

Тбилисский государственный университет им. Ив.Джавахишвили

На правах рукописи

ТИНАТИН ДАВИТАШВИЛИ

**ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ
АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени кандидата
физико-математических наук

01.01.07 - Вычислительная математика

Научные руководители

Давид Гордезиани, Доктор физико-математических
наук, профессор

Нугзар Схиртладзе, Кандидат физико-математических
наук, доцент

Тбилиси, 2002

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССОРАМИ	21
§ 1.1. О некоторых синхронных итерационных методах решения нелинейных уравнений для ЭВМ с параллельными процессорами	21
§ 1.2. О некоторых асинхронных итерационных методах решения нелинейных уравнений для параллельных вычислительных систем	41
§ 1.3. Об одном итерационном методе решения граничной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром на многопроцессорной ЭВМ	54
ГЛАВА II. О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССОРАМИ	72
§ 2.1. Интерполирование многомерных функций и итерационные методы для систем нелинейных алгебраических уравнений	72
§ 2.2. Сходимость итерационного метода	81
§ 2.3. Варианты итерационного метода для многопроцессорной ЭВМ	92
§ 2.4. Использование итерационного метода (2.32) для нахождения автомодельных решений	

некоторых задач газовой динамики	102
§ 2.5. Численное решение системы нелинейных уравнений приближения Клаппа для бинарных металлических соединений	108
ГЛАВА III. О СХОДИМОСТИ КИНЕТИЧЕСКИ-СОГЛАСОВАННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ	117
§ 3.1. Разностная схема. Существование и единственность решения разностной схемы	117
§ 3.2. Основное энергетическое неравенство	127
§ 3.3. Сходимость разностной схемы	130
ЛИТЕРАТУРА	139

ВВЕДЕНИЕ

Для численного моделирования сложных прикладных задач в настоящее время перспективным направлением представляется использование вычислительных систем с параллельной обработкой информации.

Многопроцессорные компьютеры представляют собой тесно связанную совокупность мощных универсальных или специализированных процессоров, способных параллельно выполнять разные фрагменты одной и той же программы (или потока программ). Процессоры взаимодействуют друг с другом через общую память или через каналов обмена.

Параллельные вычислительные системы имеют ряд преимуществ, а именно, они обладают большой надёжностью, повышенным быстродействием, высокой эффективностью.

Для эффективного использования параллельных вычислительных систем требуется не только переработка существующих последовательных программ, но и разработка новых математических алгоритмов с учётом особенностей параллельных вычислений. К этой важнейшей проблеме и относится настоящая диссертация.

К настоящему моменту времени многопроцессорные ЭВМ различных типов изготавливаются несколькими десятками производителей в различных странах мира, и проблема совместимости между ними на уровне машино-независимых языков хорошо осознана и решается с помощью разработки специализированных стандартов, регламентирующих интерфейс функций, предназначенных для поддержки параллельного оборудования. Ситуация вполне аналогична той, в результате которой возникли стандарты языков С, Fortran и других. Одним из наиболее распространенных на сегодняшний момент времени (но далеко не

единственным) параллельных стандартов является международный стандарт MPI (Message Passing Interface).

ЭВМ Parsytec CC, как и многопроцессорные компьютеры других крупных фирм, снабжены параллельными библиотеками, содержащими параллельные функции стандарта MPI. Программирование с применением функций из этих библиотек несколько снижает эффективность использования параллельных ЭВМ, зато резко повышает переносимость разрабатываемого параллельного прикладного математического обеспечения на многопроцессорную вычислительную технику с разнородной архитектурой.

Новые исследования в области параллельных вычислений пока выглядят весьма скромно в сравнении с результатами в области последовательных вычислений.

Вероятно, главной движущей силой развития векторных и параллельных компьютеров были потребности научных вычислений, а одной из важнейших задач в области научных вычислений является решение систем линейных алгебраических уравнений. Даже для последовательных компьютеров эта задача остаётся полем активной деятельности, что особенно верно в отношении итерационных методов. Появление параллельных и векторных компьютеров сделало необходимым переосмысление даже основных алгоритмов и этот процесс всё ещё продолжается с большой интенсивностью. Достаточно полный обзор параллельных алгоритмов для задач линейной алгебры можно найти в монографиях [37,38,71,76,81] и статьях [1,3,12,20]. Там же обсуждаются основные характеристики векторных и параллельных компьютеров, а также особенности работы с алгоритмами для таких систем.

В последнее время тратится много усилий для построения и изучения параллельных алгоритмов решения нелинейных алгебраических

уравнений и систем уравнений. Формально можно выделить три типа организации параллельных процессов в единый вычислительный процесс: синхронные, синхронизируемые и асинхронные процессы [41].

Синхронные процессы взаимодействуют друг с другом через определённые периоды (такты), так что процессы могут начаться или продолжаться только после того, как закончатся все параллельные процессы предшествующего такта. Ясно, что в этом случае вариации в длительности процессов не позволяют оптимально спланировать расписание их работы и в результате проявляются существенные непроизводительные потери из-за простоев процессоров.

Простейшим последовательным методом поиска является метод бисекции. Он без затруднений может быть реализован на параллельной ЭВМ с r процессорами. Для этого на каждой итерации функция вычисляется одновременно в r равноотстоящих точках, которые делят исходный интервал на $r + 1$ равных подинтервалов. Затем на основе анализа знаков вычисленных значений функций выбирается интервал локализации нуля. Для локализации нуля в интервале длины ε метод бисекции требует выполнение $\log_2(1/\varepsilon)$ шагов, а параллельный метод требует $\log_{r+1}(1/\varepsilon)$ шагов. Следовательно, ускорение равно

$$s = \frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\log_{r+1}(1/\varepsilon)} = \log_2(r + 1).$$

Для применения метода бисекции достаточно непрерывности функции. Для функции высокого порядка гладкости можно построить синхронные методы поиска, имеющие более быструю сходимость [23].

В работе [5] предложены синхронные параллельные итерационные методы, в которых использованы обратные интерполяционные формулы

Лагранжа. Доказывается сходимость этих методов, если начальные приближения выбраны достаточно близко к искомому единственному корню функции, а также рассматривается вопрос об оптимальном выборе числа процессоров. В [22] приводится обзор некоторых итерационных методов решения нелинейных уравнений. В [30] рассматриваются методы решения одного нелинейного уравнения, которые основаны на разложении функции в ряд Тейлора и аппроксимации многочленами. В [15], [24] приведены несколько параллельных методов решения нелинейных уравнений. Здесь-же можно найти ссылки на другие работы. Интересные результаты, связанные с исследованием скорости сходимости итерационных методов (в том числе и параллельных), получены в [31].

Другие параллельные методы высокого порядка можно найти в работах [16], [25], [62].

На основе сравнения этих алгоритмов с оптимальными последовательными методами можно заключить, что ускорение указанных алгоритмов с ростом числа процессоров увеличивается лишь логарифмически.

Параллельные алгоритмы отыскания нуля функции одной переменной почти во всех случаях предназначены для реализации на ЭВМ типа SIMD (Single Instruction - Multiple Data), представляющий набор параллельных процессоров с последовательным потоком команд и параллельным потоком данных (один поток команд, много потоков данных) [33], т.е. эти методы являются синхронными.

Как уже отмечалось, время, необходимое для выполнения синхронизации, так же как и время, затрачиваемое процессором на ожидание того, чтобы все необходимые данные стали доступными для продолжения вычислений, часто вносит существенный вклад в накладные вычислительные затраты. Поэтому для некоторых численных методов

привлекательной альтернативой служит допущение асинхронной работы процессоров.

Хорошо было бы найти алгоритмы, работающие на нескольких процессорах без какой либо синхронизации. В этом случае наилучший способ решения состоит в асинхронном использовании процессоров ЭВМ типа MIMD – Multiple Instruction - Multiple Data (много потоков команд, много потоков данных) [81]. Алгоритмы такого типа называются асинхронными численными процессами. Главная причина развития параллельных алгоритмов этого типа состоит в том, что почти нет параллельных алгоритмов, которые загружали бы все процессоры равномерно. Синхронизация же работы различных процессоров может привести к значительному уменьшению производительности ЭВМ.

Асинхронный итерационный метод для решения систем нелинейных алгебраических уравнений схематически можно представить следующим образом [81]:

Пусть

$$F(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})]^T, \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_k)^T, \quad F: R^k \rightarrow R^k.$$

$J = \{J_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность непустых подмножеств множества $\{1, 2, \dots, k\}$ и $S = \{s_1(j), s_2(j), \dots, s_k(j) \mid j = 1, 2, \dots\}$ – последовательность векторов из N^k .

Асинхронный итерационный процесс порождает последовательность \bar{x}^j , $j = 1, 2, \dots$, – векторов из R^k , которая определяется следующим образом

$$x_i^j = \begin{cases} x_i^{j-1}, & i \notin J_j, \\ f_i(x_1^{s_1(j)}, x_2^{s_2(j)}, \dots, x_k^{s_k(j)}), & i \in J_j, \end{cases}$$

где \vec{x}^0 – начальный вектор.

Последовательность J и S для всех $i = 1, 2, \dots, k$ должны удовлетворять следующим условиям:

(i) $s_i(j) \leq j - 1$ для всех $j = 1, 2, \dots$;

(ii) $s_i(j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$;

(iii) каждое i встречается во множествах $J_j, j = 1, 2, \dots$,

бесконечное число раз.

Сходимость итерационного процесса доказывается в [2].

Некоторые результаты о методах поиска для нахождения корней с помощью асинхронных итерационных процессов можно найти в [13], дальнейшие ссылки см. в [26].

В работе [9] рассматривается применение метода обратной сплайн-интерполяции для решения систем нелинейных алгебраических уравнений, возникающих при аппроксимации дифференциальных уравнений газовой динамики разностными схемами.

При рассмотрении математических моделей некоторых задач естествознания, например, автомодельных задач газовой динамики, возникают граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром.

Единый подход к постановке и исследованию автомодельных задач, описывающих нелинейные процессы в механике сплошной среды, предложены в монографиях [39], [40]. В этих работах можно найти дальнейшие ссылки на другие работы.

Граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались в [28], [29], [75]. В [65] для решения аналогичных задач строится итерационный метод, который использует метод хорд. Там же

рассматривается итерационный метод решения одной автомодельной задачи газовой динамики.

Параллельные численные алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются в [14], [15], [88], [89]. В работах [88],[89] предложен подход, позволяющий генерировать блочные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений на параллельных вычислительных системах с заданной степенью точности. В рассматриваемых методах решение дифференциального уравнения находится одновременно во всех точках блока. Получены оценки, характеризующие степень параллелизма сгенерированных методов: коэффициенты ускорения и эффективности.

Актуальной задачей современной вычислительной аэродинамики является моделирование газодинамических течений. Численные методы для расчёта таких течений имеют большую трудоёмкость и могут применяться лишь при наличии достаточно мощной вычислительной техники. Одним из наиболее перспективных путей достижения высокой производительности является использование многопроцессорных вычислительных систем.

В работах [53], [54] на примере кинетически-согласованных разностных схем [78] для решения задач газовой динамики анализируются возможности реализации численных алгоритмов на многопроцессорных вычислительных системах с распределённой памятью. Рассматриваются вопросы выбора алгоритма, удобного для распараллеливания на таких системах. Проводится анализ эффективной производительности вычислительной системы на данном классе задач.

В работе [36] принцип расщепления, хорошо зарекомендовавший себя при построении разностных схем для уравнений Эйлера, применяется для модификации кинетически-согласованных разностных схем.

Сходимость разностных схем для системы законов сохранения, записанных в виде дифференциальных уравнений, даже при наличии гладкого решения у исходной задачи является трудной самостоятельной задачей. Эти вопросы обсуждаются в работе [6], где доказывается локальная сходимость разностных схем для системы квазилинейных уравнений первого порядка гиперболического типа.

Проблеме сходимости разностных схем газовой динамики в Эйлеровых переменных посвящено ряд работ [21,51,52,67-70,74,86,87].

Некоторые параллельные алгоритмы для решения задач математической физики рассматриваются в работах [42]-[44].

Цель и основные задачи исследования

— Построение и исследование синхронных итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений и систем уравнений, которые могут быть эффективно реализованы на многопроцессорной вычислительной системе типа SIMD.

— Построение и исследование асинхронных итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений. В основу асинхронных численных методов положена идея организации вычислений на параллельных системах типа MIMD. Такими вычислительными системами являются транспьютеры, включающие в себя большое число (сотни и тысячи) относительно простых асинхронно-функционирующих процессоров, имеющие локальную память и связанные между собой однородной коммутационной сетью, а также кластеры, включающие в себя отдельные вычислительные системы (компьютеры), связанные между собой мощной высокоскоростной сетью.

— Построение и исследование итерационных алгоритмов нахождения автомодельных решений задач газовой динамики для многопроцессорных вычислительных систем.

— Теоретическое исследование и обоснование кинетически-согласованных разностных схем для решения задач газовой динамики, которые успешно реализуются на транспьютерной вычислительной системе.

Новизна и значимость работы

— Разработана методика, при помощи которой исследуется проблема построения синхронных и асинхронных итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений и систем уравнений, которые могут быть эффективно реализованы на параллельных вычислительных системах. Доказывается сходимость этих итерационных методов и дана оценка скорости сходимости.

— Разработана методика, при помощи которой построены численные алгоритмы с учётом особенностей параллельных вычислений в случае граничной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. Доказана сходимость предложенного итерационного метода. Возможности метода продемонстрированы на примере одномерного неустановившегося движения газа под действием плоского поршня при наличии объемных источников (стоков) массы, импульса и энергии.

— Доказывается сходимость кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики в переменных Эйлера с учётом источников (стоков) в случае идеального газа в классе достаточно гладких решений дифференциальной задачи.

— Теоретические результаты диссертации тесно связаны с современными практическими задачами. Наряду с задачами газовой динамики рассматриваются численные методы решения системы нелинейных уравнений приближения Клаппа для бинарных металлических соединений.

Апробация работы

Основные результаты диссертационной работы докладывались на научно-исследовательских семинарах Института прикладной математики им. И.Н.Векуа, кафедры математического обеспечения компьютеров и информационных технологий, кафедры математического моделирования Тбилисского гос.университета, а также на Всесоюзном симпозиуме "Современные проблемы математической физики" (Тбилиси, 1982), на расширенном заседании семинара Института прикладной математики им. И.Н.Векуа, посвящённой 75-летию Тбилисского гос.университета (Тбилиси, 1993).

Структура работы

Работа состоит из введения, трёх глав и списка литературы, который содержит 89 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении на основе обзора литературы, посвящённой затрагиваемых в работе вопросам, обсуждается актуальность темы

диссертации и современное состояние рассматриваемых проблем. Там же приводится краткое содержание работы и формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе рассматриваются проблемы построения и исследования синхронных и асинхронных итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений с учётом особенностей параллельных вычислений.

В §1.1 рассматриваются вопросы построения синхронных итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений, которые могут быть эффективно реализованы на многопроцессорной вычислительной системе типа SIMD.

Рассматривается нелинейное алгебраическое уравнение

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

где $f(x)$ – функция одной вещественной переменной. Предполагается, что можно найти интервал $I = (a, b)$, где уравнение (1) имеет единственный корень, $f(x) \in C^k(I)$ и $f'(x) \neq 0$ при $x \in I$. Если известны значения производных функции $y = f(x)$, то нахождение значений производных обратной функции $x = g(y)$ не связано с большими трудностями.

Рассмотрим итерационную последовательность N -мерных векторов $\vec{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)})$, $i = 0, 1, \dots$, каждая компонента которых является приближением к корню \bar{x} уравнения (1). Очевидно, что $\bar{x} = g(0)$. Для нахождения приближённых значений \bar{x} функцию $g(y)$ заменим интерполяционным полиномом Эрмита, построенным на каком-нибудь подмножестве множества $\{y_j^{(i)}\}_{j=1}^N$, где $y_j^{(i)} = f(x_j^{(i)})$,

$j = 1, 2, \dots, N$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Обозначим через M число узлов, используемых в интерполяционной формуле Эрмита, $2 \leq M \leq N - 1$. Всего построим N полиномов Эрмита. Узлы для интерполяционных полиномов будем выбирать следующим образом: рассмотрим множество индексов $A = \{1, 2, \dots, N\}$ и составим N различных подмножеств A_j этого множества, где в каждом подмножестве количество элементов равно M . Пусть также $j \in A_j$. В качестве узлов для полинома Эрмита $H_j^{(i)}(y)$ возьмём узлы $\{y_s^{(i)}\}$, $s \in A_j$, и рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$x_j^{(i+1)} = H_j^{(i)}(0), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Если заданы $\bar{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)})$, т.е. N различных начальных приближений к \bar{x} , где $x_k^{(0)} \in I$, $k = 1, 2, \dots, N$, то при помощи этого итерационного процесса получим последовательность векторов $\bar{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)})$, $i = 0, 1, \dots$. Отметим, что реализация этого алгоритма потребует N параллельных процессоров многопроцессорной вычислительной системы типа SIMD.

Доказывается сходимость итерационного процесса (2) и оценивается скорость сходимости при условии, что начальные приближения $x_k^{(0)}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) находятся в малой окрестности корня \bar{x} (локальная сходимость).

Далее рассматривается модифицированный итерационный метод, в основу которого лежит итерационный метод (2) и доказывается глобальная сходимость этого модифицированного метода при условии, что $x_k^{(0)} \in I$, $k = 1, 2, \dots, N$.

В §1.2 построены разные варианты асинхронных итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений. Эти методы основаны на итерационном процессе (2), только в этом случае при построении полиномов Эрмита $H_j^{(i)}(y)$, $j = \overline{1, N}$, используются значения функций $y_s^{(i)} = f(x_s^{(i)})$, $s \in A_j$, а значения производных вычисляются в узлах $x = x_s^{(m_i)}$, $m_i = [(i-1)/p - 1]p + 1$, где $p \geq 1$ некоторая константа (при $i \leq p$, $m_i \equiv 0$, а квадратные скобки означают целую часть выражения). Это обстоятельство объясняется тем, что обычно для вычисления значений функции и её производных требуется различное время. Во избежании простоев некоторых процессоров при реализации асинхронных методов используется текущее значение функции и её производных. Итак, при реализации асинхронного итерационного метода компоненты вектора $\vec{X}^{(i)}$ вычисляются асинхронно. В основу асинхронных итерационных методов положена идея организации вычислений на параллельных системах типа MIMD.

Далее доказывается сходимость асинхронных итерационных методов и оценивается скорость сходимости. Исследуется также вопрос об эффективности предложенных итерационных методов.

В §1.3 рассматривается проблема нахождения автомодельного решения математической модели неустановившегося движения газа, возникшего под действием плоского поршня при наличии объёмных источников (стоков) массы, импульса и энергии. Эта задача является частным случаем граничной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром.

Рассматривается итерационный метод решения этой граничной задачи с учётом особенностей параллельных вычислений. Доказывается сходимость предложенного итерационного метода и оценивается скорость сходимости.

Далее предложенный метод использован для нахождения автомодельных решений упомянутой задачи газовой динамики. Проведены соответствующие расчёты.

Во второй главе рассматриваются алгоритмы решения систем нелинейных алгебраических уравнений с учётом особенностей параллельных вычислений.

В §2.1 рассматривается задача многомерного интерполирования функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предложены разные варианты построения многомерных интерполяционных многочленов. Также рассматриваются некоторые последовательные итерационные методы нахождения решений систем нелинейных алгебраических уравнений.

В §2.2 доказывается сходимость построенных в §2.1 итерационных методов и оценивается скорость сходимости этих методов.

В §2.3 на основе предложенных алгоритмов (§2.1) построены итерационные методы решения систем нелинейных уравнений, которые могут быть эффективно реализованы на многопроцессорной вычислительной системе типа SIMD. Доказывается сходимость этих итерационных методов и оценивается скорость сходимости. Приводятся результаты численных расчётов, которые подтверждают эффективность предложенных методов.

В §2.4 рассматривается использование этих итерационных методов для нахождения автомодельных решений некоторых задач газовой динамики.

В §2.5 рассматривается численный метод решения системы нелинейных алгебраических уравнений приближения Клаппа для бинарных металлических соединений. Для исследования некоторых свойств (термодинамических, механических и т.д.) соединений, характеризующихся определённой степенью упорядоченности, важное значение имеет знание распределения вероятностей. Одним из важных методов решения таких задач является метод вариации вероятностей, при помощи которого задача сводится к проблеме нахождения решения системы нелинейных

алгебраических уравнений. Для решения полученной системы предлагается итерационный метод, который может быть эффективно реализован на параллельной вычислительной системе типа SIMD.

В третьей главе исследуется сходимость кинетически-согласованных схем газовой динамики в переменных Эйлера с учётом источников (стоков) в случае идеального газа. В отличие от традиционных схем данная схема не требует введения искусственной вязкости для обеспечения устойчивости счёта при моделировании течений с большими скоростями. Роль регуляризирующих добавок в этих алгоритмах играют дополнительные диссипативные члены, входящие в квазигидродинамическую систему уравнений и отсутствующие в традиционных уравнениях Навье-Стокса. Это позволяет использовать центрально-разностную аппроксимацию второго порядка точности для всех пространственных производных, включая конвективные слагаемые [55-58]. Доказательство сходимости разностной схемы проведено методом энергетических неравенств. В классе достаточно гладких решений дифференциальной задачи доказано, что решение разностной задачи сходится в сеточной норме L_2 со скоростью $O(h^2)$. Предложенную схему можно эффективно реализовать на транспьютерной вычислительной системе.

В §3.1 рассматривается разностная схема и исследуется проблема существования и единственности решения разностной схемы.

В области $\Omega = \{(x, t): x \in (-\infty, +\infty), t \in [0, T]\}$ для системы дифференциальных уравнений, описывающей одномерное плоскопараллельное газодинамическое течение, рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = f_1(x, t, \rho, m, \varepsilon), \quad (3)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = f_2(x, t, \rho, m, \varepsilon), \quad (4)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(E + P)) = f_3(x, t, \rho, m, \varepsilon), \quad (5)$$

$$E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1}, P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, m = \rho u, \gamma = \text{const} > 1,$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad m(x, 0) = m_0(x), \quad E(x, 0) = E_0(x), \quad (6)$$

где ρ – плотность, m – импульс, ε – удельная внутренняя энергия, P – давление, E – полная энергия, u – скорость, f_1, f_2, f_3 – функции, выражающие источники или стоки массы, импульса и энергии, а ρ_0, m_0, E_0 – достаточно гладкие, периодические функции с периодом L .

Для задачи (3)-(6) рассматривается кинетически-согласованная разностная схема

$$\rho_{ht} + m_{hx} = f_{1h} + \frac{\tau}{2}(\rho_h u_h^2 + P_h)_{\bar{x}x}, \quad (7)$$

$$(\rho_h u_h)_t + (m_h u_h + P_h)_x = f_{2h} + \frac{\tau}{2}(\rho_h u_h^3 + 3P_h u_h)_{\bar{x}x}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_{ht} + (u_h(E_h + P_h))_x = \\ = f_{3h} + \frac{\tau}{2} \left[u_h^2(E_h + 2P_h) + \frac{P_h}{\rho_h}(E_h + P_h) \right]_{\bar{x}x}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho_h(ih, 0) = \rho_0(ih), \quad m_h(ih, 0) = m_0(ih), \\ E_h(ih, 0) = E_0(ih), \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$E_h = \frac{m_h u_h}{2} + \frac{P_h}{\gamma - 1}, \quad P_h = (\gamma - 1) \rho_h \varepsilon_h, \quad m_h = \rho_h u_h,$$

а сеточные функции

$$\rho_h \equiv \rho_h(ih, j\tau), \quad m_h \equiv m_h(ih, j\tau), \quad \varepsilon_h \equiv \varepsilon_h(ih, j\tau), \quad P_h \equiv P_h(ih, j\tau), \\ E_h \equiv E_h(ih, j\tau), \quad u_h \equiv u_h(ih, j\tau), \quad f_{nh} \equiv f_{nh}(ih, j\tau), \quad (n = 1, 2, 3)$$

определены в области

$$D_h = w_h \times w_\tau, \quad w_h = \{ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad w_\tau = \{j\tau, j = 0, 1, \dots, N_1\}, \\ Nh = L, \quad N_1\tau = T, \quad N_1 \text{ и } N \text{ — натуральные числа.}$$

Доказывается существование и единственность решения разностной схемы (7)-(9).

В §3.2 получено основное энергетическое неравенство.

В §3.3 доказывается сходимость разностной схемы (7)-(10).

Главная проблема состоит в том, что полученное основное энергетическое неравенство (нелинейное) является неявным. Имеет место следующая

Теорема. Пусть выполнены условия, которые гарантируют существование периодического по x гладкого решения класса $C^{3,2}(\Omega)$ задачи (3)-(6). Пусть также $\rho(x, t) \geq \delta = \text{const} > 0$, $\tau = h^{2+2\varepsilon}$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$), а функции f_1, f_2 и f_3 удовлетворяют условия Липшица относительно аргументов ρ, m, ε . Тогда существует $h_0 = \text{const} > 0$, такая, что при $h \leq h_0$ справедливы следующие утверждения:

1) Решение разностной задачи (7)-(10) на интервале $[0, T]$ существует и единственно;

2) Решение задачи (7)-(10) сходится к решению задачи (3)-(6) в сеточной норме L_2 со скоростью $O(h^2)$.

Основные результаты диссертационной работы

1. Разработана методика, позволяющая построить синхронные и асинхронные итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений и систем уравнений с учётом особенностей параллельных вычислений. Доказывается сходимость этих методов и оценивается скорость сходимости.

2. Предложена методика, при помощи которой строится итерационный метод для нахождения автомодельного решения математической модели неустановившегося движения газа, возникшего под действием плоского поршня при наличии объёмных источников (стоков) массы, импульса и энергии. Предложенный итерационный метод можно использовать для решения рассматриваемой задачи на многопроцессорной вычислительной системе. Доказывается сходимость итерационного метода и оценивается скорость сходимости.

3. Разработана методика построения итерационных методов для решения системы нелинейных уравнений приближения Клаппа для бинарных металлических соединений. С помощью такого подхода исследован распределение вероятностей для некоторых бинарных сплавов.

4. Доказывается сходимость кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики в переменных Эйлера с учётом источников (стоков) в случае идеального газа в классе достаточно гладких решений исходной дифференциальной задачи.

ГЛАВА I. НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССОРАМИ

§1.1. О некоторых синхронных итерационных методах решения нелинейных уравнений для ЭВМ с параллельными процессорами

В данном параграфе исследуются вопросы построения итерационных процессов решения нелинейных алгебраических уравнений, которые могут быть эффективно реализованы на N-процессорной ЭВМ типа SIMD.

1^o. Порядок сходимости. Перед тем, как сформулировать алгоритмы решения нелинейных уравнений, приведём некоторые необходимые определения. Определим порядок сходимости.

Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ – сходящая к нулю последовательность, при этом $\varepsilon_i \neq 0$, кроме конечного числа индексов i , а $\lambda > 1$ – вещественное число.

Определение 1. Если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^\lambda} = q \geq 0 \quad (1.1)$$

тогда относительно последовательности $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ будем говорить, что имеет место A-сходимость с порядком λ .

Определение 2. Если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(-\ln |\varepsilon_i| \right)^{1/i} = \lambda \quad (1.2)$$

тогда относительно последовательности $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ будем говорить, что имеет место В-сходимость с порядком λ .

Определение 3. Если

$$|\varepsilon_i| \leq \gamma \theta^{\lambda i} \text{ при } i \geq i_0 \text{ и } \lambda > 1, \quad (1.3)$$

где $\gamma > 0$, $0 < \theta < 1$ – постоянные, тогда относительно последовательности $\{\varepsilon_i\}_{i=0}^{\infty}$ будем говорить, что имеет место С-сходимость с порядком λ .

Можно показать, что из А-сходимости следует В-сходимость и С-сходимость. Обратное утверждение в общем случае неверно. Также можно показать, что из (1.2) не вытекает оценка (1.3) и наоборот.

2^o. Описание итерационного метода. Пусть $f(x)$ – функция одной вещественной переменной. Будем предполагать, что

A1) можно найти такой интервал $I = (a, b)$, где уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень \bar{x} и $f(x) \in C^k(I)$. Потребуем также, что $f'(x) \neq 0$, когда $x \in I$. Так как $f(\bar{x}) = 0$, то найдётся такая окрестность I^* точки \bar{x} , где существует функция $g = f^{-1}$ и $g \in C^k(I^*)$.

Рассмотрим итерационную последовательность N -мерных векторов

$$\vec{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

каждая компонента которых суть приближённое значение корня \bar{x} . Далее мы покажем, что при определённых условиях каждая компонента вектора $\vec{X}^{(i)}$ сходится к \bar{x} , когда $i \rightarrow \infty$.

Пусть заданы $\vec{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{N-1}^{(0)}, x_N^{(0)})$ — N различных начальных приближений к \bar{x} из I , а также значения функции и её производных в этих точках

рассмотрим множество индексов $A = \{1, 2, \dots, N\}$ и выберем N различных подмножеств A_j этого множества, где в каждом подмножестве количество элементов равно M . Пусть также $j \in A_j$. Для удобства реализации потребуем, чтобы все полиномы Эрмита имели одинаковый порядок $m - 1$, где $2 \leq m \leq k$.

В качестве узлов для полинома $H_j^i(y)$ возьмём точки $\{y_s^i\}$, $s \in A_j$. Очевидно, в узлах интерполяции должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} H_j^{(i)}(y_s^{(i)}) &= x_s^{(i)}, \\ \left[H_j^{(i)}(y_s^{(i)}) \right]' &= \left[x_s^{(i)} \right]', \end{aligned} \tag{1.6}$$

.....

$$\left[H_j^{(i)}(y_s^{(i)}) \right]^{(\alpha_{js}-1)} = \left[x_s^{(i)} \right]^{(\alpha_{js}-1)}, \quad s \in A_j,$$

где $\sum_{s \in A_j} \alpha_{js} = m$ и $\alpha_{js} < \alpha_s$, $j = \overline{1, N}$.

Рассмотрим следующий итерационный процесс: j -компоненту вектора $\vec{X}^{(i+1)}$ вычислим таким образом

$$x_j^{(i+1)} = H_j^{(i)}(0), \quad j = \overline{1, N}. \tag{1.7}$$

Итак, мы получим последовательность векторов $\{ \vec{X}^{(i)} \}_{i=0}^{\infty}$. Отметим, что реализация этого алгоритма потребует N параллельных процессоров. Причём алгоритм рассчитан для многопроцессорной системы типа SIMD.

В случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 1$, вышеописанный метод совпадает с итерационным алгоритмом из [5].



Для наглядности рассмотрим один конкретный случай итерационного процесса (1.4),(1.7). Пусть

$$N = 4, \quad M = 2, \quad m = 3,$$

$$A_j = \{j, j+1\}, \quad \alpha_{jj} = 2, \quad \alpha_{j,j+1} = 1, \quad j = \overline{1,4}.$$

При этом в каждой точке $x_j^{(i)}$ ($j = \overline{1,4}$) вычислим значения функции и её производной первого порядка. При построении интерполяционного полинома в узлах $y_j^{(i)}, y_{j+1}^{(i)}$ в первой точке используется значение функции и производной, а во второй точке — только значение функции. Здесь в нижнем индексе сумма берётся по модулю 4: $x_5^{(i)} \equiv x_1^{(i)}$. Тогда получаем следующий итерационный процесс:

$$\vec{X}^{(i+1)} = \left\{ H_1^{(i)}(0), H_2^{(i)}(0), H_3^{(i)}(0), H_4^{(i)}(0) \right\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

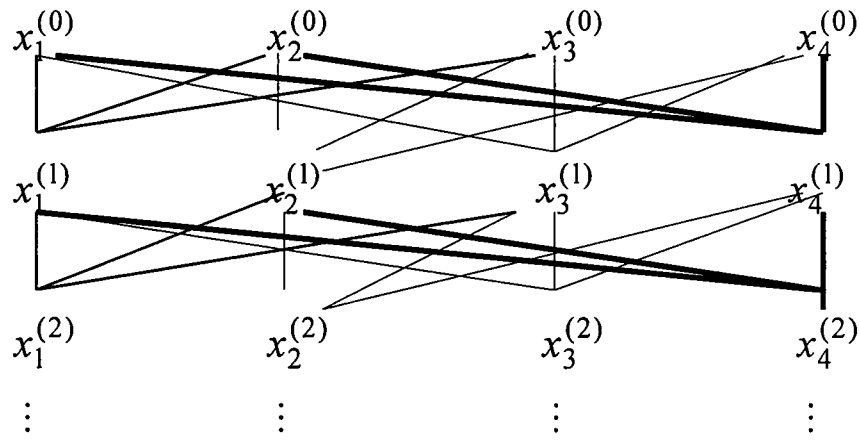
где $H_j^{(i)}(y), j = \overline{1,4}$, интерполяционный полином Эрмита, построенный для узлов $\{ y_s^{(i)} \}, s \in A_j, j = \overline{1,4}$.

