ГРУЗИНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

БИЦАДЗЕ РУСУДАН ГЕОРГИЕВНА

УДК 517.956.35

НАЧАЛЬНЫЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук - ГВАЗАВА Д.К.

Тбилиси-1991

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория краевых, начальных и характеристических задач для нелинейных уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов имеет многолетнюю историю. И это вполне закономерно, так как эта теория представляет самостоятельный интерес и вместе с тем коренным образом связана с многочисленными проблемами прикладного характера. При математическом моделировании многих физических явлений и технических проблем в ряде случаев возникают задачи указанного типа для линейных и, главным образом, нелинейных уравнений. Для исследования начальных или характеристических задач, поставленных для линейных гиперболических уравнений, уже давно существует стройная теория, и почти до конца разработано множество весьма эффективных методов. Эта картина существенно иная в случае уравнений с нелинейностью в главной части. В отличие от нелинейных эллиптических уравнений в данном случае линейная постановка задач автоматически не переносится. Известные постановки характеристических задач для нелинейных гиперболических уравнений часто лишены всякого смысла. Это обстоятельство в основном определяется зависимостью действительных характеристических многообразий от искомых решений.

После основополагающих работ Е.Пикара [1], Г.Дарбу [2] и Е.Гурса [3], посвященных исследованию задачи Коши и характеристических задач для гиперболических уравнений второго порядка, изучение начальных и характеристических задач как для линейных, так и для квазилинейных гиперболических уравнений в дальнейшем были продолжены с нарастающей интенсивностью [4-56].

Здесь следует отметить работы А.В.Бицадзе [4], [18], [19], в которых построены целые классы точных решений нелинейных уравнений и на их основании получены глобальные теоремы разрешимости ряда начальных, краевых и характеристических задач.

Для определенных классов квазилинейных гиперболических и вырождающихся гиперболических уравнений в работах Д.К.Гвазава [20-25] были сформулированы характеристические и смешанные задачи, в которых учитывались структурные и качественные свойства интегралов рассматриваемых уравнений. Применением характеристических инвариантов Римана и построением общих интегралов было проведено глобальное исследование поставленных задач.

В настоящей работе, посвященной изучению некоторых начальных и характеристических задач для одного класса квазилинейных уравнений с действительными характеристиками, предложены новые нелинейные варианты известных характеристических задач Гурса и Дарбу. На основании построенных общих интегралов исследованы начальная задача Коши, смешанная начально-характеристическая задача Дарбу и задача Гурса. Для них установлены теоремы разрешимости, которые носят глобальный характер.

В первой главе рассмотрен класс квазилинейных уравнений

$$x^2\left(u_y^4 u_{xx} - u_{yy}\right) = c u u_y^4, \quad -\frac{1}{4} < c = const. \tag{I}$$

Уравнение (I) гиперболично всюду, кроме точек прямой $x=0$, где вырождается его порядок, и нулей производной u_y решения u, в которых уравнение имеет параболическое вырождение.

Уравнения вида (I) часто встречаются в приложениях. В частности, они возникают при математическом моделировании процессов, связанных с нелинейными колебаниями [57, 58].

С.Кумеи и Г.Блумен [59] рассмотрели частный случай уравнения (I), когда $c=0$, и его общее решение представили при помощи генератора групп решений, основанных на контактных преобразованиях.

Построение генератора группы решений уравнения (I) в общем случае сопряжено с существенными затруднениями, а полностью получить в более или менее приемлемой форме общий интеграл не удается. С этой целью мы предпочли обратиться к классическому методу характеристик и попытались построить общий интеграл в классе гиперболических решений. Этот класс для уравнения (I) определяется соотношением

$$u_y(x,y) \neq 0 .$$

Так как соответствующее (I) характеристическое уравнение

$$x^2 u_y^4 dy^2 - x^2 dx^2 = 0$$

для гиперболических решений определяет два действительных отличных друг от друга корня

$$\lambda_1 = \frac{1}{u_y^2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{u_y^2},$$

дифференциальные характеристические системы определяются следующим образом:

$$\begin{cases} u_y^2 dy - dx = 0 \\ x^2 u_y^4 du_x - x^2 u_y^2 du_y - c u_y^4 u \, dx = 0 \\ du - u_x dx - u_y dy = 0 , \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u_y^2 dy + dx = 0 \\ x^2 u_y^4 du_x + x^2 u_y^2 du_y - c u_y^4 u \, dx = 0 \\ du - u_x dx - u_y dy = 0 . \end{cases} \tag{3}$$

В классе гиперболических решений уравнения (I) справедливы следующие утверждения:

Теорема. Каждая из характеристических систем (2), (3) уравнения (I) допускает ровно по два первых интеграла, которые задаются формулами

$$\begin{cases} \xi \equiv \left(u_y^{-1} + u_x\right) x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1} = const \\ \xi_1 \equiv \left(u_y^{-1} + u_x\right) x^{1-\alpha} - (1-\alpha) u x^{-\alpha} = const, \end{cases} \tag{4}$$

и

$$\begin{cases} \eta \equiv \left(u_y^{-1} - u_x\right) x^{\alpha} + \alpha u x^{\alpha-1} = const \\ \eta_1 \equiv \left(u_y^{-1} - u_x\right) x^{1-\alpha} + (1-\alpha) u x^{-\alpha} = const, \end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4c+1}\right)$.

Теорема. Уравнение (I) допускает два промежуточных интеграла вида

$$\varphi'\left(\left(u_y^{-1} + u_x\right) x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1}\right) = \left(u_y^{-1} + u_x\right) x^{1-\alpha} - (1-\alpha) u x^{-\alpha}, \tag{6}$$

$$\psi'\left(\left(u_y^{-1} - u_x\right) x^{\alpha} + \alpha u x^{\alpha-1}\right) = \left(u_y^{-1} - u_x\right) x^{1-\alpha} + (1-\alpha) u x^{-\alpha}, \tag{7}$$

где φ, ψ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

Применением полученных первых интегралов установлена следующая теорема:

Теорема. Общий интеграл уравнения (I) в терминах характеристических переменных ξ, η представляется соотношениями

$$x = \left(\frac{\varphi'(\xi) + \psi'(\eta)}{\xi + \eta}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \tag{8}$$

$$y=\frac{1}{4(1-2\alpha)}\left[(\xi+\eta)(\psi'(\eta)-\varphi'(\xi))+2(\varphi(\xi)-\psi(\eta))\right], \tag{9}$$

$$u=\frac{1}{1-2\alpha}\left(\xi x^{1-\alpha}-\varphi'(\xi)x^{\alpha}\right), \tag{I0}$$

$$u_x=\left(\frac{\xi}{2(1-2\alpha)}-\frac{\eta}{2}\right)x^{-\alpha}-\frac{\alpha}{1-2\alpha}\varphi'(\xi)x^{\alpha-1}, \tag{II}$$

$$u_y=\frac{2}{\xi+\eta}x^{\alpha}, \tag{I2}$$

где φ, ψ – произвольные трижды непрерывно дифференцируемые функции.

Во второй главе для уравнения (I) рассмотрены начальная задача Коши и несколько вариантов нелинейных постановок задач Гурса и Дарбу.

Сначала исследована задача Коши. Пусть $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – заданные на интервале $a\le x\le b$, $a>0$, соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции. При этом предполагается, что

$$\nu(x)\ne 0,\quad x\in[a,b].$$

З а д а ч а К о ш и: найти регулярное решение уравнения (I) вместе со своей областью определения по начальным условиям:

$$u\Big|_{y=0}=\tau(x),\qquad u_y\Big|_{y=0}=\nu(x),\qquad x\in[a,b]. \tag{I3}$$

При предположении

$$M'(x)\ne 0,\quad \Lambda'(x)\ne 0, \tag{I4}$$

где

$$M(x) \equiv (\nu^{-1}(x) + \tau'(x))\, x^{\alpha} - \alpha\, \tau(x)\, x^{\alpha-1},$$

$$\Lambda(x) \equiv (\nu^{-1}(x) - \tau'(x))\, x^{\alpha} + \alpha\, \tau(x)\, x^{\alpha-1},$$

начальные условия (I3) в терминах характеристических переменных позволяют определить произвольные функции φ , ψ , фигурирующие в общем интеграле (8-I2) уравнения (I), после подстановки которых в (8-I0) получим решение задачи (I), (I3) в терминах переменных ξ, η.

Для выражения полученного решения в терминах переменных x, y сперва переходим на плоскость переменных t, z :

$$t = M^{-1}(\xi), \qquad z = \Lambda^{-1}(\eta),$$

в терминах которых решение задачи (I), (I3) имеет вид

$$x = X(\Lambda, M, t, z), \qquad y = Y(\Lambda, M, t, z), \tag{I5}$$

$$u = U(\Lambda, M, t, z). \tag{I6}$$

Чтобы выразить переменные t, z в виде функций переменных x, y:

$$t = T(x, y), \qquad z = Z(x, y),$$

вводим в рассмотрение комбинации

$$g(t, z) = M(t) + \Lambda(z),$$

$$G(t, z) = M(t)\, t^{1-2\alpha} - (1-2\alpha)\, \tau(t)\, t^{-\alpha} + \Lambda(z)\, z^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\, \tau(z)\, z^{-\alpha},$$

$$f(t, z) = M'(t)\, G(t, z) - g(t, z)\, \frac{\partial}{\partial t} G(t, z),$$

$$F(t,z)=\Lambda'(z)\,G(t,z)-g(t,z)\,\frac{\partial}{\partial z}G(t,z),$$

от которых требуется, чтобы всюду

$$g(t,z)\neq 0,\quad G(t,z)\neq 0,\quad f(t,z)\neq 0,\quad F(t,z)\neq 0. \qquad (17)$$

<u>Теорема</u>. При соблюдении условий (14), (17) для каждой произвольно взятой действительной ветви многозначной функции $x=X(\Lambda,M,t,z)$ существует регулярное решение задачи (1), (13) с областью определения G, ограниченной характеристическими кривыми

$$T(x,y)=a,\quad T(x,y)=b,\quad Z(x,y)=a,\quad Z(x,y)=b$$

и целиком расположенной в полосе $\{a\le x\le b,\ y\in R^1\}$

При выполнении условия

$$|\nu(x)|>\varepsilon>0,$$

отдельно в каждом из следующих случаев $c\geqslant 2$, $0\le c<2$, $-\frac{1}{4}\le c<0$ найдены прямоугольники, целиком содержащие области определения решения задачи (1), (13).

В качестве примера рассмотрен случай, когда $c=\frac{3}{4}$, $\tau(x)=x$, $\nu(x)=\frac{2}{3}$.

Опираясь на свойства инвариантов Римана (4), (5), изучена характеристическая задача Гурса для уравнения (1) с данными на дугах заданных кривых

$$\gamma_1:\ y=f_1(x),\quad x\in[a,b],\quad a>0$$

и

$$\gamma_2:\ y=f_2(x),\quad x\in[a,d],$$

которые объявляются характеристиками уравнения (1).

Предполагается, что f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы до третьего порядка включительно, причем f_1 монотонно возрастает, а f_2 монотонно убывает и в точке $x=\alpha$ эти функции удовлетворяют следующим условиям согласованности:

$$f_1(\alpha)=f_2(\alpha), \qquad f_1'(\alpha)=-f_2'(\alpha).$$

З а д а ч а Г у р с а: на плоскости переменных x, y найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (I) вместе с областью его определения $\mathcal{D}$, если вдоль этого решения кривые γ_1, γ_2 являются характеристиками и в общей точке $(\alpha, f_1(\alpha))$ оно принимает заданное значение

$$u(\alpha, f_1(\alpha))=\vartheta, \tag{18}$$

а значение инварианта ξ на характеристике γ_1 равно заданному числу δ

$$\left(\left(u_y^{-1}+u_x\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}\right)\Big|_{\gamma_1}=\delta. \tag{19}$$

Без ограничения общности предположим

$$f_1(\alpha)=f_2(\alpha)=0.$$

Чтобы найти условия разрешимости задачи Гурса, через точки $(x_1, f_1(x_1))$ и $(x_2, f_2(x_2))$ дуг γ_1, γ_2, не совпадающие с точкой $(\alpha, 0)$, проводим соответственно характеристики γ_4 семейства $\eta=const$ и γ_3 семейства $\xi=const$. Если эти характеристики пересекаются, то в точке их пересечения решение задачи (I), (18), (19) удается представить в виде

$$x=\Phi(x_1, x_2), \tag{20}$$

$$y=\Psi(x_1, x_2), \tag{21}$$

$$u = \frac{1}{1-2\alpha}\Big[\big(\delta \mp 2\sqrt{f_1'(a)}\,a^{\alpha} \pm 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\,x_2^{\alpha}\big)\Phi^{1-\alpha}(x_1, x_2) +$$

$$+\Big((2\alpha-1)\vartheta a^{-\alpha} \mp 2\sqrt{f_1'(a)}\,a^{1+\alpha} + \delta a^{1-2\alpha} \pm 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\,x_2^{1-\alpha}\Big)\Phi^{\alpha}(x_1, x_2)\Big], \quad (22)$$

где $a \leq x_1 \leq b$, $a \leq x_2 \leq d$, причем область $\mathcal{D}$ определения решений задается равенствами (20), (2I).

В предположении, что якобиан преобразования

$$0 < \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, x_2)}\right| < +\infty, \quad (23)$$

решение задачи Гурса можно представить в явном виде в терминах переменных x, y.

Условия того, что характеристики одного и того же семейства не пересекаются, следующие:

$$\left[\Phi(x_1^0, x_2) - \Phi(x_1', x_2)\right]^2 + \left[\Psi(x_1^0, x_2) - \Psi(x_1', x_2)\right]^2 \neq 0, \quad (24)$$

$$\left[\Phi(x_1, x_2^0) - \Phi(x_1, x_2')\right]^2 + \left[\Psi(x_1, x_2^0) - \Psi(x_1, x_2')\right]^2 \neq 0, \quad (25)$$

при любых $x_1, x_1^0, x_1' \in [a, b]$, $x_2, x_2^0, x_2' \in [a, d]$, $x_1^0 \neq x_1'$, $x_2^0 \neq x_2'$.

В этих условиях область $\mathcal{D}$ будет ограничена заданными характеристиками γ_1, γ_2 и характеристиками

$$\gamma_5: \; x = \Phi(x_1, d), \quad y = \Psi(x_1, d), \quad x_1 \in [a, b] \quad (26)$$

и

$$\gamma_6: \; x = \Phi(b, x_2), \quad y = \Psi(b, x_2), \quad x_2 \in [a, d] \quad (27)$$

выходящими из точек $(d, f_2(d))$ и $(b, f_1(b))$ дуг γ_2 и γ_1.

<u>Теорема</u>. При условиях (23-25) для каждой произвольно взятой действительной ветви многозначной функции (20) существует регуляр-

ное решение задачи (I), (I8), (I9) с областью определения $\mathcal{D}$, ограниченной характеристиками γ_1, γ_2 и γ_5, γ_6 , заданными уравнениями (26), (27).

Теорема. Число решений задачи (I), (I8), (I9) не превосходит числа решений функциональной системы (20), (2I).

Для иллюстрации рассмотрен случай, когда $c = \frac{3}{4}$, $\vartheta = 0$; $f_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$, $x \in [1, 3]$; $f_2(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$,

$x \in [1, 4]$; $\delta = 1$.

Рассматривается также задача Дарбу для уравнения (I). В качестве дуги характеристики берется кривая

$$\gamma: \ y = g(x), \quad x \in [a, d], \quad a > 0.$$

Предполагается, что функция $g(x)$ принадлежит классу $C^3[a, d]$, монотонно возрастает и $g(a) = 0$.

Будем считать, что функция $\tau(x)$ принадлежит классу $C^2[a, b]$, , где $b < d$. Положим $\Delta: a \le x \le b$, $y = 0$.

Задача Дарбу: найти регулярное решение u уравнения (I) со своей областью определения, если вдоль этого решения кривая γ является характеристикой, а само решение удовлетворяет начальному условию

$$u\Big|_{\Delta} = \tau(x), \tag{28}$$

причем

$$u_y(a, 0) > 0. \tag{29}$$

Чтобы решить эту задачу через произвольную точку $(x_1, 0) \in \Delta$, $x_1 \ne a$ проведем характеристику Γ_1 семейства $\eta = const$. Точку пересечения характеристик γ и Γ_1 обозначим через $M(x_0, g(x_0))$.

При соблюдении условия

$$\frac{g''(x_0)}{\sqrt{g'(x_0)}}\, x_0^{\alpha}\left(x_0^{1-\alpha}-x_1^{1-2\alpha}\right)+2\sqrt{g'(x_0)}\left((1-\alpha)x_0^{-\alpha}-\alpha x_0^{\alpha-1}x_1^{1-2\alpha}\right)\neq 0 \qquad (30)$$

существует непрерывная функция

$$x_0 = h(x_1),\quad x_1 \in (a, b].$$

С помощью этой функции определяем след производной $u_y|_\Delta$ через данные задачи Дарбу (I), (28), (29), для которой вводим обозначение

$$u_y|_\Delta = \nu(x). \qquad (31)$$

Так как даны функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, для решения задачи Дарбу сперва рассмотрим задачу Коши: найти регулярное решение уравнения (I) со своей областью определения G по начальным условиям (28), (31).

Таким образом, задача Дарбу (I), (28), (29) сама разделилась на две составные части, из которых первая - задача Коши. Нам известны условия, гарантирующие разрешимость задачи Коши. Если возьмем какое-либо решение этой задачи, мы вычислим его след $F(x)$ на характеристике Γ нисходящегося семейства $\eta = const$, выпущенной из точки $\left(h(b),\ g(h(b))\right)$. Затем приступим к рассмотрению второй составной части изучаемой задачи. Эта составная часть представляет собой следующую характеристическую задачу: найти регулярное решение уравнения (I) со своей областью определения $\mathcal{D}$, если вдоль этого решения кривые γ, Γ являются характеристиками и имеют место соотношения

$$\xi|_\gamma = \delta, \qquad u|_\Gamma = F(x),$$

где число $\delta = \xi(a, 0)$.

Эта задача при определенных условиях может иметь множество решений. Из них мы выбираем те решения, которые из области G

непрерывно продолжают решение задачи Коши в область $\mathcal{D}$.

Теорема. Задача Дарбу (I), (28), (29) при условиях (I4), (I7), (23-25), (30) имеет регулярное решение с областью определения $G \cup \mathcal{D} \cup \Gamma \setminus \{(b,0), (h(b), g(h(b)))\}$, ограниченной дугами характеристических кривых

$$x = \Phi(x_1, b), \quad y = \Psi(x_1, b) + g(h(b)), \quad x_1 \in [h(b), d];$$

$$x = \Phi(d, x_2), \quad y = \Psi(d, x_2) + g(h(b)), \quad x_2 \in [h(b), b];$$

$$y = g(x); \quad Z(x,y) = a; \quad T(x,y) = b. \,.$$

В качестве примера рассматривается случай, когда $c = 0$; $\gamma: g(x) = x - 1, \ x \in [1,3]; \ \Delta: 1 \le x \le 2, \ y = 0; \ \tau(x) = x - 1.$

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах автора [63-66].

ГЛАВА I. ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ I. Построение промежуточных интегралов

В плоскости переменных x, y рассмотрим уравнение второго порядка

$$x^2 \left(u_y^4 u_{xx} - u_{yy} \right) = c u u_y^4 \tag{I.I}$$

с постоянным коэффициентом c в правой части.

Это квазилинейное уравнение не следует относить к классу строго гиперболических уравнений. Во-первых, на прямой $x = 0$ вырождается его порядок. Вырождение происходит независимо от искомых решений заданного уравнения. Что же касается вырождения другого характера - вырождения гиперболичности, для данного уравнения оно зависит от поведения производной u_y решения $u(x, y)$. В частности, на множестве точек нулей производной u_y имеет место параболическое вырождение.

