Грузинский технический университет

Данелиа Анна Ниазевна

О некоторых свойствах сопряженных функции в пространствах C и L

01.01.01 — Математический анализ

Диссертация

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Тбилиси 2002

Содержание

Введение

Многие вопросы современного гармонического анализа связаны с поведением сопряженного ряда к ряду Фурье функций f, что со своей стороны, требует изучения разных свойств сопряженной функции. Более 70 лет изучаются разные вопросы, связанные со свойствами сопряженной функции.

В настоящее время в этом направлении получены многие важные результаты, причем, во многих случаях, исследованы более общие сингулярные операторы. Они изложены в монографиях и обзорных статьях многих авторов.

В диссертационной работе изучаются деформации разных функциональных классов относительно действующего на них многомерного оператора сопряжения $\widetilde{f}_B$, а также некоторые аппроксимативные свойства средних Чезаро положительного порядка и Пуассона-Абеля кратных сопряженных тригонометрических рядов Фурье. Диссертационная работа состоит из введения и четырех глав.

В первых параграфах каждой главы приведены основные определения, обазначения и известные результаты.

В теории функций вещественной переменной хорошо известна теорема И.И.Привалова (см. например, [4, с. 560]) об инвариантности класса функций $Lip(\alpha;C(T))$ $(0<\alpha<1)$ относительно оператора $\widetilde{f}$, причем утверждение перестает быть верным при $\alpha = 1$.

В дальнейшем эта теорема обобщалась в различных направлениях и в результате исследований многих авторов сложилась определенная проблематика, в которой в терминах модулей непрерывности различных порядков находятся прямые и обратные оценки сопряженной функции через те же характеристики плотности.

Так, в 1924 году Зигмунд (см. например, [14, с. 199]) установил более сильное утверждение: если функция $f \in C(T)$ и

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(f;t)_{C(T)}}{t} dt < +\infty,$$

то $\tilde{f}$ существует всюду, $\tilde{f} \in C(T)$ и

$$\omega(\tilde{f};\delta)_{C(T)} \le A\left[\int_0^{\delta} \frac{\omega(f;t)_{C(T)}}{t} dt + \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(f;t)_{C(T)}}{t^2} dt\right], \ 0 < \delta \le \frac{\pi}{2}. \quad (1.2.1)$$

Из этого утверждения следует, что класс $H(\omega;C(T))$ инвариантен относительно оператора $\tilde{f}$, если ω удовлетворяет так называемому условию Зигмунда.

Зигмунд же [13], в 1945 году показал, что для модулей непрерывности второго порядка аналог теоремы И. И. Привалова имеет место и при $\alpha = 1$, т.е., если

$$\omega_2(f;\delta)_{C(T)} \le A(f)\delta,$$

то

$$\omega_2(\tilde{f};\delta)_{C(T)} \le A(f)\delta,$$

где $A(f)$ - абсолютная константа, зависящая лишь от функции f. В 1955 году Н.К Бари [2], в 1956 году Н.К Бари и С.Б. Стечкин [3] установили ряд новых утверждений, связанных с поведением модулей непрерывности порядка k $(k \in N)$ функции f и $\tilde{f}$.

Кроме того, в этой же работе ставится и решается задача: пусть на $[0,\pi]$ задана непрерывная монотонно возрастающая функция φ и $\varphi(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0+$. Какие условия, наложенные на φ будут необходимыми и достаточными для эквивалентности соотношений

$$\omega(f;\delta)_{C(T)} \le A(f)\varphi(\delta)$$

и

$$\omega(\tilde{f};\delta)_{C(T)} \le A(f)\varphi(\delta).$$

При решении этой задачи установлена неусиляемость оценки (1.2.1) Зигмунда в следующем смысле:

Пусть ω модуль непрерывности, для которого

$$\int_0^\pi \frac{\omega(t)}{t}dt < +\infty.$$

Тогда существует функция $f \in C(T)$ такая, что

$$A_1^*(f)\omega(\delta) \le \omega(f;\delta)_{C(T)} \le A(f)\omega(\delta), \quad (\text{т.е. } \omega(f;\delta)_{C(T)} \sim \omega(\delta)),\ \tilde{f} \in C(T)$$

и

$$\omega(\tilde{f};\delta)_{C(T)} \ge \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}dt + \delta\int_\delta^\pi \frac{\omega(t)}{t^2}dt\right].$$

Подобные результаты установлены и для пространства $L(T)$. Харди и Литтльвуд [30] показали, что и класс $Lip(\alpha;L(T))$ $(0<\alpha<1)$ инвариантен относительно оператора $\tilde{f}$, а в случае $\alpha=1$, Зигмундом доказан аналог теоремы Харди-Литтльвуда для модулей неприрывности второго порядка.

Сопряженные функции двух переменных, видимо, впервые были рассмотрены Л. Чезари [31]в 1938 году. Ему принадлежит следующая теорема: если $f \in Lip(\alpha;C(T^2))$, $0<\alpha<1$, то

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{j\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}\right),$$

$$\delta \to 0+,\ i,j = 1,2,$$

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{1,2\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}|\ln\delta|\right),$$

$$i = 1,2.$$

И.Е. Жак [9] уточнил утверждения Чезари. В частности, он доказал, что если $f \in Lip(\alpha;C(T^2))$, $0<\alpha<1$, то

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}\right),$$

$$i = 1,2,$$

$$\omega_j\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}|\ln\delta|\right),$$

$$\delta \to 0+,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,$$

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{1,2\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}|\ln\delta|\right),$$

$$\delta \to 0+, i = 1,2.$$

В этой же работе И.Е. Жака [9] приводится пример функции, принадлежащий Е.М. Ландису, который показывает, что полученные оценки являются точными по порядку.

В дальнейшем в работах [15]и [17] М.М. Лекишвили обобщил эти утверждения. Он получил окончательные результаты, выясняющие полный характер нарушения инвариантности классов $Lip(\alpha;C(T^n))$ $(0<\alpha<1)$ и $H\left(\omega;C\left(T^n\right)\right)$ относительно действующих в них операторов $\widetilde{f}_B$. В частности, в работе [17] доказана следующая

Теорема. а) Если $f \in H\left(\omega;C\left(T^n\right)\right)$ $(n \geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, то

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\omega(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1}\right),$$

$$\delta \to 0+,\ i \in B,$$

$$\omega_j\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\omega(\delta)|\ln\delta|^{|B|}\right),$$
$$\delta\to 0+,\quad j\in M\setminus B;$$

б) Полученные в пункте (а) оценки неусиляемы.

Аналогичные вопросы для классов $H\left(\omega_i, i\in M; C\left(T^n\right)\right)$ были изучены в работе [22] В.А. Окулова. Именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $f\in C\left(T^n\right)$, $\omega_i\left(f;\delta\right)_{C(T^n)} = \omega_i(\delta)$ при $0\le\delta\le\pi$, $1\le i\le n$, $B\subseteq M$ и выполнено условие

$$\int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^{|B|}} \min_{j\in B}\omega_j\left(\delta_j\right)\prod_{j\in B}\frac{d\delta_j}{\delta_j}<\infty.$$

Тогда если $k\in B$, то

$$\omega_k\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left(\delta,s_k\right)s_k^{-1}\min_{i\in B}\omega_i\left(s_i\right)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}$$

при $\delta\to 0+$, а если $k\in M\setminus B$, то

$$\omega_k\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^2)} = O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left\{\min_{i\in B}\omega_i\left(s_i\right),\omega_k(\delta)\right\}\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}$$

при $\delta\to 0+$.

Теорема 2. Пусть $B\subseteq M$, а ω_i $(1\le i\le n)$ - модуль непрерывности. Тогда существуют функции $f,g\in C\left(T^n\right)$ такие, что

$$\omega_i\left(f;\delta\right)_{C(T^n)}\le\omega_i(\delta)$$

и

$$\omega_i\left(g;\delta\right)_{C(T^n)}\le\omega_i(\delta)$$

при $0\le\delta\le\pi, 1\le i\le n$, но если $k\in B$, то имеет место неравенство

$$\omega_k\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)}\ge\frac{1}{16\pi^{|B|}}\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left(\delta,s_k\right)s_k^{-1}\min_{i\in B}\omega_i\left(s_i\right)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i$$

при $0 \le \delta \le \frac{\pi}{2}$, а если $k \notin B$ (в случае $B \ne M$), то имеет место неравенство

$$\omega_k\left(\widetilde{g}_B;\delta\right)_{C(T^n)} \ge \left(n-|B|\right)^{-1}\pi^{|B|} \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min\left\{\min_{i\in B}\omega_i\left(s_i\right),\omega_k(\delta)\right\}\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i \,.$$

Отметим, что из теорем 1 и 2 В.А. Окулова вытекают оценки М.М.Лекишвили [15],[17] модулей непрерывности сопряженных функций.

Как мы отмечали выше, для $\alpha=1$ класс $H(\omega_2;C(T))$, где $\omega_2(\delta)=\delta$, инвариантен относительно сопряженной функции $\widetilde{f}$ [10]. Но, как показал И.Е.Жак [10] в двумерном случае класс $H\left(\omega_2;C\left(T^2\right)\right)$, где $\omega_2(\delta)=\delta$, неинвариантен относительно оператора сопряжения. В этом случае имеет место следующая теорема: а) Если $f \in H\left(\omega_2;C\left(T^2\right)\right)$, где $\omega_2(\delta)=\delta$, то

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O(\delta),$$
$$\delta \to 0+, i=1,2.$$

$$\omega_{2,j}\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta|\ln\delta|\right),$$
$$\delta \to 0+,\ i \ne j, i=1,2.$$

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{f}_{\{1,2\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta|\ln\delta|\right),$$
$$\delta \to 0+, i=1,2.$$

б) Полученные оценки являются точными.