В этом случае алгоритм итерационного процесса можно записать в следующем виде:

$$x_j^{(i+1)} = -x_j^{(i)} \frac{f(x_{j+1}^{(i)}) [2f(x_j^{(i)}) - f(x_{j+1}^{(i)})]}{[f(x_j^{(i)}) - f(x_{j+1}^{(i)})]^2} + \frac{f(x_j^{(i)})}{f(x_j^{(i)}) - f(x_{j+1}^{(i)})} \times$$

$$\times \left[\frac{f(x_{j+1}^{(i)})}{f'(x_j^{(i)})} + x_{j+1}^{(i)} \frac{f(x_j^{(i)})}{f(x_j^{(i)}) - f(x_{j+1}^{(i)})} \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

Ниже приводится геометрическая интерпретация итерационного процесса (1.8):



3⁰. *Сходимость итерационного метода (1.4),(1.7).* В доказательстве используется матричная интерпретация метода. Аналогичная интерпретация была использована в [1.4], где рассматриваются известные итерационные методы и оценивается скорость сходимости этих методов. Ниже, используя аналогичную интерпретацию итерационных методов (1.4),(1.7), оценим скорость С-сходимости этих методов.

Пусть для построения полинома $H_j^{(i)}(y)$ используются значения функции и производных:

$$\left\{ y_s^{(i)} \right\}, \left\{ g(y_s^{(i)}) \right\}, \dots, \left\{ g^{(\alpha_{js}-1)}(y_s^{(i)}) \right\}, \quad s \in A_j.$$

Рассмотрим вектор

$$\Lambda_j = (t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{jN}), \quad (1.9)$$

где $t_{js} = 0$, если $s \notin A_j$, и $t_{js} = \alpha_{js}$, если $s \in A_j$.

Таким образом, каждому полиному $H_j^{(i)}(y)$ соответствует вектор $\Lambda_j, j = \overline{1, N}$, а итерационному методу в целом – матрица Λ со строками Λ_j .

Пусть $\bar{X}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_{N-1}^{(0)}, x_N^{(0)})$ – начальные приближения итерационного процесса (1.4),(1.7). Будем предполагать, что

A2) функция $f^{(m)}(x)$ ограничена на I , а $g^{(m)}(y) \neq 0$ и $g'(y) \neq 0$ на промежутке I^* .

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} q &= \max_{1 \leq j \leq N} |\bar{x} - x_j^{(0)}| = \|\bar{\varepsilon}^{(0)}\|, \\ \bar{\varepsilon}^{(0)} &= (\varepsilon_1^{(0)}, \dots, \varepsilon_N^{(0)}), \\ p &= \frac{\|g^{(m)}(y)\|}{m!} \|f'(x)\|^m. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 1.1. Пусть для функции $f(x)$ выполняются условия A1), A2), ($k = m$), а начальные данные выбраны из окрестности $I^0 \subseteq I$, для точек которой выполняется неравенство $pq^{m-1} < 1$. Тогда для итерационного процесса (1.4), (1.7) имеет место C-сходимость со скоростью сходимости, равной спектральному радиусу матрицы Λ .

Доказательство: Если $y_j^{(i)} = 0$, $j = \overline{1, N}$, то $x_j^{(i)} = \bar{x}$, $j = \overline{1, N}$ и теорема не требует доказательства.

Рассмотрим случай, когда $y_j^{(i)} \neq 0$, $j = \overline{1, N}$. Предположим также, что узлы интерполирования не являются кратными, т.е. $y_j^{(i)} \neq y_n^{(i)}$, когда $j \neq n$. Если $x_j^{(i)} = x_n^{(i)}$ при $j \neq n$, то $x_j^{(i)}$ можно заменить некоторым значением x из интервала $(\min_j x_j^{(i)}, \max_j x_j^{(i)})$. Если для некоторого i все $x_j^{(i)}$ ($j = \overline{1, N}$) окажутся равными между собой, то дальнейшее продолжение итерационного метода невозможно и в этом случае нужно выбрать другие начальные приближения из интервала I^0 .

Так как $\bar{x} = g(0) \approx H_j^{(i)}(0) = x_j^{(i+1)}$, $j = \overline{1, N}$, поэтому, используя выражение остаточного члена интерполяционной формулы Эрмита [66], можно написать

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{(i+1)} &= \left| \frac{g^{(m)}(\eta_j)}{m!} \prod_{s \in A_j} (-y_s^{(i)})^{\alpha_{js}} \right| = \\ &= \left| \frac{g^{(m)}(\eta_j)}{m!} \prod_{s \in A_j} \left[\frac{\varepsilon_s^{(i)}}{g'(\xi_s)} \right]^{\alpha_{js}} \right|, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_s^{(i)} &= |\bar{x} - x_s^{(i)}|, \quad \eta_j \in I^*, \\ \xi_s &\in (\min(0, y_s^{(i)}), \max(0, y_s^{(i)})), \quad s \in A_j, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Определим N мажорантных последовательностей положительных чисел $e_j^{(i)} = 0$ ($j = \overline{1, N}$) следующим образом:

$$e_j^{(0)} = q, \quad e_j^{(i+1)} = P \prod_{s \in A_j} (e_j^{(i)})^{\alpha_{js}}, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

В дальнейшем нам понадобится неравенство $e_j^{(i)} \geq \varepsilon_j^{(i)}$, которое легко доказывается методом математической индукции.

Так как мы рассматриваем случай $y_j^{(i)} \neq 0$, поэтому $\varepsilon_j^{(i)} \neq 0$ ($j = \overline{1, N}$). Кроме того, $g^{(m)}(x) \neq 0$, когда $x \in I^*$, поэтому $\varepsilon_j^{(i+1)} \neq 0$. Отсюда можно заключить, что $e_j^{(i)} \neq 0$ ($j = \overline{1, N}$, $i = 0, 1, 2, \dots$).

После этого замечания из равенств (1.12) можно написать, логарифмируя обе стороны этого равенства при $i = 1, 2, \dots$

$$b_j^{(i+1)} = 1 + \sum_{s \in A_j} \alpha_{js} b_s^{(i)}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.13)$$

где $b_s^{(i)} = \log_p e_s^{(i)}$, $s = \overline{1, N}$.

Рассмотрим однородную систему, соответствующую системе (1.13):

$$\vec{a}^{(i+1)} = \Lambda \vec{a}^{(i)}, \quad (1.14)$$

где $\vec{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_N^{(i)})$, матрица Λ определена выше при помощи равенств (1.9). Решение системы разностных уравнений (1.14), как обычно, будем искать в виде $\vec{a}^{(i)} = \lambda^i \vec{z}$. Тогда из (1.14) получим

$$\lambda^i (\Lambda - \lambda E) \vec{z} = 0 \quad \text{или} \quad (\Lambda - \lambda E) \vec{z} = 0. \quad (1.15)$$

Итак, чтобы получить нетривиальное решение разностной системы (1.14), λ должно быть собственным значением матрицы Λ , а \vec{z} — соответствующим собственным вектором.

Так как каждый элемент матрицы Λ неотрицателен, то она имеет положительное собственное значение $\bar{\lambda}$, равное спектральному радиусу $\rho(\Lambda)$ матрицы Λ , и существует правый собственный вектор с положительными компонентами, соответствующий этому собственному значению [64]. Рассмотрим матрицу $\Lambda' = \frac{1}{m} * \Lambda$. Очевидно, что матрица Λ' является стохастической и её спектральный радиус равен: $\rho(\Lambda') = 1$ [64]. Поэтому ясно, что $\rho(\Lambda) = m$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1(\Lambda) = m$.

Легко можно проверить, что матрица Λ является неприводимой, так как направленный граф для этой матрицы сильно связан. Далее, также легко можно показать, что все элементы матрицы Λ^{N-1} положительны, а это означает, что индекс импримитивности матрицы равен 1. Итак, матрица Λ является примитивной и, следовательно, имеет доминирующее положительное собственное значение кратности 1 [64].

)

После этого можно написать общее решение разностной системы (1.14)

$$\bar{a}^{(i)} = d_{1,1} m^i \bar{z}^{(1)} + \sum_{k=2}^{N'} \lambda_k^i \bar{z}^{(k)} \sum_{l=1}^{l_k} d_{k,l} i^{l-1}, \quad (1.16)$$

где l_k - кратность собственного значения λ_k , N' - количество различных собственных значений, кроме спектрального радиуса,

$\sum_{k=2}^{N'} l_k = N - 1$, $\bar{z}^{(k)}$ - собственный вектор, соответствующий собственному

значению λ_k , а $d_{1,1}, d_{k,l}$ ($k = \overline{2, N'}$, $l = \overline{1, l_k}$) - постоянные.

Общее решение неоднородной системы разностных уравнений (1.13) можно записать в следующем виде:

$$\bar{b}^{(i)} = \bar{b}_0 + d_{1,1} m^i \bar{z}^{(1)} + \sum_{k=2}^{N'} \lambda_k^i \bar{z}^{(k)} \sum_{l=1}^{l_k} d_{k,l} i^{l-1}, \quad (1.17)$$

где \bar{b}_0 некоторое частное решение системы (1.13). Непосредственной проверкой можно убедиться, что в качестве \bar{b}_0 можно, например, взять

следующий вектор $\bar{b}_0 = \left(-\frac{1}{m-1}, \dots, -\frac{1}{m-1} \right)$. Для определения

постоянных $d_{1,1}, d_{k,l}$ ($k = \overline{2, N'}$, $l = \overline{1, l_k}$) используем начальные значения

вектора $\bar{b}^{(i)}$ при $i = 1$: $\bar{b}^{(1)} = (b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \dots, b_N^{(1)})$, где

$$b_s^{(1)} = \log_p e_s^{(1)} = 1 + m \log_p q \quad (s = \overline{1, N}). \quad (1.18)$$

Так как матрица $\frac{1}{m} * \Lambda$ является неотрицательной стохастической, поэтому максимальному собственному значению соответствует правый собственный вектор $(1, 1, \dots, 1)$ и из (1.17) можно получить линейную

¶

систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $d_{1,1}, d_{k,l}$ ($k = \overline{2, N'}$, $l = \overline{1, l_k}$):

$$d_{1,1} m + \sum_{k=2}^{N'} \lambda_k z_s^{(k)} \sum_{l=1}^{l_k} d_{k,l} = 1 + m \log_p q + \frac{1}{m-1}, \quad s = \overline{1, N}. \quad (1.19)$$

Из системы (1.19) легко можно определить значение $d_{1,1}$:

$$d_{1,1} = \frac{1}{m-1} + \log_p q. \quad (1.20)$$

Выражение (1.17) перепишем в виде $\vec{b}^{(i)} = m^i (d_{1,1} \vec{z}^{(1)} + \vec{D}^{(i)})$, где

$$\vec{D}^{(i)} = \frac{1}{m^i} \vec{b}_0 + \sum_{k=2}^{N'} \left(\frac{\lambda_k}{m} \right)^i \vec{z}^{(k)} \sum_{l=1}^{l_k} d_{k,l} i^{l-1} \rightarrow 0, \quad \text{когда } i \rightarrow \infty.$$

Учитывая это последнее замечание, для величин $e_s^{(i)}$ можно написать следующие выражения

$$e_s^{(i)} = p^{m^i (d_{1,1} + D_s^{(i)})}, \quad s = \overline{1, N}. \quad (1.21)$$

Пусть $p \geq 1$. Используя равенство (1.20) и условие теоремы $pq^{m-1} < 1$, можно написать

$$d_{1,1} = \log_p (p^{\frac{1}{m-1}} q) = \log_p (pq^{m-1})^{\frac{1}{m-1}} < 0.$$

Аналогично, если $p < 1$, можно показать, что $d_{1,1} > 0$. Так как $d_{1,1} + D_s^{(i)} \rightarrow d_{1,1}$, при $i \rightarrow \infty$, то найдётся такое натуральное число i_0 , что при $i > i_0$ будет иметь место оценка

$$e_s^{(i)} \leq p^{\beta d_{1,1} m^i} = \left[\left(p^{\frac{1}{m-1}} q \right)^\beta \right]^{m^i}, \quad \text{где } \beta = \text{const.}$$



Итак, мы окончательно получаем следующую оценку:

$$\varepsilon_j^{(i)} \leq Q^{m^i}, \quad \text{где} \quad Q = (p^{\frac{1}{m-1}} q)^\beta, \quad j = \overline{1, N}, \quad i \geq i_0.$$

Теорема доказана полностью.

4⁰. Примеры. Рассмотрим несколько примеров итерационных алгоритмов для решения уравнения $f(x) = 0$.

Пример 1.

$$N = 4, \quad M = 3, \quad \alpha_{js} = 1, \quad j = \overline{1, 4}, \quad s \in A_j; \quad A_1 = \{1, 2, 3\}, \\ A_2 = \{2, 3, 4\}, \quad A_3 = \{1, 3, 4\}, \quad A_4 = \{1, 2, 4\}.$$

В этом случае матрица Λ будет иметь вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус этой матрицы равен 3, поэтому для этого итерационного метода имеет место С-сходимость с порядком 3.

Пример 2.

$$N = 4, \quad M = 2, \quad \alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{12} = 2, \quad \alpha_{22} = 1, \quad \alpha_{23} = 2, \\ \alpha_{33} = 1, \quad \alpha_{34} = 2, \quad \alpha_{44} = 1, \quad \alpha_{41} = 2, \quad A_1 = \{1, 2\}, \\ A_2 = \{2, 3\}, \quad A_3 = \{3, 4\}, \quad A_4 = \{4, 1\}.$$

В этом случае матрица Λ будет иметь вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус этой матрицы равен 3 и для этого итерационного метода также имеет место С-сходимость с порядком 3.

Если использовать методику, предложенную в [5], а также выражение остаточного члена интерполяционной формулы Эрмита [66], то можно доказать и В-сходимость итерационного процесса.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда для итерационного метода (1.4),(1.7) имеет место В-сходимость с порядком m .

5⁰. Модифицированный итерационный метод. Как следует из теорем 1.1, 1.2, сходимость итерационного процесса (1.4),(1.7) зависит от выбора начальных элементов. Обычно, область сходимости I^0 итерационного процесса является частью области I , где уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень, существует обратная функция и $f(x) \in C^m(I)$. Говоря другими словами, в условиях этих теорем имеет место локальная сходимость. Однако, используя соображение из [63], можно построить такую итерационную процедуру, которая при некоторых условиях, о которых будет сказано ниже, позволяет за конечное число шагов отыскать требуемые начальные данные из I^0 . После получения этих начальных данных автоматически реализуется итерационный процесс (1.4),(1.7). Область сходимости итерационного процесса (1.4),(1.7) с итерационным нахождением начальных приближений является весь промежуток.

Оценим выражение

$$q = \max_{1 \leq j \leq N} |\bar{x} - x_j^{(0)}| = \max_{1 \leq j \leq N} |g(0) - g(y_j^{(0)})| :$$

$$q \leq \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| * \|[f'(x)]^{-1}\|.$$

1

Если начальные данные для итерационного процесса (1.4),(1.7) будем выбирать из окрестности I^0 , для точек которой выполняется неравенство

$$p^{\frac{1}{m-1}} \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| * \|[f'(x)]^{-1}\| < 1 \quad (1.22)$$

то условия теоремы 1.1 будут выполнены и, тем самым, будет сходиться итерационный процесс (1.4),(1.7). Заметим, что так как $f(x) \in C^m(I)$, $m \geq 2$, то найдётся такая константа $G > 1$, что

$$\|f'(x)\| * \|[f'(x)]^{-1}\| \leq G^{m-1} / 2 .$$

Далее, для j -ого процессора ($j = \overline{1, N}$) вместо уравнения $f(x) = 0$ рассмотрим уравнение $f(x) = \alpha^{(i)} f(x_j^{(0)})$, где $x_j^{(0)} \in I$ – любые точки из интервала (a, b) , а $\alpha^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ – последовательность чисел из $[0, 1]$. Вопрос о выборе этой последовательности будет обсуждаться ниже. Для решения этого уравнения на j -ом процессоре воспользуемся формулой (1.7), только надо учесть, что значение полинома Эрмита вычисляется исходя из функции $f(x) - \alpha^{(i)} f(x_j^{(0)})$, а постоянные $\alpha^{(i)}$ определяются следующим образом:

$$\alpha^{(i)} = \max[0, 1 - (i + 2) / (2G p^{\frac{1}{m-1}} \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| * \|[f'(x)]^{-1}\|)],$$

$$i = 0, 1, \dots \quad (1.23)$$

Ясно, что таким образом мы также получим последовательность N -мерных векторов $\vec{X}^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots$. Этот итерационный процесс мы назовём модифицированным итерационным методом.

Введём обозначение $\Phi^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(i)}) - \alpha^{(i)} f(x_j^{(0)})|$.

Лемма 1.1. а) Последовательность $\alpha^{(i)}$ ($i = 0, 1, \dots$) невозрастающая, т.е. $\alpha^{(i+1)} \leq \alpha^{(i)}$, где $\alpha^{(i)} \in [0, 1]$, $i = 0, 1, \dots$.

б) Если $f \in C^m(I)$, $f'(x) \neq 0$, то для каждого $x_j^{(i)}$, $j = \overline{1, N}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, получаемого при помощи модифицированного итерационного процесса, где $x_j^{(0)} \in I$ ($j = \overline{1, N}$), выполняется неравенство

$$Gp^{\frac{1}{m-1}} \Phi^{(i)} \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \leq 1. \quad (1.24)$$

Доказательство. Сначала докажем справедливость предложения а). Доказательство проведём методом математической индукции. Пусть $i = 0$. Тогда из (1.23) получим:

$$\alpha^{(0)} = \max \left[0, 1 - 1 / \left(Gp^{\frac{1}{m-1}} \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| \cdot \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \right) \right] \in [0, 1].$$

Далее, так как функция $\left[(i+2) / \left(2Gp^{\frac{1}{m-1}} \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| \cdot \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \right) \right]$ возрастающая относительно i , поэтому справедливо неравенство $\alpha^{(i+1)} \leq \alpha^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, что и доказывает справедливость предположения а).

Доказательство второй части леммы также проведём методом математической индукции. Пусть $i = 0$, тогда

$$Gp^{\frac{1}{m-1}} \Phi^{(0)} \left\| [f'(x)]^{-1} \right\| = Gp^{\frac{1}{m-1}} \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| \cdot \left\| (f'(x))^{-1} \right\| \cdot \min \left[1, \left(Gp^{\frac{1}{m-1}} \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| \cdot \left\| (f'(x))^{-1} \right\| \right)^{-1} \right] \leq 1.$$

Далее, пусть неравенство (1.24) выполняется для i , докажем справедливость этого неравенства для $i+1$. Сначала отметим, что уравнение

$$f(x) = \alpha^{(i)} f(x_j^{(0)}), \quad j = \overline{1, N}, \quad 0 \leq \alpha^{(i)} \leq 1,$$

имеет единственный корень для любого $i = 0, 1, 2, \dots$ в интервале I .

Обозначим эти корни через $\bar{x}_{i,j} (j = \overline{1, N}, i = 0, 1, 2, \dots)$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \Phi^{(i+1)} &= \\ &= \max_{1 \leq j \leq N} \left| f(x_j^{(i+1)}) - \alpha^{(i+1)} f(x_j^{(0)}) - f(\bar{x}_{i,j}) + \alpha^{(i)} f(x_j^{(0)}) \right| \leq \quad (1.25) \\ &\leq \|f'(x)\| \cdot \max_{1 \leq j \leq N} \left| x_j^{(i+1)} - \bar{x}_{i,j} \right| + (\alpha^{(i)} - \alpha^{(i+1)}) \cdot \max_{1 \leq j \leq N} \left| f(x_j^{(0)}) \right| \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое правой части неравенства (1.25)

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq N} \left| x_j^{(i+1)} - \bar{x}_{i,j} \right| &\leq \frac{\|g^{(m)}(y)\|}{m!} \cdot \max_{1 \leq j \leq N} \prod_{s \in A_j} \left| f(x_s^{(i)}) - \alpha^{(i)} f(x_s^{(0)}) \right|^{\alpha_{js}} = \\ &= \frac{\|g^{(m)}(y)\|}{m!} (\Phi^{(i)})^m \leq \frac{\|g^{(m)}(y)\|}{m!} \|(f'(x))^{-1}\|^{-m} G^{-m} p^{-\frac{m}{m-1}} \leq \\ &\leq \frac{\|g^{(m)}(y)\|}{m!} \|f'(x)\|^m \cdot G^{-m} p^{-\frac{m}{m-1}} = p^{-\frac{1}{m-1}} \cdot G^{-m}. \end{aligned}$$

Эту последнюю оценку внесём в неравенство (1.25):

$$\Phi^{(i+1)} \leq \|f'(x)\| \cdot G^{-m} \cdot p^{-\frac{1}{m-1}} + (\alpha^{(i)} - \alpha^{(i+1)}) \max_{1 \leq j \leq N} \left| f(x_j^{(0)}) \right|.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha^{(i)}, \alpha^{(i+1)} \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\Phi^{(i+1)} &\leq \|f'(x)\| \cdot G^{-m} \cdot p^{-\frac{1}{m-1}} + (2G)^{-1} p^{-\frac{1}{m-1}} \|(f'(x))^{-1}\|^{-1} = \\
&= G^{-1} p^{-\frac{1}{m-1}} \|[f'(x)]^{-1}\|^{-1} (\|f'(x)\| \cdot \|[f'(x)]^{-1}\| \cdot G^{-(m-1)} + 2^{-1}) \leq \\
&\leq (G p^{\frac{1}{m-1}} \|[f'(x)]^{-1}\|)^{-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда можно написать, что

$$G p^{\frac{1}{m-1}} \Phi^{(i+1)} \|[f'(x)]^{-1}\| \leq 1.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha^{(i)} \neq 0, \alpha^{(i+1)} = 0$. Тогда

$$\alpha^{(i)} \cdot \max_{1 \leq j \leq N} |f(x_j^{(0)})| < 1 / (2G p^{\frac{1}{m-1}} \|[f'(x)]^{-1}\|)$$

и будем иметь

$$\begin{aligned}
\Phi^{(i+1)} &\leq \|f'(x)\| \cdot G^{-m} \cdot p^{-\frac{1}{m-1}} + (2G)^{-1} p^{-\frac{1}{m-1}} \|(f'(x))^{-1}\|^{-1} \leq \\
&\leq (G p^{\frac{1}{m-1}} \|[f'(x)]^{-1}\|)^{-1}.
\end{aligned}$$

и опять получаем искомое неравенство.

Когда $\alpha^{(i)}, \alpha^{(i+1)} = 0$, тоже получаем

$$\begin{aligned}
\Phi^{(i+1)} &\leq \|f'(x)\| \cdot G^{-m} \cdot p^{-\frac{1}{m-1}} = (G p^{\frac{1}{m-1}} \|(f'(x))^{-1}\|)^{-1} \times \\
&\times G^{-(m-1)} \|f'(x)\| \cdot \|[f'(x)]^{-1}\| \leq (G p^{\frac{1}{m-1}} \|[f'(x)]^{-1}\|)^{-1}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана полностью.



Теорема 1.3. Пусть, на интервале I уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень, $f(x) \in C^m(I)$ и $f'(x) \neq 0$. Тогда, для любых $x_j^{(0)} \in I$ ($j = \overline{1, N}$) модифицированный итерационный метод за конечное число шагов i_0 приводит к точкам $x_j^{(i_0)}$ ($j = \overline{1, N}$), для которых $\alpha^{(i)} = 0$ при $i \geq i_0$ и выполняется условие сходимости (1.22) итерационного процесса (1.4), (1.7).

Доказательство. Если учесть выражение (1.23) для параметров $\alpha^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, то можно заключить, что при любых $x_j^{(0)} \in I$ ($j = \overline{1, N}$) всегда найдётся такое натуральное число i_0 что $\alpha^{(i_0)} = 0$ и все $\alpha^{(i)} = 0$ при $i \geq i_0$. Далее, учитывая лемму, можно заключить, что при $i = i_0$ выполняется неравенство (1.24), а это означает, что если в качестве начальных приближений будем брать точки $x_j^{(i_0)}$ ($j = \overline{1, N}$), то будет выполняться условие (1.22) сходимости итерационного метода (1.4), (1.7).

6^o. Пример. В качестве примера предложенных итерационных методов рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу [84]:

$$y'' = y^2 - 1, \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) перепишем в виде [84]:

$$x = \int_0^y (2(c + \frac{y^3}{3} - y))^{-1/2} dy$$

где c - постоянная и $y'(0) = \sqrt{2c}$. Отсюда, учитывая граничные условия из (1.26), получим нелинейное уравнение относительно c :

$$1 - \int_0^1 (2(c + \frac{y^3}{3} - y))^{-1/2} dy = \phi(c) = 0.$$

Очевидно, что область определения функции $\phi(c)$ интервал $(\frac{2}{3}, +\infty)$.

Для решения уравнения $\phi(c) = 0$ воспользуемся тремя итерационными методами: *i*) метод Ньютона; *ii*) метод (1.4),(1.7), где

$$N = 6, \quad M = 2, \quad m = 4, \quad \alpha_{JS} = 2, \quad s \in A_j, j = \overline{1,6},$$

$$A_j = \{j, j+1\}, j = \overline{1,5}, \quad A_6 = \{6,1\};$$

iii) модифицированный метод, где выражение в знаменателе $\alpha^{(i)}, i = 0,1,2,\dots$, было оценено несколько грубо.

Во всех трёх случаях для вычисления интервала была использована квадратурная формула Симпсона. Точность расчётов $\varepsilon = 10^{-6}$. Для неизвестного c получено приближенное значение $c^* = 0.97106$.

Результаты расчётов приведены в таблицах 1 - 3.

№	Начальное приближение	Число итераций
1	0.67	8
2	0.70	6
3	0.80	5
4	0.90	4
5	1.00	3
6	1.30	6
7	1.40	7
8	1.42	8
9	1.43	не сход.

Таблица 1. Результаты расчётов по методу Ньютона.

$c_1^{(0)}$	$c_2^{(0)}$	$c_3^{(0)}$	$c_4^{(0)}$	$c_5^{(0)}$	$c_6^{(0)}$	Число итераций
0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	1.10	3
0.67	0.95	1.08	1.20	1.38	1.42	3
0.67	0.95	1.08	1.20	1.38	1.43	3
0.67	0.95	1.08	1.23	1.40	1.50	3
0.67	0.95	1.18	1.33	1.44	1.60	3
0.67	0.95	1.18	1.33	1.47	1.65	3
0.67	0.95	1.18	1.33	1.47	1.66	3
0.67	0.95	1.18	1.33	1.47	1.67	не сход.

Таблица 2. Результаты расчётов по методу (1.4),(1.7) .

№	$c_1^{(0)}$	$c_2^{(0)}$	$c_3^{(0)}$	$c_4^{(0)}$	$c_5^{(0)}$	$c_6^{(0)}$	число ит.
1	0.67	1.20	1.90	2.40	2.90	3.45	пр.388875
2	0.68	1.20	1.90	2.40	2.90	3.45	пр.45643
3	0.70	1.20	1.90	2.40	2.90	3.45	пр.9483
4	0.80	1.20	1.90	2.40	2.90	3.45	пр.1077
5	0.80	2.00	3.20	4.40	5.60	7.00	пр.9210
6	0.80	2.50	4.40	6.30	8.20	10.0	пр.25115
7	1.00	1.40	1.90	2.40	2.90	3.45	286
8	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	109
9	2.10	2.30	2.90	3.60	4.60	5.90	138
10	2.00	2.20	2.40	2.60	2.80	3.00	19
11	2.50	4.20	5.50	6.90	8.00	10.0	397

Таблица 3. Результаты расчётов по модифицированному методу

Анализ результатов показывает, что метод Ньютона сходится на интервале $[0.67, 1.42]$, длина которого равна 0.75; метод (1.4),(1.7) сходится на интервале $[0.67, 1.66]$, длина которого равна 0.99, а областью сходимости модифицированного метода является интервал $[0.67, K]$, где K - любое конечное число из интервала $(2/3, +\infty)$.

§1.2. О некоторых асинхронных итерационных методах решения нелинейных уравнений для параллельных вычислительных систем

1^o. В данном параграфе построены разные варианты итерационных методов решения нелинейных алгебраических уравнений для асинхронных параллельных процессов. В основу предлагаемых асинхронных численных методов положена идея организации вычислений на параллельных системах типа MIMD [80].

Для порядка сходимости итерационного метода будем пользоваться определением 3 – формулой (1.3) из §1.1.

Введём меру информации, используемую итерационной функцией (ИФ) и эффективность ИФ [83]. В качестве измерителя информации естественно принять объём информационного запроса d , выражаемый количеством элементов новой информации, используемых в каждой итерации. Поскольку информация используется в форме значений f и её производных, объём информационного запроса равен количеству значений функции и производных, вычисляемых в ходе итерации. Меру эффективности определим следующим образом: эффективность использования равна частному от деления порядка на объём информационного запроса, т.е.

$$EFF = \lambda / d. \quad (1.27)$$

Ещё одна мера эффективности, т.н. вычислительная эффективность, позволяющая учитывать “стоимость” вычисления различных производных (считая, что сама функция является производной нулевого порядка), будет обсуждаться ниже.

2⁰. Рассмотрим асинхронный метод Ньютона:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - [f'(x^{(m_i)})]^{-1} f(x^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots, \quad m_i \leq i, \quad (1.28)$$

для решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$. Вопросы сходимости этого метода рассмотрены в [17,27]. Такой метод, а также многие другие модификации классического метода Ньютона приведены в [72].

Оценим скорость сходимости метода (1.28) при условии, что $m_i = [(i-1)/p-1]p+1$, где $p \geq 1$ – некоторая константа (при $i \leq p$, $m_i \equiv 0$, а квадратные скобки означают целую часть выражения). Это означает, что производная вычисляется один раз в течение p шагов.

(1.28) можем также записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x^{(0)} - [f'(x^{(0)})]^{-1} f(x^{(0)}), \\ x^{(jp+k+1)} &= x^{(jp+k)} - [f'(x^{((j-1)p+1)})]^{-1} f(x^{(jp+k)}), \\ k &= \overline{1, p}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad x^{((j-1)p+1)}|_{j=0} \equiv x^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Погрешности $e_i = |x^{(i)} - \bar{x}|$, где \bar{x} – корень уравнения $f(x) = 0$,

удовлетворяют разностным неравенствам

$$e_{jp+k+1} \leq e_{jp+k} \cdot c(e_{jp+k} + e_{(j-1)p+1}),$$

где константа c зависит от производных функции $f(x)$.

Можно показать, что

$$e_i \leq e_0 (2ce_0)^{a_i + kb_i}, \quad \text{где} \quad k = i - \left[\frac{i-1}{p} \right] p = \overline{1, p},$$

а a_i и b_i определяются из системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} a_i = a_{i-p} + pb_{i-p} \\ b_i = a_{i-p} + b_{i-p} + 1 \end{cases}$$

с начальными условиями $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$, $b_0 = 0, b_1 = \dots = b_{p-1} = 1$. Рост $r_i = a_i + kb_i$ определяет наибольший по модулю положительный корень уравнения $(1 - y^p)^2 - p = 0$, который равен $\lambda_p = (1 + \sqrt{p})^{1/p}$.

Будем иметь

$$\begin{aligned} e_i &\leq e_0 (2ce_0)^{a_i + kb_i} = e_0 (2ce_0)^{D_i (1 + \sqrt{p})^{i/p}} = \\ &= e_0 \left[(2ce_0)^{D_i} \right]^{(1 + \sqrt{p})^{i/p}}. \end{aligned}$$

Можно показать, что выражение D_i при $i \rightarrow \infty$ ограничено и положительно для каждого i . Так что оценка

$$e_i \leq e_0 \left[(2ce_0)^{D_i} \right]^{(1 + \sqrt{p})^{i/p}}$$

даёт сходимость e_i к 0 при $2ce_0 < 1$ с порядком сходимости

$$\lambda_p = (1 + \sqrt{p})^{1/p}. \quad (1.30)$$

Заметим, что при $p \rightarrow \infty$ метод совпадает с методом

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \left[f'(x^{(0)}) \right]^{-1} f(x^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots, \quad \text{и из (1.30) получаем}$$

$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda_p = 1$, что совпадает с известным результатом [72]. Значения λ_p

для некоторых p приведены в таблице 4.

3°. Пусть $f(x)$ – функция одной вещественной переменной.

Допустим, что в интервале $I = (a, b)$ уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень \bar{x} . Далее, пусть $f(x) \in C^4(I)$. Потребуем, что

$f'(x) \neq 0$, при $x \in I$. Так как $f(\bar{x}) = 0$, то найдётся такая окрестность точки 0 , где существует $g \equiv f^{-1}$ и $g(y) \in C^4(I^*)$.

По аналогии с методом (1.28) можно рассмотреть асинхронные варианты для класса итерационных методов высокого порядка из §1.1, основанных на обратной интерполяции Эрмита. Например, рассмотрим итерационную последовательность

$$x^{(i+1)} = H^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (1.31)$$

где $H^{(i)}(y)$ – обратный интерполяционный полином Эрмита третьего порядка, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{aligned} g(y^{(j)}) &= H^{(i)}(y^{(j)}), \quad j = i, i-1, m_i, \\ g'(y^{(m_i)}) &= [H^{(i)}(y^{(m_i)})]', \quad m_i < i. \end{aligned}$$

$H^{(i)}(0)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H^{(i)}(0) &= \sum_{l=i-1}^i x^{(l)} \left[\frac{y - y^{(l)}}{\Omega(y)} \right]_{y=y^{(l)}} \cdot \frac{\Omega(0)}{(-y^{(l)})} + \\ &+ \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^{1-j} (g(y^{(m_i)}))^{(j)} \cdot \left[\frac{(y - y^{(m_i)})^2}{\Omega(y)} \right]_{y=y^{(m_i)}}^{(k)} \cdot \frac{\Omega(0)}{(-y^{(m_i)})^{2-j-k}}, \end{aligned}$$

где $\Omega(y) = (y - y^{(i)})(y - y^{(i-1)})(y - y^{(m_i)})^2$.

