ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზურაბ კიღურაძე

ზოგიერთი არაწრფივი დიფუზიური სისტემის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის
სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

01.01.07 – გამოთვლითი მათემატიკა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

2002

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი.....4

თავი I

არაწრფივი დიფუზიური სისტემის წარმოშობისა და მისი ზოგიერთი თვისების შესახებ.....24

§1. ზოგადი ამოცანის განხილვა.....24

§2. მაქსველის დიფერენციალური განტოლებების რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე.....28

§3. ამონახსნის წრფივი და გლობალური მდგრადობის შესახებ.....35

თავი II

ინტეგრო-დიფერენციალური ამოცანების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის გამოკვლევა.....49

§1. აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები.....50

§2. ერთგვაროვანი პირველი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის სტაბილიზაციის შესახებ $a(S)=b(S)$ შემთხვევისთვის.....52

§3. არაერთგვაროვანი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის გამოკვლევა $a(S)=b(S)$ შემთხვევისთვის.....60

§4. პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა გასაშუალებული მოდელისთვის.....82

თავი III

ზოგიერთი დიფუზიური სისტემის მიახლოებითი ამოხსნა და რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები.....93

§1. ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელის მდგრადობა და კრებადობა.....93

§2. ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი

სხვაობიანი სქემის მდგრადობა და კრებადობა.....100
§3. სხვაობიანი სქემის კრებადობა განტოლებათა ერთი დიფუზიური სისტემისთვის.....105
§4. სხვაობიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა და გრაფიკული ილუსტრაციები.....111
ლიტერატურა.....122

შესავალი

გამოყენებითი ამოცანების მათემატიკური მოდელირება, გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა თანამედროვე მათემატიკის ერთ-ერთ აქტუალურ პრობლემას წარმოადგენს.

ამგვარ ამოცანებს მიეკუთვნება ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესები ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც არსებითად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე.

ცნობილია, რომ ამ პროცესებს თან სდევს სითბოს გამოყოფა, რაც თავის მხრივ ცვლის გარემოს გამტარიანობას და გავლენას ახდენს დიფუზიის პროცესზე. აქედან გამომდინარე, დიფუზიის ასეთი ამოცანების მათემატიკურ მოდელირებას, გამოკვლევას და რიცხვით ამოხსნას არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება.

აღნიშნული პროცესების, ისევე როგორც სხვა მრავალრიცხოვანი გამოყენებითი ამოცანის მოდელირებისას, ვღებულობთ არაწრფივ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ, ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებს და განტოლებათა სისტემებს. ამ სისტემების ძირითადი თავისებურება იმაში გამოიხატება, რომ ისინი შეიცავენ სხვადასხვა რიგის განტოლებებს, რომლებიც ძლიერად არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. აღნიშნული გარემოება ყოველი კონკრეტული სისტემისთვის განაპირობებს კვლევის შესაბამისი მეთოდების გამოყენებას, რადგან ზოგადი თეორია ამგვარი წრფივი სისტემებისთვისაც კი ჯერ კიდევ არასრულადაა განვითარებული. ბუნებრივად დგება მსგავსი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის აუცილებლობის საკითხი, რაც თავის მხრივ არანაკლები სირთულეების დაძლევასთან არის დაკავშირებული. გამოკვლევისთვის საჭირო და მოსახერხებელი ყოველი მეთოდის თავისებურება ძირითადად ვლინდება შესაბამისი

საწყის-სასაზღვრო ამოცანების და მათი დისკრეტული ანალოგებისთვის აუცილებელი აპრიორული შეფასებების მიღებასა და მათ შემდგომ გამოყენებაში.

შესასწავლი მოდელების სირთულე განაპირობებს მათი კომპლექსურად კვლევის აუცილებლობას. კერძოდ, როგორც თეორიული ასევე გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებების ფართო გამოყენებას. იქ სადაც სრულყოფილი თეორიული გამოკვლევა ვერ ხერხდება, მნიშვნელოვანი როლი უნდა ითამაშოს რიცხვითმა ექსპერიმენტმა. სადისერტაციო ნაშრომში ჩატარებულია მათემატიკური გამოკვლევები არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი განტოლებათა დიფუზიური სისტემის ზოგიერთი კლასისთვის. ამოცანაში შემავალი ყველა პარამეტრისთვის, კერძოდ, არაწრფივობის მახასიათებლებისთვის, როგორც უწყვეტი ასევე დისკრეტული ანალოგების სრულყოფილი თეორიული შესწავლა ფაქტიურად შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა სადისერტაციო ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა მსგავსი სახის თეორიულ გამოკვლევებს, რომელთა შედეგებიც დადასტურებულია ჩატარებული მრავალი რიცხვითი გამოთვლებით. ამ შემთხვევებისთვის შემუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმების ეფექტურმა გამოყენებამ საშუალება მოგვცა ჩაგვეტარებინა რიცხვითი ექსპერიმენტები პარამეტრების სხვა მნიშვნელობებისთვისაც. რაც თავის მხრივ მნიშვნელოვნად აიოლებს შესასწავლი პროცესის ფიზიკური შინაარსის გააზრებას.

აღსანიშნავია, რომ ზოგიერთი პროცესის მათემატიკური აღწერა ხორციელდება ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებებით. განტოლებები, რომლებიც საძიებელ ფუნქციებთან ერთად შეიცავენ ინტეგრალებს ამ ფუნქციებიდან და მათი წარმოებულებიდან, ფაქტიურად წარმოიშვნენ ლოკალურ კერძოწარმოებულებიან განტოლებებთან

ერთად. მიუხედავად ამისა, აღნიშნული განტოლებების გამოკვლევა დაიწყო შედარებით გვიან.

სხვადასხვა სახის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები შეისწავლება მრავალ სამეცნიერო შრომაში [4, 8-16, 25, 31-33, 35, 37, 38, 41, 42, 51, 52, 58, 61, 62, 66, 67, 74, 76-81, 86-88, 90, 91, 93, 94, 100, 101]. დისერტაციაში განხილული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელები პირველად შემოთავაზებულ იქნა [8], [9] შრომებში. აღნიშნული მოდელები წარმოიშვნენ ერთის მხრივ რეალური დიფუზიური პროცესების აღწერისას, ხოლო მეორეს მხრივ – არაწრფივი პარაბოლური ტიპის ცნობილი განტოლებების განზოგადებისას, რომელთა შესწავლას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი [6,7,17-20, 28, 34, 37, 39, 47, 51, 52, 60, 65, 69, 92, 95, 97, 98, 102]. ამ განტოლებების და განტოლებათა სისტემების დამახასიათებელი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის წარმოებულებთან გვხვდება არაწრფივი კოეფიციენტები, რომლებიც დამოკიდებულია სივრცითი და დროითი ცვლადების მიმართ საძიებელი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულებიდან აღებულ ინტეგრალებზე.

დიფუზიის მრავალი პროცესის აღმწერი არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები და განტოლებათა სისტემები იყო და კვლავაც არის მრავალი მეცნიერის კვლევის ობიექტი. ამ სისტემების შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების თვისობრივი და სტრუქტურული მახასიათებლების დადგენა, დისკრეტული ანალოგების აგება, გამოკვლევა და რიცხვითი ალგორითმების შესწავლა წარმოადგენს თანამედროვე გამოთვლითი მათემატიკის მეტად აქტუალურ და სწრაფად განვითარებად ნაწილს.

დისერტაციის ძირითად მიზანს წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის აღმწერი არაწრფივი დიფერენციალური

და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების ზოგიერთი თვისების შესწავლა, შესაბამისი დისკრეტული ანალოგების აგება და გამოკვლევა, სარეალიზაციო ალგორითმების შედგენა, პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ამოხსნა.

სხვადასხვა ბუნების დიფუზიური ამოცანების მოდელირება და მათემატიკური ასპექტები, რომლებიც დაკავშირებულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის მდგრადობის, არსებობის, ერთადერთობის თეორემები და ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხები შესწავლილია მრავალ სამეცნიერო ნაშრომში [2, 9, 15, 16, 20, 23-26, 30, 32-34, 38, 39, 47, 48, 51, 52, 57, 59, 69, 70-72, 84, 85, 87, 89, 95, 96].

რეალური ფიზიკური ამოცანების შესწავლა თანამედროვე პერსონალური კომპიუტერების გარეშე წარმოუდგენელია. არწრფივი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების განვითარება და მათ ბაზაზე სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანის მოდელირებისთვის გამოთვლითი ექსპერიმენტების აუცილებლობა ნათელია. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები განხილულია [1, 13, 16, 21, 29, 34, 37, 38, 40, 43-45, 47, 48, 50, 51, 56, 61, 65, 95] და მრავალ სხვა შრომაში.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება სამი თავისა და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისგან.

<u>პირველ თავში</u> განიხილება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური აღწერა ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. პირველ ორ პარაგრაფში მაქსველის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საფუძველზე მოცემულია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. ამავე პარაგრაფებში განხილულია მათი ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. მოყვანილია ამ ამოცანის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ სახემდე. აღსანიშნავია, რომ მაქსველის

განტოლებათა სისტემისთვის აღნიშნული რედუქცია პირველად [8] ნაშრომში იქნა ჩატარებული. შედეგად მიღებულ იქნა არაწრფივ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა ახალი კლასი, რომლის მიმართაც სამეცნიერო ინტერესი თანდათან იზრდება [2, 9-12, 25, 31, 33, 74-78, 80-83].

განვიხილოთ მაქსველის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე. დავუშვათ, ელექტრომაგნიტური ველი ვრცელდება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. კვაზისტაციონარულ მიახლოებაში მაქსველის შესაბამის განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე [36, 55]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot\left(\nu_m rot\, H\right), \tag{0.1}$$

$$c_\nu \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu_m \left(rot\, H\right)^2, \tag{0.2}$$

სადაც $H = \left(H_1, H_2, H_3\right)$ – მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორია, θ – ტემპერატურა, c_ν და ν_m – ახასიათებენ შესაბამისად გარემოს სითბოტევადობას და ელექტროგამტარობას. (0.1) განტოლებით აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში, (0.2) განტოლებით კი ტემპერატურის ცვლილება ჯოულის სითბოგამოყოფის ხარჯზე.

თუ $c_\nu = c_\nu(\theta)$ და $\nu_m = \nu_m(\theta)$, მაშინ (0.2) განტოლების დროითი ცვლადით ინტეგრებისა და (0.1) სისტემაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot\left[a\left(\int_0^t \left|rot\, H\right|^2 d\tau \right) rot\, H \right], \tag{0.3}$$

სადაც $a(S)$ კოეფიციენტი განისაზღვრება c_ν და ν_m ფუნქციების საშუალებით.

აღნიშნული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი რთულია და მისი გამოკვლევა ჯერჯერობით მხოლოდ კერძო კლასებისთვის ხერხდება. (0.3) ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის სხვადასხვა ვარიანტები განხილულია [2, 9-12, 25, 31, 33, 74-78, 80] შრომებში.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი ორკომპონენტიანია $H=(0,U,V)$, სადაც $U=U(x,t)$, $V=V(x,t)$ – დროისა და ერთი სივრცული ცვლადის სკალარული ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში $rot\,H=\left(0,-\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, და (0.3) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right],\\ \frac{\partial V}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right],\end{aligned}\qquad (0.4)$$

ინტეგრო-დიფერენციალური (0.3) მოდელის გამოკვლევა $H=(0,0,U)$ შემთხვევისთვის ჩატარებული იყო [8], [9] შრომებში. კერძოდ, ამ შრომებში დამტკიცებულია პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის განზოგადებული ამონახსნის არსებობის თეორემა ერთგანზომილებიანი სივრცითი ცვლადის შემთხვევაში, როცა $a(S)=1+S$, ხოლო ერთადერთობის თეორემები უფრო ზოგადი შემთხვევებისთვისაც.

ერთგანზომილებიანი ვარიანტი $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$ შემთხვევისთვის შესწავლილია [10] შრომაში. ამ შრომაში პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისთვის დამტკიცებულია

ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები $L_{2p+2}\left(0,T;\overset{o}{W}{}^{1}_{2p+2}(0,1)\right)$ სივრცეში.

მრავალგანზომილებიანი სივრცული ცვლადების შემთხვევა პირველად განხილული იყო [11, 12, 22] შრომებში.

თუ სხეულის გასწვრივ ტემპერატურას ჩავთვლით მუდმივს, კერძოდ, დამოკიდებულს დროზე და დამოუკიდებელს სივრცითი ცვლადებისგან, მაშინ როცა $H=(0,U,V)$, მივიღებთ (0.4) სისტემის ანალოგიურ სისტემას [25]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0.$$

ზემოთ მიღებული სისტემის გამოკვლევა, როგორც ეს [25] სადისერტაციო ნაშრომშია აღნიშნული, რთულია და მოითხოვს დამოუკიდებელ შესწავლას. ერთი განტოლების შემთხვევაში ამონახსნის ასიმპტოტურ ყოფაქცევას სხვა საკითხებთან ერთად ეხება [76] ნაშრომი.

მესამე პარაგრაფში მოცემულია შესწავლილი დიფუზიური ამოცანების ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. განხილულია შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების გლობალური ამონახსნების არსებობის საკითხები. კერძოდ, აგებულია ისეთი არაწრფივი სისტემა და მისი ანალიზური ამონახსნების მაგალითები, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ აღნიშნულ სისტემებს საზოგადოდ გლობალური ამონახსნები არა აქვთ. ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანის ამონახსნისთვის შეისწავლება ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი

ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა.

ამ პარაგრაფში გამოკვლევა ჩატარებულია შემდეგი სისტემის მაგალითზე:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{0.5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=F\left(S,\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{0.6}$$

სადაც a და F – თავიანთი არგუმენტების ცნობილი, ხოლო U,V და S კი – უცნობი ფუნქციებია.

ფიზიკის, ქიმიის, ბიოლოგის და მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვა დარგების მრავალი გამოყენებითი პრობლემა მოდელირდება (0.5), (0.6) სახის არაწრფივ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებით. კერძოდ, თუ

$$F\left(S,\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial x}\right)=b(S)+c(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{0.7}$$

სადაც b და c – თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია, მაშინ (0.5) - (0.7) სისტემა წარმოადგენს მაქსველის სისტემის ვარიანტს, რომლითაც აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

აღნიშნული სისტემა წარმოიშობა აგრეთვე ისეთი უკუმშვადი სითხის მოძრაობის აღწერისას, რომლის სიბლანტეც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე [63], [64].

თუ (0.6) განტოლების ნაცვლად (0.5) სისტემას მივუერთებთ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{\partial S}{\partial t} = b(S) + c(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[d(S)\frac{\partial S}{\partial x}\right], \tag{0.8}$$

სადაც d ასევე მოცემული ფუნქციაა, მაშინ (0.5), (0.8) სისტემით კვლავ აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში. (0.8) განტოლებაში მეორე შესაკრები შეესაბამება ჯოულის სითბოგამოყოფას, ხოლო მესამე კი – სითბოგამტარობის ეფექტს. (0.5), (0.8) ტიპის სისტემების ზოგიერთი თვისების შესწავლა ჩატარებულია შრომებში [2, 79].

ამავე პარაგრაფში ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანისთვის შესწავლილია ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა.

აღნიშნულ ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -aS^\beta + bS^\gamma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right],\end{gathered} \tag{0.9}$$

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,$$

$$U(1,t) = \psi_1, \quad V(1,t) = \psi_2, \tag{0.10}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad S(x,0) = S_0(x) > 0.$$

სადაც $\alpha, \beta, \gamma \in R,\ \alpha \neq 0, \quad a, b \in R^+,\ \psi_1 = const > 0,\ \psi_2 = const > 0.$

ახლა გადავიდეთ დისერტაციაში მიღებული ძირითადი თეორემების ჩამოყალიბებაზე.

თეორემა 1. თუ $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, $\beta \neq \gamma$, მაშინ (0.9), (0.10) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 x, \quad \psi_2 x, \quad \left(\frac{\left(\psi_1^{\,2} + \psi_2^{\,2}\right) b}{a} \right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}} \right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$a(\gamma-\beta)\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2.$$

როგორც უკანასკნელი უტოლობიდან ჩანს, როცა $\gamma < \beta$, მაშინ (0.9), (0.10) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი ყოველთვის წრფივად მდგრადია.

დავუშვათ, $\gamma > \beta$, $\beta - \alpha - 1 \neq 0$ და განვიხილოთ სიდიდე

$$\psi_s = \left[\frac{\pi^2}{\gamma-\beta} a^{\frac{\gamma-\alpha-1}{\beta-\gamma}} b^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta-\gamma}} \right]^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha-1}},$$

მაშინ როცა $\psi \in (0, \psi_s)$, სადაც $\psi = \psi_1^2 + \psi_2^2$, (5), (6) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, ხოლო როცა $\psi > \psi_s$, მაშინ კი – არამდგრადი. როცა $\psi = \psi_s$, მაშინ ჩნდება ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის შესაძლებლობა. მცირე შეშფოთებებმა შეიძლება სტაციონარული ამონახსნი გადაიყვანოს დროით პერიოდულ რხევებში.

ამავე პარაგრაფში (0.9) სისტემის ერთი კერძო შემთხვევისთვის დამტკიცებულია

თეორემა 2. თუ $\alpha = \beta = a = b = 1, \gamma = 0,$ მაშინ (0.9), (0.10) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 x, \quad \psi_2 x, \quad \psi_1^{\,2} + \psi_2^{\,2}\right),$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით და ამასთან ქრობას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

თუ (0.9) განტოლებათა სისტემისთვის (0.10)-ის ნაცვლად განვიხილავთ შემდეგ საწყის-სასაზღვრო პირობებს:

$$U(0,t)=V(0,t)=0,$$

$$S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=1}=\psi_1,\quad S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=1}=\psi_2, \tag{0.11}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x),\quad S(x,0)=S_0(x)>0.$$

მაშინ სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 3. თუ $2\alpha+\beta-\gamma>0$, მაშინ (0.9), (0.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1\left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}}x,\ \psi_2\left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}}x,\ \left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{\frac{1}{2\alpha+\beta-\gamma}}\right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$(\gamma-\beta)b^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}}a^{\frac{3\alpha-\gamma+1}{2\alpha+\beta-\gamma}}\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}}<\frac{\pi^2}{4}.$$

თეორემა 4. თუ $\alpha=\beta=a=b=1,\ \gamma=0,$ მაშინ (0.9), (0.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{-\frac{1}{3}}x,\ \psi_2\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{-\frac{1}{3}}x,\ \left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით და ამასთან ქრობას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

თეორემა 1 და თეორემა 3-ის შემთხვევებში ჩატარებულმა რიცხვითმა ექსპერიმენტებმა გვიჩვენეს მიახლოებითი ამონახსნის სტაციონარული ამონახსნისკენ მისწრაფება. თეორემა 1-ის შესატყვისი

გრაფიკული ილუსტრაციები მოცემულია მესამე თავის მეოთხე პარაგრაფში (ნახ. 1, 2). ანალოგიური სურათები მიიღება თეორემა 3-ის შემთხვევაშიც. რაც შეეხება გლობალურად მდგრადობის დებულებებს (თეორემები 2 და 4), აქ ჩატარებულმა მიახლოებითმა გამოთვლებმა როგორც მოსალოდნელი იყო მოგვცა სტაციონარული ამონახსნისკენ მიახლოებითი ამონახსნის მისწრაფების ბუნებრივი სურათი (იხ. თავი III, §4, ნახ. 4).

<u>მეორე თავში</u> შესწავლილია შემდეგი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის თვისებები:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[b(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{0.12}$$

სადაც

$$S(x,t)=1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\ , \tag{0.13}$$

ან

$$S(t)=1+\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\ , \tag{0.14}$$

ხოლო $a(S)$ და $b(S)$ თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია.

მოცემული (0.12), (0.13) და (0.12), (0.14) სისტემები წარმოადგენენ იმ მოდელების განზოგადებებს, რომლებსაც ვღებულობთ პირველ თავში აღწერილი ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას.

მეორე თავში არსებითი ყურადღება ეთმობა ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის თეორიულ გამოკვლევას. მესამე თავის ბოლოს კი კვლავ მოცემულია შესაბამისი რიცხვითი გათვლების შედეგები.

გავეცნოთ მეორე თავის შინაარსს უფრო დაწვრილებით.

პირველ პარაგრაფში მოყვანილია აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები.

მეორე პარაგრაფში, $Q=(0,1)\times(0,\infty)$ არეში, (0.12), (0.13) და (0.12), (0.14) განტოლებათა სისტემებისთვის განხილულია შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{aligned} &U(0,t)=U(1,t)=V(0,t)=V(1,t)=0, \quad t\geq 0, \\ &U(x,0)=U_0(x), \quad V(x,0)=V_0(x), \quad x\in[0,1]. \end{aligned} \tag{0.15}$$

ორივე ამოცანის შემთხვევისთვის დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა 5. თუ $a(S)=b(S)$, $a(S)\geq a_0=const>0$, მაშინ (0.12), (0.13), (0.15) და (0.12), (0.14), (0.15) ამოცანების ამონახსნისთვის სამართლიანია შეფასებები:

$$\|U\|\leq Ce^{-a_0 t}, \qquad \|V\|\leq Ce^{-a_0 t},$$

ხოლო თუ დამატებით შესრულებულია $a'(S)\geq 0$, $a''(S)\leq 0$ პირობები, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ თანაფარდობებს:

$$\|U(\cdot,t)\|_{W_2^1(0,1)}\to 0, \qquad \|V(\cdot,t)\|_{W_2^1(0,1)}\to 0, \qquad \text{როცა} \quad t\to\infty.$$

ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნის ქრობა დროის უსასრულოდ ზრდისას, ნათლად გამოჩნდა ჩატარებული რიცხვითი გამოთვლებიდანაც (იხ. თავი III, §4, ნახ. 5). აღსანიშნავია, რომ რიცხვითმა ექსპერიმენტებმა W_2^1 ნორმაში ამონახსნების ქრობა დააფიქსირა მაშინაც, როცა $a(S)=S^p$, $p>1$. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული შემთხვევები თეორემა 5-ის ყველა პირობას არ აკმაყოფილებენ.

მესამე პარაგრაფში შესწავლილია შემდეგი არაერთგვაროვანი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხი:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right],$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{0.16}$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0\,,\ U(1,t)=\psi_1,\ V(1,t)=\psi_2,\ t\geq 0\,,$$
$$U(x,0)=U_0(x),\ V(x,0)=V_0(x),\ x\in[0,1]\,, \tag{0.17}$$

სადაც $\psi_1=Const\geq 0$, $\psi_2=Const\geq 0$, $\psi_1^2+\psi_2^2\neq 0$, ხოლო a, U_0 და V_0 კი თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

ამ პარაგრაფშივე (0.16), (0.17) ამოცანის ამონახსნისთვის დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა 6. თუ $a(S)=S^p$, $p\in(-1/2;0)\cup(0;1]$ და U_0, V_0 ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$U_0(0)=V_0(0)=0,\quad U_0(1)=\psi_1,\quad V_0(1)=\psi_2,\ U_0, V_0\in W_2^2(0,1),$$

მაშინ (0.16), (0.17) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური დამოკიდებულებები:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}=\psi_1+O\left(t^{-1-p}\right),\quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}=\psi_2+O\left(t^{-1-p}\right),$$
$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=O\left(t^{-1}\right),\quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=O\left(t^{-1}\right).$$

მეოთხე პარაგრაფში (0.12), (0.14) განტოლებათა სისტემისთვის, როცა $a(S)=S^p$ და $b(S)=S^q$, სადაც საზოგადოდ $p\neq q$, Q არეში განხილულია (0.17) საწყის-სასაზღვრო ამოცანა.

დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა 7. თუ $a(S)=S^p$, $b(S)=S^q$, $1+p+q>0$, $p>-1$, $q>-1$, $U_0(0)=V_0(0)=0$, $U_0(1)=\psi_1$, $V_0(1)=\psi_2$, $U_0, V_0\in W_2^2(0,1)$,

მაშინ (0.12), (0.14), (0.17) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური დამოკიდებულებები:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \psi_1 + O\left(t^{-1-p}\right), \quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = \psi_2 + O\left(t^{-1-q}\right),$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = O\left(t^{-1}\right), \quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = O\left(t^{-1}\right).$$

აღვნიშნოთ, რომ ბოლო ორი თეორემის დამტკიცება საკმაოდ დიდ მოცულობას იკავებს და მრავალი დამხმარე ლემისგან შედგება.

დისერტაციის მესამე თავში შემუშავებული მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების გამოყენებით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტები აქაც ადასტურებენ როგორც თეორემების დასკვნების სანდოობას, ასევე აღნიშნული ალგორითმების ეფექტურობას. რიცხვითი ექსპერიმენტების საშუალებით დადასტურდა როგორც თეორემა 6-ის შედეგები, ასევე იმ დებულებების დასკვნებიც რომლებიც, როგორც აღვნიშნეთ საკმაო რაოდენობით გვხვდება თეორემის დამტკიცებისას.

<u>მესამე თავში</u> წინა ორ თავში შესწავლილი არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემებისთვის აგებულია სხვაობიანი სქემები და ნახევრად-დისკრეტული მოდელები. დამტკიცებულია მათი კრებადობის თეორემები. მოცემულია მიახლოებითი ამონახსნების აგების ალგორითმების აღწერა და ჩატარებული მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტის გრაფიკული ილუსტრაციები.

გავეცნოთ მესამე თავის შინაარსს უფრო დაწვრილებით.

