ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им.И.Н.ВЕКУА

ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им.И.А.ДЖАВАХИШВИЛИ

На правах рукописи

АБЕСАДЗЕ ТАМАЗ ПЛАТОНОВИЧ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ДЛЯ СЛАБО-НЕОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕРМОУПРУГОГО КРУГА

01.01.02 - дифференциальные уравнения

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, заслуженный деятель
науки Республики Грузия,
профессор МАГНАРАДЗЕ Л.Г.

Тбилиси - 1991

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В диссертационной работе решаются две основные граничные задачи статики слабо-неоднородного изотропного термоупругого круга методами теории граничных задач комплексного анализа, пользуясь также системами одномерных сингулярных интегральных уравнений нормального типа с нулевым индексом.

Работа состоит из введения, трех глав и списка использованной литературы.

Хорошо известно, что в случае однородного изотропного круга рассматриваемые граничные задачи решаются эффективно с помощью рядов Фурье, интегралов типа Коши и Пуассона (см., например, [I - 4]). В случае слабо-неоднородного изотропного круга эти же граничные задачи решаются с помощью достаточно сложных неэффективных методов функционального анализа (см., например ,[5]).

В первой главе, являющейся вспомогательной для остальных двух глав, приводятся некоторые известные понятия, дифференциальные уравнения и формулы общего представления всех их гладких решений с помощью двух произвольных аналитических функций одного комплексного переменного, а также некоторые сведения о специальных функциональных классах.

Во второй главе решается первая основная граничная задача: определить термоупругое статическое состояние слабо-неоднородного изотропного круга, когда на его границе заданы вектор упругого перемещения и температура.

В третьей главе решается вторая граничная задача: определить термоупругое статическое состояние слабо-неоднородного изотропного круга, когда на его границе заданы вектор внешнего напряжения и температура.

В работе широко используются результаты Г.В.Колосова, Н.И.Мусхелишвили, И.Н.Векуа, В.Д.Купрадзе, А.В.Бицадзе и их многочисленных учеников и последователей, изложенных в хорошо известных их статьях и прекрасных монографиях ([I - 6]).

Мы существенно использовали недавние результаты Л.Г.Магнарадзе [7], касающиеся общих представлений одного класса эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами, а также его сравнительно давние результаты ([8 - I0]) о функциональных классах, инвариантных относительно линейных операторов, представленных сингулярными интегралами в смысле главного значения Коши.

ГЛАВА I

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе приводятся некоторые известные понятия, дифференциальные уравнения и формулы общего представления всех их гладких решений, использованные в остальных главах работы.

I. На плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим круг радиуса R, с центром в начале координат $|z| \leq R$.

Предположим, что этот круг занят неоднородным изотропным плоским термоупругим телом.

Как хорошо известно (см., например, [1], [3], [4]) основные уравнения статики плоской термоупругости имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} X_x + \frac{\partial}{\partial y} X_y + X = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x} Y_x + \frac{\partial}{\partial y} Y_y + Y = 0, \tag{I.I}$$

$$X_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta,$$

$$X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{I.2}$$

$$Y_y = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\theta,$$

где $\begin{bmatrix} X_x, & X_y \\ Y_x, & Y_y \end{bmatrix}$ -матрица или тензор напряжения,

$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ -вектор объемной силы,

$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ -вектор упругого перемещения, θ -температура, являющаяся разностью, $\theta = T - T_0$,между абсолютной температурой T и температурой T_0 ,которую имеет упругое тело в недеформированном состоянии; два уравнения (I.I) являются основными уравнениями упругого тела; три уравнения (I.2) выражают закон Гука-Дюамеля-Неймана, при этом коэффициенты Ляме λ, μ и коэффициент линейного теплового расширения α являются заданными достаточно гладкими функциями переменных x, y .

Подставляя значения $X_x, X_y = Y_x$, Y_y из (I.2) в уравнения (I.I), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left((3\lambda+2\mu)\alpha\theta\right)+X=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left((3\lambda+2\mu)\alpha\theta\right)+Y=0. \tag{I.3}$$

В результате простых преобразований из (I.3) получим следующие уравнения:

$$\Delta u+a\frac{\partial\delta}{\partial x}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial v}{\partial x}+a_3\frac{\partial\theta}{\partial x}+a_2\frac{\partial u}{\partial y}+a_4\frac{\partial v}{\partial y}+a_5\theta+a_6=0,$$
$$\Delta v+a\frac{\partial\delta}{\partial y}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial v}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+b_3\frac{\partial v}{\partial y}+b_4\frac{\partial\theta}{\partial y}+b_5\theta+b_6=0, \tag{I.4}$$

где

$$\delta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$a=\frac{1}{\mu}(\lambda+\mu),\quad a_1=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(\lambda+2\mu),\quad a_2=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial y},\quad a_3=-\frac{\alpha}{\mu}(3\lambda+2\mu),$$

$$a_4=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad a_5=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\big(\alpha(3\lambda+2\mu)\big),\quad a_6=\frac{1}{\mu}X,$$

$$b_1=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial y},\quad b_2=\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x},\quad b_3=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}(\lambda+2\mu), \tag{I.5}$$

$$b_4=-\frac{\alpha}{\mu}(3\lambda+2\mu),\quad b_5=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\big(\alpha(3\lambda+2\mu)\big),\quad b_6=\frac{1}{\mu}Y.$$

К системе (I.4) добавляется уравнение теплопроводности

$$\Delta\theta+\frac{1}{c}Q_0=0, \tag{I.6}$$

где Q_0 -интенсивность теплового источника, а c -коэффициент температуропроводности.

2. В настоящей работе предполагается, что все заданные величины $X, Y, \lambda, \mu, \alpha, Q_0, c$ являются такими аналитическими функциями переменных x, y, что величины a, a_j, b_j $(j=1,2,\dots,6)$, а также $\frac{1}{c}Q_0$ являются целыми аналитическими функциями переменных x, y.

Неизвестные u, v, θ удовлетворяют уравнениям (I.4), (I.6) с известными коэффициентами (I.5) и заданными величинами Q_0, c.

Из (I.4), (I.6) следует, что если для определения температуры θ соответствующее граничное условие на окружности $|z|=R$ задается независимо от u, v и, если она по этому граничному условию определяется единственным образом, тогда подставляя найденное значение θ в уравнения (I.4), получим систему для неизвестных u, v:

$$\begin{aligned}&\Delta u+a\frac{\partial\delta}{\partial x}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\frac{\partial v}{\partial x}+a_2\frac{\partial u}{\partial y}+a_4\frac{\partial v}{\partial y}+f=0,\\ &\Delta v+a\frac{\partial\delta}{\partial y}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial v}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+b_3\frac{\partial v}{\partial y}+g=0,\end{aligned} \tag{I.7}$$

где

$$f = a_3 \frac{\partial\theta}{\partial x} + a_5\theta + a_6,$$
$$g = b_4 \frac{\partial\theta}{\partial y} + b_5\theta + b_6. \qquad (I.8)$$

3. Система (I.7) является частным случаем следующей эллиптической системы, впервые рассмотренной и исследованной Л.Г.Магнарадзе (см.[7]и указанную там литературу):

$$\Delta\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + a\,grad\,div\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + A\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + B\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + C\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (I.9)$$

где

$$grad = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \qquad div\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11}, & c_{12} \\ c_{21}, & c_{22} \end{bmatrix}, \qquad (I.10)$$

a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} $(j,k = 1,2)$, a, f, g -заданные достаточно гладкие функции независимых действительных переменных x, y; u, v -искомые функции; при этом требуется выполнение условий:

$$a \neq -1, \; b_{21} = a_{11} - a_{22} - b_{12}, \; b_{22} = a_{12} + a_{21} + b_{11}. \qquad (I.11)$$

Эллиптичность системы (I.9) следует из соотношений:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a+1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix}\xi^2 + \begin{bmatrix} 0; & a \\ a; & 0 \end{bmatrix}\xi\eta + \begin{bmatrix} 1; & 0 \\ 0; & a+1 \end{bmatrix}\eta^2\right) =$$
$$= (a+1)(\xi^2+\eta^2)^2 \neq 0$$

при $a \neq -1$, $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \neq 0$.

Предположим, что все заданные функции, фигурирующие в системе (I.9), являются целыми аналитическими функциями действительных переменных x, y.

Ниже дается описание схемы, предложенной Л.Г.Магнарадзе [7] для построения формулы общего представления всех регулярных решений системы (I.9).

Хорошо известно (см.,например, [3]), что любое регулярное решение линейной эллиптической системы с аналитическими коэффициентами, заданной в некоторой конечной односвязной области, необходимо является аналитической функцией в той же области.

Пользуясь этим результатом, перейдем в системе (I.9) в комплексную область значений независимых переменных:

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy'' \qquad (I.12)$$
$$z = x + iy, \quad \zeta = x - iy.$$

В результате преобразования переменных (I.12), система (I.9) заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений Вольтерра

$$W(z,\zeta) - \int_{z_0}^{z} K(z,\zeta,z_1) W(z_1,\zeta) dz_1 - \int_{\zeta_0}^{\zeta} L(z,\zeta,\zeta_1) W(z,\zeta_1) d\zeta_1 -$$
$$- \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{\zeta_0}^{\zeta} M(z,\zeta,z_1,\zeta_1) W(z_1,\zeta_1) d\zeta_1 = h(z,\zeta) + \chi(z,\zeta), \qquad (I.13)$$

где матрицы

$$K = \begin{bmatrix} k_{11}, & k_{12}, & k_{13}, & k_{14} \\ k_{21}, & k_{22}, & k_{23}, & k_{24} \\ k_{31}, & k_{32}, & k_{33}, & k_{34} \\ k_{41}, & k_{42}, & k_{43}, & k_{44} \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11}, & l_{12}, & l_{13}, & l_{14} \\ l_{21}, & l_{22}, & l_{23}, & l_{24} \\ l_{31}, & l_{32}, & l_{33}, & l_{34} \\ l_{41}, & l_{42}, & l_{43}, & l_{44} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11}, & m_{12}, & m_{13}, & m_{14} \\ m_{21}, & m_{22}, & m_{23}, & m_{24} \\ m_{31}, & m_{32}, & m_{33}, & m_{34} \\ m_{41}, & m_{42}, & m_{43}, & m_{44} \end{bmatrix}$$

и вектор-столбец

$$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix},$$

эффективно представляются; их элементы, соответственно, компоненты, явно выражаются через элементы заданных матриц (I.IO) и f, g.

Вектор-столбец

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_4 \end{bmatrix}$$

имеет следующие компоненты:

$$\chi_1 = \varphi_1(z) + \psi_2(\zeta),$$

$$\chi_2 = \varphi_2(z) + \psi_1(\zeta),$$

$$\chi_3 = c_{31}(z,\zeta)\varphi_1(z) + c_{32}(z,\zeta)\psi_1(\zeta) + c_{33}(z,\zeta)\varphi_1'(z) +$$

$$+ c_{34}(z,\zeta)\psi_1'(\zeta) + c_{35}(z,\zeta)\varphi_2(z) + c_{36}(z,\zeta)\psi_2(\zeta),$$

$$\chi_4 = c_{41}(z,\zeta)\varphi_1(z) + c_{42}(z,\zeta)\psi_1(\zeta) + c_{43}(z,\zeta)\varphi_1'(z) +$$

$$+ c_{44}(z,\zeta)\psi_1'(\zeta) + c_{45}(z,\zeta)\varphi_2(z) + c_{46}(z,\zeta)\psi_2(\zeta),$$

где $c_{3j}(z,\zeta)$ и $c_{4j}(z,\zeta)$ $(j = 1, 2, \ldots 6)$ явно выражаются через заданные функции, а $\varphi_1(z)$, $\psi_1(\zeta)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_2(\zeta)$ - произвольные регулярные аналитические функции своих аргументов; не ограничивая общности, всегда можно предположить, что $\varphi_1(z_0) = 0$, $\psi_1(\zeta_0) = 0$, при этом z_0, ζ_0- -произвольно фиксированные точки в соответствующих областях комплексных переменных z, ζ.

Искомый вектор-столбец

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

имеет компоненты:

$$w_1 = \tilde{u}(z,\zeta) + i\tilde{v}(z,\zeta), \quad w_2 = \tilde{u}(z,\zeta) - i\tilde{v}(z,\zeta),$$

$$w_3 = \frac{\partial}{\partial z} w_1, \quad w_4 = \frac{\partial}{\partial \zeta} w_2,$$

при этом символ $\sim$ над буквой, вообще, означает следующую краткую запись:

$$F(x,y) = F\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right) = \tilde{F}(z,\zeta),$$

для любой аналитической функции $F(x,y)$ переменных x, y.

Теперь решим систему интегральных уравнений (I.I3) методом последовательных приближений. Решение представляется в виде:

$$W(z,\zeta) = h(z,\zeta) + \chi(z,\zeta) + \int_{z_0}^{z} N(z,\zeta,z_1)\big(h(z_1,\zeta) + \chi(z_1,\zeta)\big)dz_1 +$$
$$+ \int_{\zeta_0}^{\zeta} P(z,\zeta,\zeta_1)\big(h(z,\zeta_1) + \chi(z,\zeta_1)\big)d\zeta_1 +$$
$$+ \int_{z_0}^{z} dz_1 \int_{\zeta_0}^{\zeta} Q(z,\zeta,z_1,\zeta_1)\big(h(z_1,\zeta_1) + \chi(z_1,\zeta_1)\big)d\zeta_1, \quad (I.I4)$$

где матричные резольвенты N, P, Q известным образом (см., например , [3]) выражаются через матрицы K, L, M.

