛАВА I

РАСХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

§I. О расходимости почти всюду рядов Фурье по некоторым ограниченным ортонормированным системам

Докажем, что справедлива следующая

Теорема I.I.I. Пусть $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система функций, удовлетворяющая условиям

$$1).\ |\varphi_n(x)|\leq M,\ M>0,\ x\in[0,1],(n=1,2,\dots), \tag{I.I}$$

$$2).\ \varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=n\cdot\ell}^{(n+1)\ell-1}\varphi_j^2(x)>0 \tag{I.2}$$

почти всюду на $[0,1]$ при некотором натуральном ℓ, которое не зависит от x. Тогда существует такая функция $g\in L([0,1])$, что её ряд Фурье по системе $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$.

Доказательство. Ниже мы приведем ряд лемм, которые используем в дальнейшем.

Справедлива

Лемма (С.В.Бочкарев, /7/, стр.441). Пусть $(\varphi_k)_{k\geqslant 1}$ ОНС функций на $[0,1]$, удовлетворяющая условию (I.I.I), и пусть последовательность чисел $(a_k)_{k\geqslant 1}$ удовлетворяет неравенству

$$|a_k| \leqslant M_1, \quad (k=1,2,\dots)$$

Тогда для любого $n=1,2,\dots$ выполняется неравенство

$$\sum_{m=1}^{n} \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k(x)\right| dx + n \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right| dx \geqslant$$

$$\geqslant C_1 \log n \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \qquad \text{(I.I.3)}$$

где C_1 некоторая положительная постоянная.

Известна также (см., например, /20/, стр.36,207)

Теорема (С.Сакс). Для любой ОНС функций $(\varphi_k)_{k\geqslant 1}$ на $[0,1]$ и пространства $L([0,1])$ существует множество $T\subset[0,1]$ такое, что

$$1^0).\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|S_n(f;x)\right| < \infty$$

почти всюду на T для любой $f \in L([0,1])$,

2°). $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |S_n(f;x)| = \infty$

почти всюду на $CT = [0,1] \setminus T$ для любо $f \in L([0,1])$, за исключением множест первой категории из $L([0,1])$, гд

$$S_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} (f,\varphi_k) \cdot \varphi_k(x)$$

является частной суммой порядка n ряда Фурье функции f по сис е $(\varphi_k)_{k\geq 1}$.

Установим теперь справедливость нескольких лемм.

Лемма I.I.I. Пусть $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ОНС на $[0,1]$, удовлетворяющая условиям (I.I.I) и (I.I.2). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $N = 1,2,\dots$ су- ствуют:

I. Множество $E_\varepsilon \subset [0,1]$ с $mes E_\varepsilon > 1-\varepsilon$, г E_ε не зависит от N и зависит от ε,

2. множество $\Omega_{0,\varepsilon}$ (зависящее от ε и N) точек $(x,\theta_1,\dots,\theta_N)$ единичного ку а I^{N+1} в пространстве R^{N+1}

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1,2,\dots,N$$

для которого проекция на оси Ox в- на E_ε и $mes\,\Omega_{0,\varepsilon} \geq \gamma_\varepsilon > 0$, где γ_ε не зав т от N и зависит только от ε,

3. последовательность натуральных чисел $m_p(x)$, зависящая от x, $N\cdot p \leqslant m_p(x) < N(p+1)$ для любого x из E_ε и $p=1,2,\ldots$,

такие, что для всякой точки $(x,\theta_1,\ldots,\theta_N)\in\Omega_{0,\varepsilon}$ выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=N\cdot p}^{m_p(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1}\varphi_j(x)\cdot\varphi_j(\theta_i) > C_{\varepsilon,\varepsilon}\cdot N\log N, \tag{I.I.4}$$

где $C_{\varepsilon,\varepsilon}$ - некоторая положительная постоянная, не зависящая от N и зависящая только от ε.

<u>Доказательство</u>. Для заданного $\varepsilon>0$ и N, в силу условия I.I.2, найдутся числа $N_{0,\varepsilon}=N\cdot p_0$ (p_0 некоторое натуральное число), $\delta_\varepsilon>0$ и множество $E_\varepsilon\subset[0,1]$, не зависящее от N, с $mes\,E_\varepsilon>1-\varepsilon$, такие, что

$$\sum_{j=n\ell}^{(n+1)\ell-1}\varphi_j^2(x)\geqslant\delta_\varepsilon>0 \quad \text{для любого } n\geqslant N_{0,\varepsilon} \text{ и } x\in E_\varepsilon. \tag{I.I.5}$$

Введем новую ОНС на $[0,1]$

$$f_n(x)=\varphi_{N_{0,\varepsilon}\ell+n}(x),\quad n=1,2,\ldots,\quad x\in[0,1]. \tag{I.I.6}$$

В силу условия (I.I.I)

$$|f_n(x)|\leqslant M,\ n=1,2,\ldots,\quad x\in[0,1]. \tag{I.I.7}$$

Покажем теперь, что для любого $x \in E_\varepsilon$ существует последовательность натуральных чисел $(m_p'(x))_{p\geq 1}$ такая, что $N\cdot p \leq m_p'(x) < N\cdot(p+1)$ и

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N\cdot p}^{m_p'(x)} \sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\ell-1} f_j(x) f_j(\theta) \right| d\theta \geq C_{2,\varepsilon} \log N, \; (p=1,2,\dots). \qquad (I.I.8)$$

Действительно, для фиксированного $x \in E_\varepsilon$ рассмотрим ОНС на $[0,1]$, определенную равенством

$$\varphi_k^{(c)}(\theta) = \frac{1}{\left\| \Phi_{k+N\cdot p-1}(\theta) \right\|_{L^2}} \cdot \Phi_{k+N\cdot p-1}(\theta), \; (k=1,2,\dots), \qquad (I.I.9)$$

и последовательность чисел

$$a_k = \left\| \Phi_{k+Np-1}(\theta) \right\|_{L^2}, \; (k=1,2,\dots),$$

где

$$\Phi_k(\theta) = \sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\ell-1} f_j(x) f_j(\theta), \; (k=1,2,\dots), \; \theta\in[0,1]$$

Ясно, что

$$\left| \Phi_{k+N\cdot p-1}(\theta) \right| \leq M^2 \ell, \quad (k=1,2,\dots), \quad \theta \in [0,1]$$

и

$$|a_k| \leq M\sqrt{\ell}, \; (k=1,2,\dots).$$

Из (I.I.5) и (I.I.6) следует, что при $x \in E_\varepsilon$

$$a_k^2=\sum_{j=(k+N\cdot p-1)\ell}^{(k+N\cdot p)\ell-1} f_j^2(x)=\sum_{j=(N_{0,\varepsilon}+k+N\cdot p-1)\ell}^{(N_{0,\varepsilon}+k+Np)\ell-1}\varphi_j^2(x)\geqslant\delta_\varepsilon,\ (k=1,2,\dots). \qquad (I.I.I0)$$

Стало быть (см.(I.I.9)), при $x\in E_\varepsilon$

$$\left|\varphi_k^{(0)}(\theta)\right|\leqslant\frac{1}{|a_k|}\cdot M^2\ell\leqslant\frac{1}{\sqrt{\delta_\varepsilon}}M^2\ell,(k=1,2,\dots),\ \theta\in[0,1].$$

Отсюда заключаем, что ОНС $\left(\varphi_k^{(0)}\right)_{k\geqslant1}$ и последовательность чисел $(a_k)_{k\geqslant1}$ при $x\in E_\varepsilon$ удовлетворяют условиям леммы С.В.Бочкарева, в силу которой для $n=N$ имеем (см.(I.I.I0))

$$\sum_{m=1}^{N}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k^{(0)}(\theta)\right|d\theta+N\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{N}a_k\varphi_k^{(0)}(\theta)\right|d\theta\geqslant C_{3,\varepsilon}N\log N. \qquad (I.I.II)$$

Значит

$$\sum_{m=1}^{N}\int_0^1\left|\sum_{k=N\cdot p}^{m+N\cdot p-1}\sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\cdot\ell-1}f_j(x)\cdot f_j(\theta)\right|d\theta+$$

$$+N\int_0^1\left|\sum_{k=N\cdot p}^{N(p+1)-1}\sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\cdot\ell-1}f_j(x)f_j(\theta)\right|d\theta\geqslant C_{3,\varepsilon}N\log N. \qquad (I.I.I2)$$

Обозначим через $m_p'(x)$ натуральное число, удовлетворяющее условиям: $N\cdot p\leqslant m_p'(x)<N\cdot(p+1)$ и

$$\int_0^1\left|\sum_{k=N\cdot p}^{m_p'(x)}\sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\cdot\ell-1}f_j(x)\cdot f_j(\theta)\right|d\theta=$$

$$= \max_{N\cdot p \leqslant m < N\cdot(p+1)} \int_0^1 \left| \sum_{k=N\cdot p}^{m} \sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\ell-1} f_j(x)\cdot f_j(\theta) \right| d\theta . \tag{I.I.I3}$$

Тогда из (I.I.I2) и (I.I.I3) следует (I.I.8).

Введем обозначение

$$F_p(x,\theta) = \sum_{k=N\cdot p}^{m'_p(x)} \sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\ell-1} f_j(x) f_j(\theta). \tag{I.I.I4}$$

Докажем, что для любого $x \in E_\varepsilon$

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\, F_p(x,\theta) \geqslant 0 \tag{I.I.I5}$$

почти для всех θ из $[0,1]$. Действительно, для фиксированной точки x из E_ε последовательность функций $F_p(x,\theta)$ по переменной θ образует ортогональную систему на $[0,1]$.

Пусть для некоторого x из E_ε существует множество E_1, $mes\, E_1 > 0$, такое, что

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\, F_p(x,\theta) < 0 \quad \text{при} \quad \theta \in E_1 .$$

Тогда найдутся номер L_1, число $\delta_1 < 0$ и множество $E_2 \subseteq E_1$, $mes\, E_2 > 0$ такие, что

$$F_p(x,\theta) \leqslant \delta_1 < 0, \text{ при } \theta \in E_2,\ p \geqslant L_1 . \tag{I.I.I6}$$

Из (I.I.I) и (I.I.I4) следует, что (см. (I.I.I6)) при любом

$n = 1, 2, \ldots$

$$nNM^2 l \geqslant \sum_{p=L_1}^{L_1+n-1} \int_0^1 F_p^2(x,\theta)\,d\theta = \int_0^1 \left[\sum_{p=L_1}^{L_1+n-1} F_p(x,\theta)\right]^2 d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \int_{E_2} \left[\sum_{p=L_1}^{L_1+n-1} F_p(x,\theta)\right]^2 d\theta \geqslant n^2 \delta_1^2 \operatorname{mes} E_2 .$$

Но это неравенство не выполняется для достаточно больших n, значит соотношение (I.I.I5) доказано.

Покажем, что для любого $x \in E_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\int_0^1 \overline{\lim_{p\to+\infty}} F_p(x,\theta)\,d\theta \geqslant C_{4,\varepsilon} \log N. \tag{I.I.I7}$$

Пусть $F_p^+(x,\theta)$ положительная часть функции $F_p(x,\theta)$, т.е.

$$F_p^+(x,\theta) = \begin{cases} F_p(x,\theta) & \text{, если } F_p(x,\theta) \geqslant 0, \\ 0 & \text{, если } F_p(x,\theta) < 0. \end{cases}$$

Очевидно

$$F_p^+(x,\theta) = \frac{1}{2} F_p(x,\theta) + \frac{1}{2} \left|F_p(x,\theta)\right| . \tag{I.I.I8}$$

Применяя теорему Фату-Лебега и учитывая ортогональность и равномерную ограниченность системы $F_p(x,\theta)$, находим (см. (I.I.I4), (I.I.I5) и (I.I.I8))

$$\int_0^1 \overline{\lim_{p\to\infty}} F_p(x,\theta)\,d\theta = \int_0^1 \overline{\lim_{p\to\infty}} F_p^+(x,\theta)\,d\theta >$$

$$> \overline{\lim_{p\to\infty}} \int_0^1 F_p^+(x,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\,\overline{\lim_{p\to\infty}} \int_0^1 |F_p(x,\theta)|\,d\theta.$$

Отсюда (см. (I.I.8), (I.I.I4)) следует (I.I.I7).

Введем функцию

$$\sum_{i=1}^{N} F_p(x,\theta_i),\quad x\in E_\varepsilon,\quad (\theta_1,\dots,\theta_N)\in I^N\subset R^N. \tag{I.I.I9}$$

Определим семейство подпоследовательностей натурального ряда $\nu_p^{(i)}(x,\theta_1,\dots,\theta_i)$, $i=1,2,\dots,N$ следующим способом. Положим $\nu_p^{(0)}(x)=p$, $p=1,2,\dots$.

Через $\left(\nu_p^{(1)}(x,\theta_1)\right)_{p\geqslant 1}$ обозначим подпоследовательность натурального ряда, зависящую от точек x и θ_1 такую, что

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} F_p(x,\theta_1) = \lim_{p\to\infty} F_{\nu_p^{(1)}(x,\theta_1)}(x,\theta_1).$$

Из каждой последовательности $\left(\nu_p^{(1)}(x,\theta_1)\right)_{p\geqslant 1}$ выделим подпоследовательность $\left(\nu_p^{(2)}(x,\theta_1,\theta_2)\right)_{p\geqslant 1}$, для которой

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} F_{\nu_p^{(1)}(x,\theta_1)}(x,\theta_2) = \lim_{p\to\infty} F_{\nu_p^{(2)}(x,\theta_1,\theta_2)}(x,\theta_2).$$

Если продолжим этот процесс до номера N, получим семейство подпоследовательностей $\left(\nu_p^{(i)}(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\right)_{p\geqslant 1}$ $(i=0,1,\dots,N)$, такое, что последовательность

$$\left(\nu_p^{(i+1)}(x,\theta_1,\dots,\theta_i,\theta_{i+1})\right)_{p\geq 1}$$

является подпоследовательностью последовательности

$$\left(\nu_p^{(i)}(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\right)_{p\geq 1}$$

и имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\, F_{\nu_p^{(i)}(x,\theta_1,\dots,\theta_i)}(x,\theta_{i+1}) = \lim_{p\to\infty} F_{\nu_p^{(i+1)}(x,\theta_1,\dots,\theta_i,\theta_{i+1})}(x,\theta_{i+1}). \tag{I.I.20}$$

В силу указанных свойств семейства подпоследовательностей $\nu_p^{(i)}(x,\theta_1,\dots,\theta_i)$ имеем (см. (I.I.I9), (I.I.20))

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} F_p(x,\theta_i) \geq \lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{N} F_{\nu_p^{(N)}(x,\theta_1,\dots,\theta_N)}(x,\theta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \lim_{p\to\infty} F_{\nu_p^{(N)}(x,\theta_1,\dots,\theta_N)}(x,\theta_i) = \sum_{i=1}^{N} \overline{\lim_{p\to\infty}}\, F_{\nu_p^{(i-1)}(x,\theta_1,\dots,\theta_{i-1})}(x,\theta_i). \tag{I.I.2I}$$

Заметим, что неравенства (I.I.I5) и (I.I.I7) остаются справедливыми и для любой подсистемы $F_p(x,\theta)$. Поэтому (см. (I.I.I7)), для каждого $i=1,2,\dots,N$

$$\int_0^1 \overline{\lim_{p\to\infty}}\, F_{\nu_p^{(i-1)}(x,\theta_1,\dots,\theta_{i-1})}(x,\theta_i)\, d\theta_i \geq C_{4,\varepsilon} \log N, \tag{I.I.22}$$

для любого $x \in E_\varepsilon$ и $0 \leq \theta_j \leq 1$, $j=1,2,\dots,i-1$.