В работе [16] М.М.Лекишвили расмотрел многомерный аналог вышеприведенной теоремы И.Е. Жака [10]. В частности, он даказал следующую теорему: а) Пусть $f \in H\left(\omega_2;C\left(T^n\right)\right)$ $(n \ge 2)$, где $\omega_2(\delta)=\delta$. Тогда

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\delta|\ln\delta|^{|B|-1}\right),$$
$$\delta \to 0+,\ i \in B,$$

$$\omega_j\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\delta|\ln\delta|^{|B|}\right),$$
$$\delta \to 0+,\ j \in M \setminus B;$$

б) Полученные в пункте (а) оценки неусиляемы.

В статье [18] нами было изучено деформации классов $H(\omega_2;C(T^n))$ относительно оператора $\widetilde{f}_B$ в том случае, когда модуль непрерывности второго порядка ω_2 удовлетворяет условию Зигмунда. Имеет место

Теорема. а) Если функция $f \in H(\omega_2;C(T^n))$ $(n \geq 2)$ и модуль непрерывности второго порядка ω_2 удовлетворяет условию Зигмунда, то

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1}\right),$$
$$\delta \to 0+,\ i \in B,$$
$$\omega_{2,j}\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|}\right),$$
$$\delta \to 0+,\ j \in M \setminus B;$$

б) Существует функция $F \in H(\omega_2;C(T^n))$ $(n \geq 2)$ такая, что

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{F}_B;\delta\right)_{C(T^n)} \geq C\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1},$$
$$0 \leq \delta \leq \delta_0,\ \ i \in B,$$
$$\omega_{2,j}\left(\widetilde{F}_B;\delta\right)_{C(T^n)} \geq C\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|},$$
$$0 \leq \delta \leq \delta_0,\ j \in M \setminus B,$$

где C и δ_0 некоторые положительные константы.

Нужна также отметит, что свойства операторов $\widetilde{f}_B$, близкие к кругу задач, рассматриваемых в настоящей главе диссертации, изучались в работах А.Г.Джваршеишвили, В.М.Кокилашвили, А.И.Буадзе, Л.В.Жижиашвили и других.

В первой главе диссертации изучаются деформации классов $H(\omega_{k,i};i\in M;C(T^n))$ $(n\geq 2,k\geq 2)$ относительно действующего в них многомерного оператора сопряжения $\widetilde{f}_B$. Получены прямые оценки и установлена точность этих оценок. В параграфе 1.3 данной главы диссертации доказана теорема о нарушении инвариантности классов функции $H(\omega_{k,i};i\in M;C(T^n))$ $(n\geq 2,k\geq 3)$ относительно оператора сопряжения $\widetilde{f}_B$ в том случае, когда модули непрерывности порядка k $\omega_{k,i}$ $(i=1,\dots,n)$ удовлетворяют условию Зигмунда. Соответствующими примерами показана точность полученных результатов.

Используя обозначения параграфа 1.1 главы 1, результат параграфа 1.3 можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1.3.1. а) Пусть $f\in H(\omega_{k,i},i\in M;C(T^n))$ $(n\geq 2,\ k\geq 3)$ и модуль непрерывности порядка k $\omega_{k,i}(i=1,\dots,n,)$ удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B\in\left[\bigcap_{i\in B}H_i\left(\omega_{k,i}|\ln|^{|B|-1};C(T^n)\right)\right]\bigcap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B}H_j\left(\omega_{k,j}|\ln|^{|B|};C(T^n)\right)\right];$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_{k,i},i\in M;C(T^n))$ $(n\geq 2,\ k\geq 3)$ такая, что

$$\omega_{k,i}\left(\widetilde{F}_B;\delta\right)_{C(T^n)}\geq C\omega_{k,i}(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1},$$
$$0\leq\delta\leq\delta_0,\ i\in B,$$
$$\omega_{k,j}\left(\widetilde{F}_B;\delta\right)_{C(T^n)}\geq C\omega_{k,j}(\delta)|\ln\delta|^{|B|},$$
$$0\leq\delta\leq\delta_0,\ j\in M\setminus B,$$

где C и δ_0 -некоторые положительные константы.

Параграф 1.4 первой главы диссертации содержит оценки частных модулей непрерывности второго порядка сопряженной функции многих переменных в пространстве $C(T^n)$. Именно, справедлива следующая

Теорема1.4.1. а) Пусть функция $f \in H(\omega_2; C(T^n))$ и для любого $B \subseteq M$

$$\int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^{|B|}} \min_{i \in B} \omega_2(s_i) \prod_{i \in B} \frac{ds_i}{s_i} < +\infty,$$

тогда если $k \in B$, то

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B; \delta\right)_{C(T^n)} = O\left\{ \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min\left(\delta^2, s_k^2\right) s_k^{-2} \min_{i \in B} \omega_2(s_i) \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i \right\}$$

при $\delta \to 0+$, а если же $k \in M \setminus B$, то

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B; \delta\right)_{C(T^n)} = O\left\{ \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min\{\min_{i \in B} \omega_2(s_i), \omega_2(\delta)\} \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i \right\},$$

при $\delta \to 0+$.

б) Для любого $B \subseteq M$ существуют функции F и G такие, что $F, G \in H(\omega_2; C(T^n))$, но если $k \in B$, то имеет место неравенство

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{F}_B; \delta\right)_{C(T^n)} \geq C \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min\left(\delta^2, s_k^2\right) s_k^{-2} \min_{i \in B} \omega_2(s_i) \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i$$

при $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{4}$, а если $k \notin B$ (в случае $B \neq M$), то имеет место неравенство

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{G}_B; \delta\right)_{C(T^n)} \geq C \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min\{\min_{i \in B} \omega_2(s_i) \omega_2(\delta)\} \prod_{i \in B} s_i^{-1} ds_i,$$

при $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{4}$, $C = const > 0$.

Втарая глава диссертации касается деформации некоторых функциональных классов в пространстве $L(T^n)$. Получены прямые результаты и, соответсвующими примерами, показана точность этих оценок.

Как уже отмечено выше, Харди и Литтльвуд показали, что класс $Lip(\alpha;L(T))\,(0<\alpha<1)$ инвариантен относительно оператора сопряжения $\widetilde{f}$. В параграфе 2.2 главы 2 диссертации полньностю изучены деформации классов $H(\omega_1,\ldots,\omega_n;L(T^n))$ относительно оператора $\widetilde{f}_B$, из которых следует, что уже в многомерном случае не имеют место аналоги теоремы Харди-Литтльвуда, т.е., классы $Lip(\alpha;L(T^n))\,(0<\alpha<1)$ неинвариантны относительно многомерного оператора сопряжения. Имеет место следующая

Теорема 2.2.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega_1,\ldots,\omega_n;\ L(T^n))$ $(n\geq 2)$ и модули непрерывности ω_i $(i=1,\ldots,\ n)$ удовлетворяют условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B\in\left[\bigcap_{i\in B}H_i(\omega_i|\ln|^{|B|-1};L(T^n))\right]\bigcap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B}H_j(\omega_j|\ln|^{|B|};L(T^n)\right];$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_1,\ldots,\omega_n;\ L(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\omega_i(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)}\geq C\omega_i(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, $i\in B$,

$$\omega_j(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)}\geq C\omega_j(\delta)|\ln\delta|^{|B|}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, $j\in M\setminus B$,

где C и δ_0 положительные константы.

В параграфах 2.3 и 2.4 изучаются аналогичние вопросы соответственно для классов $H(\omega_2;L(T^n))$ и $H(\omega_{k,i};i\in M;L(T^n))$

$(n \geq 2, k \geq 3)$. Получены прямые оценки и установлена точность полученных оценок.

Справедливы

Теорема 2.3.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega_2;L(T^n))$ и модуль непрерывности второго порядка $\omega_2 (n\geq 2)$ удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B \in \left[\bigcap_{i\in B} H_i\left(\omega_2|\ln|^{|B|-1}; L(T^m)\right)\right]\cap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B} H_j\left(\omega_2|\ln|^{|B|}; L(T^m)\right)\right],$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_2;L(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\omega_{2,i}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1}$$

$$(i\in B,\ 0<\delta\leq\delta_0);$$

$$\omega_{2,j}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|}$$

$$(j\in M\setminus B,\ 0<\delta\leq\delta_0),\ C=const.$$

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что утверждение Зигмунда об инвариантности класса $H(\omega_2;L(T))$, где $\omega_2(\delta)=\delta$, относительно действующего в нем оператора сопряжения $\widetilde{f}$, вообще говоря, не имеет место в многомерном случае.

Теорема 2.4.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^n))$ $(n\geq 2,\ k\geq 3)$ и модуль непрерывности порядка k $\omega_{k,i}$ $(i=1,\dots,n)$ удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B \in \left[\bigcap_{i\in B} H_i\left(\omega_{k,i}|\ln|^{|B|-1}; L(T^n)\right)\right]\cap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B} H_j\left(\omega_{k,j}|\ln|^{|B|}; L(T^n)\right)\right];$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^n))$ $(n\geq 2,\ k\geq 3)$ такая, что

$$\omega_{k,i}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\omega_{k,i}(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $i\in B$,

$$\omega_{k,j}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\omega_{k,j}(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $i\in M\backslash B$,

где C и δ_0 положительные константы, не зависящие от δ.