Возвращаясь к действительным переменным x, y из (I.14) получаем следующую формулу Л.Г.Магнарадзе:

$$u(x,y)+iv(x,y)=\alpha_0(z,\bar z)+\alpha_1(z,\bar z)\varphi(z)+$$

$$+\alpha_2(z,\bar z)\overline{\varphi(z)}+\alpha_3(z,\bar z)\overline{\varphi'(z)}+\alpha_4(z,\bar z)\overline{\psi(z)}+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\big(\alpha_5(z,\bar z,z_1)\varphi(z_1)+\alpha_6(z,\bar z,z_1)\psi(z_1)\big)dz_1+$$

$$+\int_{\bar z_0}^{\bar z}\big(\alpha_7(z,\bar z,\bar z_1)\overline{\varphi(z_1)}+\alpha_8(z,\bar z,\bar z_1)\overline{\psi(z_1)}\big)d\bar z_1\ , \qquad (I.15)$$

где целые функции α_j $(j=0,1,\ldots,8)$ алгоритмически выражаются через элементы матриц N, P, Q и компоненты вектора-столбца h ; черта над выражением означает переход к комплексно сопряженному с этим выражением; произвольные регулярные аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ связаны с функциями $\varphi_1(z)$, $\psi_1(\zeta)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_2(\zeta)$ следующим образом:

$$\varphi(z)\equiv\varphi_1(z)\equiv\overline{\psi_1(\bar z)}\,,\qquad \psi(z)\equiv\varphi_2(z)\equiv\overline{\psi_2(\bar z)}\,,$$

при этом $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$.

Формула (I.15) дает общее представление всех регулярных решений системы (I.9) с помощью двух произвольных регулярных аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$; при этом не ограничивая общности, можно предположить, что $\varphi(z_0)=0$.

4. Как показал Л.Г.Магнарадзе [7], эллиптическая система дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами (I.9) и формула (I.I5) общего представления всех ее регулярных решений имеют некоторые важные применения в математической физике.

Если $c \equiv 0$, тогда из представления (I.I5) легко получаются формулы Колосова-Мусхелишвили ([I], [3]), известные из плоской статической теории однородных изотропных упругих тел.

Если $c \equiv const$, тогда из представления (I.I5) также следуют формулы И.Н.Векуа из плоской теории гармонического колебания однородных изотропных упругих тел.

5. Теперь возвратимся к системе уравнений (I.7). Она является частным случаем системы (I.9), ибо имеем:

$$a_{11} = a_1, \quad a_{12} = a_2, \quad a_{21} = b_1, \quad a_{22} = b_2,$$

$$b_{11} = a_2, \quad b_{12} = a_4, \quad b_{21} = b_2, \quad b_{21} = b_3,$$

$$c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = 0.$$

Далее, легко проверить, что для системы (I.7) условия (I.II) выполняются :

$$a_{11} - a_{22} - b_{12} - b_{21} = a_1 - b_2 - a_4 - b_2 =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}(\lambda + 2\mu) - \frac{2}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial x} \equiv 0,$$

$$a_{12} + a_{21} + b_{11} - b_{22} = a_2 + b_1 + a_2 - b_3 =$$

$$= \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}(\lambda + 2\mu) \equiv 0 .$$

Поэтому результаты, приведенные выше в пункте 3, мы можем в частности, применить к системе (I.7). В главах П и Ш мы воспользуемся формулой (I.I5) для решения основных граничных задач статики слабо-неоднородного изотропного термоупругого круга $|z| \le R$.

6. Для исследования функциональных свойств решений интегральных уравнений, полученных ниже в главах П,Ш, нам понадобятся некоторые частные случаи результатов, принадлежащих Л.Г.Магнарадзе ([8] , [9] , [IO]) о свойствах функций, представленных интегралами типа Коши.

Так как у Л.Г.Магнарадзе, рассмотренные им интегралы распространяются на произвольно заданных кусочно-гладких линиях Жордана, а мы рассматриваем интегралы на окружности $|z| = R$, то, очевидно, некоторые его оценки в нашем случае сравнительно упрощаются.

Рассмотрим функции:

$$g(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} d\zeta , \quad \zeta_0 \in S , \tag{I.I6}$$

$$g(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x) \operatorname{ctg} \frac{x_0 - x}{2} dx , \quad x_0 \in [-\pi, \pi] , \tag{I.I7}$$

где S -достаточно гладкий замкнутый контур на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, $f(\zeta)$ -заданная на S непрерывная функция, $f_0(x)$ -заданная на действительной оси $-\infty < x < +\infty$ непрерывная 2π -периодическая функция; интегралы в (I.I6), (I.I7) понимаются в смысле главного значения Коши.

Краткая история вопросов, связанных с исследованием функциональных свойств интегралов (I.16), (I.17), приводится в [10] .

Следуя [10] , рассмотрим равенства, вытекающие, соответственно, из (I.17), (I.16):

$$g_0(x_0+\Delta x_0)-g_0(x_0)=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\Delta x_0}^{2\Delta x_0}\left[f_0(x+x_0)-f_0(x_0)\right]\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-2\Delta x_0}^{2\Delta x_0}\left[f_0(x+x_0)-f_0(x_0+\Delta x_0)\right]\operatorname{ctg}\frac{x-\Delta x_0}{2}\,dx+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}-\int\limits_{-2\Delta x_0}^{2\Delta x_0}\right)\left[f_0(x+x_0)-f_0(x_0+\Delta x_0)\right]\left[\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x-\Delta x_0}{2}\right]dx,$$

$$g(\zeta_0+\Delta\zeta_0)-g(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_0}\frac{f(\zeta_0+\Delta\zeta_0)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_0}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_0}\frac{f(\zeta)-f(\zeta_0+\Delta\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0-\Delta\zeta_0}\,d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S-S_0}\frac{\Delta\zeta_0\left[f(\zeta)-f(\zeta_0+\Delta\zeta_0)\right]}{(\zeta-\zeta_0-\Delta\zeta_0)(\zeta-\zeta_0)},\qquad\text{(I.19)}$$

где в (I.18) Δx_0 является достаточно малым положительным приращением x_0 , а в (I.19): $S=\{\zeta;\ \zeta=\zeta(s);\ 0\le s\le l\}$, l -длина линии S , $S_0=\{\zeta(s);\ s_0-2\tau_0\le s\le s_0+2\tau_0\}$, $\tau_0=|\Delta s_0|$, Δs_0 -достаточно малое приращение s_0 , при этом s_0, s обозначают, соответственно, дуговые абсциссы точек $\zeta(s_0)$, $\zeta(s)$ отсчитанные от некоторой фиксированной точки на S .

7. А.Зигмунд [IO] мажорировал конечные разности, входящие в (I.I8), модулями непрерывности, и в результате ряда преобразований и оценок получил следующее важное неравенство:

$$\omega(\tau_0; g_0) \leq \frac{8}{\pi}\left(\int_0^{\tau_0} \frac{\omega(\tau; f_0)}{\tau} d\tau + \tau_0 \int_{\tau_0}^{\pi} \frac{\omega(\tau; f_0)}{\tau^2} d\tau\right), \tag{I.20}$$

где $\omega(\tau_0; f_0)$, $\omega(\tau_0; g_0)$ являются модулями непрерывности, соответственно, функций $f_0(x)$, $g_0(x)$, при этом требуется, чтобы функция $f_0(x)$ удовлетворяла условию Дини, т.е. первый интеграл в правой части неравенства (I.20) был конечным.

Полагая

$$\omega(\tau; f_0) \leq A\tau^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1, \quad 0\leq\tau\leq\pi. \tag{I.2I}$$

А.Зигмунд [IO] из неравенства (I.20), в частности, получает известную теорему Племеля-Корна-Привалова:

$$\omega(\tau; g_0) \leq B_\alpha \tau_0^{\alpha}, \quad 0\leq\tau_0\leq\pi, \quad B_\alpha = \frac{8A}{\pi\alpha(1-\alpha)}. \tag{I.22}$$

(I.2I), (I.22) выражают инвариантность функционального класса Липшица-Гёльдера H_α, $0<\alpha<1$,при интегральном отображении (I.I7).

Далее, полагая

$$\omega(\tau; f_0) \leq \frac{c}{\left(\log\frac{2\pi}{\tau}\right)^{p+1}}, \quad p>0, \quad 0\leq\tau\leq\pi, \tag{I.23}$$

А.Зигмунд ограничился лишь формулировкой своего результата, что из неравенства (I.20) следует оценка

$$\omega(\tau_0; g_0) \leq \frac{c_p}{\left(\log \frac{2\pi}{\tau_0}\right)^p}, \tag{I.24}$$

не приводя явного выражения положительной константы c_p.
Л.Г.Магнарадзе нашел значение этой костанты:

$$c_p = \frac{8c}{\pi}\left[1 + \frac{1}{p} + \ell p^{p-1}\left(\frac{1}{(\log 2)^p} - \frac{1}{(p-1)^p}\right)\right]. \tag{I.25}$$

Очевидно, если постоянная c н зависит от f_0, то c_p также не зависит от функций f_0, g_0.

Легко видеть, что класс непрерывых функций, удовлетворяющих условию (I.23) является болеее ироким, чем функциональный класс Липшица-Гёльдера H_α при $0<\alpha\leq 1$. Из оценок (I.23), (I.24) следует, что эгт более широкий класс не остается инвариантным при интегралном отображении (I.17).

8. Л.Г.Магнарадзе ([8], [9], [0]) мажорировал конечные разности, входящие в (I.19), модуями непрерывности функций, и доказал справедливость следующего неравенства:

$$\omega(\tau_0; g) \leq \tilde{c}(S)\Big(\omega(\tau_0; f) + \int_0^{\tau_0} \frac{\omega(\tau; f)}{\tau} d\tau + \tau_0 \int_{\tau_0}^{\ell} \frac{\omega(\tau; f)}{\tau^2} d\tau\Big), \tag{I.26}$$

где константа $\tilde{c}(S)$ не зависит от фукций f, g, а зависит лишь от линии интегрирования в интегрле (I.16).

В (I.26) под модулем непрерывности $\omega(\tau; f)$ непрерывной функции $f(\zeta) \equiv f(\zeta(s))$, $0 \leq s \leq \ell$, заданной на линии S понимается следующее:

$$\omega(\tau; f) = \max_{|s_1 - s_2| \le \tau} \left| f(\zeta(s_1)) - f(\zeta(s_2)) \right|, \quad 0 \le \tau \le l.$$

Легко видеть, что, если, в частности, линия S является окружностью, и, воспользуемся хорошо известным [2] взаимоотношением между интегральными ядрами Гильберта $ctg\,\frac{s_0 - s}{2}$ и Коши $\dfrac{1}{\zeta(s) - \zeta(s_0)}$, неравенство А.Зигмунда (I.20) является частным случаем неравенства Л.Г.Магнарадзе (I.26).

Поэтому, указанное выше в пункте 7 неравенство (I.24), на основе неравенства (I.26), остается справедливым и для произвольных гладких линий S.

Для дальнейшего развития некоторых результатов, связанных с неравенствами (I.20), (I.26), Л.Г.Магнарадзе ([8], [10]) ввел следующий функционал:

$$A(f) = \int_0^l \frac{\omega(\tau; f)}{\tau} \Lambda(\tau)\, d\tau, \tag{I.27}$$

где $\omega(\tau; f)$ -модуль непрерывности функции $f(\zeta) \equiv f(\zeta(s))$, $0 \le s \le l$, заданной на гладкой (иногда, на кусочно-гладкой) линии S, а $\Lambda(\tau)$ -произвольная неотрицательная измеримая функция.

При $\Lambda(\tau) \equiv 1$ из (I.27) получается функционал или интеграл Дини; при $\Lambda(\tau) \equiv \tau^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, из (I.27) получаем один специальный случай функционала О.В.Бесова; при $\Lambda(\tau) = \left(\log \frac{l}{\tau}\right)^p$, $0 < p < +\infty$, получается функционал, играющий важную роль для доказательства формулы перестановки Пуанкаре-Бертрана когда $p \ge 2$.

Л.Г.Магнарадзе ([8], [10]) доказал неравенство между функционалами $A(f)$, $A(g)$, где под f, g понимается пара функций, связанных равенствами (I.16), (I.17), соответственно. Это неравенство Л.Г.Магнарадзе выводит из своего неравенства (I.26), деля обе части на $\tau_0 > 0$, умножая на произвольную неотрицательную измеримую, почти всюду конечную функцию $\Lambda(\tau_0)$, проинтегрируя по сегменту $[0, \ell_0]$, где ℓ_0 -достаточно малое число, $0<\ell_0<\ell$, и применяя формулу перестановки Дирихле для двойного интеграла по треугольной области. Таким образом он получает неравенство:

$$\int_0^{\ell_0} \frac{\omega(\tau; g)}{\tau} \Lambda(\tau)\, d\tau \leq$$

$$\leq c^* \Bigg(\int_0^{\ell_0} \frac{\omega(\tau; f)}{\tau} \Lambda(\tau)\, d\tau + \int_0^{\ell_0} \frac{\omega(\tau; f)}{\tau} d\tau \int_0^{\tau} \Lambda(\tau_1)\, d\tau_1 + \int_0^{\ell_0} \frac{\omega(\tau; f)}{\tau} d\tau \int_{\tau}^{\ell_0} \frac{\Lambda(\tau_1)}{\tau_1} d\tau_1 + \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{\omega(\tau; f)}{\tau^2} d\tau \int_0^{\ell_0} \Lambda(\tau_1)\, d\tau_1 \Bigg) \tag{I.28}$$

где постоянная c^* не зависит от функций f, g, а зависит лишь от линии S.

Из неравенства (I.28) Л.Г.Магнарадзе ([8], [10]) выводит следующее важное следствие: если измеримая и интегрируемая функция $\Lambda(\tau)$ почти всюду удовлетворяет условиям:

$$\frac{1}{\tau_0}\int_0^{\tau_0}\Lambda(\tau)d\tau \le const\cdot\Lambda(\tau_0),$$

$$\int_{\tau_0}^{\ell_0}\frac{\Lambda(\tau)}{\tau}d\tau \le const\cdot\Lambda(\tau_0),$$

при $0<\tau_0\le\ell_0$, тогда имеем импликации

$$A(f)<+\infty \Rightarrow A(g)<+\infty.$$

Таким образом Л.Г.Магнарадзе удалось построить новое функциональное пространство, инвариантное относительно интегральных преобразований (I.I6), (I.I7).