Действительно, характеристическое уравнение

$$x^2 u_y^4 \lambda^2 - x^2 = 0$$

на всей плоскости переменных x, y, за исключением прямой $x = 0$ определяет два характеристических корня -

$$\lambda_1 = \frac{1}{u_y^2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{u_y^2},$$

которые различны всегда при $u_y \neq 0$. В противном случае эти два корня неограничены и определяют два характеристических направления, противоположные друг другу и совпадающие с направлением, параллельным оси ординат.

Таким образом, характеристические направления в каждой точке определены соотношениями

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1 \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \lambda_2 ,$$

которые переписываем следующим образом:

$$u_y^2 \, dy = dx \tag{I.2}$$

и

$$u_y^2 \, dy = -dx . \tag{I.3}$$

Характеристические кривые, определенные соотношениями (I.2) и (I.3), фактически не заданы, поскольку оба зависят от значений производной u_y неизвестного решения $u(x, y)$.

Для представления полной картины поведения и структуры семейств характеристических кривых, обратимся к классическому методу характеристик, развитому для нелинейных гиперболических уравнений (см., напр., [60], стр. 45).

С этой целью посмотрим как будет представлено само уравнение (I.I) вдоль каждой из характеристических кривых обоих семейств, заданных при помощи (I.2), (I.3).

Ниже воспользуемся известными обозначениями Монжа:

$$u_x = p , \quad u_y = q , \quad u_{xx} = r , \quad u_{xy} = s , \quad u_{yy} = t$$

и рассмотрим сперва семейство (I.2).

Из соотношений

$$dp = r\,dx + s\,dy , \qquad dq = s\,dx + t\,dy ,$$

с учетом значения выражения $\dfrac{dy}{dx}$ вдоль характеристик получаем

$$s = \frac{dq}{dx} - t \, \frac{1}{q^2} ,$$

$$r = \frac{dp}{dx} - \frac{1}{q^2}\frac{dq}{dx} + \frac{1}{q^4}t.$$

Затем подстановкой значения r , уравнение (I.I) превращается в равенство

$$x^2 q^4 \frac{dp}{dx} - x^2 q^2 \frac{dq}{dx} = c u q^4.$$

Следовательно, дополняя полученные выше равенства условием согласованности, для описания свойств характеристических многообразий мы приходим к системе трех дифференциальных соотношений следующего вида:

$$\begin{cases} dx - q^2 dy = 0 \\ x^2 q^4 dp - x^2 q^2 dq - c q^4 u\, dx = 0 \\ du - p\,dx - q\,dy = 0, \end{cases} \tag{I.4}$$

называемой системой характеристических дифференциальных соотношений.

Аналогичными рассуждениями строится система характеристических дифференциальных соотношений для семейства, заданного равенством (I.3):

$$\begin{cases} dx + q^2 dy = 0 \\ x^2 q^4 dp + x^2 q^2 dq - c q^4 u\, dx = 0 \\ du - p\,dx - q\,dy = 0. \end{cases} \tag{I.5}$$

Системы (I.4), (I.5), безусловно, не следует рассматривать как обычные системы дифференциальных уравнений, но все-таки можно поставить вопрос о построении их первых интегралов.

I. Построение промежуточного интеграла по характеристическому корню λ_1.

Ограничиваясь рассмотрением невырожденного случая, т.е. предполагая $x \neq 0$, $q \neq 0$, будем искать первый интеграл $f(x, y, u, p, q) = const$ системы (I.4), которую перепишем в таком виде:

$$\begin{cases} dx = q^2 dy \\ du = (pq^2 + q)\, dy \\ dp = \dfrac{1}{q^2}\, dq + \dfrac{c}{x^2}\, u q^2\, dy. \end{cases} \tag{I.4}$$

Для первого интеграла $f(x, y, u, p, q) = const$ на основании системы (I.4) получаем

$$df = f_x\, q^2 dy + f_y\, dy + f_u (pq^2 + q) dy + f_p \frac{1}{q^2} dq +$$

$$+ f_p \frac{c}{x^2} u q^2 dy + f_q\, dq = 0,$$

что эквивалентно следующей системе двух уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{cases} K_1(f) \equiv f_x + \dfrac{1}{q^2} f_y + \left(p + \dfrac{1}{q}\right) f_u + \dfrac{c}{x^2} u f_p = 0 \\ K_2(f) \equiv f_q + \dfrac{1}{q^2} f_p = 0. \end{cases} \tag{I.6}$$

Как видим, эти два уравнения линейно независимы и не исключают друг друга. Таким образом они совместимые.

Рассмотрим теперь насколько полна по Якоби полученная система (см., напр., [61], стр. 521). Возьмем комбинацию

$$K_3(f) \equiv \langle K_1, K_2 \rangle (f) = K_1[K_2(f)] - K_2[K_1(f)].$$

Получаем еще одно линейное уравнение

$$K_3(f) = \frac{2}{q^3} f_y = 0, \tag{I.7}$$

которое не является линейной комбинацией уравнений системы (I.6). Следовательно, уравнения (I.6-7) также составляют независимую систему.

Следует удостовериться, является ли полной расширенная при помощи скобок Якоби система трех уравнений (I.6-7). С этой целью процесс расширения системы будем продолжать.

Последовательное применение скобок Якоби относительно дифференциальных операторов $\langle K_1, K_3 \rangle$ и $\langle K_2, K_3 \rangle$ попарно дает

$$K_4(f) \equiv \langle K_1, K_3 \rangle (f) = K_1[K_3(f)] - K_3[K_1(f)] \equiv 0,$$

$$K_5(f) \equiv \langle K_2, K_3 \rangle (f) = K_2[K_3(f)] - K_3[K_2(f)] \equiv 0.$$

Таким образом, система (I.6-7) полна в смысле Якоби. Этой системе придадим вид

$$\begin{cases} f_x + \left(p + \dfrac{1}{q}\right) f_u + \dfrac{c}{x^2} u f_p = 0 \\ f_q + \dfrac{1}{q^2} f_p = 0 \\ f_y = 0. \end{cases} \tag{I.8}$$

Как известно (см., напр., [6I], стр. 524), полная в смысле Якоби однородная система k дифференциальных уравнений допускает ровно $n-k$ линейно независимых интеграла, где n - число независимых переменных.

Следовательно, система (I.8) допускает ровно два независимых решения. Следовательно и система (I.4) также допускает ровно два независимых первых интеграла.

Как на то указывает последнее уравнение системы (I.8), эти первые интегралы от аргумента y не зависят.

Отсюда следует, что любая функция $f(x, u, p, q)$, зависящая от четырех аргументов, удовлетворяет последнему уравнению системы (I.8). Поэтому, учитывая это обстоятельство, (I.8) можно переписать уже в виде двух уравнений

$$\begin{cases} f_x + \left(p + \dfrac{1}{q}\right) f_u + \dfrac{c}{x^2}\, u f_p = 0 \\ f_q + \dfrac{1}{q^2} f_p = 0 \end{cases} \qquad (I.9)$$

Для получения решения рассматриваемой системы возьмем второе уравнение из (I.9). Соответствующее ему характеристическое уравнение

$$\frac{dq}{1} = \frac{dp}{q^{-2}}$$

определяет интеграл

$$p + \frac{1}{q} = const,$$

который и вводим в качестве нового аргумента, а вместо четверки x, u, p, q вводим другую четверку - x, u, q, $w = p + \frac{1}{q}$. Такой выбор определен интегралом $p + \frac{1}{q} = const$. Мы могли бы вместо аргумента q взять аргумент p, так что новую четверку аргументов можно определить неоднозначно. Свой выбор мы остановили на вышеназванной четверке. В терминах новых переменных система (I.9) принимает вид

$$\begin{cases} f_x + w f_u + \dfrac{c}{x^2} u f_w = 0 \\ f_q = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения полученной системы заключаем, что ее решение $f(x, u, w)$ не зависит от аргумента q. Поэтому оставляем лишь первое уравнение, которое переписываем в виде

$$f_x + w f_u + c x^{-2} u f_w = 0. \tag{I.I0}$$

и интегрируем.

Заметим тут же, что коэффициенты уравнения (I.I0) от аргумента q не зависят.

Дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{w} = \frac{dw}{c x^{-2} u}$$

соответствующие соотношению (I.I0), перепишем в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = w \\ \dfrac{dw}{dx} = c x^{-2} u. \end{cases} \tag{I.II}$$

Если величину x принять за независимую переменную, то из (I.II) следует соотношение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = c x^{-2} u .$$

Если введем обозначение

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{4c+1}}{2} ,$$

то общее решение, при ограничении

$$4c + 1 > 0 \tag{I.12}$$

определяется по формуле

$$u = A x^{\alpha} + B x^{1-\alpha}$$

(см., напр., [62]).

При выполнении условия (I.12) получаем две комбинации решений системы (I.11)

$$u = x^{\alpha} , \quad w = \alpha x^{\alpha - 1} \tag{I.13}$$

и

$$u = x^{1-\alpha} , \quad w = (1-\alpha) x^{-\alpha} . \tag{I.14}$$

Воспользуемся полученными решениями и для интегрирования уравнения (I.10) вместо тройки x, u, w введем новые величины

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = w x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha - 1} \\ \zeta = w x^{1-\alpha} + \alpha u x^{-\alpha} . \end{cases} \tag{I.15}$$

В терминах переменных (I.15), уравнение (I.10) принимает вид

$$f_\xi + \left[\alpha w x^{\alpha-1} - \alpha(\alpha-1) u x^{\alpha-2} - \alpha x^{\alpha-1} w + c u x^{\alpha-2}\right] f_\eta +$$

$$+ \left[(1-\alpha) w x^{-\alpha} - \alpha^2 u x^{-\alpha-1} + \alpha w x^{-\alpha} + c u x^{-1-\alpha}\right] f_\zeta = 0,$$

что непосредственно следует из вычислений.

С учетом соотношения $\alpha(\alpha-1) = c$, можно написать

$$f_\xi + (w x^{-\alpha} - \alpha u x^{-1-\alpha}) f_\zeta = 0.$$

Принимая во внимание равенства (I.I5), заключаем, что функция $f(\xi, \eta, \zeta)$ является решением уравнения

$$f_\xi + \eta \xi^{-2\alpha} f_\zeta = 0. \tag{I.I6}$$

Из характеристического уравнения соотношения (I.I6)

$$\frac{d\xi}{1} = \frac{d\zeta}{\eta \xi^{-2\alpha}}$$

следует

$$\frac{1}{1-2\alpha} \eta \xi^{1-2\alpha} - \zeta = const,$$

что, со своей стороны, означает представимость общего решения уравнения (I.I6) при помощи произвольной функции F аргумента

$$\frac{\eta \xi^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} - \zeta.$$

Таким образом, для общего решения уравнения (I.I6), имеем представление

$$f(\xi,\eta,\zeta)=F\left(\frac{\eta\,\xi^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}-\zeta\right).$$

Возвращаясь теперь к переменным x, u, w, получаем

$$\frac{\eta\,\xi^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}-\zeta=\frac{2\alpha}{1-2\alpha}wx^{1-\alpha}-\frac{2\alpha(1-\alpha)}{1-2\alpha}ux^{-\alpha}.$$

Ввиду того, что якобиан преобразования (I.I5)

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,u,w)}=-2\alpha$$

всюду отличен от нуля, решение уравнения (I.I0) также можно представить при помощи произвольной функции

$$f(x,u,w)=F\left(wx^{1-\alpha}-(1-\alpha)ux^{-\alpha}\right).$$

Таким образом, при помощи произвольной функции F представляется одно из решений системы (I.6)

$$f(x,u,p,q)=F\left(\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{1-\alpha}-(1-\alpha)ux^{-\alpha}\right). \qquad \text{(I.I7)}$$

Это решение получается с помощью преобразования (I.I5), которое определяется комбинацией (I.I3) решений системы (I.II). Но мы уже видели, что у системы (I.II), помимо решения (I.I3), имеется еще одна комбинация - (I.I4). Для получения всех решений уравнения (I.I0) необходимо рассмотреть и эту комбинацию.

Итак, аналогично тому, как это было сделано выше, и здесь вводим новую систему переменных величин

$$\begin{cases}\xi=x\\ \eta=wx^{1-\alpha}-(1-\alpha)ux^{-\alpha}\\ \zeta=wx^{\alpha}+(1-\alpha)x^{\alpha-1}u.\end{cases} \qquad \text{(I.I8)}$$

Это преобразование, также как и (I.I5), неособое, так как его якобиан

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,u,w)} = 2\alpha-2$$

всюду отличен от нуля.

Из непосредственных вычислений следует, что в терминах переменных (I.I8) уравнение (I.I0) принимает вид

$$f_\xi + \left[(1-\alpha)wx^{-\alpha} + \alpha(1-\alpha)ux^{-\alpha-1} + (\alpha-1)wx^{-\alpha} + cux^{-\alpha-1}\right] f_\eta +$$

$$+ \left[\alpha w x^{\alpha-1} - (1-\alpha)^2 x^{\alpha-2} + (1-\alpha)wx^{\alpha-1} + cux^{\alpha-2}\right] f_\zeta = 0$$

С учетом соотношения $\alpha(\alpha-1)=c$ можно написать

$$f_\xi + \left(wx^{\alpha-1} - (1-\alpha)\,u\,x^{\alpha-2}\right) f_\zeta = 0.$$

Принимая во внимание равенства (I.I8), заключаем, что функция $f(\xi,\eta,\zeta)$ является решением уравнения

$$f_\xi + \xi^{2\alpha-2}\eta f_\zeta = 0. \qquad \text{(I.I9)}$$

Из характеристического уравнения, соответствующего соотношению (I.I9)

$$\frac{d\xi}{1} = \frac{d\zeta}{\xi^{2\alpha-2}\eta},$$

следует

$$\frac{1}{2\alpha-1}\,\xi^{2\alpha-1}\eta - \zeta = const.$$

Это равенство, со своей стороны, означает представимость общего решения уравнения (I.19) при помощи некоторой произвольной функции Φ , зависящей от аргумента

$$\frac{1}{2\alpha-1}\,\xi^{2\alpha-1}\eta-\zeta.$$

Исходя из вышесказанного, для общего решения уравнения (I.19) получаем представление

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\Phi\left(\frac{\xi^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\,\eta-\zeta\right).$$

Возвращаясь к переменным $x,\ u,\ w$, выразим аргумент функции Φ :

$$\frac{1}{2\alpha-1}\,\xi^{2\alpha-1}\eta-\zeta=\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}\,w x^{\alpha}-\frac{2\alpha(1-\alpha)}{2\alpha-1}\,u x^{\alpha-1}.$$

В силу невырожденности преобразования (I.18) решение уравнения (I.10), как и выше, можно представить при помощи произвольной функции

$$f(x,u,w)=\Phi\left(w x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}\right).$$

Следовательно, при помощи произвольной функции Φ можно будет представить следующие решения системы (I.6):

$$f(x,u,p,q)=\Phi\left(\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}\right). \tag{I.20}$$

Резюмируя установленные выше факты, приходим к заключению, что в силу (I.17) и (I.20) система допускает два независимых первых интеграла

$$F\left(\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{1-\alpha}-(1-\alpha)u x^{-\alpha}\right)=const, \tag{I.21}$$

$$\Phi\left(\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}\right)=const. \qquad (I.22)$$

Учитывая известное утверждение (см., напр., [60], стр. 60), приходим к выводу, что суперпозиция первых интегралов (I.2I), (I.22)

$$H(F,\Phi)=const$$

с произвольной функцией H также является первым интегралом системы (I.4).

Последнее соотношение содержит производные p, q первого порядка искомого решения $u(x,y)$ уравнения (I.I). Следовательно, можно говорить о дифференциальном соотношении первого порядка

$$H(F,\Phi)=0 \qquad (I.23)$$

и ставить вопрос о нахождении его интеграла. Этот интеграл, безусловно, будет удовлетворять уравнению (I.I). Тем самым вопрос нахождения интеграла уравнения второго порядка (I.I) редуцирован к вопросу отыскания неособого интеграла уравнения с частными производными первого порядка (I.23).

Соотношение (I.23), в силу произвольности функции H, можно переписать следующим образом:

$$\Phi=\varphi(F),$$

где φ - снова произвольная функция. Таким образом, соотношению (I.23) придаем вид промежуточного интеграла.

Учитывая равенства (I.2I), (I.22), заключаем, что один из промежуточных интегралов уравнения (I.I) имеет вид

$$\varphi'\left(\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}\right)=\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{1-\alpha}-(1-\alpha)u x^{-\alpha}, \qquad (I.24)$$

где φ' - производная некоторой произвольной непрерывно дифференцируемой функции φ.

2. Построение промежуточного интеграла по характеристическому корню λ_2.

С целью нахождения другого промежуточного интеграла уравнения (I.I), приступим к построению первого интеграла $g(x,y,u,p,q) = const$ системы (I.5):

$$\begin{cases} dx = -q^2 dy \\ du = (q - pq^2)\, dy \\ dp = -\dfrac{c}{x^2} u q^2 dy - \dfrac{1}{q^2} dq . \end{cases} \tag{I.5}$$

Для первого интеграла $g(x,y,u,p,q) = const$ на основании системы (I.5) получаем

$$dg = -g_x q^2 dy + g_y dy + g_u (q - pq^2) dy - g_p \frac{c}{x^2} u q^2 dy - g_p \frac{1}{q^2} dq + g_q dq = 0.$$

Это эквивалентно следующей системе двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} L_1(g) \equiv g_x - \dfrac{1}{q^2} g_y + \left(p - \dfrac{1}{q}\right) g_u + \dfrac{c}{x^2} u g_p = 0 \\ L_2(g) \equiv g_q - \dfrac{1}{q^2} g_p = 0 . \end{cases} \tag{I.25}$$

Как видно, эти два уравнения линейно независимые и совместные.

Расширим систему (I.25) до полной системы в смысле Якоби. Ввиду того, что

$$L_3(g) \equiv \langle L_1, L_2 \rangle (g) = L_1[L_2(g)] - L_2[L_1(g)] = -\frac{2}{q^3} g_y = 0, \quad (I.26)$$

$$L_4(g) \equiv \langle L_1, L_3 \rangle (g) = L_1[L_3(g)] - L_3[L_1(g)] \equiv 0,$$

$$L_5(g) \equiv \langle L_2, L_3 \rangle (g) = L_2[L_3(g)] - L_3[L_2(g)] \equiv 0$$

и (I.26) не является линейной комбинацией уравнений системы (I.25) будем иметь систему трех уравнений, полную в смысле Якоби

$$\begin{cases} g_x + \left(p - \dfrac{1}{q}\right) g_u + \dfrac{c}{x^2} u g_p = 0 \\ g_q - \dfrac{1}{q^2} g_p = 0 \\ g_y = 0 . \end{cases} \quad (I.27)$$

Система (I.27), как и система (I.6), допускает ровно два независимых решения. Следовательно система (I.5) также допускает ровно два независимых первых интеграла.

Как видно из последнего уравнения (I.27), от аргумента y не зависят эти первые интегралы. Поэтому любая функция $g(x, u, p, q)$ четырех аргументов x, u, p, q удовлетворяет последнему уравнению системы (I.27). Учитывая это обстоятельство, (I.27) можно переписать уже в следующем виде:

$$\begin{cases} g_x + \left(p - \dfrac{1}{q}\right) g_u + \dfrac{c}{x^2} u g_p = 0 \\ g_q - \dfrac{1}{q^2} g_p = 0 . \end{cases} \quad (I.28)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее второму из соотношений (I.28)

$$\frac{dq}{1} = \frac{dp}{-q^{-2}},$$

определяет интеграл

$$\frac{1}{q} - p = const,$$

который и вводим в качестве нового аргумента, а вместо четверки x, u, p, q рассмотрим другую четверку – $x, u, q, \omega = \frac{1}{q} - p$. В терминах новых переменных система (I.28) принимает вид

$$\begin{cases} g_x - \omega g_u - \dfrac{c}{x^2} u g_\omega = 0 \\ g_q = 0, \end{cases}$$

из которого видно, что ее решение $g(x, u, \omega)$ не зависит от аргумента q. Поэтому из последней системы оставляем первое уравнение

$$g_x - \omega g_u - c x^{-2} u g_\omega = 0. \qquad (I.29)$$

Теперь перейдем к интегрированию уравнения (I.29).