Обозначим

$$\frac{\|g^{(IV)}(y)\| \cdot \|f'(x)\|^4}{24} = c. \quad (1.32)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4. Пусть, начальные приближения $x^{(-2)}, x^{(-1)}, x^{(0)}$

выбраны из окрестности $I^0 = \{x: |x - \bar{x}| \leq \delta\} \subseteq I$, для точек которой

выполняется неравенство $c\delta^3 < 1$. Тогда последовательность, порождённая итерационной формулой (1.31), сходится к \bar{x} , а скорость

сходимости при $m_i = \left[\frac{i-1}{p} - 1 \right] p + 1$ (при $i \leq p$, $m_i = 0$), где $p \geq 1$

– некоторое фиксированное целое число, равно $\lambda_p = y_p^{1/p}$, а y_p – наибольший по модулю положительный корень уравнения

$$y^3 - (2 + \omega_1^p + \omega_2^p)y^2 - \left[\frac{4(\omega_1^p - \omega_2^p)}{\sqrt{5}} - 4 - (-1)^p \right] y - \frac{2}{\sqrt{5}}(\omega_1^{p-3} - \omega_2^{p-3}) + 2(-1)^p = 0,$$

где $\omega_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $\omega_2 = (1 - \sqrt{5})/2$.

Доказательство. Формулу (1.31) удобно переписать в следующем виде:

$$x^{(1)} = H^{(0)}(0), \\ x^{(jp+k+1)} = H^{(jp+k)}(0), \quad j = 0, 1, \dots, \quad k = \overline{1, p},$$

где для построения $H^{(jp+k)}$ используются значения

$$y^{(jp+k)}, \quad g(y^{(jp+k)}) = x^{(jp+k)}, \quad y^{(jp+k-1)}, \quad x^{(jp+k-1)}, \\ y^{((j-1)p+1)}, \quad x^{((j-1)p+1)}, \quad 1/f'(x^{((j-1)p+1)}).$$

В самом деле, $m_{jp+k} = \left[\frac{jp+k-1}{p} - 1 \right] p + 1 = (j-1)p + 1$; при

$j = 0$, $x^{((j-1)p+1)} \equiv x^{(0)}$.

Используя выражение остаточного члена интерполяционной формулы Эрмита [35], можно написать:

$$\varepsilon_{jp+k+1} = \left| x^{(jp+k+1)} - \bar{x} \right| = \left| \frac{g^{(IV)}(\zeta^{(jp+k+1)})}{24} \right| \cdot \left| y^{(jp+k)} \cdot y^{(jp+k-1)} \right|.$$

$$\cdot (-y^{((j-1)p+1)})^2 \Big| = \left| \frac{g^{(IV)}(\zeta^{(jp+k+1)})}{24} \cdot \frac{\varepsilon_{jp+k} \cdot \varepsilon_{jp+k-1}}{g'(\eta^{(jp+k)}) \cdot g'(\eta^{(jp+k-1)})} \cdot \frac{\varepsilon_{(j-1)p+1}^2}{[g'(\eta^{((j-1)p+1)})]^2} \right|, \quad \zeta^{(l)}, \eta^{(l)} \in I^*.$$

Определим мажорантную последовательность положительных чисел следующим образом:

$$e_i = \delta, \quad i = -2, -1, 0; \quad e_{i+1} = c e_i e_{i-1} e_{m_i}^2, \quad i = 0, 1, \dots$$

Неравенство $e_i \geq \varepsilon_i$ легко доказывается методом математической индукции.

Далее, можно показать, что

$$e_k \leq \delta (c \delta^3)^{\frac{\omega_1^2 \cdot \omega_1^k - \omega_2^2 \cdot \omega_2^{k-1}}{\sqrt{5}}}, \quad k = \overline{1, p},$$

$$e_{p+k} \leq \delta (c \delta^3)^{\frac{\omega_1^{p+2} + 2\omega_1^2 \cdot \omega_1^k - \omega_2^{p+2} + 2\omega_2^2 \cdot \omega_2^{k-3}}{\sqrt{5}}}, \quad k = \overline{1, p},$$

и т.д. $e_{jp+k} \leq \delta (c \delta^3)^{a_{jp+k} \cdot \omega_1^k + b_{jp+k} \cdot \omega_2^k + c_{jp+k}},$

или

$$e_i \leq \delta (c \delta^3)^{a_i \cdot \omega_1^k + b_i \cdot \omega_2^k + c_i}, \quad (1.33)$$

где $k = i - \left[\frac{i-1}{p} \right] p = \overline{1, p}$, а a_i, b_i, c_i определяются из

системы разностных уравнений

$$\begin{cases} a_i = (\omega_1^p + \frac{2\omega_1^3}{\sqrt{5}})a_{i-p} - \frac{2\omega_1}{\sqrt{5}}b_{i-p} + \frac{3\omega_1^2}{\sqrt{5}}c_{i-p} + \frac{\omega_1^2}{\sqrt{5}}, \\ b_i = \frac{2\omega_2}{\sqrt{5}}a_{i-p} + (\omega_2^p - \frac{2\omega_2^3}{\sqrt{5}})b_{i-p} - \frac{3\omega_2^2}{\sqrt{5}}c_{i-p} - \frac{\omega_2^2}{\sqrt{5}}, \\ c_i = -2\omega_1 a_{i-p} - 2\omega_2 b_{i-p} - 2c_{i-p} - 1, \end{cases} \quad (1.34)$$

с начальными условиями:

$$a_1 = \dots = a_p = \frac{\omega_1^2}{\sqrt{5}}; \quad b_1 = \dots = b_p = -\frac{\omega_2^2}{\sqrt{5}}; \quad c_1 = \dots = c_p = -1.$$

Обозначим $\vec{X}_j = (a_j, b_j, c_j)^T = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T t^j$.

Рассмотрим однородное уравнение $\vec{X}_j = A\vec{X}_{j-p}$, где A – матрица системы (1.34). Обозначим $t^p = y$. Тогда для определения y получим $\det|A - yE| = 0$ или

$$\begin{aligned} & y^3 - (2 + \omega_1^p + \omega_2^p)y^2 - \\ & - \left[\frac{4(\omega_1^p - \omega_2^p)}{\sqrt{5}} - 4 - (-1)^p \right] y - 2 \left[\frac{\omega_1^{p-3} - \omega_2^{p-3}}{\sqrt{5}} - (-1)^p \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Исследуя уравнение (1.35), можно показать, что для каждого p оно имеет максимальный корень $y_p > 1$. Величина $t = y_p^{1/p}$ определяет порядок роста e_i . Перепишем (1.33) в виде

$$e_i \leq \delta (c\delta^3)^{y_p^{1/p} \cdot D_i}.$$

Легко можно показать, что выражения D_i ограничены и положительны для каждого i . Поэтому D_i можем заменить на $d = \inf D_i$.

В силу условия теоремы и неравенства

$$e_i \leq \delta \left[(c\delta^3)^d \right]^{y_p^{1/p}}$$

можно заключить, что e_i стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\varepsilon_i \leq \delta \left[(c\delta^3)^d \right]^{y_p^{1/p}} \text{ и } \varepsilon_i \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty \text{ с порядком } \lambda_p = y_p^{1/p}.$$

Если $p = 3$, $\lambda_p \approx 1.8822$, а λ_p при $p \rightarrow \infty$, стремится к $\omega_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, что совпадает с порядком сходимости метода секущих [72]. Значения λ_p для некоторых p приведены в таблице 4.

Заметим, что EFF для асинхронного метода Ньютона равна

$$EFF_1 = \lambda_1 / (1 + 1/p) = \lambda_1 p / (p + 1),$$

а для метода (1.31) равна

$$EFF_2 = \lambda_2 / (1 + 1/p) = \lambda_2 p / (p + 1),$$

В частности, при $p = 3$, $EFF_1 \approx 1.036$, а $EFF_2 \approx 1.412 > EFF_1$. Для сравнения, $EFF = 1$ для метода Ньютона. EFF_2 больше, чем EFF метода Ньютона за счёт уменьшения вычислений на каждом шаге и увеличения памяти. Значения EFF_1 , EFF_2 для некоторых p приведены в таблице 4.

При определении такой характеристики не учитывается ни стоимость вычислений значений функции f и её производных, ни общее количество элементов информации, необходимое для достижения заданной допустимой погрешности нахождения корня. Учитывая эти показатели, исследуем вычислительную эффективность [83].

Будем исходить из допущения, что стоимость одной итерации определяется только стоимостью вычисления новых значений $f^{(j)}$, $j \geq 0$, а стоимость “комбинирования” этих значений в процессе

вычисления очередного приближения к корню пренебрежимо мала. Рассмотрим два итерационных метода для решения одного и того же уравнения: метод 1 – это метод (1.31) с порядком λ_1 и некоторый метод 2 с порядком λ_2 .

Предположим, что вычисления с использованием обоих методов начинаются с одного и того же начального приближения и оканчиваются, как только у очередного приближения к корню окажется заданное количество верных цифр. Проводя рассуждения, аналогичные [83], получим приближённое соотношение между количествами потребовавшихся итераций

$$\frac{j_1}{j_2} \cong \frac{\lg \lambda_2}{\lg \lambda_1}, \quad (1.36)$$

где j_1 – количество итераций для метода 1, а j_2 – для метода 2, необходимое для достижения заданной точности.

Пусть стоимость вычисления одного значения f равна единице, а стоимость вычисления f' равна q . Тогда стоимость одной итерации метода 1 равна $d_1 = 1 + q/p$, метода 2 – d_2 . А суммарные стоимости произведенных вычислений определяются соотношениями $Q_1 = j_1 d_1 = j_1(1 + q/p)$, $Q_2 = j_2 d_2$. Отсюда, учитывая (1.36), получаем

$$Q_1 = \frac{j_1}{j_2} \cdot \frac{(1 + q/p)}{d_2} Q_2 = \frac{\lg \lambda_2}{\lg \lambda_1} \cdot \frac{(1 + q/p)}{d_2} Q_2.$$

В качестве второго метода рассмотрим асинхронный метод Ньютона. Тогда $d_2 = 1 + q/p$ и $Q_1 = \lg \lambda_2 \cdot Q_2 / \lg \lambda_1$. При $p = 3$

$$Q_1 = \lg 1.398 / \lg 1.882 \times Q_2 \approx 0.53 Q_2.$$

Значит асинхронный метод 1 почти вдвое экономичнее синхронного метода Ньютона.

В случае, когда метод 2 совпадает с классическим методом Ньютона, то $d_2 = 1 + q$ и

$$Q_1 = \frac{\lg 2}{\lg 1.882} \times \frac{(1 + q/p)}{1 + q} Q_2 = 1.1 \times \frac{(1 + q/p)}{1 + q} Q_2 = R(q) \cdot Q_2.$$

Если $q > (0.1 \times p) / (p - 1.1)$, то $R(q) < 1$ и метод 1 экономичнее метода Ньютона. В таком случае при $p = 3$, $q > 0.1578$, при $p = 4$, $q > 0.138$, при $p = 5$, $q > 0.128$.

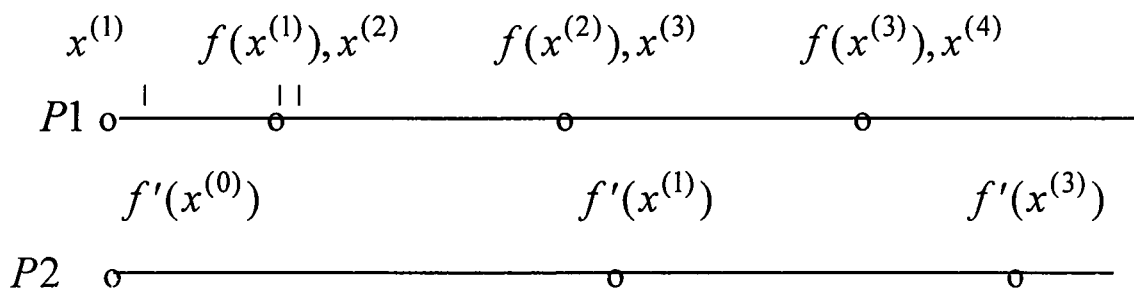
Пусть $c(f)$ – время, необходимое для вычисления f и $c(f') = \frac{n_1}{n_0} c(f)$, где $n_1 \geq n_0 \geq 1$ взаимно простые целые числа. Если

$p = \left[\frac{n_1}{n_0} \right] + 1$, мы можем разбить процесс (1.31) на два процесса $P1$

и $P2$, где $P1$ вычисляет новые приближения и значения функции, а $P2$ – только значения производных. Для реализации такого процесса можем использовать два процессора на параллельной многопроцессорной ЭВМ, на которой при $p \geq 1$ эти процессы будут протекать асинхронно. Приведём схему таких вычислений:

$x^{(-2)}, x^{(-1)}, x^{(0)}$ – начальные данные. Известны

$f(x^{(-2)}), f(x^{(-1)}), f(x^{(0)}), f'(x^{(0)})$ и $x^{(1)}$:



Заметим, что в основе асинхронных численных методов лежит идея организации ЭВМ типа MIMD и главная цель развития параллельных

алгоритмов этого типа состоит в том, чтобы загружать все используемые процессоры равномерно.

4^o. Метод (1.31), рассмотренный в пункте 3, даёт одну итерационную последовательность и удобен для реализации на двух процессорах.

Теперь рассмотрим параллельный асинхронный итерационный метод, который является обобщением одного метода из класса итерационных методов, приведённых в §1.1. Пусть имеется $2N$ процессоров. На функцию f наложим те же ограничения, что и в пункте 3. Рассмотрим итерационную последовательность N -мерных векторов:

$$\vec{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

каждая компонента которых – приближённое значение корня \bar{x} . При этом $x_j^{(i+1)}, j = \overline{1, N}$, вычисляется методом (1.31):

$$x_j^{(i+1)} = H_j^{(i)}(0), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (1.37)$$

т.е. является значением в точке $y = 0$ обратного интерполяционного полинома Эрмита $H_j^{(i)}$ третьего порядка, удовлетворяющего условиям

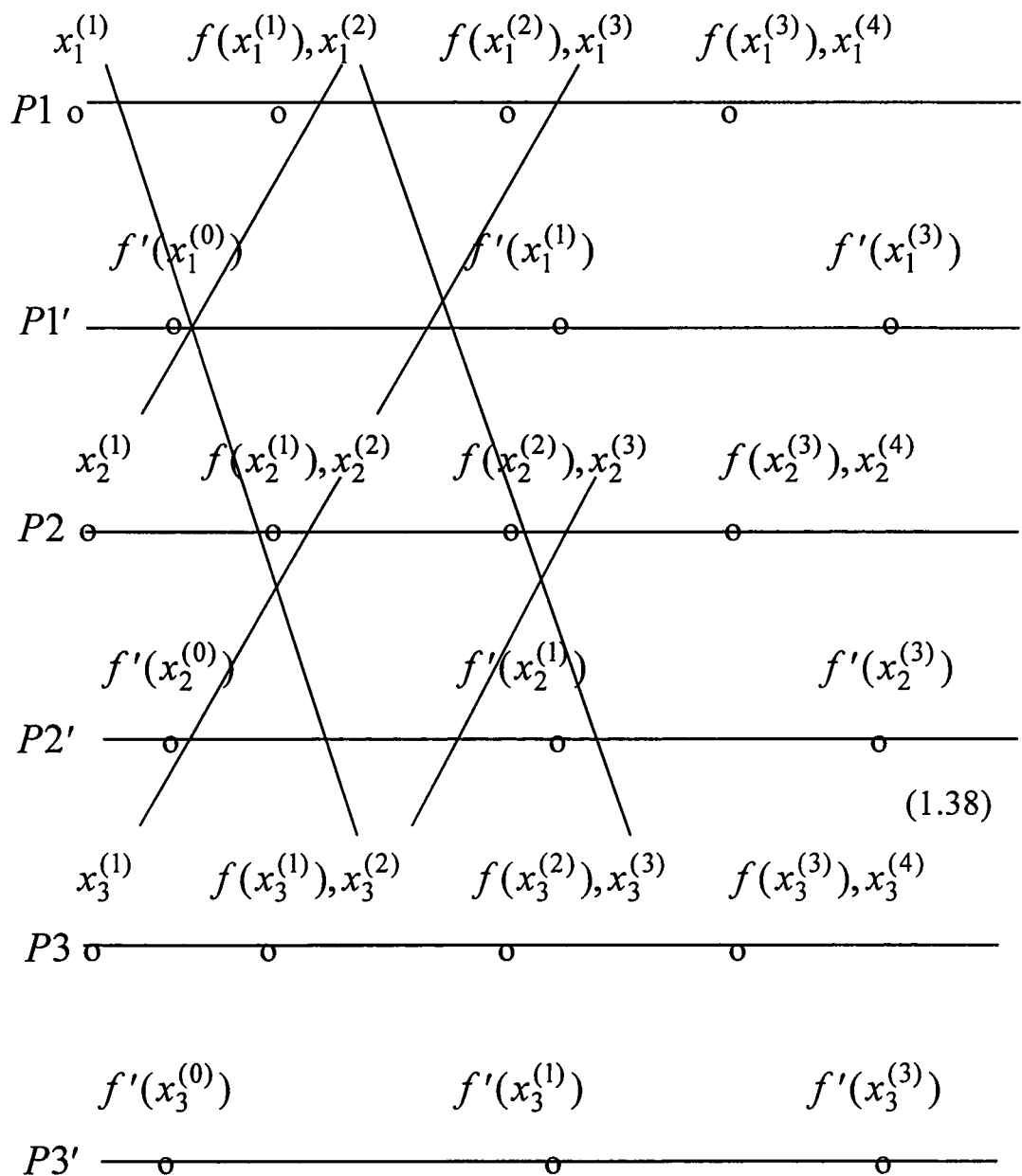
$$g(y_k^{(i)}) = H_j^{(i)}(y_k^{(i)}), \quad k = j, j+1;$$

$$g^{(k)}(y_j^{(m_i)}) = [H_j^{(i)}(y_j^{(m_i)})]^{(k)}, \quad k = 0, 1; \quad m_i < i;$$

при $i = p, \quad m_i = 0$.

Разобьём j -ий процесс, $j = \overline{1, N}$, на два процесса P_j, P'_j , где $P_j, j = \overline{1, N}$, вычисляют значения функции $f(x_j^{(i)})$ и новые приближения $x_j^{(i+1)}$, а P'_j – только значения производных $f'(x_j^{(m_i)})$.

При $N = 3$ схема метода имеет вид (1.38). Здесь P_1, P_2, P_3 и P_1', P_2', P_3' протекают синхронно, а P_1, P_1' ; P_2, P_2' и P_3, P_3' – асинхронно. Заметим, что при вычислении $x_j^{(i+1)}$ на j -ом процессоре, $j = \overline{1,3}$, используются текущие значения $x_{j+1}^{(i)}, f(x_{j+1}^{(i)})$.



1

Для сходимости метода (1.37) справедлива теорема.

Теорема 1.5. Пусть начальные приближения $x_j^{(-1)}, x_j^{(0)}, j = \overline{1, N}$, выбраны из окрестности $I^\circ = \{x: |x - \bar{x}| \leq \delta\} \subseteq I$, для точек которой выполняется неравенство $c\delta^3 < 1$, где постоянная c определяется из (1.32). Тогда последовательность, порожденная итерационной формулой (1.37), сходится к корню \bar{x} и скорость сходимости при $m_i = [((i-1)-1)/p-1]p+1$ (при $i \geq p, m_i \equiv 0$), где $p > 1$ – некоторое целое фиксированное число, равна $\lambda_p = y_p^{1/p}$, где

$$y_p = 1 + 2^{p-1} + \sqrt{2^{2p-2} + 3 \cdot 2^p - 3}. \quad (1.39)$$

Доказательство протекает аналогично доказательству теоремы 1.4. Заметим только, что $e_i \leq \delta(c\delta^3)^{2^k a_i + b_i}$, где b_i и a_i определяются из следующей системы разностных уравнений

$$\begin{cases} a_i = (4 + 2^p)a_{j-p} + 3b_{j-p} + 1 \\ b_i = -4a_{j-p} - 2b_{j-p} - 1 \end{cases}$$

с начальными условиями $a_1 = \dots = a_p = 1, b_1 = \dots = b_p = -1$.

Наибольший положительный корень соответствующего характеристического уравнения равен $y_p^{1/p}$, где y_p определяется из (1.39). При $p = 2, \lambda_p = 2.57$ и $\lambda_p \rightarrow 2.0$ при $p \rightarrow \infty$. Значения λ_p для некоторых значений p приведены в таблице 4.

P	Асинхронный метод Ньютона		Асинхронный метод (1.31)		Параллельный асинхрон.метод
	λ_p	EFF	λ_p	EFF	λ_p
1	2.0	1.0	-	-	-
2	1.554	1.036	-	-	2.57
3	1.398	1.048	1.8822	1.412	2.229
4	1.316	1.053	1.7155	1.372	2.099
5	1.265	1.054	1.6999	1.42	2.044
6	1.229	1.055	1.6510	1.425	2.019
7	1.203	1.053	1.64	1.435	2.008
8	1.183	1.051	1.6289	1.448	2.0038
9	1.167	1.050	1.626	1.463	2.002
10	1.153	1.048			2.001

Таблица 4.

**§1.3. Об одном итерационном методе решения
граничной задачи для системы обыкновенных
дифференциальных уравнений первого порядка
с параметром на многопроцессорной ЭВМ**

*1⁰. Движение поршня с ускорением и замедлением в среде с
объемными стоками массы.* Рассмотрим одномерное неустановившееся
движение газа, возникшее под действием плоского поршня при наличии

объемных источников (стоков) массы, импульса и энергии в газе. В начальный момент времени газ покоится и имеет распределенную по пространству плотность. Соответствующая математическая модель записывается в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} &= AT^{n_1} \rho^{n_1+n_2} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + RT \frac{\partial \rho}{\partial r} &= 0 \\ \frac{R}{\gamma-1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) + RT \frac{\partial v}{\partial r} &= AT^{n_1+1} \rho^{n_1+n_2-1} \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

$$v(r,0) = 0, \quad T(r,0) = 0, \quad \rho(r,0) = \rho_0 r^l, \quad (1.41)$$

$$v(r^*(t),t) = v_0 t^{n_0}, \quad \rho(r,0) = \rho_0 r^l, \quad (1.42)$$

где ρ – плотность, v – скорость, T – температура, $AT^{n_1} \rho^{n_1+n_2}$ – удельная мощность источников ($A > 0$) или стоков ($A < 0$) массы, R – газовая постоянная, γ – отношение удельных теплоемкостей, A, ρ_0, v_0 – размерные постоянные, $r^*(t)$ – координата поршня, n_0, n_1, n_2, l – безразмерные постоянные. Будем предполагать, что газ является совершенным, т.е. подчиняется законам $p = R\rho T$, $\varepsilon = RT/(\gamma - 1)$, где p – давление, ε – удельная внутренняя энергия. Для определённости будем считать, что поршень вдвигается в газ ($v_0 > 0$).

В механике подобие и метод размерностей широко используется для получения автомодельных решений системы уравнений (1.40)-(1.42). С помощью этих методов проблема нахождения неизвестных функций, которые определяются автомодельным движением и зависят от переменных r, t , сводится к нахождению функций, зависящих

исключительно от автомодельной переменной s . Итак, в рассматриваемом случае задача (1.40)-(1.42) сводится на решение граничной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одним параметром.

Анализ размерностей показывает, что решение задачи (1.40)-(1.42) будет автомодельным, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} 2n_0n_1 + (n_0 + 1)l(n_1 + n_2 - 1) + 1 &= 0 \\ n_0 + 1 &> 0 \\ n_0 &> -(l + 1) / (l + 3). \end{aligned}$$

В таком случае существует единственная безразмерная комбинация неизвестных переменных r и t вида $s = r / (v_0 t^{n_0+1})$, а искомые функции представимы следующим образом

$$\begin{aligned} \rho &= \delta(s) \rho_0 v_0^l t^{(n_0+1)l} \\ v &= \alpha(s) v_0 t^{n_0} \\ T &= \varphi(s) R^{-1} v_0^2 t^{2n_0} \end{aligned} \tag{1.43}$$

где $\delta(s)$, $\alpha(s)$ и $\varphi(s)$ безразмерные функции, соответственно, плотности, скорости и температуры, удовлетворяющие следующей системе дифференциальных уравнений относительно переменной s :

$$\left. \begin{aligned} [(n_0 + 1)l\delta - (n_0 + 1)s - \alpha] \dot{\delta} + \delta \dot{\alpha} &= \sigma_0 \delta^{n_1+n_2} f^{n_1}, \\ \delta [n_0\alpha - (n_0 + 1)s - \dot{\alpha}] + \delta \dot{\varphi} + \varphi \dot{\delta} &= 0, \\ \frac{1}{\gamma - 1} [2n_0\varphi - ((n_0 + 1) - \alpha)\dot{\varphi}] + \varphi \dot{\alpha} &= \sigma_0 \delta^{n_1+n_2-1} \varphi^{n_1}, \end{aligned} \right\} \tag{1.44}$$

где точкой обозначена производная по s , а безразмерная постоянная σ_0 имеет вид $\sigma_0 = A \rho_0^{n_1+n_2-1} v_0^{l(n_1+n_2-1)+2n_1}$.

Условие (1.42), заданное на поршне при $r = r^*(t)$, в безразмерной форме запишется в виде

$$\alpha(s_0) = 1, \quad s_0 = r^* / (v_0 t^{n_0+1}) = 1 / (n_0 + 1) \quad (1.45)$$

Начальные условия (1.41) при переходе к безразмерным переменным формально превращаются в условия, заданные при $s = \infty$. Однако, вследствие того, что газокинематические возмущения в среде распространяются с конечной скоростью, эти условия должны быть заданы в некоторой конечной точке $s = s_1$:

$$\alpha(s_1) = 0, \quad \varphi(s_1) = 0, \quad \delta(s_1) = s_1^l. \quad (1.46)$$

Если $s = r_1 / (v_0 t^{n_0+1})$, где $r_1 > r^*$ – координата, характеризующая положение фронта ударной волны, движущейся впереди поршня, то при $r = r_1$ должны выполняться условия, связывающие параметры газа перед фронтом ударной волны и за ним. Так как “исчезновение” массы из пространства, заполненного газом, носит объёмный, а не поверхностный характер, то законы сохранения на фронте ударной волны имеют вид обычных условий Гюгонио

$$\left. \begin{aligned} \rho_l(\dot{r}_1 - v_l) &= \rho_r \dot{r}_1, \\ \rho_l(\dot{r}_1 - v_l) + p_l &= \rho_r \dot{r}_1^2, \\ \frac{1}{2}(\dot{r}_1 - v_l)^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p_l}{\rho_l} &= \frac{1}{2} \dot{r}_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

где индексом “ l ” обозначены параметры газа за фронтом, а индексом “ r ” – перед фронтом ударной волны, \dot{r}_1 – абсолютная скорость фронта ударной волны, а $\rho_r = \rho_0 r_1^l$. Учитывая формулы (1.43) и (1.47) и то, что $s_1 = r_1 / (v_0 t^{n_0+1})$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \delta_l &= (\gamma + 1)s_1^l / (\gamma - 1), \\ \alpha_l &= 2(n_0 + 1)s_1 / (\gamma + 1), \\ \varphi_l &= \beta_l / \delta_l = 2(\gamma - 1) \left[(n_0 + 1)^2 s_1 / (\gamma + 1) \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.48)$$

Таким образом, когда фронт ударной волны находится в точке s_1 , за фронтом ударной волны выполняется условие (1.46), а перед фронтом условия (1.48). Требуется найти решения $\alpha(s)$, $\delta(s)$, $\varphi(s)$ системы уравнений (1.44) между поршнем и фронтом ударной волны, удовлетворяющие условиям (1.45) и (1.48).

Для дальнейшего удобно произвести замену переменных вида

$$\tau = (s_1 - s)(s_0 - s_1)^{-1}, \quad u = (n_0 + 1)s - \alpha..$$

Тогда задачу (1.44), (1.45), (1.48) после элементарных преобразований можно записать в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= -(s_0 - s_1)(u^2 - \gamma\varphi)^{-1} \{ [2n_0 + (n_0 + 1) \cdot \\ &\quad \cdot (l + \gamma)]\varphi + n_0(n_0 + 1)(s_1 - \tau(s_0 + s_1))u - \\ &\quad - (2n_0 + 1)u^2 + \gamma\sigma_0\varphi^{n_1+1}\delta^{n_1+n_2-1} \}, \\ \dot{\delta} &= \delta(s_0 - s_1)u^{-1} [(n_0 + 1)(l + 1) + \\ &\quad + \sigma_0\varphi^{n_1}\delta^{n_1+n_2-1} - \dot{u}(s_0 - s_1)^{-1}], \\ \dot{\varphi} &= \varphi(s_0 - s_1)u^{-1} [2n_0 + (n_0 + 1)(\gamma - 1) + \\ &\quad + (\gamma - 1)\sigma_0\varphi^{n_1}\delta^{n_1+n_2-1} - (\gamma - 1)\dot{u}(s_0 - s_1)^{-1}], \end{aligned} \right\} \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} u(0) &= (\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-1}(n_0 + 1)s_1, \\ \delta(0) &= (\gamma + 1)(\gamma - 1)^{-1}s_1^l, \\ \varphi(0) &= 2(\gamma - 1)(\gamma + 1)^{-2}(n_0 + 1)^2 s_1^2 \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$u(1) = 0. \quad (1.51)$$

Таким образом, мы получили зависящую от параметра $\lambda = s_1$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

2^o. Постановка задачи. Рассмотрим задачу нахождения такого значения λ^* параметра λ и такой вектор-функции $X_\lambda^*(t) = (x_\lambda^1(t), \dots, x_\lambda^N(t))$, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dX_\lambda}{dt} = F(t, X_\lambda, \lambda), \quad t \in (0,1), \quad (1.52)$$

и следующим условиям

$$X_\lambda(0) = \Psi(\lambda), \quad x_\lambda^1(1) = 0 \quad (1.53)$$

где $\lambda \in (\Lambda_0, \Lambda_1)$, а $F(t, X_\lambda, \lambda) = \{f^1(t, X_\lambda, \lambda), \dots, f^N(t, X_\lambda, \lambda)\}$

и $\Psi(\lambda) = \{\psi^1(\lambda), \dots, \psi^N(\lambda)\}$ – вектор-функции,

$f^i: [0,1] \times R^N \times (\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow R^1$, $\psi^i: (\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow R^1$, $i = \overline{1, N}$.

Условия, которым удовлетворяют вектор-функции F и Ψ , будут сформулированы ниже.

Наряду с задачей (1.52)-(1.53) рассмотрим эквивалентную ей задачу Коши

$$\frac{dX_\lambda}{dt} = F(t, X_\lambda, \lambda), \quad X_\lambda(0) = \Psi(\lambda) \quad (1.54)$$

с уравнением относительно λ

$$x_{\lambda}^1(1) = \psi^1(\lambda) + \int_0^1 f^1(\tau, X_{\lambda}, \lambda) d\tau = 0 \quad (1.55)$$

3^o. Алгоритм решения задачи (1.54)-(1.55). Для решения задачи (1.54)-(1.55) рассмотрим итерационный метод, который использует методику, предложенную в §1.1. Мы будем применять интерполяционные формулы, в которых использованы только два узла. Поэтому для реализации предложенного алгоритма на многопроцессорной ЭВМ достаточны 3 процессора. Отметим, что случай других интерполяционных формул и, тем самым, использование большего числа процессоров, можно рассмотреть аналогично, используя результаты из §1.1.

Пусть задача Коши (1.54) для каждого $\lambda, \lambda \in (\Lambda_0, \Lambda_1)$, имеет решение $\bar{X}_{\lambda}(t) = (\bar{x}_{\lambda}^1(t), \dots, \bar{x}_{\lambda}^N(t))$, где $\bar{x}_{\lambda}^i(t) \in C^1[0,1]$. Для построения итерационного процесса нам понадобится выполнение следующего условия

$$\frac{d}{d\lambda} \bar{x}_{\lambda}^1(1) \neq 0, \quad (1.56)$$

где $\bar{x}_{\lambda}^1(1): (\Lambda_0, \Lambda_1) \rightarrow (\bar{\Lambda}_0, \bar{\Lambda}_1)$. Тогда существует обратная функция $\varphi \equiv [\bar{x}_{\lambda}^1(1)]^{-1}$. Очевидно, что функция φ будет иметь такую же гладкость, что и функция $\bar{x}_{\lambda}^1(1)$.