Далее, Л.Г.Магнарадзе ([88], [I0]) был рассмотрен функционал (I.27), когда

$$\Lambda(\tau)=\left(\log\frac{\ell}{\tau}\right)^p, \quad 0\le p<+\infty.$$

Пользуясь неравенством (I.28), Л.Г.Магнарадзе доказал справедливость включения

$$I_{p+1}\in I_p, \quad 0\le p<+\infty,$$

где I_p обозначает класс измеримых и интегрируемых функций f , удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\ell} \frac{\omega(\tau; f)}{\tau} \left(\log \frac{\ell}{\tau}\right)^p d\tau < +\infty .$$

Из (I.32) следует, что функциональный класс I_p , при фиксированном p , $0 \le p < +\infty$, не является инвариантным относительно интегральных преобразований (I.16), (I.17).

Для того, чтобы построить инвариантный функциональный класс Л.Г.Магнарадзе ([8],[10]) рассмотрел пересечение всех классов I_p , т.е. ввел новое линейное функциональное пространство

$$I_\infty = \bigcap_{p \ge 0} I_p \tag{I.29}$$

и доказал, что I_∞ является более общим, чем функциональное пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица-Гёльдера; инвариантность I_∞ относительно интегральных преобразований (I.16), (I.17) вытекало из (I.29), а тот факт, что I_∞ является более широким, чем любой функциональный класс Липшица-Гёльдера H_α , $0 < \alpha \le 1$, Л.Г.Магнарадзе доказал эффективным построением функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\frac{1}{\lambda_n}} \left(\frac{\tau}{e}\right)^{\lambda_n},$$

где $0 < \lambda_n \le 1$, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, $a_n > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty .$$

9. Результаты, указанные выше в пунктах 6,7,8, Л.Г.Магнарадзе ([8 , 9 , 10]) применил к некоторым вопросам комплексного анализа, в частности, к вопросам поведения граничных значений аналитических функций, представимых интегралом типа Коши:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad z\,\bar{\in}\,S.$$

Как хорошо известно (см.,например,[2]) , при определенных условиях, когда точка z изнутри или извне односвязных областей, с общей границей S ,стремится к точке $\zeta\in S_0$, имеем следующие формулы Сохоцкого-Племеля:

$$\begin{aligned} F^{+}(\zeta_0)&=\frac{1}{2}f(\zeta_0)+g(\zeta_0),\\ F^{-}(\zeta_0)&=-\frac{1}{2}f(\zeta_0)+g(\zeta_0), \end{aligned} \tag{I.30}$$

где функция

$$g(\zeta_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta, \quad \zeta_0\in S,$$

была рассмотрена выше на стр.

Пользуясь формулами (I.30) и результатами, изложенными выше в пункте 8, Л.Г.Магнарадзе ([8 , 9 , 10]) установил следующие импликации:

$$f(\zeta_0)\in I_{p+1} \Longrightarrow F^{\pm}(\zeta_0)\in I_p,$$

когда $p = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f(\zeta_0) \in I_\infty \Longrightarrow F^{\pm}(\zeta_0) \in I_\infty .$$

10. Ниже, в главах II, III, нам понадобится построить решение задачи Дирихле для круга $|z| \leq R$, $z = x + iy$. Через D обозначим круговую область $|z| < R$, с границей $S = \{\zeta;\ \zeta = \zeta(s),\ 0 \leq s \leq 2\pi R;\ |\zeta| = R\}$.

Как хорошо известно (см.,например,[2]), решение задачи Дирихле:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D,$$
$$\lim_{D \ni z \to \zeta_0 \in S} u(x,y) = f(s_0), \qquad \zeta_0 = \zeta(s_0), \tag{I.31}$$

где $f(s_0)$, $0 \leq s_0 \leq l$,есть заданная непрерывная функция на окружности S (в силу непрерывности, $f(s_0)$ является периодической функцией с периодом $l = 2\pi R$), дается интегралом Пуассона:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \int_S \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\omega + r^2} f(s)\, ds , \tag{I.32}$$

где $r = |z| < R$, $R = |\zeta|$, $\omega = \arg z - \arg \zeta$.

Известно [2], что решение задачи Дирихле (I.31) является единственным в функциональном классе $C^2(D) \cap C^1(D \cup S)$.

ГЛАВА II

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА СТАТИКИ СЛАБО-НЕОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕРМОУПРУГОГО КРУГА

I. В настоящей главе решается следующая граничная задача: определить термоупругое статическое состояние неоднородного изотропного круга D, с центром в точке $(0,0)$ и радиуса R, когда на его границе S задан вектор упругого перемещения (u,v), $u=u(\xi,\eta)$, $v=v(\xi,\eta)$, $\zeta=\xi+i\eta$, $|\zeta|=R$, а также задана температура θ, $\theta=\theta(\xi,\eta)$, на той же границе.

Формулу Л.Г.Магнарадзе представим следующим образом:

$$u(x,y)+iv(x,y)=\alpha_0(z,\bar z)+L(z,\bar z;\varphi,\psi), \tag{2.I}$$

где

$$L(z,\bar z;\varphi,\psi)=\alpha_1(z,\bar z)\varphi(z)+\alpha_2(z,\bar z)\overline{\varphi(z)}+$$
$$+\alpha_3(z,\bar z)\overline{\varphi'(z)}+\alpha_4(z,\bar z)\overline{\psi(z)}+$$
$$+\int_0^z\left[\alpha_5(z,\bar z,z_1)\varphi(z_1)+\alpha_6(z,\bar z,z_1)\psi(z_1)\right]dz_1+$$
$$+\int_0^{\bar z}\left[\alpha_7(z,\bar z,\bar z_1)\overline{\varphi(z_1)}+\alpha_8(z,\bar z,\bar z_1)\overline{\psi(z_1)}\right]d\bar z_1,$$

$$\varphi(0)=0. \tag{2.2}$$

2. Комплексные потенциалы будем искать в виде ([7],[I]):

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta}d\zeta,$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{p(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{q(\zeta)\sigma'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{2.3}$$

где $p(\zeta)$, $q(\zeta)$, $\sigma(\zeta)$ -пока неизвестные достаточно гладкие функции точки $\zeta\in S$, $\zeta=\zeta(s)$, $0\le s\le l$, $l=2\pi R$, s - дуговая абсцисса отсчитывается от некоторой фиксированной точки на положительно ориентированной окружности S.

В силу формулы Сохоцкого-Племеля (I.30) из (2.3) имеем:

$$\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\varphi(z)=\frac{1}{2}\sigma(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta}d\zeta, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\psi(z)&=\frac{1}{2}p(\zeta_0)\sigma(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{p(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\\&+\frac{1}{2}q(\zeta_0)\sigma'(\zeta_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{q(\zeta)\sigma'(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta,\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\overline{\varphi'(z)}=\frac{1}{2}\overline{\sigma'(\zeta_0)}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{\overline{\sigma'(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}d\bar\zeta, \tag{2.6}$$

где $\zeta_0=\zeta(s_0)=\xi(s_0)+i\eta(s_0)$, $0\le s_0\le l$, а сингулярные интегралы в равенствах (2.4)-(2.6) понимаются в смысле главного значения Коши.

Ясно, что

$$\int\limits^{\zeta}\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)\varphi(z_1)dz_1=\lim_{D\ni z_1^0\to\zeta_0\in S}\int\limits_0^{z_1^0}\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)\varphi(z_1)dz_1=$$

$$=\lim_{D\ni z_1^0\to\zeta_0\in S}\int_0^{z_1^0}\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right]dz_1=$$

$$=\lim_{D\ni z_1^0\to\zeta_0\in S}\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)d\zeta\left[\int_0^{z_1^0}\frac{\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)-\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}{\zeta-z_1}dz_1-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\zeta}\int_0^{z_1^0}\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)dz_1+\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\int_0^{z_1^0}\frac{dz_1}{\zeta-z_1}\right].$$

Отсюда

$$\int_0^{\zeta_0}\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)\varphi(z_1)dz_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)d\zeta\int_0^{\zeta_0}\frac{\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)-\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}{\zeta-z_1}dz_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^{\zeta_0}\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)dz_1-\frac{1}{2\pi i}\int_S\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)\sigma(\zeta)d\zeta. \quad (2.7)$$

Аналогично, получим

$$\int_0^{\bar\zeta_0}\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)\overline{\varphi(z_1)}d\bar z_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)-\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}{\bar z_1-\bar\zeta}d\bar z_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta}\int_0^{\bar\xi}\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)d\bar z_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\log\left(1-\frac{\bar\xi_0}{\bar\zeta}\right)\overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta. \quad (2.8)$$

Далее, имеем:

$$\int_0^{\zeta_0}\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,z_1)\psi(z_1)dz_1=$$

$$=\lim_{D\ni z_1^0\to\zeta_0\in S}\int_0^{z_1^0}\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,z_1)\psi(z_1)dz_1=$$

$$=\lim_{D\ni z_1^0\to\zeta_0\in S}\frac{1}{2\pi i}\int_S d\zeta\Big[p(\zeta)\sigma(\zeta)\int_0^{z_1^0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,\zeta)}{\zeta-z_1}dz_1-$$

$$-\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,\zeta)p(\zeta)\log\left(1-\frac{z_1^0}{\zeta}\right)\overline{\sigma(\zeta)}-$$

$$-\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,\zeta)q(\zeta)\log\left(1-\frac{z_1^0}{\zeta}\right)\sigma'(\zeta)+ \tag{2.9}$$

$$+q(\zeta)\sigma'(\zeta)\int_0^{z_1^0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,\zeta)}{\zeta-z_1}dz_1\Big].$$

Но,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S d\zeta\, q(\zeta)\sigma'(\zeta)\int_0^{z_1^0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,\zeta)}{\zeta-z_1}dz_1=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\Big[\sigma(\zeta)q(\zeta)\int_0^{z_1^0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\overline{\zeta}_0,\zeta)}{\zeta-z_1}dz_1\Big]_S-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\sigma(\zeta)d\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\left[q(\zeta)\int_{0}^{z_1^0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)}{\zeta-z_1}dz_1\right], \qquad (2.10)$$

где символом $\dfrac{d}{d\zeta}$ обозначается $\dfrac{1}{\zeta'(s)}\cdot\dfrac{1}{ds}$.

Далее, полагая

$$\Lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)q(\zeta)\sigma'(\zeta)\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)d\zeta,$$

где $|z|<|\zeta|=R$, $\log 1=0$,

имеем

$$\Lambda(\zeta_0)=\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\Lambda(z)=$$

$$=\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)q(\zeta)\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)d\sigma(\zeta)=$$

$$=\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\left\{\frac{1}{2\pi i}\left[\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)q(\zeta)\sigma(\zeta)\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\right]_{S}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\sigma(\zeta)d\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\left[\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)q(\zeta)\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\sigma(\zeta)d\zeta\left[\frac{d}{d\zeta}(\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)q(\zeta))\log\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)q(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\}=$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_S \sigma(\zeta)\,d\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\left[\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)q(\zeta)\right]\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)+$$

$$+\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\frac{1}{2\pi i}\int_S \alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\,q(\zeta)\sigma(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta. \qquad (2.\mathrm{II})$$

Но, в силу формулы Сохоцкого-Племеля (I.30) имеем:

$$\lim_{D\ni z\to\zeta_0\in S}\frac{1}{2\pi i}\int_S \alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\,q(\zeta)\sigma(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta-z} =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0)\sigma(\zeta_0)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S \alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\,q(\zeta)\,\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta. \qquad (2.\mathrm{I2})$$

Поэтому, в силу (2.9)-(2.I2) получим

$$\int_0^{\zeta_0}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)\psi(z_1)\,dz_1 = \frac{1}{2}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0)\sigma(\zeta_0)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S \alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\,q(\zeta)\,\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S \sigma(\zeta)\,d\zeta\left\{\frac{d}{d\zeta}\left[\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)q(\zeta)\right]\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)-\alpha_6(z_0,\bar\zeta_0,\zeta)\frac{q(\zeta)}{\zeta}+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{d\zeta}\left[q(\zeta)\int_0^{\zeta_0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}{z_1-\zeta}\,dz_1\right]\right\}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{S} p(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}\,d\zeta\Big[\int_{0}^{\zeta_0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)}{\zeta-z_1}\,dz_1-$$

$$-\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta)\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)\Big]. \tag{2.13}$$

Аналогично, имеем

$$\int_{0}^{\bar{\zeta}_0}\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{z}_1)\overline{\psi(z_1)}\,d\bar{z}_1=\frac{1}{2}\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta}_0)\overline{q(\zeta_0)}\,\overline{\sigma(\zeta_0)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta})q(\zeta)\frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}\,d\bar{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\overline{p(\zeta)}\sigma(\zeta)\,d\zeta\,\frac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}\Big[\int_{0}^{\bar{\zeta}_0}\frac{\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{z}_1)-\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta})}{\bar{z}_1-\bar{\zeta}}\,d\bar{z}_1+$$

$$+\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta})\log\left(1-\frac{\bar{\zeta}_0}{\bar{\zeta}}\right)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{S}\overline{\sigma(\zeta)}\,d\bar{\zeta}\Big\{-\frac{d}{d\bar{\zeta}}\left[\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta})\overline{q(\zeta)}\right]\log\left(1-\frac{\bar{\zeta}_0}{\bar{\zeta}}\right)+$$

$$+\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta})\frac{\overline{q(\zeta)}}{\bar{\zeta}}+$$

$$+\frac{d}{d\bar{\zeta}}\Big[\overline{q(\zeta)}\int_{0}^{\bar{\zeta}_0}\frac{\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{z}_1)-\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta})}{\bar{z}_1-\bar{\zeta}}\,d\bar{z}_1\Big]\Big\}, \tag{2.14}$$

где $\dfrac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}=\dfrac{\overline{\zeta'(s)}}{\zeta'(s)}$.