Дифференциальные уравнения характеристик

$$\frac{dx}{1} = \frac{du}{-\omega} = \frac{d\omega}{-c x^{-2} u},$$

соответствующие соотношению (I.29), можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -\omega \\ \dfrac{d\omega}{dx} = -c x^{-2} u. \end{cases} \qquad (I.30)$$

Если величину x принять за независимую переменную, то из (I.30) последует соотношение

$$\frac{d^2 u}{d x^2} = c x^{-2} u.$$

При выполнении условия (I.12), в силу представления общего решения последнего уравнения, получаем две комбинации решений системы (I.30)

$$u = x^{\alpha}, \quad \omega = \alpha x^{\alpha-1} \tag{I.31}$$

и

$$u = x^{1-\alpha}, \quad \omega = (1-\alpha) x^{-\alpha}. \tag{I.32}$$

Воспользуемся полученными решениями для интегрирования уравнения (I.29) и вместо тройки x, u, ω введем новые величины

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \omega x^{\alpha} + \alpha u x^{\alpha-1} \\ \zeta = \omega x^{1-\alpha} - \alpha u x^{-\alpha}. \end{cases} \tag{I.33}$$

Преобразование (I.33) неособое, так как его якобиан

$$\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, u, \omega)} = 2\alpha$$

всюду отличен от нуля.

Перепишем теперь уравнение (I.29) в новых переменных. Будем иметь

$$g_{\xi} + \left[\alpha \omega x^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1) u x^{\alpha-2} - \alpha \omega x^{\alpha-1} - c u x^{\alpha-2}\right] g_{\eta} +$$

$$+\left[(1-\alpha)\omega x^{-\alpha}+\alpha^{2}u x^{-\alpha-1}+\alpha\omega x^{-\alpha}-c u x^{-\alpha-1}\right]g_{\zeta}=0.$$

Так как $\alpha(\alpha-1)=c$, получаем

$$g_{\xi}+(\omega x^{-\alpha}+\alpha u x^{-\alpha-1})\,g_{\zeta}=0.$$

Которому, принимая во внимание равенства (I.33), окончательно придаем вид

$$g_{\xi}+\xi^{-2\alpha}\eta\, g_{\zeta}=0. \qquad (I.34)$$

Из характеристического уравнения соотношения (I.34)

$$\frac{d\xi}{1}=\frac{d\zeta}{\xi^{-2\alpha}\eta}$$

следует

$$\frac{1}{1-2\alpha}\,\xi^{1-2\alpha}\eta-\zeta=const.$$

А это, со своей стороны, означает, что для общего решения уравнения (I.34) имеем представление

$$g(\xi,\eta,\zeta)=G\left(\frac{1}{1-2\alpha}\,\xi^{1-2\alpha}\eta-\zeta\right),$$

где G – произвольная функция.

Возвращаясь теперь к переменным x, u, ω, получаем

$$\frac{1}{1-2\alpha}\,\xi^{1-2\alpha}\eta-\zeta=\frac{2\alpha}{1-2\alpha}\,\omega x^{1-\alpha}-\frac{2\alpha(1-\alpha)}{1-2\alpha}\,u x^{-\alpha}.$$

Учитывая, что якобиан преобразования (I.33) невырожден, заключаем, что решение уравнения (I.29) также можно представить при помощи произвольной функции

$$g(x,u,\omega)=G(\omega x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}).$$

Таким образом, при помощи произвольной функции G мы представили одно из решений системы (I.25):

$$g(x,u,p,q)=G\left(\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}\right). \qquad (I.35)$$

Это решение получено нами с помощью преобразования (I.33), которое определяется комбинацией (I.31).

Для интегрирования уравнения (I.29) воспользуемся комбинацией (I.32) и введем новую систему переменных величин

$$\begin{cases}\xi=x\\ \eta=\omega x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}\\ \zeta=\omega x^{\alpha}-(1-\alpha)u x^{\alpha-1}.\end{cases} \qquad (I.36)$$

Это преобразование неособое, так как его якобиан

$$\frac{\partial(\xi,\eta,\zeta)}{\partial(x,u,\omega)}=2-2\alpha$$

отличен от нуля.

В терминах переменных (I.36) уравнение (I.29) принимает вид

$$g_\xi+\left[(1-\alpha)\omega x^{-\alpha}+\alpha(\alpha-1)u x^{-\alpha-1}-(1-\alpha)\omega x^{-\alpha}-c u x^{-\alpha-1}\right]g_\eta+$$

$$+\left[\alpha\omega x^{\alpha-1}+(1-\alpha)^2 u x^{\alpha-2}+(1-\alpha)\omega x^{\alpha-1}-c u x^{\alpha-2}\right]g_\zeta=0.$$

Но $\alpha(\alpha-1)=c$, поэтому получаем

$$g_{\xi}+\left(\omega x^{\alpha-1}+(1-\alpha)u x^{\alpha-2}\right)g_{\zeta}=0,$$

или, что то же самое

$$g_{\xi}+\xi^{2\alpha-2}\eta\, g_{\zeta}=0. \qquad (I.37)$$

Из характеристического уравнения соотношения (I.37)

$$\frac{d\xi}{1}=\frac{d\zeta}{\xi^{2\alpha-2}\eta}$$

следует

$$\frac{1}{2\alpha-1}\xi^{2\alpha-1}\eta-\zeta=const.$$

Это соотношение дает возможность утверждать, что для общего решения уравнения (I.37) имеем представление

$$g(\xi,\eta,\zeta)=\Psi\left(\frac{1}{2\alpha-1}\xi^{2\alpha-1}\eta-\zeta\right),$$

где Ψ - произвольная функция своего аргумента.

Возвращаясь теперь к переменным x, u, ω, получаем

$$\frac{1}{2\alpha-1}\xi^{2\alpha-1}\eta-\zeta=\frac{2(1-\alpha)}{2\alpha-1}\omega x^{\alpha}+\frac{2\alpha(1-\alpha)}{2\alpha-1}\omega x^{\alpha-1}.$$

Ввиду того, что преобразование (I.36) является неособым, решение уравнения (I.29) можно представить при помощи произвольной функции

$$g(x,u,\omega)=\Psi\left(\omega x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}\right).$$

Таким образом, при помощи произвольной функции Ψ также представляем одно из решений системы (I.25)

$$g(x,u,p,q)=\Psi\left(\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}\right). \tag{I.38}$$

Из (I.35) и (I.38) следует, что допускаются два независимых первых интеграла

$$G\left(\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}\right)=const, \tag{I.39}$$

$$\Psi\left(\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}\right)=const, \tag{I.40}$$

системы (I.5).

Исходя из (I.39) и (I.40), приходим к выводу, что уравнение (I.I) допускает еще один промежуточный интеграл

$$\psi'\left(\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}\right)=\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}, \tag{I.4I}$$

где ψ' – производная некоторой произвольной непрерывно дифференцируемой функции

Таким образом мы установили, что имеют место утверждения:

<u>Теорема I.I</u>. Каждая из характеристических систем (I.4), (I.5) уравнения (I.I) допускает ровно два первых интеграла, которые, при условии (I.I2), задаются формулами

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}=const\\ \left(\frac{1}{q}+p\right)x^{1-\alpha}-(1-\alpha)u x^{-\alpha}=const,\end{cases} \tag{I.42}$$

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}=const\\ \left(\frac{1}{q}-p\right)x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}=const, \quad \alpha=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4c+1}\right).\end{cases} \tag{I.43}$$

<u>Теорема I.2</u>. Уравнение (I.I), при условии (I.I2), допускает два промежуточных интеграла вида

$$\varphi'\left(\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}\right)=\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{1-\alpha}-(1-\alpha)u x^{-\alpha} \tag{I.24}$$

и

$$\psi'\left(\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}\right)=\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}, \tag{I.4I}$$

где φ, ψ – произвольные непрерывно дифференцируемые функции.

§ 2. Построение общего интеграла

Как было установлено в предыдущем параграфе, уравнение (I.I) допускает два промежуточных интеграла (I.24), (I.4I).

Соотношения (I.24) и (I.4I) будем рассматривать в совокупности, как систему функциональных уравнений относительно производных p, q. Из-за того, что они содержат произвольные функции, определить p, q непосредственно не удастся. А с другой стороны, известно (см., напр., [60], стр. 62), что такая система вполне интегрируема.

С целью интегрирования введем новые независимые "характеристические" параметры. В качестве характеристических переменных выбираем по одному инварианту

$$\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}=\xi, \quad \left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}=\eta. \tag{2.I}$$

Тогда мы вполне закономерно рассмотрим систему четырех уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\alpha}-\alpha u x^{\alpha-1}=\xi \\ \left(\frac{1}{q}+p\right)x^{1-\alpha}-(1-\alpha)u x^{-\alpha}=\varphi'(\xi) \\ \left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\alpha}+\alpha u x^{\alpha-1}=\eta \\ \left(\frac{1}{q}-p\right)x^{1-\alpha}+(1-\alpha)u x^{-\alpha}=\psi'(\eta), \end{cases} \tag{2.2}$$

которая дает возможность определения x, p, q и u при помощи ξ, η, $\varphi'(\xi)$, $\psi'(\eta)$. Таким образом задача построения интеграла уравнения (I.I) сводится к интегрированию уравнения

$$dy + \frac{p}{q}\,dx - \frac{1}{q}\,du = 0,$$

после которого величины x, y, u будут определены в виде функций характеристических переменных ξ, η.

Для этого приступим к решению системы (2.2). Складывая первое с третьим уравнением, а второе - с четвертым, систему (2.2) перепишем в эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{q} + p\right) x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1} = \xi \\ \left(\frac{1}{q} + p\right) x^{1-\alpha} - (1-\alpha) u x^{-\alpha} = \varphi'(\xi) \\ \frac{2}{q} x^{\alpha} = \xi + \eta \\ \frac{2}{q} x^{1-\alpha} = \varphi'(\xi) + \psi'(\eta). \end{cases}$$

Из последних двух соотношений непосредственно определяем

$$x = \left(\frac{\varphi'(\xi) + \psi'(\eta)}{\xi + \eta} \right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \tag{2.3}$$

$$q = \frac{2}{\xi + \eta} \left(\frac{\varphi'(\xi) + \psi'(\eta)}{\xi + \eta} \right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}. \tag{2.4}$$

Учитывая (2.2), (2.3), из первых двух равенств последней системы определим величины

$$u = \frac{1}{1-2\alpha}\left[\xi\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'(\eta)}{\xi+\eta}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}} - \varphi'(\xi)\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'(\eta)}{\xi+\eta}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}\right], \tag{2.5}$$

$$p = \left(\frac{1}{2(1-2\alpha)}\xi - \frac{1}{2}\eta\right)\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'(\eta)}{\xi+\eta}\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} -$$

$$- \frac{\alpha}{1-2\alpha}\varphi'(\xi)\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'(\eta)}{\xi+\eta}\right)^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}}. \tag{2.6}$$

Таким образом мы определили четыре параметра x, p, q, u терминах характеристических переменных ξ, η. Они все содержат произвольные функции φ', ψ'. Остается выразить при их помощи пятую – величину y. Для ее определения мы обратимся к условию согласованности

$$du = p\,dx + q\,dy,$$

которое выразим в терминах переменных ξ, η.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta}d\eta = p\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + p\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta +$$

$$+ q\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + q\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta.$$

Соответственно, приравнивая коэффициенты дифференциалов $d\xi$ и $d\eta$, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = p\frac{\partial x}{\partial \xi} + q\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = p\frac{\partial x}{\partial \eta} + q\frac{\partial y}{\partial \eta},$$

откуда следует

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \rho\frac{\partial x}{\partial \xi}\right), \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \rho\frac{\partial x}{\partial \eta}\right). \qquad (2.7)$$

Вычисляя производные выражений (2.3), (2.5) и подставляя их вместе с соотношениями (2.4), (2.6) в равенства (2.7), получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = \dfrac{1}{4(1-2\alpha)}\left[\psi''(\eta)(\xi+\eta) - \varphi'(\xi) - \psi'(\eta)\right] \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} = \dfrac{1}{4(1-2\alpha)}\left[\varphi'(\xi) + \psi'(\eta) - (\xi+\eta)\varphi''(\xi)\right]. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Если на основании (2.8) составим выражение

$$dy = y_\xi\, d\xi + y_\eta\, d\eta,$$

будем иметь полный дифференциал. Чтобы убедиться в этом, вычисляем производные $y_{\xi\eta}$ и $y_{\eta\xi}$ и сравниваем их. Получаем, что

$$y_{\xi\eta} = y_{\eta\xi} = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\left(\psi''(\eta) - \varphi''(\xi)\right).$$

Следовательно, выражение $y_\eta d\eta + y_\xi d\xi$ с подставленными y_η, y_ξ, которые определены по формулам (2.8), действительно является полным дифференциалом. Интегрированием первого из соотношений (2.8) мы получаем

$$y = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\left[(\xi+\eta)\psi'(\eta) - \eta\varphi'(\xi) - 2\psi(\eta)\right] + g(\xi), \qquad (2.9)$$

где g – произвольная функция.

Дифференцируя (2.9) по аргументу ξ, сравниваем полученное выражение со вторым соотношением из (2.8):

$$\frac{1}{4(1-2\alpha)}\left[\psi'(\eta) - \eta\varphi''(\xi)\right] + g'(\xi) =$$

$$= \frac{1}{4(1-2\alpha)}\left[\varphi'(\xi) + \psi'(\eta) - (\xi+\eta)\varphi''(\xi)\right].$$

Из этого равенства определяем функцию

$$g'(\xi) = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\left[\varphi'(\xi) - \xi\varphi''(\xi)\right].$$

Ввиду того, что функция g может зависеть лишь от аргумента ξ, при интегрировании получим выражение

$$g(\xi) = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\left[2\varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi)\right], \qquad (2.10)$$

которое не содержит дополнительного параметра интегрирования, зависящего от γ.

На основании (2.9), (2.10) окончательно имеем

$$y = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\left[(\xi+\gamma)\left(\psi'(\gamma) - \varphi'(\xi)\right) + 2\left(\varphi(\xi) - \psi(\gamma)\right)\right]. \qquad (2.11)$$

Таким образом в классе гиперболических решений уравнения (1.1) имеет место

Теорема 2.1. Если $4c+1>0$, тогда общий интеграл уравнения (1.1) в терминах характеристических переменных (2.1) представляется соотношениями (2.3-6), (2.11), где φ, ψ - произвольные, трижды непрерывно дифференцируемые функции.

Замечание. В частном случае, при $c=0$, из представлений общего интеграла (2.3-6), (2.11) уравнения (1.1) следует общее представление, полученное в [59].

ГЛАВА II. НАЧАЛЬНЫЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 3. Задача Коши

В плоскости переменных x, y рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка

$$x^2(u_y^4 u_{xx} - u_{yy}) = c u u_y^4, \tag{I.I}$$

где постоянный коэффициент c в правой части подчинен условию

$$4c + 1 > 0. \tag{3.I}$$

Пусть $\tau(x)$ и $\nu(x)$ заданные на интервале $a \le x \le b$, $a > 0$ соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, причем $\nu(x)$ всюду в заданном промежутке отличен от нуля.

З а д а ч а К о ш и: Найти регулярное решение уравнения (I.I) вместе со своей областью определения по начальным условиям

$$u\Big|_{y=0} = \tau(x), \quad u_y\Big|_{y=0} = \nu(x), \quad x \in [a, b]. \tag{3.2}$$

Прежде всего заметим, что предположение

$$\nu(x) \ne 0, \quad x \in [a, b]$$

исключает параболическое вырождение уравнения (I.I) на носителе $J: \{a \le x \le b,\ y = 0\}$ начальных данных (3.2).

Задача Коши (I.I), (3.2) может оказаться некорректной, если начальные значения (3.2) превращают носитель J начальных данных в характеристику того или иного семейства. Чтобы с самого начала исключить и эту возможность, обратимся к характеристическим инвариантам (I.24), (I.4I). Эти инварианты на носителе начальных данных не должны принимать постоянного значения.

Учитывая условия (3.2), перепишем инварианты .

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\nu(x)} + \tau'(x)\right) x^{\alpha} - \alpha\,\tau(x)\,x^{\alpha-1} = \xi \\ \left(\dfrac{1}{\nu(x)} - \tau'(x)\right) x^{\alpha} + \alpha\,\tau(x)\,x^{\alpha-1} = \eta \\ \left(\dfrac{1}{\nu(x)} + \tau'(x)\right) x^{1-\alpha} - (1-\alpha)\,\tau(x)\,x^{-\alpha} = \varphi'(\xi) \\ \left(\dfrac{1}{\nu(x)} - \tau'(x)\right) x^{1-\alpha} + (1-\alpha)\,\tau(x)\,x^{-\alpha} = \psi'(\eta). \end{cases} \tag{3.3}$$

Во избежание упомянутого выше обстоятельства предположим, что

$$\left[\left(\frac{1}{\nu(x)} \pm \tau'(x)\right) x^{\alpha} \mp \alpha\,\tau(x)\,x^{\alpha-1}\right]' \neq 0, \tag{3.4}$$

а это автоматически влечет выполнение неравенства

$$\left[\left(\frac{1}{\nu(x)} \pm \tau'(x)\right) x^{1-\alpha} \mp (1-\alpha)\,\tau(x)\,x^{-\alpha}\right]' \neq 0.$$

Для краткости записи обозначим

$$\begin{cases} M(x) \equiv \left(\dfrac{1}{\nu(x)} + \tau'(x)\right) x^{\alpha} - \alpha\,\tau(x)\,x^{\alpha-1} \\ \Lambda(x) \equiv \left(\dfrac{1}{\nu(x)} - \tau'(x)\right) x^{\alpha} + \alpha\,\tau(x)\,x^{\alpha-1} \end{cases} \tag{3.5}$$

и перефразируем условия задачи (I.I), (3.2) в терминах характеристических переменных ξ, η, определенных по формулам (3.3).

На плоскости переменных ξ, η носитель J начальных данных (3.2) будет параметрически представлен уравнениями

$$\gamma:\ \xi = M(x), \quad \eta = \Lambda(x), \quad a \le x \le b.$$

Уравнение кривой γ при наших предположениях относительно τ, ν можно представить в явном виде. Для этого заметим, что условия

$$M'(x) \neq 0, \quad \Lambda'(x) \neq 0$$

обеспечивают существование функций $\mu(\xi)$ и $\lambda(\eta)$ соответственно обратных к функциям M и Λ.