პირველ პარაგრაფში შემდეგი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური ამოცანისთვის

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right\}=f_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right\}=f_2, \qquad (0.18)$$

$$U(0,t)=U(1,t)=V(0,t)=V(1,t)=0,$$

$$U(x,0)=U_0(x), \quad V(x,0)=V_0(x)$$

აგებულია ნახევრად-დისკრეტული მოდელი:

$$\frac{du_i}{dt}-\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)u_{\bar{x},i}\right\}_x=f_{1,i},$$

$$\frac{dv_i}{dt}-\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)v_{\bar{x},i}\right\}_x=f_{2,i}, \qquad (0.19)$$

$$i=1,2....,N-1,$$

$$u_0(t)=u_N(t)=v_0(t)=v_N(t)=0,$$

$$u_i(0)=U_{0,i}, \;\; v_i(0)=V_{0,i}, \;\; i=0,1,...,N.$$

დამტკიცებულია კრებადობის შემდეგი დებულება

თეორემა 8. თუ (0.18) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U=U(x,t)$, $V=V(x,t)$ მაშინ (0.19) სქემის ამონახსნი $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_{N-1}(t))$, $v(t)=(v_1(t),v_2(t),...,v_{N-1}(t))$ მიისწრაფის შესაბამისად $U(t)=(U_1(t),U_2(t),...,U_{N-1}(t))$, $V(t)=(V_1(t),V_2(t),...,V_{N-1}(t))$ ფუნქციებისკენ, როცა $h\to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\|u(t)-U(t)\|\le Ch^2, \quad \|v(t)-V(t)\|\le Ch^2.$$

მეორე პარაგრაფში დამტკიცებულია კრებადობის თეორემა (0.18) ამოცანის შესაბამისი შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემისთვის:

$$u_{t,i}^{j}-\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}\right]\right)u_{\bar{x},i}\right\}_{x}=f_{1,i},$$

$$v_{t,i}^{j}-\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}\right]\right)v_{\bar{x},i}\right\}_{x}=f_{2,i},$$

$$i=1,2....,N-1,\quad j=0,1....,M-1, \tag{0.20}$$

$$u_0^j=u_N^j=v_0^j=v_N^j=0,\quad i=0,1....,M,$$

$$u_i^0=U_{0,i},\quad v_i^0=V_{0,i},\quad i=0,1....,N.$$

თეორემა 9. თუ (0.18) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U=U(x,t)$, $V=V(x,t)$, მაშინ (0.20) სქემის ამონახსნი $u^j=\left(u_1^j,u_2^j,...,u_{N-1}^j\right)$, $v^j=\left(v_1^j,v_2^j,...,v_{N-1}^j\right)$, მიისწრაფის შესაბამისად $U^j=\left(U_1^j,U_2^j,...,U_{N-1}^j\right)$, $V^j=\left(V_1^j,V_2^j,...,V_{N-1}^j\right)$ ფუნქციებისკენ როცა $\tau\to 0$, $h\to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\left\|u^j-U^j\right\|\le C\left(\tau+h^2\right),\qquad \left\|v^j-V^j\right\|\le C\left(\tau+h^2\right).$$

მესამე პარაგრაფში არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-aS^{\beta}+bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{2}\right] \tag{0.21}$$

დასმულია შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t)=V(0,t)=0,\quad U(1,t)=\psi_1,\quad V(1,t)=\psi_2,$$

$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x), \tag{0.22}$$

$$S(x,0)=S_0(x)>s_0=const>0$$

და შესწავლილია მისი მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი. (0.21) განტოლებათა სისტემა $E=S^{1/2}$ აღნიშვნის საშუალებით მიიყვანება შემდეგ განტოლებათა სისტემამდე:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,\ \frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{a}{2}E^{2\beta-1}+\frac{b}{2}E^{2\gamma-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{0.23}$$

(0.22), (0.23) ამოცანისთვის აგებულია შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$u_t=\left(e^{2\alpha}u_{\bar{x}}\right)_x,\ v_t=\left(e^{2\alpha}v_{\bar{x}}\right)_x,$$

$$e_t=-\frac{a}{2}e^{2\beta-1}+\frac{b}{2}e^{2\gamma-1}\left(u_{\bar{x}}^2+v_{\bar{x}}^2\right), \tag{0.24}$$

$$u_0^j=v_0^j=0,\ u_N^j=\psi_1,\ v_N^j=\psi_2,\ j=0,1....,M,$$

$$u_i^0=U_0(x_i),\ v_i^0=V_0(x_i),\ e_i^0=\left[S_0\left(x_{i+1/2}\right)\right]^{1/2},\ i=0,1....,N.$$

დამტკიცებულიაკრებადობის შემდეგი დებულება

თეორემა 10. თუ $\beta\geq 1/2$, $\alpha=\gamma$, $|\alpha|\leq 1/2$, მაშინ (0.24) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცის ცდომილება (0.22), (0.23) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau+h^2)$ რიგის და იგი კრებადია (0.22), (0.23) ამოცანის ამონახსნისკენ ბადურ ფუნქციათა L_{2h} სივრცეში, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

მეოთხე პარაგრაფი ეძღვნება აგებული არაწრფივი სქემების რიცხვითი ამოხსნის საკითხებს. აღწერილია ერთი მარტივი

საიტერაციო პროცესის ალგორითმიზაცია, რომელიც ყოველ იტერაციაზე დაიყვანება ჩვეულებრივი ფაქტორიზაციის მეთოდის ორჯერად გამოყენებაზე. მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმად გამოყენებულია [16] შრომაში შემოთავაზებული მიდგომის ანალოგიც. ტესტური გამოთვლები ჩატარებულია დიფუზიური ამოცანის ზუსტ ამონახსნებზე, რომლებიც ადასტურებენ შემოთავაზებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების ეფექტურობას.

მაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის შესწავლისთვის ჩატარებულია მრავალრიცხოვანი გამოთვლითი ექსპერიმენტი სხვადასხვა სახის სასაზღვრო რეჟიმისა და განსხვავებული α მაჩვენებლის შემთხვევისთვის $\nu_m = \nu_0 \theta^\alpha$ დამოკიდებულებაში. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები გვიჩვენებს, რომ საწყის ეტაპზე მაგნიტური ველის შეღწევის პროცესი როცა $\alpha \to 1$, თვისობრივად განსხვავდება წრფივი შემთხვევისგან, თუმცა გააჩნია ანალოგიური ასიმპტოტური ხასიათი დროის დიდი მნიშვნელობებისთვის. დასაწყისში გარემოს სასაზღვრო ზოლში მაგნიტური ველის ენერგიის დიდი ნაწილი გამოიყოფა სითბური ენერგიის სახით, შემდეგ კი სითბოგამტარობის სტრუქტურა იწვევს ტემპერატურის თანდათან გათანაბრებას. ერთთან ახლოს მყოფი ხარისხის მაჩვენებლისთვის ველის გავრცელება მიმდინარეობს შედარებით ნელა.

პარამეტრთა სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის ჩატარებული გამოთვლები გვაძლევენ შემოთავაზებული ალგორითმების ეფექტურობას და ადასტურებენ თეორიული გამოკვლევების შედეგებს ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევისა და ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის შესაძლებლობის შესახებ.

მთლიანობაში, რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები საშუალებას იძლევა აღიწეროს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის

ზოგიერთი ძირითადი თვისება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობაც ხასიათდება სპეციალური არაწრფივობით.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო: სტუდენტთა და ასპირანტთა საუნივერსიტეტო და რესპუბლიკურ სამეცნიერო კონფერენციებზე (1993-2002 წწ.), სტუდენტთა და ასპირანტთა სოროსის კონფერენცია-კონკურსებზე (1995-2002 წწ.), თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარების სხდომებზე (1995-2002 წწ.), ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და გამოთვლითი მათემატიკის კათედრის სამეცნიერო სემინარებზე (1995-2002 წწ.), საერთაშორისო სიმპოზიუმზე "უწყვეტ ტანთა მექანიკის პრობლემები" (თბილისი, 1997 წ.).

თავი I

არაწრფივი დიფუზიური სისტემის წარმოშობისა და მისი ზოგიერთი თვისების შესახებ

წინამდებარე თავში განიხილება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური აღწერა ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. მაქსველის დიფერენციალურ სისტემაზე დაყრდნობით მოყვანილია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. მოცემულია ამოცანის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ სახემდე.

ამავე თავში განხილულია ამოცანის ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება.

შესწავლილია ერთი დიფუზიური მოდელის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. დადგენილია ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის წარმოშობის შესაძლებლობა.

§1. ზოგადი ამოცანის განხილვა

განვიხილოთ ფიზიკური პროცესი, რომელიც მიმდინარეობს ცვლად ელექტრომაგნიტურ ველში მოთავსებულ გამტარ გარემოში. გამტარი შემოსაზღვრულია ვაკუუმური ზოლით (დიელექტრიკით).

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ელექტრომაგნიტური ველი და დენის დაძაბულობა აკმაყოფილებენ მაქსველის შემდეგ განტოლებათა სისტემას [36, 55]:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mu H}{\partial t} = rot\, E, \tag{1.1}$$

$$div\, \mu H = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{4\pi}{c}\sigma E = rot\, H, \tag{1.3}$$

სადაც $E = (E_1, E_2, E_3)$ და $H = (H_1, H_2, H_3)$ – შესაბამისად ელექტრული და მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორებია, μ მაგნიტური შეღწევადობა, σ – გარემოს გამტარიანობა, c კი – სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში.

(1.3) ტოლობაში გათვალისწინებულია ომის კანონი, რომელიც აკავშირებს E ვექტორს დენის სიმკვრივის J ვექტორთან შემდეგი დამოკიდებულებით

$$J = \sigma E. \tag{1.4}$$

ვაკუუმურ გარემოში, (1.1) - (1.3) დამოკიდებულებებთან ერთად სრულდება ტოლობა

$$div\, E = 4\pi\rho,$$

სადაც ρ – მოცემული მუხტების განაწილებაა.

თუ დროის რომელიღაც მომენტში მაგნიტური ველი სოლენოიდურია, ე.ი. $div\, \mu H = 0$, მაშინ (1.2) შესრულდება ავტომატურად. მართლაც, (1.1) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\frac{\partial}{\partial t} div\, \mu H = 0.$$

ვიგულისხმოთ, რომ გარემოსთვის, სადაც მიმდინარეობს დიფუზიური პროცესი, $\mu = 1$ და ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე – $\sigma = \sigma(\theta)$. ჩავთვალოთ, რომ ეს დამოკიდებულება ხარისხოვანია, რადგან ბუნებაში უფრო მეტად

ზუსტად ეს შემთხვევები გვხვდება (მაგ., მეტალებისთვის $\sigma \cong \theta^{-1}$, ერთგვაროვანი პლაზმისთვის $\sigma \cong \theta^{3/2}$ და სხვ.)

ტემპერატურის განსასაზღვრავად უნდა გამოვიყენოთ სითბოს ბალანსის განტოლება. თუ უგულვებელვყოფთ სითბოგამტარობის ეფექტს, ტემპერატურის ცვლილება განისაზღვრება ჯოულის სითბოგამოყოფით და გავითვალისწინებთ რა (1.4) განტოლებას, გვექნება

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = EJ = \sigma E^2, \tag{1.5}$$

სადაც c_v – გარემოს კუთრი სითბოტევადობაა. ამ დროს სითბოტევადობის კოეფიციენტი შეიძლება დამოკიდებული იყოს ტემპერატურაზე (უმეტეს შემთხვევაში ხარისხოვანი წესით).

ზემოთ ხსენებული (1.1), (1.3), (1.5) განტოლებები ქმნიან ჩაკეტილ სისტემას ელექტრომაგნიტური ველისა და ტემპერატურის განსასაზღვრავად შესაბამის საწყის-სასაზღვრო პირობებში.

საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმა ზოგად შეთხვევაში და აგრეთვე სხვადასხვა გარემოს საზღვრებზე შეთანხმებულობის პირობების დადგენა დაწვრილებით განხილულია [11, 39, 51] შრომებში.

შევნიშნოთ, რომ (1.5) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \sigma E^2, \tag{1.6}$$

სადაც ε გარემოს კუთრი შინაგანი ენერგიაა და $d\varepsilon = c_v d\theta$.

მათემატიკური თვალსაზრისით (1.1), (1.3), (1.6) სისტემის შესწავლის სირთულე განპირობებულია შემდეგი ორი ფაქტორით:

პირველი – როგორც ამ თავის შესავალში იყო აღნიშნული, ელექტროგამტარობის კოეფიცენტის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე არაწრფივი ხასიათისაა.

მეორე – გამტარი გარემოდან ვაკუუმურ სივრცეში გადასვლისას იცვლება განტოლების სახე. მართლაც, გამოვრიცხავთ რა (1.1) და (1.3) ტოლობებიდან H ვექტორს, მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = -rot\, rot\, E\,,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ გამტარში $(\sigma > 0)$ უნდა ამოიხსნას პარაბოლური, ხოლო ვაკუუმში $(\sigma = 0)$ კი – ელიფსური ამოცანა.

წრფივი დიფუზიური ამოცანის $(\sigma = \sigma(x))$ ამონახსნის არსებობის, ერთადერთობის და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხები განხილულია [30, 38, 68, 73] შრომებში. ამასთან, [30] შრომაში დაშვებულია გარემოს მოძრაობა მაგნიტო-ჰიდროდინამიკური მიახლოების ფარგლებში. ამ ნაშრომებში ხდება ამოცანის კლასიკური დასმიდან განზოგადებულ დასმაზე გადასვლა. მოთხოვნა იმისა, რომ საძიებელი ფუნქციები აკმაყოფილებდნენ (1.2) განტოლებას და სასაზღვრო პირობებს, იცვლება იმ მოთხოვნით, რომ ისინი ეკუთვნოდენ სპეციალურ ფუნქციონალურ კლასებს. შესაბამისი ამოცანები (1.1), (1.3) განტოლებებისთვის მოიცემა ვარიაციული ფორმით, კერძოდ, ვარიაციული უტოლობების სახით.

(1.1) - (1.3) სისტემის შესწავლა შეიძლება აგრეთვე ჩავატაროთ იმ განტოლებების საფუძველზე, რომლებშიც მხოლოდ E ან H ვექტორი მონაწილეობს. მსგავსი გამოკვლევის მაგალითს წარმოადგენს [103] ნაშრომი, სადაც დამატებულია არაწრფივობა, განპირობებული μ მაგნიტური შეღწევადობის დამოკიდებულებით H ვექტორზე. აგრეთვე [49] ნაშრომი, რომელიც ეხება ელიფსო-პარაბოლური ტიპის განტოლებებს.

§2. მაქსველის დიფერენციალური განტოლებების რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე

დავუშვათ, რომ მასიური სხეული მოთავსებულია ცვლად მაგნიტურ ველში. აღვწეროთ ველის განაწილება სხეულის შიგნით.

განვიხილოთ მაქსველის განტოლებათა სისტემა, რომელიც აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესს [36, გვ.336]:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = rot\, E, \tag{2.1}$$

$$div\, H = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{4\pi}{c} J = rot\, H, \tag{2.3}$$

$$J = \sigma E. \tag{2.4}$$

განვსაზღვროთ (2.4) ტოლობიდან E სიდიდე და ჩავსვათ (2.3) განტოლებაში. მივიღებთ

$$E = \rho \frac{c}{4\pi} rot\, H,$$

სადაც $\rho = \frac{1}{\sigma}$ – სხეულის წინაღობაა. მიღებული ტოლობის (2.1) განტოლებაში ჩასმით გვექნება

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi} rot\left(\rho rot\, H\right) = 0. \tag{2.5}$$

შეაღწევს რა ნივთიერებაში ცვლადი მაგნიტური ველი, იგი მასში აღძრავს ცვლად ელექტრულ ველს, რის შედეგადაც წარმოიქმნება დენი. ამის შემდეგ ხდება სხეულის გახურება და მისი θ ტემპერატურის ზრდა, რომელიც გავლენას ახდენს ρ წინაღობაზე. [54,

გვ.137] შრომაში მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ტემპერატურის ცვლილება იწვევს წინაღობის ხარისხოვანი დამოკიდებულებით ცვლილებას. ასე, რომ ტემპერატურის დიდი ცვლილებისას აუცილებლად უნდა გავითვალისწინოთ $\rho = \rho(\theta)$ დამოკიდებულება. ბოლო არსებითი შეზღუდვა რაც უნდა გაკეთდეს პროცესის აღწერისას, მდგომარეობს იმაში, რომ სხეულის ტემპერატურის ცვლილება, რომელიც გამოწვეულია J დენის მოქმედებით, უნდა ემორჩილებოდეს ჯოულ-ლენცის კანონს, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$\rho_0 c_\nu \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho J^2, \tag{2.6}$$

სადაც ρ_0 – ნივთიერების სიმკვრივეა, c_ν კი – კუთრი სითბოტევადობა, რომლებიც საზოგადოდ დამოკიდებული არიან ტემპერატურაზე. (2.6) განტოლება არ ითვალისწინებს სითბოს გადაცემის პროცესს სითბოგამტარობის ან გამოსხივების საშუალებით. არ განიხილება აგრეთვე მთელი რიგი ფიზიკური ეფექტები. მიუხედავად ამისა, მათემატიკური თვალსაზრისით, (2.5), (2.6) განტოლებები საკმაოდ რთულია.

გადავიდეთ (2.5), (2.6) სისტემის ინტეგრო-დიფერენცალურ განტოლებათა სისტემამდე რედუქციის საკითხის შესწავლაზე, რომელიც მიმდინარეობს [8] შრომის ანალოგიურად.

გადავწეროთ (2.6) განტოლება შემდეგი სახით

$$\rho_0(\theta)\frac{c_\nu}{\rho(\theta)}\frac{\partial \theta}{\partial t} = J^2.$$

თუ შემოვიღებთ ფუნქციას

$$S(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \rho_0(\xi)\frac{c_\nu}{\rho(\xi)}d\xi,$$

მაშინ უკანასკნელი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial S}{\partial t} = J^2.$$

დავუშვათ, რომ პროცესი იწყება დროის $t = 0$ მომენტში, რომელსაც შეესაბამება ნივთიერების θ_0 ტემპერატურა.

ამ განტოლების $[0,t]$ შუალედზე ინტეგრებით მივიღებთ

$$S[\theta(x,t)] = \int_0^t J^2 d\tau .$$

ფიზიკური თვალსაზრისით ρ_0, c_ν და ρ ფუნქციები არის დადებითი, ამიტომ $S(\theta)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია. აქედან გამომდინარე ცალსახად განისაზღვრება მისი შებრუნებული $\theta = \varphi(S)$ ფუნქცია, რომელიც $S(\theta)$ ფუნქციასთან დაკავშირებულია $\varphi[S(\theta)] = \theta$ თანაფარდობით. ამრიგად, შიეძლება ჩაიწეროს

$$\theta(x,t) = \varphi\left(\int_0^t J^2 d\tau\right).$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.3) განტოლებას, გვექნება

$$J = \frac{c}{4\pi} rot\, H ,$$

ანუ

$$\theta(x,t) = \varphi\left(\int_0^t \left|\frac{c}{4\pi} rot\, H\right|^2 d\tau\right).$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (2.5) განტოლებაში, როგორც $\rho = \rho(\theta)$ ფუნქციის არგუმენტი, რის შედეგადაც მივიღებთ

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi} rot\left\{\rho\left[\varphi\left(\int_0^t \left|\frac{c}{4\pi} rot\, H\right|^2 d\tau\right)\right] rot\, H\right\} = 0,$$

$$div\, H = 0.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$a(S)=\frac{c^2}{4\pi}\rho(\varphi(S)),\qquad W=\frac{c}{4\pi}H,$$

მაშინ სისტემა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{\partial W}{\partial t}+rot\left[a\left(\int_0^t|rot\,W|^2\,d\tau\right)rot\,W\right]=0, \tag{2.7}$$

$$div\,W=0.$$

თუ განვიხილავთ ბრტყელ ველს $W(0,U,V)$, სადაც $U=U(x,t)$ და $V=V(x,t)$ ფუნქციები დამოკიდებულია ერთ სივრცით ცვლადზე, მაშინ

$$rot\,W=\left(0,-\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

ხოლო

$$rot\left(a(S)rot\,W\right)=\left(0,-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right),-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)$$

და შესაბამისად (2.7) ვექტორული დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]=0,\\&\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]=0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

აღვნიშნოთ, რომ (2.7) სახის განტოლებები პირველად განხილული იყო [8], [9] შრომებში. ამ შრომებში, ისევე როგორც [22] შრომაში, სხვა საკითხებთან ერთად, $a=a(S)$ ფუნქციაზე საკმაოდ ზოგადი შეზღუდვების შემთხვევაში, დამტკიცებულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობა.

დავუშვათ, რომ ρ_0 და c_v სიდიდეები მუდმივებია. განვიხილოთ $a(S)$ და $\rho(\theta)$ ფუნქციების მაგალითები [25], [32] (ქვემოთ მოყვანილ ოთხივე მაგალითში c_0 და c_1 სიდიდეები აღნიშნავენ დადებით მუდმივებს).

თუ $\rho(\theta)=\theta^{\alpha}$, $\alpha>1$, მაშინ $a(S)=c_1(c_0-S)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. ამრიგად, $\rho(\theta)$ წინაღობის ხარისხოვან ზრდას მივყავართ მხოლოდ სასრულ შუალედზე განსაზღვრულ $a(S)$ კოეფიციენტამდე. შევნიშნოთ, რომ ფიზიკურ ნივთიერებას ასეთი თვისება არ გააჩნია.

თუ $\rho(\theta)=\theta$, მაშინ $a(S)=c_1e^{c_0S}$. აქედან ჩანს, რომ წრფივი ზრდა გვაძლევს მაჩვენებლიან $a(S)$ ფუნქციას. ტემპერატურის ზრდისას წინაღობის წრფივი ზრდა დამახასიათებელია მეტალებისთვის.

თუ $\rho(\theta)=\theta^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, მაშინ $a(S)=c_1(c_0+S)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ და $\rho(\theta)$ ფუნქციის ზრდა გვაძლევს $a(S)$ კოეფიციენტის ხარისხოვან ზრდას.

თუ $\rho(\theta)=\theta^{-\alpha}$, $\alpha>0$, მაშინ $a(S)=c_1(c_0+S)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$. მაშასადამე, კლებადი $\rho(\theta)$ ფუნქციიდან ვღებულობთ კლებად $a(S)$ ფუნქციას. ეს არის ზოგადი ფაქტი, თუ ρ_0 და c_v სიდიდეები მუდმივებია. მართლაც, დავუშვათ, რომ როცა $\theta\geq\theta_0$, მაშინ $\rho(\theta)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ განსაზღვრების თანახმად

$$\frac{da}{dS}=\frac{c^2}{4\pi}\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dS}=\frac{c^2\,d\rho/d\theta}{4\pi\,dS/d\theta}=\frac{c^2}{4\pi\rho c_v}\rho(\theta)\rho'(\theta).$$

აქედან ნათლად ჩანს, რომ $a(S)$ ფუნქცია იზრდება და კლებლებულობს $\rho(\theta)$ ფუნქციასთან ერთად. აღვნიშნოთ, რომ $\rho(\theta)$ წინაღობის შემცირება ტემპერატურის ზრდასთან ერთად

დამახასიათებელია ნახევარგამტარებისთვის მყარ ფაზაში, გაზებისთვის და აგრეთვე პლაზმისთვის, რომლისთვისაც, როგორც უკვე პირველ პარაგრაფში აღინიშნა, გვაქვს $\rho(\theta)=K\theta^{-3/2}$.

ახლა გადავიდეთ გასაშუალებული მოდელის მიღებაზე, რომელიც კვლავ აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელებას გარემოში [25].

ჯოულ-ლენცის (2.6) კანონი წარმოადგენს სითბოს გამოყოფის [36, გვ.334] ლოკალურ კანონს

$$dQ=\int_{\Omega} JEdxdt. \tag{2.9}$$

აქ dQ – სითბური ენერგიის ნაკადია დროის dt შუალედში, სხეულის მთელ მოცულობაში, რომელიც უკავია $\Omega\subset R^3$ არეს. ჯოულ-ლენცის კანონი არ ითვალისწინებს სითბოს გადაცემის პროცესს სხეულის შიგნით. ეს კი სამართლიანია, თუ ჩავთვლით ტემპერატურას მუდმივს სხეულის გასწვრივ, ე.ი. დამოკიდებულს დროზე, მაგრამ დამოუკიდებელს სივრცითი ცვლადებისგან. ამრიგად, ამ შემთხვევაში შეიძლება დავუშვათ, რომ $\theta=\theta(t)$. ამ დაშვებაში $dQ=mc_v d\theta$, სადაც m – ნივთიერების მასაა, მაშინ (2.9) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$mc_v(\theta)\frac{d\theta}{dt}=\int_{\Omega} JEdx.$$

ომის კანონის გამოყენებით $E=\rho(\theta)J$, და გამორიცხვის მეთოდის გამეორებით, ვღებულობთ (2.7) სისტემის შემდეგნაირ ანალოგს

$$\frac{\partial W}{\partial t}+rot\left[a\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_0^t\int_{\Omega}|rot\,W|^2\,dxd\tau\right)rot\,W\right]=0,$$

$$divW=0.$$

აქ $|\Omega|$ ნივთიერების მოცულობაა. Ω არის მიხედვით გასაშუალების გამო ამ განტოლების $a(S)$ კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ t ცვლადზე და ამიტომ იგი შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\frac{\partial W}{\partial t} - a\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_0^t\int_\Omega |rot\, W|^2\, dxd\tau\right) rot\, rot\, W = 0. \tag{2.10}$$

ბრტყელი ველისთვის $W = W(0,U,V)$, სადაც $U = U(x,t)$ და $V = V(x,t)$ ერთი სივრცული ცვლადის ფუნქციებია, (2.10) ვექტორული ტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} - a\left(\int_0^t\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,\\
&\frac{\partial V}{\partial t} - a\left(\int_0^t\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

სადაც $\Omega = [0,1]$.

ზემოთ მიღებული (2.10), (2.11) განტოლებების გამოკვლევა, როგორც ეს [25] შრომაშია აღნიშნული, რთულია და მოითხოვს დამოუკიდებელ შესწავლას.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (2.7) და (2.10) განტოლებებში არ არის გათვალისწინებული მრავალი ფიზიკური ეფექტი. ამოცანის უფრო ზოგადად დასმისთვის, პირველ რიგში, აუცილებელია ნივთიერების სითბოგამტარობის გათვალისწინება. ამ შემთხვევაში ჯოულ-ლენცის კანონში გაჩნდება დამატებით შესაკრები, რომელიც ითვალისწინებს სითბოგამტარობის პროცესს და იგი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho J^2 + \nabla(\chi \nabla \theta),$$

სადაც χ – სითბოგამტარობის კოეფიციენტია, რომელიც საზოგადოდ, აგრეთვე დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

§3. ამონახსნის წრფივი და გლობალური მდგრადობის შესახებ

ამ პარაგრაფში შეისწავლება წინა პარაგრაფებში განხილული სისტემების ზოგიერთი თავისებურება, მათ შორის სტაციონარელი ამონახსნების წრფივი და გლობალური მდგრადობის საკითხები.