3. Принимая во внимание равенства (2.7)-(2.I4), из (2.I), (2.2), при $D \ni z \to \zeta_0 \in S$, $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$, легко следует, что

$$u(\xi_0,\eta_0) + iv(\xi_0,\eta_0) = \alpha_0(\zeta_0,\bar\zeta_0) + M(\zeta_0;\sigma), \tag{2.I5}$$

где

$$M(\zeta_0;\sigma) = \left[\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0) + \frac{1}{2}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0)\right]\sigma(\zeta_0) +$$

$$+\left[\frac{1}{2}\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0) + \frac{1}{2}\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\right]\overline{\sigma(\zeta_0)} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S \sigma(\zeta)d\zeta\left\{\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0)\frac{d}{d\zeta}\log\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta(\bar\zeta-\bar\zeta_0)} -\right.$$

$$-\alpha_4(\zeta_0,\bar\zeta_0)\frac{d\bar\zeta}{d\zeta}\,\frac{\overline{p(\zeta)}-\overline{p(\zeta_0)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_0} - \int_0^{\zeta_0}\frac{\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)-\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}{z_1-\zeta}dz_1 -$$

$$-\frac{1}{\zeta}\int_0^{\zeta_0}\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)dz_1 - \alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right) +$$

$$+\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\frac{q(\zeta)}{\zeta-\zeta_0} + \frac{d}{d\zeta}\left[\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)q(\zeta)\right]\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right) -$$

$$-\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\frac{q(\zeta)}{\zeta} + \frac{d}{d\zeta}\left[q(\zeta)\int_0^{\zeta_0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}{z_1-\zeta}dz_1\right] +$$

$$+\frac{d\bar\zeta}{d\zeta}p(\zeta)\left[\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)-\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}{\bar z_1-\bar\zeta}d\bar z_1 +\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\log\left(1-\frac{\bar\zeta_0}{\bar\zeta}\right)\right]\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_S \overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta\left\{\frac{\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)}{\bar\zeta} -\right.$$

$$-\frac{\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)}{\bar\zeta-\bar\zeta_0} - \frac{d}{d\bar\zeta}\left[\frac{\alpha_3(\zeta,\bar\zeta)-\alpha_3(\zeta_0,\bar\zeta_0)}{\bar\zeta-\bar\zeta_0} + \overline{q(\zeta)}\frac{\alpha_4(\zeta,\bar\zeta)-\alpha_4(\zeta_0,\bar\zeta_0)}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}\right] -$$

$$-\frac{d\zeta}{d\bar\zeta}\,p(\zeta)\Big[\int_0^{\zeta_0}\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)-\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}{z_1-\zeta}\,dz_1+$$

$$+\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\log\Big(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\Big)\Big]+\frac{1}{\bar\zeta}\int_0^{\bar\zeta_0}\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)\,d\bar z_1+$$

$$+\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\log\Big(1-\frac{\bar\zeta_0}{\bar\zeta}\Big)+\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)-\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}{\bar z_1-\bar\zeta}\,d\bar z_1-$$

$$-\alpha_8(\zeta,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\frac{q(\zeta)}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}+\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\frac{\overline{q(\zeta)}}{\bar\zeta}-$$

$$-\frac{d}{d\bar\zeta}\Big[\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}\Big]\log\Big(1-\frac{\bar\zeta_0}{\bar\zeta}\Big)+$$

$$-\frac{d}{d\bar\zeta}\Big[\overline{q(\zeta)}\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)-\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}{\bar z_1-\bar\zeta}\,d\bar z_1\Big]\Big\},\qquad(2.16)$$

при этом

$$\overline{p(\zeta_0)}=\frac{\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0)}{\alpha_4(\zeta_0,\bar\zeta_0)},\quad \overline{q(\zeta_0)}=-\frac{\alpha_3(\zeta_0,\bar\zeta_0)}{\alpha_4(\zeta_0,\bar\zeta_0)},\qquad(2.17)$$

предполагая, что

$$\alpha_4(\zeta_0,\bar\zeta_0)\neq 0.$$

4. Теперь выпишем коэффициенты α_j $(j=0,1,\ldots,8)$, входящие в (2.16):

$$\alpha_0(z,\zeta)=h_1(z,\zeta)+\sum_{j=1}^{4}\Big[\int_0^z n_{1j}(z,\zeta,z_1)h_j(z_1,\zeta)\,dz_1+$$

$$+\int_0^\zeta p_{1j}(z,\zeta,\zeta_1)h_j(z,\zeta_1)\,d\zeta_1+\int_0^z dz_1\int_0^\zeta q_{1j}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)h_j(z_1,\zeta_1)\,d\zeta_1\Big],$$

где

$$h_1(z,\zeta)=-\int_0^z dz_1\int_0^\zeta c_6(z_1,\zeta_1)\,d\zeta_1,\quad h_2(z,\zeta)=-\int_0^z dz_1\int_0^\zeta e_6(z_1,\zeta_1)\,d\zeta_1,$$

$$h_3(z,\zeta)=b^*(z,\zeta)\int_0^z e_6(z_1,\zeta)\,dz_1-a^*(z,\zeta)\int_0^\zeta c_6(z,\zeta_1)\,d\zeta_1-$$

$$-\int_0^z dz_1 \int_0^\zeta \left[c_6(z_1,\zeta_1) e_1^*(z,\zeta) + e_6(z_1,\zeta_1) e_2^*(z,\zeta)\right] d\zeta_1,$$

$$h_4(z,\zeta) = -a^*(z,\zeta)\int_0^z e_6(z_1,\zeta)\,dz_1 + b^*(z,\zeta)\int_0^\zeta c_6(z,\zeta_1)\,d\zeta_1 -$$

$$-\int_0^z dz_1 \int_0^\zeta \left[c_6(z_1,\zeta_1) e_1^*(z,\zeta) + e_6(z_1,\zeta_1) e_2^*(z,\zeta)\right] d\zeta_1,$$

$$2a^*(z,\zeta) = 1 + \frac{1}{\tilde{\alpha}(z,\zeta)+1}, \qquad 2b^*(z,\zeta) = 1 - \frac{1}{\tilde{\alpha}(z,\zeta)+1},$$

$$4c_6(z,\zeta) = \tilde{f}(z,\zeta) + ig(z,\zeta), \qquad 4e_6(z,\zeta) = \tilde{f}(z,\zeta) - ig(z,\zeta),$$

$$e_1^*(z,\zeta) = b^*(z,\zeta)c_2(z,\zeta) - a^*(z,\zeta)e_1(z,\zeta),$$

$$e_2^*(z,\zeta) = b^*(z,\zeta)c_1(z,\zeta) - a^*(z,\zeta)e_2(z,\zeta),$$

$$8c_1(z,\zeta) = \hat{a}_1(z,\zeta) + \hat{a}_4(z,\zeta) + i\left[\tilde{b}_1(z,\zeta) + \tilde{b}_4(z,\zeta)\right],$$

$$8c_2(z,\zeta) = \tilde{a}_1(z,\zeta) - \tilde{a}_4(z,\zeta) + 2b_2(z,\zeta) - i\left[2\tilde{a}_2(z,\zeta) - \hat{b}_1(z,\zeta) + \tilde{b}_4(z,\zeta)\right],$$

$$8e_1(z,\zeta) = \hat{a}_1(z,\zeta) + \tilde{a}_4(z,\zeta) - i\left[\tilde{b}_1(z,\zeta) + \tilde{b}_4(z,\zeta)\right],$$

$$8e_2(z,\zeta) = \tilde{a}_1(z,\zeta) - \tilde{a}_4(z,\zeta) + 2\hat{b}_2(z,\zeta) + i\left[2\tilde{a}_2(z,\zeta) - \tilde{b}_1(z,\zeta) + \tilde{b}_4(z,\zeta)\right];$$

$$\alpha_1(z,\zeta) = a^*(z,\zeta) + \int_0^\zeta \left[p_{11}(z,\zeta,\zeta_1) + a^*(z,\zeta_1) q_{13}(z,\zeta,z,\zeta_1) -\right.$$

$$\left. - b^*(z,\zeta_1) q_{14}(z,\zeta,z,\zeta_1)\right] d\zeta_1;$$

$$\alpha_2(z,\zeta)=\int_0^z[n_{12}(z,\zeta,z_1)+c_2^*(z_1,\zeta)n_{13}(z,\zeta,z_1)+e_2^*(z_1,\zeta)n_{14}(z,\zeta,z_1)-$$

$$-b^*(z_1,\zeta)q_{13}(z,\zeta,z_1,\zeta)+a^*(z_1,\zeta)q_{14}(z,\zeta,z_1,\zeta)]dz_1,$$

где

$$c_2^*(z,\zeta)=b^*(z,\zeta)e_2(z,\zeta)-a^*(z,\zeta)c_1(z,\zeta);$$

$$\alpha_3(z,\zeta)=\int_0^z[a^*(z_1,\zeta)n_{14}(z,\zeta,z_1)-b^*(z_1,\zeta)n_{13}(z,\zeta,z_1)]dz_1;$$

$$\alpha_4(z,\zeta)=1+\int_0^z[n_{11}(z,\zeta,z_1)+c_1^*(z_1,\zeta)n_{13}(z,\zeta,z_1)+e_1^*(z_1,\zeta)n_{14}(z,\zeta,z_1)]dz_1;$$

$$\alpha_5(z,\zeta,z_1)=n_{11}(z,\zeta,z_1)+c_1^*(z_1,\zeta)n_{13}(z,\zeta,z_1)+e_1^*(z_1,\zeta)n_{14}(z,\zeta,z_1)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}[-a^*(z_1,\zeta)n_{13}(z,\zeta,z_1)+b^*(z_1,\zeta)n_{14}(z,\zeta,z_1)]+$$

$$+\int_0^\zeta\{q_{11}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)+c_1^*(z,\zeta_1)q_{13}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)+e_1^*(z_1,\zeta_1)q_{14}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_1}[-a^*(z_1,\zeta_1)q_{13}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)+b^*(z_1,\zeta_1)q_{14}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)]\}d\zeta_1;$$

$$\alpha_6(z,\zeta,z_1)=n_{12}(z,\zeta,z_1)+c_2^*(z_1,\zeta)n_{13}(z,\zeta,z_1)+e_2^*(z_1,\zeta)n_{14}(z,\zeta,z_1)+$$

$$+\int_0^\zeta[q_{12}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)+c_2^*(z_1,\zeta_1)q_{13}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)+e_2^*(z_1,\zeta_1)q_{14}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)]d\zeta_1;$$

$$\alpha_7(z,\zeta,\bar\zeta_1)=\int_0^z\{q_{12}(z,\zeta,z_1,\bar\zeta_1)+c_2^*(z_1,\bar\zeta_1)q_{13}(z,\zeta,z_1,\bar\zeta_1)+e_2^*(z,\bar\zeta_1)q_{14}(z,\zeta,z_1,\bar\zeta_1)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left[-a^*(z_1,\zeta_1)q_{14}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)+b^*(z_1,\zeta_1)q_{13}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)\right]\Big\}dz_1;$$

$$\alpha_8(z,\zeta,\bar\zeta_1)=p_{11}(z,\zeta,\bar\zeta_1)+\int_0^z\Big[q_{11}(z,\zeta,z_1,\bar\zeta_1)+c_1^*(z_1,\bar\zeta_1)q_{13}(z,\zeta,z_1,\bar\zeta_1)+$$

$$+e_1^*(z_1,\bar\zeta_1)q_{14}(z,\zeta,z_1,\bar\zeta_1)\Big]dz_1. \qquad (2.18)$$

5. Возвратимся к системе (I.I3). Входящие в нее матричные ядра K, L, M как было сказано выше, явно выражаются через коэффициенты системы (I.7): a, a_j, b_j $(j=1,\dots,4)$; это делается по схемам, указанным в ([7]). Поэтому эти явные выражения здесь не приводятся. Что же касается вектор-столбца $\chi(z,\zeta)$, его компоненты имеют вид:

$$\chi_1(z,\zeta)=\varphi_1(z)+\psi_2(\zeta), \qquad \chi_2(z,\zeta)=\varphi_2(z)+\psi_1(\zeta),$$

$$\chi_3(z,\zeta)=c_1^*(z,\zeta)\varphi_1(z)+c_2^*(z,\zeta)\psi_1(\zeta)+c_2^*(z,\zeta)\varphi_2(z)+$$

$$+c_1^*(z,\zeta)\psi_2(\zeta)+a^*(z,\zeta)\varphi_1'(z)-b^*(z,\zeta)\psi_1'(\zeta),$$

$$\chi_4(z,\zeta)=e_1^*(z,\zeta)\varphi_1(z)+e_2^*(z,\zeta)\psi_1(\zeta)+e_2^*(z,\zeta)\varphi_2(z)+$$

$$+e_1^*(z,\zeta)\psi_2(\zeta)-b^*(z,\zeta)\varphi_1'(z)+a_2^*(z,\zeta)\psi_1'(\zeta).$$

Матричные резольвенты N, P, Q в системе (I.I4) алгоритмически (методом последовательных приближений) выражаются через заданные матрицы K, L, M, то есть полагая:

$$\mathcal{K} = [k_{ij}]_{4\times4}, \quad L = [\ell_{ij}]_{4\times4}, \quad M = [m_{ij}]_{4\times4},$$

$$N = [n_{ij}]_{4\times4}, \quad P = [p_{ij}]_{4\times4}, \quad Q = [q_{ij}]_{4\times4},$$

целые функции

$$n_{ij} = n_{ij}(z,\zeta,z_1), \quad p_{ij} = p_{ij}(z,\zeta,\zeta_1), \quad q_{ij} = q_{ij}(z,\zeta,z_1,\zeta_1)$$

комплексных переменных z, ζ, z_1, ζ_1 известным образом ([3], [7]) выражаются через целые функции

$$k_{ij} = k_{ij}(z,\zeta,z_1), \quad \ell_{ij} = \ell_{ij}(z,\zeta,\zeta_1), \quad m_{ij} = m_{ij}(z,\zeta,z_1,\zeta_1),$$

когда $i,j = 1,\dots,4$.