Первая из них будет определена в замкнутом интервале $J_1 \equiv [M(a), M(b)]$, а вторая - в $J_2 \equiv [\Lambda(a), \Lambda(b)]$. Окончательно кривая γ будет представлена уравнением

$$\eta = \Lambda(\mu(\xi)), \quad \xi \in J_1. \tag{3.6}$$

С другой стороны, переменная величина x на характеристической плоскости ξ, η определена в виде функции этих переменных по формуле (2.3). Эта величина на кривой γ будет представлена в виде функции аргумента ξ, если подставим в (2.3) вместо η выражение $\Lambda(\mu(\xi))$:

$$x(\xi, \Lambda(\mu(\xi))) = \mu(\xi). \tag{3.7}$$

Из формул (3.7) и (2.3) получаем

$$\frac{\varphi'(\xi) + \psi'[\Lambda(\mu(\xi))]}{\xi + \Lambda(\mu(\xi))} = \mu^{1-2\alpha}(\xi), \quad \xi \in J_1,$$

где функции φ, ψ пока произвольны и подлежат определению. С этой целью заметим, что вдоль кривой γ выполняется равенство

$$\psi'[\Lambda(\mu(\xi))] = \xi\mu^{1-2\alpha}(\xi) - \varphi'(\xi) + $$
$$+ \Lambda(\mu(\xi))\mu^{1-2\alpha}(\xi), \quad \xi \in J_1. \tag{3.8}$$

Первое из начальных условий (3.2) $u(x,0) = \tau(x)$, в терминах характеристических переменных, принимает вид

$$u(\xi, \Lambda(\mu(\xi))) = \tau(\mu(\xi)). \tag{3.9}$$

Комбинируя теперь полученное равенство (3.9) с представлением (2.5) величины $u(\xi, \eta)$ общего интеграла уравнения (I.I), приходим к соотношению

$$\frac{1}{1-2\alpha}\left\{\xi\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'[\Lambda(\mu(\xi))]}{\xi+\Lambda(\mu(\xi))}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}}-\right.$$

$$\left.-\varphi'(\xi)\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'[\Lambda(\mu(\xi))]}{\xi+\Lambda(\mu(\xi))}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}\right\}=\tau(\mu(\xi)),$$

которому с учетом выражения $\mu(\xi)$ можно придать следующий вид:

$$\frac{1}{1-2\alpha}\left(\xi\mu^{1-\alpha}(\xi)-\varphi'(\xi)\mu^{\alpha}(\xi)\right)=\tau(\mu(\xi)).$$

Отсюда представляется возможность определения производной φ' искомой функции $\varphi(\xi)$

$$\varphi'(\xi)=\xi\mu^{1-2\alpha}(\xi)-(1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi). \tag{3.10}$$

Подставляя полученное выражение в (3.8), будем иметь

$$\psi'[\Lambda(\mu(\xi))]=\mu^{1-2\alpha}(\xi)\Lambda(\mu(\xi))+(1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi). \tag{3.11}$$

Интегрированием (3.10) и (3.11) для произвольных функций $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$, фигурирующих в общем интеграле (2.3), (2.5), (2.11) уравнения (1.1), имеем

$$\varphi(\xi)=\int_{M(x_0)}^{\xi}t\mu^{1-2\alpha}(t)\,dt-(1-2\alpha)\int_{M(x_0)}^{\xi}\tau(\mu(t))\mu^{-\alpha}(t)\,dt+$$

$$+\varphi(M(x_0)),\qquad \xi\in J_1,\quad x_0\in[a,b], \tag{3.12}$$

$$\psi(\eta)=\int_{\Lambda(x_0)}^{\eta}t\lambda^{1-2\alpha}(t)\,dt+(1-2\alpha)\int_{\Lambda(x_0)}^{\eta}\tau(\lambda(t))\lambda^{-\alpha}(t)\,dt+$$

$$+\psi(\Lambda(x_0)),\qquad \eta\in J_2,\quad x_0\in[a,b]. \tag{3.13}$$

Отсюда, исходя из (2.II), получаем

$$y = \frac{1}{4(1-2\alpha)} \Big\{ (\xi+\eta)\Big[\eta \lambda^{1-2\alpha}(\eta) + (1-2\alpha)\tau(\lambda(\eta))\lambda^{-\alpha}(\eta) -$$

$$- \xi \mu^{1-2\alpha}(\xi) + (1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi)\Big] +$$

$$+ 2\int_{M(x_0)}^{\xi} t\mu^{1-2\alpha}(t)\,dt - 2(1-2\alpha)\int_{M(x_0)}^{\xi} \tau(\mu(t))\mu^{-\alpha}(t)\,dt +$$

$$+ 2\varphi(M(x_0)) - 2\int_{\Lambda(x_0)}^{\eta} t\lambda^{1-2\alpha}(t)\,dt -$$

$$- 2(1-2\alpha)\int_{\Lambda(x_0)}^{\eta} \tau(\lambda(t))\lambda^{-\alpha}(t)\,dt - 2\psi(\Lambda(x_0))\Big\}, \qquad (3.I4)$$

где $\xi \in J_1$, $\eta \in J_2$, $x_0 \in [a, b]$.

Для определения значения постоянной величины

$$c_0 \equiv 2\left[\varphi(M(x_0) - \psi(\Lambda(x_0))\right]$$

воспользуемся тем фактом, что во всех точках кривой γ переменная y принимает нулевые значения.

В частности, она обращается в нуль и при $\xi = \xi_0 = M(x_0)$, $\eta = \eta_0 = \Lambda(x_0)$:

$$y\big(M(x_0), \Lambda(x_0)\big) = 0,$$

где $x_0 \in [a, b]$ – фиксированное значение аргумента

Отсюда на основании (3.I4) получаем

$$c_0 = \big(M(x_0) + \Lambda(x_0)\big)\Big[\big(M(x_0) - \Lambda(x_0)\big)x_0^{1-2\alpha} - 2(1-2\alpha)x_0^{-\alpha}\tau(x_0)\Big]. \qquad (3.I5)$$

Учитывая соотношения (2.3), (2.5), (2.II), (3.8), (3.I0), подстановкой значения (3.I5) в (3.I4) окончательно строится решение задачи (I.I), (3.2) в терминах характеристических переменных в следующем виде:

$$x=(\xi+\eta)^{\frac{1}{2\alpha-1}}\Big[\xi\mu^{1-2\alpha}(\xi)-(1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi)+ \\ +\eta\lambda^{1-2\alpha}(\eta)+(1-2\alpha)\tau(\lambda(\eta))\lambda^{-\alpha}(\eta)\Big]^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \tag{3.16}$$

$$y=\frac{1}{4(1-2\alpha)}\Big\{(\xi+\eta)\Big[\eta\lambda^{1-2\alpha}(\eta)+(1-2\alpha)\tau(\lambda(\eta))\lambda^{-\alpha}(\eta)- \\ -\xi\mu^{1-2\alpha}(\xi)+(1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi)\Big]+ \\ +2\int_{M(x_0)}^{\xi}t\mu^{1-2\alpha}(t)\,dt-2(1-2\alpha)\int_{M(x_0)}^{\xi}\tau(\mu(t))\mu^{-\alpha}(t)\,dt- \\ -2\int_{\Lambda(x_0)}^{\eta}t\lambda^{1-2\alpha}(t)\,dt-2(1-2\alpha)\int_{\Lambda(x_0)}^{\eta}\tau(\lambda(t))\lambda^{-\alpha}(t)\,dt+ \\ +\big(M(x_0)+\Lambda(x_0)\big)\Big[\big(M(x_0)-\Lambda(x_0)\big)x_0^{1-2\alpha}-2(1-2\alpha)x_0^{-\alpha}\tau(x_0)\Big]\Big\}, \tag{3.17}$$

$$u=\frac{1}{4(1-2\alpha)}\Big\{\xi\Big[(\xi+\eta)^{-1}\big(\xi\mu^{1-2\alpha}(\xi)-(1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi)+ \\ +\eta\lambda^{1-2\alpha}(\eta)+(1-2\alpha)\tau(\lambda(\eta))\lambda^{-\alpha}(\eta)\big)\Big]^{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}}- \\ -\Big[\xi\mu^{1-2\alpha}(\xi)-(1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi)\Big]\cdot\Big[(\xi+\eta)^{-1}\times \\ \times\big(\xi\mu^{1-2\alpha}(\xi)-(1-2\alpha)\tau(\mu(\xi))\mu^{-\alpha}(\xi)+\eta\lambda^{1-2\alpha}(\eta)+ \\ +(1-2\alpha)\tau(\lambda(\eta))\lambda^{-\alpha}(\eta)\big)\Big]^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}\Big\}, \tag{3.18}$$

для всех значений $\xi\in J_1$, $\eta\in J_2$, $x_0\in[a,b]$.

Как показывает представление (3.I7), решение рассматриваемой задачи не определяется однозначно ввиду зависимости величины y от нижней границы x_0 интегрирования. Эта точка взята произвольно. Поэтому на первый взгляд создается впечатление, что задача (I.I), (3.2) имеет бесконечное число решений. Однако, подобное заключение не точно, ибо такой зависимости на самом деле не существует. Действительно, в этом можно убедиться, если рассмотреть величину y , как функцию трех аргументов - ξ, η, x_0 и продифференцировать ее по аргументу x_0 :

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{1}{4}\left(M(x_0) + \Lambda(x_0)\right)\left[M(x_0) - \Lambda(x_0) + \right.$$
$$\left. + 2\alpha x_0^{\alpha-1}\tau(x_0) - 2x_0^{\alpha}\tau'(x_0)\right] x_0^{-2\alpha}.$$

Учитывая (3.5), получаем, что

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = 0.$$

Таким образом, из последнего соотношения, которое соблюдается при всех значениях ξ, η из соответствующих интервалов, следует независимость функции y от произвольно взятых значений параметра x_0 и тем самым независимость решения (3.I6-3.I8) от выбора граничной точки интегрирования.

Следовательно, выбор точки $x_0 \in [a, b]$ на корректность задачи Коши не влияет.

Этим завершается построение решения задачи Коши (I.I), (3.2) в терминах характеристических переменных. Перейдем теперь к обсуждению вопроса о представимости решения u рассматриваемой задачи в явном виде в терминах первоначальных переменных x, y. Для этого соотношения (3.I6-I7) рассмотрим в качестве системы двух функциональных уравнений относительно неизвестных ξ, η. Если эта система позволяет определить ξ, η как функции переменных x, y их последующей подстановкой в (3.I8), получим явные представления решения задачи (I.I), (3.2).

Итак, приступаем к рассмотрению функциональной системы (3.I6), (3.I7). Исследование этой системы наталкивается на определенные затруднения ввиду того, что правые части этих уравнений наряду с функцией τ содержат и функции, являющиеся обратными к функциям M, Λ. Поэтому в дальнейшем для удобства перейдем на плоскость переменных z, t, которые вводятся следующим образом:

$$\begin{cases} \xi = M(t), \quad t \in [a, b] \\ \eta = \Lambda(z), \quad z \in [a, b], \end{cases} \tag{3.I9}$$

где функции M, Λ определяются формулами (3.5), однозначно обратимы и их обращения соответственно суть μ и λ.

Учитывая это обстоятельство и условия (3.4), заключаем, что преобразование (3.I9) неособое во всем характеристическом четырехугольнике $(\xi, \eta) \in J_1 \times J_2$, причем этот четырехугольник отображается в квадрат $R: [a, b] \times [a, b]$.

Перепишем теперь (3.I6-I7) в терминах переменных z, t:

$$x = X(t, z) \equiv \left(M(t) + \Lambda(z)\right)^{\frac{1}{2\alpha-1}} \Big[M(t)\, t^{1-2\alpha} - (1-2\alpha)\tau(t)\, t^{-\alpha} + \Lambda(z)\, z^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\, \tau(z)\, z^{-\alpha}\Big]^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \tag{3.20}$$

$$y = Y(t, z) \equiv \frac{1}{4(1-2\alpha)} \Big\{ \left(M(t) + \Lambda(z)\right) \Big[\Lambda(z)\, z^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\tau(z)\, z^{-\alpha} - M(t)\, t^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\tau(t)\, t^{-\alpha}\Big] + 2\int_{x_0}^{t} M(v)\, v^{1-2\alpha} M'(v)\, dv -$$

$$- 2(1-2\alpha)\int_{x_0}^{t} \tau(v)\, v^{-\alpha} M'(v)\, dv - 2\int_{x_0}^{z} \Lambda(v)\, v^{1-2\alpha} \Lambda'(v)\, dv -$$

$$-2(1-2\alpha)\int\limits_{x_0}^{z}\tau(v)v^{-\alpha}\Lambda'(v)\,dv+\big(M(x_0)+\Lambda(x_0)\big)\times$$

$$\times\left[\big(M(x_0)-\Lambda(x_0)\big)x_0^{1-2\alpha}-2(1-2\alpha)x_0^{-\alpha}\tau(x_0)\right]\Big\}, \tag{3.21}$$

для всех значений $(t, z)\in R$. Заметим тут же, что функция y и здесь не зависит от параметра x_0.

Вычисляя якобиан, имеем

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,z)}=\frac{1}{2(1-2\alpha)^2}\,f(t,z)F(t,z)\big(g(t,z)\big)^{\frac{2-2\alpha}{2\alpha-1}}\big(G(t,z)\big)^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}}, \tag{3.22}$$

где введены обозначения:

$$g(t,z)\equiv M(t)+\Lambda(z),$$

$$G(t,z)\equiv M(t)t^{1-2\alpha}-(1-2\alpha)\tau(t)t^{-\alpha}+\Lambda(z)z^{1-2\alpha}+(1-2\alpha)\tau(z)z^{-\alpha},$$

$$f(t,z)\equiv M'(t)G(t,z)-g(t,z)\frac{\partial}{\partial t}G(t,z),$$

$$F(t,z)\equiv \Lambda'(z)G(t,z)-g(t,z)\frac{\partial}{\partial z}G(t,z).$$

Учитывая (3.5), получаем

$$g(t,z)=\left(\frac{1}{\nu(t)}+\tau'(t)\right)t^{\alpha}-\alpha\tau(t)t^{\alpha-1}+$$
$$+\left(\frac{1}{\nu(z)}-\tau'(z)\right)z^{\alpha}+\alpha\tau(z)z^{\alpha-1}, \tag{3.23}$$

$$G(t,z)=\left(\frac{1}{\nu(t)}+\tau'(t)\right)t^{1-\alpha}-(1-\alpha)\tau(t)t^{-\alpha}+$$
$$+\left(\frac{1}{\nu(z)}-\tau'(z)\right)z^{1-\alpha}+(1-\alpha)\tau(z)z^{-\alpha}, \tag{3.24}$$

$$f(t,z)=\left(\tau''(t)-\frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)}\right)\Big[(2\alpha-1)\tau(t)+\left(\frac{1}{\nu(z)}-\tau'(z)\right)\left(t^{\alpha}z^{1-\alpha}-\right.$$
$$\left.-t^{1-\alpha}z^{\alpha}\right)+\tau(z)\left((1-\alpha)t^{\alpha}z^{-\alpha}-\alpha z^{\alpha-1}t^{1-\alpha}\right)\Big]+\frac{1}{\nu(t)}\Big[(2\alpha-1)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\nu(t)}+\tau'(t)\right)+\left(\frac{1}{\nu(z)}-\tau'(z)\right)\left(\alpha t^{\alpha-1}z^{-\alpha}-(1-\alpha)t^{-\alpha}z^{\alpha}\right)+$$
$$+\alpha(1-\alpha)\tau(z)\left(t^{\alpha-1}z^{-\alpha}-t^{-\alpha}z^{\alpha-1}\right)\Big]-\alpha(\alpha-1)\tau(t)\Big[(2\alpha-1)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\nu(t)}+\tau'(t)\right)+\left(\frac{1}{\nu(z)}-\tau'(z)\right)\left(z^{1-\alpha}t^{\alpha-2}-t^{-1-\alpha}z^{\alpha}\right)+$$
$$+\tau(z)\left((1-\alpha)z^{-\alpha}t^{\alpha-2}-\alpha z^{\alpha-1}t^{-1-\alpha}\right)\Big], \tag{3.25}$$

$$F(t,z)=\left(-\frac{\nu'(t)}{\nu^2(t)}-\tau''(t)\right)\Big[(1-2\alpha)\tau(z)+\left(\frac{1}{\nu(t)}+\tau'(t)\right)\times$$
$$\times\left(t^{1-\alpha}z^{\alpha}-t^{\alpha}z^{1-\alpha}\right)+\tau(t)\left((\alpha-1)t^{-\alpha}z^{\alpha}+\alpha t^{\alpha-1}z^{1-\alpha}\right)\Big]+$$
$$+\frac{1}{\nu(z)}\Big[\left(\frac{1}{\nu(t)}+\tau'(t)\right)\left(\alpha t^{1-\alpha}z^{\alpha-1}-(1-\alpha)t^{\alpha}z^{-\alpha}\right)+$$
$$+\alpha(1-\alpha)\tau(t)\left(t^{-\alpha}z^{\alpha-1}+t^{\alpha-1}z^{-\alpha}\right)+(2\alpha-1)\left(\frac{1}{\nu(z)}-\tau'(z)\right)\Big]+$$
$$+\alpha(\alpha-1)\tau(z)\Big[\left(\frac{1}{\nu(t)}+\tau'(t)\right)\left(t^{1-\alpha}z^{\alpha-2}-t^{\alpha}z^{-\alpha-1}\right)+$$
$$+\tau(t)\left(\alpha t^{\alpha-1}z^{-\alpha-1}-(1-\alpha)t^{-\alpha}z^{\alpha-2}\right)+(1-2\alpha)\tau(z)z^{-2}\Big]. \tag{3.26}$$

Согласно формулам (3.20-2I), заключаем, что области R соответствует область G плоскости переменных x, y и в ней полнлстью определяется регулярное решение задачи (I.I), (3.2). При этом преобразование (3.20-2I) осуществляет взаимно однозначное отображение области G на R, если его якобиан конечен и отличен от нуля всюду в характеристической области R. Это однозначное соответствие соблюдается для каждой фиксированной действительной ветви функции x, определенной формулой (3.20).

Поэтому предположим выполненными следующие соотношения:

$$g(t,z)\neq 0, \tag{3.27}$$

$$G(t,z)\neq 0, \tag{3.28}$$

$$f(t,z)\neq 0, \tag{3.29}$$

$$F(t,z)\neq 0. \tag{3.30}$$

При соблюдении условий (3.27-30) система (3.20-2I) имеет решение

$$t=T(x,y), \quad z=Z(x,y).$$

При помощи функций T, Z, согласно соотношениям (3.I9), определяются характеристические переменные ξ, η в виде функции исходных переменных x, y.

Действительно, учитывая зависимость

$$\mu(\xi)=T(x,y), \quad \lambda(\eta)=Z(x,y)$$

и однозначную обратимость функций μ, λ, имеем

$$\xi=M[T(x,y)], \quad \eta=\Lambda[Z(x,y)].$$

Подставляя теперь эти выражения в (3.I8), окончательно получим явно представленное решение задачи Коши (I.I), (3.2)

$$u(x,y)=\frac{1}{1-2\alpha}\Big\{M(T(x,y))\Big[\Big(M(T(x,y))+\Lambda(Z(x,y))\Big)^{-1}\Big(M(T(x,y))T^{1-2\alpha}(x,y)-$$

$$-(1-2\alpha)\tau(T(x,y))T^{-\alpha}(x,y)+\Lambda(Z(x,y))Z^{1-2\alpha}(x,y)+$$

$$+(1-2\alpha)\tau(Z(x,y))Z^{-\alpha}(x,y)\Big)\Big]^{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}}-\Big[M(T(x,y))T^{1-2\alpha}(x,y)-$$

$$-(1-2\alpha)\tau(T(x,y))T^{-\alpha}(x,y)\Big]\cdot\Big[\Big(M(T(x,y))+\Lambda(Z(x,y))\Big)^{-1}\times$$

$$\times\Big(M(T(x,y))T^{1-2\alpha}(x,y)-(1-2\alpha)\tau(T(x,y))T^{-\alpha}(x,y)+$$

$$+\Lambda(Z(x,y))Z^{1-2\alpha}(x,y)+(1-2\alpha)\tau(Z(x,y))Z^{-\alpha}(x,y)\Big)\Big]^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}. \quad (3.31)$$

Таким образом мы доказали, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.I. При соблюдении условий (3.4), (3.27-30) для каждой произвольно взятой действительной ветви многозначной функции (3.20) существует регулярное решение задачи (I.I), (3.2) с областью определения G, ограниченной характеристическими кривыми

$$T(x,y)=a,\quad T(x,y)=b,\quad Z(x,y)=a,\quad Z(x,y)=b.$$

Несколько подробнее остановимся на структуре области G определения решения. Конструкция этой области хорошо просматривается, если заметим, что произвольные функций $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ при помощи начальных условий (3.2) определяются соответственно в интервалах $\xi\in[M(a),M(b)]$, $\eta\in[\Lambda(a),\Lambda(b)]$. Следовательно, решение задачи (I.I), (3.2) будет определено целиком в области, которая представляется в виде прямого произведения этих двух интервалов

$$D=[M(a),M(b)]\times[\Lambda(a),\Lambda(b)].$$

Если примем во внимание соотношения (3.I9), связывающие аргументы ξ, η с переменными z, t в терминах последних область определения будет представляться в виде квадрата

$$(t,z)\in R\equiv[a,b]\times[a,b].$$

Что же представляет собой эта область на плоскости переменных x, y, конечна ли она или неограничена, полностью зависит от свойств начальных функций $\tau(x)$, $\nu(x)$.