Рассмотрим функции

$$\Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)=\frac{C_{4,\varepsilon}\log N}{\int\limits_0^1 \overline{\lim\limits_{p\to\infty}} F_{\nu_p^{(i-1)}(x,\theta_1,\dots,\theta_{i-1})}(x,\theta_i)\,d\theta_i}\cdot\overline{\lim\limits_{p\to\infty}} F_{\nu_p^{(i-1)}(x,\theta_1,\dots,\theta_{i-1})}(x,\theta_i). \tag{I.I.23}$$

Согласно (I.I.I5), (I.I.22) и (I.I.23)

$$0\leqslant \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\leqslant \overline{\lim\limits_{p\to\infty}} F_{\nu_p^{(i-1)}(x,\theta_1,\dots,\theta_{i-1})}(x,\theta_i) \tag{I.I.24}$$

и

$$\int\limits_0^1 \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\,d\theta_i=C_{4,\varepsilon}\log N \tag{I.I.25}$$

при $i=1,2,\dots,N$, $0\leqslant\theta_j\leqslant 1$, $j=1,2,\dots,i-1$, $x\in E_\varepsilon$.

Из (I.I.25) следует

$$\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\,d\theta_1\dots d\theta_N=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1 d\theta_1\dots d\theta_{i-1}\cdot\int\limits_0^1\Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\,d\theta_i=C_{4,\varepsilon}N\log N. \tag{I.I.26}$$

С другой стороны, учитывая (I.I.I), (I.I.I4), (I.I.24), (I.I.25), (I.I.26), получим неравенство

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\right]^2 d\theta_1 \cdots d\theta_N = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{i=1}^{N} \Phi_i^2(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\, d\theta_1 \cdots d\theta_N +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\cdot \Phi_j(x,\theta_1,\dots,\theta_j)\, d\theta_1 \cdots d\theta_N \leq$$

$$\leq C_{4,\varepsilon} M^2 l N^2 \log N + 2 C_{4,\varepsilon}^2 N^2 \log^2 N \leq C_{5,\varepsilon} N^2 \log^2 N. \tag{I.I.27}$$

Пусть $E(x)$ множество тех точек $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_N) \in I^N$, для которых выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i) \leq \frac{2C_{5,\varepsilon}}{C_{4,\varepsilon}} N \log N. \tag{I.I.28}$$

Тогда, в силу (I.I.26) и (I.I.28) при $x \in E_\varepsilon$ имеем

$$C_{4,\varepsilon} N \log N = \int_{E(x)} \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\, d\theta + \int_{I^N \setminus E(x)} \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\, d\theta \leq$$

$$\leq \int_{E(x)} \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\, d\theta + \frac{C_{4,\varepsilon}}{2C_{5,\varepsilon} N \log N} \int_{I^N \setminus E(x)} \left[\sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\right]^2 d\theta.$$

Следовательно, согласно (I.I.27), находим

$$\int_{E(x)} \sum_{i=1}^{N} \Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\, d\theta \geq \frac{C_{4,\varepsilon}}{2} N \log N. \tag{I.I.29}$$

Для каждого x из E_ε рассмотрим множество

$$E_1(x)=\left\{\theta=(\theta_1,\dots,\theta_N)\in E(x)\colon \sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)>\frac{C_{4,\varepsilon}}{4}N\log N\right\} \tag{I.I.30}$$

Ввиду (I.I.28), (I.I.29) и (I.I.30) для любого $x\in E$ будем иметь

$$\operatorname{mes}E_1(x)\geqslant\frac{C_{4,\varepsilon}}{2C_{5,\varepsilon}N\log N}\int\limits_{E_1(x)}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\,d\theta=$$

$$=\frac{C_{4,\varepsilon}}{2C_{5,\varepsilon}N\log N}\int\limits_{E(x)}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\,d\theta-$$

$$-\frac{C_{4,\varepsilon}}{2C_{5,\varepsilon}N\log N}\int\limits_{E(x)\setminus E_1(x)}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i(x,\theta_1,\dots,\theta_i)\,d\theta\geqslant$$

. . . .

$$\geqslant\frac{C_{4,\varepsilon}^2}{4C_{5,\varepsilon}}-\frac{C_{4,\varepsilon}^2}{8C_{5,\varepsilon}}=\frac{C_{4,\varepsilon}^2}{8C_{5,\varepsilon}}\equiv\alpha_\varepsilon>0. \tag{I.I.31}$$

Обозначим через Ω'_ε множество всех точек $(x,\theta_1,\dots,\theta_N)\in I^{N+1}$, для которых выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=N\cdot p}^{m_p^i(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1}f_j(x)\,f_j(\theta_i)\geqslant\frac{C_{4,\varepsilon}}{4}N\log N. \tag{I.I.32}$$

Рассмотрим множество

$$\Omega_{0,\varepsilon}=\Omega'_{\varepsilon}\cap\left(E_{\varepsilon}\times I^{N}\right) \quad .$$

Очевидно, что (см. (I.I.I4), (I.I.2I), (I.I.24), (I.I.30)), если точка $(x,\theta_1,\dots,\theta_N)\in I^{N+1}$ такова, что одновременно $x\in E_\varepsilon$ и $(\theta_1,\dots,\theta_N)\in E_1(x)$, то эта точка принадлежит множеству $\Omega_{0,\varepsilon}$. Ясно также, что проекция $\Omega_{0,\varepsilon}$ на оси Ox равна множеству E_ε .

В силу этого замечания имеем

$$\operatorname{mes}\Omega_{0,\varepsilon}\geqslant\alpha_\varepsilon \operatorname{mes}E_\varepsilon\equiv\gamma_\varepsilon>0 \quad . \tag{I.I.33}$$

Действительно, обозначим через $\chi_{\Omega_{0,\varepsilon}}(x,\theta)$ характеристическую функцию $\Omega_{0,\varepsilon}$ на I^{N+1} . Тогда

$$\operatorname{mes}\Omega_{0,\varepsilon}=\int\limits_{I^{N+1}}\chi_{\Omega_{0,\varepsilon}}(x,\theta)\,dx\,d\theta\geqslant\int\limits_{E_\varepsilon}dx\int\limits_{I^N}\chi_{\Omega_{0,\varepsilon}}(x,\theta)\,d\theta\;;$$

но, для любого $x\in E_\varepsilon$ (см. (I.I.3I)

$$\int\limits_{I^N}\chi_{\Omega_{0,\varepsilon}}(x,\theta)\,d\theta\geqslant\int\limits_{E_1(x)}\chi_{\Omega_{0,\varepsilon}}(x,\theta)\,d\theta=\int\limits_{E_1(x)}1\cdot d\theta=\operatorname{mes}E_1(x)\geqslant\alpha_\varepsilon>0;$$

и стало быть

$$\operatorname{mes}\Omega_{0,\varepsilon}\geqslant\int\limits_{E_\varepsilon}\alpha_\varepsilon\,dx=\alpha_\varepsilon\operatorname{mes}E_\varepsilon=\gamma_\varepsilon>0 \quad .$$

Отсюда, согласно (I.I.6) и (I.I.32) при $(x,\theta_1,\dots,\theta_N)\in\Omega_{0,\varepsilon}$

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=Np}^{m_p(x)} \sum_{j=kl}^{(k+1)l-1} \varphi_j(x)\cdot\varphi_j(\theta_i) \geqslant \frac{C_{4,\varepsilon}}{4} N\log N ,$$

где $(m_p(x))_{p\geqslant 1}$ последовательность натуральных чисел, зависящая от x, такая что $Np \leqslant m_p(x) < N(p+1)$.

Лемма I.I.I доказана.

Докажем теперь, что справедлива

Лемма I.I.2. Пусть $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ ОНС на $[0,1]$, удовлетворяющая условию (I.I.I) и l некоторое натуральное число. Допустим, что для каждого $N (N=1,2,\dots)$ существует множество $\Omega \subset I^{N+1} \subset R^{N+1}$ точек $(x,\theta_1,\dots,\theta_N)$, удовлетворяющее условиям:

1. Проекция множества Ω на оси Ox равна $E\subset[0,1]$, где E некоторое множество, независящее от N.

2. Для каждой точки $(x,\theta_1,\dots,\theta_N)\in\Omega$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=Np}^{m_p(x)} \sum_{j=kl}^{(k+1)l-1} \varphi_j(x)\varphi_j(\theta_i) \geqslant C_7 \log N, \tag{I.I.34}$$

где $(m_p(x))_{p\geqslant 1}$ последовательность натуральных чисел, $Np \leqslant m_p(x) < N(p+1)$, зависящая от точки x, а C_7 некоторая положительная постоянная.

3. $\operatorname{mes}\Omega \geqslant \gamma > 0$, где γ не зависит от N. (I.I.35)

Тогда для любого $\eta\ (0<\eta<\gamma)$ существуют функция $\Psi=\Psi_\eta\in L([0,1])$ и множество $H=H_\eta\subset E$ такие, что $\operatorname{mes} H=\gamma-\eta$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(\Psi)\varphi_k(x)\right|=\infty,\quad a_k(\Psi)=(\Psi,\varphi_k)$$

всюду на множестве H.

Доказательство. Обозначим через G множество тех точек $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_N)\in[0,1)^N$, для которых

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_0^h \varphi_k(\theta_i+u)\,du=\varphi_k(\theta_i) \tag{I.I.36}$$

для любых $k=1,2,\dots$ и $i=1,2,\dots,N$. Очевидно, что $\operatorname{mes} G=1$.

Покажем, что в силу условий леммы I.I.2 (см. I.I.34), для каждого $N=1,2,\dots$, существует точка $\theta^{(N)}=(\theta_1^{(N)},\dots,\theta_N^{(N)})$ такая, что $\theta^{(N)}\in G$ и

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=Np}^{m_p(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1}\varphi_j(x)\varphi_j(\theta_i^{(N)})\geqslant C_7\log N \tag{I.I.37}$$

при любом $x\in T_N^{(1)}$, где $T_N^{(1)}\subset E$ - некоторое множество с $\operatorname{mes} T_N^{(1)}\geqslant\gamma$ (см. (I.I.35)).

Действительно, обозначим через $\chi_\Omega(x,\theta)$ ($\theta=(\theta_1,\dots,\theta_N)$) характеристическую функцию множества Ω на I^{N+1}. Тогда согласно (I.I.35), имеем

$$\gamma \leqslant \operatorname{mes}\Omega = \int\limits_{I^{N+1}} \chi_\Omega(x,\theta)\,dx\,d\theta = \int\limits_{I^N} d\theta \int\limits_{I} \chi_\Omega(x,\theta)\,dx. \tag{I.I.38}$$

Положим

$$f(\theta) = \int\limits_{I} \chi_\Omega(x,\theta)\,dx. \tag{I.I.39}$$

В силу (I.I.38), находим

$$\int\limits_{I^N} f(\theta)\,d\theta \geqslant \gamma.$$

Стало быть, в силу последнего неравенства, существует множество $\Omega^* \subset I^N$ положительной меры такое, что

$$f(\theta) \geqslant \gamma \qquad \text{при} \quad \theta \in \Omega^* \ .$$

. . . .

Так как (см. (I.I.36)) $\operatorname{mes} G = 1$, то найдется такая точка $\theta^{(N)} = (\theta_1^{(N)},\dots,\theta_N^{(N)}) \in G$, что

$$f(\theta^{(N)}) \geqslant \gamma$$

и

$$\gamma \leqslant f(\theta^{(N)}) = \int\limits_{I} \chi_\Omega(x,\theta^{(N)})\,dx = \operatorname{mes} T_N^{(1)},$$

где $T_N^{(1)}$ множество тех $x \in [0,1]$, для которых $(x,\theta_1^{(N)},\dots,\theta_N^{(N)}) \in \Omega$. Ясно, что $T_N^{(1)} \subset E$. Тем самым (см. (I.I.34)) соотношение (I.I.37) доказано.

Пусть $(h_n)_{n\geq 1}$, $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ - убывающие последовательности положительных чисел, $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty$, и $(N_n)_{n\geq 1}$ последовательность натуральных чисел, которые будут определены ниже.

Положим

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\delta_n(\theta_i^{(n)},x), \tag{I.I.40}$$

где

$$\delta_n(\theta_i^{(n)};x)=\begin{cases} h_n^{-1} \text{ при } x\in[\theta_i^{(n)},\theta_i^{(n)}+h_n], \\ 0 \text{ при } x\in[0,1]\setminus[\theta_i^{(n)},\theta_i^{(n)}+h_n], \end{cases} \tag{I.I.4I}$$

а точки $\theta_i^{(n)}$, $i=1,2,\dots,N_n$ выбраны так, чтобы выполнялось неравенство (I.I.37) при $N=N_n$.