მაგალითისთვის განვიხილოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(P(S)\frac{\partial U}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(P(S)\frac{\partial V}{\partial x} \right), \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Q(S)\frac{\partial S}{\partial x} \right) + F\left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

სადაც P, Q და F – თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია.

მრავალი დიფუზიური ამოცანის მათემატიკურ მოდელირებისას ვღებულობთ (3.1) სახის სისტემას. კერძოდ, თუ

$$Q(S) = 0,$$

$$F\left(S, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = G(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right],$$

სადაც G მოცემული ფუნქციაა, მაშინ (3.1) სისტემა, როგორც უკვე პირველ ორ პარაგრაფში ვნახეთ, აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესს ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

თუ

$$Q(S)\neq 0,$$

$$F\left(S,\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial x}\right)=-T(S)+R(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{3.2}$$

სადაც T ასევე მოცემული ფუნქციაა, მაშინ (3.1), (3.2) სისტემით აღიწერება იგივე პროცესი, ოღონდ ამ შემთხვევაში გათვალისწინებულია სითბოგამტარობის ეფექტი.

განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=S^{\alpha}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{3.3}$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0,$$

$$U(1,t)=\psi_1,\quad V(1,t)=\psi_2, \tag{3.4}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x),\quad S(x,0)=S_0(x)>0, \tag{3.5}$$

სადაც ψ_1 და ψ_2 დადებითი მუდმივები, ხოლო $U_0(x), V_0(x), S_0(x)$ – კი მოცემული ფუნქციებია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ თუ $U_0(x)=\psi_1 x, V_0(x)=\psi_2 x$ და $S_0(x)=S_0$, მაშინ, როცა $\alpha\neq 1$ (3.3) - (3.5) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$U(x,t)=\psi_1 x,\quad V(x,t)=\psi_2 x,$$

$$S(x,t)=\left[S_0^{1-\alpha}+(1-\alpha)(\psi_1^2+\psi_2^2)t\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.6}$$

როგორც (3.6) ფორმულებიდან ჩანს დროის სასრული $t_0 = S_0^{1-\alpha}/(\psi_1^2 + \psi_2^2)(\alpha - 1)$ მომენტისთვის, როცა $\alpha > 1$, $S(x,t)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია.

განხილული მაგალითი გვიჩვენებს, რომ საკმაოდ გლუვი საწყის-სასაზღვრო ფუნქციების შემთხვევაში (3.3) - (3.5) ამოცანას საზოგადოდ გლობალური ამონახსნი არ გააჩნია.

აღნიშნული ამოცანების გარკვეული კლასებისთვის ამონახსნების არსებობის თეორემები შესწავლილია [8, 10] შრომებში.

შევნიშნოთ, რომ თუ (3.4), (3.5) პირობებს მივუერთებთ შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial S}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \tag{3.7}$$

მაშინ (3.6) ფორმულებით განსაზღვრული U, V და S ფუნქციები წარმოადგენენ შემდეგი სისტემის ამონახსნებსაც

$$\begin{gathered} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial S}{\partial t} = S^\alpha\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \end{gathered} \tag{3.8}$$

(3.4), (3.5), (3.7) საწყის-სასაზღვრო პირობებით.

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ როცა $\alpha > 1$, მაშინ საზოგადოდ არც (3.4), (3.5), (3.7), (3.8) ამოცანას გააჩნია გლობალური ამონახსნი.

გადავიდეთ სტაციონარული ამონახსნის წრფივი და გლობალური მდგრადობის საკითხების შესწავლაზე.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\right), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-aS^{\beta}+bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{2}\right],$$

სადაც $\alpha,\beta,\gamma\in R,\ a,b\in R^{+}$.

დავსვათ $Q_t=(0,1)\times(0,t)$ არეში (3.9) განტოლებათა სისტემისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t)=V(0,t)=0,$$
$$U(1,t)=\psi_1>0,\ \ V(1,t)=\psi_2>0, \tag{3.10}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ \ V(x,0)=V_0(x),\ \ \ S(x,0)=S_0(x)>0. \tag{3.11}$$

აღვნიშნოთ (3.9) - (3.11) ამოცანის შესაბამისი სტაციონარული ამონახსნი (U_s,V_s,S_s) ფუნქციებით. ადვილი საჩვენებელია, რომ როცა $\beta\neq\gamma$, მაშინ (3.9) - (3.11) ამოცანას გააჩნია ერთდაერთი სტაციონარული ამონახსნი და მას აქვს სახე

$$U_s=\psi_1 x,\quad V_s=\psi_2 x,\quad S_s=\left[\frac{(\psi_1^2+\psi_2^2)b}{a}\right]^{\frac{1}{\beta-\gamma}}. \tag{3.12}$$

ამ პარაგრაფში ჩვენს მთავარ მიზანს წარმოადგენს (3.9) - (3.11) ამოცანის (3.12) სტაციონარული ამონახსნის წრფივი და გლობალური მდგრადობის საკითხების შესწავლა.

აღნიშნული კუთხით მსგავსი ამოცანების გამოკვლევა პირველად ჩატარებული იყო [15] ნაშრომში.

დავუშვათ, რომ (3.9) - (3.11) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$U(x,t)=U_s+u(x,t),$$
$$V(x,t)=V_s+v(x,t), \tag{3.13}$$

$$S(x,t)=S_s+s(x,t),$$

სადაც $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(x,t)$ მცირე შეშფოთებებია.

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს:

$$\alpha_s=\alpha\psi_1\left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}},$$

$$\beta_s=\left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}},$$

$$\gamma_s=\alpha\psi_2\left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}},$$

$$\nu_s=(\gamma-\beta)\frac{b^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}}{a^{\frac{\gamma-1}{\beta-\gamma}}}\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}},$$

$$\eta_s=2\psi_1 b\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}},$$

$$\mu_s=2\psi_2 b\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}},$$

მაშინ (3.9) სისტემის გაწრფივების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\alpha_s\frac{\partial s}{\partial x}+\beta_s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=\gamma_s\frac{\partial s}{\partial x}+\beta_s\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\ \frac{\partial s}{\partial t}&=\nu_s s+\eta_s\frac{\partial u}{\partial x}+\mu_s\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\qquad(3.14)$$

დავუშვათ, (3.14) სისტემის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$u(x,t)=u(x)e^{\omega t},\quad v(x,t)=v(x)e^{\omega t},\quad s(x,t)=s(x)e^{\omega t}, \tag{3.15}$$

მაშინ მივიღებთ ამოცანას საკუთრივ რიცხვებზე ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა შემდეგი სისტემისთვის:

$$\begin{aligned}
\omega u &= \alpha_s \frac{ds}{dx} + \beta_s \frac{d^2u}{dx^2},\\
\omega v &= \gamma_s \frac{ds}{dx} + \beta_s \frac{d^2v}{dx^2},\\
\omega s &= \nu_s s + \eta_s \frac{du}{dx} + \mu_s \frac{dv}{dx}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ვეძებოთ (3.16) სისტემის ამონახსნი შემდეგი ფორმით:

$$u(x)=u_0e^{ikx},\quad v(x)=v_0e^{ikx},\quad s(x)=s_0e^{ikx}.$$

ამ ტოლობების (3.16) სისტემაში ჩასმით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}
\omega u_0e^{ikx} &= \alpha_s ike^{ikx}s_0 - \beta_s e^{ikx}k^2u_0,\\
\omega v_0e^{ikx} &= \gamma_s ike^{ikx}s_0 - \beta_s e^{ikx}k^2v_0,\\
\omega s_0e^{ikx} &= \nu_s s_0e^{ikx} + \eta_s iku_0e^{ikx} + \mu_s ikv_0e^{ikx}.
\end{aligned}$$

აქედან კი გვაქვს:

$$\begin{aligned}
u_0\left(\omega+\beta_sk^2\right)-\alpha_siks_0 &= 0,\\
v_0\left(\omega+\beta_sk^2\right)-\gamma_siks_0 &= 0,\\
u_0ik\eta_s + v_0\mu_sik + s_0\left(\nu_s-\omega\right) &= 0.
\end{aligned}$$

ცხადია, რომ ამ სისტემას ექნება არატრივიალური ამონახსნი მაშინ, როცა შესრულებულია პირობა

$$\Delta(\omega,k)=\begin{vmatrix}
\omega+\beta_sk^2 & 0 & -ik\alpha_s\\
0 & \omega+\beta_sk^2 & -ik\gamma_s\\
ik\eta_s & ik\mu_s & \nu_s-\omega
\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\omega+\beta_sk^2\right)^2\left(\nu_s-\omega\right)-\left(\omega+\beta_sk^2\right)k^2\alpha_s\eta_s-\left(\omega+\beta_sk^2\right)\mu_s\gamma_sk^2=0,$$

ანუ

$$\left(\omega+\beta_s k^2\right)\left[\left(\omega+\beta_s k^2\right)\left(\nu_s-\omega\right)-k^2\alpha_s\eta_s-k^2\mu_s\gamma_s\right]=0.$$

აქედან ვღებულობთ

$$k^2\left(\beta_s\nu_s-\beta_s\omega-\alpha_s\eta_s-\mu_s\gamma_s\right)-\omega^2+\omega\nu_s=0. \tag{3.17}$$

($\omega+\beta_s k^2=0$ შემთხვევა ტრივიალურია).

უკანასკნელი ტოლობა გვაძლევს k პარამეტრის ორ k_1 და k_2 მნიშვნელობას, ამასთან

$$k_1=-k_2.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ (3.16) სისტემის არატრივიალურ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
u(x)&=\frac{ik_1\alpha_s}{\omega+\beta_s k_1^{\,2}}\left(S_1e^{ik_1x}-S_2e^{-ik_1x}\right),\\
\nu(x)&=\frac{ik_1\gamma_s}{\omega+\beta_s k_1^{\,2}}\left(S_1e^{ik_1x}-S_2e^{-ik_1x}\right),\\
s(x)&=S_1e^{ik_1x}+S_2e^{-ik_1x}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.10) სასაზღვრო პირობებს, (3.13) და (3.15) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$u(0)=u(1)=0.$$

აქედან კი (3.18) ტოლობების გათვალისწინებით ვღებულობთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned}
S_1-S_2&=0,\\
S_1e^{ik_1}-S_2e^{-ik_1}&=0.
\end{aligned}$$

უკანასკნელ სისტემას გააჩნია არატრივიალური ამონახსნი მაშინ, როცა შესრულებულია პირობა

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{ik_1} & -e^{-ik_1} \end{vmatrix} = e^{ik_1} - e^{-ik_1} = 2i\sin k_1 = 0.$$

საიდანაც გვაქვს

$$k_{1n} = \pi n, \quad n \in Z.$$

გადავწეროთ (3.17) ტოლობა შემდეგი სახით

$$\omega_n^{\,2} + P_n(\beta_s, k_n, \nu_s)\omega_n + L_n(\beta_s, k_n, \nu_s, \eta_s, \mu_s, \gamma_s) = 0,$$

სადაც

$$P_n(\beta_s, k_n, \nu_s) = \beta_s k_n^2 - \nu_s,$$

$$L_n(\beta_s, k_n, \nu_s, \eta_s, \mu_s, \gamma_s) = -\beta_s \nu_s k_n^2 + \alpha_s \eta_s k_n^2 + \mu_s \gamma_s k_n^2.$$

შევნიშნოთ, რომ (3.9) - (3.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი n მნიშვნელობისთვის $\mathrm{Re}(\omega_n) < 0$. ადვილი საჩვენებელია რომ, როცა $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, მაშინ $L_n(\beta_s, k_n, \nu_s, \eta_s, \mu_s, \gamma_s) > 0$.

მაშასადამე, ამონახსნის წრფივად მდგრადობისთვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობა

$$P_n = \beta_s k_n^2 - \nu_s = \left(\frac{\left(\psi_1^{\,2} + \psi_2^{\,2}\right) b}{a} \right)^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}} \pi^2 n^2 -$$

$$-(\gamma - \beta) \frac{b^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}}{a^{\frac{\gamma-1}{\beta-\gamma}}} \left(\psi_1^{\,2} + \psi_2^{\,2}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}} > 0,$$

ანუ

$$a(\gamma - \beta)\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2, \quad (n=1).$$

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. თუ $2\alpha+\beta-\gamma>0$, $\beta\neq\gamma$, მაშინ (3.9) - (3.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1 x,\quad \psi_2 x,\quad \left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}}\right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$a(\gamma-\beta)\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}}<\pi^2.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. როგორც უკანასკნელი უტოლობიდან ჩანს, როცა $\gamma<\beta$, მაშინ (3.9) - (3.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი ყოველთვის წრფივად მდგრადია.

ვთქვათ, $\gamma>\beta$, $\beta-\alpha-1\neq 0$ და განვიხილოთ სიდიდე

$$\psi_s=\left[\frac{\pi^2}{\gamma-\beta}a^{\frac{\gamma-\alpha-1}{\beta-\gamma}}b^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta-\gamma}}\right]^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha-1}},$$

რომლისთვისაც გვექნება

$$P_1(\psi_s,\alpha,\beta,\gamma)=0,\quad P_n(\psi_s,\alpha,\beta,\gamma)>0,\quad n=2,3\ldots\ .$$

თუ დამატებით დავუშვებთ, რომ $\beta-\alpha-1<0$, მაშინ როცა $\psi\in(0,\psi_s)$, $\psi=\psi_1^2+\psi_2^2$, სიდიდისთვის ვღებულობთ $P_n(\psi,\alpha,\beta,\gamma)>0$, $n\in Z_0$.

მაშასადამე, როცა $\psi\in(0,\psi_s)$, მაშინ (3.9) - (3.11) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, როცა $\psi>\psi_s$ მაშინ კი არამდგრადი. როცა $\psi=\psi_s$, მაშინ გვაქვს $\mathrm{Re}(\omega_1)=0$, და $\mathrm{Im}(\omega_1)\neq 0$. ე.ი. ჩნდება ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის შესაძლებლობა [5], [53].

მცირე შეშფოთებებმა შეიძლება სტაციონარული ამონახსნი გადაიყვანოს დროით პერიოდულ რხევებში.

ახლა გადავიდეთ (3.9) - (3.11) ამოცანის ერთი კერძო შემთხვევისთვის სტაციონარული ამონახსნის გლობალური მდგრადობის საკითხის შესწავლაზე.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\alpha = \beta = a = b = 1,\ \gamma = 0.$ მაშინ (3.9) სისტემა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -S + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2,$$

ხოლო სტაციონარულ ამონახსნს ექნება სახე

$$U_s = \psi_1 x, \quad V_s = \psi_2 x, \quad S_s = \psi_1^{\,2} + \psi_2^{\,2}.$$

ვთქვათ,

$$y(x,t) = U(x,t) - \psi_1 x,$$

$$w(x,t) = V(x,t) - \psi_2 x, \tag{3.20}$$

$$z(x,t) = S(x,t) - \left(\psi_1^{\,2} + \psi_2^{\,2}\right),$$

სადაც $(U(x,t), V(x,t), S(x,t))$ წარმოადგენს (3.10), (3.11), (3.19) ამოცანის ამონახსნს.

გავაწარმოოთ (3.20) ტოლობები t ცვლადით. (3.19) სისტემის გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial U}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -z(x,t) - \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2.$$

გავამრავლოთ (3.21) სისტემის პირველი განტოლება სკალარულად y ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა და (3.10) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 y^2 dx &= yS\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_0^1 - \int_0^1 S\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}dx = \\ &= -\int_0^1 \left(S\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1 \right) dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

ანალოგიურად, (3.21)-ის მეორე ტოლობიდან გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 w^2 dx = -\int_0^1 \left(S\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + S\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2 \right) dx. \tag{3.23}$$

გავამრავლოთ (3.21) სისტემის მესამე განტოლება სკალარულად z ფუნქციაზე. მარტივი გარდაქმნების ჩატარების შედეგად ვღებულობთ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 z^2 dx &= \int_0^1 \left(-z^2 - \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)z + \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \right) z \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(-z^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 S - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right) + 2\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1 z + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 S - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right) + 2\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2 z \right) dx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\psi_1 \frac{\partial y}{\partial x}dx &= -\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\psi_1 \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x}dx = \\ &= -\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\psi_1 y\Big|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 -\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\psi_2\frac{\partial w}{\partial x}dx=-\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\psi_2\int_0^1\frac{\partial w}{\partial x}dx=$$

$$=-\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\psi_2 w\Big|_0^1=0,$$

მაშინ (3.22), (3.23), (3.24) ტოლობების შეკრება მოგვცემს

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(y^2+w^2+z^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(-z^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 S-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)+2\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1 z+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 S-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)+2\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2 z-$$

$$\left.-S\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-S\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1-S\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-S\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(-z^2-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)+2\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1 z-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)+\right.$$

$$+2\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2 z-z\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1-\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1-$$

$$\left.-z\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2-\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2\right)dx=\int_0^1\left(-z^2-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial y}{\partial x}\psi_1 z-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)+\frac{\partial w}{\partial x}\psi_2 z\right)dx\le$$

$$\le\int_0^1\left(-z^2-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\psi_1^2-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\psi_2^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\psi_1^2+\frac{1}{4}z^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\psi_1^2-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\psi_2^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\psi_2^2+\frac{1}{4}z^2\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(z^2+2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\psi_2^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\psi_1^2\right)dx.$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(y^2+w^2+z^2\right)dx\le-\frac{1}{2}\int_0^1\left(z^2+2\psi_2^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2\psi_1^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)dx.$$

თუ გავითვალისწინებთ პუანკარეს უტოლობას

$$\int_0^1\left(y^2+w^2\right)dx\le\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx,$$

უკანასკნელი თანაფარდობიდან ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(y^2+w^2+z^2\right)dx\le-C\int_0^1\left(y^2+w^2+z^2\right)dx. \tag{3.25}$$

სადაც C არის დადებითი მუდმივი.

გრონუოლის უტოლობისა და (3.11) პირობის გათვალისწინებით (3.25) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\int_0^1\left[y^2(x,t)+w^2(x,t)+z^2(x,t)\right]dx\le$$

$$\le e^{-ct}\int_0^1\left[\left(U_0(x)-\psi_1x\right)^2+\left(V_0(x)-\psi_2x\right)^2+\left(S_0(x)-\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\right)^2\right]dx.$$

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. (3.10), (3.11), (3.19) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1x,\quad\psi_2x,\quad\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით. ამასთან, მდგრადობას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

განვიხილოთ (3.9) სისტემისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t)=V(0,t)=0,$$

$$S^\alpha\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=1}=\psi_1,\quad S^\alpha\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=1}=\psi_2, \tag{3.26}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x),\quad S(x,0)=S_0(x)>0.$$

აღნიშნულ (3.9), (3.26) ამოცანასაც გააჩნია ერთადერთი სტაციონარული ამონახსნი და ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის მსგავსად მტკიცდება შემდეგი თეორემების სამართლიანობა:

თ ე ო რ ე მ ა 3.3. თუ $2\alpha+\beta-\gamma>0$, მაშინ (3.9), (3.26) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1\left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}}x,\ \psi_2\left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{-\frac{\alpha}{2\alpha+\beta-\gamma}}x,\ \left(\frac{\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)b}{a}\right)^{\frac{1}{2\alpha+\beta-\gamma}}\right)$$

წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$(\gamma-\beta)b^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}}a^{\frac{3\alpha-\gamma+1}{2\alpha+\beta-\gamma}}\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{\frac{\beta-\alpha-1}{2\alpha+\beta-\gamma}}<\frac{\pi^2}{4}.$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.4. თუ $\alpha=\beta=a=b=1,\ \gamma=0,$ მაშინ (3.9), (3.26) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი

$$\left(\psi_1\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{-\frac{1}{3}}x,\ \psi_2\left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{-\frac{1}{3}}x,\ \left(\psi_1^{\,2}+\psi_2^{\,2}\right)^{\frac{1}{3}}\right),$$

გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით. ამასთან, მდგრადობას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

თავი II

ინტეგრო-დიფერენციალური ამოცანების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის გამოკვლევა

მრავალი ფიზიკური პროცესის მათემატიკური მოდელირებისას ვღებულობთ ისეთ არაწრფივ, კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ, ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებს და მათ სისტემებს, რომელთა განსაკუთრებულობა, გარდა არაწრფივობისა იმით გამოიხატება, რომ ისინი შეიცავენ სხვადასხვა რიგის განტოლებებს. ასეთი სისტემების რამდენიმე მაგალითი მოყვანილი იყო როგორც დისერტაციის შესავალში ასევე პირველ თავში.

ამ თავში განიხილება ერთ-ერთი კერძო მოდელი, რომელიც აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესს, ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი არსებითად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე. განტოლებათა შესაბამისი სისტემა პირველად შემოთავაზებული იქნა [8] ნაშრომში. შემდეგში ამ სისტემის, მისი ანალოგებისა და განზოგადოებების კვლევას მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი მიეძღვნა [2, 9-12, 25, 31, 33, 74-78, 80].

განვიხილოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,\\ &\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(b(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0, \end{aligned} \tag{0.1}$$

სადაც

$$S(x,t)=1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau, \tag{0.2}$$

ან

$$S(t)=1+\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau, \qquad (0.3)$$

ხოლო $a(S)$ და $b(S)$ წარმოადგენენ S არგუმენტის ცნობილ ფუნქციებს.

აღნიშნული (0.1), (0.2) სისტემის ძირითადი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის წარმოებულებთან გვხვდება არაწრფივი კოეფიციენტები, რომელებიც დამოკიდებულია დროითი ცვლადის ინტეგრალზე, ხოლო (0.1), (0.3) სისტემაში როგორც დროითი, ასევე სივრცითი ცვლადების ინტეგრალებზე.

მიმდინარე თავში გამოკვლეულია (0.1), (0.2) და (0.1), (0.3) სისტემის შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა, როცა $t\to\infty$.

§1. აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები

ვთქვათ, $\Omega=[0,1]$. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $Q=\Omega\times[0,\infty)$, $Q_t=\Omega\times[0,t]$.

აღვნიშნოთ Ω არეზე p ხარისხით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე $L_p(\Omega)$ სიმბოლოთი, ხოლო $C^k(\Omega)$ სიმბოლოთი კი k-ჯერ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა სივრცე.

განვმარტოთ ნორმები:

$$\|U\|_{L_p(\Omega)}=\left[\int_\Omega|U|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \|U\|=\|U\|_{L_2(\Omega)},$$

$$\|U\|^2_{W_2^1(\Omega)}=\|U\|^2+\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2,$$

$$\|U\|^2_{W_2^2(\Omega)} = \|U\|^2 + \left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2.$$

აქვე მოვიყვანოთ რამდენიმე ცნობილი აღნიშვნა:

$$f(t) \cong g(t), \text{ როცა } t \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = 1;$$

$$f(t) = o(g(t)), \text{ როცა } t \to a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{t\to a} \frac{f(t)}{g(t)} = 0;$$

$$f(t) = O(g(t)), \quad \Leftrightarrow \text{ არსებობს } C \text{ ისეთი, რომ } |f(t)| \le C|g(t)|;$$

აქ და შემდეგშიც c, C და C_i სიმბოლოები აღნიშნავენ დადებით მუდმივებს, რომლებიც არ არიან დამოკიდებულნი t ცვლადზე.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამ თავში შეისწავლება ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა. კვლევა ჩატარებულია სქემით, რომელიც ემყარება აპრიორულ შეფასებებს, რომელთა მისაღებად დაგვჭირდება რამდენიმე დამხმარე ლემა [3, 23, 27].

ლ ე მ ა 1.1. ვთქვათ, $h(\tau) \ge 0$ და ნებისმიერი $t \in [0, \infty)$ ცვლადისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

$$\int_0^t h(\tau)d\tau < C, \qquad \int_0^t \left|\frac{dh(\tau)}{d\tau}\right| d\tau < C,$$

მაშინ $h(\tau) \to 0$ როცა $t \to \infty$.

ლ ე მ ა 1.2. დავუშვათ, რომ

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\exp(g(\tau))d\tau,$$

და ვთქვათ, შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $f(\tau) \in C^1$, $g(\tau) \in C^2$, $g'(\tau) > 0$, $\tau \ge 0$, $g(+\infty) = +\infty$;

2) $g''(\tau) = o(g'^2(\tau))$, როცა $\tau \to +\infty$;

3) $f(\tau) > 0$, როცა $\tau \ge 0$, ხოლო $f'(\tau)/f(\tau) = o(g'(\tau))$, როცა $\tau \to +\infty$,

მაშინ, როცა $t \to +\infty$ სამართლიანია ასიმპტოტური ფორმულა

$$F(t) \cong \frac{f(t)}{g'(t)} \exp(g(t)).$$

§2. ერთგვაროვანი პირველი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის სტაბილიზაციის შესახებ $a(S) = b(S)$ შემთხვევისთვის

უსასრულო Q ცილინდრში განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 ,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 , \qquad (2.1)$$

$$S(x,t) = 1 + \int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau ,$$

სადაც $a(S)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $a(S) \geq a_0 = const > 0$ პირობას.

დავსვათ (2.1) განტოლებათა სისტემისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t) = U(1,t) = V(0,t) = V(1,t) = 0, \quad t \geq 0 , \qquad (2.2)$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad x \in \Omega \qquad (2.3)$$

და შევისწავლოთ (2.1) - (2.3) ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა.