Так как $\tau(x)$ и $\nu(x)$, заданные на отрезке $a\le x\le b$, $a>0$, соответственно дважды и один раз непрерывно дифференцируемые функции, причем $\nu(x)$ всюду в заданном промежутке отлична от нуля, при соблюдении условий (3.27-28), преобразование (3.20-21) является непрерывным. Учитывая ограниченность и замкнутость области R и непрерывность преобразования (3.20-21), заключаем, что область G определения решения задачи, являющаяся образом R при отображении (3.20-21), также ограничена и замкнута.

Заметим, что характеристические кривые одного и того же семейства в области G не пересекаются, так как в области G уравнение (1.1) является строго гиперболическим.

Для наглядности рассмотрим задачу Коши:

Найти вместе со своей областью определения регулярное решение $u(x,y)$ уравнения

$$x^2(u_y^4 u_{xx} - u_{yy}) = \frac{3}{4} u u_y^4 , \tag{3.32}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = x, \quad u_y(x,0) = \frac{2}{3} \tag{3.33}$$

на отрезке $a \le x \le b$, $a > 0$, прямой $y = 0$.

Каждая из характеристик уравнения (3.32) допускает по два первых интеграла и они в силу (1.42), (1.43) имеют вид

$$\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}ux^{\frac{1}{2}} = const, \quad \left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}ux^{\frac{1}{2}} = const;$$

$$\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}ux^{-\frac{3}{2}} = const, \quad \left(\frac{1}{q}-p\right)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}ux^{-\frac{3}{2}} = const.$$

Введением полученных первых интегралов в качестве характеристических переменных

$$\xi = \left(\frac{1}{q}+p\right)x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}ux^{\frac{1}{2}}, \quad \eta = \left(\frac{1}{q}-p\right)x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}ux^{\frac{1}{2}}, \tag{3.34}$$

согласно теореме 1.2, будем иметь

$$\varphi'(\xi)=\left(\frac{1}{q}+p\right)x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}u\,x^{-\frac{3}{2}}, \quad \psi'(\eta)=\left(\frac{1}{q}-p\right)x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}u\,x^{-\frac{3}{2}}.$$

Общий интеграл уравнения (3.32) в силу (2.3), (2.5), (2.II) имеет следующий вид:

$$x=\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'(\eta)}{\xi+\eta}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{3.35}$$

$$y=-\frac{1}{8}\Big((\xi+\eta)(\psi'(\eta)-\varphi'(\xi))-2(\varphi(\xi)-\psi(\eta))\Big), \tag{3.36}$$

$$u=-\frac{1}{2}\left(\xi\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'(\eta)}{\xi+\eta}\right)^{\frac{1}{4}}-\varphi'(\xi)\left(\frac{\varphi'(\xi)+\psi'(\eta)}{\xi+\eta}\right)^{-\frac{3}{4}}\right), \tag{3.37}$$

где φ, ψ – произвольные трижды непрерывно дифференцируемые функции.

Прежде всего следует удостовериться в корректности постановки задачи (3.32–33) в том плане, что носитель начальных данных как полоска первого порядка не является характеристической. С этой целью мы проверим поведение характеристических инвариантов на носителе. Подставляя значения u, p, q в выражение инвариантов, убеждаемся, что в данном случае выполняются условия

$$\left[\left(\frac{3}{2}\pm 1\right)x^{-\frac{1}{2}}\mp\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right]'\neq 0, \quad x\in[a,b],$$

а это означает, что начальные данные (3.33) подобраны таким образом, что они не превращают носитель в характеристику того или иного семейства.

Из условий (3.33) и формул (3.34) следует, что на характеристической плоскости переменных ξ, η носителю начальных данных соответствует отрезок прямой

$$\gamma:\ \eta=2\xi, \quad a^{\frac{3}{2}}\le\xi\le b^{\frac{3}{2}},$$

ввиду того, что параметрическое уравнение носителя на характеристической плоскости представляется соотношениями

$$\xi = x^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно, имеем

$$x(\xi,\eta)\Big|_{\eta=2\xi} = \xi^{\frac{2}{3}} \tag{3.38}$$

$$u(\xi,\eta)\Big|_{\eta=2\xi} = \xi^{\frac{2}{3}} \tag{3.39}$$

и

$$y(\xi,\eta)\Big|_{\eta=2\xi} = 0.$$

Из последнего равенства непосредственно получаем, что

$$y(\xi,\eta)\Big|_{(\xi,\eta)=(\alpha^{\frac{3}{2}},\, 2\alpha^{\frac{3}{2}})} = 0. \tag{3.40}$$

С учетом (3.37), (3.39) имеем равенство

$$-\xi^{\frac{2}{3}} + \xi\,\varphi'(\xi) = 2\xi^{\frac{2}{3}}.$$

Отсюда следует, что на γ соблюдаются соотношения

$$\varphi'(\xi) = 3\xi^{-\frac{1}{3}}$$

и

$$\varphi(\xi) = \frac{9}{2}\xi^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{2}\alpha + \varphi(\alpha). \tag{3.41}$$

На основании (3.35), (3.38) и (3.41) заключаем, что на отрезке γ соблюдено равенство

$$\psi'(\eta) = 0$$

и, следовательно,

$$\psi(\eta) = const. \tag{3.42}$$

С учетом (3.40-42), (3.36) получаем, что

$$\psi(\eta) = -4\frac{1}{2}\alpha + \varphi(\alpha).$$

Выражения (3.35-36) после подстановки значений $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ приводят нас к соотношениям

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}(\xi+\eta)^{\frac{1}{2}} \cdot \xi^{-\frac{1}{6}} \\ y = \frac{3}{8}(\xi+\eta)\xi^{-1} - 1\frac{1}{8}\xi^{\frac{2}{3}}. \end{cases} \tag{3.43}$$

Соотношения (3.43) будем рассматривать в качестве функциональной системы относительно ξ, η, которые следует определить в виде функций переменных x, y. Для этого последнее уравнение системы (3.43) перепишем следующим образом:

$$y = 1\frac{1}{8}\left(x^2 \xi^{-\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{2}{3}}\right). \tag{3.44}$$

Из этого соотношения получаем, что

$$\xi = \frac{1}{27}\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{3.45}$$

Следовательно, в силу (3.43)

$$\xi + \eta = x^2\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right). \tag{3.46}$$

Принимая во внимание соотношения (3.37), (3.41-42), (3.45-46), находим искомое решение в явном виде

$$u(x,y) = -\frac{1}{54}x^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Область определения этого решения будет ограничена характеристиками

$$\xi(x,y) = \alpha^{\frac{3}{2}}, \quad \eta(x,y) = 2b^{\frac{3}{2}}$$

и

$$\xi(x,y) = b^{\frac{3}{2}}, \quad \eta(x,y) = 2a^{\frac{3}{2}}.$$

Для получения уравнений этих характеристик в терминах исходных переменных в (3.44) вместо величины ξ подставим постоянные значения $\sqrt{a^3}$ и $\sqrt{b^3}$; определяя из (3.45-46) величину η в виде функции переменных x, y, а затем приравнивая ее к постоянным $2\sqrt{b^3}$ и $2\sqrt{a^3}$, получим уравнения характеристик семейства $\eta = const$, выходящих из концов интервала (a, b). Вышеупомянутые характеристические кривые в терминах исходных переменных выражаются уравнениями

$$y = \frac{9}{8a}x^2 - \frac{9a}{8},$$

$$3x^2 - \frac{1}{81}\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right)^2 - \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

и

$$y = \frac{9}{8b}x^2 - \frac{9b}{8},$$

$$3x^2 - \frac{1}{81}\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right)^2 - \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{16y^2+81x^2} - 4y\right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

которые соответственно попарно пересекаются в точках

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}\left(a^3 + \sqrt{a^3b^3}\right)}, \; \frac{3\sqrt{ab^3} - 3a^2}{4a}\right)$$

и

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}\left(b^3 + \sqrt{a^3b^3}\right)}, \; \frac{3\sqrt{a^3b} - 3b^2}{4b}\right).$$

Благодаря этому мы убедились, что в рассмотренном случае задача Коши имеет единственное решение и область определения решения является конечной.

Допустим теперь, что на отрезке $[a, b]$ уравнение (I.I) не вырождается параболически. Заметим, что характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (I.I) для гиперболических решений, определяет два корня

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{q^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{q^2}.$$

Поэтому характеристические кривые одного из семейств, проходящие через точки носителя начальных данных, будут возрастать, а характеристики другого семейства будут убывать. Следовательно в точках областей $\{x<a,\ y>0\}$, $\{x>b,\ y<0\}$, $\{x<a,\ y<0\}$, $\{x>b,\ y>0\}$ пройдут характеристики лишь одного семейства.

На основании вышеприведенных рассуждений можем заключить, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Решение задачи Коши (I.I), (3.2) определяется в области, целиком расположенной в полосе $\{a \le x \le b,\ y \in R^1\}$.

Более того, при отсутствии вырождения уравнения на носителе начальных данных область определения решения не будет выходить за рамки некоторого прямоугольника с вертикальными сторонами $x=a$, $x=b$. С целью выявления размеров этого прямоугольника придется ввести некоторые ограничения.

Пусть соблюдены условия

$$|\nu(x)| > \varepsilon > 0. \tag{3.46}$$

Введем обозначения

$$g(t_1) = 2b^{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|\tau\|_{C^2}\right) + 2\alpha\|\tau\|_{C^2}\, t_1^{\alpha-1},$$

$$G(t_2) = 2t_2^{1-\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|\tau\|_{C^2}\right) + 2(1-\alpha)\,\mathrm{sign}(1-\alpha)\,\|\tau\|_{C^2}\, a^{-\alpha},$$

$$M(t_3,t_4) = \left(\frac{\|\nu\|_{C^1}}{\varepsilon^2} + \|\tau\|_{C^2}\right)b^{\alpha} + \alpha\left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\|\tau\|_{C^2}\right)t_3^{\alpha-1} +$$

$$+\alpha(\alpha-1)\,\mathrm{sign}(\alpha-1)\,\|\tau\|_{C^2}\, t_4^{\alpha-2},$$

$$d(t_1,t_2,t_3,t_4)=\frac{1}{2(2\alpha-1)}\Big[g(t_1)G(t_2)+(b-a)a^{1-2\alpha}g(t_1)M(t_3,t_4)+$$

$$+2(2\alpha-1)(b-a)\|\tau\|_{C^2}\,a^{-\alpha}M(t_3,t_4)\Big],$$

где $\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4c+1}\right)$.

На основании формул (3.5), (3.2I) и теоремы 3.2 элементарно следует утверждение.

Следствие. Если соблюдены условия (3.46), то область определения решения задачи (I.I), (3.2) не выходит за рамки прямоугольников

$$\{a\le x\le b,\quad |y|<d(b,a,b,b)\},\quad \text{если}\quad c\geqslant 2,$$

$$\{a\le x\le b,\quad |y|<d(b,a,b,a)\},\quad \text{для}\quad 0\le c<2,$$

$$\{a\le x\le b,\quad |y|<d(a,b,a,a)\},\quad \text{при}\quad -\frac{1}{4}\le c<0.$$

§ 4. Нелинейная характеристическая задача Гурса

В этом параграфе снова рассмотрим квазилинейное уравнение

$$x^2\left(u_y^4u_{xx}-u_{yy}\right)=cuu_y^4 \tag{I.I}$$

с постоянным коэффициентом $c>-\frac{1}{4}$ и дадим постановку одного нелинейного аналога характеристической задачи Гурса.

Для линейных уравнений, как известно, задача Гурса заключается в нахождении решения по его заданным значениям на дугах характеристик, выходящих из общей точки. В нелинейном случае характеристики зависят от искомых решений u, поэтому сами являются неизвестными. Чтобы при постановке задачи восполнить этот пробел, мы обратимся к характеристическим инвариантам Римана (2.2) уравнения (I.I):

$$\begin{cases} \xi = \left(\dfrac{1}{u_y} + u_x\right) x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1} \\ \eta = \left(\dfrac{1}{u_y} - u_x\right) x^{\alpha} + \alpha u x^{\alpha-1} \\ \xi_1 \equiv \varphi'(\xi) = \left(\dfrac{1}{u_y} + u_x\right) x^{1-\alpha} - (1-\alpha) u x^{-\alpha} \\ \eta_1 \equiv \psi'(\eta) = \left(\dfrac{1}{u_y} - u_x\right) x^{1-\alpha} + (1-\alpha) u x^{-\alpha}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где φ, ψ произвольные трижды непрерывно дифференцируемые функции.

Учитывая вид этих инвариантов, мы изучим задачу с данными на дугах характеристик, в качестве которых будем брать дуги кривых γ_1, γ_2, заданных уравнениями

$$\gamma_1 : y = f_1(x), \quad x \in [a, b]; \qquad \gamma_2 : y = f_2(x), \quad x \in [a, d], \quad a > 0.$$

Предполагается, что f_1, f_2 непрерывно дифференцируемы до третьего порядка включительно, f_1 монотонно возрастает, f_2 – монотонно убывает, а в точке $x = a$ удовлетворяют условиям согласованности

$$f_1(a) = f_2(a),$$

$$f_1'(a) = -f_2'(a). \tag{4.I}$$

Характеристическая задача Гурса: на плоскости переменных x, y найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (I.I) вместе с областью его определения, если вдоль этого решения кривые γ_1, γ_2 являются характеристиками и в общей точке $\big(a, f_1(a)\big)$ оно принимает значение

$$u\left(a, f_1(a)\right) = \vartheta, \tag{4.2}$$

а значение инварианта ξ на характеристике γ_1 равно заданному числу δ

$$\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right) x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1}\right)\Bigg|_{\gamma_1} = \delta. \tag{4.3}$$

Не ограничивая общности, можем предположить, что

$$f_1(a) = f_2(a) = 0. \tag{4.4}$$

По формулировке задачи кривую γ_1 отнесли к семейству характеристик $\xi = const$, что, со своей стороны, значит

$$f_1'(x) = \frac{1}{u_y^2},$$

и, следовательно,

$$f_2'(x) = -\frac{1}{u_y^2}.$$

Оба эти соотношения определяют на дугах γ_1 и γ_2 характеристик значения производной u_y. Но они определяются неоднозначно:

$$u_y\Big|_{\gamma_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{f_1'(x)}}, \qquad u_y\Big|_{\gamma_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{-f_2'(x)}}.$$

Чтобы не нарушалось условие согласованности и производная u_y была непрерывной в точке $(a, 0)$, согласно условию (4.I) мы должны взять корни с одинаковыми знаками. Сперва рассмотрим корни с их арифметическими значениями.

Таким образом на характеристике γ_1 имеем

$$u_y\left(x, f_1(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{f_1'(x)}}. \tag{4.5}$$

Соотношение (4.3) при $x = a$ с учетом (4.2), (4.5) дает значение производной u_x в точке $(a, 0)$

$$u_x(a,0) = (\delta + \alpha \vartheta a^{\alpha-1}) a^{-\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}.$$

Принимая во внимание полученные значения, непосредственно вычисляем значения всех оставшихся характеристических инвариантов в точке $(a,0)$

$$\begin{cases} \eta(a,0) = 2\sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha} - \delta \\ \xi_1(a,0) = \delta a^{1-2\alpha} - (1-2\alpha)\vartheta a^{-\alpha} \\ \eta_1(a,0) = 2\sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha} - \delta a^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\vartheta a^{-\alpha}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Таким образом, мы знаем значения всех характеристических инвариантов (2.2) попарно на характеристиках γ_1, γ_2, так как ξ_1, ξ_2 будут принимать постоянные значения вдоль γ_1, а η, η_1 – вдоль γ_2:

$$\begin{cases} \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right) x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1}\right)\right|_{\gamma_1} = \delta \\ \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right) x^{1-\alpha} - (1-\alpha) u x^{-\alpha}\right)\right|_{\gamma_1} = \xi_1(a,0), \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} - u_x\right) x^{\alpha} + \alpha u x^{\alpha-1}\right)\right|_{\gamma_2} = \eta(a,0) \\ \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} - u_x\right) x^{1-\alpha} + (1-\alpha) u x^{-\alpha}\right)\right|_{\gamma_2} = \eta_1(a,0). \end{cases} \tag{4.8}$$

Обратимся теперь к общему представлению решений уравнения (I.I) в терминах характеристических инвариантов и при его помощи вычислим значения решения на кривой γ_1. Для этого представление (2.5), на основании (2.3) перепишем в виде

$$u = \frac{1}{1-2\alpha}\left(\xi x^{1-\alpha} - \xi_1 x^{\alpha}\right)$$

и подставим туда определенные нами постоянные значения $\xi = \delta$, $\xi_1 = \xi_1(a,0)$:

$$u\Big|_{\gamma_1} = \frac{1}{1-2\alpha}\left[\delta x^{1-\alpha} - \xi_1(a,0)\, x^{\alpha}\right]. \qquad (4.9)$$

Имея значения решения $u(x,y)$ и его производной $u_y(x,y)$ вдоль кривой γ_1, из второго соотношения (4.7) определяем значение другой его производной $u_x(x,y)$ на этой характеристике:

$$u_x\Big|_{\gamma_1} = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\,\delta x^{-\alpha} - \frac{\alpha}{1-2\alpha}\,\xi_1(a,0)\, x^{\alpha-1} - \sqrt{f_1'(x)}. \qquad (4.10)$$

Условия нашей задачи дают возможность определения значений решения $u(x,y)$ и его производных $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ и на другой характеристике γ_2. Действительно, уже имеем

$$u_y\Big|_{\gamma_2} = \frac{1}{\sqrt{-f_2'(x)}}. \qquad (4.11)$$

Комбинируя это выражение с (4.8), мы сможем выразить связь между функциями u_x и u на γ_2:

$$u_x\Big|_{\gamma_2} = -\eta(a,0)\, x^{-\alpha} + \alpha u x^{-1} + \sqrt{-f_2'(x)}. \qquad (4.12)$$

На основании характеристического соотношения

$$\frac{dy}{dx} = f_2'(x), \quad x \in [a,d]$$

на кривой γ_2 полный дифференциал du можно записать в виде

$$du = \left(u_x + f_2'(x)\cdot u_y\right) dx$$

Подставляя туда значения u_y, u_x, определенные по формулам (4.11-12), в результате получим

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{\gamma_2} = \frac{\alpha}{x}\, u\Big|_{\gamma_2} - \gamma(a,0)\, x^{-\alpha}, \quad x \in [a, d]. \tag{4.13}$$

Рассмотрим соотношение (4.13) как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно следа $U(x) = u(x, f_2(x))$ функции u

$$\frac{dU}{dx} - \frac{\alpha}{x}\, U = -\gamma(a,0)\, x^{-\alpha},$$

общее решение которого выражается с точностью до постоянного слагаемого:

$$U = x^{\alpha}\left(c_0 - \gamma(a,0)\, \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right).$$

Учитывая значение $u(a,0) = \vartheta$, получаем

$$c_0 = \vartheta a^{-\alpha} + \gamma(a,0)\, \frac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha},$$

и, следовательно, для значений $U(x) \equiv u(x, f_2(x))$ будем иметь

$$u\Big|_{\gamma_2} = \left(\vartheta a^{-\alpha} + \frac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\, \gamma(a,0)\right) x^{\alpha} - \gamma(a,0)\, \frac{x^{1-\alpha}}{1-2\alpha}. \tag{4.14}$$

Располагая значениями решения $u(x,y)$ вдоль кривой γ_2 – (4.14), из соотношения (4.12) получаем

$$u_x\Big|_{\gamma_2} = \frac{\alpha-1}{1-2\alpha}\, \gamma(a,0)\, x^{-\alpha} + \alpha\left(\vartheta a^{-\alpha} + \frac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\, \gamma(a,0)\right) x^{\alpha-1} + \sqrt{-f_2'(x)}\,. \tag{4.15}$$

Из рассуждений, приведенных выше, заключаем, что условиями задачи (1.1), (4.2), (4.3), все компоненты характеристических инвариантов x, y, u, u_x, u_y в отдельности вполне определяются на γ_1 и γ_2. При их помощи вдоль этих кривых можно вычислить значения всех четырех инвариантов. Именно это обстоятельство дает возможность вычисления значений искомого решения $u(x,y)$ вне кривых γ_1, γ_2.