Задав начальные приближения $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$, для решения задачи (1.54)-(1.55) строим последовательности решений задач

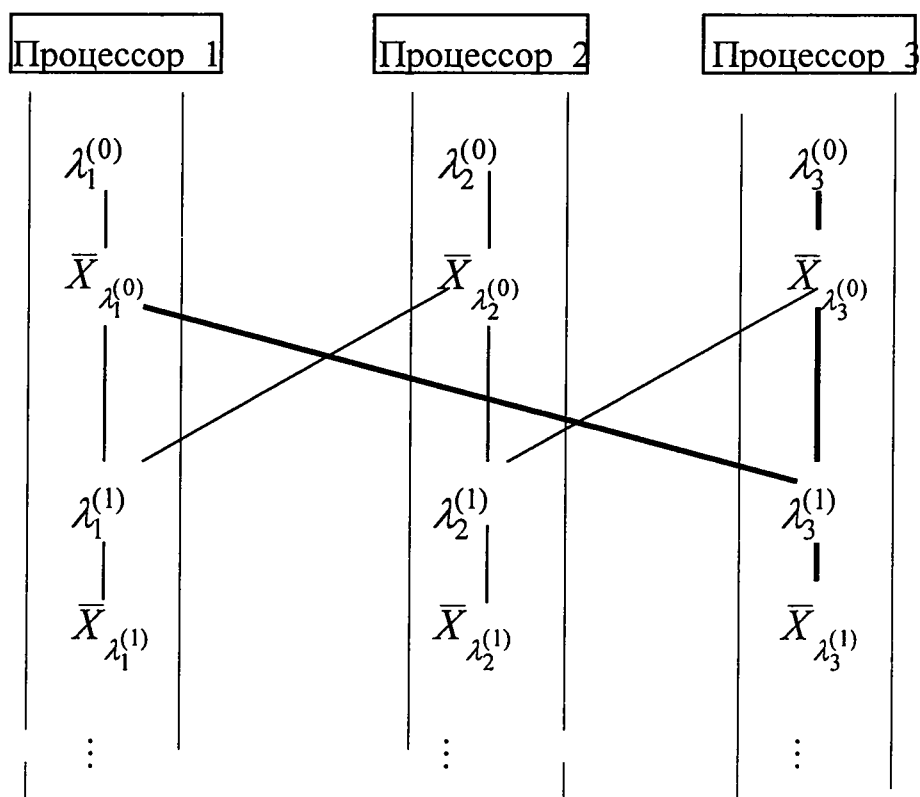
$$\frac{dX_{\lambda_j^{(i)}}}{dt} = F(t, X_{\lambda_j^{(i)}}, \lambda_j^{(i)}), \quad X_{\lambda_j^{(i)}} = \Psi(\lambda_j^{(i)}) \quad (1.57)$$

$$\lambda_j^{(i+1)} = H_j^{(i)}(0), \quad (1.58)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots$ – номер итерации, $j = 1, 2, 3$ – номер процессора, а $H_j^{(i)}(z)$ – либо обратный интерполяционный полином Лагранжа (случай а), либо обратный интерполяционный полином Эрмита (случай б), построенный для узлов

$$z_j^{(i)} = \bar{x}_{\lambda_j^{(i)}}^1(1), \quad z_{j+1}^{(i)} = \bar{x}_{\lambda_{j+1}^{(i)}}^1(1), \quad j = \overline{1, 3}, \quad z_4^{(i)} = z_1^{(i)}.$$

Графически весь процесс можно изобразить в следующем виде



Для простоты изложения будем считать, что при построении полинома Эрмита используются только производные первого порядка по λ . Отметим, что в этом случае нужно потребовать большую гладкость вектор-функции F относительно своих аргументов. Значение производных

первого порядка по параметру λ функции $\bar{x}_\lambda^1(1)$ можно вычислить из следующих задач Коши

$$\frac{dU_{\lambda_j^{(i)}}}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f^k(t, X_{\lambda_j^{(i)}}, \lambda_j^{(i)})}{\partial (X_{\lambda_j^{(i)}}^k)} u_{\lambda_j^{(i)}}^k(t) + \frac{\partial f(t, X_{\lambda_j^{(i)}}, \lambda_j^{(i)})}{\partial \lambda}, \quad (1.59)$$

$$U_{\lambda_j^{(i)}}(0) = \frac{d}{d\lambda} \Psi(\lambda_j^{(i)}), \quad (1.60)$$

где через $U_\lambda(t) = (u_\lambda^1(t), \dots, u_\lambda^N(t))$ обозначена $\frac{d\bar{X}_\lambda(t)}{d\lambda}$.

Для сходимости итерационного процесса (1.57)-(1.58) в случае а) имеет место следующая теорема.

Теорема 1.6. *Предположим, что $F(t, X, \lambda) \in C^2(\Lambda_0, \Lambda_1)$ для любого фиксированного t и X , $\Psi(\lambda) \in C^2(\Lambda_0, \Lambda_1)$ и существуют такие постоянные L_1 и L_2 , что*

$$\|F(t, X, \lambda_1) - F(t, X, \lambda_2)\| \leq L_1 \|X - Y\| + L_2 |\lambda_1 - \lambda_2|. \quad (1.61)$$

Пусть, кроме того, выполняется условие (1.56).

Обозначим $\eta = \max_{1 \leq j \leq 3} |\lambda_j^{(0)} - \lambda^|$, $p = \|\varphi^{(2)}(\xi)\| \cdot \|u_\lambda^1(1)\|^2 \cdot 2^{-1}$. Если*

$$p\eta < 1 \quad (1.62)$$

тогда $\lambda_j^{(i)} \rightarrow \lambda^$ при $i \rightarrow \infty$, $j = \overline{1,3}$; кроме того*

$$|\lambda_j^{(i)} - \lambda^*| \leq p^{-1}(\eta p)^{2^i} \quad u \quad (1.63)$$

$$\|\bar{X}_{\lambda_j^{(i)}}(t) - \bar{X}_{\lambda^*}(t)\| = O\left[(p\eta)^{2^i}\right] . \quad (1.64)$$

Доказательство. Из (1.54) вытекает, что

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\lambda_1}(t) - \bar{X}_{\lambda_2}(t) &= \Psi(\lambda_1) - \Psi(\lambda_2) + \\ &+ \int_0^t [F(\tau, \bar{X}, \lambda_1) - F(\tau, \bar{X}, \lambda_2)] d\tau . \end{aligned}$$

Применяя (1.61), получим

$$\begin{aligned} \|\bar{X}_{\lambda_1}(t) - \bar{X}_{\lambda_2}(t)\| &\leq M \cdot |\lambda_1 - \lambda_2| + \\ &+ \int_0^t [L_1 \|\bar{X}_{\lambda_1}(\tau) - \bar{X}_{\lambda_2}(\tau)\| + L_2 |\lambda_1 - \lambda_2|] d\tau = \\ &= (M + L_2) \cdot |\lambda_1 - \lambda_2| + L_1 \int_0^t \|\bar{X}_{\lambda_1}(\tau) - \bar{X}_{\lambda_2}(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

для любого $\lambda_1, \lambda_2 \in (\Lambda_0, \Lambda_1)$, где $M = \max_{1 \leq i \leq N} |\psi^i(\xi_i)|$.

Применяя лемму 3 из [61] к последнему неравенству, получим, что существует такая постоянная $L > 0$, что

$$\|\bar{X}_{\lambda_1}(t) - \bar{X}_{\lambda_2}(t)\| \leq L \cdot |\lambda_1 - \lambda_2|$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\|\bar{X}_{\lambda_j^{(i)}}(t) - \bar{X}_{\lambda^*}(t)\| \leq L \cdot |\lambda_j^{(i)} - \lambda^*| . \quad (1.65)$$

Теперь оценим $|\lambda_j^{(i)} - \lambda^*|$. Применяя формулу для остаточного члена интерполяционного полинома Эрмита, получим

$$|\varepsilon_j^{(i+1)}| = |\lambda_j^{(i+1)} - \lambda^*| = \left| \frac{\varphi^{(2)}(\zeta_j)}{2} \prod_{s=j}^{j+1} \frac{|\lambda_j^{(i+1)} - \lambda^*|}{\varphi'(\xi_s)} \right|,$$

где $\zeta_j \in (\bar{\Lambda}_0, \bar{\Lambda}_1)$, $\xi_s \in (\min(0, \bar{x}_{\lambda_s^{(i)}}^1(1)), \max(0, \bar{x}_{\lambda_s^{(i)}}^1(1)))$,

$$s = j, j+1, \quad j = \overline{1,3}.$$

Определим три следующие мажорантные последовательности положительных чисел $e_j^{(i)}$:

$$e_j^{(0)} = \eta, \quad e_j^{(i+1)} = p \prod_{s=j}^{j+1} e_j^{(i)}, \quad j = \overline{1,3}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Справедливы неравенства $e_j^{(i)} \geq \varepsilon_j^{(i)}$, что легко доказывается методом математической индукции.

Далее, $e_j^{(1)} = p\eta^2 = p^{-1}(p\eta)^2$, $e_j^{(2)} = p^{-1}(p\eta)^{2^2}$, ...,

$$e_j^{(i)} = p^{-1}(p\eta)^{2^i}.$$

В силу условия (1.62), $e_j^{(i)}$ и, следовательно, $\varepsilon_j^{(i)}$, стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$. Итак,

$$|\lambda_j^{(i)} - \lambda^*| < p^{-1}(p\eta)^{2^i},$$

а неравенство (1.65) дает оценку (1.64). Теорема 1.6 доказана.

Теперь рассмотрим итерационный процесс (1.57)-(1.60) (случай б)). Пусть, задача Коши (1.59)-(1.60) для каждого $\lambda \in (\Lambda_0, \Lambda_1)$ имеет решение $U_\lambda(t)$, $t \in [0,1]$. Для построения обратного полинома Эрмита в (1.58) используем значения обратной функции φ и её производных в точках

$$z_j^{(i)} = \bar{x}_{\lambda_j^{(i)}}^1(1), \quad z_{j+1}^{(i)} = \bar{x}_{\lambda_{j+1}^{(i)}}^1(1), \quad j = \overline{1,3}, \quad z_4^{(i)} = z_1^{(i)}.$$

Для сходимости итерационного процесса (1.57)-(1.60) имеет место следующая

Теорема 1.7. *Предположим, что $F(t, X, \lambda) \in C^4(\Lambda_0, \Lambda_1)$ для любого фиксированного t и X , $\Psi(\lambda) \in C^4(\Lambda_0, \Lambda_1)$, и существуют такие постоянные L_1 и L_2 , что*

$$\|F(t, X, \lambda_1) - F(t, X, \lambda_2)\| \leq L_1 \|X - Y\| + L_2 |\lambda_1 - \lambda_2|.$$

Пусть, кроме того, выполняется условие (1.56).

Обозначим $\eta = \max_{1 \leq j \leq 3} |\lambda_j^{(0)} - \lambda^|$, $p = \|\varphi^{(4)}(\xi)\| \cdot \|u_\lambda^1(1)\|^4 / 24$. Если*

$p\eta^3 < 1$, тогда $\lambda_j^{(i)} \rightarrow \lambda^$ при $i \rightarrow \infty$, $j = \overline{1,3}$; Кроме того*

$$|\lambda_j^{(i)} - \lambda^*| \leq p^{-1} (\eta^3 p)^{4^i} \quad \text{и}$$

$$\left\| \bar{X}_{\lambda_j^{(i)}}(t) - \bar{X}_{\lambda^*}(t) \right\| = O \left[(p\eta^3)^{4^i} \right].$$

Доказательство теоремы 1.7 проводится аналогично Теореме 1.6.

Отметим, что сходимость предложенного в данной работе метода можно доказать и в том случае, когда для решения задачи Коши применяется какой-нибудь численный метод.

4^o. Результаты численных экспериментов. Для решения системы ОДУ первого порядка с параметром (1.49) с начальными (1.50) и краевым (1.51) условиями применяется итерационный процесс (1.57)-(1.58), случай а).

Выбраны начальные приближения $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \lambda_3^{(0)}$, и на каждом процессоре решается задача Коши (1.49)-(1.50) методом Эйлера. Затем на каждом процессоре решается уравнение (1.51), используя следующую итерационную формулу

$$\lambda_j^{(i+1)} = \lambda_j^{(i)} - \bar{x}_{\lambda_j^{(i)}}^1(1) \cdot \frac{\lambda_j^{(i)} - \lambda_{j+1}^{(i)}}{\bar{x}_{\lambda_j^{(i)}}^1(1) - \bar{x}_{\lambda_{j+1}^{(i)}}^1(1)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.66)$$

в случае $i = 0$, вследствие чего получают новые приближения $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \lambda_3^{(1)}$, и т.д.

Расчёты приведены для различных значений γ, l, n_0, n_1, n_2 (см.табл.5).

В вариантах 3-5 выполняется условие $l = L$, где

$$L = 2n_0 [(n_0 + 1)(\gamma - 1)]^{-1},$$

и в этом случае энтропия постоянна между поршнем и фронтом ударной волны (см.[82]). На рис.1-5 для вариантов 1-5 приведены зависимости функций-представителей плотности $\delta(s_1)$, скорости $u(s_1)$ и температуры $f(s_1)$ за фронтом ударной волны от σ_0 (мощность источников (стоков)). Там же пунктиром приведена зависимость положения фронта s_1 от σ_0 . Из приведенных рисунков следует, что усиление влияния стока массы на движение газа перед поршнем (т.е. увеличение σ_0) приводит к уменьшению плотности и скорости.

Решения уравнения (1.51), кроме формулы (1.66), для сравнения проводились по методу Ньютона и по методу хорд. Результаты расчётов приведены в табл. 6. Точность расчётов $\varepsilon = 10^{-6}$. Одна итерация означает: в первом и третьем (на одном процессоре) случаях – решение нелинейного уравнения и расчёт одной задачи Коши (для нахождения значений функции); во втором случае – решение нелинейного уравнения и расчёт двух задач Коши (для нахождения значений функции и её производных), что вызывает дополнительные трудности.

?	γ	l	n_0	n_1	n_2
1	5/3	1.0	-0.1	2.0	-5/3
2	5/3	0.0	-0.1	5.0	0.0
3	5/3	1.0	0.5	-1.0	2.0
4	5/3	1.0	0.5	1.0	-4/3
5	5/3	1.0	0.5	0.0	1/3

Таблица 5

ном. вари- анта	σ_0	метод хорд			метод Ньют.		метод (1.66)			λ^* (выч.)
		$\lambda_1^{(0)}$	$\lambda_2^{(0)}$	ит.	$\lambda^{(0)}$	ит.	$\lambda_1^{(0)}$	$\lambda_3^{(0)}$	ит.	
1	0.	1.1	10^6	7	1.1	12	1.1	$2 \cdot 10^6$	4	1.3395
1	10.	1.1	10^6	11	1.1	15	1.1	6.9	8	1.2719
1	100.	1.1	10^6	11	1.1	7	1.1	1.7	7	1.1824
2	0.	1.1	10^6	6	1.1	19	1.1	$2 \cdot 10^6$	4	1.5997
2	10.	1.1	10^6	7	1.1	81	1.1	1.8	5	1.2117
2	100.	1.1	10^6	6	1.1	21	1.1	1.41	5	1.1317

Таблица 6

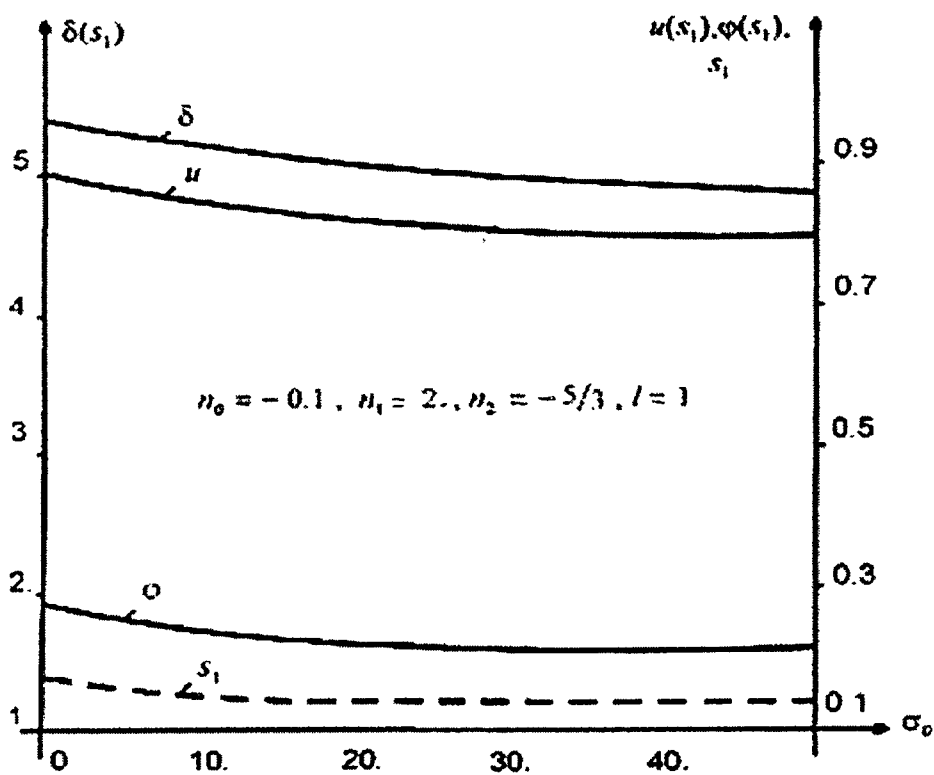


Рис.1. График решения системы (1.44) для $N=1$.

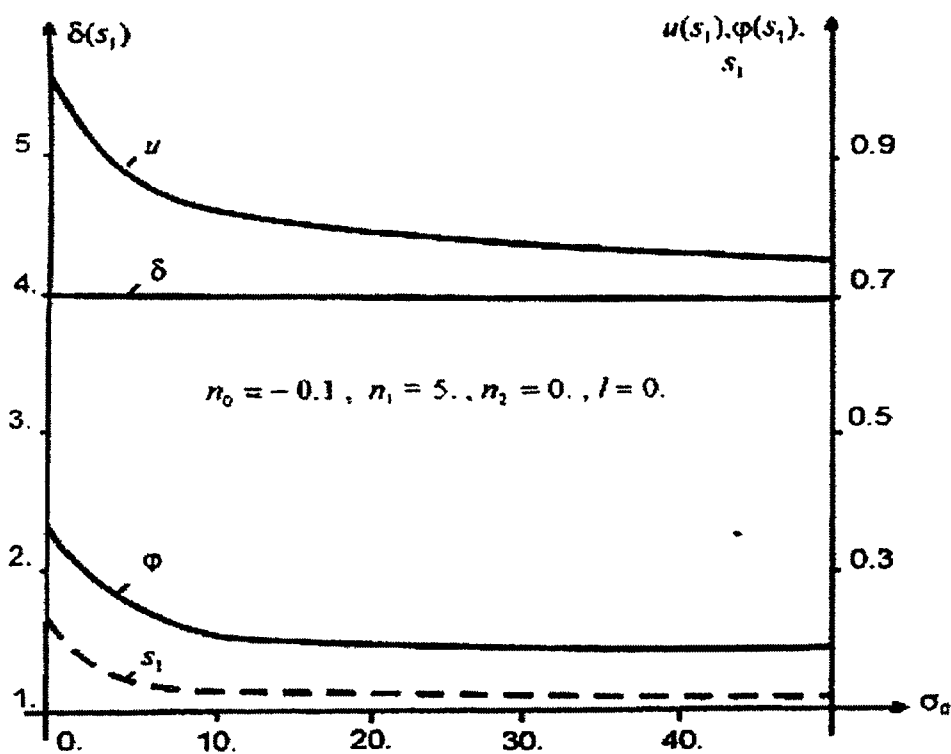


Рис. 2. График решения системы (1.44) для $N=2$.

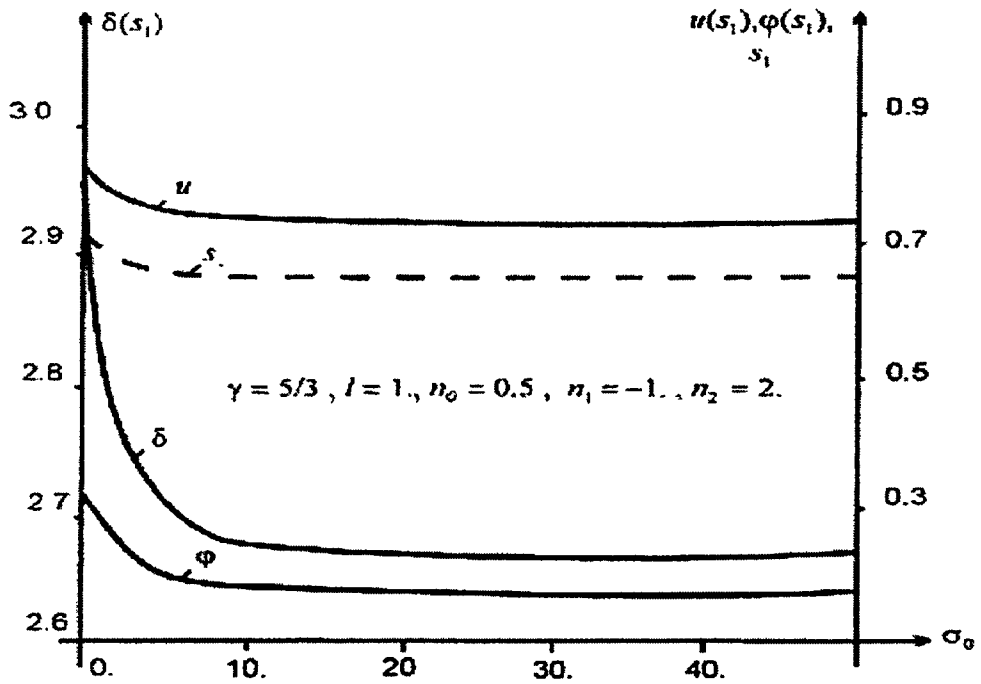


Рис. 3. График решения системы (1.44) для $N=3$.

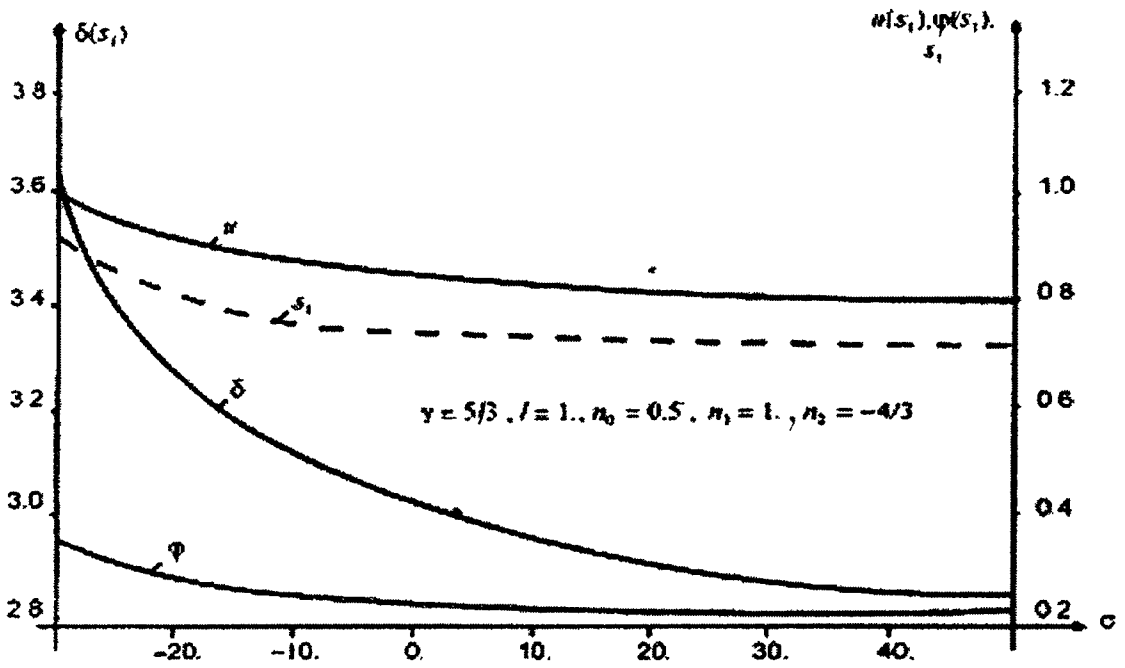


Рис. 4. График решения системы (1.44) для $N=4$.

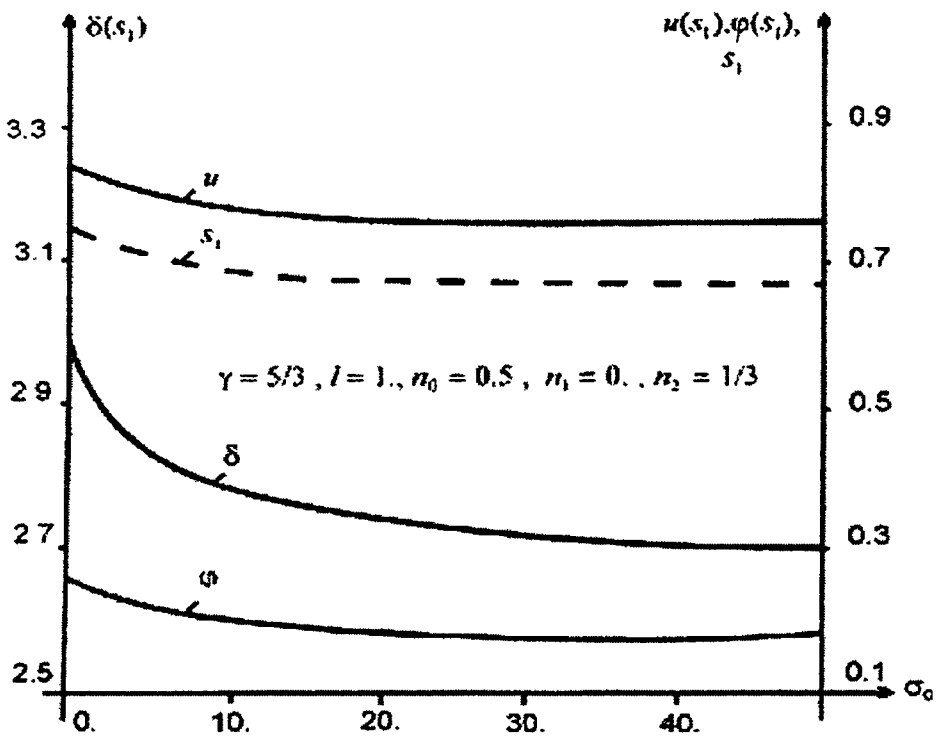


Рис. 5. График решения системы (1.44) для $N=5$.

**ГЛАВА II. О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ
ПРОЦЕССОРАМИ**

**§2.1. Интерполирование многомерных функций и итерационные
методы для систем нелинейных алгебраических уравнений**

1°. *Задача интерполирования.* Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$F(X) = 0, \quad (2.1)$$

где $X = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, а $F: R^n \rightarrow R^n$, $F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X))$.

Обозначим $Y^i \equiv F(X^i)$.

Отображение $F(X)$ заменим афинным отображением

$L(X) = C + AX$, где $C = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$, а матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

При этом C и A должны удовлетворять условиям

$$F(X^j) = L(X^j), \quad j = \overline{0, n}. \quad (2.2)$$

Потребуем, что

$$\det(H_{X_{0,n}}) \neq 0, \quad (2.3)$$

где $H_{X_{0,n}} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$

Легко проверить, что если вектора $X^j - X^0$, $j = \overline{1, n}$, линейно независимы, то A невырождена тогда и только тогда, когда вектора $Y^j - Y^0$, $j = \overline{1, n}$, линейно независимы, т.е. $\det(H_{Y_0, n}) \neq 0$.

Заметим, что мы можем также рассмотреть следующие частные случаи:

а) $F(X)$ заменяем таким аффинным отображением $L(X) = C + AX$, где A имеет диагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

т.е. каждую $f_i(X)$ заменяем функцией $l_i(X) = c_i + a_i^i x_i$. При этом c_i , a_i^i , $i = \overline{1, n}$, должны удовлетворять условиям $f_i(X^j) = l_i(X^j)$, $j = 0, 1$. В векторном виде

$$F(X^j) = L(X^j), \quad j = 0, 1. \quad (2.6)$$

Лемма 2.2. Пусть $X^0, X^1; Y^0, Y^1 \in R^n$. Тогда существует единственная аффинная функция $L(X) = C + AX$, где $C \in R^n$, $A \in L(R^n, R^n)$ и имеет вид (2.5), такая что равенства (2.6) выполняются тогда и только тогда, когда $x_i^0 \neq x_i^1$, $i = \overline{1, n}$. При этом A невырождена тогда и только тогда, когда $y_i^0 \neq y_i^1$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Условия (2.6) перепишем так

$$\begin{cases} c_i + a_i^i x_i^0 = f_i(X^0) \\ c_i + a_i^i x_i^1 = f_i(X^1) \end{cases}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для каждого i это система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_i^0 \\ 1 & x_i^1 \end{pmatrix} = x_i^1 - x_i^0 \neq 0, \quad i = \overline{1, n},$$

т.е. если $x_i^0 \neq x_i^1, \quad i = \overline{1, n}$.

Из (2.6) можем написать

$$A(X^0 - X^1) = Y^0 - Y^1, \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_1^1(x_1^0 - x_1^1) = y_1^0 - y_1^1 \\ \dots \\ a_n^n(x_n^0 - x_n^1) = y_n^0 - y_n^1 \end{cases}.$$

Отсюда видно, что A невырождена тогда и только тогда, когда $y_i^0 \neq y_i^1, \quad i = \overline{1, n}$.

б) Функцию $F(X)$ заменим такой аффинной функцией $L(X) = C + AX$, где A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1}^n & a_n^n \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

т.е. $f_1(X)$ заменяем функцией $l_1(X) = c_1 + a_1^1 x_1$, а $f_i(X), \quad i = \overline{2, n}$,

заменяем функцией $l_i(X) = c_i + a_{i-1}^i x_{i-1} + a_i^i x_i$. При этом

$c_1, a_1^1, c_i, a_{i-1}^i, a_i^i, \quad i = \overline{2, n}$, должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} l_1(X^j) = f_1(X^j), & j = 1, 2, \\ l_i(X^j) = f_i(X^j), & j = 0, 1, 2, \quad i = \overline{2, n}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Скажем, что точки Z^0, Z^1, Z^2 удовлетворяют R -условию, если

$$z_1^1 \neq z_1^2 \quad \text{и} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & z_{i-1}^0 & z_i^0 \\ 1 & z_{i-1}^1 & z_i^1 \\ 1 & z_{i-1}^2 & z_i^2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad i = \overline{2, n}. \quad (2.9)$$

Лемма 2.3. Пусть, $X^0, X^1, X^2; Y^0, Y^1, Y^2 \in R^n$. Тогда существует единственная аффинная функция $L(X) = C + AX$, где $C \in R^n$, $A \in L(R^n, R^n)$ и A имеет вид (2.7), такая, что равенства (2.8) имеют место тогда и только тогда, когда точки X^0, X^1, X^2 удовлетворяют R -условию.

Доказательство. Перепишем (2.8) в следующем виде

$$\begin{cases} f_1(X^1) = c_1 + a_1^1 x_1^1 \\ f_1(X^2) = c_1 + a_1^1 x_1^2 \end{cases} \quad (2.10a)$$

$$\begin{cases} f_i(X^0) = c_i + a_{i-1}^i x_{i-1}^0 + a_i^i x_i^0 \\ f_i(X^1) = c_i + a_{i-1}^i x_{i-1}^1 + a_i^i x_i^1 \\ f_i(X^2) = c_i + a_{i-1}^i x_{i-1}^2 + a_i^i x_i^2 \end{cases} \quad (2.10б)$$

Система (2.10а) будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 \\ 1 & x_1^2 \end{pmatrix} = x_1^2 - x_1^1 \neq 0, \quad \text{т.е.} \quad x_1^2 \neq x_1^1,$$

а система (2.10б) будет иметь единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_{i-1}^0 & x_i^0 \\ 1 & x_{i-1}^1 & x_i^1 \\ 1 & x_{i-1}^2 & x_i^2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad i = \overline{2, n}.$$

Итак, $L(X)$ определяется в единственном виде из условия (2.8) тогда и только тогда, когда точки X^0, X^1, X^2 удовлетворяют R -условию.

2°. Описание класса методов. Мы рассмотрим несколько случаев в зависимости от матрицы A .

а) Матрица A диагональна. Тут интерполяция происходит по двум точкам и вместо системы (2.1) рассматриваем линейное уравнение

$$L(X) = C + AX = 0, \quad (2.11)$$

где $C = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$, а матрица A диагональна

$$A = \text{diag}(a_1^1, \dots, a_n^n).$$

При этом C и A определяются из условия в заданных точках X^0, X^{-1} из R^n :

$$F(X^j) = L(X^j), \quad j = -1, 0.$$

Из (2.11) следует, что $X = -A^{-1}C$. Учитывая заданное условие в точках X^0, X^{-1} будем иметь

$$x_i^1 = x_i^0 - \frac{x_i^{-1} - x_i^0}{f_i(X^{-1}) - f_i(X^0)} f_i(X^0), \quad i = 1, \dots, n.$$

Вообще, если известны некоторые приближения к корню X^* — X^{k-1}, X^k , то X^{k+1} , $k = 0, 1, \dots$, можно вычислить по формуле

$$x_i^{k+1} = x_i^k - \frac{x_i^{k-1} - x_i^k}{f_i(X^{k-1}) - f_i(X^k)} f_i(X^k), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.12)$$

(2.12) переписывается так

$$X^{k+1} - X^k = -A_{k+1}^{-1} F(X^k),$$

где

$$A_{k+1} = \text{diag} \left(\frac{f_i(X^{k-1}) - f_i(X^k)}{x_i^{k-1} - x_i^k} \right)_{i=\overline{1,n}}. \quad (2.13)$$

Ясно, что должна существовать A_{k+1}^{-1} .

Геометрически на каждом шагу мы заменяем функции $z = f_i(X)$, $i = \overline{1,n}$, в R^{n+1} гиперплоскостями $l_i(X)$, $i = \overline{1,n}$, которые параллельны координатным осям $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ и интерполируют функцию f_i по двум данным X^{k-1}, X^k точкам. Тогда следующее приближение X^{k+1} является в R^{n+1} точкой пересечения этих гиперплоскостей с гиперплоскостью $z = 0$.