გავამრავლოთ (2.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად $U(x,t)$ და $V(x,t)$ ფუნქციებზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე, ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით და (2.2) პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2+\int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx=0,$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V\|^2+\int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx=0. \qquad (2.4)$$

ამ ტოლობების $e^{\beta t}$ $(\beta>0)$ ფუნქციაზე გამრავლებით, ხოლო შემდეგ შეკრებით და $(0,t)$ არეზე ინტეგრებით ვღებულობთ

$$\int_0^t e^{\beta\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)d\tau+2\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau=0. \qquad (2.5)$$

კვლავ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენება გვაძლევს

$$\int_0^t e^{\beta\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)d\tau=e^{\beta t}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)\Big|_0^t-$$
$$-\beta\int_0^t e^{\beta\tau}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)d\tau.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ პუანკარეს უტოლობას

$$\|U\|^2+\|V\|^2\le\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2,$$

და გავითვალისწინებთ (2.3) პირობას გვექნება

$$\int_0^t e^{\beta\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)d\tau\ge e^{\beta t}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)-\left(\|U_0\|^2+\|V_0\|^2\right)-$$
$$-\beta\int_0^t e^{\beta\tau}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right)d\tau.$$

ვინაიდან $a(S)\ge a_0=const>0$, ამიტომ

$$\int_0^t e^{\beta\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)d\tau \ge e^{\beta t}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)-\left(\|U_0\|^2+\|V_0\|^2\right)-$$

$$-\frac{\beta}{a_0}\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau .$$

მაშასადამე, (2.5) ტოლობიდან გამომდინარე შეიძლება დავწეროთ

$$e^{\beta t}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)-\left(\|U_0\|^2+\|V_0\|^2\right)+$$

$$+\left(2-\frac{\beta}{a_0}\right)\int_0^t\int_0^1 e^{\beta\tau}a(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau \le 0.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\beta \le 2a_0$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$e^{\beta t}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)\le\left(\|U_0\|^2+\|V_0\|^2\right),$$

ანუ

$$\|U\|\le Ce^{-\frac{\beta}{2}t}, \qquad \|V\|\le Ce^{-\frac{\beta}{2}t}.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს (2.1) - (2.3) ამოცანის ამონახსნის სტაბილიზაციას, როცა $t\to\infty$. ამასთან $L_2(\Omega)$ სივრცის ნორმის აზრით სტაბილიზაციას აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

აღსანიშნავია, რომ სტაბილიზაციას ადგილი აქვს უფრო ძლიერი ნორმის აზრითაც. კერძოდ, $W_2^1(\Omega)$ სივრცის ნორმით.

ვთქვათ, $a=a(S)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს დამატებით პირობებს: $a'(S)\ge 0$, $a''(S)\le 0$.

ვაინტეგროთ (2.4) განტოლებები $(0,t)$ შუალედში. (2.3) საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\|U\|^2+2a_0\int_0^t\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 d\tau \le \|U_0\|^2,$$

$$\|V\|^2 + 2a_0 \int_0^t \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 d\tau \le \|V_0\|^2.$$

აქედან ვღებულობთ უტოლობებს:

$$\begin{aligned} &\|U\| \le C, \qquad \int_0^t \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 d\tau \le C, \\ &\|V\| \le C, \qquad \int_0^t \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 d\tau \le C. \end{aligned} \tag{2.6}$$

შევაფასოთ შემდეგი ინტეგრალი

$$\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 \right| d\tau = \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \right| d\tau \le 2 \int_0^t \left| \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} dx \right| d\tau \le$$

$$\le 2 \int_0^t \int_0^1 \left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right| dx d\tau \le \int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right)^2 \right] dx d\tau =$$

$$= \int_0^t \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 d\tau + \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right\|^2 d\tau.$$

ე.ი.

$$\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 \right| d\tau \le C + \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right\|^2 d\tau. \tag{2.7}$$

ანალოგიურად,

$$\int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 \right| d\tau \le C + \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \tau} \right\|^2 d\tau. \tag{2.8}$$

შევაფასოთ (2.7) და (2.8) უტოლობების მარჯვენა მხარეში მდგომი ინტეგრალები. ამისთვის (2.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები გავაწარმოოთ დროითი ცვლადის მიმართ და გავამრავლოთ შესაბამისად $\frac{\partial U}{\partial t}$ და $\frac{\partial V}{\partial t}$ ფუნქციებზე. ნაწილობითი

ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით და (2.2) პირობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\int_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}dx+$$

$$+\int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2 dx=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2+\int_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}dx+$$

$$+\int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)^2 dx=0.$$

თუ შევკრებთ ამ ტოლობებს და ჩავატარებთ მარტივ გარდაქმნებს მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 a'(S)\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx+$$

$$+\int_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)^2\right]dx=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx+$$

$$+\int_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)^2\right]dx=0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\int_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)^2\right]dx+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right\}^2\right]dx=0.$$

მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ $(0,t)$ შუალედზე და გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)-\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\Bigg|_{t=0}+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 a(S)\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}\right)^2\right]dxd\tau+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right\}^2 dx-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^1 a'(S)\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right\}^2 dx\Bigg|_{t=0}-$$

$$-\frac{1}{4}\int_0^t\int_0^1 a''(S)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^3 dxd\tau=0.$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.3) პირობებს და $a(S)\geq a_0$, $a'(S)\geq 0$, $a''(S)\leq 0$ შეზღუდვებს გვექნება

$$a_0\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\tau}\right)^2 dxd\tau+a_0\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial\tau}\right)^2 d\tau\leq C.$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \tau} \right\|^2 d\tau \le C, \qquad \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \tau} \right\|^2 d\tau \le C. \tag{2.9}$$

საბოლოოდ, (2.6), (2.7), (2.8) და (2.9) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 d\tau \le C, \qquad \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 \right| d\tau \le C,$$

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 d\tau \le C, \qquad \int_0^t \left| \frac{d}{d\tau} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 \right| d\tau \le C.$$

მიღებული აპრიორული შეფასებები სამართლიანია ნებისმიერი $t-$სთვის, ამიტომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

$$\int_0^\infty \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 d\tau \le C, \qquad \int_0^\infty \left| \frac{d}{d\tau} \left\| \frac{\partial U}{\partial x} \right\|^2 \right| d\tau \le C,$$

$$\int_0^\infty \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 d\tau \le C, \qquad \int_0^\infty \left| \frac{d}{d\tau} \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2 \right| d\tau \le C.$$

უკანასკნელი შეფასებებისა და პირველი პარაგრაფის ლემა 1.1-ის თანახმად საბოლოოდ ვღებულობთ:

$$\|U(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0, \qquad \text{როცა} \quad t \to \infty,$$

$$\|V(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0, \qquad \text{როცა} \quad t \to \infty.$$

მაშასადამე, $W_2^1(\Omega)$ სივრცეში ადგილი აქვს (2.1) - (2.3) ამოცანის სტაბილიზაციას, როცა $t \to \infty$.

ამრიგად, სამართლიანია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. თუ $a(S) \ge a_0 = const > 0$, მაშინ (2.1) - (2.3) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შეფასებები:

$$\|U\| \le Ce^{-a_0 t}, \qquad \|V\| \le Ce^{-a_0 t},$$

ხოლო თუ დამატებით შესრულებულია $a'(S)\geq 0$, $a''(S)\leq 0$ პირობები, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ასიმპტოტურ ფორმულებს:

$$\|U(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)}\to 0, \qquad \|V(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)}\to 0, \qquad \text{როცა} \quad t\to\infty.$$

ახლა განვიხილოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,\\ \frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0,\\ S(x,t)=1+\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau,\end{gathered} \tag{2.10}$$

აღნიშნული სისტემა შემოთავაზებულ იქნა [25] შრომაში და იგი გასაშუალებული მოდელის სახელწოდებითაა ცნობილი.

დავსვათ Q არეში (2.10) განტოლებათა სისტემისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\begin{gathered}U(0,t)=U(1,t)=V(0,t)=V(1,t)=0, \quad t\geq 0,\\ U(x,0)=U_0(x), \quad V(x,0)=V_0(x), \quad x\in\Omega.\end{gathered} \tag{2.11}$$

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობის მსგავსად მტკიცდება შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. თუ $a(S)\geq a_0=const>0$, მაშინ (2.10), (2.11) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შეფასებები:

$$\|U\|\leq Ce^{-a_0t}, \qquad \|V\|\leq Ce^{-a_0t},$$

ხოლო თუ დამატებით შესრულებულია $a'(S)\geq 0$, $a''(S)\leq 0$ პირობები, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ასიმპტოტურ ფორმულებს:

$$\|U(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)}\to 0, \qquad \|V(\cdot,t)\|_{W_2^1(\Omega)}\to 0, \qquad \text{როცა} \quad t\to\infty.$$

§3. არაერთგვაროვანი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის გამოკვლევა $a(S)=b(S)$ შემთხვევისთვის

განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{3.1}$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0\,,\ U(1,t)=\psi_1,\ V(1,t)=\psi_2,\ t\geq 0\,, \tag{3.2}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ V(x,0)=V_0(x),\ x\in\Omega\,, \tag{3.3}$$

სადაც

$$S(x,t)=1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\,, \tag{3.4}$$

$\psi_1=Const\geq 0,\ \psi_2=Const\geq 0,\ \psi_1^2+\psi_2^2\neq 0,$ ხოლო $a,\ U_0$ და V_0 კი თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

ჩავთვალოთ, რომ $(U,V)=(U(x,t),V(x,t))$ არის Q არეზე (3.1) - (3.4) ამოცანის ისეთი ამონახსნი, რომ $U,V,\ \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial t},\ \frac{\partial V}{\partial t},$ $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ფუნქციები არიან $C^0([0,\infty);L_2(\Omega))$ კლასიდან, $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t},$ $\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial t}$ ფუნქციები $-C^0((0,\infty);L_2(\Omega))$ კლასიდან, ხოლო $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ ფუნქციები კი – $L_{2,loc}((0,\infty);L_2(\Omega))$ კლასიდან [8, 9, 10, 25, 63, 64].

სამართლიანია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. თუ $a(S)=S^p,\ p\in(-1/2;0)\cup(0;1]$ და U_0,V_0 ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$U_0(0)=V_0(0)=0,\quad U_0(1)=\psi_1,\quad V_0(1)=\psi_2,$$

$$U_0, V_0 \in W_2^2(\Omega),$$

მაშინ (3.1) - (3.4) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური დამოკიდებულებები:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}=\psi_1+O\left(t^{-1-p}\right),\quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}=\psi_2+O\left(t^{-1-p}\right), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=O\left(t^{-1}\right),\quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=O\left(t^{-1}\right), \tag{3.6}$$

თეორემის დასამტკიცებლად წინასწარ ვაჩვენოთ რამდენიმე დამხმარე დებულების სამართლიანობა. უპირველეს ყოვლისა გადავიდეთ აპრიორული შეფასებების მიღებაზე.

ლ ე მ ა 3.1. თუ $p\in(-1/2;0)\cup(0;1]$ მაშინ (3.1) - (3.4) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შეფასებები:

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau \le C,\quad \int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau \le C,\quad t\ge 0.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გავაწარმოოთ (3.1) სისტემის პირველი განტოლება t ცვლადით

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[S^p\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}+pS^{p-1}\left(\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]^3+\frac{\partial U}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^2\right)\right]. \tag{3.7}$$

გავამრავლოთ (3.7) განტოლება $\frac{\partial U}{\partial t}$ სიდიდეზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე. შედეგად გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx+\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right)^2 dx+p\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}dx+$$

$$+p\int_0^1 S^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}dx=0. \tag{3.8}$$

ამ ტოლობის $(0,t)$ ინტერვალზე ინტეგრებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx+\int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau+\frac{p}{4}\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4 dx-$$

$$-\frac{p(p-1)}{4}\int_0^t\int_0^1 S^{p-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau+$$

$$+\frac{p}{2}\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dxd\tau=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right)^2 dx+$$

$$+\frac{p}{4}\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}\right)^4 dx.$$

რადგან $S(x,t)\geq 1$, ამიტომ თუ $0<p\leq 1$, მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა

$$\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx+2\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau+$$

$$+p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dxd\tau\leq C.$$

ანალოგიურად, (3.1) სისტემის მეორე განტოლების გამოყენებით გვექნება

$$\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx+2\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau+$$

$$+p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dxd\tau\leq C$$

და შესაბამისად,

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]dx+2\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2\right]dxd\tau+$$

$$+ p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau \le C.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau = p\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx -$$

$$- p\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V(x,0)}{\partial x}\right)^2 dx - p(p-1)\int_0^t\int_0^1 S^{p-2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dxd\tau.$$

მაშასადამე, როცა $0 < p \le 1$, მაშინ გვაქვს

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]dx+2\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2\right]dxd\tau \le C. \qquad (3.9)$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau \le \int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau,$$

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau \le \int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau,$$

მივიღებთ ლემა 3.1-ის სამართლიანობას $0 < p \le 1$ შემთხვევისთვის.

ახლა დავამტკიცოთ ლემა 3.1 იმ შემთხვევაში, როცა $-1/2 < p < 0$. გავამრავლოთ (3.1) სისტემის პირველი განტოლება $\frac{\partial U}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ Q_t არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 S^p\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial x}\,dxd\tau=0,$$

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau+\frac{1}{2}\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx-$$

$$-\frac{p}{2}\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dxd\tau=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}\right)^2 dx.$$

საიდანაც გამომდინარეობს შეფასება

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau\le C.$$

ანალოგიურად,

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau\le C.$$

მაშასადამე ლემა 3.1 დამტკიცებულია..

ლ ე მ ა 3.2. როცა $p\in(-1/2;0)\cup(0;1]$, მაშინ $S(x,t)$ ფუნქციისთვის სამართლიანია შეფასება

$$c\varphi^{\frac{1}{1+2p}}(t)\le S(x,t)\le C\varphi^{\frac{1}{1+2p}}(t),\qquad t\ge 0,\ x\in\Omega,$$

სადაც

$$\varphi(t)=1+\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dxd\tau,\tag{3.10}$$

ხოლო $\sigma_1=S^p\frac{\partial U}{\partial x}$, $\sigma_2=S^p\frac{\partial V}{\partial x}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გადავწეროთ (3.4) შემდეგი ფორმით

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2,\qquad S(x,0)=1.$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ S^{2p} ფუნქციაზე, მივიღებთ

$$\frac{1}{1+2p}\frac{\partial S^{1+2p}}{\partial t}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 S^{2p}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 S^{2p}.$$

ჩავწეროთ (2.1) სისტემა შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial \sigma_1}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}.$$

გვაქვს

$$\frac{1}{1+2p}\frac{\partial S^{1+2p}}{\partial t}=\sigma_1^2+\sigma_2^2, \tag{3.11}$$

$$\sigma_1^2(x,t)=\int_0^1\sigma_1^2(y,t)dy+2\int_0^1\int_y^x\sigma_1(\xi,t)\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t}\partial\xi\, dy,$$

$$\sigma_2^2(x,t)=\int_0^1\sigma_2^2(y,t)dy+2\int_0^1\int_y^x\sigma_2(\xi,t)\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}d\xi\, dy.$$

ლემა 3.1-ისა და (3.10), (3.11) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{1+2p}S^{1+2p}=\int_0^t\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)d\tau+\frac{1}{1+2p}=$$

$$=\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2(y,\tau)+\sigma_2^2(y,\tau)\right)dyd\tau+$$

$$+2\int_0^t\int_0^1\int_y^x\sigma_1(\xi,\tau)\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial\tau}\,d\xi dy\,d\tau+$$

$$+2\int_0^t\int_0^1\int_y^x\sigma_2(\xi,\tau)\frac{\partial V(\xi,\tau)}{\partial\tau}\,d\xi dy\,d\tau+\frac{1}{1+2p}\le$$

$$\le 2\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2(y,\tau)+\sigma_2^2(y,\tau)\right)dyd\tau+C+\frac{1}{1+2p}\le C_1\varphi(t).$$

ე.ი

$$S(x,t)\le C\varphi^{\frac{1}{1+2p}}(t). \tag{3.12}$$

ანალოგიურად,

$$\frac{1}{1+2p}S^{1+2p} = \int_0^t\int_0^1 \left(\sigma_1^2(y,\tau)+\sigma_2^2(y,\tau)\right) dyd\tau +$$

$$+ 2\int_0^t\int_0^1\int_y^x \sigma_1(\xi,\tau)\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial\tau}\, d\xi\, dy\, d\tau +$$

$$+ 2\int_0^t\int_0^1\int_y^x \sigma_2(\xi,\tau)\frac{\partial V(\xi,\tau)}{\partial\tau}\, d\xi dy\, d\tau + \qquad (3.13)$$

$$+ \frac{1}{1+2p} \geq \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 \left(\sigma_1^2(y,t)+\sigma_2^2(y,t)\right) dyd\tau -$$

$$-C_2 = \frac{1}{2}\varphi(t) - C_3.$$

რადგან $1+2p>0$ და (3.4) ტოლობიდან გამომდინარე $S(x,t)\geq 1$, ამიტომ

$$C_3 S^{1+2p} \geq C_3. \qquad (3.14)$$

შევკრიბოთ (3.13) და (3.14) უტოლობები, მივიღებთ

$$\left(\frac{1}{1+2p}+C_3\right)S^{1+2p} \geq \frac{1}{2}\varphi(t),$$

ანუ

$$S(x,t) \geq c\varphi^{\frac{1}{1+2p}}(t). \qquad (3.15)$$

საბოლოოდ, (3.12) და (3.15) შეფასებებიდან გამომდინარეობს ლემა 3.2-ის სამართლიანობა.

ლ ე მ ა 3.3. თუ $p\in(-1/2\,;\,0)\cup(0;1]$, მაშინ როცა $t\geq 1$, სამართლიანია შეფასება

$$c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t) \leq \int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right) dx \leq C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\ .$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლემა 3.2-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_0^1 \left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right) dx = \int_0^1 S^{2p}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx \geq$$

$$\geq c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx \geq$$

$$\geq c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left\{\left[\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} dx\right]^2+\left[\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x} dx\right]^2\right\} =$$

$$=\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right) c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t),$$

ანუ

$$\int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right) dx \geq c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t). \tag{3.16}$$

როცა $0<p\leq 1$, მაშინ (3.9) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx \leq C, \quad \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx \leq C, \quad t\geq 0. \tag{3.17}$$

გავამრავლოთ (3.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად U და V ფუნქციებზე. Ω არეზე ინტეგრებით (3.2) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\int_0^1 U\frac{\partial U}{\partial t} dx + \int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx = \psi_1\sigma_1(1,t),$$

$$\int_0^1 V\frac{\partial V}{\partial t} dx + \int_0^1 S^p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx = \psi_2\sigma_2(1,t).$$

საბოლოოდ, თუ გავითვალისწინებთ უკანასკნელ ტოლობებს, (3.12), (3.16), (3.17) შეფასებებს, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას და გამოვიყენებთ მაქსიმუმის პრინციპს

$$|U(x,t)|\leq \max_{0\leq y\leq 1}|U_0(y)|,$$

$$|V(x,t)| \le \max_{0\le y\le 1} |V_0(y)|, \quad 0\le x\le 1, \quad t\ge 0,$$

გვექნება

$$\left\{\int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right)dx\right\}^2 \le 2\left\{\int_0^1 \sigma_1^2(x,t)dx\right\}^2 +$$

$$+ 2\left\{\int_0^1 \sigma_2^2(x,t)dx\right\}^2 \le 2C_1\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\times$$

$$\times\left[\left\{\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right\}^2 + \left\{\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx\right\}^2\right] \le$$

$$\le 4C_1\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[(\psi_1\sigma_1(1,t))^2 + \left(\int_0^1 U\frac{\partial U}{\partial t}dx\right)^2 +\right.$$

$$\left. + (\psi_2\sigma_2(1,t))^2 + \left(\int_0^1 V\frac{\partial V}{\partial t}dx\right)^2\right] \le 4C_1\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\times$$

$$\times\left[\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\left(\sigma_1^2(1,t)+\sigma_2^2(1,t)\right)+\right.$$

$$\left. + 2\left\{\left(\max_{0\le y\le 1}|U_0(y)|\right)^4 + \left(\max_{0\le y\le 1}|V_0(y)|\right)^4 + C_2\right\}\right] \le$$

$$\le 4C_1\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\left(\int_0^1 \frac{\partial\sigma_1^2}{\partial x}dx +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \sigma_1^2(0,t) + \int_0^1 \frac{\partial\sigma_2^2}{\partial x}dx + \sigma_2^2(0,t)\right) + C_3\right] \le$$

$$\le 4C_1\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\left\{\int_0^1 \sigma_1^2 dx + \int_0^1\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\right)^2 dx +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^1 \sigma_2^2 dx + \int_0^1\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\right)^2 dx + C_4\right\} + C_3\right] \le 4C_1\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\times$$

$$\times\left[\left(\psi_1^2+\psi_1^2\right)\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx+C_5\right]\le$$

$$\le 4C_1\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[\left(\psi_1^2+\psi_1^2\right)\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx+\right.$$

$$\left.+\frac{C_5}{\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)}\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx\right]\le$$

$$\le C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\int_0^1\left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right)dx,$$

ე.ი.

$$\int_0^1\left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right)dx\le C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t).$$

უკანასკნელი შეფასებისა და (3.16) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს ლემა 3.3-ის სამართლიანობა იმ შემთხვევაში, როცა $p\in(0,1]$.

ახლა დავამტკიცოთ ლემა 3.3 იმ შემთხვევისთვისაც, როცა $p\in(-1/2;0)$. ლემა 3.2-ის თანახმად გვაქვს

$$\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx=\int_0^1 S^{2p}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\le$$

$$\le C\varphi^{\frac{p}{1+2p}}(t)\int_0^1 S^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx. \qquad (3.18)$$

მიღებული (3.18) უტოლობის მარჯვენა მხარის შესაფასებლად (3.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები გავამრავლოთ შესაბამისად $t\frac{\partial U}{\partial t}$ და $t\frac{\partial V}{\partial t}$ მულტიპლიკატორებზე და ვაინტეგროთ Q_t არეზე. მივიღებთ

$$\int_0^t\int_0^1 \tau\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 dx d\tau - \int_0^t\int_0^1 \tau \frac{\partial}{\partial x}\left[S^p \frac{\partial U}{\partial x}\right]\frac{\partial U}{\partial \tau} dx\, d\tau = 0.$$

$$\int_0^t\int_0^1 \tau\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 dx d\tau + \frac{t}{2}\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx d\tau -$$

$$- \frac{p}{2}\int_0^t\int_0^1 \tau\, S^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx d\tau = 0.$$

აქედან, რადგან $-1/2 < p < 0$, გვექნება

$$t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx \le \int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx d\tau.$$

ანალოგიურად,

$$t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx \le \int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx d\tau.$$

უკანასკნელი უტოლობების შეკრებით ვღებულობთ

$$t\int_0^1 S^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx \le \int_0^t\int_0^1 S^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx d\tau. \qquad (3.19)$$

გვაქვს

$$S^p \frac{\partial S}{\partial t} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] S^p,$$

ანუ

$$\frac{1}{1+p}\frac{\partial S^{1+p}}{\partial t} = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] S^p.$$

მიღებული ტოლობის Q_t არეზე ინტეგრება გვაძლევს

$$\int_0^t\int_0^1 S^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx d\tau = \frac{1}{1+p}\int_0^1 S^{p+1} dx - \frac{1}{1+p}. \qquad (3.20)$$

რადგან $p+1>0$, ამიტომ (3.15) შეფასებიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა

$$c\varphi^{\frac{1+p}{1+2p}}(t)\le \int_0^1 S^{1+p}dx\ . \tag{3.21}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.18), (3.19), (3.20) და (3.21) თანაფარდობებს მივიღებთ

$$\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx \le C_1\varphi^{\frac{p}{1+2p}}(t)\int_0^1 S^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx \le$$

$$\le C_1\varphi^{\frac{-1}{1+2p}}(t)\varphi^{\frac{1+p}{1+2p}}(t)\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^1 S^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau \le$$

$$\le C_2\varphi^{\frac{-1}{1+2p}}(t)\varphi^{\frac{1+p}{1+2p}}(t)\frac{1}{t}\int_0^1 S^{p+1}dx \le C\varphi^{\frac{-1}{1+2p}}(t)\frac{1}{t}\left\{\int_0^1 S^{p+1}dx\right\}^2.$$

ე.ი. საბოლოოდ გვექნება

$$\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx \le C\varphi^{\frac{-1}{1+2p}}(t)\frac{1}{t}\left\{\int_0^1 S^{p+1}dx\right\}^2. \tag{3.22}$$

გავამრავლოთ (3.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად U და V ფუნქციებზე და ვაინტეგროთ Q_t არეში

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1\frac{\partial U^2}{\partial\tau}dx\,d\tau = \int_0^t S^p\frac{\partial U}{\partial x}U\Big|_0^1 d\tau-\int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dxd\tau,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 U^2dx+\int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dxd\tau=\int_0^t\psi_1\sigma_1(1,\tau)d\tau+C.$$

ანალოგიურად,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 V^2dx+\int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2dxd\tau=\int_0^t\psi_2\sigma_2(1,\tau)d\tau+C.$$

მიღებული და (3.20) ტოლობების გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (U^2+V^2)dx = \int_0^t (\psi_1\sigma_1(1,\tau)+\psi_2\sigma_2(1,\tau))d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^1 S^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau + C =$$

$$= \int_0^t (\psi_1\sigma_1(1,\tau)+\psi_2\sigma_2(1,\tau))d\tau - \frac{1}{1+p}\int_0^1 S^{p+1}dx + \frac{1}{1+p} + C.$$

უკანასკნელ ტოლობაში კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენება გვაძლევს

$$\left[\int_0^1 S^{p+1}dx\right]^2 \le \left[C_1\int_0^t (\psi_1\sigma_1(1,\tau)+\psi_2\sigma_2(1,\tau))d\tau + C_2\right]^2 \le$$

$$\le 2C_3\left\{\int_0^t (\psi_1\sigma_1(1,\tau)+\psi_2\sigma_2(1,\tau))d\tau\right\}^2 + C_4 \le$$

$$\le 2C_3 t\int_0^t (\psi_1\sigma_1(1,\tau)+\psi_2\sigma_2(1,\tau))^2 d\tau + C_4 \le 4C_3(\psi_1^2+\psi_2^2)\times$$

$$\times t\int_0^t\left[\int_0^1\sigma_1^2dx + \int_0^1\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^1\sigma_2^2dx + \int_0^1\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\right)^2 dx + C_5\right]d\tau + C_4,$$

$$\left[\int_0^1 S^{p+1}dx\right]^2 \le 4C_3(\psi_1^2+\psi_2^2)t\left[\int_0^t\int_0^1(\sigma_1^2+\sigma_2^2)dxd\tau +\right.$$

$$\left. + \int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau + C_5\right] + C_4.$$

ლემა 3.1-ის გავითვალისწინებთ უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\left[\int_0^1 S^{p+1}dx\right]^2 \le Ct\varphi(t) + C_4. \qquad (3.23)$$

საბოლოოდ, (3.22) და (3.23) დამოკიდებულებებიდან როცა $t \ge 1$, გამომდინარეობს ლემა 3.3-ის სამართლიანობა.