С этой целью возьмем на дугах γ_1 и γ_2 произвольно по одной точке $P_1(x_1, f_1(x_1))$, $P_2(x_2, f_2(x_2))$, не совпадающие с точкой $(a, 0)$. Проведем через точку P_2 характеристику γ_3 семейства $\xi = const$, а через точку P_1 – характеристику γ_4 семейства $\eta = const$. Если эти характеристики пересекаются, возьмем дуги γ_3, γ_4 от точек P_2, P_1 до точки $M(x^0, y^0)$ их пересечения соответственно.

В точке $P_1(x_1, f_1(x_1))$ у нас определены значения $x = x_1$, $y = f_1(x_1)$, $u = u(x_1, f_1(x_1))$, $u_x = u_x(x_1, f_1(x_1))$, $u_y = u_y(x_1, f_1(x_1))$ при помощи x_1. Располагая этими значениями-(4.5), (4.9-I0), по формулам (2.2) вычисляем значения инвариантов η, η_1 в точке $(x_1, f_1(x_1))$:

$$\begin{cases} \eta(x_1, f_1(x_1)) = 2\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{\alpha} - \delta \\ \eta_1(x_1, f_1(x_1)) = 2\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{1-\alpha} - \delta a^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\vartheta a^{-\alpha}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Ввиду того, что γ_4 является характеристической дугой семейства $\eta = const$, значения инвариантов η, η_1 принимаемые в точке P_1 – $\eta(x_1, f_1(x_1))$, $\eta_1(x_1, f_1(x_1))$ сохраняются вдоль всей дуги γ_4. Поэтому будем иметь

$$\left(\left(\frac{1}{u_y} - u_x\right)x^{\alpha} + \alpha u x^{\alpha-1}\right)\Bigg|_{\gamma_4} = \eta(x_1, f_1(x_1)), \tag{4.17}$$

$$\left(\left(\frac{1}{u_y} - u_x\right)x^{1-\alpha} + (1-\alpha) u x^{-\alpha}\right)\Bigg|_{\gamma_4} = \eta_1(x_1, f_1(x_1)). \tag{4.18}$$

Теперь возьмем точку $P_2(x_2, f_2(x_2))$ на кривой γ_2, где также известны значения всех пяти параметров $x = x_2$, $y = f_2(x_2)$, $u = u(x_2, f_2(x_2))$, $u_x = u_x(x_2, f_2(x_2))$, $u_y = u_y(x_2, f_2(x_2))$, по которым строятся характеристические инварианты.

При их помощи по формулам (2.2) вычислим значения инвариантов ξ, ξ_1 в точке P_2. В силу (4.II), (4.I4-I5) получаем

$$\begin{cases} \xi(x_2, f_2(x_2)) = 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha} - \eta(\alpha, 0) \\ \xi_1(x_2, f_2(x_2)) = 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{1-\alpha} + (2\alpha-1)\left(\vartheta a^{-\alpha} + \dfrac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\eta(a,0)\right). \end{cases} \tag{4.I9}$$

Так как характеристическая дуга γ_3 с дугой γ_2 имеет общую точку P_2, то значения инвариантов ξ; ξ_1 будут принимать постоянные значения вдоль γ_3 всюду и эти значения соответственно равны $\xi(x_2, f_2(x_2))$, $\xi_1(x_2, f_2(x_2))$. Поэтому будем иметь

$$\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right)x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1}\right)\Big|_{\gamma_3} = \xi(x_2, f_2(x_2)), \tag{4.20}$$

$$\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right)x^{1-\alpha} - (1-\alpha) u x^{-\alpha}\right)\Big|_{\gamma_3} = \xi_1(x_2, f_2(x_2)). \tag{4.2I}$$

Соотношения (4.I7-I8), (4.20-2I) одновременно будут выполнены в точке пересечения дуг γ_3, γ_4, которую мы обозначили через $M(x^0, y^0)$. Таким образом, относительно четырех величин

$$x^0,\ u^0 = u(x^0, y^0),\ u_x^0 = u_x(x^0, y^0),\ u_y^0 = u_y(x^0, y^0)$$

получили систему четырех уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{u_y^0} + u_x^0\right)x^{0\,\alpha} - \alpha u^0 x^{0\,\alpha-1} = \xi(x_2, f_2(x_2)) \\ \left(\dfrac{1}{u_y^0} - u_x^0\right)x^{0\,\alpha} + \alpha u^0 x^{0\,\alpha-1} = \eta(x_1, f_1(x_1)) \\ \left(\dfrac{1}{u_y^0} + u_x^0\right)x^{0\,1-\alpha} - (1-\alpha) u^0 x^{0\,-\alpha} = \xi_1(x_2, f_2(x_2)) \\ \left(\dfrac{1}{u_y^0} - u_x^0\right)x^{0\,1-\alpha} + (1-\alpha) u^0 x^{0\,-\alpha} = \eta_1(x_1, f_1(x_1)). \end{cases} \tag{4.22}$$

С системой (4.22) уже сталкивались при построении общего интеграла уравнения (I.I). Мы практически уже имеем решение этой системы в виде общего интеграла. В данном случае систему (4.22) рассматриваем не относительно функций u, u_x, u_y, а относительно их конкретных значений в точке $M(x^\circ, y^\circ)$. Правые части также являются конкретными постоянными величинами, вполне определенными условиями задачи (I.I), (4.2-3).

Решение этой системы выражается следующим образом:

$$x^\circ = \left(\frac{\xi_1(x_2, f_2(x_2)) + \eta_1(x_1, f_1(x_1))}{\xi(x_2, f_2(x_2)) + \eta(x_1, f_1(x_1))} \right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \tag{4.23}$$

$$u^\circ = \frac{1}{1-2\alpha}\left[\xi(x_2, f(x_2)) \left(\frac{\xi_1(x_2, f_2(x_2)) + \eta_1(x_1, f_1(x_1))}{\xi(x_2, f_2(x_2)) + \eta(x_1, f_1(x_1))} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\xi_1(x_2, f_2(x_2)) + \eta_1(x_1, f_1(x_1))}{\xi(x_2, f_2(x_2)) + \eta(x_1, f_1(x_1))} \right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}} \xi_1(x_2, f_2(x_2)) \right], \tag{4.24}$$

$$u_x^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\alpha}\, \xi(x_2, f_2(x_2)) - \eta(x_1, f_1(x_1)) \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\xi_1(x_2, f_2(x_2)) + \eta_1(x_1, f_1(x_1))}{\xi(x_2, f_2(x_2)) + \eta(x_1, f_1(x_1))} \right)^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}} -$$

$$- \frac{\alpha}{1-2\alpha}\, \xi_1(x_2, f_2(x_2)) \left(\frac{\xi_1(x_2, f_2(x_2)) + \eta_1(x_1, f_1(x_1))}{\xi(x_2, f_2(x_2)) + \eta(x_1, f_1(x_1))} \right)^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}},$$

$$u_y^\circ = 2\left(\xi_1(x_2, f_2(x_2)) + \eta_1(x_1, f_1(x_1)) \right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}} \left(\xi(x_2, f_2(x_2)) + \eta(x_1, f_1(x_1)) \right)^{\frac{\alpha-1}{1-2\alpha}}.$$

Таким образом мы определили значение четырех величин $x = x^\circ$, $u = u^\circ$, $u_x = u_x^\circ$, $u_y = u_y^\circ$ в точке $M(x^\circ, y^\circ)$ в терминах x_1, x_2. Остается вычислить при помощи этих же значений x_1, x_2

значение пятой величины $y = y^{\circ}$.

Для нахождения $y^{\circ} = y(x_1, x_2)$ обратимся к общему представлению решений уравнения (I.I), выраженному в терминах характеристических инвариантов ξ, η. Для величины y имеем

$$y = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\Big[(\xi+\eta)(\eta_1-\xi_1) + 2\big(\varphi(\xi) - \psi(\eta)\big)\Big]. \qquad (2.II)$$

Поэтому

$$y(x_1, x_2) = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\Big[\Big(\xi(x_2, f_2(x_2)) + \eta(x_1, f_1(x_1))\Big)\Big(\eta_1(x_1, f_1(x_1)) -$$

$$- \xi_1(x_2, f(x_2))\Big) + 2\Big(\varphi\big(\xi(x_2, f_2(x_2))\big) - \psi\big(\eta(x_1, f_1(x_1))\big)\Big)\Big], \qquad (4.25)$$

где $\varphi\big(\xi(x_2, f_2(x_2))\big) - \psi\big(\eta(x_1, f_1(x_1))\big)$ величину следует доопределить.

Для этого заметим, что вдоль γ_1 имеем $y = f_1(x)$. Учитывая это обстоятельство согласно (2.II) можно написать

$$f_1(x_1) = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\Big[\Big(\delta + \eta(x_1, f_1(x_1))\Big)\Big(\eta_1(x_1, f_1(x_1)) - \xi_1(a, 0)\Big) +$$

$$+ 2\Big(\varphi(\delta) - \psi\big(\eta(x_1, f_1(x_1))\big)\Big)\Big]. \qquad (4.26)$$

С другой стороны, вдоль γ_2 имеем $y = f_2(x)$, поэтому с учетом (2.II) будем иметь

$$f_2(x_2) = \frac{1}{4(1-2\alpha)}\Big[\Big(\xi(x_2, f(x_2)) + \eta(a, 0)\Big)\Big(\eta_1(a, 0) - \xi_1(x_2, f_2(x_2))\Big) +$$

$$+ 2\Big(\varphi\big(\xi(x_2, f_2(x_2))\big) - \psi\big(\eta(a, 0)\big)\Big)\Big]. \qquad (4.27)$$

Суммируя (4.26-27), получаем выражение искомой величины

$$2\Big(\varphi\big(\xi(x_2, f_2(x_2))\big) - \psi\big(\eta(x_1, f_1(x_1))\big)\Big) = 4(1-2\alpha)\Big(f_1(x_1) + f_2(x_2)\Big) -$$

$$-\Big(\delta + \eta(x_1, f_1(x_1))\Big)\Big(\eta_1(x_1, f_1(x_1)) - \xi_1(a, 0)\Big) - \Big(\xi(x_2, f_2(x_2)) +$$

$$+\gamma(a,0)\Big)\Big(\gamma_1(a,0)-\xi_1(x_2,f_2(x_2))\Big)-2\Big(\varphi(\delta)-\psi(\gamma(a,0))\Big), \qquad (4.28)$$

где все слагаемые, кроме последнего, вполне определены.

Это слагаемое также будет определено, если примем во внимание, что в точке $(a,0)$

$$y(a,0)=0.$$

Действительно, из (2.II) получаем

$$\Big(\delta+\gamma(a,0)\Big)\Big(\gamma_1(a,0)-\xi_1(a,0)\Big)+2\Big(\varphi(\delta)-\psi(\gamma(a,0))\Big)=0,$$

откуда следует, что величина

$$2\Big(\varphi(\delta)-\psi(\gamma(a,0))\Big)=-\Big(\delta+\gamma(a,0)\Big)\Big(\gamma_1(a,0)-\xi_1(a,0)\Big). \qquad (4.29)$$

Теперь, принимая во внимание (4.25), (4.28-29), окончательно приходим к соотношению

$$y^0=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\frac{1}{4(1-2\alpha)}\Big[\xi(x_2,f_2(x_2))\gamma_1(x_1,f_1(x_1))-\gamma(x_1,f_1(x_1))\times$$

$$\times\xi_1(x_2,f_2(x_2))-\delta\gamma_1(x_1,f_1(x_1))+\gamma(x_1,f_1(x_1))\xi_1(a,0)-\xi(x_2,f_2(x_2))\times$$

$$\times\gamma_1(a,0)+\xi_1(x_2,f_2(x_2))\gamma(a,0)+\delta\gamma_1(a,0)-\gamma(a,0)\xi_1(a,0)\Big]. \qquad (4.30)$$

Если x_1 и x_2 будут меняться в промежутках $[a,b]$ и $[a,d]$ соответственно, то множество точек пересечения характеристик, выпущенных из всевозможных пар точек $(x_1, f_1(x_1))$ и $(x_2, f_2(x_2))$, составляет всю область определения решения задачи (I.I), (4.2-3). Обозначим это множество точек через $\mathcal{D}$. Здесь, естественно, предполагается, что все вышеупомянутые характеристики пересекаются.

Область определения $\mathcal{D}$ решения $u(x^0, y^0)$ задачи мы получаем при текущих x_1, x_2. Эта область полностью определяется соотношениями (4.23) и (4.30), где выражения x^0, y^0 представлены в виде функций от x_1, x_2. Значения этих функций рассмотрим в качестве текущих координат, описывающих область $\mathcal{D}$. Тогда решение рассматриваемой задачи согласно (4.6), (4.16), (4.19), (4.23-24), (4.30) можно представить тремя равенствами:

$$x = \Phi(x_1, x_2) \equiv \left(\frac{\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{1-\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{1-\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha}}{\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}, \quad (4.31)$$

$$y = \Psi(x_1, x_2) \equiv f_1(x_1) + f_2(x_2) + \frac{1}{1-2\alpha} \Big[\left(\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{1-\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha} \right) \times$$
$$\times \left(\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha} \right) + \left(\sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha} - \sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{\alpha} \right) \times$$
$$\times \left(\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{1-\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha} \right) \Big], \quad (4.32)$$

$$u = \frac{1}{1-2\alpha} \Big[\left(\delta - 2\sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha} + 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{1-\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{1-\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha}}{\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha}} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}} +$$
$$+ \left((2\alpha - 1)\vartheta a^{-\alpha} - 2\sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha} + \delta a^{1-2\alpha} + 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{1-\alpha} \right) \times$$
$$\times \left(\frac{\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{1-\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{1-\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha}}{\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha}} \right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}, \quad (4.33)$$

которые определяют и область $\mathcal{D}$ и искомое решение $u(x_1, x_2)$. Безусловно, $x_1 \in (a, b]$, $x_2 \in (a, d]$.

При выводе этих соотношений мы исключили значения $x_1 = a$, $x_2 = a$. Это – предельные случаи. Если $x_1 = a$, а x_2 будет пробегать интервал $[a, d]$, то из (4.31-32) должны иметь соотношения

$$x = x_2, \quad y = f_2(x_2).$$

Проверим этот факт непосредственными вычислениями. Согласно (4.4), (4.3I-32) имеем

$$x(a, x_2) = \left(\frac{\sqrt{-f_2'(x_2)}\; x_2^{1-\alpha}}{\sqrt{-f_2'(x_2)}\; x_2^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-2\alpha}} = x_2 ,$$

$$y(a, x_2) = f_1(a) + f_2(x_2) = f_2(x_2).$$

Аналогично, если предположим, что $x_2 = a$, получим

$$x(x_1, a) = \left(\frac{\sqrt{f_1'(x_1)}\; x_1^{1-\alpha}}{\sqrt{f_1'(x_1)}\; x_1^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-2\alpha}} = x_1 ,$$

$$y(x_1, a) = f_1(x_1) + f_2(a) = f_1(x_1).$$

А эти соотношения определяют характеристику γ_1.

Этим мы доказали, что область определения $\mathcal{D}$ решения задачи (I.I), (4.2-3) непосредственно примыкает к характеристическим дугам γ_1, γ_2 и эти дуги входят в состав границы области $\mathcal{D}$.

Учитывая непрерывную зависимость величин x, y от переменных x_1, x_2, приходим к заключению, что множество точек пересечения всевозможных пар характеристик, подобных γ_3, γ_4, связное. Это означает связность области $\mathcal{D}$.

Представление решения (4.3I-32) задачи (I.I), (4.2-3) окончательное и явное. Здесь можно было бы остановиться.

Однако, в некоторых случаях можно пойти еще дальше и получить решение u в виде функции аргументов x, y. Для этого понадобится определить из первых двух соотношений (4.3I-32) величины x_1, x_2 в виде функций x, y, а затем подставить эти функции в выражение (4.33). Тем самым процесс окончательного явного построения решения будет завершен.

Тут же отметим, что разрешимость функциональной системы (4.3I-

32) равносильно требованию, что упомянутые выше характеристические кривые γ_3, γ_4, выпущенные из точек $(x_2, f_2(x_2))$, $(x_1, f_1(x_1))$, действительно пересекаются.