б) Матрица A двухдиагональна (см. § 2.1, случай б). Тут интерполирование происходит по трём точкам и вместо системы (2.1) рассматриваем линейное уравнение $L(X) = C + AX = 0$, где $C = (c_1, \dots, c_n) \in R^n$, а двухдиагональная матрица A имеет вид (2.7). При этом C и A определяются из условия в начальных точках X^0, X^{-1}, X^{-2} из R^n :

$$\begin{cases} f_1(X^j) = l_1(X^j), & j = -1, 0, \\ f_i(X^j) = l_i(X^j), & j = -2, -1, 0, \quad i = \overline{2,n}. \end{cases}$$

Учитывая эти условия будем иметь

$$A^1(X^1 - X^0) = -F(X^0).$$

Если существует $(A^1)^{-1}$, то $X^1 - X^0 = -(A^1)^{-1}F(X^0)$. Вообще,

если известны некоторые приближения к корню X^* — X^{k-2}, X^{k-1}, X^k , то X^{k+1} можно вычислить из системы

$$A^{k+1}(X^{k+1} - X^k) = -F(X^k). \quad (2.14)$$

Мы можем написать рекуррентные формулы для последовательного вычисления x_i^{k+1} , $i = \overline{1, n}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{k+1} = x_1^k - \frac{f_1(X^k)}{(a_1^1)^{k+1}} \\ x_2^{k+1} = x_2^k - \frac{(a_1^2)^{k+1}}{(a_2^2)^{k+1}} (x_1^{k+1} - x_1^k) - \frac{f_2(X^k)}{(a_2^2)^{k+1}} \\ \dots \\ x_n^{k+1} = x_n^k - \frac{(a_{n-1}^n)^{k+1}}{(a_n^n)^{k+1}} (x_{n-1}^{k+1} - x_{n-1}^k) - \frac{f_n(X^k)}{(a_n^n)^{k+1}} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

а для параллельного вычисления x_i^{k+1} , $i = \overline{1, n}$, будем иметь

$$x_i^{k+1} = \sum_{l=1}^i \frac{-f_l(X^k)}{(a_l^l)^{k+1}} \prod_{j=l+1}^i \frac{-(a_{j-1}^j)^{k+1}}{(a_j^j)^{k+1}} + x_i^k. \quad (2.16)$$

В (2.16) когда $j > i$, тогда примем, что $\prod \frac{-(a_{j-1}^j)^{k+1}}{(a_j^j)^{k+1}} \equiv 1$.

Геометрически на каждом шагу в R^{n+1} мы заменяем функцию $z = f_1(X)$ функцией $l_1(X)$, а функции $z = f_i(X)$, $i = \overline{2, n}$, гиперплоскостями $l_i(X)$, которые параллельны $x_1, \dots, x_{i-2}, x_{i+1}, \dots, x_n$ координатным осям ($l_1(X)$ параллельна осям x_2, \dots, x_n) и интерполирует функцию $f_i(X)$, $i = \overline{2, n}$, по заданным точкам X^{k-2}, X^{k-1}, X^k ($f_1(X)$ — по точкам X^{k-1}, X^k). Следующее приближение является точкой пересечения этих n гиперплоскостей с гиперплоскостью $z = 0$.

в) Матрица A полная (см. § 2.1, начало). Тогда систему (2.1) заменяем линейной системой

$$\begin{cases} l_1(X) = c_1 + a_1^1 x_1 + \dots + a_n^1 x_n = 0 \\ \dots \\ l_n(X) = c_n + a_1^n x_1 + \dots + a_n^n x_n = 0 \end{cases},$$

где постоянные c_i и вектора $\vec{a}^i = (a_1^i, \dots, a_n^i)$, $i = \overline{1, n}$, выбраны из условия в заданных начальных точках

$$f_i(X^j) = l_i(X^j), \quad j = -n, \dots, 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Геометрически каждую функцию $z = f_i(X)$, $i = \overline{1, n}$, в R^{n+1} заменяем l_i гиперплоскостью, которая интерполирует её по заданным $n+1$ точкам. Следующее приближение является точкой пересечения этих n гиперплоскостей с $z = 0$ гиперплоскостью.

С первого взгляда создаётся впечатление, что нужно решить n линейную систему, каждую с $n+1$ уравнением и $n+1$ неизвестным для вычисления c_i, \vec{a}^i , $i = \overline{1, n}$, а потом уже решить систему для нахождения следующего приближения. Но оказалось, что если $\det(H_{X_{k-n,k}}) \neq 0$, $\det(H_{Y_{k-n,k}}) \neq 0$ (матрица $H_{X_{0,n}}$ определена в §2.1), то X^{k+1} вычисляется следующим образом

$$X^{k+1} = \begin{pmatrix} x_1^{k-n} & x_1^{k-(n-1)} & \dots & x_1^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{k-n} & x_n^{k-(n-1)} & \dots & x_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

где $z = (z_0, \dots, z_n)^T$ есть единственное решение следующей линейной системы $n+1$ порядка (см.[72]):

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f_1(X^{k-n}) & \dots & f_1(X^k) \\ f_2(X^{k-n}) & \dots & f_2(X^k) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ f_n(X^{k-n}) & \dots & f_n(X^k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

§ 2.2. Сходимость итерационного метода

1°. Изучение сходимости итерационного процесса требует введения некоторых операторов. Рассмотрим функцию $F(X): R^n \rightarrow R^n, n \geq 2$. Для дальнейшего будет важным рассмотрение пространства линейных операций из R^n в R^n , которое обозначено через $L(R^n, R^n)$. Составим произведение $E_2 = R^n \times R^n$ (произведение пространства R^n на самого себя). Элемент пространства E_2 запишется в виде (X, Y) , где $X, Y \in R^n$. Предположим далее, что найдётся некоторая функция $F(X, Y)$, которая переводит элементы пространства E_2 в элементы пространства $L(R^n, R^n)$, где X, Y любые неравные элементы из пространства R^n . Для фиксированных элементов X, Y из R^n , $F(X, Y)$ является линейным оператором из пространства $L(R^n, R^n)$. Пусть $F(X, Y)$ удовлетворяет условию

$$F(X, Y)(X - Y) = F(X) - F(Y). \quad (2.19)$$

Аналогично определяется функция $F(X, Y, Z)$, которая переводит E_3 в $L(R^n, L(R^n, R^n))$ – пространство линейных операций из R^n в

$L(R^n, R^n)$, где X, Y, Z любые неравные элементы из R^n . Пусть выполняется условие

$$F(X, Y, Z)(X - Z) = F(X, Y) - F(Y, Z). \quad (2.20)$$

Функции $F(X, Y)$, $F(X, Y, Z)$ предполагаются симметричными, т.е. при любой перестановке аргументов их значение не меняются. При соблюдении всех этих требований $F(X, Y)$ и $F(X, Y, Z)$ являются аналогами отдельных разностей в R^n . Аналогично можно определить отдельные разности, если вместо R^n взять любое нормированное пространство (см.[80]).

2°. Исследуем сходимость методов, приведённых в §2.1.

а) Матрица A диагональна.

Если $X^{k-1}, X^k, k = 0, 1, \dots$, – предыдущие приближения, то X^{k+1} будет вычисляться следующим образом

$$A^{k+1}(X^{k+1} - X^k) = -F(X^k),$$

где A^{k+1} имеет вид (2.13). Легко показать, что A^{k+1} удовлетворяет условию (2.19) и симметрична по своим аргументам. Обозначим $A^{k+1} \equiv F(X^k, X^{k-1})$. Ясно, что

$$F(X^k, X^{k-1})(X^k - X^{k-1}) = F(X^k) - F(X^{k-1})$$

и $F(X^k, X^{k-1}, X^{k-2})(X^k - X^{k-2}) = F(X^k, X^{k-1}) - F(X^{k-1}, X^{k-2})$.

Тогда (2.12) запишем так

$$F(X^k, X^{k-1})(X^{k+1} - X^k) = -F(X^k), \quad (2.21)$$

или $F(X^k, X^{k-1})(X^{k+1} - X^{k-1}) = -F(X^{k-1})$.

Для сходимости можно использовать методику, приведённую в [65] для сходимости метода хорд для нахождения корня операторного уравнения.

Пусть X^0, X^{-1} начальные приближения из R^n .

Теорема 2.1. Пусть, существуют такие постоянные B_0, η_0, K , что выполнены следующие условия:

1. Существует $F(X^0, X^{-1})^{-1}$ и $\|F(X^0, X^{-1})^{-1}\| \leq B_0$;

2. $\|X^1 - X^0\|, \|X^1 - X^{-1}\|$ не превосходят числа $\eta_0 > 0$;

3. $\|F(X, Y) - F(Y, Z)\| \leq K\|X - Z\|$, $X, Y, Z \in S$,

$$\text{где } S = \{X: \|X - X^0\| \leq 2\eta_0\};$$

4. Для постоянных B_0, η_0, K справедливо условие

$$h_0 = 2B_0\eta_0K < 1/4.$$

Тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение X^* , к которому сходятся приближения метода (2.21), при этом

$$\|X^* - X^k\| \leq \eta_0 \left(\frac{8}{9}h_0\right)^{w_k - 1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.22)$$

где $w_0 = 0, w_1 = w_2 = 1, w_i = w_{i-1} + w_{i-2}, i = 3, 4, \dots$, — числа Фибоначи.

Доказательство. Ясно, что $X^0, X^{-1}, X^1 \in S$. В самом деле,

$$\|X^1 - X^0\| < 2\eta_0,$$

$$\|X^{-1} - X^0\| \leq \|X^{-1} - X^1\| + \|X^1 - X^0\| \leq 2\eta_0.$$

Рассмотрим матрицу

$$T_1 = F(X^0, X^{-1})^{-1}(F(X^0, X^{-1}) - F(X^0, X^1))$$

$$\|T_1\| \leq \|F(X^0, X^{-1})^{-1}\| \cdot K \cdot \|X^1 - X^{-1}\| \leq B_0\eta_0K < h_0 < 1/4.$$

По теореме Банаха [60] существует $(I - T_1)^{-1}$ и

$$\|(I - T_1)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - h_0}. \quad \text{Отсюда, существует}$$

$$F(X^0, X^1)^{-1} = F(X^0, X^{-1})^{-1}(I - T_1)^{-1} \quad \text{и} \quad \|F(X^0, X^1)^{-1}\| \leq \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1.$$

Тогда для приближения X^2 будем иметь

$$\begin{aligned} \|X^2 - X^1\| &\leq \|F(X^0, X^1)^{-1}\| \cdot \|F(X^1)\| \leq B_1 \|F(X^1) - F(X^0) - \\ &- F(X^0, X^{-1})(X^1 - X^0)\| \leq B_1 K \|X^1 - X^0\| \cdot \|X^1 - X^{-1}\| \leq \\ &\leq \frac{B_0}{1 - h_0} K \eta_0 \eta_0 \leq \frac{h_0}{1 - h_0} \eta_0 = \eta_1. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\eta_1 < \frac{1}{3} \eta_0 < \eta_0$.

$X^2 \in S$. В самом деле

$$\|X^2 - X^0\| \leq \|X^2 - X^1\| + \|X^1 - X^0\| \leq \eta_1 + \eta_0 \leq 2\eta_0.$$

Рассмотрим матрицу $T_2 = F(X^0, X^1)^{-1}(F(X^0, X^1) - F(X^1, X^2))$.

$$\begin{aligned} \|T_2\| &\leq \|F(X^0, X^1)^{-1}\| \cdot K \cdot \|X^0 - X^2\| \leq B_1 K (\|X^0 - X^1\| + \\ &+ \|X^1 - X^2\|) \leq B_1 K (\eta_1 + \eta_0) = h_1. \end{aligned}$$

Покажем, что $h_1 < \frac{1}{4}$. В самом деле,

$$\begin{aligned} h_1 &= B_1 K (\eta_0 + \eta_1) = B_1 K \left(\eta_0 + \frac{h_0}{1 - h_0} \eta_0 \right) = \frac{2B_0 K \eta_0}{2(1 - h_0)^2} = \\ &= \frac{h_0}{2(1 - h_0)^2} < \frac{8}{9} h_0 = q h_0 < h_0 < \frac{1}{4}, \quad \text{где} \quad q = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Доказательство продолжим методом математической индукции.

Пусть, для $k = 1$ по $k = k_0 - 1$ имеем

$$B_k = \frac{B_{k-1}}{1-h_{k-1}}; \quad \eta_k = \frac{h_{k-1}}{1-h_{k-1}} \eta_{k-1}; \quad h_k = B_k K(\eta_k + \eta_{k-1}); \quad (2.23)$$

$$\|X^{k+1} - X^k\| \leq \eta_k, \quad X^{k+1} \in S; \quad (2.24)$$

$$\text{Существует } F(X^k, X^{k-1})^{-1} \text{ и } \|F(X^k, X^{k-1})^{-1}\| \leq B_k; \quad (2.25)$$

При этом, $h_k \leq 2h_{k-1}h_{k-2}$, что вытекает из равенства

$$h_k = \frac{h_{k-1}h_{k-2}}{(1-h_{k-1})^2}. \quad (2.26)$$

Проверим справедливость (2.23)-(2.26) для $k = k_0$. Рассмотрим матрицу $T_{k_0} = F(X^{k_0-1}, X^{k_0-2})^{-1}(F(X^{k_0-1}, X^{k_0-2}) - F(X^{k_0}, X^{k_0-1}))$.

$$\|T_{k_0}\| \leq B_{k_0-1} K \|X^{k_0} - X^{k_0-2}\| \leq B_{k_0-1} K(\eta_{k_0-1} + \eta_{k_0-2}) = h_{k_0-1}.$$

Элементарным вычислением можно показать справедливость (2.26) для

$$h_{k_0-1} \text{ и, отсюда, } h_{k_0-1} \leq \frac{4}{9} h_{k_0-2} < \frac{1}{4}.$$

По теореме Банаха [60] существует $(I - T_{k_0})^{-1}$ и

$$\|(I - T_{k_0})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-h_{k_0-1}}. \text{ Отсюда, существует } F(X^{k_0}, X^{k_0-1})^{-1} \text{ и}$$

$$\|F(X^{k_0}, X^{k_0-1})^{-1}\| \leq \frac{B_{k_0-1}}{1-h_{k_0-1}} = B_{k_0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Рассмотрим } \|X^{k_0+1} - X^{k_0}\| &\leq \|F(X^{k_0}, X^{k_0-1})^{-1}\| \cdot \|F(X^{k_0})\| \leq \\ &\leq B_{k_0} K \|X^{k_0} - X^{k_0-1}\| \cdot \|X^{k_0} - X^{k_0-2}\| \leq B_{k_0} K \eta_{k_0-1} (\eta_{k_0-1} + \eta_{k_0-2}) = \\ &= \frac{B_{k_0-1} K (\eta_{k_0-1} + \eta_{k_0-2})}{1-h_{k_0-1}} \eta_{k_0-1} = \frac{h_{k_0-1}}{1-h_{k_0-1}} \eta_{k_0-1} = \eta_{k_0}. \end{aligned}$$

Оценим числа h_k , учитывая, что $q = \frac{8}{9}$.

$$h_1 = qh_0, \quad h_2 \leq 2h_1h_0 \leq 2qh_0^2, \quad h_3 \leq 2h_2h_1 \leq 2^2q^2h_0^3, \\ h_4 \leq 2h_3h_2 \leq 2^4q^3h_0^5, \quad h_5 \leq 2h_4h_3 \leq 2^7q^5h_0^8.$$

Тогда
$$h_k \leq 2^{w_{k+1}-1} q^{w_k} h_0^{w_{k+1}} = \frac{1}{2} q^{w_k} (2h_0)^{w_{k+1}},$$
 где

$w_0 = 0, w_1 = w_2 = 1, w_i = w_{i-1} + w_{i-2}, i = 3, 4, \dots,$ – числа Фибоначчи.

Теперь оценим числа η_k :

$$\eta_1 \leq \frac{4}{3} h_0 \eta_0, \quad \eta_2 \leq \frac{4}{3} h_1 \eta_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 q h_0^2 \eta_0, \quad \eta_3 \leq \frac{4}{3} h_2 \eta_2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 2q^2 h_0^4 \eta_0, \\ \eta_4 \leq \frac{4}{3} h_3 \eta_3 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^4 2^3 q^4 h_0^7 \eta_0, \quad \eta_5 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^5 2^7 q^7 h_0^{12} \eta_0, \quad \text{и т.д.}$$

$$\eta_k \leq \left(\frac{4}{3}\right)^k \frac{1}{2^k} q^{w_{k+1}-1} (2h_0)^{w_{k+2}-1} \eta_0, \quad (2.27)$$

Преобразуем последнюю оценку

$$\eta_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k (2qh_0)^{-1} q^{w_k+w_{k-1}} (2h_0)^{w_{k+1}+w_k} \eta_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^k (2qh_0)^{-1} \eta_0 \times \\ \times q^{\frac{w_k(1+\frac{w_{k-1}}{w_k})}{w_k}} (2h_0)^{\frac{w_k(2+\frac{w_{k-1}}{w_k})}{w_k}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k (2qh_0)^{-1} \eta_0 (q(2h_0)^2)^{w_k}.$$

Учитывая, что $4h_0 < 1$, будем иметь

$$\eta_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k (2qh_0)^{-1} (qh_0)^{w_k} \eta_0 = \frac{\eta_0}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^k (qh_0)^{w_k-1}.$$

Из этой оценки получаем

$$\|X^{k+p} - X^k\| \leq \eta^{k+p-1} + \eta^{k+p-2} + \dots + \eta^{k+1} + \eta^k \leq \\ \leq \frac{\eta_0}{2} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k+p-1} (qh_0)^{w_{k+p-1}-1} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^k (qh_0)^{w_k-1} \right] \leq$$

$$\leq \frac{\eta_0}{2} (qh_0)^{w_k-1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k+p-1} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^k \right] \leq \eta_0 (qh_0)^{w_k-1}.$$

$$\|X^{k+p} - X^k\| \leq \eta_0 (qh_0)^{w_k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Покажем, что $X^{k_0+1} \in S$. В самом деле,

$$\|X^{k_0+1} - X^0\| \leq \|X^{k_0+1} - X^1\| + \|X^1 - X^0\| \leq 2\eta_0.$$

Из (2.28) видно, что последовательность $\{X^k\}$ фундаментальна и

существует её предел X^* . Так как каждый член последовательности $\{X^k\}$ принадлежит S , а S замкнута, то $X^* \in S$. Покажем, что X^*

и есть решение задачи (2.1). Рассмотрим равенство

$$F(X^i) + F(X^i, X^{i-1})(X^{i+1} - X^i) = 0. \quad (2.29)$$

Если $F(X^i, X^{i-1})$ ограничена какой-нибудь, не зависящей от i константой

$$\|F(X^i, X^{i-1})\| \leq M, \quad (2.30)$$

то из (2.29), когда $i \rightarrow \infty$, вытекает, что $F(X^*) = 0$.

Покажем справедливость (2.30)

$$\begin{aligned} \|F(X^i, X^{i-1})\| &\leq \|F(X^i, X^{i-1}) - F(X^{i-1}, X^{i-2})\| + \dots + \\ &+ \|F(X^1, X^0) - F(X^0, X^{-1})\| + \|F(X^0, X^{-1})\| \leq K \|X^i - X^{i-2}\| + \dots + \\ &+ K \|X^1 - X^{-1}\| + \|F(X^0, X^{-1})\| \leq K[(\eta_{i-1} + \eta_{i-2}) + \dots + (\eta_1 + \eta_0) + \eta_0] + \\ &+ \|F(X^0, X^{-1})\| \leq 2K(\eta_{i-1} + \dots + \eta_1) + 2K\eta_0 + \|F(X^0, X^{-1})\|. \end{aligned}$$

Применим оценку (2.28) в случае $k = 1, \quad p = i - 1$. Тогда

$$\|F(X^i, X^{i-1})\| \leq 4K\eta_0 + \|F(X^0, X^{-1})\| = M.$$

Из (2.28), когда $p \rightarrow \infty$, получаем оценку (2.22).

Теперь покажем, что уравнение имеет единственное решение.

Пусть, уравнение (2.1) имеет ещё одно решение \tilde{X} , которое принадлежит S . Очевидно, что $\tilde{X} = \tilde{X} - F(X^i, X^{i-1})^{-1} F(\tilde{X})$ для любого i . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|\tilde{X} - X^1\| &= \|\tilde{X} - F(X^0, X^{-1})^{-1} F(\tilde{X}) - X^0 + F(X^0, X^{-1})^{-1} F(X^0)\| \leq \\ &\leq \|\tilde{X} - X^0\| \cdot \|I - F(X^0, X^{-1})^{-1} F(\tilde{X}, X^0)\| \leq \\ &\leq \|\tilde{X} - X^0\| \cdot \|F(X^0, X^{-1})^{-1}\| \cdot \|F(X^0, X^{-1}) - F(\tilde{X}, X^0)\| \leq \\ &\leq B_0 K \|\tilde{X} - X^0\| \cdot \|\tilde{X} - X^{-1}\| \leq 2B_0 \eta_0 K \cdot 4\eta_0 = 2^2 h_0 \eta_0 = 2^2 \eta_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{X} - X^2\| &= \|\tilde{X} - F(X^0, X^1)^{-1} F(\tilde{X}) - X^1 + F(X^0, X^1)^{-1} F(X^1)\| \leq \\ &\leq B_1 K \|\tilde{X} - X^1\| \cdot \|\tilde{X} - X^0\| \leq 2^2 B_1 \eta_1 K \cdot 2\eta_0 = 2^3 h_1 \eta_1 = 2^3 \eta_2; \end{aligned}$$

и т.д., применяя оценку (2.27), получим

$$\begin{aligned} \|\tilde{X} - X^k\| &\leq 2^{w_{k+2}} \eta_k \leq 2 \cdot 2^{w_{k+2}-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k q^{w_{k+1}-1} (2h_0)^{w_{k+2}-1} \eta_0 = \\ &= 2 \left(\frac{2}{3}\right)^k q^{w_{k+1}-1} (4h_0)^{w_{k+2}-1} \eta_0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что когда $k \rightarrow \infty$ последовательность $\{X^k\}$ сходится к \tilde{X} . В силу единственности предела, $\tilde{X} = X^*$.

Теорема доказана полностью.

б) Матрица A двухдиагональна.

Пусть, $X^{k-2}, X^{k-1}, X^k, k = 0, 1, \dots$, – приближения, полученные на предыдущем шаге. Тогда X^{k+1} будет вычисляться из формулы (2.15).

Легко показать, что $A^{k+1} \equiv A^{k+1}(X^{k-2}, X^{k-1}, X^k)$ симметрична по своим аргументам и является аналогом раздельной разности первого порядка.

Сформулируем теорему сходимости этого метода. Пусть, X^0, X^{-1}, X^{-2} – начальные приближения. Тогда справедлива

Теорема 2.2. Пусть, существуют такие постоянные B_0, η_0, K , что выполнены следующие условия:

1. Матрица A_1 имеет обратную и $\|A_1^{-1}\| \leq B_0$;
2. $\|X^1 - X^j\| \leq \eta_0, \quad \eta_0 > 0, \quad j = 0, -1, -2$;
3. $\|A(Z_1, Z_2, Z_3) - A(Z_2, Z_3, Z_4)\| \leq K\|Z_1 - Z_4\|, \quad Z_j \in S, \quad j = \overline{1, 4},$

где $S = \{X: \|X - X^0\| \leq 2\eta_0\}$;

4. Для постоянных B_0, η_0, K справедливо условие

$$h_0 = 2B_0\eta_0K < 1/4.$$

Тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение X^* , к которому сходятся приближения метода (2.15), при этом

$$\|X^* - X^k\| \leq \eta_0 \left(\frac{8}{9}h_0\right)^{w_k - 1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $w_0 = 0, w_1 = w_2 = 1, w_i = w_{i-1} + w_{i-2}, \quad i = 3, 4, \dots,$ – числа Фибоначи.

Доказательство теоремы проводится аналогично теореме 2.1. Отметим только, что оператор T_k имеет вид

$$T_k = (A^k)^{-1}(A^k - A^{k+1}).$$

в) Матрица A полная.

Если $X^{k-n}, \dots, X^{k-1}, X^k, k = 0, 1, \dots$, – предыдущие приближения, то X^{k+1} будет вычисляться из системы

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k - (A^{k+1})^{-1} F(X^k) = X^{k-1} - (A^{k+1})^{-1} F(X^{k-1}) = \\ &\dots = X^{k-n} - (A^{k+1})^{-1} F(X^{k-n}), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $A^{k+1} \equiv A^{k+1}(X^k, X^{k-1}, \dots, X^{k-n})$ определяется из условий в узлах интерполяции. Однако, как уже отмечалось выше, в определённых условиях мы можем обойти стороной эти формулы и на каждом шагу вычислять из (2.17)-(2.18).

Для сходимости этого процесса справедлива следующая

Теорема 2.3. Пусть, существуют такие постоянные B_0, η_0, K , что выполнены следующие условия:

1. Матрица A^1 имеет обратную и $\|(A^1)^{-1}\| \leq B_0$;

2. $\|X^j - X^1\| \leq \eta_0, \quad \eta_0 > 0, \quad j = 0, -1, \dots, -n$, где $X^0, X^{-1}, \dots, X^{-n}$ – начальные приближения;

3. $\|A(Z_0, Z_1, \dots, Z_n) - A(Z_1, Z_2, \dots, Z_{n+1})\| \leq K \|Z_0 - Z_{n+1}\|$,

$Z_j \in S, \quad j = \overline{0, n+1}, \quad \text{где } S = \{X: \|X - X^0\| \leq 2\eta_0\}$;

4. Для постоянных B_0, η_0, K имеет место следующее условие

$$h_0 = 2B_0\eta_0K < 1/4.$$

Тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение X^* , к которому сходятся приближения метода (2.31), при этом

$$\|X^* - X^k\| \leq \eta_0 \left(\frac{8}{9} h_0 \right)^{w_k - 1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $w_0 = 0, w_1 = w_2 = 1, w_i = w_{i-1} + w_{i-2}, \quad i = 3, 4, \dots$, – числа Фибоначи.

Теорема 2.3 доказывается аналогично теореме 2.1.

При доказательствах теорем 2.1, 2.2, 2.3 для единственности интерполяционной функции на каждом шагу мы допускаем, соответственно, что, $x_i^{k-1} \neq x_i^k$, $i = \overline{1, n}$, точки X^{k-2}, X^{k-1}, X^k удовлетворяют R -условию и $\det(H_{X_{k-n,k}}) \neq 0$, $k = 0, 1, \dots$.

Учитывая, что $w_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \div \sqrt{5}$, во всех случаях

C -порядок сходимости равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$, но область сходимости суживается по мере того, как меньше точек мы используем в интерполяции.

§2.3. Варианты итерационного метода для многопроцессорной ЭВМ

Рассмотрим несколько случаев итерационного метода в зависимости от матрицы для параллельных вычислительных систем типа SIMD.

а) Матрица A диагональна.

Для реализации алгоритма достаточно три параллельных процессора.

Пусть известны начальные приближения X_1^0, X_2^0, X_3^0 к корню системы

(2.1). На j -ом процессоре вычисляется вектор $X_j^{k+1} (j = \overline{1,3})$ по формуле

$$X_j^{k+1} = X_j^k - F(X_j^k, X_{j+1}^k)^{-1} F(X_j^k) = X_{j+1}^k - F(X_j^k, X_{j+1}^k)^{-1} F(X_{j+1}^k),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Суммы $j+1, j+2$ (в индексе) берётся по модулю 3.

Отметим, что структура формулы (2.32) даёт нам возможность параллельного вычисления компонент $(x_i)_j^{k+1}, i = \overline{1, n}$, каждого вектора X_j^{k+1} на n процессоре, так что в целом (2.32) можно реализовать на $3n$ процессоре.

б) Матрица A двухдиагональная.

Для реализации алгоритма достаточно 4 параллельных процессоров.

Пусть известны начальные приближения $X_1^0, X_2^0, X_3^0, X_4^0$. На j -ом процессоре, $j = \overline{1,4}$, вычисляется вектор X_j^{k+1} по следующей формуле

$$X_j^{k+1} = X_j^k - (A_j^{k+1}(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^k))^{-1} F(X_j^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Здесь суммы в индексах берётся по модулю 4, а вид матрицы $A_j^{k+1} \equiv A_j^{k+1}(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^k)$ определен в §2.1, 1° (случай б)). Как

отмечалось в случае а), в целом метод (2.33) можно реализовать на $4n$ процессоре.

Для сходимости метода (2.32) справедлива следующая

Теорема 2.4. Пусть, существуют такие постоянные B_0, K, η_j^0 , $j = 1, 2, 3$, что выполнены следующие условия:

1. Операторы $F(X_j^0, X_{j+1}^0)$, $j = 1, 2, 3$, имеют обратные и

$$\|F(X_j^0, X_{j+1}^0)^{-1}\| \leq B_0;$$

2. Известны оценки $\|X_j^1 - X_j^0\| \leq \eta_j^0$, $\|X_j^1 - X_{j+1}^0\| \leq \eta_{j+1}^0$, $j = 1, 2, 3$;

3. $\|F(X, Y) - F(X, Z)\| \leq K\|Y - Z\|$, $X, Y, Z \in S$,

$$\text{где } S = \{X: \|X - X_1^0\| \leq 2\eta_0\}, \quad \eta_0 = \max_j \{\eta_j^0\};$$

4. Для постоянных $B_0, \eta_j^0, j = 1, 2, 3$ и K справедливо неравенство

$$h_0 = B_0 K (\eta_1^0 + \eta_2^0 + \eta_3^0) < 1/4.$$

Тогда уравнение (2.1) имеет единственное решение X^* , к которому сходятся приближения метода (2.32) и

$$\|X_j^k - X^*\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} (4h_0)^{2^k-1} \eta_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.34)$$

Доказательство. $X_j^1 \in S$, $j = \overline{1, 3}$. В самом деле, $\|X_j^1 - X_j^0\| \leq 2\eta_0$.

Покажем существование $F(X_j^1, X_{j+1}^1)^{-1}$, $j = 1, 2, 3$. Для этого сначала покажем существование $F(X_j^0, X_{j+1}^1)^{-1}$.