6. Для того, чтобы первую основную граничную задачу, сформулированную выше в пункте I главы П, записать более компактно, равенство (2.16) представим в виде:

$$M(\zeta_0;\sigma) = \beta_1(\zeta_0)\sigma(\zeta_0) + \beta_2(\zeta_0)\overline{\sigma(\zeta_0)} + \int_S \beta_3(\zeta_0,\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta + \int_S \beta_4(\zeta_0,\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}d\bar{\zeta}, \tag{2.19}$$

где, очевидно, $\beta_1(\zeta_0)$, $\beta_2(\zeta_0)$, $\beta_3(\zeta_0,\zeta)$, $\beta_4(\zeta_0,\zeta)$,соответственно, обозначают выражения в квадратных скобках при $\sigma(\zeta_0), \overline{\sigma(\zeta_0)}$ в (2.16) и в фигуральных скобках под знаком интегралов (2.16), включая множитель $\frac{1}{2\pi i}$.

Теперь из (2.15), в силу (2.19), имеем:

$$u(\xi_0,\eta_0) + i v(\xi_0,\eta_0) = \alpha_0(\zeta_0,\bar{\zeta}_0) + \beta_1(\zeta_0)\sigma(\zeta_0) + \beta_2(\zeta_0)\overline{\sigma(\zeta_0)} + \int_S \beta_3(\zeta_0,\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta + \int_S \beta_4(\zeta_0,\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}d\bar{\zeta},$$

$$u(\xi_0,\eta_0)-iv(\xi_0,\eta_0)=\overline{\alpha_0(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)}+\overline{\beta_1(\zeta_0)}\,\overline{\sigma(\zeta_0)}+\overline{\beta_2(\zeta_0)}\sigma(\zeta_0)+ \tag{2.20}$$

$$+\int_S \overline{\beta_3(\zeta_0,\zeta)}\,\overline{\sigma(\zeta)}\,d\bar{\zeta}+\int_S \overline{\beta_4(\zeta_0,\zeta)}\,\sigma(\zeta)\,d\zeta .$$

Систему уравнений (2.20) представим векторно-матричной форме:

$$B_0(\zeta_0)\rho(\zeta_0)-\int_S B_0(\zeta_0,\zeta)\rho(\zeta)d\zeta=C_0(\zeta_0), \tag{2.21}$$

где

$$B_0(\zeta_0)=\begin{bmatrix}\beta_1(\zeta_0), & \beta_2(\zeta_0)\\ \overline{\beta_2(\zeta_0)}, & \overline{\beta_1(\zeta_0)}\end{bmatrix},\quad \rho(\zeta_0)=\begin{bmatrix}\sigma(\zeta_0)\\ \overline{\sigma(\zeta_0)}\end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

$$B_0(\zeta_0,\zeta)=\begin{bmatrix}-\beta_3(\zeta_0,\zeta), & \beta_4(\zeta_0,\zeta)\dfrac{R^2}{\zeta^2}\\ -\overline{\beta_4(\zeta_0,\zeta)}, & \overline{\beta_3(\zeta_0,\zeta)}\dfrac{R^2}{\zeta^2}\end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

$$C_0(\zeta_0)=\begin{bmatrix}u(\xi_0,\eta_0)+iv(\xi_0,\eta_0)-\alpha_0(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)\\ u(\xi_0,\eta_0)-iv(\xi_0,\eta_0)-\overline{\alpha_0(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)}\end{bmatrix}; \tag{2.24}$$

в матрице (2.23) множитель $\frac{R^2}{\zeta^2}$ появляется по той причине, что, когда граница S области D является окружностью радиуса R с центром в начале координат $|\zeta|=R$, $\zeta=Re^{i\arg\zeta}$, очевидно, имеем:

$$d\zeta=iRe^{i\arg\zeta}d\arg\zeta,\quad d\bar{\zeta}=-iRe^{-i\arg\zeta}d\arg\zeta;$$

поэтому $\dfrac{d\bar{\zeta}}{d\zeta}=-e^{-2i\arg\zeta}=-\dfrac{R^2}{\zeta^2}$.

7. Для исследования системы интегральных уравнений (2.21) предположим, что рассматриваемая круговая область D, с границей S, занята плоским слабо-неоднородным изотропным термоупругим телом. Это значит, что его коэффициенты Ляме $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ достаточно мало отличаются от положительных постоянных λ_0, μ_0, соответственно:

$$\begin{aligned} \lambda(x,y) &= \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1(x,y), \\ \mu(x,y) &= \mu_0 + \varepsilon\mu_1(x,y), \end{aligned} \qquad (2.25)$$

где ε есть малый параметр.

Принимая во внимание представления (2.25) из равенства (1.5) получим соответствующие представления для коэффициентов системы (1.4)

$$a(x,y),\ a_j(x,y),\ b_j(x,y),\quad j=1,2,\ldots,5.$$

С помощью последних представлений получаются соответствующие представления всех заданных функций, входящих в Допуская, что параметр $\varepsilon=0$, легко получается, что:

$$\begin{aligned} &\beta_1(\zeta_0) = const = \kappa_0 = \frac{\lambda_0+3\mu_0}{2(\lambda_0+2\mu_0)}, \\ &\beta_2(\zeta_0) \equiv 0, \\ &\det B(\zeta_0) = \begin{vmatrix} \kappa_0, & 0 \\ 0, & \kappa_0 \end{vmatrix} = \kappa_0^2 > 0. \end{aligned} \qquad (2.26)$$

Нетрудно видеть, что при $\varepsilon=0$, $\alpha=0$ из (2.21) в силу (2.26), в несколько других обозначениях получается известное интегральное уравнение Д.И.Шермана (см.,например,[1],[3]), соответствующее первой основной плоской задаче однородного

однородного изотропного упругого круга, когда отсутствуют объемные силы:

$$K_0\sigma(\zeta_0)+\frac{K_0}{2\pi i}\int\limits_S \sigma(\zeta)\,d\log\frac{\zeta-\zeta_0}{\bar{\zeta}(\zeta-\bar{\zeta}_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \overline{\sigma(\zeta)}\,d\,\frac{\zeta-\bar{\zeta}_0}{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}= \tag{2.27}$$

$$=u(\xi_0,\eta_0)+iv(\xi_0,\eta_0).$$

8. В правой части системы интегральных уравнений (2.2I), вектор $C_0(\zeta)$ зависит от компонент $u(\xi_0,\eta_0)$, $v(\xi_0,\eta_0)$ заданного на границе круговой области упругого перемещения и еще от функции $\alpha_0(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)$, определенной первым равенством в (2.I8). В силу (I.7), (I.8) $\alpha_0(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)$ содержит неизвестную температуру $\theta=\theta(x,y)$.

По постановке первой граничной задачи (см.пункт I, главы П), на границе S круговой области D, кроме компонент вектора упругого перемещения, задано еще граничное значение температуры $\theta(x,y)$. В силу уравнений (I.6), (I.32) требуется определить решения уравнения

$$\Delta\theta(x,y)=-\frac{1}{c}Q_0(x,y), \tag{2.28}$$

принадлежащее к функциональному классу $C^2(D)\cap C^1(D\cup S)$ и удовлетворяющее граничному условию:

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(\xi_0,\eta_0)\in S}\theta(x,y)=\theta(\xi_0,\eta_0). \tag{2.29}$$

Как хорошо известно, решение граничной задачи (2.28), (2.29) имеет вид:

$$\theta(x,y)=\frac{1}{2\pi c}\iint\limits_D Q_0(\xi_1,\eta_1)\log\frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2}}\,d\xi_1 d\eta_1+$$
$$+\frac{1}{2\pi R}\int\limits_S\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\omega+r^2}\,\theta(\xi,\eta)\,ds, \tag{2.30}$$

где

$$r=+\sqrt{x^2+y^2},\qquad \omega=\arg z-\arg\zeta_0,$$

$$z=x+iy,\qquad \zeta_0=\xi_0+i\eta_0.$$

Подставляя (2.30) в (I.8) функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ можно считать заданными,и, следовательно, функцию, входящую в (2.24) также можно считать заданной. Поэтому, в силу (2.24), правую часть $C_0(\zeta)$ системы интегральных уравнений (2.2I), можно считать полностью определенной.

9. Теперь приступим к исследованию системы интегральных уравнений (2.2I).

Начнем с преобразования некоторых членов под знаками интегралов в (2.I6). Очевидно, имеем:

$$\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)\frac{q(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}=\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)q(\zeta)-\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}+$$
$$+\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0};$$

$$\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}=\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)\left(\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}-\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)+\frac{\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=$$

$$=\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)\,d\log\frac{\bar\zeta-\bar\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}+\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0};$$

$$\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\frac{\overline{q(\zeta)}\,d\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}=\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}\left(\frac{d\bar\zeta}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}-\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)+$$

$$+\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}=\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}\,d\log\frac{\bar\zeta-\bar\zeta_0}{\zeta-\zeta_0}+$$

$$+\left[\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}-\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\right]+$$

$$+\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_0}.$$

Систему интегральных уравнений (2.2I) можно представить в виде:

$$\left[\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0)+\frac{1}{2}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0)\right]\sigma(\zeta_0)+$$

$$+\left[\frac{1}{2}\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)+\frac{1}{2}\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\right]\overline{\sigma(\zeta_0)}+\frac{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0)}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}-$$

$$-\frac{\left[\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)+\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\right]}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\sigma(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S\gamma(\zeta_0,\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_S\delta(\zeta_0,\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}\,d\zeta=$$

$$=u(\xi_0,\eta_0)+iv(\xi_0,\eta_0)-\alpha_0(\zeta_0,\bar\zeta_0),\tag{2.3I}$$

$$\left[\frac{1}{2}\overline{\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)}+\frac{1}{2}\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)}q(\zeta_0)\right]\sigma(\zeta_0)+\left[\overline{\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)}\,\overline{q(\zeta_0)}\right]\overline{\sigma(\zeta_0)}+\frac{\left[\overline{\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)}+\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)}q(\zeta_0)\right]}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0}-$$

$$-\frac{\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)}\,\overline{q(\zeta_0)}}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\sigma(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta-\zeta_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_S\gamma^*(\zeta_0,\zeta)\sigma(\zeta)d\zeta+$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S} \delta^*(\zeta_0, \zeta) \overline{\sigma(\zeta)}\, d\zeta =$$

$$= u(\xi_0, \eta_0) - i v(\xi_0, \eta_0) - \overline{\alpha_0(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)}, \tag{2.32}$$

где

$$\gamma(\zeta_0, \zeta) = \alpha_1(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) \frac{d}{d\zeta} \log \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)} + R^2 \alpha_4(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) \frac{\overline{p(\zeta)} - \overline{p(\zeta_0)}}{\zeta^2(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)} -$$

$$- \int_0^{\zeta_0} \frac{\alpha_5(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, z_1) - \alpha_5(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta)}{z_1 - \zeta} dz_1 - \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta_0} \alpha_5(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, z_1) dz_1 -$$

$$- \alpha_5(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta) \log\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right) + \frac{\alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta) q(\zeta) - \alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta_0) q(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} +$$

$$+ \frac{d}{d\zeta}\left[\alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta) q(\zeta)\right] \log\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right) - \alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta) \frac{q(\zeta)}{\zeta} +$$

$$+ q(\zeta) \int_0^{\zeta_0} \frac{\alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, z_1) - \alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta)}{z_1 - \zeta} dz_1 -$$

$$- R^2 \frac{p(\zeta)}{\zeta^2} \left[\int_0^{\bar{\zeta}_0} \frac{\alpha_8(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \bar{z}_1) - \alpha_8(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\zeta})}{\bar{z}_1 - \bar{\zeta}} d\bar{z}_1 + \alpha_8(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\zeta}) \log\left(1 - \frac{\bar{\zeta}_0}{\bar{\zeta}}\right)\right],$$

$$\delta(\zeta_0, \zeta) = \alpha_2(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) \frac{d}{d\zeta} \log \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)} -$$

$$- \frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\alpha_3(\zeta, \bar{\zeta}) - \alpha_3(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + \overline{q(\zeta)} \frac{\alpha_4(\zeta, \bar{\zeta}) - \alpha_4(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0}\right] -$$

$$- p(\zeta)\left[\int_0^{\zeta_0} \frac{\alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, z_1) - \alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta)}{z_1 - \zeta} dz_1 + \alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \zeta) \log\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)\right] -$$

$$- \frac{1}{\zeta} \int_0^{\bar{\zeta}_0} \alpha_6(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \bar{z}_1) d\bar{z}_1 - \frac{R^2}{\zeta^2} \alpha_7(\zeta_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\zeta}) \log\left(1 - \frac{\bar{\zeta}_0}{\bar{\zeta}}\right) -$$

$$-\frac{R^2}{\bar\zeta^2}\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)-\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}{\bar z_1-\bar\zeta}d\bar z_1+\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}\log\frac{\bar\zeta-\bar\zeta_0}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}-$$

$$-\frac{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}-\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}}{\zeta-\zeta_0}-\frac{d}{d\zeta}\left[\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}\right]\log\left(1-\frac{\bar\zeta_0}{\bar\zeta}\right)-$$

$$-\frac{1}{\zeta}\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)\overline{q(\zeta)}-\frac{d}{d\zeta}\left[\overline{q(\zeta)}\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)-\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}{\bar z_1-\bar\zeta}d\bar z_1\right],$$