В параграфе 2.5 исследуются некоторые структурные свойства сопряженных в смысле Чезари функций многих переменных в зависимости от частных модулей непрерывности исходной функции. Так получены точные оценки частных интегральных модулей непрерывности сопряженной функции, у которой исходная функция имеет аналогичные модули непрерывности.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 2.5.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega, L(T^n))$, где модуль непрерывности ω удовлетворяет условию (Z), а условие (Z_1) не выполнено, причем для $B\subseteq M$

$$\int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^{|B|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}\frac{ds}{s} < \infty. \tag{1}$$

Тогда $\widetilde{f}_B \in L(T^n)$ и, если $k\in B$, то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} = O\left\{\delta\int_\delta^\pi \frac{\omega(s)}{s^2}ds\cdot\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}\right\}$$

при $\delta\to0+$, а если $k \overline{\in} B$ (в случае, когда $B\neq M$), то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} = O\{\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}\}$$

при $\delta\to0+$.

б) Существуют функции F и G такие, что $F,G\in H(\omega;L(T^n))$, но

$$\omega_k(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\delta\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds|\ln\delta|^{|B|-1}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $k\in B$,

$$\omega_k(\widetilde{G}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\omega(\delta)|\ln\delta|^{|B|}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $k \overline{\in} B$,

где C и δ_0 - положительные константы, не зависящие от δ.

Теорема 2.5.2. а) Пусть функция $f\in H(\omega;L(T^n))$, где модуль непреривности ω удовлетворяет условию (Z_1), а условие (Z) не выполнено, причем для $B\subseteq M$ выполнено (1). Тогда $\widetilde{f}_B\in L(T^n)$ и, если $k\in B$, то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} = O\left\{\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}$$

при $\delta\to 0+$, а если $k \overline{\in} B$ (в случае, когда $B\neq M$), то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} = O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i + \omega(\delta)\,|\ln\delta|^{|B|}\right\}$$

при $\delta\to 0+$;

б) Существуют функции F и G такие, что $F,G\in H(\omega,L(T^n))$, однако

$$\omega_k(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $k\in B$,

$$\omega_k(\widetilde{G}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i + \omega(\delta)\,|\ln\delta|^{|B|}\right\}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $k \overline{\in} B$,

где C и δ_0 — положительные константы, не зависящие от δ.

В настоящее время известны различные постановки задач и установлены глубокие результаты, связанные с аппроксимативными свойствами средних Чезаро, Пуассона-Абеля, общих линейних средних рядов Фурье функции f и их сопряженных рядов как в одномерном, так и многомерных случаях. Многие из них изложены в монографиях, в трудах международных конференций, школ и симпозиумов.

В третьей главе диссертации рассмотрены некоторые аппроксимативные свойства средних Чезаро положительного порядка сопряженных тригонометрических рядов к ряду Фурье функции f из классов $H(\omega; L^p(T^n))$ $(n \geq 2, p = 1$ или $p = \infty)$.

В параграфе 3.2 главы 3 диссертации доказана следующая

Теорема 3.2.1. а) Пусть функция $f \in H(\omega, C(T^n))$ $(n \geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, тогда

$$\sup_{x \in T} \left| t_{m'}^{\alpha'}(x,\dots,x,f,B) - \tilde{f}_B\left(x,\dots,x;\frac{\pi}{m'}\right) \right| = O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|}\right],$$

$$m \to \infty, B \subset M, B \neq M;$$

$$\sup_{x \in T} \left| t_{m'}^{\alpha'}(x,\dots,x,f,M) - \tilde{f}_M\left(x,\dots,x;\frac{\pi}{m'}\right) \right| = O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1}\right], \quad m \to \infty,$$

где $\alpha' = (\alpha,\dots,\alpha)$, $\alpha \in (0,+\infty)$ и $m' = (m,\dots,m)$, $\dfrac{\pi}{m'} = \left(\dfrac{\pi}{m},\dots,\dfrac{\pi}{m}\right)$, $m \in N$;

б) Существует функция $F \in H(\omega, C(T^n))$ $(n \geq 2)$ такая, что

$$\left| t_{m'}^{\alpha'}(x,\dots,x,f,B) - \tilde{f}_B\left(x,\dots,x;\frac{\pi}{m'}\right) \right| \geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|},$$

$$m \to \infty, \ B \subset M, B \neq M,$$

$$\left| t_{m'}^{\alpha'}(x,\dots,x,f,B) - \tilde{f}_M\left(x,\dots,x;\frac{\pi}{m'}\right) \right| \geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1},$$

$$m \to \infty, \ C = const > 0.$$

В параграфе 3.3 доказана

Теорема 3.3.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega,L(T^n))$ $(n\geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,f,B)-\tilde{f}_B\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)}=O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|}\right],$$

$m\to\infty$, $B\subset M$, $B\neq M$;

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,f,B)-\tilde{f}_M\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)}=O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1}\right],\ m\to\infty,$$

где $\alpha'=(\alpha,\ldots,\alpha)$, $\alpha\in(0,+\infty)$ и $m'=(m,\ldots,m)$, $\frac{\pi}{m'}=\left(\frac{\pi}{m},\ldots,\frac{\pi}{m}\right)$, $m\in N$;

б) Существует функция $F\in H(\omega,C(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,F,B)-\tilde{F}_B\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)}\geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|},\quad B\neq M;$$

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,F,M)-\tilde{F}_M\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)}\geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1},$$

где C некоторая положительная константа.

Четвертая глава диссертации касается аппроксимативных свойствах средних Пуассона-Абеля сопряженных тригонометрических рядов для ряда Фурье функции f из классов $H(\omega;L^p(T^n))$ $(n\geq 2, p=1$ или $p=\infty)$.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 4.2.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega;\ C(T^n))$ $(n\geq 2)$, где модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\sup_{x\in T}\left|\tilde{f}(x,\ldots,x,r',B)-\tilde{f}_B(x,\ldots,x,(1-r)')\right|=O\left(\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|}\right),$$

$r\in[0,1)$, $r\to 1-$, $B\subset M$, $B\neq M$;

$$\sup_{x\in T}\left|\widetilde{f}(x,\dots,x,r',M)-\widetilde{f}_M(x,\dots,x,(1-r)')\right|=O\left(\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}\right),$$

$r\in[0,1)$, $r\to 1-$,

где $r'=(r,\dots,r)$, $(1-r)'=(1-r,\dots 1-r)$;

б) Существует функция $F\in H(\omega;C(T^n))$ $n\geq 2$, такая, что

$$\left|\widetilde{F}(x,\dots,x,r',B)-\widetilde{F}_B(x,\dots,x,(1-r)')\right|\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|},$$

$r\in[0,1)$, $r\to 1-$, $B\subset M$, $B\neq M$,

$$\left|\widetilde{F}(x,\dots,x,r',B)-\widetilde{F}_M(x,\dots,x,(1-r)')\right|\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1},$$

$r\in[0,1)$, $r\to 1-$, $C=const>0$.

Теорема 4.3.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega;L(T^n))$ $(n\geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, тогда

$$\left\|\widetilde{f}(\cdot,r',B)-\widetilde{f}_B(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}=O\left[\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|}\right],$$

$B\subset M$, $B\neq M$, $r\in[0,1)$, $r\to 1-$,

$$\left\|\widetilde{f}(\cdot,r',M)-\widetilde{f}_M(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}=O\left[\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}\right],$$

$r\in[0,1)$, $r\to 1-$,

где $r'=(r,\dots,r)$, $(1-r)'=(1-r,\dots,1-r)$;

б) Существует функция $F\in H(\omega;L(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\left\|\widetilde{F}(\cdot,r',B)-\widetilde{F}_B(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|},$$

$B\subset M$, $B\neq M$, $r\to 1-$,

$$\left\|\widetilde{F}(\cdot,r',M)-\widetilde{F}_M(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1},\quad r\to 1-,$$

где C некоторая положительная константа.

Результаты диссертации в разное время докладывались на научных семинарах кафедры теории функции и функционального анализа Тбилисского государственного университета им. И. Джавахишвили, на семинарах отделения математичекого анализа математичекого института им. А.Размадзе, на семинарах кафедры общей математики Грузинского технического университета, и на расширенном заседании семинара математического общества Грузии.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [32]-[42].

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту профессору М.М.Лекишвили и заведующему кафедрой теории функции и функционального анализа Тбилисского государственного университета академику Л.В.Жижиашвили за постоянное внимание к работе.

Глава 1

Об оценках частных модулей непрерывности высших порядков сопряженной функции многих переменных в пространстве $C(T^n)$

§1.1. Некоторые обозначения и определения

Символом $R^n\,(n=1,2,...;R^1=R)$ будем обозначать n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,...,x_n)$ (каждая x_i деиствительное число) с обычными линейными операциями. Предполагается, что $N_0=\{0,1,2,...\}$, $N=\{1,2,...$. Пусть $M=\{1,2,...,n\}\,(n\in N, n\geq 2)$ и $B=\{i_1,i_2,...,i_k\}$ $(i_l<i_k\ при\ l<k)$ — произвольное непустое подмножество из M. Символом $|B|$ обозначим число элементов множества B, т.е. $|B|=Card(B)$, а x_B будет означать такую точку из R^n, координаты которой с индексами из множества $M\setminus B$ непременно нули. Пусть $R^n(B)$ - гиперплоскость, натянутая лишь на координатные векторы, индексы которых составляют множество B. Используются и следующие обозначения:

$$T^n=[-\pi,\pi]^n, T^n(B)=T^n\bigcap R^n(B)\ ,$$

$$T^n(\varepsilon)=\prod_{i=1}^{n}\{[-\pi,-\varepsilon_i]\bigcup[\varepsilon_i,\pi]\},\ \varepsilon_i\in(0,\pi)\ (i=1,...,n),$$

$$T^n(B,\varepsilon)=T^n(\varepsilon)\bigcap R^n(B),$$

причем $T^1=T=[-\pi,\pi]$.