Вычисляя якобиан системы (4.31-32), имеем

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x_1,x_2)} = \frac{\Phi^{2\alpha}(x_1,x_2)\,H(x_1,x_2)}{(1-2\alpha)^2\left(\sqrt{f_1'(x_1)}\,x_1^{\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\,x_2^{\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\,a^{\alpha}\right)^2},$$

где введены обозначения (4.31) и

$$H(x_1,x_2) = \sqrt{f_1'(a)}\Big[2 f''(x_2)\sqrt{f_1'(x_1)}\,x_1^{-\alpha} x_2\, a^{\alpha}\Big((\alpha-1)\big(x_2^{2\alpha-1} a^{1-2\alpha} + 1\big) +$$

$$+\alpha x_1^{2\alpha-1}\big(a^{1-2\alpha} + x_2^{1-2\alpha}\big)\Big) - \frac{2 f_1''(x_1) f_2''(x_2)}{\sqrt{f_1'(x_1)}}\, x_1^{\alpha} x_2\, a^{1-\alpha}\big(1 - x_1^{1-2\alpha} x_2^{2\alpha-1}\big) -$$

$$-\frac{2 f_1''(x_1) f_2'(x_2)}{\sqrt{f_1'(x_1)}}\, x_1^{1-\alpha} a^{\alpha}\Big(2a^{1-2\alpha}\big((2\alpha-1)x_1^{2\alpha-1} - \alpha x_2^{2\alpha-1}\big) -$$

$$-a^{-\alpha}\big(2\alpha x_2^{2\alpha-1} + (1-2\alpha)x_2^{\alpha}\big) - x_2^{1-2\alpha}\big((1-2\alpha)x_1 + (1-\alpha)x_1^{2\alpha-1}\big) +$$

$$+\left(1\tfrac{1}{2} - 2\alpha\right)\Big) + \frac{f_1''(x_1) f_2''(x_2)}{\sqrt{-f_2'(x_2)}}\, x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} a\big(2a^{1-2\alpha} - 2x_1^{1-2\alpha} + x_2^{1-3\alpha} - x_2^{1-2\alpha}\big) -$$

$$-4\alpha f_1''(x_1)\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_1 x_2^{\alpha-1} a^{\alpha}\Big(\big(\tfrac{1}{\alpha}-1\big)x_2^{1-2\alpha} + x_1^{1-2\alpha} - x_2^{\alpha} a^{1-2\alpha}\Big) -$$

$$-8\alpha f_2'(x_2)\sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{-\alpha} a^{1-\alpha}\Big((1-\alpha)\big(a^{2\alpha-1} - x_2^{2\alpha-1}\big) + \big(\alpha-\tfrac{1}{2}\big)x_1^{2\alpha-1}\Big) -$$

$$-\frac{2 f_2''(x_2) f_1'(x_1)}{\sqrt{-f_2'(x_2)}}(2\alpha-1)\, a^{1-\alpha} x_2^{\alpha}\Big(2x_1^{1-2\alpha} a^{1-2\alpha} + \frac{\alpha}{(2\alpha-1)\sqrt{f_1'(a)}} + 1 +$$

$$+\frac{\alpha}{2\alpha-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{f_1'(a)}} - 1\Big)x_2^{1-2\alpha} - x_2^{-\alpha}\Big) - 4 f_1'(x_1)\sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha-1}\times$$

$$\times\Big((\alpha^2-\alpha)\Big(\frac{1}{\sqrt{f_1'(a)}}+1\Big)x_1^{1-2\alpha}+a^{1-\alpha}\Big(\alpha\big(1\tfrac{1}{2}-3\alpha\big)-\frac{\alpha^2}{\sqrt{f_1'(a)}}-\alpha^2\sqrt{f_1'(a)}\Big)+$$

$$+2(1-\alpha)(1-2\alpha)x_2^{1-2\alpha}a^{\alpha}\Big)\Big]+f_1'(a)\Big[\frac{2f_1''(x_1)f_2''(x_2)}{\sqrt{-f_1'(x_1)f_2'(x_2)}}x_2^{\alpha}x_1^{\alpha}a\times$$

$$\times\big(a^{1-2\alpha}-x_1^{1-2\alpha}\big)-\frac{2\alpha f_1''(x_1)\sqrt{-f_2'(x_2)}}{\sqrt{f_1'(x_1)}}x_1^{1-\alpha}x_2^{\alpha-1}a^{2-2\alpha}\times$$

$$\times\big(2x_1^{2\alpha-1}-a^{2\alpha-1}-1\big)+4(1-\alpha)^2\sqrt{-f_1'(x_1)f_2'(x_2)}\,x_1^{-\alpha}x_2^{-\alpha}\times$$

$$\times\Big(\Big(\frac{1}{4(1-\alpha)^2}-1\Big)a^{2\alpha}-\frac{2\alpha}{1-\alpha}x_2^{2\alpha-1}a+\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}\Big(a^{2-2\alpha}+\frac{1}{\sqrt{f_1'(a)}}\Big)\times$$

$$\times x_1^{2\alpha-1}x_2^{2\alpha-1}-\frac{4(1-2\alpha)}{1-\alpha}x_2^{2\alpha}-a^{2\alpha}+\frac{\alpha(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)^2}x_1^{2\alpha-1}x_2\Big)-$$

$$-\frac{f_2''(x_2)\sqrt{f_1'(x_1)}}{\sqrt{-f_2'(x_2)}}a\,x_1^{-\alpha}x_2^{\alpha}\Big(4(1-\alpha)\Big(a^{1-\alpha}+2\alpha x_1^{2\alpha-1}x_2^{1-2\alpha}\times$$

$$\times\Big(a^{1-\alpha}-\frac{1}{\sqrt{f_1'(a)}}\Big)-3\alpha x_1^{2\alpha-1}a^{1-2\alpha}\Big)\Big]-4\alpha x_1 f_1''(x_1)f_1'(x_2)\times$$

$$\times\big(x_1^{1-2\alpha}x_2^{2\alpha-1}-1\big)-2\alpha f_2''(x_2)f_1'(x_1)\Big(2\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)x_1^{1-2\alpha}x_2^{2\alpha}-3x_2+$$

$$+x_1^{2\alpha-1}x_2^{2-2\alpha}-x_1^{2\alpha-1}\Big)-4(1-2\alpha)\sqrt{-f_1'(x_1)f_2'(x_2)}\,f_2'(x_2)x_1^{-\alpha}x_2^{\alpha}\times$$

$$\times\big(\alpha x_1^{2\alpha-1}x_2^{1-2\alpha}+\alpha-1\big)-2\alpha f_1'(x_1)f_2'(x_2)\Big(\Big(4x_1^{1-2\alpha}x_2^{2\alpha-1}+$$

$$+x_1^{2\alpha-1}x_2^{1-2\alpha}\Big)(1-\alpha)-4\Big(5\alpha-\frac{1-4\alpha}{\alpha}\Big)\Big)-2(1-2\alpha)x_1^{1-\alpha}x_2^{\alpha}\times$$

$$\times\Big[\frac{f_1''(x_1)\sqrt{-f_2'(x_2)}\,f_2'(x_2)}{\sqrt{f_1'(x_1)}}\big(2x_1^{2\alpha-1}x_2^{1-2\alpha}-1\big)+\frac{2f_2''(x_2)\sqrt{f_1'(x_1)}\,f_1'(x_1)}{\sqrt{-f_2'(x_2)}}\Big].$$

При соблюдении условий

$$\begin{cases} \sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{1-\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{1-\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha} \neq 0 \\ \sqrt{f_1'(x_1)}\, x_1^{\alpha} + \sqrt{-f_2'(x_2)}\, x_2^{\alpha} - \sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha} \neq 0 \\ H(x_1, x_2) \neq 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

будет существовать решение системы (4.3I-32):

$$x_1 = h_1(x, y), \quad x_2 = h_2(x, y).$$

Их подстановкой в (4.33) получим решение задачи (I.I), (4.2-3) в явном виде.

Теперь найдем область $\mathcal{D}$ определения решения задачи (I.I), (4.2-3). Для того, чтобы характеристики одного и того же семейства уравнения (I.I) в условиях задачи не пересекались в области $\mathcal{D}$ должны выполняться условия

$$\left[\Phi(x_1^0, x_2) - \Phi(x_1^1, x_2)\right]^2 + \left[\Psi(x_1^0, x_2) - \Psi(x_1^1, x_2)\right]^2 \neq 0, \tag{4.35}$$

$$\left[\Phi(x_1, x_2^0) - \Phi(x_1, x_2^1)\right]^2 + \left[\Psi(x_1, x_2^0) - \Psi(x_1, x_2^1)\right]^2 \neq 0, \tag{4.36}$$

для любых $x_1^0 \neq x_1^1$ и $x_2^0 \neq x_2^1$ фиксированных значений из промежутков $[a, b]$, $[a, d]$ соответственно и для параметров $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, d]$.

В этих условиях область определения решения задачи (I.I), (4.2-3) будет ограничена дугами γ_1, γ_2 и выходящими из точек $(d, f_2(d))$ и $(b, f_1(b))$ характеристиками γ_5 и γ_6.

Параметрически уравнения этих характеристик в силу (4.3I-32) запишутся в виде

$$\gamma_5: \quad x = \Phi(x_1, d), \quad y = \Psi(x_1, d) \tag{4.37}$$

и

$$\gamma_6: \quad x = \Phi(b, x_2), \quad y = \Psi(b, x_2). \tag{4.38}$$

Условия

$$\Psi'_{x_1}(x_1, d) \neq 0, \quad \Psi'_{x_2}(b, x_2) \neq 0 \tag{4.39}$$

обеспечивают существование функций $x_1 = \psi_1(y)$ и $x_2 = \psi_2(y)$ соответственно, обратных функциям $y = \Psi(x_1, d)$ и $y = \Psi(b, x_2)$. Поэтому при соблюдении (4.39) уравнения характеристик γ_5 и γ_6 примут вид

$$\gamma_5 : x = \Phi(\psi_1(y), d) \quad \text{и} \quad \gamma_6 : x = \Phi(b, \psi_2(y)). \tag{4.40}$$

Условия

$$\Phi'_{x_1}(x_1, d) \neq 0 \quad \text{и} \quad \Phi'_{x_2}(b, x_2) \neq 0 \tag{4.41}$$

обеспечивают существование функций $x_1 = \varphi_1(x)$ и $x_2 = \varphi_2(x)$, обратных функциям $x = \Phi(x_1, d)$ и $x = \Phi(b, x_2)$ соответственно. Поэтому при (4.41) уравнения характеристик напишутся в виде

$$\gamma_5 : y = \Psi(\varphi_1(x), d) \quad \text{и} \quad \gamma_6 : y = \Psi(b, \varphi_2(x)). \tag{4.42}$$

В предыдущих рассуждениях при определении производной u_y на γ_1 и γ_2 мы предполагали арифметическое значение корня в формулах (4.5), (4.11). Но производная u_y имеет и другие значения, аналогичные указанным формулам, но с противоположным знаком:

$$u_y\Big|_{\gamma_1} = -\frac{1}{\sqrt{f_1'(x)}}, \tag{4.43}$$

$$u_y\Big|_{\gamma_2} = -\frac{1}{\sqrt{-f_2'(x)}}. \tag{4.44}$$

Учитывая (4.43) и условия (4.2-3), определяем значение производной u_x в точке $(a, 0)$:

$$u_x(a, 0) = (\delta + \alpha \vartheta a^{\alpha-1}) a^{-\alpha} + \sqrt{f_1'(a)}.$$

Опираясь на представления инвариантов (2.2) и подставляя значения $u(a,0)=\vartheta$, $u_x(a,0)$, $u_y(a,0)$, непосредственно вычисляем

$$\gamma(a,0) = -2\sqrt{f_1'(a)}\, a^{\alpha} - \delta,$$

$$\xi_1(a,0) = \delta a^{1-2\alpha} - (1-2\alpha)\vartheta a^{-\alpha},$$

$$\gamma_1(a,0) = -2\sqrt{f_1'(a)}\, a^{1-\alpha} - \delta a^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\vartheta a^{-\alpha}.$$

Теперь мы знаем значения всех характеристических инвариантов (2.2) на характеристиках γ_1 и γ_2, в частности

$$\begin{cases} \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right)x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1}\right)\right|_{\gamma_1} = \delta \\ \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right)x^{1-\alpha} - (1-\alpha) u x^{-\alpha}\right)\right|_{\gamma_1} = \xi_1(a,0) \end{cases}, \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} - u_x\right)x^{\alpha} + \alpha u x^{\alpha-1}\right)\right|_{\gamma_2} = \gamma(a,0) \\ \left.\left(\left(\frac{1}{u_y} - u_x\right)x^{1-\alpha} + (1-\alpha) u x^{-\alpha}\right)\right|_{\gamma_2} = \gamma_1(a,0) \end{cases} \tag{4.45}$$

Как было сказано выше, решение уравнения (I.I) можно представить в виде

$$u = \frac{1}{1-2\alpha}\left(\xi x^{1-\alpha} - \xi_1 x^{\alpha}\right).$$

Подставляя в это представление определенные нами постоянные значения $\xi = \delta$, $\xi_1 = \xi_1(a,0)$ получаем значения этого решения на γ_1:

$$u\Big|_{\gamma_1} = \frac{1}{1-2\alpha}\left[\delta x^{1-\alpha} - \xi_1(a,0)\, x^{\alpha}\right]. \qquad (4.9)$$

После определения значения решения $u(x,y)$ и его производной u_y на дуге γ_1 из соотношения (4.7) получаем значения другой его производной $u_x(x,y)$ на γ_1:

$$u_x\Big|_{\gamma_1} = \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\,\delta x^{-\alpha} - \frac{\alpha}{1-2\alpha}\,\xi_1(a,0)\, x^{\alpha-1} + \sqrt{f_1'(x)}. \qquad (4.46)$$

На характеристике γ_2 имеем соотношение (4.44). В силу (4.44–45) мы сможем записать связь между u_x и u вдоль γ_2:

$$u_x\Big|_{\gamma_2} = -\eta(a,0)\, x^{-\alpha} + \alpha u x^{-1} - \sqrt{-f_2'(x)}. \qquad (4.47)$$

Учитывая характеристическое соотношение

$$\frac{dy}{dx} = f_2'(x), \quad x \in [a,d],$$

на кривой γ_2 полный дифференциал du можно записать в виде

$$du = \left(u_x + f_2'(x)\, u_y\right) dx.$$

Подставляя в указанный дифференциал производные u_y, u_x, определенные по формулам (4.44), (4.47) для определения следа $U(x) = u(x, f_2(x))$, получим

$$\frac{dU}{dx} - \frac{\alpha}{x} U = -\eta(a,0)\, x^{-\alpha},$$

общее решение которого имеет вид

$$U = x^{\alpha}\left(\tilde{c}_0 - \eta(a,0)\,\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right).$$

Но $u(a,0) = \vartheta$, поэтому

$$\tilde{c}_0 = \vartheta a^{-\alpha} + \eta(a,0)\,\frac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}$$

и, следовательно, для значений $u = u(x, f_2(x)) \equiv u\big|_{\gamma_2}$ имеем

$$u\Big|_{\gamma_2} = \left(\vartheta a^{-\alpha} + \gamma(a,0)\,\frac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right)x^{\alpha} - \frac{1}{1-2\alpha}\,\gamma(a,0)\,x^{1-\alpha}. \tag{4.48}$$

Учитывая (4.47-48) вдоль γ, получаем

$$u_x\Big|_{\gamma_2} = \frac{\alpha-1}{1-2\alpha}\,\gamma(a,0)\,x^{-\alpha} + \alpha\left(\vartheta a^{-\alpha} + \gamma(a,0)\frac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right)x^{\alpha-1} - \sqrt{-f_2'(x)}. \tag{4.49}$$

Теперь, принимая во внимание все полученные значения решения u и его производных u_x, u_y вдоль γ_1, γ_2, мы можем вычислить значения всех инвариантов в каждой точке этих кривых.

Располагая соотношениями (4.9), (4.43-44), (4.46), (4.48-49), по формулам (2.2) вычислим значения инвариантов ξ, ξ_1 в точке $P_2(x_2, f_2(x_2))$ и значения инвариантов η, η_1 в точке $(x_1, f_1(x_1))$

$$\xi(x_2, f_2(x_2)) = -\gamma(a,0) - 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\,x_2^{\alpha},$$

$$\xi_1(x_2, f_2(x_2)) = (2\alpha-1)\left(\vartheta a^{-\alpha} - \gamma(a,0)\,\frac{a^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right) - 2\sqrt{-f_2'(x_2)},$$

$$\eta(x_1, f_1(x_1)) = -2\sqrt{f_1'(x_1)}\,x_1^{\alpha} - \delta,$$

$$\eta_1(x_1, f_1(x_1)) = -2\sqrt{f_1'(x_1)}\,x_1^{1-\alpha} - \delta a^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\,\vartheta a^{-\alpha}.$$

Прибегая к аналогичным рассуждениям, как и в предыдущем случае, убеждаемся, что задача (I.I), (4.2-3) кроме решения (4.3I-33) имеет еще решение, представимое формулами

$$x = \Phi(x_1, x_2), \tag{4.3I}$$

$$y = \Psi(x_1, x_2), \tag{4.32}$$

$$u = \frac{1}{1-2\alpha}\Big[\left(\delta + 2\sqrt{f_1'(a)}\,a^{\alpha} - 2\sqrt{-f_2'(x_2)}\,x_2^{\alpha}\right)\Phi^{1-\alpha}(x_1, x_2) +$$

$$+\left((2\alpha-1)\vartheta a^{-\alpha} + 2\sqrt{f_1'(a)}\,a^{\alpha} + \delta a^{1-2\alpha} - 2x_2^{1-\alpha}\sqrt{-f_2'(x_2)}\right)\Phi^{\alpha}(x_1, x_2)\Big], \tag{4.50}$$

где величины $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, d]$ играют роль произвольных параметров.

Очевидно, что области определения этих решений совпадают, так как x и y даются одинаковыми соотношениями в обоих случаях.

Таким образом, справедливы следующие утверждения:

<u>Теорема 4.I</u>. При условиях (4.34-36) и (4.4I) для каждой произвольно взятой действительной ветви многозначной функции (4.3I) существует регулярное решение задачи (I.I), (4.2-3) с областью определения $\mathcal{D}$, ограниченной дугами γ_1, γ_2 и характеристиками (4.42).

<u>Теорема 4.2</u>. Число решений задачи (I.I), (4.2-3) не превосходит числа решений функциональной системы (4.3I-32).

Теперь для наглядности рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка

$$4x^2(u_y^4 u_{xx} - u_{yy}) = 3 u u_y^4 \tag{4.5I}$$

Обозначим через γ_1 и γ_2 две дуги кривых:

$$\gamma_1 : f_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}, \quad x \in [1, 3],$$

$$\gamma_2 : f_2(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, \quad x \in [1, 4].$$

Характеристическая задача Гурса: найти решение $u(x, y)$ уравнения (4.5I), вдоль которого кривые γ_1, γ_2 являются характеристиками и

$$u(1,0) = 0, \quad \xi \Big|_{\gamma_1} = 1. \tag{4.52}$$

Наряду с решением требуется найти и область его определения.

Вдоль γ_1 и γ_2

$$u_y = \pm \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Чтобы не нарушалось условие согласованности и производная была непрерывной в точке $(1,0)$, согласно условию

$$f_1'(1) = -f_2'(1),$$

мы должны взять корни с одинаковыми знаками. Рассмотрим сперва корни с их арифметическими значениями

$$u_y\Big|_{\gamma_1} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad u_y\Big|_{\gamma_2} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тогда, прибегая к аналогичным рассуждениям, как это было сделано выше, находим, что

$$\begin{cases} x^2 = x_2^2 + x_1^2 - 1 \\ y = \dfrac{x_1^2}{2} - \dfrac{x_2^2}{2}, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2x_1^2 = x^2 + 2y + 1 \\ 2x_2^2 = x^2 - 2y + 1 \end{cases}$$

и согласно (4.33)

$$u = x^{-\frac{1}{2}}y. \tag{4.53}$$

Если

$$u_y\Big|_{\gamma_1} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad u_y\Big|_{\gamma_2} = -\frac{1}{\sqrt{x}},$$

тогда согласно (4.50) получаем, что

$$u = x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}y. \tag{4.54}$$

В обоих случаях характеристика γ_4, выходящая из точки $(3,4)$ (3.4) имеет вид

$$\gamma_4 : y = -\frac{x^2}{2} + 8\frac{1}{2},$$

а характеристика γ_3, выходящая из точки $(4, -7\frac{1}{2})$

$$\gamma_3 : y = \frac{x^2}{2} - 15\frac{1}{2}.$$

Упомянутые характеристики пересекаются в точке $(\sqrt{24}, -3\frac{1}{2})$.

Таким образом решения (4.53-54) задачи (4.51-52) определены в области $\mathcal{D}$, ограниченной дугами характеристик $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и γ_4.

§ 5. Аналог начально-характеристической задачи Дарбу для нелинейного уравнения

В этом параграфе снова рассматриваем квазилинейное уравнение

$$x^2(u_y^4 u_{xx} - u_{yy}) = c u u_y^4, \quad -\frac{1}{4} < c = const \tag{1.1}$$

и предлагаем постановку одного нелинейного аналога начально-характеристической задачи Дарбу.

Для линейных гиперболических уравнений задача Дарбу заключается в нахождении решения по его заданным значениям на дугах характеристики и кривой, которая не соприкасается с характеристикой. Как уже было отмечено, в нелинейном случае характеристики зависят от искомых решений u, поэтому сами являются неизвестными.

В качестве дуги характеристики возьмем дугу кривой γ, заданную уравнением

$$\gamma : y = g(x), \quad x \in [\ell, b], \quad \ell > 0.$$

Предполагается, что функция g непрерывно дифференцируема до третьего порядка включительно, g монотонно возрастает, а в точке $x = \ell$ удовлетворяет равенству

$$g(\ell) = 0.$$

Пусть $\tau(x)$ заданная на интервале $\Delta : \ell \le x \le d,\ y = 0,$ $d < b$, дважды непрерывно дифференцируемая функция.