$$\gamma^*(\zeta_0,\zeta)=-\frac{\overline{\alpha_2(\zeta_0,\zeta_0)}}{\zeta}+\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\overline{\alpha_3(\zeta,\bar\zeta)}-\overline{\alpha_3(\zeta_0,\bar\zeta_0)}}{\zeta-\zeta_0}+q(\zeta)\frac{\overline{\alpha_4(\zeta,\bar\zeta)}-\overline{\alpha_4(\zeta_0,\bar\zeta_0)}}{\zeta-\zeta_0}\right]-$$

$$-R^2\frac{\overline{p(\zeta)}}{\zeta^2}\left[\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)}-\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}}{\bar z_1-\bar\zeta}d\bar z_1+\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}\log\left(1-\frac{\bar\zeta_0}{\bar\zeta}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{\zeta}\int_0^{\zeta_0}\overline{\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)}dz_1-\overline{\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)-\int_0^{\zeta_0}\frac{\overline{\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)}-\overline{\alpha_7(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}}{z_1-\zeta}dz_1+$$

$$+\frac{\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}q(\zeta)-\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)}q(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}+\frac{d}{d\zeta}\left[\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}q(\zeta)\right]\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)-$$

$$-\frac{1}{\zeta}\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}q(\zeta)+\frac{d}{d\zeta}\left[q(\zeta)\int_0^{\zeta_0}\frac{\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)}-\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}}{z_1-\zeta}dz_1\right],$$

$$\delta^*(\zeta_0,\zeta)=\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0)\frac{d}{d\zeta}\log\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta(\bar\zeta-\bar\zeta_0)}+\alpha_4(\zeta_0,\bar\zeta_0)\frac{p(\zeta)-p(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0}-$$

$$-\frac{R^2}{\zeta^2}\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\overline{\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)}-\overline{\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}}{\bar z_1-\bar\zeta}d\bar z_1-\frac{1}{\zeta}\int_0^{\zeta_0}\overline{\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)}d\bar z_1-$$

$$-\frac{R^2}{\zeta^2}\overline{\alpha_5(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}\log\left(1-\frac{\bar\zeta_0}{\bar\zeta}\right)+\frac{R^2}{\zeta^2}\frac{\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}\overline{q(\zeta)}-\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)}\overline{q(\zeta_0)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}-$$

$$-\frac{d}{d\zeta}\left[\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}\,\overline{q(\zeta)}\right]\log\left(1-\frac{\bar\zeta_0}{\bar\zeta}\right)-\frac{1}{\zeta}\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}\,\overline{q(\zeta)}-$$

$$-\frac{d}{d\zeta}\left[\overline{q(\zeta)}\int_0^{\bar\zeta_0}\frac{\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,z_1)}-\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta)}}{\bar z_1-\bar\zeta}d\bar z_1\right]-$$

$$-\overline{p(\zeta)}\left[\int_0^{\zeta_0}\frac{\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar z_1)}-\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}}{z_1-\zeta}dz_1+\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta)}\log\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)\right].$$

I0. Введем матрицы:

$$A(\zeta_0)=\begin{bmatrix}\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0)+\frac{1}{2}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0), & \frac{1}{2}\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)+\frac{1}{2}\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\\ \frac{1}{2}\overline{\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)}+\frac{1}{2}\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)q(\zeta_0), & \overline{\alpha_1(\zeta_0,\bar\zeta_0)}+\frac{1}{2}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

$$B(\zeta_0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)q(\zeta_0), & -\frac{1}{2}\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)-\frac{1}{2}\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)\overline{q(\zeta_0)}\\ \frac{1}{2}\overline{\alpha_2(\zeta_0,\bar\zeta_0)}+\frac{1}{2}\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar\zeta_0,\bar\zeta_0)}q(\zeta_0), & -\frac{1}{2}\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar\zeta_0,\zeta_0)}\overline{q(\zeta_0)}\end{bmatrix} \tag{2.34}$$

$$K(\zeta_0,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\begin{bmatrix}\gamma(\zeta_0,\zeta), & \delta(\zeta_0,\zeta)\\ \gamma^*(\zeta_0,\zeta), & \delta^*(\zeta_0,\zeta)\end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Тогда систему (2.3I), (2.32) можно представить в векторно-матричной форме:

$$A(\zeta_0)p(\zeta_0)+\frac{B(\zeta_0)}{\pi i}\int_S\frac{p(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+\int_S K(\zeta_0,\zeta)p(\zeta)d\zeta=f(\zeta_0), \tag{2.36}$$

где

$$f(\zeta_0)=\begin{bmatrix}u(\xi_0,\eta_0)+iv(\xi_0,\eta_0)-\alpha_0(\zeta_0,\bar\zeta_0)\\ u(\xi_0,\eta_0)-iv(\xi_0,\eta_0)-\overline{\alpha_0(\zeta_0,\bar\zeta_0)}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}g(\zeta_0)\\ \overline{g(\zeta_0)}\end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\rho(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \sigma(\zeta_0) \\ \overline{\sigma(\zeta_0)} \end{bmatrix} .$$

Из (2.33), (2.34), очевидно, имеем:

$$A(\zeta_0)-B(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \alpha_1(\zeta_0,\bar{\zeta}_0), & \alpha_2(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)+\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta}_0)\overline{q(\zeta_0)} \\ 0 & , \overline{\alpha_1(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)}+\overline{\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta_0)}\,\overline{q(\zeta_0)} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

$$A(\zeta_0)+B(\zeta_0)= \begin{bmatrix} \alpha_1(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)+\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta_0)q(\zeta_0), & 0 \\ \overline{\alpha_2(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)}+\overline{\alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta}_0)}q(\zeta_0), & \overline{\alpha_1(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Когда $\varepsilon=0$, из (I.5) и (2.I6), легко следует, что

$$\alpha_1(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)\equiv const \equiv \frac{\lambda_0+3\mu_0}{2(\lambda_0+2\mu_0)} \equiv k_0 , \quad \alpha_2(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)\equiv 0,$$

$$\alpha_6(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\zeta_0)\equiv 0 , \quad \alpha_8(\zeta_0,\bar{\zeta}_0,\bar{\zeta}_0)\equiv 0 . \tag{2.40}$$

Поэтому, в силу (2.38)-(2.40), получаем, что при $\varepsilon=0$:

$$det\left[A(\zeta_0)-B(\zeta_0)\right]=det\left[A(\zeta_0)+B(\zeta_0)\right]=k_0^2>0. \tag{2.41}$$

Теперь вспомним хорошо известную формулу Н.И.Мусхелишвили[2] об индексе системы одномерных сингулярных интегральных уравнений (2.36):

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{\det(A-B)}{\det(A+B)}\right]_S \tag{2.42}$$

при условии, что

$$\det(A-B) \neq 0, \qquad \det(A+B) \neq 0.$$

Из (2.4I), (2.42) следует, что при $\varepsilon = 0$ имеем:

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{K_0^2}{K_0^2}\right]_S = 0.$$

Поэтому, в силу непрерывности матриц (2.33), (2.34), заключаем, что при достаточно малых значениях параметра ε, имеем также $\varkappa = 0$.

Следовательно, в силу хорошо известной теории системы однородных сингулярных интегральных уравнений (см.,например, [2]), рассматриваемая система (2.36) является так называемой нормальной системой сингулярных интегральных уравнений с нулевым индексом.

При $\varepsilon = 0$,система сингулярных интегральных уравнений (2.36) переходит в систему (2.27) интегральных уравнений типа Фредгольма, являющуюся известной системой Д.И.Шермана (см., например,[3]) в несколько других обозначениях (см.систему (2.27).

Известно (см.,например,[3]), что при $\varepsilon = 0$ однородная система, соответствующая системам интегральных уравнений (2.36), (2.27) имеет только нулевое решение.

Поэтому, в силу выше сказанного, система сингулярных уравнений (2.36) имеет единственное непрерывное решение. В силу (2.37), если $u(\xi_0, \eta_0)$, $v(\xi_0, \eta_0)$, $\alpha_0(\zeta_0, \bar{\zeta}_0)$ принадлежат к функциональным классам Л.Г.Магнарадзе (см.выше, пункт 6 главы I) $I_{p+1}\,(p \geq 0)$ и I_{∞} ,тогда на основе его результатов заключаем, что при указанных условиях, каждое непрерывное решение системы (2.36) $\sigma(\zeta)$ принадлежат, соответственно, к функциональным классам $I_p\,(p \geq 0)$ и I_{∞}.

Следовательно, первая основная граничная задача статики слабо-неоднородного изотропного термоупругого круга, сформулированная в начале пункта I главы П, полностью решена.

Г Л А В А III

ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА СТАТИКИ СЛАБО- НЕОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕРМОУПРУГОГО КРУГА

I. В настоящей главе решается следующая граничная задача: требуется определить термоупругое статическое состояние слабо-неоднородного изотропного круга D с центром в точке $(0,0)$ и радиуса R ,когда на его границе S заданы вектор внешнего напряжения (X_n, Y_n), $X_n = X_n(\xi,\eta)$, $Y_n = Y_n(\xi,\eta)$ (n означает внешнюю нормаль), $\xi + i\eta = \zeta$, $|\zeta| = R$ и температура θ, $\theta = \theta(\xi,\eta)$.

Теперь вспомним формулы (2) главы I, а также формулы Колосова-Мусхелишвили (см.,например,[3] , стр.24I). Тогда получим:

$$X_x + Y_y = 2(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial z}(u+iv) + \frac{\partial}{\partial \bar z}(u-iv)\right] - 2(3\lambda+2\mu)\alpha\theta , \tag{3.I}$$

$$X_x - Y_y + 2iX_y = 4\mu\frac{\partial}{\partial \bar z}(u+iv), \tag{3.2}$$

где сохраняются обозначения главы I.

На S имеем равенства:

$$X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) = X_n, \tag{3.3}$$

$$Y_x \cos(n,x) + Y_y \cos(n,y) = Y_n. \tag{3.4}$$

Поэтому получим

$$(X_x + Y_y)\zeta'(s) - (X_x - Y_y + 2iX_y)\overline{\zeta'(s)} = 2i(X_n - iY_n), \tag{3.5}$$

где

$$\zeta=\zeta(s)=Re^{i(n,x)}, \quad \bar{\zeta}=\overline{\zeta(s)}=Re^{-i(n,x)}, \quad (n,x)=\frac{s}{R}. \tag{3.6}$$

Из (I)-(6) следует, что на S имеем

$$2(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}(u+iv)+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}(u-iv)\right]\zeta'(s)-4\mu\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}(u+iv)\overline{\zeta'(s)}=$$
$$=2i(X_n+iY_n)+2(3\lambda+2\mu)\alpha\theta\zeta'(s). \tag{3.7}$$

Пользуясь формулой Л.Г.Магнарадзе (I.I5), равенство (3.7), в результате простых преобразований, можно представить следующим образом:

$$\beta_1(s_0)\varphi(\zeta_0)+\beta_2(s_0)\overline{\varphi(\zeta_0)}+\beta_3(s_0)\overline{\varphi'(\zeta_0)}+\beta_4(s_0)\overline{\psi(\zeta_0)}+$$
$$+\int_0^{s_0}\left[\beta_5(s)\varphi(\zeta)+\beta_6(s)\overline{\varphi(\zeta)}+\beta_7(s)\psi(\zeta)+\beta_8(s)\overline{\psi(\zeta)}\right]ds+$$
$$+\int_0^{s_0}ds\int_0^{\zeta}\left[\beta_9(s,z_1)\varphi(z_1)+\beta_{10}(s,z_1)\psi(z_1)\right]dz_1+$$
$$+\int_0^{s_0}ds\int_0^{\bar{\zeta}}\left[\beta_{11}(s,z_1)\overline{\varphi(z_1)}+\beta_{12}(s,\bar{z}_1)\overline{\psi(z_1)}\right]d\bar{z}_1=$$
$$=\int_0^{s_0}f_0(s)ds+c_0, \tag{3.8}$$

где

$$\zeta_0=\zeta(s_0)\in S, \quad \zeta=\zeta(s)\in S, \quad 0\le s_0\le l, \quad 0\le s\le l, \tag{3.9}$$

c_0 -произвольное комплексное постоянное число, а

$$\beta_1(s_0)=\frac{1}{2}\tilde{\alpha}(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)\left[\alpha_1(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_0}\alpha_3(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)\right], \tag{3.10}$$

$$\beta_2(s_0)=\frac{1}{2}\tilde{\alpha}(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)\frac{\zeta'(s_0)}{\overline{\zeta'(s_0)}}\left[\overline{\alpha_1(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)}+\frac{\partial}{\partial\zeta_0}\alpha_3(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)\right]-$$

$$-\alpha_2(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)-\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}_0}\alpha_3(\zeta_0,\bar{\zeta}_0)+\frac{1}{\overline{\zeta'(s_0)}}\frac{d}{ds_0}\alpha_3(\zeta_0,\bar{\zeta}_0), \tag{3.II}$$

$$\beta_3(s_0)=-\alpha_3(\zeta_0,\bar{\zeta}_0), \tag{3.I2}$$

$$\beta_4(s_0)=-\alpha_4(\zeta_0,\bar{\zeta}_0), \tag{3.I3}$$

$$\beta_5(s)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_1(\zeta,\bar{\zeta})+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_2(\zeta,\bar{\zeta})}+\alpha_5(\zeta,\bar{\zeta},\zeta)\right]-$$

$$-\overline{\zeta'(s)}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_1(\zeta,\bar{\zeta})-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left(\alpha_1(\zeta,\bar{\zeta})+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_3(\zeta,\bar{\zeta})}\right)\right], \tag{3.I4}$$

$$\beta_6(s)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_1(\zeta,\bar{\zeta})}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_2(\zeta,\bar{\zeta})+\overline{\alpha_5(\zeta,\bar{\zeta},\zeta)}\right]-$$