Далее, $C(T^n)$, как обычно, означает пространство непрерывных, 2π-периодических по каждой переменной функции $f:T^n\to R$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C(T^n)} = \max_{x\in T^n} |f(x)|,$$

а $L^p(T^n)\,(1\le p<\infty)$ – пространство p-суммируемых по лебегу, 2π-периодических по каждой переменной функции $f:T^n\to R$ с нормой

$$\|f\|_{L^p(T^n)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Будем считать, что при $p=+\infty$ $L^\infty(T^n)=C(T^n)$ и соответственно $\|\ \|_{L^\infty(T^n)}=\|\ \|_{C(T^n)}$.

Пусть $f\in L^p(T^n)$ $(1\le p\le\infty)$. Тогда для всех $x\in T^n$ и $h\in R$ положим

$$\Delta_k^{(i)}(h)f(x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(x+jh),$$

и через $\Delta(f,x,h_B)$ обозначаем выражение, которое получается последовательным применением операции Δ_k по тем переменным, индексы которых составляют множество B. Будем также предполагать, что при $h\in R^n$

$$\Delta_k(f,x,h) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1},\ldots,x_n).$$

Теперь определим частный, смешанный и полный модули непрерывности порядка k функции $f\in L^p(T^n)$ соответственно равенствамы: (см. например С.М. Никольский [21, с.145], А.Ф.Тиман [28, с.126]):

$$\omega_{k,i}(f;\delta)_{L^p(T^n)} = \sup_{|h|\le\delta}\left\|\Delta_k^{(i)}(h)f(\cdot)\right\|_{L^p(T^n)},$$

$$0<\delta\le\pi,\ i=1,\ldots,n,$$

$$\omega_{k,B}(f;\delta)_{L^p(T^n)} = \sup_{\substack{|h_i|\le\delta_i\\ i\in B}} \left\|\Delta_k(f,\cdot,h_B)\right\|_{L^p(T^n)},$$

$$0<\delta_i\le\pi,\ i\in B,$$

$$\omega_k(f;\delta)_{L^p(T^n)} = \sup_{\substack{|h_i|\le\delta_i\\ i\in M\ \ i}} \left\|\Delta_k(f,\cdot,h_M)\right\|_{L^p(T^n)},$$

$$0<\delta_i\le\pi,\ i\in M,$$

Если функция $f\in L^p(T^n)$, то выражение

$$\widetilde{f}_B(x)=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|}\int\limits_{T^{|B|}} f(x+s_B)\prod_{i\in B} ctg\frac{s_i}{2}ds_B, \qquad (1.1.1)$$

следуя Л.В.Жижиашвили [11,с.182], назовем сопряженной функцией n переменных по совокупности тех из них, индексы которых составляют множество B. При $n=1$ $\widetilde{f}_B$ обозначим через $\widetilde{f}$. Следует добавить, что по определению

$$\widetilde{f}_B(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\widetilde{f}_B(x,\varepsilon),$$

где

$$\widetilde{f}_B(x,\varepsilon)=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{|B|}\int\limits_{T^n(B,\varepsilon)} f(x+s_B)\prod_{i\in B} ctg\frac{s_i}{2}ds_B \qquad (1.1.2)$$

и $\varepsilon\to 0+$ означает, что $\varepsilon_i\to 0+$ для каждого i $(i\in B)$.

Определение 1. Следуя С.Н. Бернштейну [6], мы будем называть функцию f почти возрастающей (соответственно почти убывающей на $[a,b]$, если существует такое постоянное число A, что

$$f(t_1)\le Af(t_2)$$

при $a\le t_1\le t_2\le b$ в случае почти возрастания и соответственно

$$f(t_1)\ge Af(t_2)$$

при $a\le t_1\le t_2\le b$ в случае почти убывания.

Определение 2. Неубывающую непрерывную и полуаддитивную на $[0,\pi]$ функцию ω, которая в нуле равна нулю, называется модулем непрерывности (порядка 1) [20].

Определение 3. Функция $\omega_k : [0,\pi] \to R$ $(k \geq 2)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $\omega_k(0) = 0$,
2. ω_k не убывает,
3. ω_k непрерывна,
4. $\dfrac{\omega_k(t)}{t^k}$ почти убывает на $[0,\pi]$,

называется модулем непрерывности порядка k [8, с. 167].

Пусть теперь $\omega_{k,i}$ $(i = 1,\ldots,n)$ – модули непрерывности порядка k. Тогда символом $H_i(\omega_{k,i}; L^p(T^n))$ $(1 \leq p \leq \infty$, $n \geq 2$, $i = 1,\ldots,n)$ обозначим множество всех тех функции $f \in L^p(T^n)$, для каждой из которых

$$\omega_{k,i}(f;\delta)_{L^p(T^n)} = O(\omega_{k,i}(\delta)),$$

$$\delta \to 0+,\ i = 1,\ldots,n.$$

Положим

$$H(\omega_{k,i}, i \in M; L^p(T^n)) = \bigcap_{i=1}^{n} H_i(\omega_{k,i}; L^p(T^n)) .$$

Замечание. Если для любого i $(i = 1,\ldots,n)$ $\omega_{k,i}(\delta) = \omega_k(\delta)$, то класс $H(\omega_{k,i}, i \in M; L^p(T^n))$ обозначим через $H(\omega_{k,}; L^p(T^n))$, а если же $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, то класс $H(\delta^\alpha; L^p(T^n))$ обозначим через $\mathrm{Lip}(\alpha; L^p(T^n))$.

Определение 4. Скажем, что модуль непрерывности порядка k ω_k удовлетворяет условию Зигмунда, если выполнено следующее условие

$$\int_0^\delta \frac{\omega_k(u)}{u}du + \delta^k \int_\delta^\pi \frac{\omega_k(u)}{u^{k+1}}du = O(\omega_k(\delta)),\ \delta \to 0+.$$

§1.2. некоторые известные результати и вспомогательные утверждения

Многими математиками изучены разные вопросы, связанные со свойствамы сопряженной функции как одного так и многих переменных. Здесь мы не будем подробно излагать все результаты, полученные в этом направлении. Однако приведем только тех из них, которые непосредственно связаны с изучаемым в этой главе диссертации свойством сопряженной функции.

В 1916 году И.И. Привалов (см. например, [4, с. 560]) доказал, что если функция $f \in Lip(\alpha;C(T))$, $0<\alpha<1$, то и $\widetilde{f} \in Lip(\alpha;C(T))$, причем утверждение перестает быть верным при $\alpha=1$.

В дальнейшем эта теорема обобщалась в различных направлениях и в результате исследований многих авторов сложилась определенная проблематика, в которой в терминах модулей непрерывности различных порядков находятся прямые и обратные оценки сопряженной функции через те же характеристики плотности.

Так, в 1924 году Зигмунд (см. например, [14, с. 199]) установил более сильное утверждение: если функция $f \in C(T)$ и

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(f;t)_{C(T)}}{t} dt < +\infty,$$

то $\widetilde{f}$ существует всюду, $\widetilde{f} \in C(T)$ и

$$\omega\left(\widetilde{f};\delta\right)_{C(T)} \le A\left[\int_0^{\delta} \frac{\omega(f;t)_{C(T)}}{t} dt + \delta\int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(f;t)_{C(T)}}{t^2} dt\right], \quad 0 < \delta \le \frac{\pi}{2}. \qquad (1.2.1)$$

Из этого утверждения следует, что класс $H(\omega;C(T))$ инвариантен относительно оператора $\widetilde{f}$, если ω удовлетворяет так называемому условию Зигмунда.

Зигмунд же [13], в 1945 году показал, что для модулей непрерывности второго порядка аналог теоремы И. И. Привалова имеет место и при $\alpha = 1$, т.е., если

$$\omega_2(f;\delta)_{C(T)} \le A(f)\delta,$$

то

$$\omega_2\left(\widetilde{f};\delta\right)_{C(T)} \le A(f)\delta,$$

где $A(f)$ - абсолютная константа, зависящая лишь от функции f. Н.К Бари [2], Н.К Бари и С.Б. Стечкин [3] установили ряд новых утверждений, связанных с поведением модулей непрерывности порядка k $(k \in N)$ функции f и $\widetilde{f}$. В работе [3] ставится и решается задача: пусть на $[0,\pi]$ задана непрерывная монотонно возрастающая функция φ и $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0+$. Какие условия, наложенные на φ будут необходимыми и достаточными для эквивалентности соотношений

$$\omega(f;\delta)_{C(T)} \le A(f)\varphi(\delta)$$

и

$$\omega\left(\widetilde{f};\delta\right)_{C(T)} \le A\left(f\right)\varphi(\delta).$$

При решении этой задачи установлена неусиляемость оценки (1.2.1) Зигмунда в следующем смысле:

Пусть ω модуль непрерывности, для которого

$$\int_0^{\pi} \frac{\omega(t)}{t}dt < +\infty.$$

Тогда существует функция $f \in C(T)$ такая, что

$$A_1^*\left(f\right)\omega(\delta) \le \omega\left(f;\delta\right)_{C(T)} \le A\left(f\right)\omega(\delta), \quad (\text{т.е. } \omega\left(f;\delta\right)_{C(T)} \sim \omega(\delta)), \ \widetilde{f} \in C(T)$$

и

$$\omega\left(\widetilde{f};\delta\right)_{C(T)} \ge \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t}dt + \delta\int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2}dt\right].$$

Сопряженные функции двух переменных, видимо, впервые были рассмотрены Л. Чезари [31]в 1938 году. Ему принадлежит следующая теорема: если $f \in Lip(\alpha;C(T^2))$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{j\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}\right),$$

$$\delta \to 0+, \ i,j = 1,2,$$

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{1,2\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}\left|\ln\delta\right|\right),$$

$$i = 1,2.$$

И.Е. Жак [9] уточнил утверждения Чезари. В частности, он доказал, что если $f \in Lip(\alpha;C(T^2))$, $0 < \alpha < 1$, то

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}\right),$$

$$i = 1,2,$$

$$\omega_j\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}\left|\ln\delta\right|\right),$$

$$\delta \to 0+, \ i \ne j, \ i,j = 1,2,$$

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_{\{1,2\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O\left(\delta^{\alpha}\left|\ln\delta\right|\right),$$

$$\delta \to 0+, i = 1,2.$$

В этой же работе И.Е. Жака [9] приводится пример функции, принадлежащий Е.М. Ландису, которий показывает, что полученные оценки являются точными по порядку.

В дальнейшем в работах [15]и [17] М.М. Лекишвили обобщил эти утверждения. Он получил окончательные результаты, выясняющие полный характер нарушения инвариантности классов $Lip(\alpha;C(T^n))$ $(0<\alpha<1)$ и $H(\omega;C(T^n))$ относительно действующих в них операторов $\widetilde{f}_B$. В частности, в работе [17] доказана следующая

Теорема. а) Если $f\in H(\omega;C(T^n))$ $(n\geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, то

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)}=O\left(\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}\right),$$

$$\delta\to 0+,\ i\in B,$$

$$\omega_j\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)}=O\left(\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}\right),$$

$$\delta\to 0+,\quad j\in M\setminus B;$$

б) Полученные в пункте (а) оценки неусиляемы.

Аналогичные вопросы для классов $H(\omega_i, i\in M;C(T^n))$ были изучены в работе [22] В.А. Окулова. Именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $f\in C(T^n)$, $\omega_i(f;\delta)_{C(T^n)}=\omega_i(\delta)$ при $0\leq\delta\leq\pi$, $1\leq i\leq n$, $B\subseteq M$ и выполнено условие

$$\int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^{|B|}}\min_{j\in B}\omega_j(\delta_j)\prod_{j\in B}\frac{d\delta_j}{\delta_j}<\infty.$$

Тогда если $k\in B$, то

$$\omega_k\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min(\delta, s_k) s_k^{-1} \min_{i\in B} \omega_i(s_i) \prod_{i\in B} s_i^{-1} ds_i\right\}$$

при $\delta \to 0+$, а если $k \in M \setminus B$, то

$$\omega_k\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^2)} = O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min\left\{\min_{i\in B} \omega_i(s_i), \omega_k(\delta)\right\} \prod_{i\in B} s_i^{-1} ds_i\right\}$$

при $\delta \to 0+$.

Теорема 2. Пусть $B \subseteq M$, а ω_i $(1 \le i \le n)$ - модуль непрерывности. Тогда существуют функции $f, g \in C(T^n)$ такие, что

$$\omega_i(f;\delta)_{C(T^n)} \le \omega_i(\delta)$$

и

$$\omega_i(g;\delta)_{C(T^n)} \le \omega_i(\delta)$$

при $0 \le \delta \le \pi, 1 \le i \le n,$ но если $k \in B$, то имеет место неравенство

$$\omega_k\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} \ge \frac{1}{16\pi^{|B|}} \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min(\delta, s_k) s_k^{-1} \min_{i\in B} \omega_i(s_i) \prod_{i\in B} s_i^{-1} ds_i$$

при $0 \le \delta \le \dfrac{\pi}{2}$, а если $k \notin B$ (в случае $B \ne M$), то имеет место неравенство

$$\omega_k(\widetilde{g}_B;\delta)_{C(T^n)} \ge (n - |B|)^{-1} \pi^{|B|} \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min\left\{\min_{i\in B} \omega_i(s_i), \omega_k(\delta)\right\} \prod_{i\in B} s_i^{-1} ds_i .$$

Отметим, что из теорем 1 и 2 В.А. Окулова вытекают оценки М.М.Лекишвили [15],[17] модулей непрерывности сопряженных функций.

Как мы отмечали выше, для $\alpha = 1$ класс $H(\omega_2; C(T))$, где $\omega_2(\delta) = \delta$, инвариантен относительно сопряженной функции $\widetilde{f}$ [10]. Но, как показал И.Е.Жак [10] в двумерном случае класс $H(\omega_2; C(T^2))$, где $\omega_2(\delta) = \delta$, неинвариантен относительно оператора сопряжения. В этом случае имеет место следующая теорема: а) Если $f \in H(\omega_2; C(T^2))$, где $\omega_2(\delta) = \delta$, то

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O(\delta), \quad \delta \to 0+, i = 1,2.$$

$$\omega_{2,j}\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O(\delta|\ln\delta|), \quad \delta \to 0+, i \neq j, i = 1,2.$$

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{f}_{\{1,2\}};\delta\right)_{C(T^2)} = O(\delta|\ln\delta|), \quad \delta \to 0+, i = 1,2.$$

б) Полученные оценки являются точными.

В работе [16] М.М.Лекишвили расмотрел многомерный аналог вышеприведенной теоремы И.Е. Жака [10]. В частности, он даказал следующую теорему: а) Пусть $f \in H(\omega_2; C(T^n))$ $(n \geq 2)$, где $\omega_2(\delta) = \delta$. Тогда

$$\omega_i\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\delta|\ln\delta|^{|B|-1}\right), \quad \delta \to 0+, \ i \in B,$$

$$\omega_j\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\delta|\ln\delta|^{|B|}\right), \quad \delta \to 0+, \ j \in M \setminus B;$$

б) Полученные в пункте (а) оценки неусиляемы.

В статье [18] нами было изучено деформации классов $H(\omega_2; C(T^n))$ относительно оператора $\widetilde{f}_B$ в том случае, когда модуль непрерывности второго порядка ω_2 удовлетворяет условию Зигмунда. Имеет место

Теорема. а) Если функция $f \in H(\omega_2; C(T^n))$ $(n \geq 2)$ и модуль непрерывности второго порядка ω_2 удовлетворяет условию Зигмунда, то

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\omega_2(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}\right),$$
$$\delta \to 0+,\ i \in B,$$
$$\omega_{2,j}\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)} = O\left(\omega_2(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}\right),$$
$$\delta \to 0+,\ j \in M \setminus B;$$

б) Существует функция $F \in H(\omega_2; C(T^n))$ $(n \geq 2)$ такая, что

$$\omega_{2,i}\left(\widetilde{F}_B;\delta\right)_{C(T^n)} \geq C\omega_2(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|-1},$$
$$0 \leq \delta \leq \delta_0,\ i \in B,$$
$$\omega_{2,j}\left(\widetilde{F}_B;\delta\right)_{C(T^n)} \geq C\omega_2(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|},$$
$$0 \leq \delta \leq \delta_0,\ j \in M \setminus B,$$

где C и δ_0 некоторые положительные константы.

Нужна также отметит, что свойства операторов $\widetilde{f}_B$, близкие к кругу задач, рассматриваемых в настоящей главе диссертации, изучались в работах А.Г.Джваршеишвили, В.М.Кокилашвили, А.И.Буадзе, Л.В.Жижиашвили и других.

Теперь сформулируем те утверждения, которые играют заметную роль в получении результатов в первой главы диссертации.

Лемма 1.2.1. ([3]). Если модуль непрерывности порядка k ω_k удовлетворяет условию Зигмунда, то существует такое число α $(0 < \alpha < k)$, что функция $\dfrac{\omega_k(t)}{t^\alpha}$ почти убывает на $(0, 1/l^2]$.

Лемма 1.2.2. ([3]) Если модуль непрерывности порядка k ω_k удовлетворяет условию Зигмунда, то существует такое число β $(0<\beta<k)$,что функция $\dfrac{\omega_k(t)}{t^\beta}$ почти возрастает.

Лемма 1.2.3. Если $\omega_{k+1}(f;t)_{L^p(T)}>0$ $(p=1$, $p=\infty$) при $t>0$,то при всех $t\in[0,1]$ $\omega_k(f;t)_{L^p(T)}$ будеть оцениваться через $\omega_{k+1}(f;t)_{L^p(T)}$ при помощи неравенств:

$$(\omega_k(f;t)_{L^p(T)})^2 \le A\,\omega_{k+1}(f;t)_{L^p(T)},$$

$$\omega_k(f;t^2)_{L^p(T)} \le A\,\omega_{k+1}(f;t)_{L^p(T)}, \quad A=const>0.$$

Заметим, что при k=1, эта - теорема Тригуба (см.[8,с.172]), а в случае k>1 лемма 1.2.3 доказывается точно так же как и теорема Тригуба.