Ясно, что $\psi\in L([0,1])$, ибо (см. (I.I.40), (I.I.4I))

$$\int_0^1|\psi(x)|dx=\int_0^1\psi(x)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\int_0^1\delta_n(\theta_i^{(n)},x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty.$$

Введем обозначения:

$$\alpha_n(x)=\sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_\ell}{N_\ell}\sum_{i=1}^{N_\ell}\delta_\ell(\theta_i^{(\ell)},x), \tag{I.I.42}$$

$$\beta_n(x) = \frac{\varepsilon_n}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n} \delta_n(\theta_i^{(n)}, x), \tag{I.I.43}$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{\ell=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\ell}{N_\ell}\sum_{i=1}^{N_\ell} \delta_\ell(\theta_i^{(\ell)}, x). \tag{I.I.44}$$

Определим последовательность чисел $(h_n)_{n\geqslant 1}$, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ и последовательность номеров $(N_n)_{n\geqslant 1}, (R_n)_{n\geqslant 1}, (L_n)_{n\geqslant 1}$ следующим образом. Положим: $\varepsilon_1 = 1$, $N_1 = 1$, $R_1 = 1$, $L_1 = 2$ и h_1 берем такое, что $\theta_1^{(1)} + h_1 \leqslant 1$. Допустим, числа $h_j, \varepsilon_j, N_j, R_j$ и L_j уже подобраны при всех $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Возьмем число ε_n такое, что

$$N_{n-1}\varepsilon_n \leqslant 1, \quad \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}. \tag{I.I.45}$$

Далее, найдем номер N_n, для которого

$$\varepsilon_n \log N_n \geqslant n. \tag{I.I.46}$$

Поскольку (см. (I.I.42))

$$\lim_{k\to\infty} a_k(\alpha_n) = \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \alpha_n(x)\varphi_k(x) = 0,$$

то существует такое натуральное число R_n, что $R_n > L_{n-1}$ и

$$N_n \max_{j\geqslant N_n R_n \ell} |a_j(\alpha_n)| \leqslant 1 . \tag{I.I.47}$$

Покажем теперь, что для данного $\eta > 0$ существуют множество $T_{N_n}^{(2)} \subset T_{N_n}^{(1)} \subset E$ с $mes\, T_{N_n}^{(2)} \geq \gamma - \eta$ и номер $L_n > R_n$ которые удовлетворяют условию

$$\max_{R_n < p < L_n} \left\{ \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} \varphi_j(x)\varphi_j(\theta_i^{(n)}) \right\} \geq C_8 \log N_n, \qquad \text{(I.I.48)}$$

для любой точки $x \in T_{N_n}^{(2)}$.

Действительно, введем обозначения:

$$g_p(x) \equiv \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} \varphi_j(x)\varphi_j(\theta_i^{(n)}), \qquad \text{(I.I.49)}$$

$$Q_p(x) \equiv \sup\{ g_p(x), g_{p+1}(x), \dots \}. \qquad \text{(I.I.50)}$$

. . . .

Очевидно, что $Q_p(x)$ можно представить в виде

$$Q_p(x) = \sup_{1 \leq k < \infty} \left(\max\{ g_p(x), \dots, g_{p+k}(x) \} \right) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(\max\{ g_p(x), \dots, g_{p+k}(x) \} \right). \qquad \text{(I.I.51)}$$

Из (I.I.37), согласно (I.I.49) и (I.I.50), следует

$$\lim_{p\to\infty} Q_p(x) \geqslant C_7 \log N_n \quad (x \in T_{N_n}^{(1)}). \tag{I.I.52}$$

Поэтому для данного $\eta > 0$ найдутся число $p_1 > R_n$, множество $E_{N_n} \subset T_{N_n}^{(1)}$ с $mes\, E_{N_n} \geqslant \gamma - \frac{\eta}{2}$, такие, что

$$Q_{p_1}(x) > \frac{C_7}{2} \log N_n \quad (x \in E_{N_n}). \tag{I.I.53}$$

Теперь из (I.I.5I), (I.I.53) следует существование такого числа K_0 и множества $T_{N_n}^{(2)} \subset E_{N_n} \subset T_{N_n}^{(1)}$ с $mes\, T_{N_n}^{(2)} \geqslant \gamma - \eta$, что

$$\max\left\{g_{p_1}(x), \dots, g_{p_1+K_0}(x)\right\} \geqslant \frac{C_7}{4} \log N_n \quad (x \in T_{N_n}^{(2)}).$$

За L_n примем число $p_1 + K_0 + 1$ и тогда для справедливости соотношения (I.I.48) достаточно заметить, что $p_1 > R_n$.

Далее, используя соотношения (I.I.36), выберем число h_n с условием: $\theta_i^{(n)} + h_n \leqslant 1$, $(i = 1, 2, \dots, N_n)$ и

$$N_n \left| \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} \varphi_j(\theta_i^{(n)} + u)\, du - \varphi_j(\theta_i^{(n)}) \right| \leqslant 1 \tag{I.I.54}$$

для всех $\ell\, N_n R_n \leqslant j \leqslant \ell\, N_n L_n$, $i = 1, 2, \dots N_n$.

Таким образом, последовательности $(k_n)_{n\geqslant 1}$, $(N_n)_{n\geqslant 1}$, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, $(R_n)_{n\geqslant 1}$ и $(L_n)_{n\geqslant 1}$ определены.

Покажем, что функция ψ (см. (I.I.40)) удовлетворяет условиям леммы I.I.2.

Пусть $x\in T^{(2)}_{N_n}$. Тогда (см. (I.I.40)-(I.I.44))

$$\sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\psi)\varphi_j(x)=\sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\alpha_n)\cdot\varphi_j(x)+$$

$$+\sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\beta_n)\cdot\varphi_j(x)+\sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\lambda_n)\varphi_j(x). \tag{I.I.55}$$

Из неравенства (I.I.47), согласно (I.I.I), следует

$$\left|\sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\alpha_n)\varphi_j(x)\right|\leqslant M\ell \tag{I.I.56}$$

. . . .

при $R_n\leqslant p<L_n$ и $x\in[0,1]$.

В силу неравенства (I.I.45) имеем (см. (I.I.4I),(I.I.44))

$$\left|\sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)}\sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\lambda_n)\varphi_j(x)\right|\leqslant M^2\ell\,\|\lambda_n\|_1 N_n\leqslant$$

$$\leqslant 2M^2\ell\,\varepsilon_{n+1}N_n\leqslant 2M^2\ell \tag{I.I.57}$$

для всех $p=1,2,\ldots$ и $x\in[0,1]$.

Далее, в силу выбора чисел h_n (см. (I.I.40),(I.I.43), (I.I.54)), при $R_n \leqslant p < L_n$, будем иметь

$$\sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\beta_n)\varphi_j(x) \geqslant \frac{\varepsilon_n}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} \varphi_j(x)\cdot\varphi_j(\theta_i^{(n)}) -$$

$$-\left| \frac{\varepsilon_n}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} \varphi_j(x) \left[\frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} \varphi_j(\theta_i^{(n)}+u)\,du - \varphi_j(\theta_i^{(n)}) \right] \right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon_n}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\ell-1} \varphi_j(x)\varphi_j(\theta_i^{(n)}) - M\ell .$$

(I.I.58)

Следовательно, учитывая (I.I.46), (I.I.48), (I.I.55)-(I.I.58) для $x \in T_{N_n}^{(2)}$ находим

$$\max_{R_n \leqslant p < L_n} \left\{ \sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\ell}^{(k+1)\ell-1} a_j(\psi)\varphi_j(x) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \max_{R_n \leqslant p < L_n} \left\{ \frac{\varepsilon_n}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{k=N_n p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=k\cdot\ell}^{(k+1)\ell-1} \varphi_j(x)\varphi_j(\theta_i^{(n)}) \right\} -$$

$$-\left(2M\ell + 2M^2\ell\right) \geqslant C_8 \cdot n - \left(2M\ell + 2M^2\ell\right). \qquad \text{(I.I.59)}$$

Положим $H_1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} T^{(2)}_{N_n}$. Тогда (см. (I.I.48)) $mes H_1 \geqslant \gamma - \eta$ и для каждой точки $x \in H_1$ имеем (см. (I.I.59))

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{K_n \leqslant p < L_n} \left\{ \sum_{K=N_n \cdot p}^{m_p^{(n)}(x)} \sum_{j=K\cdot\ell}^{(K+1)\ell-1} a_j(\psi)\cdot\varphi_j(x) \right\} = +\infty. \qquad (I.I.60)$$

Остается взять некоторое множество $H \subset H_1$ с $mes H = \gamma - \eta$.

Лемма I.I.2 (см. (I.I.60)) доказана.

Приступим к доказательству теоремы I.I.I. Пусть $(\eta_K)_{K\geqslant 0}$ последовательность положительных чисел, $\sum\limits_{K=0}^{\infty} \eta_K < \varepsilon$, которая будет определена ниже. Очевидно, что множества $\Omega_{0,\varepsilon}$ из леммы I.I.I удовлетворяют условиям леммы I.I.2 для $E = E_\varepsilon$. Возьмем $0 < \eta_0 < \frac{\varepsilon}{2}$, $\eta_0 < \gamma_\varepsilon$. По лемме I.I.2 для числа $\eta_0 > 0$ существуют функция $\psi_0 \in L([0,1])$, множество $H_0 \subset E_\varepsilon$ с $mes H = \gamma_\varepsilon - \eta_0$ такие, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left| \sum_{K=1}^{m} a_K(\psi_0)\,\varphi_K(x) \right| = \infty, \quad a_K(\psi_0) = (\psi_0, \varphi_K)$$

при $x \in H_0$.

Пусть T то множество $(T \subset [0,1])$, которое по теореме С.Сакса соответствует заданной системе $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$. В таком случае, в силу этой же теоремы, будем иметь

$$mes(T \cap H_0) = 0.$$

Рассмотрим теперь измеримые множества Ω_1 ...

$$\Omega_1=\Omega_{0,\varepsilon}\cap\{(E_\varepsilon\setminus H_0)\times I^N\}, \quad (N=1,2,\dots),$$

где $\Omega_{0,\varepsilon}$ множество из леммы I.I.I. Отсюда

$$mes\,\Omega_1=\int_{I^{N+1}}\chi_{\Omega_1}(x,\theta)\,dx\,d\theta=\int_I dx\int_{I^N}\chi_{\Omega_1}(x,\theta)\,d\theta\geqslant$$

$$\geqslant\int_{E_\varepsilon\setminus H_0}dx\int_{I^N}\chi_{\Omega_1}(x,\theta)\,d\theta, \quad .$$

где $\chi_{\Omega_1}(x,\theta)$ характеристическая функция множества Ω_1 на I^{N+1}.

Согласно (I.I.3I) и замечаний перед соотношением (I.I.33) для каждого $x\in E_\varepsilon\setminus H_0$, имеем

$$\int_{I^N}\chi_{\Omega_1}(x,\theta)\,d\theta\geqslant\int_{E_1(x)}1\,d\theta=mes\,E_1(x)\geqslant\alpha_\varepsilon>0;$$

значит (обозначим временно $\gamma_\varepsilon\equiv\gamma$, $\alpha_\varepsilon\equiv\alpha$)

$$mes\,\Omega_1\geqslant\int_{E_\varepsilon\setminus H_0}\alpha\,dx=\alpha\,mes(E_\varepsilon\setminus H_0)=\alpha(mes\,E_\varepsilon-mes\,H_0)=$$

$$=mes\,E_\varepsilon\,\alpha-mes\,H_0\,\alpha=\gamma-\alpha(\gamma-\eta_0)=\gamma(1-\alpha)+$$

$$+\alpha\eta_0\equiv\delta_1>0.$$

Очевидно, что проекция множества Ω_1 на оси Ox равна множеству $E_\varepsilon\setminus H_0$, которое не зависит от N.

Следовательно (см. (I.I.6) и (I.I.32)), Ω_1 удовлетворяет условиям леммы I.I.2 для данной системы $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ и множества $E=E_\varepsilon\setminus H_0$.

Возьмем число η_1 такое, что $\eta_1<\delta_1$ и $0<\eta_1<\frac{\varepsilon}{2^2}$. Для η_1 в силу вышесказанного (согласно лемме I.I.2) существуют функция $\psi_1\in L([0,1])$ и множество $H_1\subset E_\varepsilon\setminus H_0$, с $mes\, H_1=\delta_1-\eta_1$, такие, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{m}a_k(\psi_1)\cdot\varphi_k(x)\right|=\infty$$

при $x\in H_1$. Следовательно, $mes\left(T\cap\left(H_0\cup H_1\right)\right)=0$. Продолжая этот процесс, возьмем множество Ω_n, которое определяется равенством

$$\Omega_n=\Omega_{0,\varepsilon}\cap\left\{\left(E\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}H_i\right)\times I^N\right\}.$$

Очевидно, что Ω_n измеримо и

$$mes\,\Omega_n=\int_{I^{N+1}}\chi_{\Omega_n}(x,\theta)\,dx\,d\theta=\int_I dx\int_{I^N}\chi_{\Omega_n}(x,\theta)\,d\theta\geq$$

$$\geq\int_{E_\varepsilon\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}H_i}dx\int_{I^N}\chi_{\Omega_n}(x,\theta)\,d\theta\geq\alpha\, mes\left(E_\varepsilon\setminus\bigcup_{i=0}^{n-1}H_i\right)\equiv\delta_n>0.$$

Множество Ω_n удовлетворяет условиям леммы I.I.2. Возьмем η_n такое, что $\eta_n<\delta_n$ и $0<\eta_n<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Для η_n существуют функция $\psi_n\in L([0,1])$ и множество $H_n\subset$

$\subset E_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i$, $mes\, H_n = \rho_n - \eta_n$ такие, что
$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left| \sum_{k=1}^{m} a_k(\psi_n)\cdot \varphi_k(x) \right| = \infty$$
для всех x из H_n. Отсюда, $mes\left\{T \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} H_i\right)\right\} = 0$.