$$-\overline{\zeta'(s)}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_2(\zeta,\bar{\zeta})+\alpha_7(\zeta,\bar{\zeta},\bar{\zeta})\right]-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}\frac{\zeta'(s)}{\overline{\zeta'(s)}}\left(\overline{\alpha_1(\zeta,\bar{\zeta})}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_3(\zeta,\bar{\zeta})\right)-\alpha_2(\zeta,\bar{\zeta})-\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_3(\zeta,\bar{\zeta})-\frac{1}{\overline{\zeta'(s)}}\frac{d}{ds}\alpha_3(\zeta,\bar{\zeta})\right], \tag{3.I5}$$

$$\beta_7(s)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_4(\zeta,\bar{\zeta})}+\alpha_6(\zeta,\bar{\zeta},\zeta)\right], \tag{3.I6}$$

$$\beta_8(s)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_4(\zeta,\bar{\zeta})+\alpha_6(\zeta,\bar{\zeta},\zeta)\right]-\overline{\zeta'(s)}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_4(\zeta,\bar{\zeta})+\right.$$

$$\left.+\alpha_8(\zeta,\bar{\zeta},\bar{\zeta})\right]+\frac{d}{ds}\alpha_4(\zeta,\bar{\zeta}), \tag{3.I7}$$

$$\beta_9(s,z_1)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_5(\zeta,\bar{\zeta},z_1)+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_7(\zeta,\bar{\zeta},\bar{z}_1)}\right]-$$

$$-\overline{\zeta'(s)}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_5(\zeta,\bar{\zeta},z_1), \tag{3.I8}$$

$$\beta_{10}(s,z_1)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_6(\zeta,\bar{\zeta},z_1)+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_8(\zeta,\bar{\zeta},\bar{z}_1)}-\right.$$

$$-\overline{\zeta'(s)}\,\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_6(\zeta,\bar{\zeta},z_1), \tag{3.19}$$

$$\beta_{11}(s,\bar{z}_1)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_5(\zeta,\bar{\zeta},z_1)}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_7(\zeta,\bar{\zeta},\bar{z}_1)\right]-$$

$$-\overline{\zeta'(s)}\,\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_7(\zeta,\bar{\zeta},\bar{z}_1), \tag{3.20}$$

$$\beta_{12}(s,\bar{z}_1)=\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_6(\zeta,\bar{\zeta},z_1)}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_8(\zeta,\bar{\zeta},\bar{z}_1)-\right.$$

$$-\overline{\zeta'(s)}\,\alpha_8(\zeta,\bar{\zeta},\bar{z}_1), \tag{3.21}$$

$$f_0(\zeta)=\frac{i}{2\tilde{\mu}(\zeta,\bar{\zeta})}\left[X_n(s)+iY_n(s)\right]+\frac{\zeta'(s)}{2}\left[3\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})-1\right]\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\tilde{\theta}(\zeta,\bar{\zeta})-$$

$$-\frac{\zeta'(s)}{2}\tilde{\alpha}(\zeta,\bar{\zeta})\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_0(\zeta,\bar{\zeta})+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\overline{\alpha_0(\zeta,\bar{\zeta})}\right]+\overline{\zeta'(s)}\,\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\alpha_0(\zeta,\bar{\zeta}). \tag{3.22}$$

Функции $f_0(\zeta)$ будем считать заданной достаточно гладкой периодической функцией дуги s (отсчитанной от некоторой фиксированной точки окружности S), периода ℓ, $0\le s\le \ell$, $\ell=2\pi R$, ибо температура $\theta(x,y)$, очевидно, опять определяется по формуле (2.30) по граничному условию (2.28).

2. Исходя из вида граничного условия (3.8), легко убедиться сравнением с граничным условием первой основной граничной задачи, вытекающем из формулы (2.I) при $D\ni z\to\zeta_0\in S$, что в случае второй основной граничной задачи комплексные потенциалы следует искать в виде:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta}d\zeta,$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{p(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{q(\zeta)\sigma'(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{3.23}$$

где

$$\overline{p(\zeta)} = \frac{\beta_1(s)}{\beta_4(s)}, \qquad \overline{q(\zeta)} = -\frac{\beta_3(s)}{\beta_4(s)}. \tag{3.24}$$

Из (3.8) следует, что решение второй основной граничной задачи, сформулированной в начале пункта I настоящей главы, сводятся к решению граничной задачи теории аналитической функции (3.8), то есть - к нахождению двух аналитических (голоморфных) функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $z = x + iy$, $\varphi(0) = 0$, внутри круга D, $|z| < R$, по граничному условию (3.8) на окружности $|\zeta| = R$.

Граничное условие (3.8), в силу соотношений (2.4)-2.6) представим следующим образом:

$$\frac{1}{2}\beta_1(s_0)\sigma(\zeta_0) + \frac{\beta_1(s_0)}{2\pi i}\int_S \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta - \frac{\beta_1(s_0)}{2\pi i}\int_S \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta}d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2}\beta_2(s_0)\overline{\sigma(\zeta_0)} - \frac{\beta_2(s_0)}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}d\bar\zeta + \frac{\beta_2(s_0)}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\bar\zeta}d\bar\zeta +$$

$$+\frac{1}{2}\beta_3(s_0)\overline{\sigma'(\zeta_0)} - \frac{\beta_3(s_0)}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\sigma'(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}d\bar\zeta +$$

$$+\frac{1}{2}\beta_4(s_0)p(\zeta_0)\overline{\sigma(\zeta_0)} + \frac{\beta_4(s_0)}{2\pi i}\int_S \frac{p(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}}{\zeta-\zeta_0}d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2}\beta_4(s_0)q(\zeta_0)\sigma'(\zeta_0) + \frac{\beta_4(s_0)}{2\pi i}\int_S \frac{q(\zeta)\sigma'(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta +$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1\,\beta_5(s_1)\left[\frac{1}{2}\sigma(\zeta_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_1}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta}d\zeta\right] +$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1\,\beta_6(s_1)\left[\frac{1}{2}\overline{\sigma(\zeta_1)} - \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}d\bar\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\bar\zeta}d\bar\zeta\right] +$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1\, \beta_7(s_1)\left[\frac{1}{2}\rho(\zeta_1)\sigma(\zeta_1)+\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\rho(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}}{\zeta-\zeta_1}d\zeta\right]+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1\, \beta_7(s_1)\left[\frac{1}{2}q(\zeta_1)\sigma'(\zeta_1)+\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{q(\zeta)\sigma'(\zeta)}{\zeta-\zeta_1}d\zeta\right]+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1\, \beta_8(s_1)\left[\frac{1}{2}\overline{\rho(\zeta_1)}\sigma(\zeta_1)-\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\rho(\zeta)}\sigma(\zeta)}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}d\bar\zeta\right]+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1\, \beta_8(s_1)\left[\frac{1}{2}\overline{q(\zeta_1)}\overline{\sigma'(\zeta_1)}-\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{q(\zeta)}\sigma'(\zeta)}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}d\bar\zeta\right]+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1 \lim_{D\ni z_1'\to\zeta_1\in S}\int_0^{z_1'}\beta_9(s_1,z_1)\varphi(z_1)dz_1+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1 \lim_{D\ni z_1'\to\zeta_1\in S}\int_0^{z_1'}\beta_{10}(s_1,z_1)\psi(z_1)dz_1+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1 \lim_{\bar D\ni \bar z_1'\to\bar\zeta_1\in \bar S}\int_0^{\bar z_1'}\beta_{11}(s_1,\bar z_1)\overline{\varphi(z_1)}d\bar z_1+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1 \lim_{\bar D\ni \bar z_1'\to\bar\zeta_1\in \bar S}\int_0^{\bar z_1'}\beta_{12}(s_1,\bar z_1)\overline{\psi(z_1)}d\bar z_1=$$

$$=\int_0^{s_0} f_0(s)ds+c_0\,. \qquad (3.25)$$

3. Для того, чтобы из равенства (3.25) получить сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\sigma(\zeta)$,примем во внимание равенства (3.24) и следующие соотношения (аналогичные преобразования см.выше, пункты I–3 главы I и пункт 9 главы П):

$$\int_0^{s_0}\beta_7(s_1)ds_1\,\frac{1}{2\pi i}\int_S q(\zeta)\sigma'(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-\zeta_1}=\int_0^{s_0}\beta_7(s_1)ds_1\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{q(\zeta)-q(\zeta_1)}{\zeta-\zeta_1}\sigma'(\zeta)d\zeta+$$

$$+\int_0^{s_0}\beta_7(s_1)ds_1\frac{q(\zeta_1)}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma'(\zeta)}{\zeta-\zeta_1}d\zeta=$$

$$= -\int_0^{s_0}\beta_7(s_1)ds_1\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)\frac{d}{d\zeta}\frac{q(\zeta)-q(\zeta_1)}{\zeta-\zeta_1}+$$

$$+\int_0^{s_0}\beta_7(s_1)q(\zeta_1)\,ds_1\frac{d}{d\zeta_1}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_1}d\zeta =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)\,d\zeta\int_0^{s_0}\beta_7(s_1)\frac{d}{d\zeta}\frac{q(\zeta)-q(\zeta_1)}{\zeta-\zeta_1}ds_1+$$

$$+\frac{\beta_7(s_0)q(\zeta_0)}{\zeta'(s_0)}\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)d\zeta\int_{\zeta(0)}^{\zeta(s_0)}\frac{d}{d\zeta_1}\left[\frac{\beta_7(s_1)q(\zeta_1)}{\zeta'(s_1)}\right]\frac{d\zeta_1}{\zeta-\zeta_1}+\mathrm{const}\,; \tag{3.26}$$

$$-\int_0^{s_0}\beta_8(s_1)ds_1\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{q(\zeta)}\,\overline{\sigma'(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}d\bar\zeta = -\int_0^{s_0}\beta_8(s_1)ds_1\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{q(\zeta)}-\overline{q(\zeta_1)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}\overline{\sigma'(\zeta)}d\bar\zeta-$$

$$-\int_0^{s_0}\beta_8(s_1)\overline{q(\zeta_1)}ds_1\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\sigma'(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}d\bar\zeta =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta\int_0^{s_0}\beta_8(s_1)\frac{d}{d\bar\zeta}\frac{\overline{q(\zeta)}-\overline{q(\zeta_1)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}ds_1 -$$

$$-\frac{\beta_8(s_0)\overline{q(\zeta_0)}}{\overline{\zeta'(s_0)}}\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\bar\zeta-\bar\zeta_0}d\bar\zeta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta\int_{\overline{\zeta(0)}}^{\overline{\zeta(s_0)}}\frac{d}{d\bar\zeta_1}\left[\frac{\overline{\beta_8(s_1)q(\zeta_1)}}{\overline{\zeta'(s_1)}}\right]\frac{d\bar\zeta_1}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}+\mathrm{const}\,; \tag{3.27}$$

$$\int_0^{s_0}ds_1\lim_{z_1'\to\zeta_1}\int_0^{z_1'}\beta_{10}(s_1,z_1)\psi(z_1)dz_1 =$$

$$=\int_0^{s_0}ds_1\lim_{z_1'\to\zeta_1}\int_0^{z_1'}\beta_{10}(s_1,z_1)dz_1\left[\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\rho(\zeta)\sigma(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{q(\zeta)\sigma'(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta\right]=$$

$$=\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\zeta_1}dz_1\,\beta_{10}(s_1,z_1)\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\rho(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}}{\zeta-z_1}d\zeta +$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1 \lim_{z_1'\to\zeta_1} \int_0^{z_1'} dz_1 \beta_{10}(s_1,z_1)\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{q(\zeta)-q(z_1)}{\zeta-z_1}\sigma'(\zeta)d\zeta +$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1 \lim_{z_1'\to\zeta_1} \int_0^{z_1'} dz_1 \beta_{10}(s_1,z_1)q(z_1)\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\sigma'(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_S p(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}d\zeta\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\zeta_1}dz_1\frac{\beta_{10}(s_1,z_1)}{\zeta-z_1}+$$

$$+\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\zeta_1}dz_1\beta_{10}(s_1,z_1)\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)d\zeta\frac{d}{d\zeta}\frac{q(\zeta)-q(z_1)}{\zeta-z_1}\right]+$$

$$+\int_0^{s_0} ds_1 \lim_{z_1'\to\zeta_1} \int_0^{z_1'} dz_1 \beta_{10}(s_1,z_1)q(z_1)\frac{d}{dz_1}\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-z_1}d\zeta =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_S p(\zeta)\overline{\sigma(\zeta)}d\zeta\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\zeta_1}\frac{\beta_{10}(s_1,z_1)}{\zeta-z_1}dz_1-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)d\zeta\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\zeta_1}\beta_{10}(s_1,z_1)\frac{d}{d\zeta}\frac{q(\zeta)-q(z_1)}{\zeta-z_1}dz_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{s_0}\beta_{10}(s_1,z_1)q(\zeta_1)\sigma(\zeta_1)ds_1+\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)d\zeta\int_0^{s_0}ds_1\beta_{10}(s_1,\zeta_1)q(\zeta_1)\frac{1}{\zeta-\zeta_1}-$$

$$-\frac{q(0)}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^{s_0}\beta_{10}(s_1,0)ds_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_S\sigma(\zeta)d\zeta\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\zeta_1}\frac{d}{dz_1}\left[\beta_{10}(s,z_1)q(z_1)\right]\frac{dz_1}{\zeta-z_1}; \qquad (3.28)$$

$$\int_0^{s_0}ds_1\lim_{\bar z_1'\to\bar\zeta_1}\int_0^{\bar z_1'}\beta_{12}(s_1,\bar z_1)\overline{\psi(z_1)}d\bar z_1=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{p(\zeta)}\sigma(\zeta)d\bar\zeta\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\bar\zeta_1}\frac{\beta_{12}(s_1,\bar z_1)}{\bar\zeta-\bar z_1}d\bar z_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\bar\zeta_1}\beta_{10}(s_1,\bar z_1)\frac{d}{d\bar\zeta}\frac{\overline{q(\zeta)}-\overline{q(z_1)}}{\bar\zeta-\bar z_1}d\bar z_1+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{s_0}\beta_{10}(s_1,\bar\zeta_1)\overline{q(\zeta_1)}\,\overline{\sigma(\zeta_1)}ds_1-\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta\int_0^{s_0}\beta_{10}(s_1,\bar\zeta_1)\overline{q(\zeta_1)}\frac{ds_1}{\bar\zeta-\bar\zeta_1}+$$

$$+\frac{\overline{q(0)}}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}\,\frac{d\zeta}{\zeta}\int_0^{s_0}\beta_{10}(s_1,0)ds_1+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_S\overline{\sigma(\zeta)}d\bar\zeta\int_0^{s_0}ds_1\int_0^{\zeta_1}\frac{d}{d\bar z_1}\left[\beta_{10}(s,\bar z_1)\overline{q(z_1)}\right]\frac{d\bar z_1}{\bar\zeta-\bar z_1}.$$

(3.29)

4. Теперь пользуясь равенствами (3.26)-(3.29), граничное условие (3.25) можно представить в виде:

$$\beta_1(s_0)\sigma(\zeta_0)+\frac{1}{2}\beta_2(s_0)\overline{\sigma(\zeta_0)}+$$

$$+\frac{\beta_7(s_0)q(\zeta_0)}{\zeta'(s_0)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\sigma(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta-\frac{\beta_8(s_0)q(\zeta_0)}{\overline{\zeta'(s_0)}}\frac{1}{2\pi i}\int_S\frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\zeta-\zeta_0}d\zeta+$$

$$+\int_0^{s_0}\beta_{13}(s_0,s)\sigma(\zeta)ds+\int_0^{s_0}\beta_{14}(s_0,s)\overline{\sigma(\zeta)}ds+$$

$$+\int_S\beta_{15}(s_0,s)\,\sigma(\zeta)ds+\int_S\beta_{16}(s_0,s)\sigma(\zeta)ds=$$

$$=\int_0^{s}f_0(\zeta)ds+\gamma_0\,, \qquad (3.30)$$

где $\beta_j(s_0,s)$, $j=13,\dots,16$, очевидным образом выражаются через подынтегральные функции, фигурирующие в равенствах (3.25)-(3.29).