Лемма 1.2.4. ([3]) Пусть f непрерывная, периодическая функция. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{C(T)},$$

то функция $\widetilde{f}$ нерерывна и

$$\omega_k\left(\widetilde{f};\frac{1}{n}\right)_{C(T)} \le A_k\left\{\frac{1}{n^k}\sum_{\upsilon=1}^{n}\upsilon^{k-1}\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{C(T)}+\sum_{\upsilon=n+1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon}\omega_k\left(f;\frac{1}{n}\right)_{C(T)}\right\}, n\ge 1,$$

где A_k некоторая положительная константа, зависящая лишь от k.

Лемма 1.2.5. Если функция $f\in H(\omega_{k,i}, i\in M; L^p(T^n))$ (p=1 или $p=\infty$), $n\ge 2$, и модуль непрерывности порядка k $\omega_{k,i}(i=1,\ldots,n)$ удовлетворяет условию Зигмунда, то $\widetilde{f}_{\{i\}}\in L^p(T^n)(i=1,\ldots,n;$ $p=1$ *или* $p=\infty)$, и справедливы оценки:

$$\omega_{k,i}\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{L^p(T^n)}=O(\omega_{k,i}(\delta)),$$
$$\delta\to 0+,\ i=1,\ldots,n,\ p=1 \text{ или } p=\infty,$$

$$\omega_{k,j}\left(\widetilde{f}_{\{i\}};\delta\right)_{L^p(T^n)}=O(\omega_{k,j}(\delta)|\ln\delta|),$$
$$\delta\to 0+,\ i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j,\ p=1 \text{ или } p=\infty.$$

Так как модули непрерывности порядка k $\omega_{k,i}$ $(i=1,\ldots,m)$ удовлетворяют условию Зигмунда, то утверждение пункта (а) можно получить так же, как и следующее предложение (см. [28, сс. 332, 338, 344]):

Если функция $f\in L^p(T)$ $(p=1$ или $p=\infty)$ и

$$\omega_k(f;\delta)_{L^p(T)}=O(\omega_k(\delta)),\ \delta\to 0+,$$

где ω_k удовлетворяет условию Зигмунда, то $\widetilde{f}\in L^p(T)$ $(p=1$ или $p=\infty)$ и

$$\omega_k\left(\widetilde{f};\delta\right)_{L^p(T)}=O(\omega_k(\delta)),\ \delta\to 0+.$$

Что касается утверждения пункта (б), то его можно получить прямим путем, воспользуясь схемой доказательство, которая содержится в работе [15].

Пусть u_j некоторое положительное число, $i,j=1,\ldots,m,\ i\neq j$.

Рассмотрим

$$-2\pi\Delta_k^{(j)}(u_{\{j\}})\widetilde{f}_{\{i\}}(x)=$$
$$=\int_0^{u_j^{2^{k-1}}}\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\left[f\left(x+\nu u_{\{j\}}+s_{\{i\}}\right)-f\left(x+\nu u_{\{j\}}-s_{\{i\}}\right)\right]ctg\frac{s_i}{2}ds_i+ \qquad (1.2.2)$$
$$+\int_{u_j^{2^{k-1}}}^{\pi}\left[\Delta_k^{(j)}(u_{\{j\}})f(x+s_{\{i\}})-\Delta_k^{(j)}(u_{\{j\}})f(x-s_{\{i\}})\right]ctg\frac{s_i}{2}ds_i=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2.$$

Оценим интеграли I_1 и I_2 сверху.

$$\|I_1\|_{L^p(T^n)} \le 2^{k+1}\pi \int\limits_0^{u_j^{\sim}} \frac{\omega_i(f;s_i)_{L^p(T^n)}}{s_i} ds_i$$

В силу леммы 1.2.3 заключаем, что

$$\|I_1\|_{L^p(T^n)} \le A \int\limits_0^{u_j^{2^{k-1}}} \frac{\omega_{k,i}\left(f; s_i^{\frac{1}{2k-1}}\right)_{L^p(T^n)}}{s_i} ds_i, \; A = const.$$

Так как $f \in H(\omega_{k,i}, i \in M; L^p(T^n))$, то

$$\|I_1\|_{L^p(T^n)} \le A_1 \int\limits_0^{u_j^{2^{k-1}}} \frac{\omega_k\left(s_i^{\frac{1}{2k-1}}\right)}{s_i} ds_i = 2^{k-1} A_1 \int\limits_0^{u_j} \frac{\omega_k(s_i)}{s_i} ds_i, \; A_1 = const.$$

Для интеграла I_2 имеем

$$\|I_2\|_{L^p(T^n)} \le 2\pi\omega_k(u_j) \int\limits_{u_j^{2^{k-1}}}^{\pi} \frac{1}{s_i} ds_i \le 2^{k+1}\pi\omega_k(u_j)|\ln u_j|.$$

Полученные оценки совместно равенством (1.2.2) даказивают справедливость утверждения пункта (б).

Лемма 1.2.6. Пусть задана система попарно не пересекающихся интервалов $\{\Delta_i\}$, $\Delta_i \subset [-\pi, \pi]$ для любого i $(i = 1,2,...)$ и пусть $(f_i)_{i\ge1}$-последовательность периодических функций таких, что $f_i(x) = 0$ при $x \in [-\pi,\pi] \setminus \Delta_i$. Если

$$\omega_k(f_i;\delta) \le \omega_k(\delta), \; 0 \le \delta \le \delta_0, \;\; i = 1,2,...$$

и функция f определена равенством

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x),$$

то

$$\omega_k(f;\delta) \le (k+1)\omega_k(\delta), \; 0 \le \delta \le \delta_0.$$

Замечние. Лемма 1.2.6 можно доказать точно также, как и утверждение, заданное в работе [23, с. 339].

§1.3. О деформации классов $H(\omega_{k,i}, i\in M; C(T^n))$

Справедлива следующая

Теорема 1.3.1. а) Пусть $f\in H(\omega_{k,i}, i\in M; C(T^n))$ $(n\geq 2,\ k\geq 3)$ и модуль непрерывности порядка k $\omega_{k,i}(i=1,\dots,n)$ удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B\in\left[\bigcap_{i\in B} H_i\left(\omega_{k,i}|\ln|^{|B|-1}; C(T^n)\right)\right]\bigcap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B} H_j\left(\omega_{k,j}|\ln|^{|B|}; C(T^n)\right)\right]^{*)};$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_{k,i}, i\in M; C(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\omega_{k,i}(\widetilde{F}_B;\delta)_{C(T^n)}\geq \omega_{k,i}(\delta)\,|\ln\delta|^{|B|-1},$$
$$0\leq\delta\leq\delta_0,\quad i\in B,$$

$$\omega_{k,j}(\widetilde{F}_B;\delta)_{C(T^n)}\geq \omega_{k,j}(\delta)\,|\ln\delta|^{|B|-1},$$
$$0\leq\delta\leq\delta_0,\quad j\in M\setminus B;$$

где C и δ_0 - некоторые положительные константы.

Доказательство. а) Так как модуль непрерывности порядка k $\omega_{k,i}(i=1,\dots,n,\ k\geq 3)$ удовлетворяет условию Зигмунда, то $\widetilde{f}_B\in C(T^n)$ и порядок сопряжения не имеет значения. В силу вышесказанного, справедливость утверждения пункта (а) теоремы следует из леммы 1.2.5.

б) Рассмотрим тот случай, когда размерность евклидова пространства - n $(n\geq 2)$, а количество сопряжений оператора $\widetilde{f}_B$ равно $n-1$.

---

*) Ниже всюду будем считать, что при $B=M$

$$\left[\bigcap_{i\in B} H_i\left(\omega_{k,i}|\ln|^{|B|-1}; L^p(T^n)\right)\right]\bigcap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B} H_j\left(\omega_{k,j}|\ln|^{|B|}; L^p(T^n)\right)\right]=\bigcap_{i\in M} H_i\left(\omega_{k,i}|\ln|^{|B|-1}; L^p(T^n)\right).$$

Без ограничения общности при $|B| = n-1$ справедливость утверждения пункта (б) теоремы докажем лишь для оператора

$$\widetilde{f}_{\{1,\dots,n-1\}}(x_1,\dots,x_n)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1}\int\limits_{T^{n-1}} f(x_1+u_1,\dots,x_{n-1}+u_{n-1},x_n)\prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{u_i}{2}du_1\dots du_{n-1}. \tag{1.3.1}$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_m)_{m\ge 1}$ такую, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m < 1 \quad (b_0 = 0).$$

Пусть

$$\tau_{m\,i} = 2\sum_{j=0}^{m-1}\omega_{k,i}^{-1}(b_j), \quad \tau_{m,i}^{*} = \tau_{m\,i} + \frac{2}{k}\omega_{k,i}^{-1}(b_m),$$
$$t_{m,i} = \tau_{m,i}^{*} + \frac{2}{k}\omega_{k,i}^{-1}(b_m)\ \ (i=1,\dots,n;\ m=1,2,\dots),$$

где $\omega_{k,i}^{-1}(b_m)\,(m=1,2,\dots)$ - некоторый элемент множества $\{t:\omega_{k,i}(t)=b_m\}$.