Резюмируя все вышесказанное, имеем:

I. Множества $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_n, \ldots$, где
$$\Omega_n = \Omega_{0,\varepsilon} \cap \left\{\left(E_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i\right) \times I^N\right\}, \tag{I.I.6I}$$

2. числа $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots$, где
$$\rho_0 = \gamma \quad \text{и} \quad \rho_n = \alpha\, mes\left(E_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} H_i\right),\ n = 1, 2, \ldots, \tag{I.I.62}$$

3. множества $H_0, H_1, \ldots, H_n, \ldots$, где $H_j \cap H_k = \emptyset$ при $j \neq k$,
$$H_i \subset E_\varepsilon \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} H_j \quad \text{и} \quad mes\, H_n = \rho_n - \eta_n, \tag{I.I.63}$$

причем $mes\left\{T \cap \left(\bigcup_{i=0}^{n} H_i\right)\right\} = 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Согласно (I.I.62) находим
$$\rho_n = \rho_{n-1} - \alpha\, mes\, H_{n-1}. \tag{I.I.64}$$

Покажем, что
$$mes\, H_0 + mes\, H_1 + \cdots + mes\, H_n + \cdots \geqslant mes\, E_\varepsilon - 2\varepsilon. \tag{I.I.65}$$

Имеем:

$$S_0 \equiv \gamma, \quad \operatorname{mes} H_0 = \gamma - \eta_0,$$

$$S_1 = \gamma - \alpha(\gamma - \eta_0) = \gamma(1-\alpha) + \alpha\eta_0, \tag{I.I.66}$$

и

$$\operatorname{mes} H_1 = \gamma(1-\alpha) + \alpha\eta_0 - \eta_1.$$

Установим, что для любого натурального числа $n = 1, 2, \ldots$

$$S_n = \gamma(1-\alpha)^n + \alpha(1-\alpha)^{n-1}\eta_0 + \cdots + \alpha(1-\alpha)\eta_{n-2} + \alpha\eta_{n-1}$$

и

$$\operatorname{mes} H_n = \gamma(1-\alpha)^n + \alpha(1-\alpha)^{n-1}\eta_0 + \cdots + \alpha(1-\alpha)\eta_{n-2} + \tag{I.I.67}$$

$$+ \alpha\eta_{n-1} - \eta_n.$$

Действительно, при $n=1$ равенство (I.I.67) следует из (I.I.66). Допустим, что (I.I.67) справедливо для $n > 1$ и докажем его для $n+1$. Из допущения, в силу (I.I.63) и (I.I.64)

$$S_{n+1} = S_n - \alpha \operatorname{mes} H_n =$$

$$= \gamma(1-\alpha)^n + \alpha(1-\alpha)^{n-1}\eta_0 + \cdots + \alpha(1-\alpha)\eta_{n-2} + \alpha\eta_{n-1} -$$

$$-\alpha\gamma(1-\alpha)^n - \alpha\alpha(1-\alpha)^{n-1}\eta_0 - \cdots - \alpha\alpha(1-\alpha)\eta_{n-2} - \alpha\alpha\eta_{n-1} +$$

$$+\alpha\eta_n = \gamma(1-\alpha)^{n+1} + \alpha(1-\alpha)^n\eta_0 + \dots + \alpha(1-\alpha)^2\eta_{n-2} +$$

$$+\alpha(1-\alpha)\eta_{n-1} + \alpha\cdot\eta_n$$

и

$$\mathrm{mes}\, H_{n+1} = S_{n+1} - \eta_{n+1}\,.$$

Значит, (I.I.67) доказана. Отсюда

$$\mathrm{mes}\, H_0 + \mathrm{mes}\, H_1 + \dots + \mathrm{mes}\, H_n =$$

$$= \gamma\left\{1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \dots + (1-\alpha)^n\right\} +$$

$$+\left\{-1 + \alpha\left(1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \dots + (1-\alpha)^{n-1}\right)\right\}\eta_0 +$$

$$+\left\{-1 + \alpha\left(1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \dots + (1-\alpha)^{n-2}\right)\right\}\eta_1 +$$

. . . .

$$+ \dots +$$

$$+\left\{-1+\alpha\right\}\eta_{n-1} +$$

$$+\left\{-1\right\}\cdot\eta_n. \qquad \text{(I.I.68)}$$

Так как (см. (I.I.3I)) $0 < \alpha \leqslant 1$, то для произвольного $m = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\alpha\left\{1 + (1-\alpha) + (1-\alpha)^2 + \dots + (1-\alpha)^m\right\} \leqslant \alpha\frac{1}{1-(1-\alpha)} = 1.$$

Следовательно, (см. (I.I.68)) при любом $n=1,2,\dots$

$$\operatorname{mes} H_0+\dots+\operatorname{mes} H_n \geqslant \gamma\left\{1+(1-\alpha)+\dots+(1-\alpha)^n\right\}-2\sum_{k=0}^{n}\eta_k. \quad (I.I.69)$$

Но $\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k<\varepsilon$, и переходя в (I.I.69) к пределу при $n\to\infty$, получим (см. (I.I.33))

$$\operatorname{mes} H_0+\dots+\operatorname{mes} H_n+\dots \geqslant \gamma\frac{1}{\alpha}-2\varepsilon=\gamma_\varepsilon\frac{1}{\alpha_\varepsilon}-2\varepsilon=$$

$$=\operatorname{mes} E_\varepsilon-2\varepsilon.$$

Отсюда (см. лемму I.I.I) следует существование такого числа l_0, что

$$\operatorname{mes} H_0+\dots+\operatorname{mes} H_{l_0}\geqslant \operatorname{mes} E_\varepsilon-3\varepsilon>1-4\varepsilon.$$

Так как $H_i\cap H_j=\varnothing$ если $i\neq j$ и $\operatorname{mes}\left(T\cap\left[\bigcup_{i=0}^{l_0}H_i\right]\right)=0$, то

. . . .

$$\operatorname{mes} T<4\varepsilon,$$

и, в силу произвольности ε, $\operatorname{mes} T=0$. Наконец, согласно теореме С.Сакса (поскольку пространство $L([0,1])$ полно, т.е. является множеством второй категории) существует функция $g\in L([0,1])$, для которой

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\left|\sum_{k=1}^{m}a_k(g)\cdot\varphi_k(x)\right|=\infty, \quad a_k(g)=(g,\varphi_k)$$

почти всюду на $[0,1]$.

Теорема I.I.I полностью доказана.

При доказательстве лемм I.I.I и I.I.2 мы пользовались модификацией схемы доказательства С.В.Бочкарева /7/.

Теорему I.I.I можно обобщить, а именно, справедлива

<u>Теорема I.I.2</u>. Пусть $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система функций, удовлетворяющая условиям

I) $|\varphi_n(x)|\leqslant M$, $M>0$, $x\in[0,1]$, $n=1,2,\dots$.

2) Отрезок $[0,1]$ можно представить в виде конечного или счетного объединения измеримых множеств X_k $(k=1,2,\dots)$

$$[0,1]=\bigcup_k X_k$$

таких, что для каждого $k=1,2,\dots$ выполняется следующее свойство:

При любом $\varepsilon>0$ найдутся множество $Y_{k,\varepsilon}\subset X_k$, с $mes\, Y_{k,\varepsilon}\geqslant mes\, X_k-\varepsilon$, и натуральное число $l_{\varepsilon,k}$ такие, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=n\cdot l_{\varepsilon,k}}^{(n+1)l_{\varepsilon,k}-1}\varphi_j^2(x)>0$$

почти всюду на $Y_{k,\varepsilon}$.

Тогда существует такая функция f из $L_1([0,1])$, что её ряд Фурье по системе $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$.

Доказательство этого утверждения, в сущности, такое же как и доказательство теоремы I.I.I. И поэтому его не приводим.

Из теоремы I.I.2, как легко заметить, следует и такое утверждение.

<u>Теорема I.I.3</u>. Пусть $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система функций, удовлетворяющая условиям

I) $|\varphi_n(x)|\leq M$, $M>0$, $x\in[0,1]$, $n=1,2,\dots$

2) Отрезок $[0,1]$ можно представить в виде конечного или счетного объединения измеримых множеств X_k $(k=1,2,\dots)$

$$[0,1]=\bigcup_k X_k$$

таких, что для каждого $k=1,2,\dots$ существует натуральное число l_k со свойством

$$\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=nl_k}^{(n+1)l_k-1}\varphi_j^2(x)>0$$

почти всюду на X_k. Тогда существует такая функция f из $L([0,1])$, что ее ряд Фурье по системе $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$.

По сравнению с теоремой I.I.I в теореме I.I.3 возможен случай

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} l_k = \infty .$$

Теорему С.В.Бочкарева и вышеприведенные теоремы можно обобщить на тот случай, когда функции $\varphi_n\ (n=1,2,\dots)$ принимают комплексные значения. Например, в этом случае обобщение теоремы Бочкарева и теоремы I.I.I имеют соответственно такой вид

Теорема I.I.4. Пусть $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система комплексно-значных функций, удовлетворяющая условию

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M,\ M>0,\ n=1,2,\dots,\ x\in[0,1].$$

Тогда существует действительная функция из $L([0,1])$ такая, что её ряд Фурье по системе $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ неограниченно расходится на некотором множестве положительной меры.

Теорема I.I.5. Пусть $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система комплексно-значных функций, удовлетворяющая условиям

I) $|\varphi_n(x)| \leqslant M,\ M>0,\ x\in[0,1],\ n=1,2,\dots$

2) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\sum_{j=nl}^{(n+1)l-1}|\varphi_j(x)|^2>0$

почти всюду на $[0,1]$ при некотором

натуральном l , которое не зависит от x . Тогда существует действительная функция из $L([0,1])$ такая, что её ряд Фурье по системе $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$.

Так же обстоит дело для теорем I.I.2 и I.I.3, при этом их доказательства немножко отличаются от доказательства теоремы I.I.I.

Из вышеупомянутых теорем можно получить разные следствия. Приведем некоторые из них.

Следствие I.I.I. Существуют функции $g_i \in L([0,2\pi])$ $(i=1,2)$ ряды Фурье которых соответственно по системам $(\cos nx)_{n\geq 0}$ и $(\sin nx)_{n\geq 0}$ неограниченно расходятся почти всюду на $[0,\pi]$.

. . . .

Легко видеть, что классическая тригонометрическая система удовлетворяет условиям теоремы I.I.I, стало быть, теорему А.Н. Колмогорова можно получить из теоремы I.I.I.

Следствие I.I.2. Существует действительная функция $g_3 \in L([0,1])$ такая, что её ряд Фурье по мультипликативной ортонормированной системе (см. /20/, стр.459-493) неограниченно расходится почти всюду на $[0,1]$.

В частности из теоремы I.I.I вытекает теорема И.Стейна.

Подобное утверждение верно и для бесконечной подсистемы мультипликативной системы.

Естественно возникает вопрос: для любой данной ограниченной полной ОНС существует ли функция из $L([0,1])$, ряд Фурье которой по этой системе расходится почти всюду?

Заметим, что А.М.Олевский (см. /8/,стр. 18) доказал существование такой ограниченной полной ортонормированной системы, Лебеговы функции $L_n(x)$ которых на множестве положительной меры удовлетворяют условию

$$L_n(x)=O_x(1).$$

Из леммы С.В.Бочкарева (см./7/,стр.441) следует, что если ортонормированная система функций удовлетворяет условиям теоремы 1.1.2, то их Лебеговы функции неограничены почти всюду. Следовательно, вышеуказанная система Олевского не удовлетворяет условиям теоремы 1.1.2. Стало быть, вышепоставленная задача не решается теоремой 1.1.2 и она, насколько нам известно, остается нерешенной.

§2. Расходящийся в смысле метрики $L([0,1])$ ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы

Справедлива следующая

<u>Теорема I.2.I</u>. Пусть $(\varphi_k)_{k\geq 1}$ ортонормированная на $[0,1]$ система функций, удовлетворяющая условию

$$|\varphi_k(x)| \leq M, \quad M>0, \; x\in[0,1], \; (k=1,2,\dots). \qquad (I.2.I)$$

Тогда существует такая функция $f\in L([0,1])$, что её ряд Фурье по системе $(\varphi_k)_{k\geq 1}$

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} b_k(f)\cdot\varphi_k(x), \qquad b_k(f)=(f,\varphi_k)$$

. . . .

неограниченно расходится в смысле метрики $L([0,1])$, т.е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(f)\cdot\varphi_k(x)\right|dx=\infty. \qquad (I.2.2)$$

<u>Доказательство</u>. Применим неравенство С.В.Бочкарева (см. (I.I.3)) для последовательности $a_k=\varphi_{k+N\cdot p-1}(x)$ при фиксированном $x\in[0,1]$ и для системы $\left(\varphi_{k+N\cdot p-1}(t)\right)_{k\geq 1}$, где N и p некоторые натуральные числа $N,p=1,2,\dots$.

Тогда при $n = N$ получим

$$\sum_{m=1}^{N} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{m} \varphi_{k+Np-1}(x) \cdot \varphi_{k+Np-1}(\theta) \right| d\theta +$$

$$+ N \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \varphi_{k+Np-1}(x) \cdot \varphi_{k+Np-1}(\theta) \right| d\theta \geqslant C_9 \log N \sum_{k=1}^{N} \varphi^2_{k+Np-1}(x).$$

Отсюда

$$\sum_{m=1}^{N} \int_0^1 \left| \sum_{k=Np}^{m+Np-1} \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(\theta) \right| d\theta + N \int_0^1 \left| \sum_{k=Np}^{N(p+1)-1} \varphi_k(x) \varphi_k(\theta) \right| d\theta \geqslant$$

$$\geqslant C_9 \log N \sum_{k=Np}^{N(p+1)-1} \varphi_k^2(x) \tag{I.2.3}$$

для всех $x \in [0,1]$, $N, p = 1, 2, \ldots$. Интегрируя неравенство (I.2.3) по x на $[0,1]$ и используя нормированность системы $(\varphi_k)_{k \geqslant 1}$, заключаем

$$\sum_{m=1}^{N} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k=Np}^{m+Np-1} \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(\theta) \right| dx\, d\theta +$$

$$+ N \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k=Np}^{N(p+1)-1} \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(\theta) \right| dx\, d\theta \geqslant C_9 N \log N. \tag{I.2.4}$$

Обозначим через $m_p^{(N)}$ некоторое натуральное число такое, что $N p \leqslant m_p^{(N)} < N(p+1)$ и

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{k=Np}^{m_p^{(N)}} \varphi_k(x)\varphi_k(\theta)\right| d\theta dx = \max_{Np\leqslant m<N(p+1)} \int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{k=Np}^{m} \varphi_k(x)\varphi_k(\theta)\right| dx d\theta. \qquad (I.2.5)$$

Тогда (см. (I.2.4), (I.2.5)) имеем

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{k=Np}^{m_p^{(N)}} \varphi_k(x)\varphi_k(\theta)\right| dx d\theta \geqslant C_{10}\log N \qquad (I.2.6)$$

для всех $N, p = 1, 2, \ldots$.

Обозначим через G множество всех точек $\theta \in [0,1)$, для которых

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_0^h \varphi_k(\theta+u)du = \varphi_k(\theta) \qquad (I.2.7)$$

для любого $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно $\operatorname{mes} G = 1$.

Пусть $(h_n)_{n\geqslant 1}, (\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ убывающие последовательности положительных чисел, $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < +\infty$, $(N_n)_{n\geqslant 1}$ последовательность номеров, $(\theta^{(n)})_{n\geqslant 1}$ последовательность чисел, $0 \leqslant \theta^{(n)} < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Они будут определены ниже.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \delta_n(\theta^{(n)}, x), \qquad (I.2.8)$$

где

$$\delta_n(\theta^{(n)},x)=\begin{cases} h_n^{-1}, \text{ для } x\in[\theta^{(n)},\theta^{(n)}+h_n], \\ 0, \text{ для } x\in[0,1]\setminus[\theta^{(n)},\theta^{(n)}+h_n]. \end{cases} \tag{I.2.9}$$

Очевидно, что $f\in L_1([0,1])$, ибо (см.(I.2.8),(I.2.9))

$$\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\int_0^1\delta_n(\theta^{(n)},x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<+\infty.$$

Введем обозначения:

$$\alpha_n(x)=\sum_{\ell=1}^{n-1}\varepsilon_\ell\,\delta_\ell(\theta^{(\ell)},x), \tag{I.2.10}$$

$$\beta_n(x)=\varepsilon_n\,\delta_n(\theta^{(n)},x), \tag{I.2.11}$$

. . . .

$$\gamma_n(x)=\sum_{\ell=n+1}^{\infty}\varepsilon_\ell\,\delta_\ell(\theta^{(\ell)},x). \tag{I.2.12}$$

Определим последовательности чисел $(h_n)_{n\geq1}$, $(\varepsilon_n)_{n\geq1}$, $(\theta^{(n)})_{n\geq1}$ и номеров $(N_n)_{n\geq1}$, $(R_n)_{n\geq1}$ следующим образом. Возьмем $\varepsilon_1=1$, $N_1=1$, $R_1=1$; $\theta^{(1)}$ такую, что $\theta^{(1)}\in G$ и $h_1:\theta^{(1)}+h_1\leq1$. Допустим, что $\theta^{(j)}$, h_j, ε_j, N_j, и R_j уже определены для всех $1\leq j\leq n-1$.