ლ ე მ ა 3.4. ადგილი აქვს შეფასებებს:

$$ct^{2p} \le \int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right) dx \le Ct^{2p}, \tag{3.24}$$

$$ct \le S(x,t) \le Ct, \quad x \in \Omega, \quad t \ge 1. \tag{3.25}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right) dx,$$

გვექნება

$$c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t) \le \frac{d\varphi(t)}{dt} \le C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t), \quad t \ge 1.$$

აქედან კი ინტეგრებით ვღებულობთ

$$ct^{1+2p} \le \varphi(t) \le Ct^{1+2p}, \quad t \ge 1.$$

უკანასკნელი შეფასება ლემა 3.2 და ლემა 3.3-თან ერთად გვაძლევს (3.24), (3.25) შეფასებებს.

ამრიგად, ლემა 3.4 დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 3.5. $\frac{\partial U}{\partial t}$ და $\frac{\partial V}{\partial t}$ ფუნქციებისთვის სამართლიანია შეფასება

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right] dx \le Ct^{-2}, \quad t \ge 1.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გათვალისწინებით (3.8) გვაძლევს

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^1 S^p \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\right)^2 dx \le 2p^2 \int_0^1 S^{p-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^6 dx + \tag{2.26}$$

$$+2p^2 \int_0^1 S^{p-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4 dx.$$

თუ გამოვიყენებთ (3.24), (3.25) შეფასებებს, $\sigma_1 = S^p \frac{\partial U}{\partial x}$,

$\sigma_2 = S^p \frac{\partial V}{\partial x}$ დამოკიდებულებებს და

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\right)^2 dx = -\int_0^1 \sigma_1 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} dx ,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\right)^2 dx = -\int_0^1 \sigma_2 \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2} dx$$

ტოლობებს, (3.26) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + ct^p \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\right)^2 dx \le C_1 \frac{t^{p-2}}{t^{6p}} \int_0^1 \left(\sigma_1^6 + \sigma_1^2 \sigma_2^4\right) dx \le$$

$$\le C_1 t^{-5p-2} \int_0^1 \sigma_1^2(x,t)\, dx \left(\left\{\max_{0\le x\le 1} \sigma_1^2(x,t)\right\}^2 + \left\{\max_{0\le x\le 1} \sigma_2^2(x,t)\right\}^2\right) \le$$

$$\le C_2 t^{-3p-2} \left(\left\{ \int_0^1 \sigma_1^2\, dx + 2\left[\int_0^1 \sigma_1^2\, dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_0^1 \sigma_2^2 dx + 2\left[\int_0^1 \sigma_2^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \right) \le$$

$$\le C_2 t^{-3p-2} \left(\left\{ \int_0^1 \sigma_1^2 dx + 2\left[\int_0^1 \sigma_1^2 dx\right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{4}} \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_0^1 \sigma_2^2 dx + 2\left[\int_0^1 \sigma_2^2 dx\right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{4}} \right\}^2 \right) \le$$

$$\le C_3 t^{p-2} + C_4 t^{-3p-2} t^{3p} \left(\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right) \le$$

$$\le C_3 t^{p-2} + C_5 t^{-p-4} + \frac{c t^p}{4} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \right).$$

აქედან კი, რადგან $p-2>-p-4$, გვაქვს

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{c}{4} t^p \int_0^1 \left[3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right)^2 \right] dx \le C t^{p-2}, \quad t \ge 1.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{c}{4} t^p \int_0^1 \left[3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 \right] dx \le C t^{p-2}, \quad t \ge 1.$$

უკანასკნელი უტოლობების შეკრებით ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] dx +$$

$$+ \frac{c}{2} t^p \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right)^2 \right] dx \le C t^{p-2}, \quad t \ge 1. \tag{3.27}$$

პუანკარეს უტოლობის შემდეგი ფორმით გამოყენება

$$\left\| \frac{\partial U}{\partial t} \right\| \le \left\| \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial t} \right\| \le \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right\|,$$

და (3.27) გვაძლევს

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \frac{c t^p}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 \right] dx \le C t^{p-2}$$

საიდანაც გრონუოლის უტოლობისა და პირველი პარაგრაფის ლემა 1.2-ის გამოყენებით ვღებულობთ ლემა 3.5-ის სამართლიანობას.

ლ ე მ ა 3.6. $\frac{\partial S}{\partial x}$ ფუნქციისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| dx \le Ct^{-p}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გავაწარმოოთ (3.11) ტოლობა x ცვლადით

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[S^{2p}\frac{\partial S}{\partial x}\right] = 2\sigma_1\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + 2\sigma_2\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \\ = 2\sigma_1\frac{\partial U}{\partial t} + 2\sigma_2\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{3.28}$$

ლემა 3.4 და ლემა 3.5-დან კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით გამომდინარეობს, რომ

$$\left|\int_0^1 \sigma_1\frac{\partial U}{\partial t}dx\right| \le Ct^p t^{-1} = Ct^{p-1},$$

$$\left|\int_0^1 \sigma_2\frac{\partial V}{\partial t}dx\right| \le Ct^p t^{-1} = Ct^{p-1},$$

საიდანაც (3.25) და (3.28) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$S^{2p}\frac{\partial S}{\partial x} = \int_0^t \left(2\sigma_1\frac{\partial U}{\partial \tau} + 2\sigma_2\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)d\tau,$$

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| dx \le \frac{1}{c}t^{-2p}\int_0^t C_1\tau^{p-1}d\tau = Ct^{-p}.$$

ამრიგად, ლემა 3.6 დამტკიცებულია.

ახლა უკვე შესაძლებელია ამ პარაგრაფის ძირითადი თეორემის დამტკიცება. ამისთვის შევაფასოთ $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ წარმოებული $L_1(\Omega)$ სივრცის ნორმით. გვაქვს:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\sigma_1 S^{-p},\qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial U}{\partial t}S^{-p}-p\sigma_1 S^{-p-1}\frac{\partial S}{\partial x},$$

$$\sigma_1^2(x,t)\le \int_0^1 \sigma_1^2(y,t)dy+2\int_0^1|\sigma_1(y,t)|\left|\frac{\partial U(y,t)}{\partial t}\right|dy\le$$

$$\le C_1 t^{2p}+C_2 t^{-2}.$$

აქედან კი, როცა $p>-1$ გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\sigma_1(x,t)\le Ct^p\ ,\quad t\ge 1. \tag{3.29}$$

საბოლოოდ, ლემა 3.5, ლემა 3.6-სა და (3.25), (3.29) თანაფარდობების გათვალისწინებით ვასკვნით

$$\int_0^1\left|\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|dx\le\int_0^1\left|\frac{\partial U}{\partial t}S^{-p}\right|dx+|p|\int_0^1\left|\sigma_1 S^{-p-1}\frac{\partial S}{\partial x}\right|dx\le$$

$$\le\left[\int_0^1 S^{-2p}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^1\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}+|p|\int_0^1\left|\sigma_1 S^{-p-1}\frac{\partial S}{\partial x}\right|dx\le Ct^{-1-p}.$$

მაშასადამე, გვაქვს

$$\int_0^1\left|\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right|dx\le Ct^{-1-p},\quad t\ge 1.$$

აქედან კი, შემდეგი ტოლობის მხედველობაში მიღებით

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}=\int_0^1\frac{\partial U(y,t)}{\partial y}dy+\int_0^1\int_y^x\frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial\xi^2}\,d\xi\,dy,$$

გამომდინარეობს შეფასება

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}-\psi_1=\int_0^1\int_y^x\frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial\xi^2}d\xi\,dy\le\int_0^1\left|\frac{\partial^2 U(y,t)}{\partial y^2}\right|dy\le Ct^{-1-p}.$$

ანალოგიურად,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} - \psi_2 \le Ct^{-1-p}.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს (3.5) ასიმპტოტურ დამოკიდებულებებს.

ახლა დავამტკიცოთ (3.6) ფორმულების სამართლიანობა. გავამრავლოთ (3.8) ტოლობა t^2-ზე და ვაინტეგროთ $(0,t)$ არეზე. გვაქვს

$$\frac{t^2}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx - \int_0^t\int_0^1 \tau\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 dxd\tau + \int_0^t\int_0^1 \tau^2 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, dx}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+ p\int_0^t\int_0^1 \tau^2 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, dx} dxd\tau +$$

$$+ p\int_0^t\int_0^1 \tau^2 S^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, dx} dxd\tau = 0.$$

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1 \tau^2 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, dx}\right)^2 dxd\tau \le \int_0^t\int_0^1 \tau\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+ p^2\int_0^t\int_0^1 \tau^2 S^{p-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^6 dxd\tau +$$

$$+ p^2\int_0^t\int_0^1 \tau^2 S^{p-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4 dxd\tau.$$

აქედან ლემა 3.5-სა და (3.5), (3.25) შეფასებების გათვალისწინებით გვაქვს

$$\int_0^t\int_0^1 \tau^2 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, \partial x}\right)^2 dxd\tau \le Ct^{p+1}. \qquad (3.30)$$

ეს უტოლობა, (3.25) შეფასების გამო შეიძლება ასეც გადაიწეროს

$$\int_0^1 \tau^{p+2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x} \right)^2 dx d\tau \le C t^{p+1}. \tag{3.31}$$

ანალოგიურად,

$$\int_0^1 \tau^{p+2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial x} \right)^2 dx d\tau \le C t^{p+1}. \tag{3.32}$$

გავამრავლოთ (3.7) ტოლობა $t^3 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობისა და (3.5), (3.25), (3.30), (3.31), (3.32) შეფასებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\int_0^t \int_0^1 \tau^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 \tau^3 S^p \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x} \right]^2 dx d\tau +$$

$$+ p \int_0^t \int_0^1 \tau^3 S^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x} \right] dx d\tau +$$

$$+ p \int_0^t \int_0^1 \tau^3 S^{p-1} \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x} \right] dx d\tau = 0,$$

$$\int_0^t \int_0^1 \tau^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^1 \tau^3 S^p \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x} \right)^2 dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^t \int_0^1 \tau^2 S^p \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \, x} \right)^2 dx d\tau + \frac{p}{2} \int_0^t \int_0^1 \tau^3 S^{p-1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x} \right)^2 dx d\tau -$$

$$- p t^3 \int_0^1 S^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} dx + 3p \int_0^t \int_0^1 \tau^2 S^{p-1} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^3 \times$$

$$\times\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\,dxd\tau + p(p-1)\int_0^t\int_0^1\tau^3 S^{p-2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^5+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\times$$

$$\times\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}dxd\tau + 3p\int_0^t\int_0^1\tau^3 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau\ -$$

$$-\,pt^3\int_0^1 S^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\,dx +$$

$$+\,3p\int_0^t\int_0^1\tau^2 S^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\,dxd\tau +$$

$$+\,p(p-1)\int_0^t\int_0^1\tau^3 S^{p-2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\tau}\,dxd\tau +$$

$$+\,p\int_0^t\int_0^1\tau^3 S^{p-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial\tau}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+\,2p\int_0^t\int_0^1\tau^3 S^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\,dx\,d\tau\,,$$

$$t^3\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right)^2 dx \le 3\int_0^t\int_0^1\tau^2 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+\,C_1\int_0^t\tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+\frac{t^3}{4}\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right)^2 dx + C_2 t^3\int_0^1 S^{p-2}dx +$$

$$+\int_0^t\int_0^1\tau^2 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau\ +$$

$$+\,C_3\int_0^t\int_0^1\tau^2 S^{p-2}dxd\tau\ +\int_0^t\int_0^1\tau^2 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+C_4\int_0^t\int_0^1\tau^4S^{p-4}dxd\tau+C_5\int_0^t\tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2U}{\partial\tau\partial x}\right)^2dxd\tau+$$

$$+\frac{t^3}{4}\int_0^1S^p\left(\frac{\partial^2U}{\partial t\partial x}\right)^2dx+C_6t^{p+1}+C_7\int_0^t\tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dxd\tau+$$

$$+C_8\int_0^t\int_0^1\tau^2S^{p-2}dxd\tau+\int_0^t\int_0^1\tau^2S^p\left(\frac{\partial^2U}{\partial\tau\partial x}\right)^2dxd\tau+$$

$$+C_9\int_0^t\int_0^1\tau^4S^{p-4}dxd\tau+C_{10}\int_0^t\tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dxd\tau+$$

$$+C_{11}\int_0^t\tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dxd\tau+C_{11}\int_0^t\tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dxd\tau\le C_{12}t^{p+1},$$

$$ct^{p+3}\int_0^1\left(\frac{\partial^2U}{\partial t\,\partial x}\right)^2dx\le Ct^{p+1}.$$

აქედან გვაქვს

$$\int_0^1\left(\frac{\partial^2U}{\partial t\partial x}\right)^2dx\le Ct^{-2}. \tag{3.33}$$

თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ თანაფარდობას

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\int_0^1\frac{\partial U(y,t)}{\partial t}dy+\int_0^1\int_y^x\frac{\partial^2U(\xi,t)}{\partial t\,\partial\xi}d\xi dy\le Ct^{-1}+$$

$$+\int_0^1\int_y^x\frac{\partial^2U(\xi,t)}{\partial t\,\partial\xi}d\xi\,dy\le Ct^{-1}+\left[\int_0^1\left(\frac{\partial^2U(y,t)}{\partial t\,\partial y}\right)^2dy\right]^{\frac12},$$

(3.33) შეფასებიდან ვღებულობთ შემდეგ ასიმპტოტურ ფორმულას

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=O\left(t^{-1}\right).$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = O(t^{-1}).$$

ამრიგად, თეორემა 3.1 დამტკიცებულია.

§4. პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა გასაშუალებული მოდელისთვის

შევისწავლოთ (0.1), (0.3) ინტეგრო-დიფერენციალური სისტემა, იმ შემთხვევაში, როცა $a(S)=S^p$, $b(S)=S^q$, სადაც საზოგადოდ $p \neq q$.

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S^p \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = S^q \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{4.1}$$

$$S(t) = 1 + \int_0^t \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right] dx\, d\tau, \tag{4.2}$$

და Q_t არეში მისთვის გამოვიკვლიოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,\ U(1,t) = \psi_1,\ V(1,t) = \psi_2,\ t \geq 0, \tag{4.3}$$

$$U(x,0) = U_0(x),\ V(x,0) = V_0(x),\ x \in \Omega, \tag{4.4}$$

სადაც $\psi_1 = Const \geq 0$, $\psi_2 = Const \geq 0$, $\psi_1^2 + \psi_2^2 \neq 0$.

ვთქვათ, U და V ფუნქციები წარმოადგენენ (4.1) - (4.4) ამოცანის ამონახსნს, რომლებიც აკმაყოფილებენ §3-ში მოყვანილ პირობებს. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. ვთქვათ, $1+p+q>0$, $p>-1$, $q>-1$, $U_0(0)=V_0(0)=0$, $U_0(1)=\psi_1$, $V_0(1)=\psi_2$, $U_0, V_0 \in W_2^2(0,1)$, მაშინ (4.1)-(4.4) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური დამოკიდებულებები:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}=\psi_1+O\left(t^{-1-p}\right), \quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial x}=\psi_2+O\left(t^{-1-q}\right), \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=O\left(t^{-1}\right), \quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=O\left(t^{-1}\right). \tag{4.6}$$

როგორც წინა პარაგრაფში ამ შემთხვევაშიც, თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება რამდენიმე დამხმარე ლემა.

ლ ე მ ა 4.1. როცა $1+p+q>0$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$c\varphi^{\frac{1}{1+p+q}}(t)\le S(t)\le C\varphi^{\frac{1}{1+p+q}}(t), \qquad t\ge 0,$$

სადაც

$$\varphi(t)=1+\int_0^t\int_0^1\left(S^{q-p}\sigma_1^2+S^{p-q}\sigma_2^2\right)dx\,d\tau,$$

ხოლო $\sigma_1=S^p\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\sigma_2=S^q\dfrac{\partial V}{\partial x}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გადავწეროთ (4.2) შემდეგი სახით

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx, \qquad S(0)=1. \tag{4.7}$$

გადავიდეთ აპრიორული შეფასებების მიღებაზე. გავამრავლოთ (4.7) განტოლება S^{p+q} ფუნქციაზე.

გვაქვს

$$\frac{1}{1+p+q}\frac{\partial S^{1+p+q}}{\partial t}=\int_0^1\left(S^{q-p}\sigma_1^2+S^{p-q}\sigma_2^2\right)dx.$$

ამ ტოლობის $(0,t)$ არეზე ინტეგრების შედეგად ვღებულობთ

$$\frac{1}{1+p+q}S^{1+p+q}=\int_0^t\int_0^1\left(S^{q-p}\sigma_1^2+S^{p-q}\sigma_2^2\right)dxd\tau+\frac{1}{1+p+q}.$$

თუ $0<\frac{1}{1+p+q}\le 1$, მაშინ უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება

$$\varphi^{\frac{1}{1+p+q}}(t)\le S(t)\le[(1+p+q)\varphi(t)]^{\frac{1}{1+p+q}},$$

ხოლო, როცა $\frac{1}{1+p+q}\ge 1$, მაშინ

$$[(1+p+q)\varphi(t)]^{\frac{1}{1+p+q}}\le S(t)\le\varphi^{\frac{1}{1+p+q}}(t).$$

ე.ი. ლემა 4.1 დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 4.2. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$c\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t)\int_0^1\left(S^{q-p}\sigma_1^2(x,t)+\right.$$

$$\left.+S^{p-q}\sigma_2^2(x,t)\right)dx\le C\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t),\qquad t\ge 1.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლემა 4.1-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_0^1\left(S^{q-p}\sigma_1^2+S^{p-q}\sigma_2^2\right)dx=\int_0^1 S^{p+q}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\ge$$

$$\ge c\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t)\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\ge c\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t)$$

$$\times\left\{\left[\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\,dx\right]^2+\left[\int_0^1\frac{\partial V}{\partial x}\,dx\right]^2\right\}=\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)c\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t),$$

ანუ

$$\int_0^1 \left(S^{q-p}\sigma_1^2(x,t)+S^{p-q}\sigma_2^2(x,t)\right)dx \geq c\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t) \tag{4.8}$$

გავამრავლოთ (4.1) სისტემის პირველი განტოლება $S^{-p}\dfrac{\partial U}{\partial t}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ Q_t არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა და (4.3), (4.4) პირობების გათვალისწინებით, გვექნება

$$\int_0^t\int_0^1 S^{-p}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dxd\tau+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}\right)^2 dx=0.$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\leq C. \tag{4.9}$$

ანალოგიურად,

$$\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx\leq C. \tag{4.10}$$

მიღებული (4.9) და (4.10) უტოლობებისა და ლემა 4.1-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_0^1\left(S^{q-p}\sigma_1^2+S^{p-q}\sigma_2^2\right)dx=S^{p+q}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\leq$$

$$\leq C\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t).$$

უკანასკნელი უტოლობა (4.8) შეფასებასთან ერთად ამტკიცებს ლემა 4.2-ის სამართლიანობას.

ლ ე მ ა 4.3. როცა $t\geq 1$, მაშინ $S(t)$ ფუნქციისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$ct\leq S(t)\leq Ct,\quad t\geq 1.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\int_0^1\left(S^{q-p}\sigma_1^2(x,t)+S^{p-q}\sigma_2^2(x,t)\right)dx.$$

ლემა 4.2-ის გამოყენება გვაძლევს

$$c\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t)\le\frac{d\varphi(t)}{dt}\le C\varphi^{\frac{p+q}{1+p+q}}(t)$$

და ინტეგრებით გვექნება

$$ct^{1+p+q}\le\varphi(t)\le Ct^{1+p+q},\qquad t\ge1.$$

უკანასკნელი შეფასებისა და ლემა 4.1-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ ლემა 4.3-ის სამართლიანობას.

ლ ე მ ა 4.4. $\frac{\partial U}{\partial t}$ და $\frac{\partial V}{\partial t}$ ფუნქციებისთვის სამართლიანია შეფასებები:

$$\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2dx\le Ct^{-2},\quad \int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2dx\le Ct^{-2},\quad t\ge1$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გავაწარმოოთ (4.1) სისტემის პირველი განტოლება t ცვლადით

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=S^p\frac{\partial^3U}{\partial t\partial x^2}+pS^{p-1}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\frac{\partial^2U}{\partial x^2}.\qquad(4.11)$$

გავამრავლოთ (4.11) განტოლება სკალარულად $\frac{\partial U}{\partial t}$ ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობისა და (4.9), (4.10) თანაფარდობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2dx+\int_0^1S^p\left(\frac{\partial^2U}{\partial t\partial x}\right)^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1S^p\left(\frac{\partial^2U}{\partial t\partial x}\right)^2dx+$$

$$+\frac{p^2}{2}\int_0^1 S^{p-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left\{\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}^2 dx \le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x}\right)^2 dx + Ct^{p-2}.$$

ე.ი.

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx+\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x}\right)^2 dx \le Ct^{p-2},\quad t\ge 1. \tag{4.12}$$

ანალოგიურად,

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx+\int_0^1 S^q\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial x}\right)^2 dx \le Ct^{q-2},\quad t\ge 1. \tag{4.13}$$

ამრიგად, თუ გამოვიყენებთ პუანკარეს უტოლობას

$$\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx \le \int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x}\right)^2 dx,$$

საბოლოოდ (4.12) უტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + ct^p\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx \le Ct^{p-2},$$

აქედან კი გრონუოლის უტოლობისა და პირველი პარაგრაფის ლემა 1.2-ის დახმარებით ვღებულობთ შეფასებას

$$\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx \le Ct^{-2},\qquad t\ge 1.$$

ასეთივე შეფასებას მივიღებთ V ფუნქციისთვისაც. ე.ი. ლემა 4.4 დამტკიცებულია.

ახლა შევაფასოთ $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ სიდიდე $L_1(0,1)$ სივრცის ნორმაში. თუ გავითვალისწინებთ $\frac{\partial U}{\partial x} = S^{-p}\sigma_1$ ტოლობას, მაშინ ლემა 4.3 და ლემა 4.4-დან ვღებულობთ

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right| dx = \int_0^1 \left| S^{-p}\,\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\right| dx \le \left[\int_0^1 S^{-2p}\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_1 t^{-p}\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \le Ct^{-1-p}.$$

ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - \psi_1 = \int_0^1 \int_y^x \frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}\, d\xi dy \le \int_0^1 \frac{\partial^2 U(y,t)}{\partial y^2}\, dy \le Ct^{-1-p}.$$

ამრიგად, ადგილი აქვს შემდეგ ასიმპტოტურ ფორმულას

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \psi_1 + O\left(t^{-1-p}\right).$$

ანალოგიურად, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = \psi_2 + O\left(t^{-1-q}\right).$$

ახლა შევაფასოთ $\frac{\partial U}{\partial t}$ და $\frac{\partial V}{\partial t}$ ფუნქციები. გავამრავლოთ (4.12) უტოლობა t^2-ზე და ვაინტეგროთ $(0,t)$ შუალედში. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის, ლემა 4.3-ისა და ლემა 4.4-ის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_0^t \tau^2 \frac{d}{d\tau}\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 dx d\tau + \int_0^t \tau^2 \int_0^1 S^p \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, \partial x}\right)^2 dx d\tau \le C\int_0^t \tau^p d\tau,$$

$$c\int_0^t \tau^2 \int_0^1 \tau^p \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x}\right)^2 dx d\tau \le -t^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + 2\int_0^t \tau \int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 dx d\tau +$$

$$+ Ct^{p+1} \le 2\int_0^t \tau\, \tau^{-2} d\tau + Ct^{p+1}.$$

მაშასადამე, როცა $p > -1$, მაშინ გვაქვს

$$\int_0^t \tau^{p+2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x}\right)^2 dx d\tau \le Ct^{p+1}. \tag{4.14}$$

გავამრავლოთ (4.11) ტოლობა $t^3 \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობისა და (4.5), (4.14) შეფასებების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\int_0^1 t^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)^2 dx + \int_0^1 t^3 S^p \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x} dx +$$

$$+ p\int_0^1 t^3 S^{p-1} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x} dx.$$

$$\int_0^t \int_0^1 \tau^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}\right)^2 dx\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^1 \tau^3 S^p \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, \partial x}\right]^2 dx d\tau +$$

$$+ p\int_0^t \tau^3 S^{p-1} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx \int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, \partial x}\right] dx\, d\tau = 0.$$

$$\frac{1}{2} t^3 S^p \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\right)^2 dx \le \frac{3}{2}\int_0^t \int_0^1 \tau^2 S^p \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\, \partial x}\right)^2 dx\, d\tau +$$

$$+ \frac{p}{2}\int_0^t \tau^3 S^{p-1} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial x}\right)^2 dx d\tau -$$

$$-pt^3S^{p-1}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x}\,dx+$$

$$+3p\int_0^t\tau^2S^{p-1}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x}\,dx+$$

$$+p(p-1)\int_0^t\tau^3S^{p-2}\left\{\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}^2\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}dx\,d\tau+$$

$$+p\int_0^t\tau^3S^{p-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\right)\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\,dx\,d\tau+$$

$$+p\int_0^t\int_0^1\tau^3S^{p-1}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dx\,d\tau\le$$

$$\le C_1t^{p+1}+C_2t^{p+1}+\frac{1}{4}t^3S^p\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dx+C_3p^2t^3S^{p-2}+$$

$$+\frac{3|p|}{2}\int_0^t\tau^2S^p\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dx\,d\tau+\frac{3|p|}{2}\int_0^t\tau^2S^{p-2}\,d\tau+$$

$$+\frac{C_4}{2}|p(p-1)|\int_0^t\tau^2S^p\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2dx\,d\tau+\frac{C_4}{2}|p(p-1)|\int_0^t\tau^4S^{p-4}d\tau+$$

$$+2|p|C_5\int_0^t\tau^3S^{p-1}\int_0^1\left(\left|\frac{\partial^2U}{\partial\tau\partial x}\right|+\left|\frac{\partial^2V}{\partial\tau\partial x}\right|\right)dx\int_0^1\left|\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right|dx\,d\tau+$$

$$+|p|C_6\int_0^t\tau^3S^{p-1}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)dx\,d\tau.$$

აქედან კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის, ლემა 4.3-ისა და (4.14) შეფასების გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{c}{4}t^{p+3}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x}\right)^2 dx \le C_7 t^{p+1} + C_8\int_0^t \tau^3 S^{p-1}\left\{\int_0^1\left|\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\,\partial x}\right|\right\}^2 d\tau +$$

$$+ C_8\int_0^t \tau^3 S^{p-1}\int_0^1\left|\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\partial x}\right|dx\int_0^1\left|\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial x}\right|dxd\tau \le C_7 t^{p+1} +$$

$$+ C_9\int_0^t \tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial x}\right)^2 dxd\tau + C_{10}\int_0^t \tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\partial x}\right)^2 dxd\tau +$$

$$+ C_{10}\int_0^t \tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\partial x}\right)^2 dxd\tau .$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$t^{3+p}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial x}\right)^2 dxd\tau \le C_{10}t^{p+1} + C_{11}\int_0^t \tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau . \qquad (4.15)$$

გავამრავლოთ (4.13) უტოლობა $t^2 S^{p-q}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $(0,t)$ შუალედზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის, ლემა 4.3-ის, ლემა 4.4-ისა და (4.5) შეფასებების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_0^t \tau^2 S^{p-q}\frac{d}{d\tau}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)^2 dx\,d\tau + \int_0^t \tau^2\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dx\,d\tau \le C\int_0^t t^p d\tau .$$

$$c\int_0^t \tau^{p+2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau \le -t^2 S^{p-q}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx +$$

$$+2\int_0^t \tau S^{p-q}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)^2 dx\,d\tau +$$

$$+ |p-q|\int_0^t \tau^2 S^{p-q-1}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)^2 dx\,d\tau +$$

$$+C_1 t^{p+1} \le \frac{C_2}{|p-q|} t^{p-q} + C_3 t^{p-q} + C_1 t^{p+1}.$$

მაშასადამე, როცა $q > -1$, მაშინ უკანასკნელი დამოკიდებულება (4.15) უტოლობასთან ერთად გვაძლევს

$$t^{p+3} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \le C t^{p+1}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს შეფასება

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \le C t^{-2}.$$

აქედან კი ვღებულობთ შემდეგ ასიმპტოტურ ფორმულას

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = O\left(t^{-1}\right).$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ $p > -1$, მაშინ

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = O\left(t^{-1}\right).$$

ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია.