Для облегчения записей, будем использовать следующее обозначение

$$s_m := \sqrt[4k^2(n-1)]{b_m}$$

и период $T=[-\pi,\pi]$ разложим на 5 подмножеств

$$T = q_m^1 \cup q_m^2 \cup q_m^3 \cup q_m^4 \cup q_m^5,$$

где

$$q_m^1 = [-\pi,-s_m),\quad q_m^2 = [-s_m,0),\quad q_m^3 = [0,\frac{\pi}{4}-s_m),$$
$$q_m^4 = [\frac{\pi}{4}-s_m,\frac{\pi}{4}),\quad q_m^5 = [\frac{\pi}{4},\pi].$$

Для любого $i=1,\dots,n$ и $m=1,2,\dots$ рассмотрим множества

$$A_i = \{x \in T^n : |x_j| \le \pi, j = 1,\dots,n, j \ne i, -\pi \le x_i \le 0\},$$

$$B_i = \left\{x \in T^n : |x_j| \le \pi, j = 1,\dots,n, j \ne i, 2\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_{k,\nu}^{-1}(b_\nu) \le x_i \le \pi\right\},$$

$$q_{m,j}^i = \{x_j \in T : x_j \in q_m^i\}, i = 1,\dots,5, \quad (j = 1,\dots,n),$$

и определим функцию $g_m : T \to R$ равенством

$$g_m(u) = \begin{cases} 0, & u \in q_m^1, \\ \left(u^{2k} - \sqrt[2k(n-1)]{b_m}\right)^{2k}, & u \in q_m^2, \\ \sqrt[n-1]{b_m}, & u \in q_m^3, \\ \left(\left(\frac{\pi}{4} - (u + s_m)\right)^{2k} - \sqrt[2k(n-1)]{b_m}\right)^{2k}, & u \in q_m^4, \\ 0, & u \in q_m^5. \end{cases}$$

Далее, для любого натурального m множество

$$V_{m,i} = \{x \in T^n : |x_j| \le \pi, j = 1,\dots,n, j \ne i, \tau_{m,i} \le x_i \le \tau_{m+1,i}\}$$

разложим на подмножеств

$$\Pi_{m,i}^{l,1} = \{x \in T^{n,} : x_i \in q_{n,j}^{l_j}, j = 1,\dots,n, j \ne i, \tau_{m,i} \le x_i \le t_{m,i}\},$$

$$\Pi_{m,i}^{l,2} = \{x \in T^{n,} : x_i \in q_{m,j}^{l_j}, j = 1,\dots,n, j \ne i, t_{m,i} \le x_i \le \tau_{m+1,i}\},$$

$$\left(l = 1,\dots,5^{n-1}, l_j = 1,\dots,5 \; j = 1,\dots,n, j \ne i; i = 1,\dots,n\right)$$

и определим функцию $G_i : T^m \to R$ следующим образом

$$G_i(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}\right)^{2k}}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_m(x_j)(x_i-\tau_{m,i})^k(t_{m,i}-x_i)^k, & x\in \Pi^{l,1}_{m,i},\\ 0, & x\in A_i\bigcup B_i\bigcup \Pi^{l,2}_{m,i}\\ & \left(m=1,2,\ldots,\ l=1,\ldots,5^{n-1}\right).\end{cases}$$

Построенную функцию G_i продолжим 2π-периодически на все пространство R^n.

Далее, принимая во внимание определение функции G_i, тот факт, что $\dfrac{\omega_{k,i}(t)}{t^k}$ почти убывает и лемму 1.2.6, мы заключаем, что

$$G_i\in H_i\left(\omega_{k,i};C(T^n)\right),$$

причем, данное включение является точным. Дейтвительно, если $x_i\in q^3_m$ $(j=1,\ldots,n;\ j\neq i)$, $x_i=\tau_{m,i}$ и $h=\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}$, то

$$\left|\Delta^{(i)}_k(h)G(x)\right|=\left|G_i\left(x_1,\ldots,x_{i-1},\tau^*_{m,i},x_{i+1},\ldots,x_n\right)\right|=b_m=$$

$$=\omega_{k,i}\left(\frac{k}{2}\left(\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}\right)\right)\geq \omega_{k,i}\left(\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}\right).$$

Также легко выдеть, что

$$G_i\in H_j\left(\delta^k;C(T^n)\right),\ j=1,\ldots,n,\ j\neq i.$$

Т.е.,

$$G_i\in\left[\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} H_j\left(\delta^k;C(T^n)\right)\right]\bigcap H_i\left(\omega_{k,i};C(T^n)\right).$$

Рассмотрим функцию G_n. В силу (1.3.1) для любого n имеем

$$(2\pi)^{n-1}\left|\Delta^{(n)}_k\left(\tau^*_{m,n}-\tau_{m,n}\right)\left(\widetilde{G}_n\right)_{\{1,\ldots,n-1\}}\left(0,\ldots,0,\tau_{m,n}\right)\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{T^{n-1}}\Delta^{(n)}_k\left(\tau^*_{m,n}-\tau_{m,n}\right)G_n\left(u_1,\ldots,u_{n-1},\tau_{m,n}\right)\times\prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{u_i}{2}du_1\cdots du_{n-1}\right|.$$

Из определения функции G_n получим, что

$$(2\pi)^{n-1}\left|\Delta_k^{(n)}\left(\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}\right)\left(\widetilde{G}_n\right)_{\{1,\dots,n-1\}}\left(0,\dots,0,\tau_{m,n}\right)\right| =$$

$$= \left|\int_{T^{n-1}} \Delta_k^{(n)}\left(\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}\right) G_n\left(u_1,\dots,u_{n-1},\tau_{m,n}^*\right)\prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{u_i}{2} du_1 \cdots du_{n-1}\right| \geq$$

$$\geq b_m \left(\int_{s_m}^{\frac{\pi}{8}} ctg\frac{t}{2}dt\right)^{n-1} \geq \frac{1}{\left(4k^2(n-1)\right)^{n-1}} b_m \left|\ln b_m\right|^{n-1}.$$

Таким образом, в силу леммы 1.2.2 и равенством $b_m = \omega_{k,n}\left(\frac{k}{2}\left(\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}\right)\right)$, мы заключаем, что существует номер m_1 такой, что для $m \geq m_1$

$$\left|\Delta_k^{(n)}\left(\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}\right)\left(\widetilde{G}_n\right)_{\{1,\dots,n-1\}}\left(0,\dots,0,\tau_{m,n}\right)\right| \geq A\omega_{k,n}\left(\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}\right)\ln\left(\tau_{m,n}^* - \tau_{m,n}\right)^{n-1},$$
$$A = const > 0.$$

Т.е.,

$$\omega_{k,n}\left(\left(\widetilde{G}_n\right)_{\{1,\dots,n-1\}};\delta\right)_{C(T^n)} \geq A_1\omega_{k,n}(\delta)\left|\ln\delta\right|^{n-1}, \quad A_1 = const > 0.$$

Функцию G_i от n переменных, обозначим символом $\Lambda_i(n,e_i)$ и назовем её функцией типа Λ размерности n по координатного направления e_i.

Функция $\Lambda_i(n,e_i)$ удовлетворяет следующие условия:

$$\Lambda_i(n,e_i) \in H_i\left(\omega_{k,i};C(T^n)\right),$$
$$\left(\widetilde{\Lambda}_i(n,e_i)\right)_{M\setminus\{i\}} \in H_i\left(\omega_{k,i}\left|\ln\right|^{n-1};C(T^n)\right),$$

причем, эти вклучения являются точнимы.

Замечание. Для любого $i = 1,\dots,n$ и $m \in N$ расмотрим функцию

$$F_{m,i}(x)=\begin{cases}\dfrac{b_m}{\left(\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}\right)^{2k}}\left(x-\tau_{m,i}\right)^k\left(t_{m,i}-x\right)^k, & x\in\left[\tau_{m,i},t_{m,i}\right],\\ 0, & x\in T\setminus\left[\tau_{m,i},t_{m,i}\right].\end{cases}$$

$$F_i(x)=\sum_{m=1}^{\infty}F_{m,i}(x).$$

Функцию F_i продолжим 2π-периодически на R. Принимая во внимание определение функции F_i, тот факт, что $\dfrac{\omega_{k,i}(t)}{t^k}$ почти убывает и лемму 1.2.6, можно заключить, что

$$F_i\in H\left(\omega_{k,i};C(T)\right),$$

причем, данное включение является точным. Дейтвительно, если $x=\tau_{m,i}$ и $h=\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}$, то по определению функции F_I будем иметь:

$$\left|\Delta_k^{(i)}(h)F_i(x)\right|=F_{m,i}(\tau^*_{m,i})=b_m=$$

$$=\omega_{k,i}\left(\frac{k}{2}\left(\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}\right)\right)\geq\omega_{k,i}\left(\tau^*_{m,i}-\tau_{m,i}\right).$$

Функцию F_i обозначим через $\Lambda_i(1,e_1)$.

Расмотрим функцию $F:R^n\to R$, которая в каждой точке $x\in R^n$ задана равенством

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\Lambda_i(n-1,e_i)(x_1,\dots,x_{n-1})+\Lambda_n(n,e_n)(x_1,\dots,x_n)$$

Ясна, что $F\in H\left(\omega_{k,i},i\in M;C\left(T^n\right)\right)$ и

$$\omega_{k,i}\left(\widetilde{F}_{\{1,\dots,n-1\}};\delta\right)_{C(T^n)}\geq C\omega_{k,i}(\delta)\left|\ln\delta\right|^{n-2},$$
$$i=1,\dots,n-1,\delta\to 0+,$$

$$\omega_{k,n}\left(\widetilde{F}_{\{1,\dots,n-1\}};\delta\right)_{C(T^n)}\geq C\omega_{k,n}(\delta)\left|\ln\delta\right|^{n-1},$$
$$\delta\to 0+, C=const>0.$$

Таким образом, мы показали справедливость пункта (б) теоремы в том случае, когда порядок сопряжения оператора $\widetilde{f}_B$ равно $n-1$.