Берем ε_n такое, что

$$N_{n-1}\varepsilon_n \leq 1\,,\quad \varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}\,. \qquad (I.2.I3)$$

Потом найдем номер N_n, для которого

$$\varepsilon_n \log N_n \geq n\,. \qquad (I.2.I4)$$

Поскольку (см. (I.2.I0))

$$\lim_{k\to\infty} b_k(\alpha_n) \equiv \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \alpha_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0\,, \qquad (I.2.I5)$$

то существует такой номер R_n, что

$$N_n \max_{k \geq N_n R_n} |b_k(\alpha_n)| \leq 1\,. \qquad (I.2.I6)$$

В силу (I.2.6) для $p=R_n$, $N=N_n$ имеем

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{k=N_n R_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \varphi_k(x)\,\varphi_k(\theta)\right| dx\,d\theta \geq C_{10}\log N_n\,, \qquad (I.2.I7)$$

где $N_n R_n \leq m_{R_n}^{(N_n)} < N_n(R_n+1)$.

Рассмотрим выражение

$$\mathcal{F}_n(\theta) = \int_0^1 \left|\sum_{k=N_n R_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \varphi_k(x)\,\varphi_k(\theta)\right| dx\,.$$

Тогда (см.(I.2.I7))

$$\int_0^1 \mathcal{F}_n(\theta)\,d\theta \geq C_{10}\log N_n. \qquad (\mathrm{I}.2.18)$$

Обозначим через $\mathcal{A}_n$ множество тех θ из $[0,1]$, для которых $\mathcal{F}_n(\theta) \geq C_{10}\log N_n$. Ясно что (см.(I.2.18)) $mes\,\mathcal{A}_n > 0$, и поэтому (см.(I.2.7)) $\mathcal{A}_n \cap G \neq \emptyset$. Возьмем некоторое $\theta^{(n)} \in \mathcal{A}_n \cap G$. Отсюда

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_n R_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \varphi_k(x)\,\varphi_k(\theta^{(n)}) \right| dx \geq C_{10}\log N_n \qquad (\mathrm{I}.2.19)$$

Согласно (I.2.7) найдем такое h_n, для которого выполняются неравенства $\theta^{(n)} + h_n \leq 1$ и

$$N_n \left| \frac{1}{h_n}\int_0^{h_n} \varphi_k(\theta^{(n)}+u)\,du - \varphi_k(\theta^{(n)}) \right| \leq 1 \qquad (\mathrm{I}.2.20)$$

при всех $N_n R_n \leq k < N_n(R_n+1)$.

Следовательно, последовательности $(h_n)_{n\geq1}, (\varepsilon_n)_{n\geq1}, (\theta^{(n)})_{n\geq1}$ $([illegible])_{n\geq1}$ и $(R_n)_{n\geq1}$ определены.

Установим, что функция f из (I.2.8) удовлетворяет условиям теоремы I.2.I.

Очевидно, что (см.(I.2.8), (I.2.10)-(I.2.12))

$$\sum_{k=N_n R_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(f)\cdot\varphi_k(x) = \sum_{k=N_n R_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(\alpha_n)\cdot\varphi_k(x) + \sum_{k=N_n R_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(\beta_n)\cdot\varphi_k(x) +$$

$$+\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(\lambda_n)\varphi_k(x). \tag{I.2.2I}$$

В силу (I.2.I) и (I.2.I6)

$$\left|\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(\alpha_n)\cdot\varphi_k(x)\right|\leqslant M \tag{I.2.22}$$

Согласно (I.2.I), (I.2.I2) и (I.2.I3), имеем

$$\left|\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(\lambda_n)\cdot\varphi_k(x)\right|\leqslant M^2\|\lambda_n\|_1 N_n\leqslant 2M^2\varepsilon_{n+1}N_n\leqslant 2M^2, \tag{I.2.23}$$

при всех $x\in[0,1]$.

В силу выбора h_n (см.(I.2.II),(I.2.20))

$$\left|\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(\beta_n)\cdot\varphi_k(x)\right|\geqslant\left|\varepsilon_n\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\varphi_k(x)\cdot\varphi_k(\theta^{(n)})\right|-$$

$$-\left|\varepsilon_n\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\varphi_k(x)\cdot\left[\frac{1}{h_n}\int_0^{h_n}\varphi_k(\theta^{(n)}+u)\,du-\varphi_k(\theta^{(n)})\right]\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|\varepsilon_n\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\varphi_k(x)\varphi_k(\theta^{(n)})\right|-M \tag{I.2.24}$$

при всех $x \in [0,1]$.

Объединяя (I.2.2I)-(I.2.24), получаем

$$\left|\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(f)\cdot\varphi_k(x)\right| \geqslant \left|\varepsilon_n \sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \varphi_k(x)\cdot\varphi_k(\theta^{(n)})\right| - (2M+2M^2) \qquad (I.2.25)$$

для всех x из $[0,1]$.

Интегрирование неравенства (I.2.25) по x на $[0,1]$ дает (см.(I.2.I4),(I.2.I9))

$$\int_0^1\left|\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} b_k(f)\varphi_k(x)\right|dx \geqslant \varepsilon_n\int_0^1\left|\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \varphi_k(x)\cdot\varphi_k(\theta^{(n)})\right|dx -$$

$$-(2M+2M^2) \geqslant C_{10}\varepsilon_n \log N_n - (2M+2M^2) \geqslant C_{10} n - (2M+2M^2)$$

для всех $n=1,2,\dots$; значит

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^1\left|\sum_{k=N_nR_n}^{m_{N_n}^{(N_n)}} b_k(f)\cdot\varphi_k(x)\right|dx = \infty .$$

Отсюда следует (I.2.2).

Теорема I.2.I доказана.

Теорему I.2.I можно обобщить. А именно, справедлива

<u>Теорема I.2.2</u>. Пусть $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ ограниченная ОНС комплекснозначных функций на $[0,1]$. Тогда существует такая действительная функция из $L([0,1])$, что её ряд Фурье по системе $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ неограни-

ченно расходится в смысле метрики $L([0,1])$.

Теоремы I.2.I и I.2.2 остаются в силе, если в них условие равномерной ограниченности системы заменить условием: $|\varphi_n(x)| \leqslant M_n$, где $x \in [0,1]$ и $M_n = \bar{o}(\sqrt{\ln n})$ при $n \to \infty$ (см. и /8/, стр. 34).

ГЛАВА II

РАСХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

§I. Вспомогательные леммы

Докажем несколько утверждений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 2.I.I. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\chi_i(x)\chi_k(u)$ двойной ряд по двойной системе Хаара на $[0,1]^2$ такой, что

$$\left|\sigma_{n,m}(x,u)\right| = O(q_n q_m), \qquad (2.I.I)$$

где

$$\sigma_{n,m}(x,u) = \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n}\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} a_{ik}\chi_i(x)\chi_k(u), \quad m,n=1,2,\dots$$

$$\sigma_{n,0}(x,u) = \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_{i1}\chi_i(x)\chi_1(u) = \sum_{i=2^{n-1}+1}^{2^n} a_{i1}\chi_i(x), \quad n=1,2,\dots \qquad (2.I.2)$$

$$\sigma_{0,m}(x,u) = \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} a_{1k}\chi_k(u), \quad m=1,2,\dots, \quad \sigma_{00}(x,u) = a_{11},$$

а последовательность $(q_n)_{n\geq 0}$, $q_0=0$, $0<q_1<1$ для некоторого $0<\lambda\leq q_1$ и для всех $m,n=1,2,\dots$ удовлетворяет условию

$$\lambda q_{m+n} \leqslant q_{m+n+1} \leqslant q_m q_{n+1}. \qquad (2.I.3)$$

Тогда имеет место неравенство

$$\int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n} \delta_{n,0}^2(x,u)\,dx\,du \leqslant B_1 \int_0^1\int_0^1 \left|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \delta_{nm}(x,u)\right| dx\,du, \qquad (2.I.4)$$

где B_1 некоторая положительная постоянная.

<u>Доказательство</u>. Так как $0<q_1<1$, то $q_n \downarrow 0$ когда

.3). В силу условия (2.I.I) для некоторой констан

$B_2>0$ имеет место неравенство

$$\left|\delta_{n,0}(x,u)\right| \leqslant B_2 q_n, \quad (x,u)\in[0,1]^2, \quad n=0,1,2,\dots \qquad (2.I.5)$$

. . . .

Определим множества E_{mn} следующим способом

$$E_{m,n} = \left\{(x,u):\ B_2 q_{m+1} < \left|\delta_{n,0}(x,u)\right| \leqslant B_2 q_m\right\}. \qquad (2.I.6)$$

Поскольку (см. (2.I.5)) $E_{mn}=\varnothing$ когда $n>m$ и $[0,1]^2 = \bigcup_{m=0}^{\infty} E_{mn} + \{(x,u):\ \delta_{n,0}(x,u)=0\}$, то

$$\int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n} \delta_{n,0}^2(x,u)\,dx\,du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n} \sum_{m=n}^{\infty} \int_{E_{mn}} \delta_{n,0}^2(x,u)\,dx\,du =$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q_n}\int\limits_{E_{m+n,n}}\delta_{n,0}^{2}(x,u)\,dx\,du. \tag{2.I.7}$$

Докажем, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q_n}\int\limits_{E_{m+n,n}}\delta_{n,0}^{2}(x,u)\,dx\,du\leqslant\frac{B_2\,q_m}{\lambda(1-q_1)}\int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1\Big|\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\delta_{pq}(x,u)\Big|\,dx\,du. \tag{2.I.8}$$

Введем множества

$$H_{m+n,n}=E_{m+n,n}-\bigcup_{k=0}^{n-1}E_{m+k,k},\quad H_{m,0}=E_{m,0}. \tag{2.I.9}$$

Ясно, что $H_{m+n,n}\cap E_{m+k,k}=\varnothing$, если $k<n$ и $E_{m+k,k}=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(H_{m+n,n}\cap E_{m+k,k})$.

Имеем (см.(2.I.3),(2.I.6),(2.I.9))

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q_n}\int\limits_{E_{m+n,n}}\delta_{n,0}^{2}(x,u)\,dx\,du=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{q_k}\int\limits_{E_{m+k,k}}\delta_{k,0}^{2}(x,u)\,dx\,du=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q_k}\int\limits_{E_{m+k,k}\cap H_{m+n,n}}\delta_{k,0}^{2}(x,u)\,dx\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{q_k}\int\limits_{H_{m+n,n}\cap E_{m+k,k}}\delta_{k,0}^{2}(x,u)\,dx\,du\leqslant$$

$$\leqslant B_2^2 q_m \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{mes} H_{m+n,n} \sum_{k=n}^{\infty} q_{m+k} \leqslant \frac{B_2^2 q_m}{\lambda(1-q_1)} \sum_{n=0}^{\infty} q_{m+n+1} \cdot \operatorname{mes} H_{m+n,n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_2 q_m}{\lambda(1-q_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \iint\limits_{H_{m+n,n}} |\delta_{n,0}(x,u)|\,dx\,du. \qquad (2.I.10)$$

Заметим, что множества E_{mn} состоят из целого числа отрезков, являющихся носителями функций Хаара из точки $(n,0)$ (см. (2.I.2),(2.I.6)). Следовательно, (см.(2.I.9)) множества H_{mn} обладают тем же свойством.

Поскольку

$$a_{ik} = \int_0^1\!\!\int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \delta_{p,q}(x,u) \right) \chi_i(x)\, \chi_k(u)\,dx\,du,$$

то для любых $i,k = 1,2,\ldots$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 |a_{ik}\chi_i(x)\chi_k(u)|\,dx\,du \leqslant \iint\limits_{\Delta_{ik}} \left| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \delta_{p,q}(x,u) \right| dx\,du, \qquad (2.I.II)$$

где Δ_{ik} носитель функции $\chi_i(x)\,\chi_k(u)$.

Из (2.I.II) и замечания, сделанного выше, следует

$$\iint |\delta_{n,0}(x,u)|\,dx\,du \leqslant \iint \left| \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{ik}(x,u) \right| dx\,du$$

(2.I.I2)

Так как для фиксированного m множества $H_{m+n,n}, n=1,2,$ попарно не пересекаются (см.(2.I.9)), то из (2.I.10) и (2.I.12) получаем (2.I.8).

Из неравенства (2.I.8) и (2.I.7) находим (см.(2.I.3))

$$\int_0^1\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_n} \delta_{n,0}^2(x,u)\,dx\,du \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_2 q_m}{\lambda(1-q_1)} \int_0^1\int_0^1 \left| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \delta_{p,q}(x,u) \right| dx\,du \leq$$

$$\leq \frac{B_2}{\lambda(1-q_1)^2} \int_0^1\int_0^1 \left| \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \delta_{p,q}(x,u) \right| dx\,du.$$

Лемма 2.I.I (см.2.I.4) доказана.

Докажем теперь, что имеет место

<u>Лемма 2.I.2</u>. Пусть $(a_{ik})_{i,k\geq 1}$ - двойная последовательность чисел, такая, что

$$|a_{ik}| \leq B_4, \quad i,k=1,2,\dots .$$

Тогда для любого $n=1,2,\dots$ имеет место неравенство

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \right| + n \sum_{p=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right| +$$

$$+ n \sum_{q=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \right| + n^2 \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right| \geq$$

$$\geqslant B_3\, 2^{2(N+1)} \sum_{\ell=0}^{N} \sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \left[\sum_{p_1=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} a_{p_1 q_1} \left(\int\limits_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}} (1-y)\,dy \right) \varphi_\mu\left(\frac{2q_1-1}{2^{N+2}}\right) \right]^2, \quad (2.1.13)$$

где число N определяется из условия

$$2^{N-1} \leqslant n < 2^N, \quad N=1,2,\dots, \quad (2.1.14)$$

$(\varphi_k)_{k\geqslant 0}$ система Шаудера, а B_3 некоторая положительная постоянная.