Рассмотрим оператор

$$R'_1 = F(X_j^0, X_{j+1}^0)^{-1}(F(X_j^0, X_{j+1}^0) - F(X_{j+1}^1, X_j^0));$$

$$\|R'_1\| \leq B_0 K \|X_{j+1}^1 - X_{j+1}^0\| \leq B_0 K \eta_{j+1}^0 \leq h_0 < 1.$$

Тогда по теореме Банаха [60], существует $(I - R'_1)^{-1}$ и

$$\|(I - R'_1)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - h_0}.$$

Тогда существует $F(X_j^0, X_{j+1}^1)^{-1} = F(X_j^0, X_{j+1}^0)^{-1}(I - R'_1)^{-1}$

$$\|F(X_j^0, X_{j+1}^1)^{-1}\| \leq \frac{B_0}{1 - h_0} = B'_1.$$

Теперь рассмотрим

$$R_1 = F(X_j^0, X_{j+1}^1)^{-1}(F(X_j^0, X_{j+1}^1) - F(X_{j+1}^1, X_j^1));$$

$$\|R_1\| \leq B'_1 K \|X_j^1 - X_j^0\| \leq B_1 K \eta_j^0 \leq h_0 / (1 - h_0) < 1.$$

Опять по теореме Банаха существует $(I - R_1)^{-1}$ и

$$\|(I - R_1)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - h_0 / (1 - h_0)} = \frac{1 - h_0}{1 - 2h_0}.$$

Тогда существует $F(X_j^1, X_{j+1}^1)^{-1} = F(X_j^0, X_{j+1}^1)^{-1}(I - R_1)^{-1}$ и

$$\|F(X_j^1, X_{j+1}^1)^{-1}\| \leq B'_1 \cdot \frac{1 - h_0}{1 - 2h_0} = \frac{B_0}{1 - 2h_0} = B_1.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|X_j^2 - X_j^1\| &\leq \|F(X_j^1, X_{j+1}^1)^{-1}\| \cdot \|F(X_j^1)\| \leq B_1 \|F(X_j^1) - F(X_j^0) - \\ &- F(X_j^0, X_{j+1}^0)(X_j^1 - X_j^0)\| \leq B_1 K \|X_j^1 - X_j^0\| \cdot \|X_j^1 - X_{j+1}^0\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{B_0 K \eta_j^0}{1-2h_0} \eta_j^0 \leq \frac{h_0}{1-2h_0} \eta_j^0 = \eta_j^1;$$

Аналогично

$$\|X_j^2 - X_{j+1}^1\| \leq \frac{h_0}{1-2h_0} \eta_{j+1}^0 = \eta_{j+1}^1.$$

$$X_j^2 \in S, j = \overline{1,3}.$$

В самом деле,

$$\|X_1^2 - X_1^0\| \leq \|X_1^2 - X_1^1\| + \|X_1^1 - X_1^0\| \leq \eta_1^1 + \eta_1^0 \leq \frac{1}{2} \eta_1^0 + \eta_1^0 < 2\eta_0;$$

$$\|X_2^2 - X_1^0\| \leq \|X_2^2 - X_3^1\| + \|X_3^1 - X_1^0\| \leq 2\eta_0;$$

$$\|X_3^2 - X_1^0\| \leq \|X_3^2 - X_1^1\| + \|X_1^1 - X_1^0\| \leq 2\eta_0.$$

Продолжим доказательство методом математической индукции. Пусть

для $k = \overline{1, k_0}$:

$$\text{Существует } F(X_j^k, X_{j+1}^k)^{-1} \text{ и } \|F(X_j^k, X_{j+1}^k)^{-1}\| \leq B_k; \quad (2.35)$$

$$B'_k = B_{k-1}/(1-h_{k-1}), \quad B_k = B_{k-1}/(1-2h_{k-1}); \quad (2.36)$$

$$h_k = KB_k(\eta_1^k + \eta_2^k + \eta_3^k) < \frac{1}{4}; \quad (2.37)$$

$$\|X_j^{k+1} - X_j^k\| \leq \eta_j^k, \quad \|X_j^{k+1} - X_{j+1}^k\| \leq \eta_{j+1}^k; \quad (2.38)$$

$$\eta_j^k = h_{k-1} \eta_j^{k-1} / (1-2h_{k-1}); \quad (2.39)$$

$$X_j^{k+1} \in S, \quad j = \overline{1,3}. \quad (2.40)$$

Покажем справедливость (2.35)-(2.40) для $k = k_0 + 1$. Рассмотрим

$$R'_{k_0+1} = F(X_j^{k_0}, X_{j+1}^{k_0})^{-1}(F(X_j^{k_0}, X_{j+1}^{k_0}) - F(X_{j+1}^{k_0+1}, X_j^{k_0}));$$

$$\|R'_{k_0+1}\| \leq B_{k_0} K \eta_{j+1}^{k_0} \leq h_{k_0}.$$

Так как $h_{k_0} < \frac{1}{4}$, то по теореме Банаха существует $(I - R'_{k_0+1})^{-1}$

и $\|(I - R'_{k_0+1})^{-1}\| < \frac{1}{1 - h_{k_0}}$. Отсюда, существует $F(X_j^{k_0}, X_{j+1}^{k_0+1})^{-1}$ и

$$\|F(X_j^{k_0}, X_{j+1}^{k_0+1})^{-1}\| \leq \frac{B_{k_0}}{1 - h_{k_0}} = B'_{k_0+1}.$$

Теперь рассмотрим оператор

$$R_{k_0+1} = F(X_j^{k_0}, X_{j+1}^{k_0+1})^{-1}(F(X_j^{k_0}, X_{j+1}^{k_0+1}) - F(X_{j+1}^{k_0+1}, X_j^{k_0+1}));$$

$$\|R_{k_0+1}\| \leq B'_{k_0+1} K \|X_j^{k_0+1} - X_j^{k_0}\| \leq \frac{B_{k_0}}{1 - h_{k_0}} K \eta_j^{k_0} \leq \frac{h_{k_0}}{1 - h_{k_0}} < 1.$$

По теореме Банаха существует $(I - R_{k_0+1})^{-1}$ и

$\|(I - R_{k_0+1})^{-1}\| < \frac{1 - h_{k_0}}{1 - 2h_{k_0}}$. Поэтому существует $F(X_j^{k_0+1}, X_{j+1}^{k_0+1})^{-1}$ и

$$\|F(X_j^{k_0+1}, X_{j+1}^{k_0+1})^{-1}\| \leq \frac{B_{k_0}}{1 - 2h_{k_0}} = B_{k_0+1}.$$

Оценим

$$\begin{aligned} \|X_j^{k_0+2} - X_j^{k_0+1}\| &\leq \|F(X_j^{k_0+1}, X_{j+1}^{k_0+1})^{-1}\| \cdot \|F(X_j^{k_0+1})\| \leq B_{k_0+1} \times \\ &\times \|F(X_j^{k_0+1}) - F(X_j^{k_0}) - F(X_j^{k_0}, X_{j+1}^{k_0})(X_j^{k_0+1} - X_j^{k_0})\| \leq B_{k_0+1} K \times \\ &\times \|X_j^{k_0+1} - X_j^{k_0}\| \cdot \|X_j^{k_0+1} - X_{j+1}^{k_0}\| \leq \frac{B_{k_0} K \eta_{j+1}^{k_0}}{1 - 2h_{k_0}} \eta_j^{k_0} \leq \frac{h_{k_0}}{1 - 2h_{k_0}} \eta_j^{k_0} = \eta_j^{k_0+1}. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать

$$\|X_j^{k_0+2} - X_{j+1}^{k_0+1}\| \leq \frac{h_{k_0}}{1-2h_{k_0}} \eta_j^{k_0} = \eta_j^{k_0+1}.$$

Из (2.37) можно получить

$$h_k = K \frac{B_{k-1}}{1-2h_{k-1}} \cdot \frac{h_{k-1}}{1-2h_{k-1}} (\eta_1^{k-1} + \eta_2^{k-1} + \eta_3^{k-1}) = \frac{h_{k-1}^2}{(1-2h_{k-1})^2}.$$

Поэтому $h_k < 4h_{k-1}^2$. Будем иметь

$$h_1 < 4h_0^2, \quad h_2 < 4^3 h_0^4, \quad h_3 < 4^7 h_0^8 \quad \text{и т.д.} \quad h_k < 4^{2^k-1} h_0^{2^k}.$$

Из (2.39) можно получить

$$\eta_j^1 = h_0 \eta_j^0 / (1-2h_0) < 2h_0 \eta_j^0, \quad \eta_j^2 < 2h_1 \eta_j^1 < 4 \cdot 2^2 h_0^3 \eta_j^0,$$

$$\eta_j^3 < 2h_2 \eta_j^2 < 4^4 \cdot 2^3 h_0^7 \eta_j^0, \quad \eta_j^4 < 4^{11} \cdot 2^4 h_0^{15} \eta_j^0 \quad \text{и т.д.}$$

$$\eta_j^k < 4^{2^k-(k+1)} \cdot 2^k h_0^{2^k-1} \eta_j^0 \leq 2^{-k} (4h_0)^{2^k-1} \eta_0.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|X_j^{k+p} - X_j^k\| &\leq \eta_j^{k+p-1} + \eta_j^{k+p-2} + \dots + \eta_j^{k+1} + \eta_j^k \leq \\ &\leq \left[2^{-(k+p-1)} (4h_0)^{2^{k+p-1}-1} + \dots + 2^{-k} (4h_0)^{2^k-1} \right] \eta_0 \leq \\ &\leq \left(2^{-(k+p-1)} + \dots + 2^{-k} \right) (4h_0)^{2^k-1} \eta_0 \leq 2^{-(k-1)} (4h_0)^{2^k-1} \eta_0. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|X_j^{k+p} - X_j^k\| \leq 2^{-(k-1)} (4h_0)^{2^k-1} \eta_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

Отсюда при $p = k_0 + 1$ и $k = 1$ получаем справедливость (2.40).

Из (2.41) видно, что последовательность $\{X_j^k\}_{k=0}^{\infty}$ фундаментальна и существует её предел X^* . Так как каждый член $\{X_j^k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит S , а S замкнута, то $X^* \in S$. Из (2.41), когда $p \rightarrow \infty$, получаем оценку (2.34). Покажем, что X^* есть решение (2.1). Перепишем (2.32) так

$$F(X_j^i, X_{j+1}^i)(X_j^{i+1} - X_j^i) = -F(X_j^i). \quad (2.42)$$

Покажем, что $\|F(X_j^i, X_{j+1}^i)\| \leq M$, где M не зависит от i .

$$\begin{aligned} \|F(X_j^i, X_{j+1}^i)\| &\leq \|F(X_j^i, X_{j+1}^i) - F(X_j^{i-1}, X_{j+1}^i)\| + \\ &\quad + \|F(X_j^{i-1}, X_{j+1}^i) - F(X_j^{i-1}, X_{j+1}^{i-1})\| + \dots + \\ &\quad + \|F(X_{j+1}^1, X_j^0) - F(X_{j+1}^0, X_j^0)\| + \|F(X_j^0, X_{j+1}^0)\| \leq \\ &\leq K\left[(\eta_j^{i-1} + \eta_{j+1}^{i-1}) + \dots + (\eta_j^0 + \eta_{j+1}^0)\right] + \|F(X_j^0, X_{j+1}^0)\| \leq \\ &\leq K(\eta_j^{i-1} + \dots + \eta_j^1) + K(\eta_{j+1}^{i-1} + \dots + \eta_{j+1}^1) + 2K\eta_0 + \|F(X_j^0, X_{j+1}^0)\|. \end{aligned}$$

Используем (2.41), когда $k=1$, $p=i-1$

$$\begin{aligned} \|F(X_j^i, X_{j+1}^i)\| &\leq 2K \cdot 4h_0\eta_0 + 2K\eta_0 + \|F(X_j^0, X_{j+1}^0)\| \leq \\ &\leq 4K\eta_0 + \|F(X_j^0, X_{j+1}^0)\|. \end{aligned}$$

Если в (2.42) перейдём на предел, когда $i \rightarrow \infty$, получим, что

$$F(X^*) = 0.$$

Единственность решения можно показать аналогично теореме 2.1.

Теорема доказана полностью.

Заметим, что при использовании оператора $F(X, Y)$ подразумевается, что $x_i \neq y_i, \quad i = \overline{1, n}$.

Для сходимости метода (2.33) справедлива следующая

Теорема 2.5. Пусть существуют такие постоянные $B_0, K, \eta_j^0, j = \overline{1, 4}$, что выполнены следующие условия:

1. Операторы $A_j^1(X_j^0, X_{j+1}^0, X_{j+2}^0), \quad j = \overline{1, 4}$, имеют обратные и $\|(A_j^1)^{-1}\| \leq B_0$, где $X_j^0, j = \overline{1, 4}$, – начальные приближения;

2. Известны оценки $\|X_j^1 - X_{j+1}^0\| \leq \eta_{j+1}^0, \quad l = 0, 1, 2, \quad j = \overline{1, 4}$;

3. $\|A(Z_1, Z_2, Z_3) - A(Z_2, Z_3, Z_4)\| \leq K\|Z_1 - Z_4\|, \quad Z_j \in S, j = \overline{1, 4}$,
где $S = \{X: \|X - X_1^0\| \leq 2\eta_0\}, \quad \eta_0 = \max_j \{\eta_j^0\}$.

4. Для постоянных $B_0, K, \eta_j^0, j = \overline{1, 4}$, выполняется условие

$$h_0 = B_0 K (\eta_1^0 + \eta_2^0 + \eta_3^0 + \eta_4^0) < 1/6.$$

Тогда система уравнений (2.1) имеет единственное решение X^* , к которому сходятся приближения метода (2.33). При этом

$$\|X_j^k - X^*\| \leq 2^{-(k-1)} (4h_0)^{2^k - 1} \eta_0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (2.43)$$

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по схеме предыдущей теоремы 2.4.

По принципу математической индукции можно показать, что:

$$\text{Существует } (A_j^{k+1})^{-1} \quad \text{и} \quad \|(A_j^{k+1})^{-1}\| \leq \frac{B_0}{1 - 3h_0} = B_1; \quad (2.44)$$

$$h_k = KB_k(\eta_1^k + \dots + \eta_4^k) = \frac{h_{k-1}^2}{(1-3h_{k-1})^2} < 4h_{k-1}^2 < \frac{1}{6}; \quad (2.45)$$

$$\eta_j^k = h_{k-1} \eta_j^{k-1} / (1-3h_{k-1}); \quad (2.46)$$

$$\|X_j^{k+1} - X_{j+l}^k\| \leq \eta_{j+l}^k, \quad l=0,1,2, \quad X_j^{k+1} \in S; \quad (2.47)$$

$$j = \overline{1,4}, \quad k = 1,2,\dots$$

Существование $(A_j^{k+1})^{-1}$ в (2.44) можно показать по следующей последовательности

$$\begin{aligned} (A_j^k(X_j^{k-1}, X_{j+1}^{k-1}, X_{j+2}^{k-1}))^{-1} &\rightarrow \bar{A}^{-1}(X_j^k, X_{j+1}^{k-1}, X_{j+2}^{k-1}) \rightarrow \\ &\rightarrow \bar{\bar{A}}^{-1}(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^{k-1}) \rightarrow (A_j^{k+1}(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^k))^{-1}, \end{aligned}$$

где операторы $\bar{A}, \bar{\bar{A}}$ зависят от своих аргументов таким же образом, как A_j^k, A_j^{k+1} .

По той же схеме, как в предыдущей теореме можно показать, что

$$\|\bar{A}^{-1}(X_j^k, X_{j+1}^{k-1}, X_{j+2}^{k-1})\| \leq \frac{B_{k-1}}{1-h_{k-1}} = B'_{k-1};$$

$$\|\bar{\bar{A}}^{-1}(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^{k-1})\| \leq B'_{k-1} \frac{1-h_{k-1}}{1-2h_{k-1}} = \frac{B_{k-1}}{1-2h_{k-1}} = B''_{k-1};$$

$$\|(A_j^{k+1}(X_j^k, X_{j+1}^k, X_{j+2}^k))^{-1}\| \leq B''_{k-1} \frac{1-2h_{k-1}}{1-3h_{k-1}} = \frac{B_{k-1}}{1-3h_{k-1}} = B_k.$$

Аналогично предыдущей теореме можно получить оценку

$$\|X_j^{k+p} - X_j^k\| \leq \eta_j^{k+p-1} + \dots + \eta_j^k \leq 2^{-(k-1)} (4h_0)^{2^k-1} \eta_0, \quad p = 1,2,\dots \quad (2.48)$$

поэтому последовательность $\{X_j^k\}_{k=0}^\infty$ фундаментальна и сходится. Так как каждый её член принадлежит S , то предел X^* тоже принадлежит S .

Теперь покажем, что X^* есть решение уравнения (2.1). Перепишем (2.33) следующим образом

$$A_j^{i+1}(X_j^i, X_{j+1}^i, X_{j+2}^i)(X_j^{i+1} - X_j^i) = -F(X_j^i). \quad (2.49)$$

Покажем, что $\|A_j^{i+1}\| \leq M$, где M не зависит от i .

$$\begin{aligned} \|A_j^{i+1}\| &\leq \|A_j^{i+1} - \bar{A}(X_j^i, X_{j+1}^i, X_{j+2}^{i-1})\| + \|\bar{A}(X_j^i, X_{j+1}^i, X_{j+2}^{i-1}) - \\ &\quad - \bar{A}(X_j^i, X_{j+1}^{i-1}, X_{j+2}^{i-1})\| + \|\bar{A}(X_j^i, X_{j+1}^{i-1}, X_{j+2}^{i-1}) - A_j^i\| + \dots + \\ &+ \|\bar{A}(X_j^1, X_{j+1}^0, X_{j+2}^0) - A_j^1\| + \|A_j^1\| \leq K(\|X_{j+2}^i - X_{j+2}^{i-1}\| + \|X_{j+1}^i - X_{j+1}^{i-1}\| + \\ &\quad + \|X_j^i - X_j^{i-1}\| + \dots + \|X_j^1 - X_j^0\|) + \|A_j^1\| \leq K(\eta_{j+2}^{i-1} + \dots + \eta_{j+2}^1) + \\ &\quad + K(\eta_{j+1}^{i-1} + \dots + \eta_{j+1}^1) + K(\eta_j^{i-1} + \dots + \eta_j^1) + 3K\eta_0 + \|A_j^1\| \end{aligned}$$

Используя оценку (2.48) при $k=1$, $p=i-1$ получим

$$\|A_j^{i+1}\| \leq 6K\eta_0 + \|A_j^1\|.$$

Перейдём в (2.49) на предел, когда $i \rightarrow \infty$. Получим, что

$$F(X^*) = 0.$$

Заметим, что при использовании оператора $A(X, Y, Z)$ в теореме, мы подразумеваем, что точки X, Y, Z удовлетворяют R -условие.

Из теорем 2.4, 2.5, видно, что C -порядок сходимости параллельных методов равен 2.

§2.4. Использование итерационного метода (2.32) для нахождения автомодельных решений некоторых задач газовой динамики

1°. *Постановка задачи.* Рассмотрим одномерное течение идеального газа, возникшего под действием плоского поршня. При этом имеются объёмные источники массы, а диссипативные процессы и источники тепла отсутствуют. В начальный момент газ покоится и его плотность равномерно распределена в пространстве.

Соответствующая математическая модель запишется в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} &= A \rho^n \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + B \frac{\partial \rho}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.50)$$

$$v(r,0) = 0, \quad \rho(r,0) = \rho_0 r^l, \quad (2.51)$$

$$v(r^*, t) = v_0 t^{n_0}, \quad (2.52)$$

где t – время, r – переменная Эйлера, ρ – плотность, v – скорость, $A \rho^n$ – удельная мощность источников ($A > 0$) или стоков ($A < 0$), r^* – координата поршня, A, B, ρ_0, v_0 – размерные постоянные, n, l, n_0 – безразмерные постоянные.

Для определённости будем считать, что поршень вдвигается в газ, т.е. $v_0 > 0$. Решение задачи (2.50)-(2.52) будет автомодельным, если

$$n_0 = 0, \quad l(1-n) - 1 = 0, \quad l \neq 0, \quad n \neq 1.$$

В этом случае существует единственная безразмерная комбинация независимых переменных r и t вида $s = r/(v_0 t)$, а искомые функции представимы в следующем виде

$$\rho(r, t) = \delta(s) \rho_0 v_0^l t^l, \quad v(r, t) = \alpha(s) v_0,$$

где безразмерные функции $\delta(s), \alpha(s)$ соответствуют функциям плотности и скорости и они удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} (l + \alpha') \delta + (\alpha - s) \delta' &= A_0 \delta^n \\ (\alpha - s) \delta \alpha' + B_0 \delta' &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.53)$$

где штрихом обозначена производная по s , а безразмерные переменные A_0, B_0 имеют вид

$$A_0 = A \rho_0^{n-1} v_0^{-1}, \quad B_0 = B v_0^{-2}.$$

Условия (2.51) и (2.52) в безразмерной форме запишутся так

$$\delta(s_1) = \frac{s_1^{l+1}}{2B_0} \left(s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4B_0} \right), \quad \alpha(s_1) = \frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4B_0}}{2}, \quad (2.54)$$

$$\alpha(s_0) = 1, \quad (2.55)$$

где s_1 – искомый параметр.

Задача состоит в нахождении $\alpha(s)$ и $\delta(s)$ – решений системы уравнений (2.53), которые удовлетворяют начальным (2.54) и граничным (2.55) условиям.

Для дальнейших рассуждений удобно произвести замену переменных

$$\tau = \frac{s - s_1}{s_0 - s_1}, \quad x_1 = \alpha - s_1 - \tau(s_0 - s_1), \quad x_2 = \delta, \quad \lambda = s_1.$$

Тогда задачу (2.53)-(2.55) после элементарных преобразований можно записать так

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left(\frac{A_0 x_2^{n-1} - l}{B_0 - x_1^2} B_0 - 1 \right) (1 - \lambda) \\ \dot{x}_2 &= - \frac{A_0 x_2^{n-1} - l}{B_0 - x_1^2} x_1 x_2 (1 - \lambda) \end{aligned} \right\}, \quad (2.56)$$

$$x_1(0) = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4B_0}}{2}, \quad x_2(0) = \frac{\lambda^{l+1}}{2B_0} \left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4B_0} \right), \quad (2.57)$$

$$x_1(1) = 0.$$

Итак, мы получили зависящую от параметра систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нахождения параметра воспользуемся условиями (2.57).

2°. Результаты численных расчётов. Систему (2.56)-(2.57) запишем в общем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \lambda), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \lambda), \\ x_1(0) &= \psi_1(\lambda), \quad x_2(0) = \psi_2(\lambda), \\ x_1(1) &= 0. \end{aligned} \right. \quad \text{где } 0 \leq t \leq 1..$$

Если имеются k процессоров, разделим интервал $[0,1]$ на k частей:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & & t_1 & & t_2 & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & t_{k-1} & & t_k=1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

На этих интервалах $[t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, k}$, рассмотрим следующих задач:

Система (2.61) для случаев $k = 5$, $k = 10$ решена методом (2.32) (случай диагональной A матрицы).

В нижеприведённой таблице приведены начальные значения параметров $\lambda, \alpha_i, \beta_i$, $i = \overline{1,5}$, количество итераций и значения параметров, вычисленные итерационным методом (2.32) в случае

$$k = 5, \quad A_0 = 0, \quad n = 2.1, \quad B_0 = 1.5.$$

	начальные значения		количест. итераций	полученные значения
λ	3.2	8.7	13	5.449322
α_1	-0.45	-0.25		-0.312487
α_2	-0.30	-0.17		-0.248736
α_3	-0.23	-0.09		-0.163276
α_4	-0.15	0.0		-0.087623
β_1	13.00	20.00		16.432431
β_2	10.00	16.00		12.393627
β_3	8.00	12.00		9.363784
β_4	6.00	9.0		7.893634

Таблица 7.

В следующей таблице приведены начальные значения параметра λ , количество итераций и вычисленные значения параметра λ методом (2.32) для различных значений параметров A_0, B_0 и n ($k = 10$).

A_0	B_0	n	начальные значения параметра λ		количество итераций	полученные значения λ
0	1.5	2.1	3.2	8.7	17	5.449322
0	0.5	2.5	1.25	4.05	19	2.087433
10	0.25	0.5	1.2	4.6	18	2.314284
-10	0.5	0.5	2.3	7.3	17	4.102535
0	-1.0	2.5	1.3	4.55	19	2.441296

Таблица 8.

§ 2.5. Численное решение системы нелинейных уравнений приближения Клаппа для бинарных металлических соединений

Для исследования некоторых свойств (термодинамических, механических и т.д.) соединений, характеризующихся определённой степенью упорядоченности, важное значение имеет знание распределения вероятностей n -атомных конфигураций (n -мерных кластерных конфигураций), $n \geq 9$. Одним из важных методов решения таких задач является метод вариации вероятностей, при помощи которого вся задача сводится к решению системы нелинейных уравнений [18,19]. С помощью такого подхода Ф.Клапп исследовал распределение вероятностей для некоторых бинарных сплавов [4].

Если иметь в виду возможность обобщения метода кластерных компонентов, например, на тройные сплавы (что само по себе не является тривиальной задачей), когда получается гораздо более сложная система, то нам представляется важным разработать эффективные численные методы решения полученных систем нелинейных уравнений.

В данном параграфе при помощи итерационных методов из §2.3 решается система нелинейных уравнений, предложенная в [4], и сравниваются полученные результаты.

При реализации итерационных методов важное значение приобретает выбор начальных приближений. Если для бинарных соединений выбор начального приближения можно достаточно эффективно осуществить, исходя из физических предположений, то в случае тройных сплавов это почти невозможно в силу отсутствия достаточной физической информации. В данной работе для выбора начальных приближений используется метод поиска, основанный на ЛП _{τ} последовательности [82].

1°. Метод вариации вероятностей (МВВ). При рассмотрении МВВ или, как его ещё называют, принцип максимума информационной энтропии (МИЭ), будем следовать работам [18,19]. МВВ универсален, он позволяет оценивать распределения вероятностей как в случае „объективистской“ (частотной) интерпретации, так и в случае „субъективистской“, отображающей уровень нашего знания, т.е. количество априорной информации.

Задача оценки неизвестного распределения вероятностей в случае, когда дана недостаточная информация или она вовсе отсутствует, не является новой. Принцип индифферентности Лапласа является попыткой замены недостающего критерия выбора. Однако, за исключением случаев, когда имеются налицо „очевидные элементы симметрии“, делающие случайные события „равновозможными“, этот принцип не может обеспечить удовлетворительного решения проблемы. Обобщением этого принципа на случай наличия некоторой, недостаточной информации является МИЭ.

Делая оценки на основе МВВ, мы должны пользоваться распределением вероятностей, максимизирующим энтропию при условиях, соответствующих нашей частичной информации. Использование другого распределения означает использование произвольного предположения. Оценки неизвестных распределений, полученные таким образом, обладают важным свойством: не игнорируется не одна возможность любой ситуации, которая абсолютно не исключается данной информацией; ей приписывается положительный вес.

Заметим, что принцип МИЭ не представляет собой физический закон, а является методом рассуждения, позволяющим исключить произвольные предположения.

2°. оценки, основанные на принципе МИЭ и шенноновской мере информационной энтропии. Рассмотрим дискретный случай. Пусть случайная величина ξ принимает дискретные значения $x_i, i = \overline{1, n}$. Пусть, нам не известны соответствующие вероятности P_i и всё, что мы знаем, это математическое ожидание некоторых функций:

$$\langle f_j(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^n P_i f_j(x_i), \quad j = \overline{1, m}, \quad m < n \quad (2.62)$$

и

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1. \quad (2.63)$$

Задача заключается в оценке вероятностей $P_i \equiv P(x_i)$, удовлетворяющих условиям (2.62) и (2.63) и максимизирующих функционал Шеннона:

$$H(P(\xi)) = - \sum_{i=1}^n P_i \ln P_i. \quad (2.64)$$

В работе [18] показано, что распределение, максимизирующее (2.64) при условиях (2.62) и (2.63), имеет вид (в дальнейшем подобные распределения будем коротко называть МЭ распределениями):

$$\tilde{P}_i = \exp[-\lambda_0 - \lambda_1 f_1(x_i) - \dots - \lambda_m f_m(x_i)], \quad (2.65)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ – множители Лагранжа, определённые из условий

$$\lambda_0 = \ln z(\vec{\lambda}), \quad \langle f_j(\xi) \rangle = - \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \ln z(\vec{\lambda}), \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.66)$$

Функция

$$z(\vec{\lambda}) \equiv z(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^n \exp \left[- \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(x_i) \right] \quad (2.67)$$

называется обобщенной статистической суммой. Энтропия распределения сводится к $H_{\max} = \lambda_0 + \lambda_1 \langle f_1(\xi) \rangle + \dots + \lambda_m \langle f_m(\xi) \rangle$.

3°. Система уравнений приближения Клаппа. Рассмотрим ОЦК решётку, элементарная ячейка которой изображена на рис. 6. Заполнение каждого узла характеризуется, т.н. числом заполнения σ_i ($i = 0, 1, \dots, 8$), принимающего значения $+1$ (т.е. атом сорта A) или -1 (атом сорта B). Кубическая точечная группа содержит 48 операций симметрии, отображающих множество кластеров на себя. Через W_k обозначим число партнёров симметрии [4], которыми обладает k -ая оболочечная конфигурация; каждый из таких партнёров характеризуется одинаковыми вероятностями, что существенно уменьшает число подлежащих рассмотрению различных конфигураций.

Легко показать, что точечная функция Вигнера [32] кластеров, соответствующая элементарной ячейке (см. рис.6), имеет вид

$$F(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_8) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_8=0}^1 B_z(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_8) \langle \sigma_0^{i_0} \sigma_1^{i_1} \dots \sigma_8^{i_8} \rangle, \quad (2.68)$$

где $\langle \sigma_0^{i_0} \dots \sigma_8^{i_8} \rangle$ – спиновые корреляционные функции, $B_z(\sigma_0, \dots, \sigma_8)$ – некоторые просто вычисляемые числа при фиксированных значениях чисел заполнения.

МЭ форма (2.68) такова:

$$\tilde{F}(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_8) = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1 \sigma_0 - \dots - \lambda_{512} \sigma_0 \dots \sigma_8),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{512}$ – множители Лагранжа, определяемые по данным спиновым корреляционным функциям. Таким образом, достаточной статистикой для кластера, соответствующего ОЦК элементарной ячейке будет совокупность 512 корреляционных функций вида $\langle \sigma_0^{i_0} \dots \sigma_8^{i_8} \rangle$.

Приближение Клаппа [4] заключается в замене всей этой информации следующей. Обозначим через $\langle \sigma \rangle_k$ среднее значение числа заполнения по k -му кластеру:

$$\langle \sigma \rangle_k = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \sigma_i.$$

Очевидно, что

$$\langle \langle \sigma \rangle_k \rangle = \sum_k \sum_{\{\sigma_0\}} \langle \sigma \rangle_k P_k(\sigma_0) \cdot W_k = \sum_i \sigma_i F(\sigma_i) = C_A - C_B, \quad (2.69)$$

где $P_k(\sigma_0)$ – вероятность k -го кластера, C_A и C_B – концентрации компонент A и B , соответственно. Далее, если среднее значение по кластеру $\sigma_i \sigma_j$, где i и j являются n -ыми соседями, обозначить через c_k^n , т.е. $c_k^n = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_k^n$, то

$$\begin{aligned} \langle c_k^n \rangle &= \langle \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_k^n \rangle = \sum_{\{\sigma_0\}} \sum_k \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_k^n W_k P_k(\sigma_0) = \\ &= \left(1 - (C_A - C_B)^2\right) \alpha_n + (C_A - C_B)^2, \quad n = 2, 3, 5, \dots, \end{aligned}$$

где α_n – параметры Каули [59] n -ой координационной сферы.

Дополним эти данные до полной статистики парной функции Вигнера, а именно

$$\sum_{\{\sigma_0\}} \sum_k P_k(\sigma_0) \cdot W_k = 1, \quad (2.71)$$

$$\sum_{\{\sigma_0\}} \sum_k \sigma_0 P_k(\sigma_0) \cdot W_k = C_A - C_B, \quad (2.72)$$

$$\sum_{\{\sigma_0\}} \sum_k \sigma_0 \langle \sigma \rangle_k P_k(\sigma_0) \cdot W_k = (1 - (C_A - C_B)^2) \alpha_1 + (C_A - C_B)^2. \quad (2.73)$$

Приближение Клаппа заключается в МЭ оценке вероятностей кластеров $P_k(\sigma_0)$ при заданной информации (2.69)-(2.73).

Согласно формулам (2.65)-(2.67) решение задачи МЭ оценки в нашем случае можем записать в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k(\sigma_0) = \exp(-\lambda_0 - \lambda_1\sigma_0 - \lambda_2\langle\sigma\rangle_k - \lambda_3\sigma_0\langle\sigma\rangle_k - \\ - \lambda_4c_k^2 - \lambda_5c_k^3 - \lambda_6c_k^5). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Обобщённая статистическая сумма

$$Z(\lambda_1, \dots, \lambda_6) = \sum_{k, \sigma_0} W_k \exp(-\lambda_1\sigma_0 - \dots - \lambda_6c_k^5).$$

Уравнения, определяющие $\lambda_1, \dots, \lambda_6$, таковы:

$$C_A - C_B = -\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_6), \quad i = 1, 2,$$

$$(1 - (C_A - C_B)^2)\alpha_i + (C_A - C_B)^2 = -\frac{\partial}{\partial \lambda_{i+2}} \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_6), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2.75)$$

$$(1 - (C_A - C_B)^2)\alpha_5 + (C_A - C_B)^2 = -\frac{\partial}{\partial \lambda_6} \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_6).$$

Кроме того, согласно (2.66), $\lambda_0 = \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$, где в качестве $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ надо подставить решение системы (2.75).

Энтропия распределения $\tilde{P}_k(\sigma_0)$ такова

$$\begin{aligned} H_{\max} = \lambda_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(C_A - C_B) + \lambda_3((1 - (C_A - C_B)^2)\alpha_1 + (C_A - C_B)^2) + \\ + \lambda_4((1 - (C_A - C_B)^2)\alpha_2 + (C_A - C_B)^2) + \lambda_5((1 - (C_A - C_B)^2)\alpha_3 + \\ + (C_A - C_B)^2) + \lambda_6((1 - (C_A - C_B)^2)\alpha_5 + (C_A - C_B)^2). \end{aligned}$$

4°. Результаты численных расчётов. Вычислим распределение вероятностей различных конфигураций ОЦК кластера для сплава $\beta - CuZn$ [4], используя приближение Клаппа.

Распределение вычисляется по формуле (2.73): параметры W_k , $\langle\sigma\rangle_k$, c_k^i , $i = 2, 3, 5$, для различных конфигураций ОЦК кластера

приведены в [4], а параметры множителей Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_6$ можно определить из системы нелинейных уравнений (2.75). Соответствующие экспериментальные параметры Каули при $T^o = 543C^o$ равны $\alpha_1 = -0.179$, $\alpha_2 = 0.103$, $\alpha_3 = 0.066$, $\alpha_5 = 0.045$.

Через номер \bar{k} обозначим конфигурацию, которая получается из k -ой конфигурации заменой знака чисел заполнения $\sigma_i, i = \overline{1,8}$, а через $\bar{\sigma}_0$ – замену знака σ_0 .

Для сплава $\beta - CuZn$ $C_A = C_B$, а в таком случае $P_k(\sigma_0) = P_{\bar{k}}(\bar{\sigma}_0)$, и первое и второе уравнения системы (2.75) лишние, т.е. остаётся система:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \ln Z(\lambda_1, \dots, \lambda_4), \\ \alpha_1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \ln Z(x_1, \dots, x_4) &= f_1(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ \alpha_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \ln Z(x_1, \dots, x_4) &= f_2(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ \alpha_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \ln Z(x_1, \dots, x_4) &= f_3(x_1, \dots, x_4) = 0, \\ \alpha_5 + \frac{\partial}{\partial x_4} \ln Z(x_1, \dots, x_4) &= f_4(x_1, \dots, x_4) = 0. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Выбор начальных приближений происходит следующим образом. Пусть $[a, b]^4$ – куб, в котором предполагается наличие искомого корня. Отообразим в этот куб точки последовательности ЛП $_{\tau}$ [82] из куба $[0, 1]^4 \subset R^4$ и проверим в этих точках значения функционала, минимум которого совпадает с нулем системы (2.76). Значения функционала

$F(x_1, \dots, x_4) = \sum_{i=1}^4 |f_i(x_1, \dots, x_4)|$ проверялось в 2048 точках кубов

$[-50, 50]^4$, $[-30, 30]^4$, $[-10, 10]^4$. Наименьшее значение (порядка 10^{-4})

$F(x_1, \dots, x_4)$ принимал в точке с координатами $(0, 0, 0, 0)$.