З а д а ч а   Д а р б у: На плоскости переменных x, y найти регулярное решение уравнения (I.I) вместе со своей областью определения, если вдоль этого решения кривая γ является характеристикой, само решение удовлетворяет начальному условию

$$u\Big|_{\Delta} = \tau(x), \tag{5.I}$$

причем

$$u_y(\ell, 0) > 0. \tag{5.2}$$

Изучим эту задачу, учитывая вид характеристических инвариантов Римана (2.2) уравнения (I.I).

По формулировке задачи кривую γ мы отнесли к семейству характеристик $\xi = const$, а это, со своей стороны, означает, что

$$g'(x) = u_y^{-2}(x, g(x)).$$

Согласно (5.2) имеем

$$u_y\Big|_{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g'(x)}}. \tag{5.3}$$

Принимая во внимание значения $u(\ell,0)$, $u_x(\ell,0)$ и $u_y(\ell,0)$ непосредственно вычисляем значение характеристического инварианта ξ в точке $(\ell,0)$:

$$\xi(\ell,0) = \delta \equiv \left(\sqrt{g'(\ell)} - \tau'(\ell)\right)\ell^{\alpha} - \alpha\,\tau(\ell)\,\ell^{\alpha-1}. \tag{5.4}$$

Очевидно, что

$$\xi\Big|_{\gamma} = \delta \tag{5.5}$$

На кривой γ полный дифференциал du записывается в виде

$$du\Big|_{\gamma} = \left(u_x\Big|_{\gamma} + g'(x)\, u_y\Big|_{\gamma} \right) dx.$$

Последнее соотношение перепишется следующим образом:

$$\frac{du(x, g(x))}{dx} = \left(u_x + \frac{1}{u_y} \right)\Big|_{\gamma}. \qquad (5.6)$$

Согласно (5.5–6) и (2.2) имеем

$$\frac{du(x,g(x))}{dx}\, x^{\alpha} - \alpha u(x, g(x))\, x^{\alpha-1} = \delta.$$

Отсюда, учитывая соотношение

$$u(\ell, 0) = \tau(\ell)$$

получаем

$$u\Big|_{\gamma} = \left[\frac{\delta}{1-2\alpha} \left(x^{1-2\alpha} - \ell^{1-2\alpha} \right) + \frac{\tau(\ell)}{\ell^{\alpha}} \right] x^{\alpha} \qquad (5.7)$$

Из (5.6) в силу (5.7) будем иметь

$$u_x\Big|_{\gamma} = \alpha \left(\frac{\tau(\ell)}{\ell^{\alpha}} - \delta \frac{\ell^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \right) x^{\alpha-1} + \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\, \delta x^{-\alpha} - \sqrt{g'(x)}. \qquad (5.8)$$

Таким образом, из рассуждений заключаем, что все компоненты характеристических инвариантов в отдельности определяются на γ. На Δ неизвестен только след производной u_y. Определим $u_y\big|_{\Delta}$. Для этого через точку $(x_1, 0)$, где x_1 произвольная фиксированная точка из $(\ell, b]$, проведем характеристику Γ_1 семейства $\eta = const$. Характеристики γ и Γ_1 обязательно пересекаются. Точку их пересечения обозначим через $M_0\,(x_0, g(x_0))$.

Вдоль Γ_1 имеют место следующие соотношения

$$\eta\Big|_{\Gamma_1} = \eta(x_0, g(x_0)), \qquad \eta_1\Big|_{\Gamma_1} = \eta_1(x_0, g(x_0)),$$

в частности,

$$\eta(x_1, 0) = \eta(x_0, g(x_0)), \quad \eta_1(x_1, 0) = \eta_1(x_0, g(x_0)).$$

Последние соотношения согласно (2.2), (5.3), (5.7-8) перепишутся в виде

$$\left(\frac{1}{u_y(x_1,0)} - \tau'(x_1)\right) x_1^{\alpha} + \alpha\tau(x_1) x_1^{\alpha-1} = 2\sqrt{g'(x_0)}\, x_0^{\alpha} - \delta, \tag{5.9}$$

$$\left(\frac{1}{u_y(x_1,0)} - \tau'(x_1)\right) x_1^{1-\alpha} + (1-\alpha)\tau(x_1) x_1^{-\alpha} =$$

$$= 2 x_0^{1-\alpha}\sqrt{g'(x_0)} - \delta^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\tau(\ell)\ell^{-\alpha}. \tag{5.10}$$

Из (5.9) следует, что

$$\frac{1}{u_y(x_1,0)} = 2\sqrt{g'(x_0)}\, x_0^{\alpha} x_1^{-\alpha} - \delta x_1^{-\alpha} - \alpha\tau(x_1) x_1^{\alpha-1} + \tau'(x_1). \tag{5.11}$$

Подставляя (5.11) в (5.10), получаем

$$H(x_0, x_1) \equiv 2\sqrt{f'(x_0)}\, x_0^{\alpha}\left(x_0^{1-2\alpha} - x_1^{1-2\alpha}\right) + \delta\left(x_1^{1-2\alpha} - \ell^{1-2\alpha}\right) +$$

$$+ (2\alpha - 1)\left(\tau(x_1) x_1^{-\alpha} - \tau(\ell)\ell^{-\alpha}\right) = 0.$$

Положим

$$H'_{x_0}(x_0, x_1) \neq 0,$$

т.е.

$$\frac{g''(x_0)}{\sqrt{g'(x_0)}} x_0^{\alpha}\left(x_0^{1-\alpha} - x_1^{1-2\alpha}\right) + 2\sqrt{g'(x_0)}\Big((1-\alpha)x_0^{-\alpha} -$$

$$- \alpha x_0^{\alpha-1} x_1^{1-2\alpha}\Big) \neq 0, \tag{5.12}$$

для любых $x_0 \in [\ell, d]$, $x_1 \in [\ell, d]$.

При условии (5.12) существует непрерывная функция

$$x_0 = h(x_1), \quad x_1 \in [l, d], \tag{5.13}$$

при помощи которой определяем след производной $u_y|_\Delta$.

Учитывая (5.II), (5.I3), заключаем, что

$$u_y(x,0) = \nu(x) \equiv \Big[\tau'(x) + 2\sqrt{g'(h(x_0))}\, h^{\alpha}(x)\, x^{-\alpha} - \delta x^{-\alpha} - \alpha\, \tau(x)\, x^{-1}\Big]^{-1}. \tag{5.14}$$

В силу непрерывности τ', g', h

$\nu(x) \neq 0$.

Зная значения u и u_y на Δ, для решения задачи Дарбу рассмотрим задачу Коши: найти регулярное решение уравнения (I.I) вместе со своей областью определения по начальным условиям (5.I), (5.I4).

Эта задача исследована в § 3, в котором была доказана теорема 3.I. По этой теореме мы приходим к выводу, что задача Коши (I.I (5.I), (5.I4) при соблюдении условий (3.27-30), (5.I2) и

$$M'(x) \neq 0, \quad \Lambda'(x) \neq 0, \quad x \in [l, d], \tag{3.4}$$

где

$$M(x) = 2\tau'(x)\, x^{\alpha} + 2\sqrt{g'(h(x))}\, h^{\alpha}(x) - 2\alpha\, \tau(x)\, x^{\alpha-1} + \delta,$$

$$\Lambda(x) = 2\sqrt{g'(h(x))}\, h^{\alpha}(x) + \delta,$$

имеет решение (3.3I) с областью определения G, ограниченной дугами характеристических кривых

$$\gamma:\ y = g(x), \quad \Gamma:\ Z(x,y) = b, \quad T(x,y) = b, \quad Z(x,y) = l,$$

для каждой произвольно взятой действительной ветви многозначной функции (3.20), функции $T(x,y)$ и $Z(x,y)$ являются решениями системы (3.20-2I). Само решение задачи Коши представлено формулой

(3.3I).

Параметрическое уравнение дуги характеристики Γ имеет вид

$$x = \mathcal{X}(t,b), \quad y = \mathcal{Y}(t,b), \quad t \in [l,d].$$

Если

$$\mathcal{X}'_t(t,b) \neq 0, \quad t \in [l,d], \tag{5.I5}$$

тогда будет существовать функция $t = \varkappa(x)$, обратная $x = \mathcal{X}(t,b)$, и уравнение кривой Γ в явном виде напишется следующим образом:

$$\Gamma: y = f(x) \equiv \Phi(\varkappa(x), b), \quad x \in [a,d],$$

где число $a = h(b)$.

Таким образом, задача Дарбу сама разделилась на две составные части, из которых первая - задача Коши. Если возьмем решение этой задачи, мы вычислим ее след $F(x)$ на характеристике Γ. Затем приступим к рассмотрению второй составной части изучаемой задачи. Эта составная часть представляет собой следующую характеристическую задачу: найти регулярное решение уравнения (I.I) вместе с областью его определения, если вдоль этого решения кривые γ, Γ являются характеристиками, значение инварианта ξ на характеристике γ равно заданному числу δ

$$\left(\left(\frac{1}{u_y} + u_x\right)x^{\alpha} - \alpha u x^{\alpha-1}\right)\Big|_{\gamma} = \delta \tag{5.5}$$

и

$$u\Big|_{\Gamma} = F(x), \quad x \in [a,d], \tag{5.I6}$$

где $F(x)$ определяется по формуле (3.3I)

$$F(x) = \frac{1}{1-2\alpha}\Big\{M\big(T(x,f(x))\big)\Big[\Big(M\big(T(x,f(x))\big)+\Lambda(b)\Big)^{-1}\Big(M\big(T(x,f(x))\big) \times$$

$$\times T^{1-2\alpha}(x,f(x)) - (1-2\alpha)\tau(T(x,f(x)))T^{-\alpha}(x,f(x)) + \Lambda(b)b^{1-2\alpha} +$$

$$+ (1-2\alpha)\tau(b)b^{-\alpha}\Big]^{\frac{1-\alpha}{1-2\alpha}} - \Big[M(T(x,f(x)))T^{1-2\alpha}(x,f(x)) -$$

$$- (1-2\alpha)\tau(T(x,f(x)))T^{-\alpha}(x,f(x))\Big]\Big[\big(M(T(x,f(x)) + \Lambda(b)\big)^{-1}\times$$

$$\times\Big(M(T(x,f(x)))T^{1-2\alpha}(x,f(x)) - (1-2\alpha)\tau\big(T(x,f(x))\big)T^{-\alpha}(x,f(x)) +$$

$$+ \Lambda(b)b^{1-2\alpha} + (1-2\alpha)\tau(b)b^{-\alpha}\Big)\Big]^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}.$$

Очевидно решение этой задачи обязательно является решением следующей задачи Гурса: найти регулярное решение уравнения (I.I) вместе с областью его определения, если вдоль этого решения кривые γ, Γ являются характеристиками и

$$\xi\Big|_{\gamma} = \delta, \tag{5.5}$$

а

$$u(a, g(a)) = F(a). \tag{5.I7}$$

Для того, чтобы решение задачи (I.I), (5.5), (5.I7) свелось к решению задачи Гурса, рассмотренной в § 4, возьмем дуги кривых

$$\gamma_1 : y = f_1(x) \equiv g(x) - g(a), \quad x \in [a, b];$$

$$\gamma_2 : y = f_2(x) \equiv f(x) - f(a), \quad x \in [a, d]$$

и введем обозначение

$$\vartheta \equiv F(a).$$

После этого рассмотрим задачу Гурса, сформулированную в § 4. По теореме 4.I, для каждой произвольно взятой действительной ветви многозначной функции (4.3I), при условиях (4.34-36), (4.4I) существует решение задачи Гурса (I.I), (4.2-3), имеющее вид (4.33), где (x_1, x_2)

$$x_1 = h_1(x, y), \quad x_2 = h_2(x, y),$$

является решением системы (4.3I-32). Область определения решения этой задачи ограничена дугами характеристик γ_1, γ_2,

$$\Gamma_2 : \ y = \Psi(\varphi_1(x), d)$$

и

$$\Gamma_3 : \ y = \Psi(b, \varphi_2(x)).$$

Легко можно убедиться, что решения задачи Гурса (I.I), (5.5), (5.I7) имеет вид (4.33), где (x_1, x_2) в силу (4.3I-32) является решением системы

$$\begin{cases} x = \Phi(x_1, x_2) \\ y = \Psi(x_1, x_2) + g(a). \end{cases}$$

Область определения решения E задачи Гурса (I.I), (5.5), (5.I7) будет ограничена дугами характеристик γ, Γ,

$$\Gamma_4 : \ y = g_1(x) \equiv \Psi(\varphi_1(x), d) + g(a)$$

и

$$\Gamma_5 : \ y = g_2(x) \equiv \Psi(b, \varphi_2(x)) + g(a).$$

Наконец, из множества полученных решений выбираем те решения, которые из области G непрерывно продолжают решение задачи Коши в область E.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 5.I</u>. Задача Дарбу (I.I), (5.I-2) при условиях (3.4), (3.27-30), (4.34-36), (4.4I), (5.I2), (5.I5) имеет регулярное реше

ние, определенное в области $G \cup E \cup \Gamma \setminus \{(b,0),\ (h(b), f(h(b)))\}$, ограниченной дугами характеристик

$$y = g(x),\quad Z(x,y) = a,\quad T(x,y) = b,\quad y = g_1(x),\quad y = g_2(x).$$

Для наглядности рассмотрим уравнение

$$u_y^4 u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{5.18}$$

Обозначим через γ и Δ две дуги кривых

$$\gamma:\quad g(x) = x - 1,\quad 1 \leq x \leq 3,$$

$$\Delta:\quad y = 0,\quad 1 \leq x \leq 2.$$

Задача Дарбу: найти регулярное решение уравнения (5.18) вместе со своей областью определения E, если вдоль этого решения кривая γ является характеристикой и соблюдены условия

$$u\Big|_{\Delta} = x - 1, \tag{5.19}$$

$$u_y(1,0) > 0. \tag{5.20}$$

Повторяя вышеприведенное рассуждение, получим

$$H(x_0, x_1) \equiv \frac{x_1 - 1}{x_1} - \frac{2x_0}{x_1} = 0,$$

из чего следует, что

$$x_0 = \frac{x_1 + 1}{2}$$

и в силу (5.14)

$$u_y(x,0) \equiv \nu(x) = 1,\qquad x \in [1,2]. \tag{5.21}$$

Рассмотрим задачу Коши: найти регулярное решение уравнения (5.18) при условиях (5.19), (5.21).

Легко можно убедиться, что единственное решение задачи (5.18-

19), (5.21)

$$u(x,y)=x+y-1$$

определено в области, ограниченной дугами характеристик

$$y=x-1,\quad y=-x+1,\quad y=-x+2,\quad y=x-2.$$

Теперь для решения первоначальной задачи Дарбу решим и следующую задачу: найти регулярное решение уравнения (5.18) вместе со своей областью определения, если вдоль этого решения кривые

$$\gamma:\ y=x-1,\quad x\in\left[1\tfrac{1}{2},\,3\right];$$

$$\Gamma:\ y=-x+2,\quad x\in\left[1\tfrac{1}{2},\,3\right].$$

являются характеристиками и

$$\xi\big|_{\gamma}=2, \tag{5.22}$$

$$u\big|_{\Gamma}=1. \tag{5.23}$$

Заметим, что задача Гурса (5.18), (5.22) и

$$u\left(1\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2}\right)=1, \tag{5.24}$$

в области, ограниченной дугами характеристик

$$y=x-1,\quad y=-x+2,\quad y=x-2,\quad y=5-x,$$

имеет решения

$$u(x,y)=x+y-1 \quad \text{и} \quad u(x,y)=3x-y-3.$$

Из этих решений условию (5.23) удовлетворяет только первое, поэтому заключаем, что задача Дарбу (5.18-20) имеет единственное решение

$$u(x,y)=x+y-1$$

в области E , ограниченной дугами характеристик

$$y = x-1, \quad y = -x+1, \quad y = 5-x, \quad y = x-2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Picard E. Journal de Mathematiques, 1890.
2. Darboux G. Lecons sur la teorie generale des surfaces etc. Gauthier-Villars, liv. IV, 1894.
3. Goursat E. Lecons sur l'integration des equations aux derivees partielles du second ordre, tome 1,2, ed. 1896, Paris.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981.
5. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - М., 1959. Итоги науки 2, физ.-мат. наук.
6. Бицадзе А.В., Нахущев А.М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений // Докл. АН СССР, 1972, т. 204, с. 1289-1291.
7. Нахущев А.М. Методика постановки корректных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка на плоскости // Дифф. уравнения, 1970, т. 6, с. 192-195.
8. Нахущев А.М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифф. уравнения, 1969, т. 5, с. 44-59.
9. Protter M.H. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equations // Canadian J. of Math., 1954, v. 6, N 4, p. 542-553.
10. Lewy H. Uber das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgbeichung zweiter Ordnung mit zwei unabhangigen veranderlichen // Math. Ann. 1927, Bd.98, 2 Heft p.179-191.
11. Fridrichs K.O. Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables // Amer. J. Math., 1948, 70, p.555-589.

I2. Courant R., Lax P. On nonlinear partial differential equations with two independent variables // Comm. Pure and Appl. Math., 1949, v.2, N 2-3, p.255-273.

I3. Lax P. Nonlinear hyperbolic equations // Comm. Pure and Appl. Math., 1953, v.6, N 2, p.231-258.

I4. Glim J. Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations // Comm Pure and Appl. Math., 1965, v.18, N 4, p.697-715.

I5. Douglis A. Layering methods for nonlinear partial differential equations of first order // Ann. Inst. Fourier, 1972, t.22, 3, p.141-227.

I6. Schauder J. Cauchy'sches Problem fu partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Anwendung einiger sich auf die Absolutbetrage der Losungen beziehenden Abschatrungen //Comment. Math. helv., 1936, v.9, N 4, p.263-283.

I7. Hartman P. Wintner A. On hyperbolic differential equations // Amer. J. Mat., 1952, vol.74, p.834-864.

I8. Бицадзе А.В. Точные решения некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных // Дифф. уравнения, I98I, т. I7, № I0, с. I774-78.

I9. Бицадзе А.В. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных // Дифф. уравнения, I977, т. I3, № II, с. I896-I900.

20. Гвазава Д.К. О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа. - Тбилиси: Мецниереба, I98I.

2I. Гвазава Д.К. О задачах Коши для одного уравнения теории поверхностей // Дифф. уравнения и их применение. - Вильнюс, I983, № 34, с. 9-I5.

22. Гвазава Д.К. Об одной видоизмененной постановке задачи Гурса для квазилинейного вырождающегося гиперболического уравнения

второго порядка // Дифф. уравнения, 1982, т. 18, № 2, с. 285-290.

23. Гвазава Д.К. О нелинейных уравнениях второго порядка с полными характеристическими системами и характеристические задачи для них // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1987, т. 87, с. 45-53.

24. Гвазава Д.К. О зонах влияния начальных данных для решений нелинейных вырождающихся гиперболических уравнений // Соврем. проб. мат. физ. Тр. Всес. симп., Тбилиси, 22-25 апр., 1987, т. I. - Тбилиси, 1987, с. 166-173.

25. Гвазава Д.К. О задаче Дарбу для одного нелинейного вырождающегося гиперболического уравнения // Литовский матем. сборник, 1977, т. 17б, с. 104-112.

26. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М., 1953.

27. Кружков С.Н. Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № I, с. 29-32.

28. Conway E. Smoller J. Global solutions of the Cauchy problem for quasi-linear first-order equations in several space variables // Comm. Pure and Appl. Math., 1969, v.19, N 1, p.95-105.

29. Lee Da-tsin You Wen-tzu. Some existence theorems for quasi-linear hyperbolic systems of partial differential equations in two independent variables // Scientia sinica, 1964, t.13, N 4, p.529-562.

30. Олейник О.А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук, 1957, т. 12, в. 3, с. 3-73.

31. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. - М., 1968.