<u>Доказательство</u>. Введем обозначения:

$$F(y,z)=\begin{cases} a_{ik}, \text{ при } \frac{i-1}{2^{N+1}}<y\leqslant\frac{i}{2^{N+1}} \text{ и } \frac{k-1}{2^{N+1}}<z\leqslant\frac{k}{2^{N+1}}, \\ \qquad i,k=1,2,\dots,n \\ 0, \text{ при } y\in\left(\frac{n}{2^{N+1}},1\right] \text{ или } z\in\left(\frac{n}{2^{N+1}},1\right], \end{cases} \quad (2.1.15)$$

$$\Lambda_p(y)=\begin{cases} 1, \text{ при } y\in\left[0,\frac{p}{2^{N+1}}\right], \\ 0, \text{ при } y\in\left(\frac{p}{2^{N+1}},1\right]. \quad p=1,2,\dots,2^{N+1} \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Очевидно, что (см. (2.1.15), (2.1.16))

$$\frac{1}{2^{2(N+1)}} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \right| =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \left| \int_0^1 \int_0^1 F(y,z) \Lambda_p(y) \Lambda_q(z) \, dy \, dz \right| .$$

Известно, что (см. / 7 /, стр.439) функция $\Lambda_p(y)$ представляется в виде

$$\Lambda_p(y) = 1 - y - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \chi_k(x) \varphi_k(y) + h_p(x,y) , \qquad (2.I.I7)$$

где x любая точка интервала $\left(\frac{p-1}{2^{N+1}}, \frac{p}{2^{N+1}} \right)$, а функция $h_p(x,y) = 0$, если $y \notin \left[\frac{p-1}{2^{N+1}}, \frac{p}{2^{N+1}} \right]$ и $| h_p(x,y) | \leq 1$.

Следовательно, при $x \in \left(\frac{p-1}{2^{N+1}}, \frac{p}{2^{N+1}} \right)$ и $u \in \left(\frac{q-1}{2^{N+1}}, \frac{q}{2^{N+1}} \right)$ для $y \in [0,1]$ и $z \in [0,1]$ имеем

$$\left[\Lambda_p(y) - h_p(x,y) \right] \left[\Lambda_q(z) - h_q(u,z) \right] =$$

$$= \left[1 - y - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \chi_k(x) \varphi_k(y) \right] \left[1 - z - \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2^\ell}} \sum_{s=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} \chi_s(u) \varphi_s(z) \right],$$

т.е.

$$\Lambda_p(y) \Lambda_q(z) = (1-y)(1-z) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2^\ell}} \sum_{s=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} (1-y) \chi_s(u) \varphi_s(z) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}(1-z)\chi_k(x)\varphi_k(y)+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{m+\ell}}}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{s=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\chi_k(x)\chi_s(u)\varphi_k(y)\varphi_s(z)-$$

$$-\lambda_p(x,y)\lambda_q(u,z)+\Lambda_p(y)\lambda_q(u,z)+\Lambda_q(z)\lambda_p(x,y). \tag{2.I.18}$$

Введем функции, определенные на $[0,1]^2$:

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\lambda_p(x,y) & \text{при } \frac{p-1}{2^{N+1}}<x\leqslant\frac{p}{2^{N+1}} \\ & \text{и } 0\leqslant y\leqslant 1, \\ & p=1,2,\dots,2^{N+1},\end{cases} \tag{2.I.19}$$

$$F(x,y)=\begin{cases}\Lambda_p(y) & \text{при } \frac{p-1}{2^{N+1}}<x\leqslant\frac{p}{2^{N+1}}, \\ & 0\leqslant y\leqslant 1, \\ & p=1,2,\dots,2^{N+1}.\end{cases} \tag{2.I.20}$$

Отсюда, для любых $p,q=1,2,\dots,2^{N+1}$, когда $x\in\left(\frac{p-1}{2^{N+1}},\frac{p}{2^{N+1}}\right)$ и $u\in\left(\frac{q-1}{2^{N+1}},\frac{q}{2^{N+1}}\right)$, имеем (см.(2.I.18))

$$\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\Lambda_p(y)\Lambda_q(z)\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)(1-y)(1-z)\,dy\,dz-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{l}}}\sum_{s=2^{l}+1}^{2^{l+1}}\left(\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)(1-y)\varphi_s(z)\,dy\,dz\right)\chi_s(u)-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{m}}}\sum_{k=2^{m}+1}^{2^{m+1}}\left(\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)(1-z)\varphi_k(y)\,dy\,dz\right)\chi_k(x)+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{m+l}}}\sum_{k=2^{m}+1}^{2^{m+1}}\sum_{s=2^{l}+1}^{2^{l+1}}\left(\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)\varphi_k(y)\varphi_s(z)\,dy\,dz\right)\chi_k(x)\chi_s(u)-$$

$$-\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)\,\Phi(x,y)\,\Phi(u,z)\,dy\,dz+\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)\,\mathcal{F}(x,y)\,\Psi(u,z)\,dy\,dz+$$

$$+\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)\cdot\mathcal{F}(u,z)\cdot\Phi(x,y)\,dy\,dz=$$

$$=C_0-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{l}}}\sum_{s=2^{l}+1}^{2^{l+1}}A_s\,\chi_s(u)-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{m}}}\sum_{k=2^{m}+1}^{2^{m+1}}B_k\,\chi_k(x)+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{m+l}}}\sum_{k=2^{m}+1}^{2^{m+1}}\sum_{s=2^{l}+1}^{2^{l+1}}C_{ks}\,\chi_k(x)\,\chi_s(u)+$$

$$+A(x,u)+B(x,u)-C(x,u)\equiv G(x,u),$$

(2.I.2I)

где

$$C_0=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)(1-y)(1-z)\,dy\,dz,$$

$$A_s=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)(1-y)\varphi_s(z)\,dy\,dz,$$

$$B_k=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)(1-z)\varphi_k(y)\,dy\,dz,$$

$$C_{ks}=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\varphi_k(y)\varphi_s(z)\,dy\,dz,$$

$$\mathcal{A}(x,u)=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\mathcal{F}(x,y)\,\Phi(u,z)\,dy\,dz,$$

$$\mathcal{B}(x,u)=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\mathcal{F}(u,z)\,\Phi(x,y)\,dy\,dz,$$

$$C(x,u)=\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\,\Phi(x,y)\,\Phi(u,z)\,dy\,dz.$$

(2.I.22)

Справедливы оценки (см.(2.I.15),(2.I.22))

$$|C_0|\leqslant B_4,\quad |A_s|\leqslant\frac{B_4}{2^{\ell}},\ \text{если}\ 2^{\ell}<s\leqslant 2^{\ell+1},\ \ell=0,1,\dots,N$$

$$|B_k| \leqslant \frac{B_4}{2^m}, \text{ если } 2^m < k \leqslant 2^{m+1}, \; m=0,1,\dots,N, \qquad (2.1.23)$$

$$|C_{ks}| \leqslant \frac{B_4}{2^{m+\ell}}, \text{ при } 2^m < k \leqslant 2^{m+1} \text{ и } 2^\ell < s \leqslant 2^{\ell+1}, \qquad (2.1.24)$$

$\ell, m = 0,1,\dots,N.$

Далее (см. (2.1.15), (2.1.17), (2.1.19) и (2.1.22))

$$\int_0^1\int_0^1 |C(x,u)|\,dx\,du =$$

$$= \sum_{p=1}^{2^{N+1}} \sum_{q=1}^{2^{N+1}} \int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}} \int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} \left| \int_0^1\int_0^1 F(y,z)\,\Phi(x,y)\,\Phi(u,z)\,dy\,dz \right| dx\,du =$$

$$= \sum_{p=1}^{2^{N+1}} \sum_{q=1}^{2^{N+1}} \int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}} \int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} \left| \int_0^1\int_0^1 F(y,z)\,\chi_p(x,y)\cdot\chi_q(u,z)\,dy\,dz \right| dx\,du =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}} \int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} \left| \int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}} \int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} a_{pq}\cdot \chi_p(x,y)\,\chi_q(u,z)\,dy\,dz \right| dx\,du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{4(N+1)}} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} |a_{pq}| \leqslant \frac{4}{2^{4(N+1)}} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \right|. \qquad (2.1.25)$$

Затем, в силу (2.I.I5), (2.I.I7), (2.I.I9),(2.I.20),(2.I.22) находим

$$\int_0^1\int_0^1 \left|A(x,u)\right| dx\,du =$$

$$=\sum_{p=1}^{2^{N+1}}\sum_{q=1}^{2^{N+1}}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\Lambda_p(y)\, h_q(u,z)\,dy\,dz\right| dx\,du=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\Lambda_p(y)\, h_q(u,z)\,dy\,dz\right| dx\,du+$$

$$+\sum_{p=n+1}^{2^{N+1}}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\Lambda_p(y)\, h_q(u,z)\,dy\,dz\right| dx\,du=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\int_0^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} F(y,z)\cdot h_q(u,z)\,dy\,dz\right| dx\,du+$$

$$+\sum_{p=n+1}^{2^{N+1}}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\int_0^{\frac{n}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} F(y,z)\cdot h_q(u,z)\,dy\,dz\right| dx\,du=$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\sum_{i=1}^{p}\int_{\frac{i-1}{2^{N+1}}}^{\frac{i}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} a_{iq}\cdot r_q(u,z)\,dy\,dz\right| dx\,du +$$

$$+ \sum_{p=n+1}^{2^{N+1}}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{2^{N+1}}}^{\frac{i}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} a_{iq}\cdot r_q(u,z)\,dy\,dz\right| dx\,du =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\frac{1}{2^{(N+1)}}\left(\left|\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} r_q(u,z)\,dz\right|\left|\sum_{i=1}^{p} a_{iq}\right|\right) dx\,du +$$

$$+ \sum_{p=n+1}^{2^{N+1}}\sum_{q=1}^{n}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\frac{1}{2^{(N+1)}}\left(\left|\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}} r_q(u,z)\,dz\right|\left|\sum_{i=1}^{n} a_{iq}\right|\right) dx\,du \leq$$

$$\leq \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{2^{4(N+1)}}\left|\sum_{i=1}^{p} a_{iq}\right| + \frac{1}{2^{4(N+1)}}\cdot 2^{(N+1)}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} a_{iq}\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2^{4(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\right| + \frac{2}{2^{3(N+1)}}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\right|.$$

Используя (2.I.I5),(2.I.I7),(2.I.I9),(2.I.20) и (2.I.22) аналогично (2.I.26) получаем

$$\int_0^1\int_0^1 |B(x,u)|\,dx\,du \leqslant \frac{2}{2^{4(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\right| +$$

$$+\frac{2}{2^{3(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right|. \qquad (2.I.27)$$

Из (2.I.2I) имеем (см.(2.I.I5),(2.I.I6))

$$\int_0^1\int_0^1 |G(x,u)|\,dx\,du =$$

$$=\sum_{p=1}^{2^{N+1}}\sum_{q=1}^{2^{N+1}}\int_{\frac{p-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q}{2^{N+1}}}\left|\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\cdot\Lambda_p(y)\cdot\Lambda_q(z)\,dy\,dz\right| dx\,du =$$

. . . .

$$=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{2^{2(N+1)}}\left|\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\cdot\Lambda_p(y)\cdot\Lambda_q(z)\,dy\,dz\right| +$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=n+1}^{2^{N+1}}\frac{1}{2^{2(N+1)}}\cdot\left|\int_0^1\int_0^1 F(y,z)\cdot\Lambda_p(y)\cdot dy\,dz\right| +$$

$$+\sum_{p=n+1}^{2^{N+1}}\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{2^{2(N+1)}}\left|\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)\Lambda_q(z)\,dy\,dz\right|+$$

$$+\sum_{p=n+1}^{2^{N+1}}\sum_{q=n+1}^{2^{N+1}}\frac{1}{2^{2(N+1)}}\left|\int_0^1\!\!\int_0^1 F(y,z)\,dy\,dz\right|\leq$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{4(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}\right|+\frac{1}{2^{3(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\right|+$$

$$+\frac{1}{2^{3(N+1)}}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}\right|+\frac{1}{2^{2(N+1)}}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\right|. \qquad (2.I.28)$$

С другой стороны, (см.(2.I.2I),(2.I.23)-(2.I.27)), в силу леммы 2.I.I, имеем

$$\int_0^1\!\!\int_0^1\left|G(x,u)\right|dx\,du\geqslant\int_0^1\!\!\int_0^1\left|C_0-\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^l}}\sum_{s=2^l+1}^{2^{l+1}}A_s\chi_s(u)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}B_k\chi_k(x)+$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{N}\sum_{l=0}^{N}\frac{1}{\sqrt{2^{m+l}}}\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}}\sum_{s=2^l+1}^{2^{l+1}}C_{ks}\chi_k(x)\chi_s(u)\right|dx\,du-$$

$$-\int_0^1\int_0^1 |A(x,u)|\,dx\,du-\int_0^1\int_0^1 |B(x,u)|\,dx\,du-\int_0^1\int_0^1 |C(x,u)|\,dx\,du \geqslant$$

$$\geqslant B_5\int_0^1\int_0^1 \sum_{\ell=0}^{N}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}} A_\mu^2 \chi_\mu^2(u)\,dx\,du-\frac{2}{2^{4(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\right|-$$

$$-\frac{2}{2^{3(N+1)}}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\right|-\frac{2}{2^{4(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\right|-$$

$$-\frac{2}{2^{3(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\right|-\frac{4}{2^{4(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} a_{ik}\right|. \quad (2.I.29)$$

Если заметим, что (см.(2.I.I5),(2.I.22))

$$A_\mu=\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n}\int_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}}\int_{\frac{q_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q_1}{2^{N+1}}} a_{p_1q_1}(1-y)\cdot\varphi_\mu(z)\,dy\,dz=$$

$$=\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n} a_{p_1q_1}\left(\int_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}}(1-y)\,dy\right)\left(\int_{\frac{q_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{q_1}{2^{N+1}}}\varphi_\mu(z)\,dz\right)=$$

$$=\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n} a_{p_1q_1}\left(\int\limits_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}}(1-y)\,dy\right)\cdot\varphi_\mu\left(\frac{2q_1-1}{2^{N+2}}\right)\cdot\frac{1}{2^{N+1}},$$

то из (2.I.28) и (2.I.29) будет следовать

$$\frac{9}{2^{4(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}\right|+\frac{3}{2^{3(N+1)}}\sum_{p=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\right|+$$

$$+\frac{3}{2^{3(N+1)}}\sum_{q=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}\right|+\frac{1}{2^{2(N+1)}}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\right|\geqslant$$

$$\geqslant B_5\frac{1}{2^{2(N+1)}}\sum_{l=0}^{N}\sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}}\left[\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n}a_{p_1q_1}\left(\int\limits_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}}(1-y)\,dy\right)\varphi_\mu\left(\frac{2q_1-1}{2^{N+2}}\right)\right]^2.$$

. . . .