Решение системы (2.76) проводилось методами (2.21) и (2.32) с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Заметим, что область сходимости метода (2.32) почти вдвое больше, чем область сходимости метода (2.21). Результаты вычисления, а также сравнение результатов приведены в таблице 9.

Значения множителей Лагранжа: $\lambda_r = 1.07418$, $\lambda_3 = -0.81264$,

$\lambda_4 = -0.28830$, $\lambda_5 = -0.00625$. Распределение вероятностей при

$\sigma_0 = -1$ приведено в таблице 10.

№	Метод (2.21)			Метод (2.32)			
	\bar{x}^0	\bar{x}^1	кол. итер.	\bar{x}_1^0	\bar{x}_2^0	\bar{x}_3^0	кол. итер.
1	-	-	-	0.	38.+ $\bar{\mu}$	38.+ $\bar{\delta}$	32
2	-	-	-	0.	38.+ $\bar{\mu}$	40.+ $\bar{\delta}$	расходит.
3	0.	19.+ $\bar{\delta}$	43	0.	10.+ $\bar{\mu}$	19.+ $\bar{\delta}$	42
4	0.	20.+ $\bar{\delta}$	расходит.	0.	19.+ $\bar{\mu}$	38.+ $\bar{\delta}$	52
5	-	-	-	0.	38.+ $\bar{\mu}$	-10.+ $\bar{\delta}$	47
6	0.	-4.+ $\bar{\delta}$	40	0.	10.+ $\bar{\mu}$	-4.+ $\bar{\delta}$	40
7	0.	-5.+ $\bar{\delta}$	расходит.	0.	10.+ $\bar{\mu}$	-10.+ $\bar{\delta}$	36
8	0.	15.+ $\bar{\delta}$	51	0.	10.+ $\bar{\mu}$	15.+ $\bar{\delta}$	43

Таблица 9.

Здесь $\vec{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_4)$, а $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_4)$, где $\delta_i = (-1)^i \cdot i \cdot 0,1$

а $\mu_i = (-1)^i \cdot i \cdot 0,02$.

Номер кон- фигурации k	Ном. узла i с числом заполнения $\sigma_i = -1$	Распределение $P_k(\sigma_0)$ при $\sigma_0 = -1$
1 (1)	—	0.015188 (0.0017693)
2 (2)	1	0.05339 (0.010646)
3 (3)	1, 2	0.046137 (0.015747)
4 (4)	1, 6	0.038739 (0.013222)
5 (5)	1, 7	0.011803 (0.0040285)
6 (6)	1, 2, 5	0.058522 (0.03489)
7 (7)	1, 2, 8	0.044915 (0.026240)
8 (8)	1, 6, 8	0.013753 (0.0080346)
9	1, 2, 5, 6	0.012166
10	1, 2, 5, 8	0.037349
11	1, 2, 5, 7	0.03136
12	1, 2, 3, 6	0.01362
13	1, 2, 7, 8	0.0071662
14	1, 3, 6, 8	0.0020156
Всего		0.5000

Таблица 10.

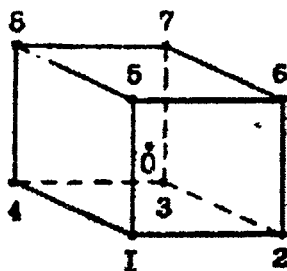


Рис. 6

ГЛАВА III. О СХОДИМОСТИ КИНЕТИЧЕСКИ-СОГЛАСОВАННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Настоящая глава посвящена проблеме сходимости кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики. Как показали практические расчёты, указанные схемы являются эффективным инструментом для численного моделирования сложных течений как в рамках невязкого газа, так и в приближении Навье-Стокса (см. например [34, 54, 58]). В обоих случаях разностные производные с малым параметром, содержащиеся в этом алгоритме, могут рассматриваться как регуляризирующие добавки, стабилизирующие вычислительный алгоритм.

В этой главе доказывается сходимость разностной схемы, предложенной в [58], для системы уравнений газовой динамики в переменных Эйлера с учётом источников (стоков) в случае идеального газа.

Доказательство сходимости разностной схемы проведено методом энергетических неравенств. При этом существенно используется методика, разработанная в [47, 67, 69, 87]. Отметим также, что проблеме сходимости разностных схем газовой динамики в эйлеровых переменных посвящено ряд работ [51, 52, 68, 70, 74, 86].

§3.1. Разностная схема. Существование и единственность решения разностной схемы

1°. В области $\Omega = \{(x, t) : x \in (-\infty, +\infty), t \in [0, T]\}$ рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающих одномерное плоскопараллельное газодинамическое течение [79]:



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = f_1(x, t, \rho, m, \varepsilon); \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P) = f_2(x, t, \rho, m, \varepsilon); \quad (3.1б)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(E + P)) = f_3(x, t, \rho, m, \varepsilon); \quad (3.1в')$$

$$E = \frac{\rho u^2}{2} + \frac{P}{\gamma - 1},$$

$$P = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad m = \rho u, \quad \gamma = \text{const} > 1,$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad m(x, 0) = m_0(x), \quad E(x, 0) = E_0(x), \quad (3.1г)$$

где ρ – плотность, m – импульс, ε – удельная внутренняя энергия, P – давление, E – полная энергия, u – скорость, f_1, f_2, f_3 – функций, выражающие источники или стоки массы, импульса и энергии, а ρ_0, m_0, E_0 – достаточно гладкие, периодические функции с периодом L .

Заметим, что уравнение (1в') можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) - \frac{m u}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + 0.5(\gamma + 1)u \frac{\partial}{\partial x}(\rho\varepsilon) + \\ & + (E + P) \frac{\partial u}{\partial x} = f_3 - u f_2 + \frac{u^2}{2} f_1. \end{aligned} \quad (3.1в)$$

Будем предполагать, что

(A1) Функции $\rho(x, t), m(x, t), P(x, t), u(x, t), E(x, t), \varepsilon(x, t)$ принадлежат классу $C^{3,2}(\Omega)$, а также существует такая постоянная $\mu > 0$, что $\rho(x, t) \geq \mu$, $\varepsilon(x, t) \geq \mu$, при $(x, t) \in \Omega$. Пусть также выполнены условия, которые гарантируют существование и единственность периодического (с

1

периодом L по переменной x) решения задачи (3.1a)-(3.1г).

(A2) Функции f_1, f_2, f_3 удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов ρ, m, ε с постоянной $k > 0$.

В области Ω рассмотрим разностную сетку

$$D_h = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \omega_h = \{ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad \omega_\tau = \{j\tau, j = 0, 1, \dots, N_1\},$$

$$Nh = L, \quad N_1\tau = T, \quad \text{где } N_1 \text{ и } N - \text{натуральные числа.}$$

Для решения задачи (3.1a)-(3.1г) рассмотрим кинетически-согласованную разностную схему газовой динамики (обозначения здесь и в дальнейшем взяты из [79]):

$$\rho_{ht} + m_{hx} = f_{1h} + \frac{\tau}{2} (\rho_h u_h^2 + P_h)_{xx} \equiv f_{1h} + R_{1h}; \quad (3.2a)$$

$$(\rho_h u_h)_t + (m_h u_h + P_h)_x = f_{2h} + \frac{\tau}{2} (\rho_h u_h^3 + 3P_h u_h)_{xx} \equiv f_{2h} + R_{2h}; \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned} (\rho_h \varepsilon_h)_t - 0.5 \hat{u}_h m_{hx} u_{hx} - 0.5 \hat{u}_h P_{hx} + 0.5(\gamma + 1) u_h (\rho_h \varepsilon_h)_x + (E_h + P_h) u_{hx} = \\ = f_{3h} + R_{3h} - 0.5(f_{2h} + R_{2h})(u_h + \hat{u}_h) + \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$+ 0.5 \hat{u}_h u_h (f_{1h} + R_{1h}) + 0.5 \hat{u}_h I(u_h, m_h) - I(E_h + P_h, u_h),$$

$$\rho_h(ih, 0) = \rho_0(ih), \quad m_h(ih, 0) = m_0(ih), \quad E_h(ih, 0) = E_0(ih),$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2г)$$

где

$$E_h = \frac{m_h u_h}{2} + \frac{P_h}{\gamma - 1}, \quad I(y, z) = \frac{h}{2} (y_x z_x - y_{\bar{x}} z_{\bar{x}}),$$

$$P_h = (\gamma - 1) \rho_h \varepsilon_h, \quad m_h = \rho_h u_h,$$

а сеточные функции

$$\rho_h \equiv \rho_h(ih, j\tau), \quad m_h \equiv m_h(ih, j\tau), \quad \varepsilon_h \equiv \varepsilon_h(ih, j\tau), \quad P_h \equiv P_h(ih, j\tau),$$

$$E_h \equiv E_h(ih, j\tau), \quad u_h \equiv u_h(ih, j\tau), \quad f_{nh} \equiv f_{nh}(ih, j\tau), \quad (n=1,2,3)$$

определены в области D_h .

Предложенная разностная схема отличается от традиционной разностной схемы для уравнений невязкого и нетеплопроводного газа членами $R_{ih} (i=1,2,3)$, которые являются членами первого порядка по t и имеют смысл модельной вязкости. Использование разностных схем такого типа можно рассматривать, как способ регуляризации разностных схем для уравнений Эйлера и Навье-Стокса, полезной для проведения численных расчётов [58].

Выражение $R_{ih} (i=1,2)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$R_{1h} = \frac{\tau}{2} \left(2E_h + \frac{\gamma-3}{\gamma-1} P_h \right)_{xx}, \quad R_{2h} = \frac{\tau}{2} \left(2E_h u_h + \frac{3\gamma-5}{\gamma-1} P_h u_h \right)_{xx}.$$

Нетрудно проверить, что если решение задачи (3.1a)-(3.1г) принадлежит классу $C^{3,2}(\Omega)$, то погрешность аппроксимации разностной схемы (3.2a)-(3.2г) в каждом узле сетки составляет $O(\tau + h^2)$.

2°. В пространстве сеточных функции введем скалярное произведение (при фиксированном значении j):

$$(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^N u_h(ih, j\tau) v_h(ih, j\tau) h,$$

$$Nh = L,$$

и норму, индуцированную этим скалярным произведением

$$\|u_h\|^2 = (u_h, u_h).$$

Рассмотрим функции погрешности:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho_h - \rho, \quad \tilde{u} = u_h - u, \quad \tilde{m} = m_h - m = (\rho + \tilde{\rho})\tilde{u} + \tilde{\rho}u, \quad \tilde{P} = P_h - P, \\ \tilde{u} &= \frac{\tilde{m} - \tilde{\rho}u}{\rho + \tilde{\rho}}, \quad \tilde{E} = E_h - E = 0.5(m\tilde{u} + \tilde{m}u + \tilde{m}\tilde{u}) + \frac{\tilde{P}}{\gamma - 1}. \end{aligned} \quad (*)$$

Введём обозначения

$$\tilde{f}_h = f_n(ih, j\tau, \rho + \tilde{\rho}, m + \tilde{m}, \varepsilon + \tilde{\varepsilon}) - f_n(ih, j\tau, \rho, m, \varepsilon),$$

Определим из равенств (*) $\rho_h, m_h, u_h, E_h, P_h$ и внесем в разностные уравнения (3.2). Тогда получим:

$$\tilde{\rho}_i + \tilde{m}_x = \tilde{f}_1 + \tilde{R}_1 - \psi_1; \quad (3.3a)$$

$$\tilde{m}_i + (\tilde{m}\tilde{u})_x + (\tilde{m}u)_x + (m\tilde{u})_x + \tilde{P}_x = \tilde{f}_2 + \tilde{R}_2 - \psi_2; \quad (3.3b)$$

$$\begin{aligned} & [(\rho + \tilde{\rho})\tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho}\varepsilon]_i - 0.5\hat{u} \left(\tilde{m}u_x + m\tilde{u}_x + \tilde{m}\tilde{u}_x \right) - \\ & - 0.5\hat{u} \left(mu_x + \tilde{m}u_x + m\tilde{u}_x + \tilde{m}\tilde{u}_x \right) - 0.5\hat{u}\tilde{P}_x - 0.5\hat{u}(P + \tilde{P})_x + \\ & + 0.5(\gamma + 1)(u + \tilde{u})(\rho\tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho}\varepsilon + \tilde{\rho}\tilde{\varepsilon})_x + 0.5(\gamma + 1)\tilde{u}(\rho\varepsilon)_x + (E + P)\tilde{u}_x + \\ & + (\tilde{E} + \tilde{P})(u + \tilde{u})_x = \tilde{f}_3 + \tilde{R}_3 - 0.5\tilde{u}(f_2 + R_2) - 0.5(u + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) - \\ & - 0.5\hat{u}(f_2 + R_2) - 0.5(\hat{u} + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) + 0.5(\hat{u}\tilde{u} + \tilde{u}u + \tilde{u}\hat{u})(f_1 + R_1) + \\ & + 0.5(\hat{u}\tilde{u} + \tilde{u}u + \tilde{u}\hat{u} + \hat{u}u)(\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1) + 0.5\hat{u}[I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] + \\ & + 0.5\tilde{u}[I(u, m) + I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] - \\ & - I(P + E, \tilde{u}) - I(\tilde{P} + \tilde{E}, u) - I(\tilde{P} + \tilde{E}, \tilde{u}) - \psi_3, \end{aligned} \quad (3.3b)$$

$$\tilde{\rho}_i^0 = 0, \quad \tilde{m}_i^0 = 0, \quad \tilde{E}_i^0 = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.3c)$$

где

$$\tilde{R}_1 = \frac{\tau}{2} \left(2\tilde{E} + \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \tilde{P} \right)_{\bar{x}x},$$

$$\tilde{R}_2 = \frac{\tau}{2} \left[2(\tilde{E}u + E\tilde{u} + \tilde{E}\tilde{u}) + \frac{3\gamma-5}{\gamma-1} (\tilde{P}u + P\tilde{u} + \tilde{P}\tilde{u}) \right]_{\bar{x}x},$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_3 = \frac{\tau}{2} & \left[u^2(\tilde{E} + 2\tilde{P}) + (2u\tilde{u} + \tilde{u}^2)(E + \tilde{E} + 2P + 2\tilde{P}) + \right. \\ & \left. + (\gamma-1)\varepsilon(\tilde{E} + \tilde{P}) + (\gamma-1)\tilde{\varepsilon}(E + P + \tilde{E} + \tilde{P}) \right]_{\bar{x}x}, \end{aligned}$$

$$\psi_1 = \rho_t + m_o - f_1 - \frac{\tau}{2} \left(2E + \frac{\gamma-3}{\gamma-1} P \right)_{\bar{x}x},$$

$$\psi_2 = m_t + (mu + P)_o - f_2 - \frac{\tau}{2} \left(2Eu + \frac{3\gamma-5}{\gamma-1} Pu \right)_{\bar{x}x},$$

$$\begin{aligned} \psi_3 = & (\rho\varepsilon)_t - 0.5\hat{u} m_{o_x} - 0.5\hat{u} P_{o_x} + 0.5(\gamma-1)u(\rho\varepsilon)_o + (E+P)u_o - \\ & - f_3 - R_3 + 0.5u(f_2 + R_2) + 0.5\hat{u}(f_2 + R_2) - \\ & - 0.5u\hat{u}(f_1 + R_1) - 0.5\hat{u}I(u, m) + I(E+P, u). \end{aligned}$$

Как уже отмечали, если решение задачи (3.1a)-(3.1г) принадлежит классу $C^{3,2}(\Omega)$, то $\psi_i = O(\tau + h^2)$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (A1), (A2). Пусть также $\tau = h^{2+2\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) и для решения задачи (3.2a)-(3.2г) на j -м слое, $0 \leq j \leq N_2 - 1$, имеет место следующая оценка:

$$\max \left\{ \|\tilde{\rho}\|_c, \|\tilde{m}\|_c, \|\tilde{E}\|_c, \|\tilde{P}\|_c, \|\tilde{u}\|_c, \|\tilde{\varepsilon}\|_c \right\} \leq h, \quad (3.4)$$

тогда, существует $h_1 > 0$, такое, что при $h \leq h_1$, справедливы следующие

утверждения:

1) На $(j+1)$ -м слое разностная схема (3.2а)-(3.2г) имеет единственное решение.

2) Для погрешности на $(j+1)$ -м слое имеет место оценка

$$\max \left\{ \|\hat{\rho}\|_c, \|\hat{m}\|_c, \|\hat{E}\|_c, \|\hat{P}\|_c, \|\hat{u}\|_c, \|\hat{\varepsilon}\|_c \right\} \leq Mh, \quad (3.5)$$

где постоянная M не зависит от h .

Доказательство. Так как схема (3.2а)-(3.2г) явная, то существование и единственность решения схемы гарантировано.

Докажем вторую часть леммы. Для этой цели рассмотрим уравнение (3.3а):

$$\frac{\hat{\rho} - \tilde{\rho}}{\tau} = \tilde{f}_1 + \tilde{R}_1 - \psi_1 - \frac{\tilde{m}_{i+1} - \tilde{m}_{i-1}}{2h}$$

тогда имеем:

$$\begin{aligned} \|\hat{\rho}\|_c &\leq \|\tilde{\rho}\|_c + \tau \|\tilde{f}_1\|_c + \tau \|\tilde{R}_1\|_c + \tau \|\psi_1\|_c + \frac{\tau}{2h} (\|\tilde{m}_{i+1}\|_c + \|\tilde{m}_{i-1}\|_c) \leq \\ &\leq \|\tilde{\rho}\|_c + \tau k (\|\tilde{\rho}\|_c + \|\tilde{m}\|_c + \|\tilde{\varepsilon}\|_c) + \tau \|\tilde{R}_1\|_c + \\ &\quad + \tau \|\psi_1\|_c + \frac{\tau}{2h} (\|\tilde{m}_{i+1}\|_c + \|\tilde{m}_{i-1}\|_c) \leq \\ &\leq (1 + \tau k) \|\tilde{\rho}\|_c + \tau k (\|\tilde{m}\|_c + \|\tilde{\varepsilon}\|_c) + \frac{\tau^2}{h^2} \|\tilde{E}\|_c + \frac{\tau^2(\gamma - 3)}{2h^2(\gamma - 1)} \|\tilde{P}\|_c + \\ &\quad + \tau \|\psi_1\|_c + \frac{\tau}{2h} (\|\tilde{m}_{i+1}\|_c + \|\tilde{m}_{i-1}\|_c) \leq \\ &\leq h(1 + 3\tau k) + \frac{\tau^2}{h} + \frac{\tau^2(\gamma - 3)}{2h(\gamma - 1)} + \tau M_1(h^2 + \tau) + 2\tau. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\tau = h^{2+2\varepsilon}$, окончательно получим

$$\|\hat{\rho}\|_c \leq M_1^* h,$$

где M_1^* – постоянная, не зависящая от h и τ .

Рассмотрим уравнение (3.3б):

$$\hat{m} = \tilde{m} + \tau(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2 - \psi_2) - \tau \left[(\tilde{m}u)_x + (m\tilde{u})_x + (\tilde{m}\tilde{u})_x + \tilde{P}_x \right].$$

$$\begin{aligned} \|\hat{m}\|_c &\leq \|\tilde{m}\|_c + \tau(\|\tilde{f}_2\|_c + \|\tilde{R}_2\|_c + \|\psi_2\|_c) + \\ &\quad + \tau \left\| (\tilde{m}u)_x + (m\tilde{u})_x + (\tilde{m}\tilde{u})_x + \tilde{P}_x \right\|_c \leq \\ &\leq \|\tilde{m}\|_c + \tau k(\|\tilde{\rho}\|_c + \|\tilde{m}\|_c + \|\tilde{\varepsilon}\|_c) + \tau \|\psi_2\|_c + \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2} \left\| \left[2(\tilde{E}u + E\tilde{u} + \tilde{E}\tilde{u}) + \frac{3\gamma - 5}{\gamma - 1}(\tilde{P}u + P\tilde{u} + \tilde{P}\tilde{u}) \right]_{xx} \right\|_c + \\ &\quad + \tau \left\| (\tilde{m}u)_x + (m\tilde{u})_x + (\tilde{m}\tilde{u})_x + \tilde{P}_x \right\|_c \leq \\ &\leq (1 + 3\tau k)h + \tau M(h^2 + \tau) + M \frac{\tau^2}{2h} + M \frac{\tau}{2h} \leq M_2^* h, \end{aligned}$$

$$\|\hat{m}\|_c \leq M_2^* h,$$

т.е.

где M_2^* – постоянная, не зависящая от h и τ .

Далее учитывая, что $\rho_h \varepsilon_h = \frac{1}{\gamma - 1} P_h$, уравнение (3.3в) можно переписать

следующим образом:

$$\frac{1}{\gamma - 1} [\tilde{P}]_t - 0.5\hat{u} \left((\tilde{m}u)_x + (m\tilde{u})_x + (\tilde{m}\tilde{u})_x \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -0.5\hat{u} \left(mu_o + \tilde{m}u_o + m\tilde{u}_o + \tilde{m}\tilde{u}_o \right)_x - 0.5\hat{u}\tilde{P}_o - 0.5\hat{u} (P + \tilde{P})_o + \\
& + 0.5(\gamma + 1)(u + \tilde{u})(\rho\tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho}\varepsilon + \tilde{\rho}\tilde{\varepsilon})_o + 0.5(\gamma + 1)\tilde{u}(\rho\varepsilon)_o + \\
& + (E + P)\tilde{u}_o + (\tilde{E} + \tilde{P})(u + \tilde{u})_o = \tilde{f}_3 + \tilde{R}_3 - 0.5\tilde{u}(f_2 + R_2) - \\
& - 0.5(u + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) - 0.5\hat{u}(f_2 + R_2) - 0.5(\hat{u} + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) + \\
& + 0.5(\hat{u}\tilde{u} + \tilde{u}u + \tilde{u}\hat{u})(f_1 + R_1) + 0.5(\hat{u}\tilde{u} + \tilde{u}u + \tilde{u}\hat{u} + \hat{u}u)(\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1) + \\
& + 0.5\hat{u} [I(u, m) + I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] + \\
& + 0.5\hat{u} [I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] - I(P + E, \tilde{u}) - \\
& - I(\tilde{E} + \tilde{P}, u) - I(\tilde{E} + \tilde{P}, \tilde{u}) - \psi_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_3 = & \frac{1}{\gamma - 1} P_t - 0.5\hat{u}mu_o - 0.5\hat{u}P_o + 0.5(\gamma - 1)u(\rho\varepsilon)_o + \\
& + (E + P)u_o - f_3 - R_3 + 0.5u(f_2 + R_2) + 0.5\hat{u}(f_2 + R_2) - \\
& - 0.5u\hat{u}(f_1 + R_1) - 0.5\hat{u}I(u, m) + I(E + P, u).
\end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned}
\hat{P} = & \tilde{P} + \tau(\gamma - 1) \left\{ (\tilde{f}_3 + \tilde{R}_3) + 0.5\hat{u} \left(\tilde{m}u_o + m\tilde{u}_o + \tilde{m}\tilde{u}_o \right) \right\} + \\
& + 0.5\hat{u} \left(mu_o + \tilde{m}u_o + m\tilde{u}_o + \tilde{m}\tilde{u}_o \right) + 0.5\hat{u}\tilde{P}_o + 0.5\hat{u} (P + \tilde{P})_o - \\
& - 0.5(\gamma + 1)(u + \tilde{u})(\rho\tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho}\varepsilon + \tilde{\rho}\tilde{\varepsilon})_o - 0.5(\gamma + 1)\tilde{u}(\rho\varepsilon)_o + \\
& - (E + P)\tilde{u}_o - (\tilde{E} + \tilde{P})(u + \tilde{u})_o - 0.5\tilde{u}(f_2 + R_2) - \\
& - 0.5(u + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) - 0.5\hat{u}(f_2 + R_2) - 0.5(\hat{u} + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0.5(\hat{u} \tilde{u} + \hat{u} u + \tilde{u} \hat{u})(f_1 + R_1) + 0.5(\hat{u} \tilde{u} + \hat{u} u + \tilde{u} \hat{u} + \hat{u} u)(\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1) + \\
& + 0.5\hat{u}[I(u, m) + I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] + \\
& + 0.5\hat{u}[I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] - \\
& - I(P + E, \tilde{u}) - I(\tilde{P} + \tilde{E}, u) - I(\tilde{P} + \tilde{E}, \tilde{u}) - \psi_3 \}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\|\hat{u}\|_c = \left\| \left(\hat{m} - \hat{\rho} \hat{u} \right) \frac{1}{\hat{\rho} + \hat{\tilde{\rho}}} \right\| \leq \|\hat{m} + \hat{\rho} \hat{u}\|_c \frac{2}{\mu},$$

(т.к. $\|\hat{\rho}\|_c \leq Mh$, можно выбрать такое значение $h_1 > 0$, что при $h \leq h_1$, будем иметь оценку $\|\hat{\rho}\|_c \leq \mu/2$. Тем самым $\|\hat{\rho} + \hat{\tilde{\rho}}\|_c \geq \mu/2$), можно написать:

$$\|\hat{u}\|_c \leq M_3^* h, \quad \text{так как} \quad \|\hat{m}\|_c \leq Mh, \quad \|\hat{\rho}\|_c \leq Mh.$$

$$\text{Тогда получим} \quad \|\hat{\tilde{P}}\|_c \leq M_4^* h,$$

где M_4^* – постоянная, не зависящая от h и τ .

Далее учтем, что

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_h &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{P}_h}{\hat{\rho}_h}, \quad \hat{\varepsilon} + \hat{\tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{P} + \hat{\tilde{P}}}{\hat{\rho} + \hat{\tilde{\rho}}}, \\
\hat{\tilde{\varepsilon}} &= \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{\hat{P} + \hat{\tilde{P}}}{\hat{\rho} + \hat{\tilde{\rho}}} - \frac{\hat{P}}{\hat{\rho}} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{P}\hat{\rho} + \hat{\tilde{P}}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{P} - \hat{P}\hat{\tilde{\rho}}}{\hat{\rho}(\hat{\rho} + \hat{\tilde{\rho}})} = \\
&= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{\tilde{P}}}{\hat{\rho} + \hat{\tilde{\rho}}} - \frac{\hat{\varepsilon}\hat{\tilde{\rho}}}{\hat{\rho} + \hat{\tilde{\rho}}}.
\end{aligned}$$

Тогда, при $h \leq h_1$, получим:

$$\|\hat{\varepsilon}\|_c \leq \left\| \left((\gamma - 1)^{-1} \hat{P} - \hat{\varepsilon} \hat{\rho} \right) \frac{1}{\hat{\rho} + \hat{\rho}} \right\|_c \leq M_5^* h$$

Учитывая, что $\|\hat{P}\|_c \leq M_4^* h$, $\|\hat{\rho}\|_c \leq M_1 h$, можно оценить $\|\hat{E}\|_c$:

$$\|\hat{E}\|_c = \left\| 0.5(\hat{m}\hat{u} + \hat{m}\hat{u} + \hat{m}\hat{u}) + (\gamma - 1)^{-1} \hat{P} \right\|_c \leq M_6^* h,$$

где $M_5^* > 0$, $M_6^* > 0$ – постоянные, не зависящие от h и τ .

Пусть $M = \max_{1 \leq i \leq 6} M_i^*$, тогда для погрешностей схемы на $(j+1)$ -м слое

имеет место оценка (3.5).

Тем самым лемма 3.1 доказана.

§3.2. Основное энергетическое неравенство

1°. Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2. (см. [21]). Пусть сеточные функций u_h, v_h периодические с периодом L . Тогда

$$\left(u_h, v_{hx} \right) + \left(v_h, u_{hx} \right) = 0.$$

Лемма 3.3. (см. [79]). Пусть сеточные функций $u_h^{(k)}, k = 1, 2, \dots, p$, периодические с периодом L . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\left\| \prod_{k=1}^p u_h^{(k)} \right\|^2 \leq h^{1-p} \prod_{k=1}^p \|u_h^{(k)}\|^2.$$

Лемма 3.4. (см. [67]). Пусть сеточные функций u_h, v_h периодические с

периодом L . Кроме того, пусть $\|v_h\|_c \leq M^*$, $\|v_{hx}\|_c \leq M^*$, $M^* = \text{const} > 0$.

Тогда существует такая постоянная M , зависящая только от M^* , что справедливо неравенство:

$$\left| \left(u_h, v_h u_o \right)_{hx} \right| \leq M \|u_h\|^2.$$

Кроме того, ниже будут использованы следующие равенства, справедливость которых проверяется непосредственно:

$$\begin{aligned} (uv)_o &= uv_o + vu_o + \frac{h}{2}(u_x v_x - u_{\bar{x}} v_{\bar{x}}) = uv_o + vu_o + I(u, v); \\ (uv)_t &= \hat{u} v_t + v u_t; \\ (v, u_t) &= (v, u)_t - (v_t, \hat{u}); \\ (y^{(\beta)}, y_t) &= 0.5 \|y\|_t^2 + (\beta - 0.5) \tau \|y_t\|^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $y^{(\beta)} = \beta \hat{y} + (1 - \beta) y$.

Теперь преобразуем систему (3.3). Учтем, что:

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= (\rho + \tilde{\rho}) \tilde{u} + \tilde{\rho} u, \\ u \tilde{\rho}_t + u \tilde{m}_o &= u (\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1 - \psi_1), \\ \varepsilon \tilde{\rho}_t &= \varepsilon (\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1 - \psi_1) - \varepsilon \tilde{m}_o, \end{aligned}$$

тогда разностные уравнения (3.3) можно привести к следующему виду

$$\tilde{\rho}_t + \tilde{m}_o = \tilde{f}_1 + \tilde{R}_1 - \psi_1; \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} [(\rho + \tilde{\rho}) \tilde{u}]_t + \hat{\rho} u_t + \tilde{m} u_o + (m \tilde{u})_o + (\tilde{m} \tilde{u})_o + \tilde{P}_o &= \\ = \tilde{f}_2 + \tilde{R}_2 - \psi_2 - u (\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1 - \psi_1) - I(\tilde{m}, u); \end{aligned} \quad (3.7b)$$

9

$$\begin{aligned}
& [(\rho + \tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}]_t + \hat{\tilde{\rho}}\varepsilon_t - \varepsilon \tilde{m}_x - 0.5\hat{u} \left(\tilde{m}u_x + m\tilde{u}_x + \tilde{m}\tilde{u}_x \right) - \\
& - 0.5\hat{u} (mu_x + \tilde{m}u_x + m\tilde{u}_x + \tilde{m}\tilde{u}_x) - 0.5\hat{u}\tilde{P}_x - 0.5\hat{u}(P + \tilde{P})_x + \\
& + 0.5(\gamma + 1)(u + \tilde{u})(\rho\tilde{\varepsilon} + \tilde{\rho}\varepsilon + \tilde{\rho}\tilde{\varepsilon})_x + 0.5(\gamma + 1)\tilde{u}(\rho\varepsilon)_x + \\
& + (E + P)\tilde{u}_x + (\tilde{E} + \tilde{P})(u + \tilde{u})_x = \tilde{f}_3 + \tilde{R}_3 - 0.5\tilde{u}(f_2 + R_2) - \\
& - 0.5(u + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) - 0.5\hat{u}(f_2 + R_2) - 0.5(\hat{u} + \tilde{u})(\tilde{f}_2 + \tilde{R}_2) + \\
& + 0.5(\hat{u}\tilde{u} + \tilde{u}u + \tilde{u}\hat{u})(f_1 + R_1) + 0.5(\hat{u}\tilde{u} + \tilde{u}u + \tilde{u}\hat{u} + \hat{u}u)(\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1) + \\
& + 0.5\hat{u}[I(u, m) + I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] + \quad (3.7\text{в}) \\
& + 0.5\hat{u}[I(u, \tilde{m}) + I(\tilde{u}, m) + I(\tilde{u}, \tilde{m})] - I(P + E, \tilde{u}) - \\
& - I(\tilde{P} + \tilde{E}, u) - I(\tilde{P} + \tilde{E}, \tilde{u}) - \varepsilon(\tilde{f}_1 + \tilde{R}_1 - \psi_1) - \psi_3, \\
& \tilde{\rho}_i^0 = 0, \quad \tilde{m}_i^0 = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_i^0 = 0, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.7\text{г})
\end{aligned}$$

2°. Рассмотрим задачу (3.7а)-(3.7г). Предварительно заметим, что если уравнение $y_t + Ay = \phi$ скалярно умножить на $\alpha y^{(0.5)}$

$$\alpha(y_t, y^{(0.5)}) + \alpha(Ay, y^{(0.5)}) = \alpha(\phi, y^{(0.5)}),$$

и воспользоваться тождеством $y^{(0.5)} = y + 0.5\tau y_t$, получим

$$0.5(\alpha, [y^2]_t) = (\phi, \alpha y) - (Ay, \alpha y) + 0.5\tau(\alpha, (\phi - Ay)^2). \quad (3.8)$$

Умножим уравнение (3.7а) скалярно на $(\gamma - 1)\varepsilon\tilde{\rho}^{(0.5)}$, уравнение (3.7б) – на $[(\rho + \tilde{\rho})\tilde{u}]^{(0.5)}$, а уравнение (3.7в) – на $\varepsilon^{-1}[(\rho + \tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}]^{(0.5)}$. После сложения полученных уравнений, и оценки соответствующих членов, используя

методику получения априорных оценок, разработанную в [47,67,69,87], [74], получим основное энергетическое неравенство:

$$\frac{\hat{Q} - Q}{\tau} \leq M \left(Q + \hat{Q} + h^{-3} \left(Q^2 + (\hat{Q})^2 \right) + h^{-3} Q^4 + h^{-4} Q^8 \right) + M \|\psi\|^2, \quad (3.9)$$

$$Q^{(0)} = 0.$$

где

$$Q = (\gamma - 1) \left(\varepsilon, (\tilde{\rho})^2 \right) + \|(\rho + \tilde{\rho}) \tilde{u}\|^2 + \left(\varepsilon^{-1}, [(\rho + \tilde{\rho}) \tilde{\varepsilon}]^2 \right).$$

§3.3. Сходимость разностной схемы

Как видно, основное энергетическое неравенство (нелинейное) (9) является неявным. При решении этого неравенства воспользуемся методикой, разработанной в [6], [7], [12].