თავი III

ზოგიერთი დიფუზიური სისტემის მიახლოებითი ამოხსნა და რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები

მიმდინარე თავში განხილულია ინტეგრო-დიფერციალური განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელისა და სხვაობიანი სქემის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები. დამტკიცებულია აგრეთვე სხვაობიანი სქემის კრებადობა შემდეგი ზოგადი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემისთვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-aS^{\beta}+bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{2}\right].$$

თავის ბოლოს მოყვანილია ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები, რომლებიც ადასტურებენ დისერტაციის პირველ და მეორე თავში მიღებულ თეორიულ შედეგებს.

§1. ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელის მდგრადობა და კრებადობა

ცილინდრში $Q_T=(0,1)\times(0,T]$, სადაც T დადებითი ნამდვილი რიცხვია, განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right\}=f_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right\}=f_2, \tag{1.1}$$

$$U(0,t)=U(1,t)=V(0,t)=V(1,t)=0, \tag{1.2}$$

$$U(x,0)=U_0(x), \quad V(x,0)=V_0(x). \tag{1.3}$$

სადაც $f_1=f_1(x,t)$, $f_2=f_2(x,t)$, $U_0(x)$, $V_0(x)$ თავიანთი არგუმენტების ცნობილი ფუნქციებია.

შევისწავლოთ (1.1) - (1.3) ამოცანის შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხები.

დავყოთ $[0,1]$ შუალედი N ტოლ ნაწილად და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$h=\frac{1}{N}, \quad x_i=ih, \quad u_i=u(x_i,t),$$

$$\overline{\omega}_h=\{x_i,\ i=0,1,...,N\},\ \omega_h^*=\{x_i=(i-1/2)h,\ i=1,2,...,N\}$$

$$u_x=\frac{u_{i+1}-u_i}{h}, \qquad u_{\bar{x}}=\frac{u_i-u_{i-1}}{h}.$$

შემოვიტანოთ სკალარული ნამრავლები და ნორმები:

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih, \qquad (u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,$$

$$\|u\|_{L_2(\omega_h)}=(u,u)^{1/2}, \qquad \|u]\|_{L_2(\omega_h)}=(u,u]^{1/2}.$$

აღვნიშნოთ (1.1) - (1.3) ამოცანის ამონახსნის მნიშვნელობები (x_i,t) წერტილში $U_i=U_i(t)$, $V_i=V_i(t)$ ფუნქციებით, ხოლო შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული მოდელის ამონახსნები კი – $u_i=u_i(t)$, $v_i=v_i(t)$ ფუნქციებით.

განვიხილოთ (1.1) - (1.3) ამოცანისთვის შემდეგი ნახევრად-დისკრეტული მოდელი:

$$\frac{du_i}{dt}-\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)u_{\bar{x},i}\right\}_x=f_{1,i},$$

$$\frac{dv_i}{dt}-\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)v_{\bar{x},i}\right\}_x=f_{2,i}, \tag{1.4}$$

$$i=1,2....,N-1,$$

$$u_0(t)=u_N(t)=v_0(t)=v_N(t)=0, \tag{1.5}$$

$$u_i(0)=U_{0,i},\quad v_i(0)=V_{0,i},\quad i=0,1,...,N. \tag{1.6}$$

გავამრავლოთ (1.4) სისტემის პირველი განტოლება სკალარულად $u=u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_{N-1}(t))$ ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის დისკრეტული ანალოგის გამოყენების შედეგად გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\sum_{i=1}^{N}\left(1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right)\left(u_{\bar{x},i}\right)^2h=\sum_{i=1}^{N-1}f_{1,i}u_ih.$$

უკანასკნელ ტოლობაში კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენება გვაძლევს

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+2\|u_{\bar{x}}\|\le\frac{1}{8}\|f_1\|^2+8\|u\|^2,$$

აქედან კი პუანკარეს უტოლობის დისკრეტული ანალოგის გამოყენება და $(0,t)$ არეზე ინტეგრება გვაძლევს

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{\bar{x}}\| d\tau \le C. \tag{1.7}$$

ახლა და შემდეგშიც C აღნიშნავს დადებით მუდმივს, რომელიც არ არის დამოკიდებული h და τ სიდიდეებზე.

ანალოგიურად,

$$\|v(t)\|^2 + \int_0^t \|v_{\bar{x}}\| d\tau \le C. \tag{1.8}$$

მიღებული (1.7) და (1.8) აპრიორული შეფასებებიდან გამომდინარეობს (1.1) - (1.3) ამოცანის გლობალური ამოხსნადობა [19].

თ ე ო რ ე მ ა 1.1. თუ (1.1) - (1.3) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U = U(x,t)$, $V = V(x,t)$ მაშინ (1.4) – (1.6) სქემის ამონახსნი $u(t) = (u_1(t), u_2(t),..., u_{N-1}(t))$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t),..., v_{N-1}(t))$ მიისწრაფის შესაბამისად $U(t) = (U_1(t), U_2(t),..., U_{N-1}(t))$, $V(t) = (V_1(t), V_2(t),..., V_{N-1}(t))$ ფუნქციებისკენ, როცა $h \to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\begin{aligned} \|u(t) - U(t)\| &\le Ch^2, \\ \|v(t) - V(t)\| &\le Ch^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $U = U(x,t)$ და $V = V(x,t)$ ფუნქციებისთვის გვაქვს:

$$\begin{aligned} \frac{dU_i}{dt} - \left\{ \left[1 + \int_0^t \left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}\right)^2 \right] d\tau \right] U_{\bar{x},i} \right\}_x &= f_{1,i} - \psi_{1,i}, \\ \frac{dV_i}{dt} - \left\{ \left[1 + \int_0^t \left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}\right)^2 \right] d\tau \right] V_{\bar{x},i} \right\}_x &= f_{2,i} - \psi_{2,i}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$i = 1,2,..., N-1,$$

$$U_0(t) = U_N(t) = V_0(t) = V_N(t) = 0, \tag{1.11}$$

$$U_i(0) = U_{0,i},\ V_i(t) = V_{0,i},\ i = 0,1,..., N, \tag{1.12}$$

სადაც

$$\psi_{k,i} = O(h^2), \quad k = 1,2.$$

ვთქვათ, $z_i(t) = u_i(t) - U_i(t)$ და $s_i(t) = v_i(t) - V_i(t)$, მაშინ (1.4) - (1.6) და (1.10) - (1.12) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$\frac{dz_i}{dt} - \left\{\left[1 + \int_0^t \left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right] d\tau\right] u_{\bar{x},i} - \right.$$

$$\left. - \left[1 + \int_0^t \left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right] d\tau\right] U_{\bar{x},i}\right\}_x = \psi_{1,i}(t),$$

$$\frac{ds_i}{dt} - \left\{\left[1 + \int_0^t \left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right] d\tau\right] v_{\bar{x},i} - \right. \tag{1.13}$$

$$\left. - \left[1 + \int_0^t \left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right] d\tau\right] V_{\bar{x},i}\right\}_x = \psi_{2,i}(t),$$

$$i = 1,2,\ldots, N-1,$$

$$z_0(t) = z_N(t) = s_0(t) = s_N(t) = 0, \tag{1.14}$$

$$z_i(0) = s_i(0) = 0, \ i = 0,1,\ldots, N. \tag{1.15}$$

გავამრავლოთ (1.13) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_{N-1}(t))$ და $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \ldots, s_{N-1}(t))$ ფუნქციებზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის სხვაობიანი ანალოგისა და (1.14) პირობების გამოყენებით გვექნება:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\left\{\left[1 + \int_0^t \left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right] d\tau\right] u_{\bar{x},i} - \right.$$

$$\left. - \left[1 + \int_0^t \left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right] d\tau\right] U_{\bar{x},i}\right\} z_{\bar{x},i} h = \sum_{i=1}^{N-1} \psi_{1,i} z_i h. \tag{1.16}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|s\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\left\{\left[1 + \int_0^t \left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right] d\tau\right] v_{\bar{x},i} - \right.$$

$$-\left[1+\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]V_{\bar{x},i}\Big\}s_{\bar{x},i}h=\sum_{i=1}^{N-1}\psi_{2,i}s_ih.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left\{\left[1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]u_{\bar{x},i}-\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]U_{\bar{x},i}\right\}\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)+$$

$$+\left\{\left[1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]v_{\bar{x},i}-\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau V_{\bar{x},i}\right]\right\}\left(v_{\bar{x},i}-V_{\bar{x},i}\right)=$$

$$=\left(z_{\bar{x},i}\right)^2+\left(s_{\bar{x},i}\right)^2+\left[\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\,u_{\bar{x},i}-\right.$$

$$\left.-\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\,U_{\bar{x},i}\right]\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)+$$

$$+\left[\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\,v_{\bar{x},i}-\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\,V_{\bar{x},i}\right]\times$$

$$\times\left(v_{\bar{x},i}-V_{\bar{x},i}\right)=\left(z_{\bar{x},i}\right)^2+$$

$$+\left(s_{\bar{x},i}\right)^2+\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau+\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]\times$$

$$\times\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i}\right)^2\left[\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau-\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(U_{\bar{x},i}\right)^2\left[\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau-\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau+\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]\left(v_{\bar{x},i}-V_{\bar{x},i}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\left[\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau-\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\left[\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau-\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]\times$$

$$\times\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau.$$

საბოლოოდ,

$$\left\{\left[1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]u_{\bar{x},i}-\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]U_{\bar{x},i}\right\}\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)+$$

$$+\left\{\left[1+\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau\right]v_{\bar{x},i}-\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left[\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau V_{\bar{x},i}\right]\right\}\left(u_{\bar{x},i}-V_{\bar{x},i}\right)\leq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]\times \tag{1.17}$$

$$\times\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\varphi_i(t)=\int_0^t\left[\left(u_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}\right)^2\right]d\tau,$$

მაშინ (1.15) პირობისა და (1.17) თანაფარდობის გათვალისწინებით (1.16) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|z\|^2+\|s\|^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{d}{dt}\varphi_i^2(t)h \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{N-1}\left[\psi_{1,i}z_i+\psi_{2,i}s_i\right]h\,,$$

აქედან კი ინტეგრებით და (1.5) პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\|z(t)\|^2+\|s(t)\|^2 \le \int_0^t\left(\|z(\tau)\|^2+\|s(\tau)\|^2\right)d\tau+\int_0^t\left(\|\psi_{1,i}\|^2+\|\psi_{2,i}\|^2\right)d\tau\,.$$

უკანასკნელი უტოლებიდან ვღებულობთ (1.9) შეფასებების სამართლიანობას.

თეორემა 1.1 დამტკიცებულია.

§2. ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის მდგრადობა და კრებადობა

შევისწავლოთ წინა პარაგრაფში განხილული (1.1) - (1.3) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხი.

დავყოთ $[0,T]$ შუალედი M ტოლ ნაწილად, მოვახდინოთ Q_T არის დისკრეტიზაცია და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\tau=\frac{T}{M},\quad t_j=j\tau,\quad u_i^j=u(x_i,t_j),$$

$$\omega_\tau=\{t_j=j\tau, j=0,1,\ldots M\},\quad \overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\omega_\tau,\ \omega^*_{h\tau}=\omega^*_h\times\omega_\tau,$$

$$u_i=u_i^{j+1},\quad u_t=\frac{u_i-u_i^j}{\tau},$$

განვიხილოთ (1.1) - (1.3) ამოცანისთვის შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$u_{t,i}^{j}-\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right]\right)u_{\bar{x},i}\right\}_x=f_{1,i}^{j},$$

$$v_{t,i}^{j}-\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right]\right)v_{\bar{x},i}\right\}_x=f_{2,i}^{j}, \tag{2.1}$$

$$i=1,2,\ldots,N-1;\ \ j=0,1,\ldots,M-1,$$

$$u_0^j=u_N^j=v_0=v_N^j=0,\qquad j=0,1,\ldots,M, \tag{2.2}$$

$$u_i^0=U_{0,i},\quad v_i^0=V_{0,i},\quad i=0,1,\ldots,N. \tag{2.3}$$

თუ (2.1) სისტემის პირველ და მეორე განტოლებებს სკალარულად გავამრავლებთ შესაბამისად u და v ფუნქციებზე, გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა და პუანკარეს უტოლობის სხვაობიან ანალოგს, მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ შემდეგ აპრიორულ შეფასებებს:

$$\left\|u^m\right\|^2+\sum_{j=1}^{m}\left\|u_{\bar{x}}^{j}\right]\Big\|^2\tau\le C,\qquad \left\|v^m\right\|^2+\sum_{j=1}^{m}\left\|v_{\bar{x}}^{j}\right]\Big\|^2\tau\le C,\quad m=1,2,\ldots,M.$$

საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს (2.1) - (2.3) ამოცანის ამოხსნადობა [19].

ქვემოთ ჩატარებულის ანალოგიური მსჯელობა ადვილად გვაძლევს (2.1) - (2.3) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობასაც.

თ ე ო რ ე მ ა 1.2. თუ (1.1) - (1.3) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U=U(x,t),\ V=V(x,t)$, მაშინ (2.1)–(2.3) სქემის ამონახსნი $u^j=\left(u_1^j,u_2^j,\ldots,u_{N-1}^j\right)$, $v^j=\left(v_1^j,v_2^j,\ldots,v_{N-1}^j\right)$, მიისწრაფის შესაბამისად $U^j=\left(U_1^j,U_2^j,\ldots,U_{N-1}^j\right)$ $V^j=\left(V_1^j,V_2^j,\ldots,V_{N-1}^j\right)$ ფუნქციებისკენ, როცა $\tau\to 0,\ h\to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\left\|u^j - U^j\right\| \le C\left(\tau + h^2\right),$$
$$\left\|v^j - V^j\right\| \le C\left(\tau + h^2\right), \tag{2.4}$$
$$j = 1,2,\ldots, M.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $U = U(x,t)$ და $V = V(x,t)$ ფუნქციებისთვის გვაქვს:

$$U_{t,i}^j - \left\{\left(1 + \tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)U_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}_x = f_{1,i}^j - \psi_{1,i}^j,$$
$$V_{t,i}^j - \left\{\left(1 + \tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)V_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}_x = f_{2,i}^j - \psi_{2,i}^j, \tag{2.5}$$
$$i = 1,2,\ldots, N-1;\ \ j = 0,1,\ldots, M-1,$$
$$U_0^j = U_N^j = V_0 = V_N^j = 0, \quad j = 0,1,\ldots, M, \tag{2.6}$$
$$U_i^0 = U_{0,i},\ V_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0,1,\ldots, N, \tag{2.7}$$

სადაც

$$\psi_{k,i}^j = O\left(\tau + h^2\right)\ k = 1,2.$$

ცდომილებებისთვის $z_i^j = u_i^j - U_i^j$ და $s_i^j = v_i^j - V_i^j$, (2.1) - (2.3) და (2.5) - (2.7) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$\frac{z_i^{j+1} - z_i^j}{\tau} - \left\{\left(1 + \tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)u_{\bar{x},i}^{j+1} -\right.$$
$$\left. - \left(1 + \tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)U_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}_x = \psi_{1,i}^{j+1},$$
$$\frac{s_i^{j+1} - s_i^j}{\tau} - \left\{\left(1 + \tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)v_{\bar{x},i}^{j+1} -\right. \tag{2.8}$$
$$\left. - \left(1 + \tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)V_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}_x = \psi_{2,i}^{j+1},$$

$$i=1,2,...,N-1;\ \ j=0,1,...,M-1\,,$$

$$z_0^j=z_N^j=s_0^j=s_N^j=0,\quad j=0,1,...,M\,, \tag{2.9}$$

$$z_i^0=s_i^0=0\,,\quad i=0,1,...,N\,. \tag{2.10}$$

გავამრავლოთ (2.8) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად $z^{j+1}=\left(z_1^{j+1},z_2^{j+1},...,z_{N-1}^{j+1}\right)$ და $s^{j+1}=\left(s_1^{j+1},s_2^{j+1},...,s_{N-1}^{j+1}\right)$ ფუნქციებზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის სხვაობიანი ანალოგისა და (2.9) პირობების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}
&\left\|z^{j+1}\right\|^2-\left(z^{j+1},z^j\right)+\tau h\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)u_{\bar{x},i}^{j+1}-\right.\\
&\left.-\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)U_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}z_{\bar{x},i}^{j+1}=\tau\left(\psi_1^j,z^{j+1}\right),\\
&\left\|s^{j+1}\right\|^2-\left(s^{j+1},s^j\right)+\tau h\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)v_{\bar{x},i}^{j+1}-\right.\\
&\left.-\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)V_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}s_{\bar{x},i}^{j+1}=\tau\left(\psi_2^j,s^{j+1}\right),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left(r^{j+1},r^j\right)=\frac{1}{2}\left\|r^{j+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|r^j\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|r^{j+1}-r^j\right\|^2,$$

$$\left(\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]u_{\bar{x},i}^{j+1}-\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}-U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)=$$

$$=\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2+\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-$$

$$-u_{\bar{x},i}^{j+1}U_{\bar{x},i}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}-U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]-\frac{1}{2}\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(U_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\right]\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right].$$

ანალოგიურად,

$$\left(\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right)v_{\bar{x},i}^{j+1}-\left(\left(U_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right)V_{\bar{x},i}^{j+1}\left(v_{\bar{x},i}^{j+1}-V_{\bar{x},i}^{j+1}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left[\left(v_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\right]\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right].$$

მიღებული შეფასებებისა და (2.11) ტოლობების გამოყენებით გვაქვს:

$$\left\|z^{j+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|z^{j+1}-z^{j}\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|z^{j+1}\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|z^{j}\right\|^2+\tau\left\|z_{\bar{x}}^{j+1}\right]\Big|^2+$$

$$+\left\|s^{j+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|s^{j+1}-s^{j}\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|s^{j+1}\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|s^{j}\right\|^2+\tau\left\|s_{\bar{x}}^{j+1}\right]\Big|^2+$$

$$+\frac{\tau^2 h}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right]\left[\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-\right. \tag{2.12}$$

$$\left.-\left(U_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right]\leq\frac{\tau}{4\varepsilon}\left(\left\|\psi_1^{j}\right\|^2+\left\|\psi_2^{j}\right\|^2\right)+\varepsilon\,\tau\left(\left\|z^{j+1}\right\|^2+\left\|s^{j+1}\right\|^2\right),$$

$$\forall\varepsilon>0,\quad j=0,1,\ldots,M-1.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\xi_i^{j}=\tau\sum_{k=0}^{j}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^{k}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^{k}\right)^2\right],$$

მაშინ

$$\xi_{t,i}^{j}=\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2.$$

ამრიგად, ვღებულობთ

$$\left\|z^{j+1}\right\|^2-\left\|z^{j}\right\|^2+\tau^2\left\|z_t^{j}\right\|^2+\tau^2\left\|z_{\bar{x}}^{j+1}\right]\Big|^2+ \tag{2.13}$$

$$+\left\|s^{j+1}\right\|^2-\left\|s^j\right\|^2+\tau^2\left\|s_t^j\right\|^2+\tau^2\left\|s_{\bar{x}}^{j+1}\right]^{2^2}+\tau^2\left\|\xi_t^j\right\|^2+$$

$$+\tau\left(\xi^j,\xi_t^j\right]\le\frac{\tau}{2\varepsilon}\left(\left\|\psi_1^j\right\|^2+\left\|\psi_2^j\right\|^2\right)+2\varepsilon\tau\left(\left\|z^{j+1}\right\|^2+\left\|s^{j+1}\right\|^2\right).$$

პუანკარეს უტოლობის დისკრეტული ანალოგის, (2.10) პირობისა და შემდეგი დამოკიდებულების

$$\tau\left(\xi^j,\xi_t^j\right]=\frac{1}{2}\left\|\xi^{j+1}\right]\Big|^2-\frac{1}{2}\left\|\xi^j\right]\Big|^2-\frac{\tau^2}{2}\left\|\xi_t^j\right]\Big|^2,$$

გათვალისწინებით, (2.13) შეფასებიდან ვღებულობთ

$$\left\|z^m\right\|^2+\tau^2\sum_{j=0}^{m-1}\left\|z_t^j\right\|^2+\frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\left\|z_{\bar{x}}^{j+1}\right]\Big|^2+\left\|s^m\right\|^2+\tau^2\sum_{j=1}^{m-1}\left\|s_t^j\right\|^2+$$

$$+\frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\left\|s_{\bar{x}}^{j+1}\right]\Big|^2+\frac{\tau^2}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\left\|\xi_t^j\right]\Big|^2+\frac{1}{2}\left\|\xi^m\right]\Big|^2\le C\tau\sum_{j=0}^{m-1}\left(\left\|\psi_1^j\right\|^2+\left\|\psi_2^j\right\|^2\right),$$

$$m=1,2,\ldots,M,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (2.4) შეფასებები.

ამრიგად, თეორემა 1.2 დამტკიცებულია.

§3. სხვაობიანი სქემის კრებადობა განტოლებათა ერთი დიფუზიური სისტემისთვის

განვიხილოთ Q_T არეში შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha\frac{\partial U}{\partial x}\right),\qquad\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-aS^\beta+bS^\gamma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right],\tag{3.1}$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0,\quad U(1,t)=\psi_1,\quad V(1,t)=\psi_2,$$
$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x),\tag{3.2}$$
$$S(x,0)=S_0(x)>s_0=const>0,$$

სადაც $a\geq 0$ და $b>0$ მუდმივებია.

შევისწავლოთ (3.1) - (3.2) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი.

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $E=S^{1/2}$, მაშინ (3.1), (3.2) ამოცანა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0,\tag{3.3}$$
$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{a}{2}E^{2\beta-1}+\frac{b}{2}E^{2\gamma-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0,\quad U(1,t)=\psi_1,\quad V(1,t)=\psi_2,$$
$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x),\ E(x,0)=\left[S_0(x)\right]^{1/2}.\tag{3.4}$$

ავაგოთ (3.3), (3.4) ამოცანის შესაბამისი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$u_t^j=\left(e^{2\alpha}u_{\bar{x}}\right)_x,\ v_t^j=\left(e^{2\alpha}v_{\bar{x}}\right)_x,$$
$$e_t^j=-\frac{a}{2}e^{2\beta-1}+\frac{b}{2}e^{2\gamma-1}\left(u_{\bar{x}}^2+v_{\bar{x}}^2\right),\tag{3.5}$$

$$u_0^j=v_0^j=0,\ u_N^j=\psi_1,\ v_N^j=\psi_2,\ j=0,1,\ldots M,$$
$$u_i^0=U_0(x_i),\ v_i^0=V_0(x_i),\ e_i^0=\left[S_0(x_{i+1/2})\right]^{1/2},\ i=0,1,\ldots N-1,,\tag{3.6}$$

სადაც u და v ბადური ფუნქციები განსაზღვრულია $\overline{\omega}_{h\tau}$ ბადეზე, ხოლო e ბადური ფუნქცია კი – $\omega^*_{h\tau}$ ბადეზე.

აქ და შემდეგშიც უინდექსო ჩანაწერში ვგულისხმობთ, რომ ბადური ფუნქციები აღებულნი არიან (x_i, t_{j+1}) წერტილში.

არ არის ძნელი იმის ჩვენება, რომ (3.5), (3.6) სქემის აპროქსიმაცია (3.3), (3.4) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ რიგის.