Отсюда (см.(2.I.I4)) получаем неравенство (2.I.I3).

Лемма 2.I.2 доказана.

Теперь мы можем установить, что справедлива

<u>Лемма 2.I.3</u>. Пусть $(a_{ik})_{i,k\geqslant1}$ двойная последовательность чисел, $|a_{ik}|\leqslant B_4^*$, $i,k=1,2,\dots$ и $(f_{ik})_{i,k\geqslant1}$ двойная ОНС на $[0,1]^2$, удовлетворяющая условию

$$|f_{i,k}(x,y)|\leqslant M,\quad M>0,\quad (x,y)\in[0,1]^2,\quad (i,k=1,2,\dots).$$

Тогда для любого $n=1,2,\dots$ имеет мест неравенство

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+n\sum_{p=1}^{n}\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+$$

$$+n\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+n^2\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy\geqslant$$

$$\geqslant B_{10}\log n\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n}a_{p_1q_1}^2, \qquad (2.I.30)$$

где B_{10} некоторая положительная постоянная.

<u>Доказательство</u>. Найдем для данного n число N, такое, что $2^{N-1}\leqslant n<2^N$.

Если для фиксированной точки $(x,y)\in[0,1]^2$ к ограниченной последовательности $(a_{ik}\cdot f_{ik}(x,y))_{i,k\geqslant 1}$ применим лемму 2.I.2 и используем ортонормированность системы $(f_{ik})_{i,k\geqslant 1}$, то получим

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+n\sum_{p=1}^{n}\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+$$

$$+n\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+n^2\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy\geqslant$$

$$\geqslant B_6 2^{2(N+1)} \sum_{l=0}^{N} \sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}} \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[\sum_{p_1=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} a_{p_1 q_1} f_{p_1 q_1}(x,y) \int_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}} (1-t)\,dt\, \varphi_\mu\left(\frac{2q_1-1}{2^{N+2}}\right)\right]^2 dxdy =$$

$$= B_6 2^{2(N+1)} \sum_{l=0}^{N} \sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}} \sum_{p_1=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} a_{p_1 q_1}^2 \left(\int_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}} (1-t)\,dt \right)^2 \varphi_\mu^2\left(\frac{2q_1-1}{2^{N+2}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} B_6 \sum_{l=0}^{N} \sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}} \sum_{p_1=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} a_{p_1 q_1}^2 \varphi_\mu^2\left(\frac{2q_1-1}{2^{N+2}}\right), \qquad (2.I.[illegible])$$

поскольку, при $1 \leq p_1 \leqslant n < 2^N$

$$\int_{\frac{p_1-1}{2^{N+1}}}^{\frac{p_1}{2^{N+1}}} (1-t)\,dt > \frac{1}{2} \frac{1}{2^{N+1}}.$$

Применим теперь неравенство (2.I.31) к последовательнос[illegible] $\left(a_{ik}^{(s)} f_{ik}^{(s)}\right)_{i,k\geq 1}$, где $a_{ik}^{(s)} \cdot f_{ik}^{(s)}(x,y) = a_{i-s,k-s} f_{i-s,k-s}(x,y)$ при $s < i \leq$ [illegible] и $s < k \leqslant n+s$, и $a_{ik}^{(s)} \cdot f_{ik}^{(s)}(x,y) = 0$ при $1 \leq i \leq$ [illegible] или $1 \leq k \leq s$; $s = 1, 2, \ldots, n$, и заметим, что

$$\sum_{p=1}^{n+s} \sum_{q=1}^{n+s} \int_0^1\!\!\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ik}^{(s)} f_{ik}^{(s)}(x,y) \right| dxdy =$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy.$$

$$\sum_{p=1}^{n+s}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n+s}a_{ik}^{(s)}f_{ik}^{(s)}(x,y)\right|dxdy=$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy.$$

$$\sum_{q=1}^{n+s}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n+s}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}^{(s)}f_{ik}^{(s)}(x,y)\right|dxdy=$$

$$=\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy.$$

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n+s}\sum_{k=1}^{n+s}a_{ik}^{(s)}f_{ik}^{(s)}(x,y)\right|dxdy=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy. \qquad (2.I.32)$$

Тогда, обозначая через $N(s)$ натуральное число, такое, что $2^{N(S)-1} \leq n+S < 2^{N(S)}$, имеем

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+$$

$$+(n+S)\sum_{p=1}^{n}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+$$

$$+(n+S)\sum_{q=1}^{n}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy+$$

$$+(n+S)^2\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}f_{ik}(x,y)\right|dxdy\geq$$

. . . .

$$\geq\frac{1}{4}B_6\sum_{\ell=0}^{N(S)}\sum_{\mu=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}}\sum_{p_1=1}^{n+S}\sum_{q_1=1}^{n+S}\left(a_{p_1q_1}^{(S)}\right)^2\varphi_\mu^2\left(\frac{2q_1-1}{2^{N(S)+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}B_6\sum_{\ell=0}^{N(S)}\sum_{\mu=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}}\sum_{p_1=S+1}^{n+S}\sum_{q_1=S+1}^{n+S}a^2_{p_1-S,q_1-S}\cdot\varphi_\mu^2\left(\frac{2q_1-1}{2^{N(S)+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}B_6\sum_{\ell=0}^{N(S)}\sum_{\mu=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}}\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n}a^2_{p_1q_1}\cdot\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+S)-1}{2^{N(S)+2}}\right). \quad (2.I.33)$$

Просуммируем неравенства (2.I.33) по $s=1,2,\dots,n$. В правой части полученного неравенства будем иметь

$$B_7\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=0}^{N(s)}\sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}}\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n}a_{p_1q_1}^2\cdot\varphi_\mu^2\left(\frac{2\cdot(q_1+s)-1}{2^{N(s)+2}}\right)=$$

$$=B_7\sum_{p_1=1}^{n}\sum_{q_1=1}^{n}a_{p_1q_1}^2\left[\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=0}^{N(s)}\sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N(s)+2}}\right)\right]. \quad (2.I.34)$$

Известно, что (см./7/,стр.44I) для любых $l=0,1,\dots,N$ и $q_1=1,2,\dots,n$ имеет место неравенство

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N+2}}\right)\geqslant B_8\,n. \quad (2.I.35)$$

Легко проверить, что для любой точки $x\in[0,1]$

$$\sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{x}{2}\right)>\frac{1}{4}\sum_{\mu=2^l+1}^{2^{l+1}}\varphi_\mu^2(x),\quad l=0,1,\dots,N. \quad (2.I.36)$$

Так как $2^{N-1}\leqslant n<2^N$ и $1\leqslant s\leqslant n$, то $2^{N-1}\leqslant$ $\leqslant n+s<2^{N+1}$. Поэтому найдется число $1\leqslant s_0\leqslant n$ такое, что $2^{N-1}\leqslant n+s<2^N$ при $0\leqslant s<s_0$ и $2^N\leqslant n+s<2^{N+1}$ при $n\geqslant s\geqslant s_0$. Это значит, что

$$N(s)=\begin{cases}N, & 0\leqslant s<s_0,\\ N+1, & s\geqslant s_0,\end{cases}\qquad s=1,2,\dots,n. \quad (2.I.37)$$

Теперь, согласно соотношениям (2.I.35)-(2.I.37) имеем

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{N(s)}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N(s)+2}}\right)=\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{\ell=0}^{N}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N+2}}\right)+$$

$$+\sum_{s=s_0+1}^{n}\sum_{\ell=0}^{N+1}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N+3}}\right)\geqslant\frac{1}{4}\left\{\sum_{s=1}^{s_0}\sum_{\ell=0}^{N}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N+2}}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{s=s_0+1}^{n}\sum_{\ell=0}^{N}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N+2}}\right)\right\}=\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{N}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{\ell=0}^{N}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{\mu=2^\ell+1}^{2^{\ell+1}}\varphi_\mu^2\left(\frac{2(q_1+s)-1}{2^{N+2}}\right)\right)\geqslant\frac{1}{4}B_8\, n\, N\geqslant B_9\, n\log n. \quad (2.I.38)$$

Объединяя (2.I.33),(2.I.34) и (2.I.38), получаем неравенство (2.I.30).

Лемма 2.I.3 доказана.

<u>Замечание к лемме 2.I.3</u>. Мы не знаем, можно ли в неравенстве (2.I.30) заменить $\log n$ на $\log^2 n$.

§2. Расходящийся в смысле метрики $L([0,1]^2)$ двойной ряд Фурье для произвольной двойной ограниченной ОНС

Имеет место

Теорема 2.2.1. Пусть $(f_{ik})_{i,k\geqslant 1}$ двойная ОНС на $[0,1]^2$, удовлетворяющая условию

$$\left|f_{ik}(x,y)\right|\leqslant M,\ M>0,\ (x,y)\in[0,1]^2,\ (i,k=1,2,\dots). \qquad (2.2.1)$$

Тогда существует такая функция $\psi\in L([0,1]^2)$, что её двойной ряд Фурье по системе $(f_{ik})_{i,k\geqslant 1}$

$$\psi(x,y)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}(\psi)\cdot f_{ik}(x,y),\qquad a_{ik}(\psi)=(\psi,f_{ik})$$

. . . .

неограниченно расходится по Принсгейму в смысле метрики $L([0,1]^2)$, т.е.

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\int_0^1\!\!\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\psi)\cdot f_{ik}(x,y)\right|dx\,dy=\infty. \qquad (2.2.2)$$

Доказательство. Применим лемму -2.1.3 для $a_{ik}=f_{i+Np-1,k+Np-1}(x,y)$ при фиксированной точке $(x,y)\in[0,1]^2$, $i,k=1,2,\dots$ и ОН системе $\left(f^{(\theta_1,\theta_2)}_{i+Np-1,k+Np-1}\right)_{i,k\geqslant 1}$ (см.(2.2.1)), где N и p натуральные числа $N,p=1,2,\dots$. Тогда используя нормированность системы

$(f_{ik})_{i,k\geq 1}$, при $n=N$ (см.(2.I.30)), после интегри... ...ни: получим

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}\int\limits_{[0,1]^2}\int\limits_{[0,1]^2}\left|\sum_{i=Np}^{\mu+Np-1}\sum_{k=Np}^{\nu+Np-1} f_{ik}(x,y)\, f_{ik}(\theta_1,\theta_2)\right| dx\,dy\,d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+N\sum_{\mu=1}^{N}\int\limits_{[0,1]^2}\int\limits_{[0,1]^2}\left|\sum_{i=Np}^{\mu+Np-1}\sum_{k=Np}^{N(p+1)-1} f_{ik}(x,y)\, f_{ik}(\theta_1,\theta_2)\right| dx\,dy\,d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+N\sum_{\nu=1}^{N}\int\limits_{[0,1]^2}\int\limits_{[0,1]^2}\left|\sum_{i=Np}^{N(p+1)-1}\sum_{k=Np}^{\nu+Np-1} f_{ik}(x,y)\, f_{ik}(\theta_1,\theta_2)\right| dx\,dy\,d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+N^2\int\limits_{[0,1]^2}\int\limits_{[0,1]^2}\left|\sum_{i=Np}^{N(p+1)-1}\sum_{k=Np}^{N(p+1)-1} f_{ik}(x,y)\, f_{ik}(\theta_1,\theta_2)\right| dx\,dy\,d\theta_1 d\theta_2 \geq$$

. . . .

$$\geq B_{11} N^2 \log N . \qquad (2.2...)$$

Обозначим через $m_p^{(N)}$ и $m_p^{\prime(N)}$ натуральные числа

$$Np \leq m_p^{(N)} < N(p+1) \quad и \quad Np \leq m_p^{\prime(N)} < N(p+1) \qquad (2.2.)$$

для которых

$$\int\limits_{[0,1]^2}\int\limits_{[0,1]^2}\left|\sum_{i=Np}^{m_p^{(N)}}\sum_{k=Np}^{m_p^{\prime(N)}} f_{ik}(x,y)\, f_{ik}(\theta_1,\theta_2)\right| dx\,dy\,d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \max_{\substack{Np \leqslant \mu < N(p+1) \\ Np \leqslant \nu < N(p+1)}} \int\limits_{[0,1]^2} \int\limits_{[0,1]^2} \left| \sum_{i=Np}^{\mu} \sum_{k=Np}^{\nu} f_{ik}(x,y) \cdot f_{ik}(\theta_1,\theta_2) \right| dx\,dy\,d\theta_1 d\theta_2 . \tag{2.2.5}$$

Тогда в силу (2.2.3) и (2.2.5) получаем

$$\int\limits_{[0,1]^2} \int\limits_{[0,1]^2} \left| \sum_{i=Np}^{m_p^{(N)}} \sum_{k=Np}^{m_p^{\prime(N)}} f_{ik}(x,y) f_{ik}(\theta_1,\theta_2) \right| dx\,dy\,d\theta_1 d\theta_2 \geqslant B_{12} \log N , \tag{2.2.6}$$

для всех $N, p = 1, 2, \ldots$.

Пусть G множество таких точек $(\theta_1, \theta_2) \in [0,1)^2$, для которых

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h^2} \int\limits_0^h \int\limits_0^h f_{ik}(\theta_1 + u, \theta_2 + v)\,du\,dv = f_{ik}(\theta_1,\theta_2) \tag{2.2.7}$$

при всех $i, k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что $\operatorname{mes} G = 1$.