1°. Из неравенства (3.9) следует, что

$$(1 - \tau M) \hat{Q} \leq (1 + \tau M) Q + \tau M h^{-3} \left((\hat{Q})^2 + Q^2 \right) + \tau M h^{-3} Q^4 + \tau M h^{-4} Q^8 + \tau M \|\psi\|^2.$$

Пусть τ удовлетворяет следующему неравенству

$$1 - \tau M > 0.5,$$

тогда, учитывая что

$$\frac{1 + \tau M}{1 - \tau M} = 1 + \frac{2\tau M}{1 - \tau M} < 1 + 4\tau M,$$

при $h^{2+2\varepsilon} \leq \frac{1}{2M}, h \leq h_1$, где h_1 постоянная из леммы 3.1, получаем

следующее неравенство:

¶

$$2\tau M h^{-3} (\hat{Q})^2 - \hat{Q} + Q(1 + 4\tau M) + 2\tau M h^{-3} Q^2 + 2\tau M h^{-3} Q^4 + \\ + 2\tau M h^{-4} Q^8 + 2\tau M \|\psi\|^2 > 0,$$

или

$$0.5 M_1 \tau h^{-3} (\hat{Q})^2 - \hat{Q} + Q(1 + M_1 \tau) + 0.5 M_1 \tau h^{-3} Q^2 + \\ + 0.5 M_1 \tau h^{-3} Q^4 + 0.5 M_1 \tau h^{-4} Q^8 + 0.5 M_1 \tau \|\psi\|^2 > 0, \quad (3.10)$$

где $M_1 = 4M$.

Лемма 3.5. Пусть выполнены условия леммы 3.1,

$$\tau = h^{2+2\varepsilon}, \quad (\varepsilon > 0), \quad \|\tilde{\rho}^{(k)}\|_c \leq h, \quad \|\tilde{m}^{(k)}\|_c \leq h, \quad \|\tilde{E}^{(k)}\|_c \leq h, \quad \|\tilde{\varepsilon}^{(k)}\|_c \leq h,$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots, j; \quad (j \leq N_1 - 1)$,

тогда существует постоянная $h_2 > 0$ ($h_2 \leq h_1$), такая, что при $h \leq h_2$, имеет место следующая оценка

$$Q^{j+1} \leq M_2 \|\psi\|^2 \exp(M_2 T),$$

где M_2 – постоянная, не зависящая от h .

Доказательство. Сначала найдём решение квадратного неравенства (3.10) относительно \hat{Q} . Дискриминант соответствующего квадратного трёхчлена равен

$$D = 1 - 2M_1 \tau h^{-3} Q(1 + M_1 \tau) - M_1^2 \tau^2 h^{-6} Q^2 - M_1^2 \tau^2 h^{-6} Q^4 - \\ - M_1^2 \tau^2 h^{-7} Q^8 - M_1^2 \tau^2 h^{-3} \|\psi\|^2.$$

Так как $Q = O(h^2)$ (см. условие леммы 3.1) и $\tau = h^{2+2\varepsilon}$, получим

$$D > 1 - 2M_1 \tau h^{-3} M_3 h^2 (1 + M_1 \tau) - M_1^2 \tau^2 h^{-6} M_3^2 h^4 - \\ - M_1^2 \tau^2 h^{-6} M_3^4 h^8 - M_1^2 \tau^2 h^{-7} M_3^8 h^{16} - M_1^2 \tau^2 h^{-3} M h^4 =$$

$$= 1 - 2M_1M_3(1 + M_1\tau)h^{1+2\varepsilon} - M_1^2M_3^2h^{2+4\varepsilon} - \\ - M_1^2M_3^4h^{6+4\varepsilon} - M_1^2M_3^8h^{13+4\varepsilon} - M_1^2Mh^{5+4\varepsilon}.$$

Как нетрудно убедиться, при достаточно малом значении h ($h \leq h_2$), справедливо неравенство $0 < D < 1$. Следовательно, в этом случае квадратный трёхчлен имеет два действительных корня:

$$\hat{Q}_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{D}}{M_1\tau h^{-3}}$$

и решение неравенства (3.10) можно записать следующим образом

$$\hat{Q} < \hat{Q}_- \quad \text{или} \quad \hat{Q} > \hat{Q}_+.$$

Оценим \hat{Q}_+ снизу и \hat{Q}_- сверху. Для этой цели используем разложение в ряд Тейлора:

$$\sqrt{D} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\sqrt{(1+\Theta)^3}}, \quad 0 < \Theta < x$$

$$x = -2M_1\tau h^{-3}Q(1 + M_1\tau) - M_1^2\tau^2 h^{-6}Q^2 - M_1^2\tau^2 h^{-6}Q^4 - \\ - M_1^2\tau^2 h^{-7}Q^8 - M_1^2\tau^2 h^{-3}\|\psi\|^2. \quad (3.11)$$

Учитывая, что $Q < M_3h^2$ при достаточно малых значениях h , можно получить следующую оценку:

$$\hat{Q}_+ = \frac{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\sqrt{(1+\Theta)^3}}}{M_1\tau h^{-3}} \geq M_4h^{1-2\varepsilon}.$$

Из леммы 3.1 следует, что при $h \leq h_1$ выполняется неравенство $\hat{Q} \leq M_5h^2$. Поэтому существует такое значение $h_3 > 0$, что при $h \leq h_3$ не

может выполняться неравенство $\hat{Q} < \hat{Q}_+$. Это означает, что при $h \leq h_3$ решение квадратного неравенства (3.10) может иметь только следующий вид

$$\hat{Q} < \hat{Q}_- \quad (3.12)$$

где

$$\hat{Q}_- = \frac{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4\sqrt{(1+\Theta)^3}}}{M_1\tau h^{-3}}.$$

Из (3.11) следует, что

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2M_1\tau h^{-3}} &= Q(1 + M_1\tau) + 0.5M_1\tau h^{-3}Q^2 + \\ &+ 0.5M_1\tau h^{-3}Q^4 + 0.5M_1\tau h^{-4}Q^8 + 0.5M_1\tau\|\psi\|^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Рассмотрим слагаемые:

$$0.5M_1\tau h^{-3}Q^4 \leq 0.5M_1\tau h^{-3}Q^2M_3^2h^4 = 0.5M_1M_3^2\tau hQ^2,$$

$$0.5M_1\tau h^{-4}Q^8 \leq 0.5M_1\tau h^{-4}Q^2(M_3h^2)^6 = 0.5M_1M_3^6\tau h^8Q^2.$$

Ясно, что, существует такое $h_4 \geq 0$, что при $h < h_4$, справедливы неравенства:

$$M_1M_3^2h \leq Mh^{-3}, \quad M_1M_3^6h^8 \leq Mh^{-3}.$$

Тогда из (3.13) следует, что

$$-\frac{x}{2M_1\tau h^{-3}} < Q(1 + M_1\tau) + 0.5M_1\tau h^{-3}Q^2 + 0.5M_1\tau\|\psi\|^2.$$

Заметим, что при достаточно малых значениях h выражение $\frac{1}{\sqrt{(1+\Theta)^3}}$

ограничено, так как ограничено x . Далее, учитывая неравенства:

$$\frac{\tau^2 h^{-6} Q^2 (1 + M_1 \tau)}{\tau h^{-3}} \leq M \tau h^{-3} Q^2,$$

$$\frac{\tau^4 h^{-12} Q^4}{\tau h^{-3}} \leq M \tau h^{-3} Q^2 \tau^2 h^{-6} h^4 = M \tau h^{-3} Q^2,$$

$$\frac{\tau^4 h^{-12} Q^8}{\tau h^{-3}} \leq M \tau h^{-3} Q^2 \tau^2 h^{-6} h^{12} \leq M \tau h^{-3} Q^2,$$

$$\frac{\tau^4 h^{-6} \|\psi\|^4}{\tau h^{-3}} \leq M \tau^2 h^3 \tau \|\psi\|^2 \leq M \tau \|\psi\|^2,$$

будем иметь

$$\frac{1}{M_1 \tau h^{-3}} \cdot \frac{x^2}{4\sqrt{(1 + \Theta)^3}} \leq M \tau h^{-3} Q^2 + M \tau \|\psi\|^2.$$

Учитывая всё выше сказанное, можно заключить, что при $h < h_5$, где $h_5 = \min(h_1, h_3, h_4)$, для решения квадратного неравенства (3.10) имеем оценку:

$$\hat{Q} < \hat{Q}_- < Q(1 + M\tau) + M\tau h^{-6} Q^2 + M\tau \|\psi\|^2. \quad (3.14)$$

Неравенство (3.12) запишем в следующем виде:

$$Q^{(k+1)} < f(Q^{(k)}), \quad Q^{(0)} = 0, \quad (3.15)$$

где
$$f(Q^{(k)}) = \frac{1 - \sqrt{D(Q^{(k)})}}{M_1 \tau h^{-3}}.$$

Наряду с (3.15) рассмотрим следующую задачу:

$$\bar{Q}^{(k+1)} = F(\bar{Q}^{(k)}), \quad \bar{Q}^{(0)} = 0, \quad (3.16)$$

где
$$F(\bar{Q}^{(k)}) = \bar{Q}^{(k)}(1 + M\tau) + M\tau h^{-6} [\bar{Q}^{(k)}]^2 + M\tau \|\psi\|^2.$$

При этом учтём, что при $h \leq h_5$, справедливо неравенство:

$$f(Q^{(k)}) \leq F(\bar{Q}^{(k)}).$$

Докажем, что, если f возрастающая функция, то имеет место неравенство $Q^{(k+1)} \leq \bar{Q}^{(k+1)}$. Доказательство проведём методом математической индукции по k . Из неравенств (3.15), (3.16) непосредственно вытекает справедливость этого утверждения при $k = 0$. Допустим, что это неравенство выполняется при $k = m$. Докажем справедливость неравенства при $k = m + 1$:

$$Q^{(m+1)} \leq f(Q^{(m)}) \leq f(\bar{Q}^{(m)}) \leq F(\bar{Q}^{(m)}) = \bar{Q}^{(m+1)}.$$

Нам остаётся проверить что f возрастающая функция. Для этой цели рассмотрим производную функцию $f(Q)$:

$$\begin{aligned} f'(Q) &= -\frac{D'(Q)}{2M_1\tau h^{-3}\sqrt{D}} = \\ &= -\frac{-2M_1\tau h^{-3}(1+M_1\tau) - 2M_1^2\tau^2 h^{-6}Q - 4M_1^2\tau^2 h^{-6}Q^3 - 8M_1^2\tau^2 h^{-6}Q^7}{2M_1\tau h^{-3}\sqrt{D}} > 0. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим задачу (3.16). Разностное равенство (3.16) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\bar{Q}^{(k+1)} - \bar{Q}^{(k)}}{\tau} = M\bar{Q}^{(k)} + Mh^{-3}(\bar{Q}^{(k)})^2 + M\|\psi\|^2,$$

$$\bar{Q}^{(0)} = 0.$$

или

$$\left(\bar{Q}^{(k)}\right)_t = M\bar{Q}^{(k)} + Mh^{-3}(\bar{Q}^{(k)})^2 + M\|\psi\|^2, \quad \bar{Q}^{(0)} = 0. \quad (3.17)$$

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.6.(см. [47], [68]). Пусть рассматривается разностная задача

$$w_{ht}^{(k)} = F(w_h^{(k)}), \quad w_h^0 = W,$$

а решение соответствующей дифференциальной задачи

$$\frac{d\bar{w}(t)}{dt} = F(\bar{w}), \quad \bar{w}(0) = W,$$

выпукло. Тогда справедлива оценка

$$w_h^{(k)} \leq \bar{w}(k\tau).$$

Разностному уравнению (3.17) соответствует дифференциальная задача:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M\bar{Q}(t) + Mh^{-3}(\bar{Q}(t))^2 + M\|\psi\|^2, \quad \bar{Q}(0) = 0. \quad (3.18)$$

Нетрудно показать, что решение задачи (3.18) ограничено решением следующей задачи:

$$\frac{d\tilde{Q}}{dt} = M\tilde{Q}(t) + Mh^{-3}(\tilde{Q}(t))^2, \quad \tilde{Q}(0) = \int_0^T M\|\psi\|^2 d\tau. \quad (3.19)$$

Решение задачи (3.19) можно выписать явно:

$$\tilde{Q}(t) = M \left(\int_0^T \|\psi\|^2 d\tau \right) e^{Mt} \left[1 + h^{-3} M \left(\int_0^T \|\psi\|^2 d\tau \right) (1 - e^{Mt}) \right]^{-1}.$$

Так как $\|\psi\|^2 = O(h^4)$, то найдётся такое значение $h_2 \leq h_5$, что при $h \leq h_2, \forall t \in [0, T]$ справедливо следующее неравенство:

$$1 + h^{-3} M \left(\int_0^T \|\psi\|^2 d\tau \right) (1 - e^{Mt}) \geq 1/2.$$

Это означает, что при $h \leq h_2$, имеет место оценка

$$\tilde{Q} \leq 2M_2 \left(\int_0^T \|\psi\|^2 d\tau \right) e^{Mt} \leq \bar{M} \|\psi\|^2 e^{\bar{M}_2 T}.$$

Если \bar{Q} выпукло, тогда

$$\bar{Q}^{(k)} \leq \bar{Q} \leq \tilde{Q} \leq \bar{M}_2 \|\psi\|^2 e^{\bar{M}_2 T}.$$

Покажем, что \bar{Q} выпукло. Так как $\frac{d\bar{Q}}{dt} = F(\bar{Q}(t))$, то

$$\frac{d^2\bar{Q}}{dt^2} = \frac{d}{dt} F(\bar{Q}(t)) = \frac{dF(\bar{Q})}{d\bar{Q}} \frac{d\bar{Q}}{dt} = [M_3 + 2Mh^{-3}\bar{Q}] \frac{d\bar{Q}}{dt}.$$

Учитывая, что $\frac{d\bar{Q}}{dt} > 0$, получим что $\frac{d^2\bar{Q}}{dt^2} > 0$, а это означает, что \bar{Q}

выпуклая функция.

Справедливость леммы 3.5 доказана.

2°. Теорема 3.1. Пусть для решения задачи (3.1a)-(3.1z) выполнены условия (A1), (A2) и $\tau = h^{2+2\varepsilon}$ ($\varepsilon = \text{const} > 0$). Тогда существует $h_0 > 0$ такая, что при $h \leq h_0$ справедливы следующие утверждения:

1) Решение разностной задачи (2a)-(2z) на интервале $[0, T]$ существует и единственно.

2) Решение задачи (2a)-(2z) сходится к решению задачи (1a)-(1z) в сеточной норме L_2 со скоростью $O(h^2)$.

Доказательство. Учтём, что

$$Q = (\gamma - 1) \left(\varepsilon, (\tilde{\rho})^2 \right) + \|(\rho + \tilde{\rho})\tilde{u}\|^2 + \left(\varepsilon^{-1}, [(\rho + \tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}]^2 \right),$$

поэтому существует постоянная $M_1 > 0$, такая, что имеет место следующая оценка

$$Q > M_1^{-1} \left(\|\tilde{\rho}\|^2 + \|(\rho + \tilde{\rho})\tilde{u}\|^2 + \|(\rho + \tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|^2 \right) \geq$$

$$\geq M_1^{-1} h \left(\|\tilde{\rho}\|_c^2 + \|(\rho + \tilde{\rho})\tilde{u}\|_c^2 + \|(\rho + \tilde{\rho})\tilde{\varepsilon}\|_c^2 \right) \quad (3.20)$$

Выберем h ($h_0 \leq h_2$) из условий, что неравенство

$$h^{-1} M_1 \bar{M}_2 \|\psi\|^2 e^{\bar{M}_2 T} \leq h^2 \quad (3.21)$$

выполняется для всех ($h \leq h_2$). Возможность такого выбора очевидна.

Далее, методом математической индукций по k (k - номер слоя), докажем справедливость следующей оценки

$$Q^{(k)} \leq \bar{M}_2 \|\psi\|^2 \exp(2 \bar{M}_2 T), \quad (3.22)$$

для всех $0 \leq k \leq N_1$, если $h \leq h_0$.

Для $k = 0$ оценка очевидна. Пусть оценка (3.22) верна для $k = m$ ($m \leq N_1 - 1$). Тогда из (3.20), (3.21) следует, что

$$\|\tilde{\rho}^{(m)}\|_c \leq h, \|\tilde{u}^{(m)}\|_c \leq h, \|\tilde{m}^{(m)}\|_c \leq h, \|\tilde{\varepsilon}^{(m)}\|_c \leq h, \|\tilde{P}^{(m)}\|_c \leq h.$$

Тогда согласно лемме 3.1 и лемме 3.2, получаем, что решение разностной схемы (3.2) на $(m+1)$ -м слое существует, единственно и выполняется оценка

$$Q^{(m+1)} \leq \bar{M}_2 \|\psi\|^2 \exp(\bar{M}_2 T).$$

Следовательно, оценка (3.22) выполняется для всех $k = 0, 1, \dots, N_1$. Из этой оценки непосредственно получается, что

$$\|\tilde{\rho}\| = O(h^2), \|\tilde{u}\| = O(h^2), \|\tilde{m}\| = O(h^2), \|\tilde{\varepsilon}\| = O(h^2), \|\tilde{P}\| = O(h^2), \|\tilde{E}\| = O(h^2).$$

Таким образом, в классе достаточно гладких решений задачи (3.1a)-(3.1г) доказана сходимость решения разностной схемы в сеточной норме L_2 со скоростью $O(h^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bahi J. Parallel Chaotic Algorithms for Singular Linear Systems // Parallel Algorithms and Applications – 1999;
2. Brent R.P. The Parallel Evaluation of General Arithmetic Expressions // J.ACM – 1974 – 21, 2 – pp. 201-206;
3. Chandra Sekhara Rao S., Dutt P.K., Kadalbajoo M.K. A Parallel Algorithm for Banded Linear System // Parallel Algorithms and Applications – 2000 ;
4. P.Clapp. Atomic Configurations in Binary Alloys // Phys.Rev. B – v.4, №2 – pp.255-270 ;
5. Corliss G. Parallel Rootfinding by Lagrange Interpolation // Was presented at the Second Langley conference of Scientific Computing – 22, October, 1974 ;
6. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences // Com.Pure and Appl. Math. – 1952 – v.5, №3 – pp.243-255 ;
7. F.Criado, T.D.Davitashvili. On Asynchronous Iterative Methods for the Solution of Non-linear Equations and Systems of Equations for Multiprocessors // Parallel Algorithms and Applications – 1997– vol.12 – pp.253-263 ;
8. F.Criado, T.D.Davitashvili, H.V. Meladze, N.M.Skhirtladze. On One Numerical Method for Solving Some Self-similarity Problems of Gas Dynamics on a Multiprocessor // Intern. J. Computer Math. – 2000 – vol.74 – pp.63-85 ;
9. F.Criado, T.Gachechiladze, H.Meladze. Inverse Spline-interpolation for Numerically Solving Piston Problem with Isothermic Gas Compression and Constant Velocity // Inter. J. Computer Math. – 1999 – vol.71 – pp.83-95 ;

- 10.T.D.Davitashvili. On the Convergence of Kinetic-coordinated Difference Scheme of Gas Dynamics // Report of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics – 1993 –vol.8, №3 – pp.30-31 ;
- 11.T.D.Davitashvili, N.M.Skhirtladze. The Iterative Methods for Solving of the Piston Problem for Heat-conducting Gas with Sources // Report of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics – 1993 – vol.8, № – pp.32-35 ;
- 12.Evans D.J. The Parallel Solution of Tridiagonal Systems by Recursive Striding // Parallel Algorithms and Applications – 1998 ;
- 13.Feilmeier M., Segeret G. Numerical Stability in Parallel Evaluation of Arithmetic Expressions, in Feilmeier M.(ed.) // Parallel Computers – Parallel Mathematics – Amsterdam, Nort-Holland Publ. – 1977 – pp.107-112 ;
- 14.Franklin M.A. Parallel Solution of Ordinary Differential Equations // IEEE Trans. Comp.C – 27 – 1978 – pp.413-420 ;
- 15.Gal Sh., Miranker W.L. Optimal Sequential and Parallel Search for Finding a Root // J. of Combinatorial Theory (A) – 23 – 1977 – p.1-14 ;
- 16.Gear C.W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations // Prentill-Hall – New Gersey: 1971 ;
- 17.Gerard H. Bauget. Asynchronous Iterative Methods for Multiprocessor // J. of ACM – v.25, №2 – April 1978 – pp.226-244 ;
- 18.E.T.Jaynes // Phys. Rev., 106, 620 (1957) ;
- 19.E.T.Jaynes // Phys. Rev., 108, 171 (1057) ;
- 20.Koc C.K. Parallel p-adic Method for Solving Linear Systems of Equations // Parallel Computing – 1997 – v.23, №13 – pp.2067-2074 ;
- 21.Kuo.P.-Y., Wu H.-M. Numerical Solution of K.D.V. Equation // J. Math. Analis. and Applic. – 1981 – v.82, №2 – pp.334-345 ;
- 22.Miranker W.L. A Servey of Parallelizm in Numerical Analysis // SIAM Review – vol.13, №4 – 1971 – pp.524-547 ;

23. Miranker W.L. Hierarchical Relaxation // Computing – 23, 3 – 1979 – pp.267-285 ;
24. Miranker W.L. Parallel Methods for Solving Equations // Math. and Computers in Simulation – XX – 1978 – pp.93-101 ;
25. Miranker W.L. Parallel Search Methods for Solving Equations, in Feilmeier M. (ed.) // Parallel Computers – Parallel Mathematics – North. Holland Publ. Co. – Amsterdam – 1977 – pp.9-15 and // Math. Comp. Simul. – 20, 2 – 1978 – pp.93-101 ;
26. Muller D.E., Preparata F.P. Restructuring of Arithmetic Expression for Parallel Evaluations // J. ACM – 1976 – 23 – pp.534-543 ;
27. Ojanczyk A.B. Optimal Asynchronous Newton Method for the Solution of Nonlinear Equations – J. of ACM – v.31, №4 – October, 1984 ;
28. Pasqualli A. Alcune Considerazioni Numeriche Relative alla Soluzione di un Noto Problema ai Limiti per l'Equazione // Calcolo – 1969 – 6, №1 – pp.21-34 ;
29. Pasqualli A. Un Procedimento di Calcolo Connesso ad un Noto Problema ai Limiti per l'Equazione $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$ // La Matematiche – 1968 – vol.XXIII, 2 – pp.319-328 ;
30. Rice J.R. Matrix Representation of Nonlinear Equations // Application to Parallel Computation – 25, 116 – 1971 – p.639-647 ;
31. Schmidt J.W. On the R-Order of Coupled Sequences // J. Computing – 26 – 1981 – pp.333-342 ;
32. Wigner E., Phys. Rev., 40, 749 (1932).
33. Алгоритмы, математическое обеспечение и архитектура многопроцессорных вычислительных систем // М.: “Наука” – 1982 ;
34. Антонов А.Н., Антонов М.А., Граур Н.А., Косарев Л.В., Четверушкин Б.Н., Шильников Е.В. Кинетически-согласованные разностные схемы и квазигазодинамическая система уравнений как модель для описания

- течений вязкого газа. В сб. Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Ред. Л.А.Уварова – Москва, МГУ “Станкин” – 1998 – стр.4-36 ;
- 35.Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.1 // Гос. изд. физ.-мат. литературы – М., 1962 ;
- 36.Бочоришвили Р.Д., Елизарова Т.Г., Схиртладзе Н.М. Метод расщепления для кинетически-согласованных разностных схем // Москва – препринт ИПМ им. М.В.Кельдиша АН СССР – №6, 1988г. – 24 стр. ;
- 37.Валях Е. Последовательно-параллельные вычисления // М.: “Мир” – 1985 –456 стр. ;
- 38.Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах // М.: “Наука” – 1986 ;
- 39.Волосевич П.П., Дарьин Н.А., Леванов Е.И., Схиртладзе Н.М. Задача о поршне в газе с источниками и стоками (автомодельные решения) // Тбилиси : Изд-во ТГУ – 1986 – 239 стр. ;
- 40.Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса // Москва: Издательство МФТИ – 1997 – 242 стр.;
- 41.Вычислительные процессы и системы. Под ред. Г.Марчука // М.: “Наука” – 1983 ;
- 42.Гордезиани Д.Г. Об одном варианте использования принципа аддитивности для решения эволюционных уравнений второго порядка // Доклады семинар. ИПМ ТГУ – 1971 – т.4 – стр. 23-26 ;
- 43.Гордезиани Д.Г. О численном решении некоторых задач термоупругости // Тбилиси – Изд. Тбилисского гос. Университета – 1979 – 52 стр. ;
- 44.Гордезиани Д.Г. Об одной аддитивной модели для параболических уравнений со смешанными производными. // В кн.: Современные

- проблемы математической физики и вычислительной математики – М.: “Наука” – 1982 – стр.128-138 ;
45. Давиташвили Т.Д. Об одном численном методе решения системы нелинейных уравнений приближения Клаппа для бинарных металлических соединений // Труды Тбилисского гос. Университета – 1987 – т.262 – с.162-181;
46. Давиташвили Т.Д. О некоторых асинхронных итерационных методах решения нелинейных уравнений для параллельных вычислительных систем // Труды Института Прикладной Математики им. И.Н.Векуа – 1988 – т.25 – с.132-146 ;
47. Давиташвили Т.Д., Елизарова Т.Г., Криадо Ф., Меладзе Г.В., Схиртладзе Н.М. О сходимости кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики. // Препринт – Москва, Диалог – МГУ – 1999 – с.1-35 ;
48. Давиташвили Т.Д., Елизарова Т.Г., Криадо Ф., Меладзе Г.В., Схиртладзе Н.М. О сходимости кинетически-согласованных разностных схем для одномерных уравнений газовой динамики // Математическое моделирование – 2001 – т.13, № 4 – с.71-83 ;
49. Давиташвили Т.Д., Меладзе Г.В. О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений для ЭВМ с параллельными процессорами // Труды Института Прикладной Математики им. И.Н.Векуа – 1985 – т.15 – с.128-146 ;
50. Давиташвили Т.Д., Меладзе Г.В., Схиртладзе Н.М., Чантурия А.А. Об одном итерационном методе решения граничной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с параметром на многопроцессорной ЭВМ // Труды Института Прикладной Математики им. И.Н.Векуа – 1985 – т.15 – с.147-162 ;

51. Джгамадзе Н.О. О сходимости разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики в переменных Эйлера. Дисс. канд. физ. мат. наук, Тбилиси – 1991 – 128с. ;
52. Джгамадзе Н.О., Попов А.В. О сходимости разностных схем для двумерных уравнений газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992 – т.32, № 4 – с.613-622 ;
53. Дуйсекулов А.Е., Елизарова Т.Г., Косарев Л.В., Семёнова Т.А. Об одном примере реализации разностной схемы на параллельной вычислительной системе // Москва: Препринт всесоюзного центра математического моделирования – № 6 – 1991 – 21 стр. ;
54. Дуйсекулов А.Е., Елизарова Т.Г. Использование многопроцессорных вычислительных систем для реализации кинетически-согласованных разностных схем газовой динамики // Математическое моделирование – т.2, № 7 – 1990 – стр. 139-147 ;
55. Елизарова Т.Г., Капачинская И.С., Ключникова А.В., Шерепов Ю.В. Расчёт конвективных течений на основе квазигидродинамических уравнений // Сб. Проблемы математической физики. Ред. Д.П.Костомаров, В.И.Дмитриев – Диалог, МГУ – 1998 – с.193-208 ;
56. Елизарова Т.Г., Капачинская И.С., Ключникова А.В., Шерепов Ю.В. Использование КГД - уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Ж. Вычисл. Математики и Математической Физики – 1998 – т.38, № 10 – с.1732-1742 ;
57. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные разностные схемы для моделирования течений вязкого теплопроводного газа // ЖВМ и МФ – 1988 – т.28, № 11 – с. 695-710 ;
58. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Кинетические алгоритмы для расчёта газодинамических течений // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. – 1985 – т.25, №10 – стр.1526-1533 ;

- 59.Иверонова В.И., Кацнельсон А.Л. Ближний порядок в твёрдых растворах // М.: “Наука” – 1977 ;
- 60.Кантарович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ // М.: “Наука” – 1977 – 741 стр. ;
- 61.Карташевич А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления // М.: “Наука” – 1980 – 284 стр. ;
- 62.Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика // М.: “Мир” – 1969 – 447 стр. ;
- 63.Кульчицкий О.Ю., Шимелевич Л.И. О нахождении начального приближения для метода Ньютона // ЖВМ и МФ – т.14 – 1974 – с.1016-1018 ;
- 64.Ланкастер П. Теория матриц // М.: “Наука” – 1978 – 280 стр. ;
- 65.Леванов Е.И., Меладзе Г.В., Перадзе Дж.Г., Схиртладзе Н.М., Чантурия А.А. Об одном численном методе нахождения автомодельных решений некоторых задач газовой динамики // Труды ИПМ им. И.Н.Векуа, Некоторые задачи вычислительной и прикладной математики – Тбилиси – т.15 – 1985 – с.250-272 ;
- 66.Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений // Киев – Вища школа – 1977 ;
- 67.Меладзе Г.В., Поцхишвили Д.В. О сходимости консервативной дифференциально-разностной схемы газовой динамики в Эйлеровых координатах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1985 – т.25, №6 – с.850-859;
- 68.Меладзе Г.В., Поцхишвили Д.В. О сходимости полностью консервативных двухслойных разностных схем газовой динамики в переменных Эйлера // Applied Mathematics and Informatics – 1996 – vol.1, № 1 – pp. 111-118 ;

69. Меладзе Г.В., Поцхишвили Д.В. О сходимости полностью консервативных двухслойных разностных схем газовой динамики в переменных Эйлера // Препринт ИВМатем. им.Н.Мусхелишвили АН ГССР – Тбилиси – 1990 – 12 стр. ;
70. Меладзе Г.В., Церцвадзе Г.З. О сходимости дифференциально-разностных схем газовой динамики в Эйлеровых переменных // Тр.Тбилисского гос. университета им. И.Джавахишвили – 1990 – т.298, №12 – с. 10-25 ;
71. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем // М.: ”Мир” – 1991 – 365 стр. ;
72. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными // М.: “Мир” – 1975 – 558 стр.;
73. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений // М., Изд. иностр. лит. – 1963 ;
74. Поцхишвили Д.В. Сходимость полностью консервативной дифференциально-разностной схемы газовой динамики в Эйлеровых координатах // Тр. ИПМ им. И.Векуа Тбилисского гос. ун-та – 1985 – т.15 – с.294-297 ;
75. Раслан Х.М. Об одном численном методе решения краевой задачи с параметром // Учённые записи Азерб. гос. ун-та, сер. физ.-мат. наук – 1976, № 5 – с.34-42 ;
76. Самарский А.А. Введение в численные методы // М.: “Наука” – 1987 – 286 стр. ;
77. Самарский А.А. Теория разностных схем // М.: “Наука” – 1977 – 656 стр. ;
78. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование // М.: “Наука” – 1997 – 316 стр.;

79. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики // М.: "Наука" – 1980 – 352 стр. ;
80. Сергеев А.С. О методе хорд // Сибирский математический журнал – 1961 – т.11, № 2 – стр.282-289 ;
81. Системы параллельной обработки (Редактор Д.Ивенс) // М.: "Мир" – 1985 – 413 стр. ;
82. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями // М.: "Наука" – 1981 ;
83. Схиртладзе Н.М. Об автомодельных решениях уравнений газовой динамики с объёмными источниками и стоками // Сообщ. Акад. Наук ГССР – 90, № 3 – 1978 ;
84. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений // М.: "Мир" – 1985 – 263 стр. ;
85. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений – М.: "Мир" – 1980 – 277 стр. ;
86. Церцвадзе Г.З. Сходимость полностью консервативной разностной схемы газовой динамики в Эйлерах переменных в случае идеального газа // Препринт ИПМ им.М.В.Кельдыша АН России – № 71 – 1992 – 32 стр. ;
87. Церцвадзе Г.З. Сходимость полностью консервативной разностной схемы для уравнения газовой динамики в Эйлерах переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992 – т.32, № 7 – с. 1080-1092;
88. Дмитриева О.А. Анализ параллельных алгоритмов численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом Адамса-Башпорта и Адамса-Моултона // Математическое моделирование – 2000 – т.12, № 5 – с.81-85;
89. Фельдман Л.П., Дмитриева О.А. Эффективные методы распараллеливания численного решения задачи Коши для обыкновенных

дифференциальных уравнений // Математическое моделирование – 2001
т.13, №7 – с.66-72.