ცდომილებებისთვის $Z = u - U$, $W = v - V$ და $R = e - E$ გვაქვს შემდეგი ტოლობები:

$$Z_t^j = \left(e^{2\alpha} u_{\bar{x}} - E^{2\alpha} U_{\bar{x}}\right)_x + \varphi_1, \tag{3.7}$$

$$W_t^j = \left(e^{2\alpha} v_{\bar{x}} - E^{2\alpha} V_{\bar{x}}\right)_x + \varphi_2, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} R_t^j = &-\frac{a}{2}\left(e^{2\beta-1} - E^{2\beta-1}\right) + \\ &+\frac{b}{2}\left(e^{2\gamma-1} u_{\bar{x}}^2 - E^{2\gamma-1} U_{\bar{x}}^2 + e^{2\gamma-1} v_{\bar{x}}^2 - E^{2\gamma-1} V_{\bar{x}}^2\right) + \varphi_3, \end{aligned} \tag{3.9}$$

სადაც $\varphi_k = O(\tau + h^2)$, $k = 1,2,3$.

დავუშვათ, რომ $\alpha = \gamma$ და $|\alpha| \le \frac{1}{2}$. გავამრავლოთ სკალარულად (3.7) - (3.9) ტოლობები შესაბამისად $2\tau Z$, $2\tau W$ და $\frac{2}{b}\tau R$ სიდიდეებზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის სხვაობიანი ანალოგისა და შემდეგი ტოლობების გამოყენებით

$$2\tau(r_t, r) = \|r\|^2 - \|r^j\|^2 + \tau^2 \|r_t\|^2,$$

$$2\tau(R_t, R] = \|R]\|^2 - \|R^j]\|^2 + \tau^2 \|R_t]\|^2,$$

სადაც r და R ნებისმიერი ბადური ფუნქციებია, მივიღებთ

$$\|Z\|^2 - \|Z^j\|^2 + \tau^2\|Z_t\|^2 = -2\tau\Big[\big(e^\delta, u_{\bar{x}}^2\big] -$$

$$-\big(e^\delta + E^\delta, u_{\bar{x}}U_{\bar{x}}\big] + \big(E^\delta, U_{\bar{x}}^2\big] - (\varphi_1, Z)\Big],$$

$$\|W\|^2 - \|W^j\|^2 + \tau^2\|W_t\|^2 = -2\tau\Big[\big(e^\delta, v_{\bar{x}}^2\big] -$$

$$-\big(e^\delta + E^\delta, v_{\bar{x}}V_{\bar{x}}\big] + \big(E^\delta, V_{\bar{x}}^2\big] - (\varphi_2, W)\Big],$$

$$\frac{1}{b}\Big(\|R]\|^2 - \|R^j]\|^2 + \tau^2\|R_t]\|^2\Big) =$$

$$= -\frac{a}{b}\tau\big(e^{2\beta-1} - E^{2\beta-1}\big)(e - E) + \tau\Big(\big(e^\delta - e^{\delta-1}E, u_{\bar{x}}^2\big] -$$

$$-\big(E^{\delta-1}e - E^\delta, U_{\bar{x}}^2\big] + \big(e^\delta - e^{\delta-1}E, v_{\bar{x}}^2\big] -$$

$$-\big(E^{\delta-1}e - E^\delta, V_{\bar{x}}^2\big]\Big) + \frac{2\tau}{b}(\varphi_3, R].$$

აქ შემოღებულია აღნიშვნა $2\alpha = \delta$.

ამ ტოლობების შეკრებით და მარტივი გარდაქმნების შედეგად, თუ დავუშვებთ $\beta \geq 1/2$ გვექნება

$$\|Z\|^2 - \|Z^j\|^2 + \|W\|^2 - \|W^j\|^2 + \frac{\tau}{b}\Big(\|R]\|^2 - \|R^j]\|^2\Big) \leq$$

$$\leq -2\tau\Bigg[\Bigg(\frac{e^\delta + e^{\delta-1}E}{2}u_{\bar{x}}^2 + \frac{E^\delta + E^{\delta-1}e}{2}U_{\bar{x}}^2, 1\Bigg] -$$

$$-\big(e^\delta + E^\delta, u_{\bar{x}}U_{\bar{x}}\big] + \Bigg(\frac{e^\delta + e^{\delta-1}E}{2}v_{\bar{x}}^2 + \frac{E^\delta + E^{\delta-1}e}{2}V_{\bar{x}}^2, 1\Bigg] -$$

$$-\big(e^\delta + E^\delta, v_{\bar{x}}V_{\bar{x}}\big] - (\varphi_1, Z) - (\varphi_2, W) - \frac{1}{b}(\varphi_3, R]\Bigg] \leq \qquad (3.10)$$

$$\leq -2\tau\Bigg\{\Bigg(\Big[\big(e^\delta + e^{\delta-1}E\big)\big(E^\delta + E^{\delta-1}e\big)\Big]^{\frac{1}{2}} - e^\delta - E^\delta, \big|u_{\bar{x}}\big\|U_{\bar{x}}\big|\Bigg] +$$

$$+\left(\left[\left(e^{\delta}+e^{\delta-1}E\right)\left(E^{\delta}+E^{\delta-1}e\right)\right]^{\frac{1}{2}}-e^{\delta}-E^{\delta},\left|v_{\bar{x}}\right|V_{\bar{x}}\right|\Big]-$$

$$-(\varphi_1,Z)-(\varphi_2,W)-\frac{1}{b}(\varphi_3,R]\Big\}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left(e^{\delta}-e^{\delta-1}E\right)\left(E^{\delta}-E^{\delta-1}e\right)-\left(e^{\delta}+E^{\delta}\right)^2=$$

$$=2e^{\delta}E^{\delta}+e^{\delta+1}E^{\delta-1}+e^{\delta-1}E^{\delta+1}-e^{2\delta}-2e^{\delta}E^{\delta}-E^{2\delta}= \tag{3.11}$$

$$=\left(e^{\delta+1}-E^{\delta+1}\right)\left(E^{\delta-1}-e^{\delta-1}\right).$$

რადგან $|\delta|\le 1$, ამიტომ

$$\left(e^{\delta+1}-E^{\delta+1}\right)\left(E^{\delta-1}-e^{\delta-1}\right)\ge 0.$$

უკანასკნელი უტოლობისა და (3.10), (3.11) თანაფარდობების გამოყენებით საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\|Z\|^2+\|W\|^2+\frac{1}{b}\|R]\|^2\le\|Z^j\|^2+\|W^j\|^2+\frac{1}{b}\|R^j]\|^2+$$

$$+2\tau\left((\varphi_1,Z)+(\varphi_2,W)+\frac{1}{b}(\varphi_3,R]\right),$$

საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობა

$$\|Z\|+\|W\|+\|R]\|=O\left(\tau+h^2\right).$$

მაშასადამე სამართლიანია

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. თუ $\beta\ge 1/2$, $\alpha=\gamma$, $|\alpha|\le 1/2$ მაშინ (3.5), (3.6) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (3.3), (3.4) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O\left(\tau+h^2\right)$ და იგი კრებადია (3.3), (3.4) ამოცანის ამონახსნისკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცეში, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

მეორე თავის მეორე პარაგრაფში გამოკვლეული იყო შემდეგი განტოლებათა სისტემა

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial t}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2. \tag{3.12}$$

ანუ ეს ის შემთხვევაა, როცა (3.1) სისტემაში $a=0, b=1, \gamma=0$. მიმდინარე პარაგრაფში დამტკიცდა სქემის კრებადობა როცა $\alpha=\gamma$. ამ შემთხვევაში ($\alpha=0$) (3.12) სისტემა გაცილებით მარტივი ხდება, თუმცა მეორე თავში მისთვის კვლევა ჩატარებული იყო უფრო ზოგად შემთხვევაში, კერძოდ როცა $\alpha\in(-1/2,1]$. ყოველივე ზემოთქმულის გამო, საინტერესო იქნება (3.12), (3.2) ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის კრებადობის საკითხის გარკვევა.

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს $E=S^{\frac{\alpha+1}{2}}$, $\delta=\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}$, მაშინ (3.2), (3.12) ამოცანა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{\delta}\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{\delta}\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{1}{2-\delta}E^{\delta-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{3.13}$$
$$U(0,t)=V(0,t)=0,\quad U(1,t)=\psi_1,\quad V(1,t)=\psi_2,$$
$$U(x,0)=U_0(x),\quad V(x,0)=V_0(x),\quad E(x,0)=[S_0(x)]^{\frac{1}{2-\delta}}.$$

ავაგოთ (3.13) ამოცანის შესაბამისი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$u_t^j = \left(e^{\delta} u_{\bar{x}}\right)_x,\ v_t^j = \left(e^{\delta} v_{\bar{x}}\right)_x,$$

$$e_t^j = \frac{1}{2-\delta} e^{\delta-1}\left(u_{\bar{x}}^2 + v_{\bar{x}}^2\right),$$

$$u_0^j = v_0^j = 0,\ u_N^j = \psi_1,\ v_N^j = \psi_2,\ j = 0,1,\ldots M, \tag{3.14}$$

$$u_i^0 = U_0(x_i),\ v_i^0 = V_0(x_i),\ e_i^0 = [S_0(x_{i+1/2})]^{\frac{1}{2-\delta}},\ i = 0,1,\ldots N-1.$$

თუ ჩავატარებთ ზემოთ მოყვანილის ანალოგიურ მსჯელობას, მივიღებთ შემდეგი თეორემის სამართლიანობას

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. თუ $-1/3 \le \alpha \le 1$, მაშინ (3.14) სხვაობიანი სქემის აპროქსიმაცია (3.13) ამოცანის გლუვ ამონახსნებზე არის $O(\tau + h^2)$ და იგი კრებადია (3.13) ამოცანის ამონახსნისკენ ბადურ ფუნქციათა $L_2(\omega_h)$ სივრცეში, ამასთან კრებადობის სიჩქარე ემთხვევა აპროქსიმაციის რიგს.

§4. სხვაობიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა და გრაფიკული ილუსტრაციები

ამ პარაგრაფში შეისწავლება წინა პარაგრაფში აგებული არაწრფივი სქემების რიცხვითი ამოხსნის საკითხები. აგრეთვე მოცემულია გრაფიკები, რომლებიც წარმოადგენენ ჩატარებული რიცხვითი ექსპერემენტების შედეგების ილუსტრაციებს. აღნიშნული ექსპერიმენტები ადასტურებენ წინა თავებში მოყვანილ თეორიულ შედეგებს.

აღვწეროთ ზოგადი პროცესი, რომლის საშუალებითაც ხდება მიმდინარე თავის მესამე პარაგრაფში აგებული სქემების რიცხვითი

რეალიზაცია. პროცესი აღვწეროთ შემდეგი არაცხადი სქემის მაგალითზე:

$$u_t^j = \left(e^{2\alpha} u_{\bar{x}}\right)_x,\ v_t^j = \left(e^{2\alpha} v_{\bar{x}}\right)_x,$$
$$e_t^j = -\frac{a}{2} e^{2\beta-1} + \frac{b}{2} e^{2\gamma-1}\left(u_{\bar{x}}^2 + v_{\bar{x}}^2\right). \tag{4.1}$$

როგორც წინა პარაგრაფში, ასევე აქაც უინდექსო ჩანაწერში ვგულისხმობთ, რომ ბადური ფუნქციები აღებულნი არიან $\left(x_i, t_{j+1}\right)$ წერტილში.

განვიხილოთ (4.1) სქემის რიცხვითი ამოხსნისთვის შემდეგი პროცესი:

I ბიჯი – (4.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებებში e ბადური ფუნქცია ავიღოთ j შრეზე. შედეგად u და v ფუნქციების მიმართ მივიღებთ სამწერტილოვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომელსაც ამოვხსნით ფაქტორიზაციის მეთოდის გამოყენებით;

II ბიჯი – პირველ ბიჯზე ნაპოვნი u და v ბადური ფუნქციები ჩავსვათ (4.1) სისტემის მესამე განტოლებაში და

$$e = e^j - \frac{a\tau}{2}\left(e^j\right)^{2\beta-1} + \frac{b\tau}{2h^2}\left(e^j\right)^{2\gamma-1}\left[\left(u - u_{i-1}\right)^2 + \left(v - v_{i-1}\right)^2\right]$$

ტოლობის საშუალებით გამოვითვალოთ e ბადური ფუნქციის მნიშვნელობას;

III ბიჯი – წინა ბიჯზე მიღებული e ბადური ფუნქციის მნიშვნელობა ჩავსვათ (4.1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებებში, შემდეგ კი კვლავ ფაქტორიზაციის მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ u და v ფუნქციები და ა.შ.

როგორც ვხედავთ I, II და III ბიჯების თანამიმდევრული შესრულებით ვღებულობთ იტერაციულ პროცესს. აღნიშნული პროცესი შევწყვიტოთ მაშინ როდესაც ორი მეზობელი იტერაციის შედეგად

მიღებული ფუნქციების სხვაობის მოდული არ გახდება წინსწარ დასახელებულ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე ნაკლები.

გამოყენებულ იქნა განხილული სქემის რეალიზაციის სხვა მიდგომაც, რომელიც შემოთავაზებული იყო [16] შრომაში. ეს უკანასკნელი ალგორითმი დაფუძნებულია ნიუტონის მეთოდის მოდიფიკაციაზე რის საშუალებითაც სხვაობიანი ამოცანები მიიყვანება სამწერტილოვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ბლოკურ სისტემამდე. ამ უკანასკნელის ამოხსნა კი ხორციელდება მატრიცული ფაქტორიზაციის მეთოდის საშულებით.

გამოყენებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების ეფექტურობას ადასტურებს აგებული კერძო ამონახსნებისთვის ჩატარებული შესაბამისი ტესტური გამოთვლები.

გადავიდეთ თეორიული შედეგების დამადასტურებელ გრაფიკული ილუსტრაციების განხილვაზე.

ქვემოთ მოყვანილ სურათებში ა), ბ), გ) ნახაზები აღნიშნავენ შესაბამისად U, V და S ფუნქციების გრაფიკებს.

პირველი თავის პირველ პარაგრაფში დასმული იყო შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha} \frac{\partial U}{\partial x} \right), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha} \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} = -aS^{\beta} + bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right], \tag{4.2}$$

$$U(0,t) = V(0,t) = 0, \quad U(1,t) = \psi_1, \quad V(1,t) = \psi_2,$$
$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad S(x,0) = S_0(x) > 0. \tag{4.3}$$

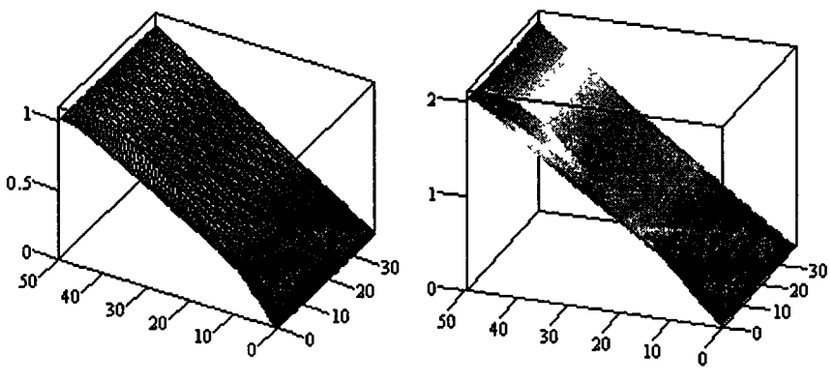
როგორც აღნიშნულ პარაგრაფში ვნახეთ, თუ $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, მაშინ (4.2), (4.3) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად

მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი უტოლობა:

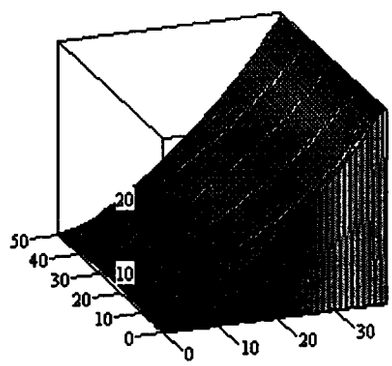
$$a(\gamma-\beta)\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}}<\pi^2. \tag{4.4}$$

ვთქვათ, $\gamma=1/2$ და $\beta=1$, ე.ი. $\gamma-\beta<0$. მაშასადამე, სამართლიანია (4.4) უტოლობა და შესაბამისად ადგილი აქვს წრფივად მდგრადობას.

თუ დავუშვებთ, რომ $a=b=1,\ \alpha=1/2,\ \psi_1=1,\ \psi_2=2$ და $U_0(x)=\psi_1 x+\sin(\pi x),\ V_0(x)=\psi_2 x+\cos(2\pi x)-1$ და $S_0(x)=1$, მაშინ გვაქვს შემდეგი სურათი:



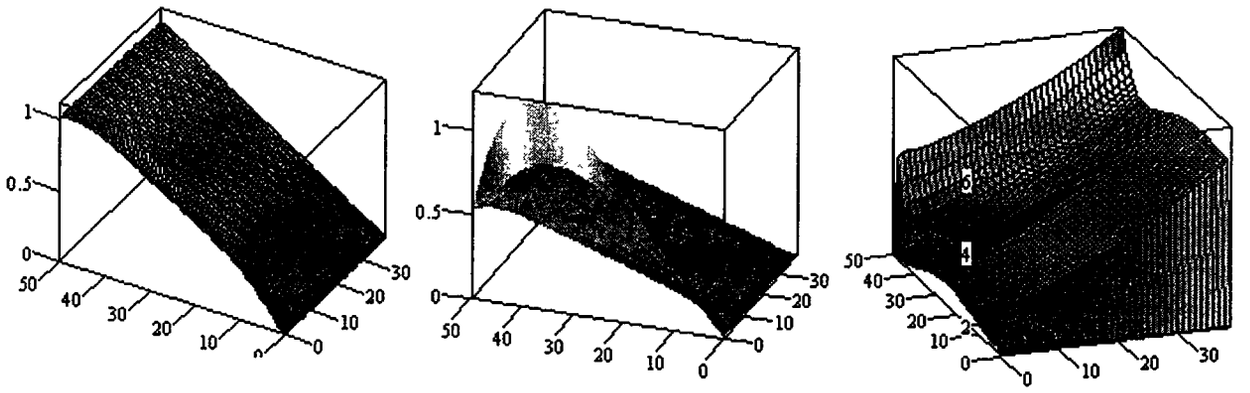
ა) ბ)



გ)

ნახ. 1

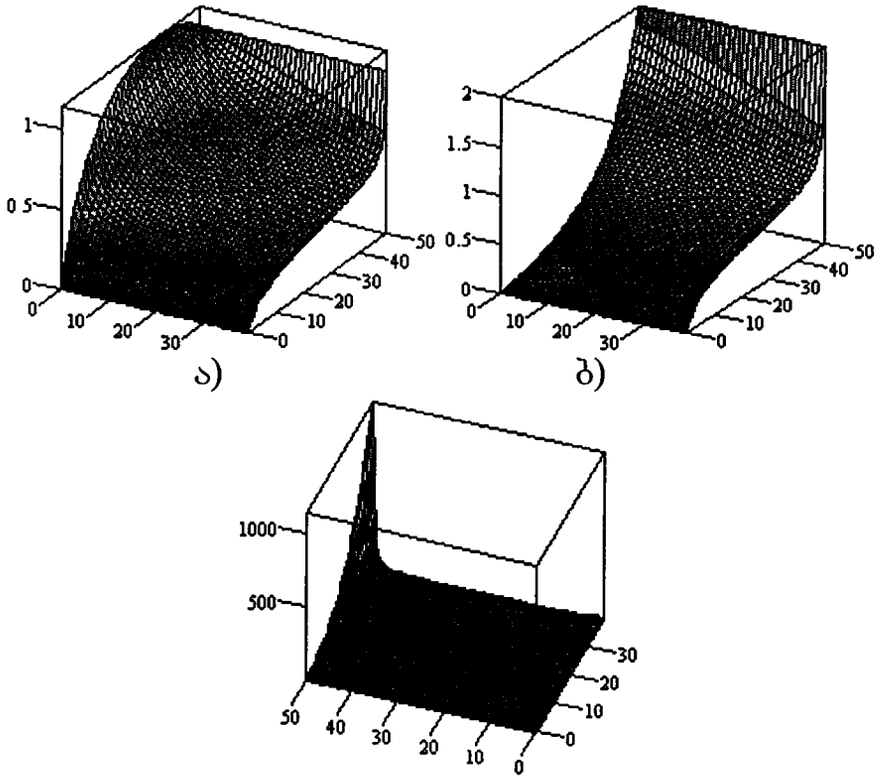
დავუშვათ, რომ $a=b=1,\ \alpha=\gamma=1/2,\ \beta=1/4,\quad \psi_1=1, \psi_2=1/2.$ ე.ი. $\gamma-\beta>0$, მაგრამ (4.4) უტოლობა მაინც სამართლიანია და იგივე საწყისი ფუნქციების შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი სურათი:



ა) ბ) გ)

ნახ. 2

ვთქვათ, $a=b=1,\ \alpha=-0.8,\ \beta=-1, \gamma=0,\quad \psi_1=1, \psi_2=2,$ $U_0(x)=\psi_1 x+1-x^2,\quad V_0(x)=\psi_2 x+(1-x)(e^x-e^{-x}),\quad S_0(x)=1.$ ამ შემთხვევაში (4.4) უტოლობა ირღვევა და შესაბამისად გვაქვს შემდეგი სურათი:



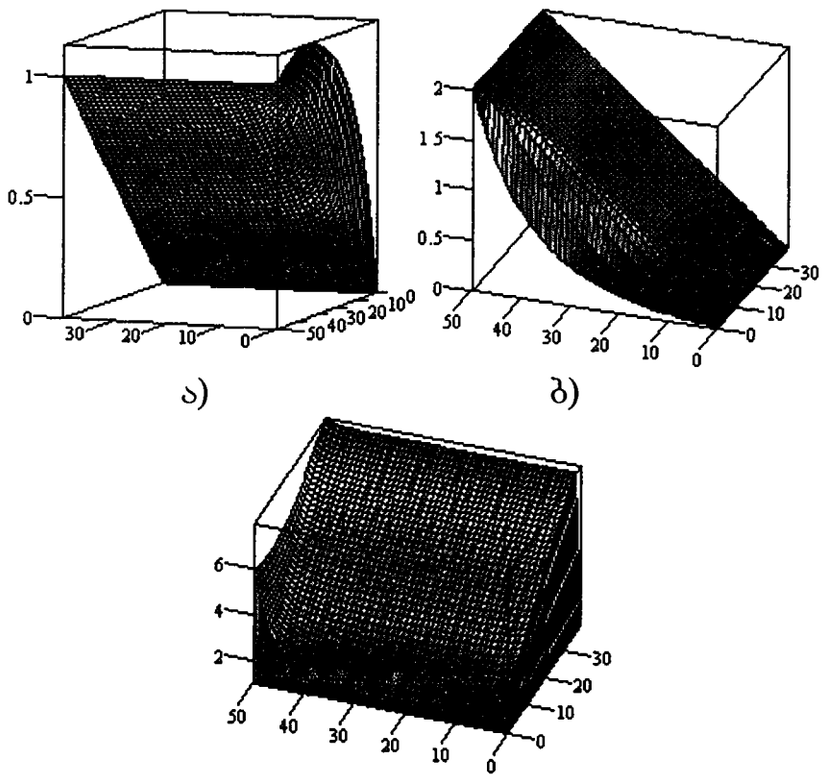
ა) ბ)

გ)

ნახ. 3

აქვე მოვიყვანოთ გლობალური მდგრადობის დამადასტურებელი სურათი. თუ $a=b=\alpha=\beta=1,\ \gamma=0,\ \psi_1=1, \psi_2=2$, მაშინ პირველი თავის მესამე პარაგრაფის თეორემა 3.2-ის თანახმად ადგილი აქვს გლობალურად მდგრადობას.

შესატყვისი გრაფიკული ილუსტრაცია მოყვანილია ნახ. 4-ზე



ა) ბ)

გ)

ნახ. 4

მეორე თავის მეორე პარაგრაფში ჩატარებული თეორიული კვლევა გვიჩვენებს, რომ შემდეგი განტოლებათა სისტემისთვის:

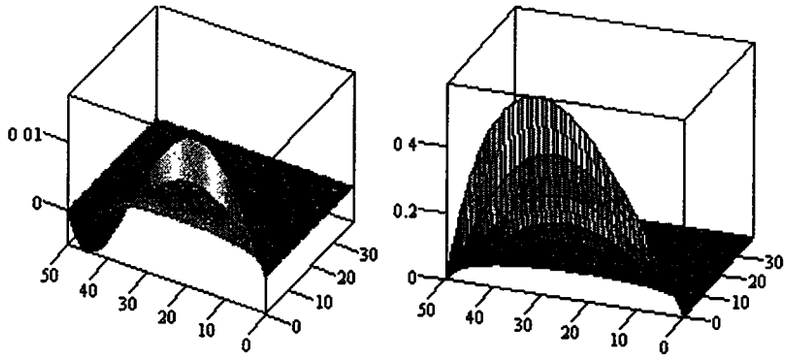
$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right)=0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0, \qquad (4.5)$$

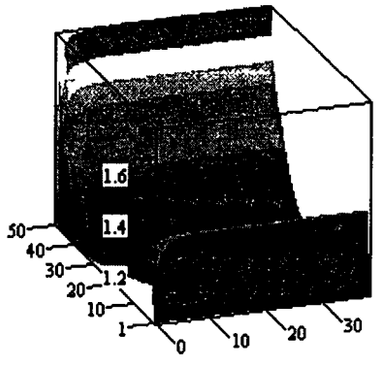
$$S(x,t)=1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau$$

დასმული ერთგვაროვანი პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი, $a(S)$ ფუნქციაზე გარკვეული შეზღუდვის დადების შემდეგ, დროის უსასრულოდ ზრდისას მიისწრაფის ნულისაკენ.