Переходя в (3.30) к комплексно сопряженным величинам, очевидно, получим:

$$\overline{\beta_1(s_0)}\,\overline{\sigma(\zeta_0)} + \frac{1}{2}\overline{\beta_2(s_0)}\sigma(\zeta_0) -$$

$$-\frac{\overline{\beta_7(s_0)\,q(\zeta_0)}}{\overline{\zeta'(s_0)}}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{\overline{\sigma(\zeta)}}{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}d\bar{\zeta} + \frac{\overline{\beta_8(s_0)}\,q(\zeta_0)}{\zeta'(s_0)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S}\frac{\sigma(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0}d\bar{\zeta}+$$

$$+\int\limits_0^{s_0}\overline{\beta_{13}(s_0,s)}\,\overline{\sigma(\zeta)}ds + \int\limits_0^{s_0}\overline{\beta_{14}(s_0,s)}\,\sigma(\zeta)\,ds +$$

$$+\int\limits_{S}\beta_{15}(s_0,s)\,\overline{\sigma(\zeta)}ds + \int\limits_{S}\overline{\beta_{16}(s_0,s)}\,\overline{\sigma(\zeta)}ds = \int\limits_0^{s_0}\overline{f_0(\zeta)}ds + \bar{\gamma}_0\,. \qquad (3.31)$$

Теперь систему уравнений (3.30), (3.31) представим в векторно-матричной форме:

$$A(\zeta_0)\rho(\zeta_0) + \frac{B(\zeta_0)}{\pi i}\int\limits_{S}\frac{\rho(\zeta)}{\zeta-\zeta_0}d\zeta +$$

$$+\int\limits_0^{s_0}C(s_0,s)\rho(\zeta)ds + \int\limits_{S}K(s_0,s)\rho(\zeta)ds = \int\limits_0^{s_0}f(\zeta)ds + \gamma, \qquad (3.32)$$

где

$$A(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \beta_1(s_0), & \frac{1}{2}\beta_2(s_0) \\ \frac{1}{2}\overline{\beta_2(s_0)}, & \overline{\beta_1(s_0)} \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

$$B(\zeta_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\beta_7(s_0)\,q(\zeta_0)}{2\zeta'(s_0)}, & -\dfrac{\beta_8(s_0)\overline{q(\zeta_0)}}{2\overline{\zeta'(s_0)}} \\ \dfrac{\overline{\beta_8(s_0)}\,q(\zeta_0)}{2\zeta'(s_0)}, & -\dfrac{\overline{\beta_7(s_0)\,q(\zeta_0)}}{2\overline{\zeta'(s_0)}} \end{bmatrix} \qquad (3.34)$$

$$\rho(\zeta) = \begin{bmatrix} \sigma(\zeta) \\ \overline{\sigma(\zeta)} \end{bmatrix}, \quad f(\zeta) = \begin{bmatrix} f_0(\zeta) \\ \overline{f_0(\zeta)} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \bar{\gamma}_0 \end{bmatrix}; \qquad (3.35)$$

матрицы $C(s_0,s)$, $K(s_0,s)$ являются квазирегулярными (содержащие сингулярности логарифмического типа) периодическими функциями переменных s_0, s, периода l, $l=2\pi R$; они очевидным образом выражаются через соответствующие члены из равенств (3.25)-(3.29).

Вспоминая понятие слабо-неоднородного изотропного упругого тела, приведенное выше, в пункте 6 главы П, легко заметить, что (3.32) представляет систему сингулярных интегральных уравнений нормального типа с нулевым индексом.

В самом деле, полагая $\varepsilon=0$ в равенствах (2.25), получим $\lambda=\lambda_0$, $\mu=\mu_0$ и равенства (3.10)-(3.13), (3.16), (3.17) в силу формул Л.Г.Магнарадзе (2.1), (2.2), (2.16) дают:

$$\alpha_1(\zeta,\bar\zeta)\equiv\frac{a+2}{2(a+1)},\quad \alpha_2(\zeta,\bar\zeta)\equiv 0,$$

$$\alpha_3(\zeta,\bar\zeta)\equiv-\frac{a}{2(a+1)}\zeta,\quad \alpha_4(\zeta,\bar\zeta)\equiv 1,$$

$$\beta_2(\zeta,\bar\zeta)\equiv\frac{a}{2}\frac{\zeta'}{\bar\zeta'}\left(\bar\alpha_1+\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_3\right)-\alpha_2-\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\alpha_3+\frac{\zeta'}{\bar\zeta'}\frac{d}{ds_0}\alpha_3\equiv$$

$$\equiv\frac{\zeta'}{\bar\zeta'}\left\{\frac{a}{2}\left[\frac{a+2}{2(a+1)}-\frac{a}{2(a+1)}\right]-\frac{a}{2(a+1)}\right\}\equiv\frac{\zeta'}{\bar\zeta'}\cdot 0\equiv 0,$$

$$\beta_7(\zeta,\bar\zeta)=\frac{\zeta'}{2}a\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\bar\alpha_4+\alpha_6\right)\equiv 0,$$

$$\beta_8(\zeta,\bar\zeta)=\frac{\zeta'}{2}a\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\alpha_4+\bar\alpha_6\right)-\bar\zeta'\left(\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\alpha_4+\alpha_8\right)+\frac{d}{ds}\alpha_4\equiv 0.$$

Поэтому при $\varepsilon=0$ получим

$$B(\zeta_0)\equiv 0,\qquad C(s_0,s)\equiv 0,$$

и система сингулярных интегральных уравнений (3.32) настоящей главы переходит (при условии $\alpha=0$ и в других обозначениях) в известную систему интегральных уравнений типа Фредгольма (см., например, [I], [3]) для решения второй основной плоской граничной задачи статики однородного изотропного упругого тела.

Теперь ясно, что при достаточно малых значениях параметра ε, система (3.32) представляет систему сингулярных интегральных уравнений нормального типа с нулевым индексом.

Таким образом, граничное условие (3.25) приведено к эквивалентной нормальной системе сингулярных интегральных уравнений с нулевым индексом. Но, граничное условие (3.25) было получено из основного исходного граничного условия (3.7) неопределенным интегрированием с одной произвольной постоянной γ_0. Поэтому граничное условие (3.7), вообще говоря, не эквивалентно системе (3.32).

Из равенства (2.8) следует необходимое условие для эквивалентности уравнений (3.7) и (3.32); это условие представляется равенством:

$$\int_S \Big\{ \beta_5(s)\varphi(\zeta)+\beta_6(s)\overline{\varphi(\zeta)}+\beta_7(s)\psi(\zeta)+\beta_8(s)\overline{\psi(\zeta)}+$$
$$+\int_0^{\zeta(s)}\big[\beta_9(s,z_1)\varphi(z_1)+\beta_{10}(s,z_1)\psi(z_1)\big]dz_1+\int_0^{\overline{\zeta(s)}}\big[\beta_{11}(s,\bar z_1)\overline{\varphi(z_1)}+$$
$$+\beta_{12}(s,\bar z_1)\overline{\psi(z_1)}\big]d\bar z_1\Big\}ds = \int_S f_0(\zeta)ds \tag{3.36}$$

или, выражая в (3.36) функции $\varphi(\zeta)$, $\overline{\varphi(\zeta)}$, $\psi(\zeta)$, $\overline{\psi(\zeta)}$, $\varphi(z_1), \psi(z_1), \overline{\varphi(z_1)}, \overline{\psi(z_1)}$ через одну неизвестную функцию $\sigma(\zeta)$ с помощью соотношений (2.4)-(2.I4) равенством

$$\int_S \big[L(s)\sigma(s)+M(s)\overline{\sigma(s)}\big]ds = \int_S f_0(\zeta)ds, \tag{3.37}$$

где функции $L(s)$, $M(s)$ очевидным образом выражаются через заданные функции α_j, $j=1,2,\dots,8$ с помощью формул (3.I0)-(3.2I).

Переходя к комплексно сопряженным величинам, необходимое условие (3.37) и сопряженное с ним условие можно представить в векторно-матричной форме

$$\int\limits_{S} N(s)\rho(\zeta)ds = \int\limits_{S} f(\zeta)ds, \qquad (3.38)$$

где

$$\rho(\zeta) = \begin{bmatrix} \sigma(\zeta) \\ \overline{\sigma(\zeta)} \end{bmatrix}, \qquad N(s) = \begin{bmatrix} L(s), & M(s) \\ \overline{M(s)}, & \overline{L(s)} \end{bmatrix}.$$

Полагая $\varepsilon = 0$, условие (3.38) переходит (при условии $\alpha = 0$ и в других обозначениях) в известное необходимое условие (см., например, [I],[3]) для решения второй основной плоской граничной задачи статики однородного изотропного упругого тела.

5. Теперь докажем, что при определенных условиях необходимое условие (3.38) является также достаточным для разрешимости рассматриваемой задачи.

В самом деле, предположим, что условие (3.38) соблюдено. Тогда, как было доказано выше в пункте 4 настоящей главы, решение граничной задачи (3.7) приводится к решению эквивалентной нормальной системы сингулярных интегральных уравнений (3.32) с нулевым индексом. Так как при $\varepsilon = 0$ получается разрешимая система интегральных уравнений типа Фредгольма с соответствующим необходимым условием (3.38) (см., например, [I] , [3]), можем заключить, что при достаточно малых значениях параметра ε, рассматриваемая вторая основная граничная задача разрешима при соблюдении условия (3.38) и при достаточно гладких условиях относительно функций, заданных на границе S круга D ; здесь применяются хорошо известные классы непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица-Гёльдера, или более общие функциональные классы Л.Г.Магнарадзе, о которых было сказано выше в пунктах 6-9 главы I и в пункте IO главы П.

ЛИТЕРАТУРА

I. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М., 1966.

2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

3. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М., 1948.

4. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. - М., 1976.

5. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел.-М.,1976.

6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. - М., 1966.

7. Магнарадзе Л.Г. //Доклады семинара Института прикладной математики Тбилисского гос.университета,1986,20,стр.7-13.

8. Магнарадзе Л.Г. Об одном обобщении теоремы Племеля-Привалова //Сообщ. АН Груз.ССР, т.УШ, № 8, 1947, стр.509-516.

9. Магнарадзе Л.Г. Об одном обобщении теоремы И.И.Привалова и его применения к некоторым линейным граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям// Докл. АН СССР, т.ХУШ, № 4, 1949, стр.657-660.

10. Магнарадзе Л.Г. Влияние творчества И.Н.Векуа на развитие некоторых направлений математического анализа //Доклады расш.засед.семинара ИПМ им.И.Н.Векуа, т.I, № I,1985, стр.7-24.

II. Абесадзе Т.П. Решение основных граничных задач статической термоупругости для экспоненциально неоднородного круга // Труды Всесоюзного совещания-семинара в Тбилиси 27 ноября -3 декабря 1984г.,т.П, Тбилисск.ун-т,1984,стр.9-16.

12. Абесадзе Т.П. Оценки остаточных членов разложений решений основных граничных задач статической термоупругости для экспоненциально неоднородного круга //Доклады расш.засед. семинара ИПМ им.И.Н.Векуа, 1986, т.2, № I, стр.II-I4.

13. Абесадзе Т.П. Решение основных граничных задач статической термоупругости для экспоненциально неоднородной конечной односвязной области //Тезисы XI конференции математиков высших учебных заведений Грузинской ССР, 1986, стр.170.

14. Абесадзе Т.П. Представление рядами общего решения основных дифференциальных уравнений статической термоупругости для экспоненциально неоднородного круга //Доклады расш. засед.семинара ИПМ им.И.Н.Векуа, 1989, т.4, № 2, стр.5-9.

15. Абесадзе Т.П. Основные граничные задачи для экспоненциально неоднородного изотропного термоупругого круга //Доклады расш.засед. семинара ИПМ им.И.Н.Векуа, 1991, т.6, № 2, стр.9-12.