Пусть $(h_n)_{n \geqslant 1}$, $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ убывающие последовательности положительных чисел, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$, $(N_n)_{n \geqslant 1}$ - последовательность номеров, а $(\theta_1^{(n)})_{n \geqslant 1}, (\theta_2^{(n)})_{n \geqslant 1}$ - последовательности положительных чисел меньших единицы. Они будут определены ниже.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \delta_n(\theta_1^{(n)}, \theta_2^{(n)}; x, y), \tag{2.2.8}$$

где

$$\delta_n(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)},x,y)=\begin{cases}\frac{1}{h_n^2}, \text{ при } (x,y)\in[\theta_1^{(n)},\theta_1^{(n)}+h_n]\times[\theta_2^{(n)},\theta_2^{(n)}+h_n],\\ 0, \text{ для остальных } (x,y) \text{ из } [0,1]^2.\end{cases} \qquad (2.2.[illegible])$$

Очевидно, что $\Psi\in L([0,1]^2)$. Действительно (см.(2.2.8), (2.2.9))

$$\int_0^1\int_0^1|\Psi(x,y)|dxdy=\int_0^1\int_0^1\Psi(x,y)dxdy=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\int_0^1\int_0^1\delta_n(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)},x,y)dxdy=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n<\infty.$$

Введем обозначения:

$$\alpha_n(x,y)=\sum_{\ell=1}^{n-1}\varepsilon_\ell\,\delta_\ell(\theta_1^{(\ell)},\theta_2^{(\ell)};x,y), \qquad (2.2.[illegible])$$

$$\beta_n(x,y)=\varepsilon_n\,\delta_n(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)};x,y), \qquad (2.2.[illegible])$$

$$\gamma_n(x,y)=\sum_{\ell=n+1}^{\infty}\varepsilon_\ell\,\delta_\ell(\theta_1^{(\ell)},\theta_2^{(\ell)};x,y). \qquad (2.2.[illegible])$$

Определим последовательности чисел $(h_n)_{n\geq1}$, $(\varepsilon_n)_{n\geq1}$, $(\theta_1^{(n)})_{n\geq1}$, $(\theta_2^{(n)})_{n\geq1}$ и номеров $(N_n)_{n\geq1}$, $(R_n)_{n\geq1}$ следующим образом. Берем $\varepsilon_1=1$, $N_1=1$, $R_1=1$, $(\theta_1^{(1)},\theta_2^{(1)})\in G$ и h_1 так[illegible], что $\theta_1^{(1)}+h_1\leq 1, и\ \theta_2^{(1)}+h_1\leq 1$. Допустим теперь, что $\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \varepsilon_j$, h_j, N_j и R_j определены для всех $1\leq j\leq n-1$. Возьмем ε_n такое, что

$$N_{n-1}^2\varepsilon_n<1,\quad \varepsilon_n\leq\frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}. \tag{2.2.13}$$

Далее, найдем номер N_n, для которого

$$\varepsilon_n\log N_n\geq n \tag{2.2.14}$$

Так как

$$\lim_{i,k\to\infty} a_{ik}(\alpha_n)=\lim_{i,k\to\infty}\int_0^1\int_0^1\alpha_n(x,y)f_{ik}(x,y)dxdy=0,$$

то существует такой номер R_n, что

$$N_n^2\cdot\max_{\substack{i\geq N_nR_n\\ k\geq N_nR_n}}|a_{ik}(\alpha_n)|\leq 1. \tag{2.2.15}$$

В силу неравенства (2.2.6) при $p=R_n$ и $N=N_n$ имеем

$$\int_{[0,1]^2}\int_{[0,1]^2}\left|\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{\prime(N_n)}}f_{ik}(x,y)f_{ik}(\theta_1,\theta_2)\right|dxdyd\theta_1d\theta_2\geq B_1\log N_n, \tag{2.2.16}$$

где $N_nR_n\leq m_{R_n}^{(N_n)}<N_n(R_n+1),\ N_nR_n\leq m_{R_n}^{\prime(N_n)}<N_n(R_n+1)$.

Положим

$$\mathcal{F}_n(\theta_1,\theta_2)=\iint\limits_{[0,1]^2}\left|\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{K=N_nR_n}^{m_{R_n}^{1(N_n)}} f_{iK}(x,y)\,f_{iK}(\theta_1,\theta_2)\right|dxdy. \qquad (2.2.\ )$$

Тогда, согласно (2.2.16)

$$\int\limits_{[0,1]^2}\mathcal{F}_n(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \geqslant B_{12}\log N_n. \qquad (2.2.\ )$$

Отсюда следует, что множество

$$A_n=\left\{(\theta_1,\theta_2)\in[0,1]^2 : \mathcal{F}_n(\theta_1,\theta_2)\geqslant B_{12}\log N_n\right\} \qquad (2.2.$$

имеет положительную меру. Следовательно (см.(2.2.7)) $A_n \cap G$.
Возьмем некоторую точку $(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)})\in A_n\cap G$; для неё в си...
(2.2.17) и (2.2.19) имеем

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{K=N_nR_n}^{m_{R_n}^{1(N_n)}} f_{iK}(x,y)\cdot f_{iK}(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)})\right|dxdy\geqslant B_{12}\log N_n. \qquad (2.2.\ )$$

Далее, найдем такое число h_n (см.(2.2.7)), чтобы вып...
нялись неравенства

$$N_n^2\left|\frac{1}{h_n^2}\int_0^{h_n}\int_0^{h_n} f_{iK}(\theta_1^{(n)}+u,\theta_2^{(n)}+v)dudv-f_{iK}(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)})\right|\leqslant 1 \qquad (2.2.\ldots$$

при $N_n R_n \leqslant i < N_n (R_n + 1)$ и $N_n R_n \leqslant k < N_n (R_n + 1)$.

Таким образом, последовательности $(h_n)_{n\geqslant 1}$, $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$, $(N_n)_{n\geqslant 1}$, $(R_n)_{n\geqslant 1}$, $(\theta_1^{(n)})_{n\geqslant 1}$, $(\theta_2^{(n)})_{n\geqslant 1}$ определены.

Установим, что функция ψ из (2.2.8) удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1.

Очевидно, что (см. (2.2.8) и (2.2.10)-(2.2.12))

$$\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} a_{ik}(\psi) f_{ik}(x,y) = \sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} a_{ik}(\alpha_n) f_{ik}(x,y) +$$

$$+ \sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} a_{ik}(\beta_n) f_{ik}(x,y) + \sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} a_{ik}(\gamma_n) f_{ik}(x,y). \tag{2.2.22}$$

Согласно (2.2.1) и (2.2.15) имеем

$$\left| \sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} a_{ik}(\alpha_n) f_{ik}(x,y) \right| \leqslant M \tag{2.2.23}$$

при $(x,y) \in [0,1]^2$.

В силу (2.2.1), (2.2.12) и (2.2.13) для $(x,y) \in [0,1]^2$

$$\left| \sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}} \sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} a_{ik}(\gamma_n) f_{ik}(x,y) \right| \leqslant M^2 \|\gamma_n\|_1 N_n^2 \leqslant 2M^2 \varepsilon_{n+1} N_n^2 \leqslant 2M^2 \tag{2.2.24}$$

Теперь из (2.2.1), (2.2.9), (2.2.11) и (2.2.21) следует,

$$\left|\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{\prime(N_n)}} a_{ik}(\beta_n)\cdot f_{ik}(x,y)\right| \geqslant \left|\varepsilon_n\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{\prime(N_n)}} f_{ik}(x,y)\cdot f_{i,k}(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)})\right| -$$

$$-\left|\varepsilon_n\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{\prime(N_n)}} f_{ik}(x,y)\left[\frac{1}{h_n^2}\int_0^{h_n}\int_0^{h_n} f_{ik}(u+\theta_1^{(n)},v+\theta_2^{(n)})\,du\,dv - f_{ik}(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)})\right]\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\varepsilon_n\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{\prime(N_n)}} f_{ik}(x,y)\, f_{ik}(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)})\right| - M \qquad (2.2.25)$$

для всех $(x,y)\in[0,1]^2$.

Объединяя (2.2.22), (2.2.23), (2.2.24) и (2.2.25) получаем, что для любой точки (x,y) из $[0,1]^2$

$$\left|\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{\prime(N_n)}} a_{ik}(\Psi)\cdot f_{ik}(x,y)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\varepsilon_n\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m_{R_n}^{\prime(N_n)}} f_{ik}(x,y)\, f_{ik}(\theta_1^{(n)},\theta_2^{(n)})\right| - (2M+2M^2). \qquad (2.2.26)$$

Интегрируя (2.2.26) по (x,y) на $[0,1]^2$ имеем (см. (2.2.14), (2.2.20))

$$\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} a_{ik}(\psi)\cdot f_{ik}(x,y)\right|dxdy \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon_n \int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=N_nR_n}^{m_{R_n}^{(N_n)}}\sum_{k=N_nR_n}^{m'^{(N_n)}_{R_n}} f_{ik}(x,y)\cdot f_{ik}(\Theta_1^{(n)},\Theta_2^{(n)})\right|dxdy-(2M+2M^2)\geqslant$$

$$\geqslant B_{12}\,\varepsilon_n \log N_n-(2M+2M^2)\geqslant B_{12}\,n-(2M+2M^2).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\psi)\cdot f_{ik}(x,y)\right|dxdy=\infty.$$

Теорема 2.2.I доказана.

§3. Расходимость почти всюду и на множестве положительной плоской меры двойных рядов Фурье по двойным ограниченным ОНС

Аналогично теореме 2.2.I можно установить, что справедливы следующие предложения.

<u>Теорема 2.3.I</u>. Пусть $(f_{ik})_{i,k\geqslant 1}$ двойная ОНС на $[0,1]^2$, удовлетворяющая условию

$$\left|f_{ik}(x,y)\right| \leqslant M,\ M>0,\ (x,y)\in[0,1]^2,\ (i,k=1,2,\ldots)$$

Тогда существует такая функция $\varphi\in L_1([0,1]^2)$, что её двойной ряд Фурье по системе $(f_{ik})_{i,k\geqslant 1}$

$$\varphi(x,y)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(\varphi) f_{ik}(x,y),\quad a_{ik}(\varphi)=(\varphi, f_{ik})$$

неограниченно расходится по Прингсхейму, т.е.

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\varphi) f_{ik}(x,y)\right|=\infty$$

на некотором множестве $E\subset[0,1]^2$ с положительной плоской мерой.

Теорема 2.3.2. Пусть $(f_{ik})_{i,k\geqslant 1}$ двойная ОНС на $[0,1]^2$, удовлетворяющая условиям

1) $\left|f_{ik}(x,y)\right|\leqslant M,\ \ M>0,\ (x,y)\in[0,1]^2,\ i,k=1,2,\ldots$

2) $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty}\sum_{i=ml_1}^{(m+1)l_1-1}\sum_{k=nl_2}^{(n+1)l_2-1} f_{ik}^2(x,y)>0$

почти всюду на $[0,1]^2$ при некоторых натуральных l_1, l_2, которые не зависят от (x,y). Тогда существует такая функция $g\in L_1([0,1]^2)$, что её двойной ряд Фурье по системе $(f_{ik})_{i,k\geqslant 1}$ неограниченно расходится по Прингсхейму почти всюду на $[0,1]^2$.

Справедливы также двумерные аналоги теорем I.I.2 и I.I.3.

Замечание. Отметим, что все указанные результаты главы II справедливы и в том случае, когда функции ОН системы принимают комплексные значения, причем во всех этих случаях функции, для которых ряды Фурье расходятся, можно выбрать действительными.

Наконец, заметим, что все вышеупомянутые результаты главы I и главы II имеют место для любой размерности N $(N=1,2,\dots)$. Например, N -мерный аналог теоремы 2.2.I примет вид

Теорема. Пусть $\left(f_{i_1,i_2,\dots,i_N}\right)_{i_1,i_2,\dots,i_N\geqslant 1}$ N — кратная ОНС на $[0,1]^N$, удовлетворяющая условию

$$\left|f_{i_1,i_2,\dots,i_N}(x_1,x_2,\dots,x_N)\right|\leqslant M,\ M>0,\ (x_1,x_2,\dots,x_N)\in[0,1]^N,\ (i_1,i_2,\dots,i_N=1,2,\dots)$$

Тогда существует такая функция $f\in L([0,1]^N)$, что её N -кратный ряд Фурье по системе $\left(f_{i_1,i_2,\dots,i_N}\right)_{i_1,i_2,\dots,i_N\geqslant 1}$ неограниченно расходится по Прингсхейму в смысле метрики $L([0,1]^N)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A Kolmogoroff, Une série de Fourier-Lebesgue divergent presque partout, Fund. Math. 4(1923), 324-328.

2. П.Л.Ульянов, О расходимости рядов Фурье, Успехи мат.наук 1957,12,№3 (1957), 75-132.

3. П.Л.Ульянов, Расходящиеся ряды Фурье, Успехи мат.наук, 16, №3 (1961), 61-142.

4. П.Л.Ульянов, Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, Успехи мат. наук, 19, №1 (1964), 3-69.

5. E.M.Stein, On limits of sequences of operators, Ann. Math., 74, №1 (1961), 140-170

6. Н.К.Бари, Тригонометрические ряды, Москва, Физматгиз (1961).

7. С.В.Бочкарев, Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы. Матем.сб., 98, №3 (1975), 436-449.

8. A M Olevskii, Fourier series with respect to general orthogonal systems Berlin, (1975).

9. A Kolmogoroff, Une série de Fourier-Lebesgue divergent partout, Compt Rend Acad. Sci (Paris), 183(1926), 1327-1328.

10. S Sunouchi, A Fourier series which belongs to the class H divergens almost everywhere, Kodai Math Semin Reports, 1(1953), 27

II. В.И.Прохоренко, О расходящихся рядах Фурье, Матем.сб. 75, №2 (1968), 185-198.

12. K Tandori, Ein Divergenzsatz für Fourier-reihen, Acta Sci. Math., 30, №1-2 (1969), 43-48.

13. Kozima Michitaka, On divergence of Fourier series, Sci. Repts Kanazawa Univ 15, №2 (1970), 57-59.

14. Л.В.Жижиашвили, О сходимости и расходимости тригонометрических рядов Фурье, ДАН СССР, 225, №3 (1975), 495-496.

15. F Schip, Uber die Divergenz der Walsh-Fourierreihen, An Univ Sci Budapest. sec math., 12(1969), 46-62.

16. Ш.В.Хеладзе, О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша, Сообщ АН ГССР, 77, №2 (1975), 305-307.

17. K H Moon, An everywhere divergent Fourier-Walsh series of the class $L(\lg^+ h \lg^+ h)^{1-\varepsilon}$, Proc. Amer Math Soc 50 (1975), 309-314.

18. C Fefferman, On the divergence of multiple Fourier series, Bull Amer. Math Soc 77, №2 (1971), 191-195.

19. М.Бахбух, Е.М.Никишин, О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций, Сиб.мат.ж., 14, №6 (1973), 1189-1199.

20. С.Качмаж, Г.Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Москва, Физматгиз (1958).

21. Г.Д.Гецадзе, О расходимости почти всюду рядов Фурье по некоторым ограниченным ортонормированным системам, Сообщ.АН ГССР, 84,№I (1976), 41-43.

22. Р.Д.Гецадзе, Расходящийся в смысле метрики $L([0,1])$ ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы, Сообщ. АН ГССР,84,№2 (1976), 285-2..

23. Р.Д.Гецадзе, О расходимости кратных ортогональных рядов Фурье, Сообщ.АН ГССР,86,№3 (1977), 565-567.

О Г Л А В Л Е Н И Е