მართლაც, როცა $a(S)=S^{\alpha}$, $\alpha=1/2$, მაშინ $U_0(x)=\psi_1 x+(1-x)(e^x-\cos(x))$, $V_0(x)=\psi_2 x+(1-x)(e^{-x}-\cos(x))$ საწყისი ფუნქციების დროს გვაქვს სურათი



ა) ბ)

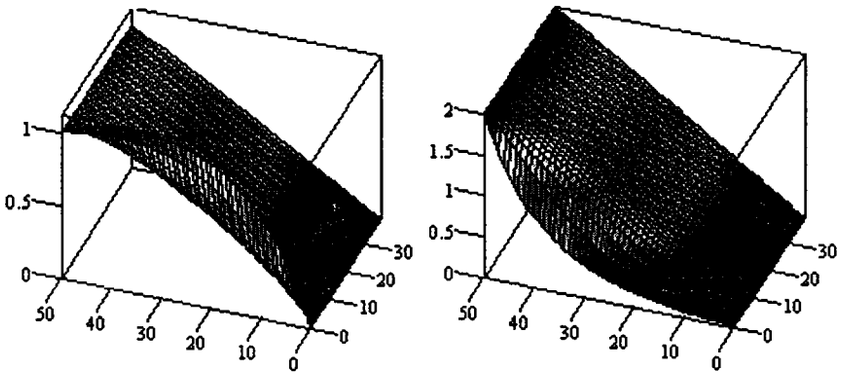


გ)

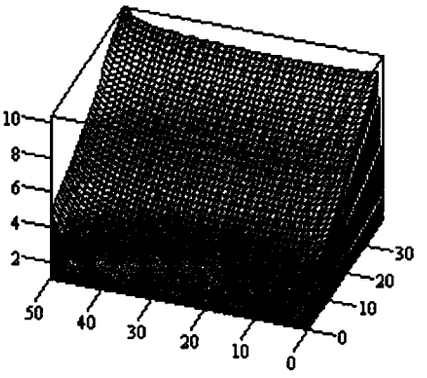
ნახ. 5

ამავე თავის მესამე პარაგრაფში (4.5) განტოლებათა სისტემისთვის დასმულია (4.3) არაერთგვაროვანი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა. როცა $a(S)=S^{\alpha}$, $\alpha\in(-1/2;0)\cup(0;1]$, მაშინ დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის სტაბილიზაციის შესახებ.

მართლაც, როცა $\alpha=1/2$, $\psi_1=1$, $\psi_2=2$, $U_0(x)=\psi_1 x+1-x^2$, $V_0(x)=\psi_2 x+(1-x)(e^x-e^{-x})$ მაშინ გვაქვს:



ა) ბ)

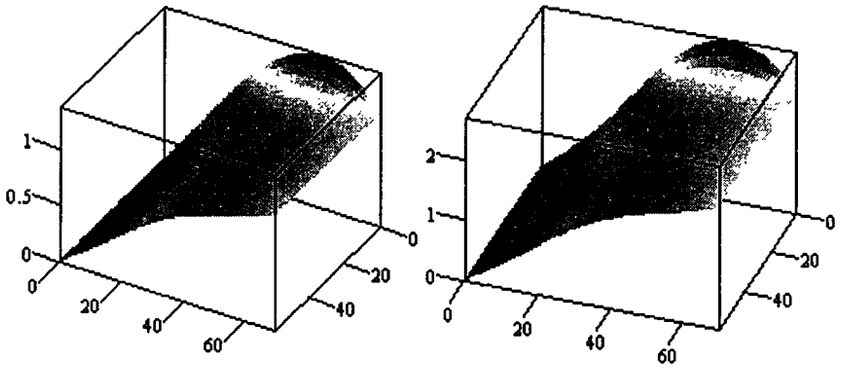


გ)

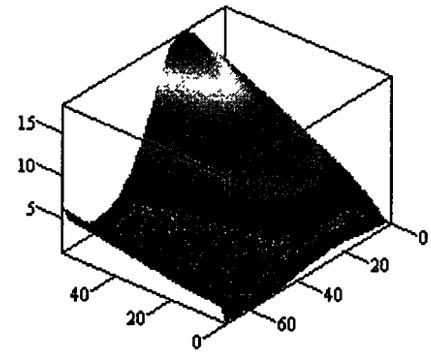
ნახ. 6

მსგავს სურათებს ვღებულობთ α პარამეტრის უარყოფითი მნიშვნელობებისთვისაც მოცემული ინტერვალიდან.

როცა $\alpha = -1/2$, $\psi_1 = 1, \psi_2 = 2$, მაშინ იგივე საწყისი ფუნქციების შემთხვევაში გვაქვს სურათი



ა) ბ)



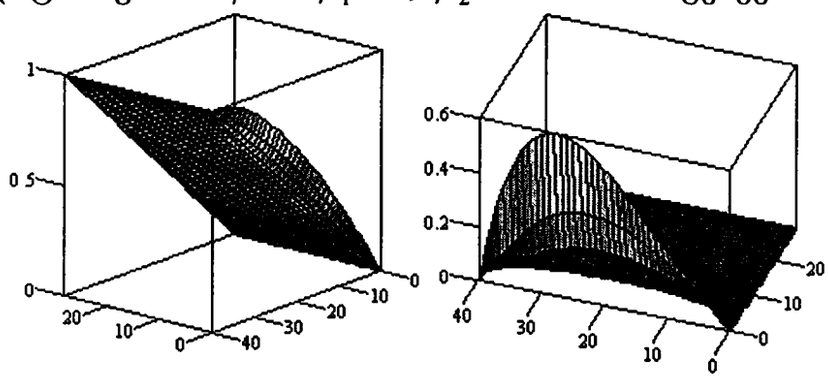
გ)

ნახ. 7

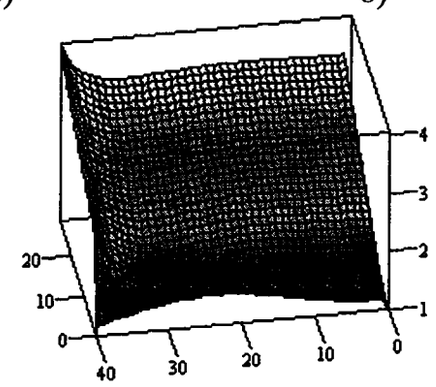
როგორც ეს ნახ. 7-დან ჩანს ამ შემთხვევაში სტაბილიზაციას არ აქვს ადგილი.

უნდა აღინიშნოს, რომ ψ_1, ψ_2 სიდიდეებიდან ერთ-ერთი შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს. როგორც ჩატარებული თეორიული კვლევა გვიჩვენებს ამ შემთხვევაში სურათი შეიცვლება მხოლოდ შესაბამისი ფუნქციისთვის.

მართლაც, თუ $\alpha = 1/2$, $\psi_1 = 1, \psi_2 = 0$, მაშინ გვაქვს



ა) ბ)



გ)

ნახ. 8

ბოლოს განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

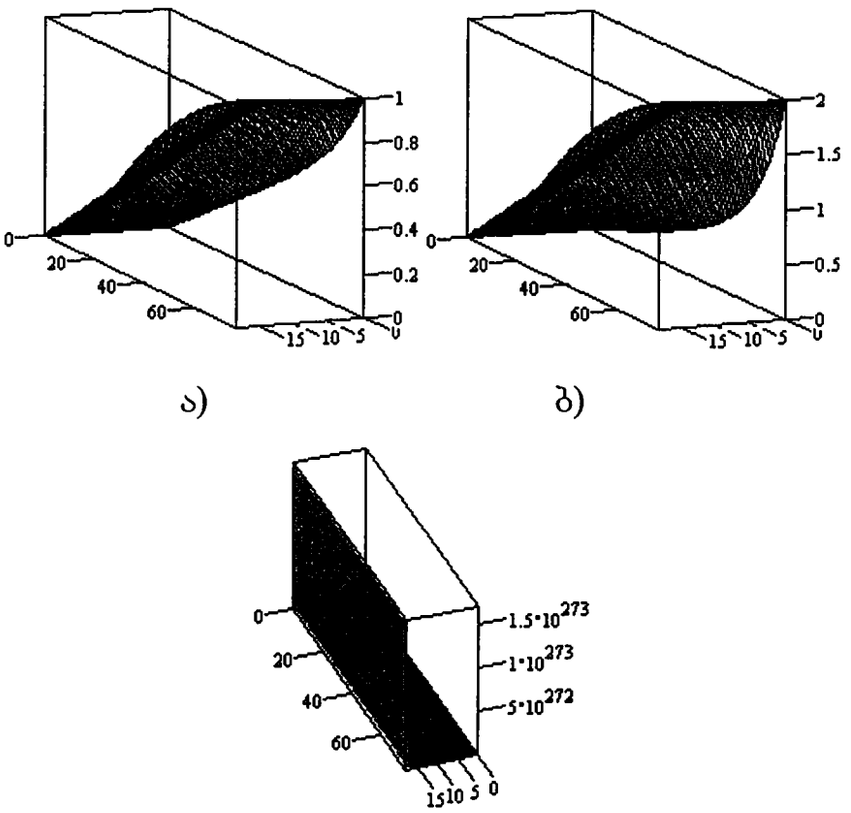
$$\frac{\partial S}{\partial t}=S^{\alpha}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{2}\right], \tag{4.6}$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0,\ U(1,t)=\psi_1,\ V(1,t)=\psi_2,$$

$$U(x,0)=\psi_1 x,\ V(x,0)=\psi_2 x,\ S(x,0)=S_0=const>0.$$

როგორც პირველი თავის მესამე პარაგრაფში ვნახეთ როცა $\alpha>1$, მაშინ (4.6) ამოცანას საზოგადოდ გლობალური ამონახსნი არ გააჩნია.

ვთქვათ, $\alpha=2,\ S_0=1,\ \psi_1=1,\ \psi_2=2$, დროის t_0 სასრული მომენტისთვის $S(x,t)$ ფუნქცია შემოუსაზღვრელია, რასაც ადასტურებს შემდეგი სურათი



ა) ბ)

გ)

ნახ. 9

ზემოთ მოყვანილი სურათები (ნახ. 1-9) ცხადად გვიჩვენებენ მიახლოებითი გამოთვლების შესაბამისობას დისერტაციაში

ჩატარებულ თეორიულ გამოკვლევებთან. ეს სურათები ისევე როგორც სხვა მრავალი ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტი, ადასტურებენ შემუშავებული რიცხვითი ალგორითმების ეფექტურობას.

მაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის შესწავლისთვის ჩატარებულია მრავალრიცხოვანი გამოთვლითი ექსპერიმენტი სხვადასხვა სახის სასაზღვრო რეჟიმისა და განსხვავებული α მაჩვენებლის შემთხვევისთვის $\nu_m = \nu_0 \theta^\alpha$ დამოკიდებულებაში. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები გვიჩვენებს, რომ საწყის ეტაპზე მაგნიტური ველის შეღწევის პროცესი როცა $\alpha \to 1$, თვისობრივად განსხვავდება წრფივი შემთხვევისგან, თუმცა გააჩნია ანალოგიური ასიმპტოტური ხასიათი დროის დიდი მნიშვნელობებისთვის. დასაწყისში გარემოს სასაზღვრო ზოლში მაგნიტური ველის ენერგიის დიდი ნაწილი გამოიყოფა სითბური ენერგიის სახით, შემდეგ კი სითბოგამტარობის სტრუქტურა იწვევს ტემპერატურის თანდათან გათანაბრებას. ერთთან ახლოს მყოფი ხარისხის მაჩვენებლისთვის ველის გავრცელება მიმდინარეობს შედარებით ნელა.

მთლიანობაში, რიცხვითი ექსპერიმენტის შედეგები საშუალებას იძლევა აღიწეროს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის ზოგიერთი ძირითადი თვისება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობაც ხასიათდება სპეციალური არაწრფივობით.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. Абрашин В.Н. Об устойчивых разностных схемах для нелинейных нестационарных уравнений математической физики. Изв. АН БССР, 1981, № 6, с. 5-9.
2. Абуладзе И.О. , Гордезиани Д.Г. , Джангвеладзе Т.А. , Коршия Т.К. Дискретные модели для нелинейной задачи диффузии магнитного поля с учетом теплопроводности. Дифференц. уравнения, 1986, т. 22, №7, с. 1119-1129.
3. Асимптотика интегралы и ряды. Федорюк М.В. М.: Наука, 1987.
4. Бернштеин С. Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными. 1940. Собр. соч.: В 3 ч. М.: 1960, т. 3, с. 323-331.
5. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. Марсден Дж., Мак-Кракен М. М.: Мир, 1972.
6. Вишик М. И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Математический сборник, 1962, т. 59 (101), доп., с. 289-325.
7. Гладков А. Л. О поведении решений некоторых квазилинейных параболических уравнений со степенными нелинейностями. Математический сборник, 2000, т. 191, №3, с. 25-42.
8. Гордезиани Д.Г., Джангвеладзе Т.А., Коршия Т.К. О существовании и единственности решения одного класса нелинейных параболических задач. Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, №7, с. 1197-1207.
9. Гордезиани Д.Г., Джангвеладзе Т.А., Коршия Т.К. Об одном классе нелинейных параболических уравнений, возникающих в задачах диффузии электромагнитного поля. Труды ИПМ им. И.Н. Векуа ТГУ, 1983, т. 13, с. 7-35.

10.Джангвеладзе Т.А. Первая краевая задача для одного нелинейного уравнения параболического типа. Докл. АН СССР, 1983, т. 269, №4, с. 839-842.

11.Джангвеладзе Т.А. О разрешимости первой краевой задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа. Сообщ. АН ГССР, 1984, т. 114, №2, с. 261-264.

12.Джангвеладзе Т.А. Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнений параболического типа. Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, №1, с. 41-46.

13.Джангвеладзе Т.А. Разностная схема для одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Доклады расш. заседаний сем. ИПМ им. И.Н. Векуа ТГУ, 1986, т. 2, №3, с. 40-43.

14.Джангвеладзе Т.А. О сходимости разностной схемы для одной системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Сообщ. АН ГССР, 1987, т. 126, №2, с. 257-260.

15.Джангвеладзе Т.А. Устойчивость стационарного решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Современные проблемы математической физики. Труды Всесоюзного симпозиума. Тбилиси. 22-25 апреля 1987 г, т. 1., с. 214-221.

16.Джангвеладзе Т.А., Любимов Б.Я., Коршия Т.К. О численном решении одного класса неизотермических задач диффузии электромагнитного поля. Труды ИПМ им. И.Н.Векуа ТГУ, 1986, т.18, с.5-47.

17.Дубинский Ю.А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Математический сборник, 1965, т. 67(109), №4, с. 609-639.

18. Дубинский Ю.А. Нелинейные параболические уравнения на плоскости. Математический сборник. 1966, т.69, №3, с.470-476.
19. Дубинский Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. М.: 1976, т. 9, с. 5-130.
20. Зельдович Я. Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сб. посвященный семидесятилетию акад. А.Ф. Иоффе, М.: 1950, с. 61-71.
21. Интегрироварие уравнений параболического типа методом сеток. Саульев В.К. М.: Физматгиз, 1960.
22. Исследование первой краевой задачи для некоторых нелинейных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа. Джангвеладзе Т.А. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1983.
23. Кажихов А.В. О стабилизации решений начально-краевой задачи для уравнений баротропной вязкой жидкости. Дифференц. уравнения, 1979, т.15, № 4, с.662-667.
24. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. Успехи мат. наук, 1987, т. 42, № 1, с.135-176.
25. Квазилинейные эволюционные уравнения в частных производных с операторными коэффициентами. Лаптев Г.И. Докт. дисс., 1990.
26. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка. Математический сборник, 2000, т. 191, №2, с.91-131.
27. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Антонцев С.Н.,Кажихов А.В., Монахов В.Н. Новосибирск, Наука, 1983.
28. Кружков С.Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка и некоторые задачи для квазилинейных

параболических уравнений. Вестн. МГУ, сер. матем. мех. , 1964, №6, с. 65-74.

29.Ладыженская О.А. Метод конечных разностей в теорий уравнений с частными производными. Успехи матем. наук. 1957, т. 12, №5, с. 123-149.

30.Ладыженская О.А., Солонников В.А. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1960, т. 59, с. 115-173.

31.Лаптев Г.И. Квазилинейные параболические уравнения, содержащие в коэффициентах оператор Вольтерры. Математический сборник. 1988, т. 136, №4, с. 530-540.

32.Лаптев Г.И. Математические особенности задачи о проникании магнитного поля в вещество. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988, т. 28, №9, с. 1332-1345.

33.Лаптев Г.И. Математические особенности задачи о проникании магнитного поля в вещество для квазистационарного приближения. Известия вузов. Математика, 1989, вып. 7, с. 10-12.

34.Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Ладыженская О.А. , Солонников В.А. , Уральцева Н.Н. М.: Наука, 1967.

35.Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Ладыженская О.А. 2-е изд. Н.: Наука, 1970.

36.Механика сплошной среды. Седов Л.И. 3-е изд. М.: Наука, 1976, т.1.

37.Некоторые методы решения неленейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

38.Неравенства в механике и физике. Дюво Г., Лионс Ж.Л. М.: Наука, 1980.

39. Олейник О.А. , Калашников А.С. , Чжоу-Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, сер. матем. , 1958, т. 22, №5, с. 667-704.

40. О сходящихся разностных схемах для уравнений вязкого газа. Кузнецов Б.Г. , Смагулов Ш. Новосибирск, 1982, (препринт Инст. теор. и прикл. мех. , №17).

41. Похожаев С.И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений. Матем. сб. , 1975, т. 96 (138), №1 , с.152-166.

42. Похожаев С.И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнений Кирхгофа. Дифференц. уравнения,1985,т.21, №1,с.101-108.

43. Разностные методы решения задач газовой динамики. Самарский А.А. , Попов Ю.П. М.: Наука, 1980.

44. Разностные методы решения краевых задач. Рихтмайер Р., Мортон К. М.: Мир, 1972.

45. Разностные схемы. Годунов С.К., Рябенький В.С. М.: Наука, 1975.

46. Расчет электрических и магнитных полей. Бухгольц Г. М.: ИЛ, 1961.

47. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. М.: Наука, 1987.

48. Самарский А.А., Соболь И.М. Примеры численного расчета температурных волн. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, т. 3, №4, с. 703-719.

49. Ступялис Л. О спектральной задаче для уравнения смешанного типа. Вестник Ленингр. гос. ун-та, 1967, №13, с. 86-102.

50. Теория разностных схем. Самарский А.А. М.: Наука, 1977.

51. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Темам Р. М.: Мир, 1981.

52. Уравнения с частными производными параболического типа. Фридман А. М.: Мир, 1968.
53. Устойчивость движения жидкости. Джозеф Д. М.: Мир, 1981.
54. Электричество и магнетизм. Парселл Э. 2-е изд. Н.: Наука, 1975.
55. Электродинамика сплошных сред. Ландау Л.Д. , Лифшиц Е.М. М.: ГТТИ, 1958.
56. Alduncin G., Oden J.T. Analysis of Galerkin approximations of a class of pseudomonotone diffusion problem. Siam J. Math. Anal., 1981, 12, N6, p. 917-930.
57. Aktinson F.V., Peletier L.A. Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation. Arch. Rat. Mech. Anal., 1974, N54, p. 373-392.
58. Barbu V. Integro-differencial equations in Hilbert spaces. An. Stunt. Univ., 1973, N19, p. 365-383.
59. Bell J., Cosner C., Bertiger W. Solutions for a flux-dependent diffusion model. SIAM J. Math. Anal., 1982, V.13, N 5, p. 758-769.
60. Browder F. E. Strongly nonlinear parabolic value problems. Amer. J. Math., 1964, 86, N2, p. 339-357.
61. Canon J.R., Lin Yanping. A priori error estimates for finite-element methods for nonlinear diffusion equations with memory. SIAM J. Numer. Anal., 1990, 27, N 3, p.595-607.
62. Clement P., Nohel J. Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels. SIAM J. Math. Anal., 1981, V. 12, p.514-535.
63. Dafermos C.M. Stabilizing effects of dissipacion. Lect. Notes Math., 1983, N 1017, p. 140-147.
64. Dafermos C.M., Hsiao L. Adiabatic shearing of incompressible fluids with temperature-dependent viscosity. Quart. Appl. Math., 1983, V.41, N 1, p. 45-58.
65. Dendy J.E. Galerkin's method for some highly nonlinear problems. SIAM J. Numer. Anal., 1977, N 14, p. 327-347.

66. Dickey R.W. The initial value problem for a nonlinear semi-infinite string. Proc. Royal Sc., Edinburgh, 1978, A82, N1-2, p. 19-26.
67. Ebihara A., Medeiros L., Miranda M. Local solutions of nonlinear wave equations. Nonlinear Anal., Theory, Meth., Appl., 1986, V.10, p. 27-40.
68. Edelvik F., Ledfelt G. Explicit hybrid solver for the Maxwell equations in 3D. J. Sci. Comput. 2000, V. 15, №1, p.61-78.
69. Galaktionov V.A., Vazquez J.L. Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimentions. Comm. Pure Appl. Math., 1997, V.50, N1, p. 1-67.
70. Gil O., Vazquez J. L. Focusing solutions for the p-Laplacian equation. Adv. Differential Equations, 1997, V.2, N2, p.183-202.
71. Gilding B.H., Peletier L.A. On a class of similarity solutions of the porous media equation I. J. Math. Anal. Appl., 1976, N55, p. 351-364.
72. Gilding B.H., Kersner R. The characterization of reaction-convection-diffusion processes by travelling waves. J. Differential Equations, 1996, V. 124, №1, p.27-79.
73. Hybrid solvers for the Maxwell equations in time-domain. Edelvik F. Uppsala Universitet, 2002.
74. Jangveladze T.A. Investigation and numerical solution of some systems of nonlinear partial differential equations. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 1991, V. 6, N 1, p.25-28.
75. Jangveladze T.A. On the asymptotic behavior as $t\to\infty$ of solution for one nonlinear integro-differential parabolic equation. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 1997, V. 12, N 1, p.9-11.
76. Jangveladze T.A. On one class of nonlinear integro-differential parabolic equations. Reports of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 1997, V. 23,p.25-65.

77. Jangveladze T.A., Kiguradze Z.V. Estimates of Stabilization Rate as $t \to \infty$ of Solutions of a Nonlinear Integro-Differential Equation. Georgian Mathematical Journal.V.9, №1, 2002, p.57-70.
78. Jangveladze T.A., Kiguradze Z.V. On the asymptotic behaviour of solution for one system of nonlinear integro-differential equations. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, V.14, №1. 1999, p. 35-38.
79. Jangveladze T.A., Kiguradze Z.V. On the difference schemes for one nonlinear diffusion model. Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Reports, 1999, V.25, p. 89-95.
80. Jangveladze T.A, Kiguradze Z.V. The asymptotic behaviour of the solution of one nonlinear integro-differential parabolic equation. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, 1995, V.10, №1. p. 36-38.
81. Kiguradze Z.V. Finite difference scheme for a nonlinear integro-differential system. Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, V.50-51, 2000-2001, p. 65-72.
82. Kiguradze Z.V. On the stationary solution for one diffusion model. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, V16, №1, 2001, p.17-20.
83. Kiguradze Z.V. The difference scheme for one system of nonlinear partial differential equations. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, V.14, №3, 1999, p. 67-70.
84. Kirane M., Kouachi S. Global solution to a system of strongly coupled reaction-diffusion equations. Nonlinear Anal., 1996, N8, p.1387-1396.
85. Kuiper H.J. Existence and comparison theorems for nonlinear diffusion systems. J. Math. Anal. Appl., 1977, N 60, p. 166-181.

86. Liu J.H. A necessary condition for asymptotic property in integro-differential equations. Proceedings of Dynamic Systems and Applications, V.2 (Atlanta, GA, 1995), Dynamic, Atlanta, GA, 1996, p. 341-348.

87. Long N.T., Dinh A.P.N. Periodic solutions of a nonlinear parabolic equation associated with the penetration of a magnetic field into a substance. Comput. Math. Appl., 1995, V.30, N 1, p. 63-78.

88. MacCamy R.C. An integro-differential equation with application in heat flow. Quart. Appl. Math.,1977, N35, p.1-19.

89. McNabb A. Comparison and existence theorems for multicomponent diffusion systems. J. Math. Anal. Appl., 1961, 3, N 1, p. 133-144.

90. Medeiros L.A. Sur une equation non lineaire de la Physique Mathematique. C. R. Acad. Sc. Paris, 1978, A 286, p. 277-278.

91. Miletta P. An evolution with non-local non-linearities: existence, uniqueness and asymptotic behaviour. Math. Meth. Appl. Sci., 1988, V.10, p.407-425.

92. Nakao M., Ohara Y. Gradient estimates for a quasilinear parabolic equation of the mean curvature type. J. Math. Soc. Japan, 1996, V.48, N3, p. 455-466.

93. Neta B. Numerical solution of a nonlinear integro-differential equation. J. Math. Anal. Appl., 1982, N89, p. 589-611.

94. Neta B., Jarome O.I. Finite differenses versus finite elements for solving nonlinear integro- differential equations. J. Math. Anal. Appl., 1985, N68, p. 607-617.

95. Raviart P.A. Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineares. J. Funct. Anal., 1970, 5, N2, p. 299-328.

96. Raynal M.L. Sur un problem de diffusion non lineaire. C. R. Acad. Sc. Paris, 1975, A 280, N 12, p. 785-787.

97. Sacks P.E. The initial and boundary value problem for a class of degenerate parabolic equations. Commun. Part. Different. Equat., 1983, 8, N 7, p. 693-733.

98. Sattinger D.H. Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems. Indiana Univ. Math. J., 1972, N 21, p. 979-1000.

99. Schechter E. The use of differential inequalities in the convergence analysis of the numerical solution of degenerate parabolic equations. Top. Numer. Anal., 1975, N2, p. 163-173.

100. Staffans O.J. On a nonlinear hyperbolic Volterra equation. SIAM J. Math. Anal., 1980, N11, p. 793-812.

101. Teo K.L. Existense and uniqueness of solutions of system governed by second-order quasilinear intrego-partial differential equations of parabolic type. A, Equationes Math. 1980, 2, N 2-3, p. 133-148.

102. Tsutsumi M. Existence and nonexitence of global solutions. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1972, N 8, p. 211-229.

103. Zlamal M. Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field. RAIRO Anal. Numer., 1982, V. 16, №2, p.161-191.