Теперь рассмотрим функцию

$$K(x)=\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i(n,e_i)(x)$$

в R^n. Имеем $K\in H(\omega_{k,i},i\in M;C(T^n))$ и

$$\omega_{k,n}\left(\widetilde{K}_{\{1,\dots,n\}};\delta\right)_{C(T^n)}\geq C\omega_{k,i}(\delta)|\ln\delta|^{n-1},$$

$$i=1,\dots,n,\delta\to 0+,\ C=const>0.$$

Теорема 1.3.1 доказана.

§1.4. Об оценках частных модулей непрерывности второго порядка сопряженных функции в общем случае

Справедлива следующая

Теорема 1.4.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega_2,\ C(T^n))$ и для любого $B\subseteq M$

$$\int_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^{|B|}}\min_{i\in B}\omega_2(s_i)\prod_{i\in B}\frac{ds_i}{s_i}<+\infty,$$

тогда если $k\in B$, то

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)}=O\left\{\int_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left(\delta^2,s_k^2\right)s_k^{-2}\min_{i\in B}\omega_2(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}\qquad(1.4.1)$$

при $\delta\to 0+$, а если же $k\in M\setminus B$, то

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)}=O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min\{\min_{i\in B}\omega_2(s_i),\omega_2(\delta)\}\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}, \tag{1.4.2}$$

при $\delta\to 0+$.

б) Для любого $B\subseteq M$ существуют функции F и G такие, что $F,G\in H(\omega_2;C(T^n))$, но если $k\in B$, то имеет место неравенство

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{F}_B;\delta\right)_{C(T^n)}\geq C\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left(\delta^2,s_k^2\right)s_k^{-2}\min_{i\in B}\omega_2(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i \tag*{$(1.4.1)_1$}$$

при $0\leq\delta\leq\dfrac{\pi}{4}$, а если $k\notin B$ (в случае $B\neq M$), то имеет место неравенство

$$\omega_{2,k}(G;\delta)_{C(T^n)}\geq C\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min\{\min\omega_2(s_i),\omega_2(\delta)\}\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i \tag*{$(1.4.2)_1$}$$

при $0\leq\delta\leq\dfrac{\pi}{4}$, $C=const>0$.

Доказательство. а) Не ограничивая общности, предположим, что $B=\{1,\ldots,m\}$, где $1\leq m\leq n$. Пусть e_i- i -й единичный базисный вектор в пространстве R^n.

Для $f\in C(T^n)$ и $x,\bar{h}\in R^n$ положим

$$\Delta_{\bar{h}}f(x)=f\left(x+\bar{h}\right)-f\left(x-\bar{h}\right).$$

По определению сопряженной функции

$$(-2\pi)^m\widetilde{f}_B(x)=\int\limits_{T^m}f(x+s_B)\prod_{i\in B}ctg\frac{s_i}{2}ds_B=\int\limits_{T^m}f\left(x+\sum_{i=1}^m s_ie_i\right)\prod_{i=1}^m ctg\frac{s_i}{2}ds_i=$$

$$=\int\limits_{[0,\pi]^m}\Delta_{s_1e_1}\ldots\Delta_{s_me_m}f(x)\prod_{i=1}^m ctg\frac{s_i}{2}ds_i. \tag{1.4.3}$$

Сначала докажем справедливость отношения (1.4.2).

Из равенства (1.4.3) вытекает, что

$$
\begin{gathered}
(2\pi)^m \left|\Delta_2^{(k)}(h_k)\widetilde{f}_B(x)\right| = \\
= \left| \int\limits_{[0,\pi]^m} \Delta_{s_1 e_1} \ldots \Delta_{s_m e_m} \left[f\left(x+2h_{\{k\}}\right) - 2f\left(x+h_{\{k\}}\right) + f(x)\right] \prod_{i=1}^{m} ctg\frac{s_i}{2} ds_i \right|.
\end{gathered} \tag{1.4.4}
$$

Легко видеть, что

$$
\begin{gathered}
\left|\Delta_{s_1 e_1} \ldots \Delta_{s_m e_m} \left[f\left(x+2h_{\{k\}}\right) - 2f\left(x+h_{\{k\}}\right) + f(x)\right]\right| \le \\
\le 3 \cdot 2^{m-1} \min\left\{\min_{1\le i\le m}\left\{\sup_{x\in T^n}\left|\Delta_{s_i e_i} f(x)\right|\right\}, \omega_2(h)\right\}
\end{gathered} \tag{1.4.5}
$$

Теперь определим функцию $\alpha : T \to R$ следующим образом:

$$
\alpha(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \in [-\pi, 0), \\ x & при \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ \pi - x & при \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}
$$

Так как функция f по условию 2π-периодическая по всем переменным, то

$$
\Delta_{se_i} f(x) = -\Delta_{(\pi-s)e_i} f(x + \pi e_i)
$$

при $1 \le i \le n$, $s \in R$. Поэтому

$$
\sup_{x\in T^n}\left|\Delta_{se_i} f(x)\right| \le \omega_i(f; 2\alpha(s))_{C(T^n)} \tag{1.4.6}
$$

при $1 \le i \le n$, $0 \le s \le \pi$.

Неравенства (1.4.5) и (1.4.6) в месте равенством (1.4.4) дают следующую оценку

$$
\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B; h\right)_{C(T^n)} \le (2\pi)^{-m} \int\limits_{[0,\pi]^m} 3 \cdot 2^m \min\{\min_{1\le i\le m} \omega_i(f; 2\alpha(s_i))_{C(T^n)}, \omega_2(h)\} \prod_{i=1}^{m} ctg\frac{s_i}{2} ds_i.
$$

Поскольку функция α симметрична относительно $\frac{\pi}{2}$ на отрезке $[0,\pi]$, то

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B;h\right)_{C(T^n)} \le 3\left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^m} \min\{\min_{1\le i\le m}\omega_i\left(f;2s_i\right)_{C(T^n)},\omega_2(h)\}\prod_{i=1}^m ctg\frac{s_i}{2}ds_i\ .$$

Теперь, используя тот факт, что для $0<t<1$

$$\omega\left(f;\delta^2\right)\le A\omega_2\left(f;\delta\right),$$

получим

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B;h\right)_{C(T^n)} \le A_1 \int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^m} \min\{\min_{1\le i\le m}\omega_2\left(2\sqrt{s_i}\right),\omega_2(h)\}\prod_{i=1}^m \frac{ds_i}{\sin s_i} \le$$

$$\le A_2 \int\limits_{[0,\pi]^m} \min\{\min_{1\le i\le m}\omega_2\left(s_i\right),\omega_2(h)\}\prod_{i=1}^m s_i^{-1}ds_i\ ,$$

где A_1 и A_2 некоторые положительные константы.

При доказательстве соотношения (1.4.1) будем считать, что B любое непустое подмножество множества M и $k\in B$.

В силу леммы 1.2.4 и условия, наложенное на ω_2 в теореме, можно получить, что

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B;\frac{1}{n}\right)_{C(T^n)} = \omega_{2,k}\left(\left(\widetilde{f}_{B\backslash\{k\}}\right)_{\{k\}};\frac{1}{m}\right)_{C(T^n)} \le$$

$$\le A_2\left\{\frac{1}{m^2}\sum_{\upsilon=1}^m \upsilon\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\backslash\{k\}};\frac{1}{\upsilon}\right)_{C(T^n)} + \sum_{\upsilon=m+1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon}\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\backslash\{k\}};\frac{1}{\upsilon}\right)_{C(T^n)}\right\} \le$$

$$\le A_2\left\{\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\backslash\{k\}};1\right)_{C(T^n)}}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{\upsilon=1}^{m-1}(\upsilon+1)\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\backslash\{k\}};\frac{1}{\upsilon+1}\right)_{C(T^n)} + \right.$$

$$+\sum_{\upsilon=m+2}^{\infty}\frac{1}{\upsilon+1}\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};\frac{1}{\upsilon+1}\right)_{C(T^n)}\Bigg\}\le A_2\left\{\frac{1}{(m+1)^2}\int_{1}^{\pi}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};t\right)_{C(T^n)}}{t^3}dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(m+1)^2}\sum_{\upsilon=1}^{m-1}\int_{\frac{1}{\upsilon+1}}^{\frac{1}{\upsilon}}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};t\right)_{C(T^n)}}{t^3}dt+\sum_{\upsilon=m+2}^{\infty}\int_{\frac{1}{\upsilon}}^{\frac{1}{\upsilon-1}}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};t\right)_{C(T^n)}}{t}dt\right\}=$$

$$=A\left\{\frac{1}{(m+1)^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};t\right)_{C(T^n)}}{t^3}dt+\int_{0}^{\frac{1}{m+1}}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};t\right)_{C(T^n)}}{t}dt\right\}.$$

Пусть $\delta\le 1$. Найдем такое целое положительное число m, ,что $\frac{1}{j+1}\le\delta<\frac{1}{j}$. Тогда будем иметь

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B;\delta\right)_{C(T^n)}\le A\left\{\delta^2\int_{0}^{\pi}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};t\right)_{C(T^n)}}{t^3}dt+\int_{0}^{\delta}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};t\right)_{C(T^n)}}{t}dt\right\}$$

Воспользуемся соотношением (1.4.2). Тогда получим, что

$$\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_B;h\right)_{C(T^n)}\le A\left\{\int_{0}^{\pi}\min\left(\delta^2,s_k\right)s_k^{-2}\frac{\omega_{2,k}\left(\widetilde{f}_{B\setminus\{k\}};s_k\right)_{C(T^n)}}{s_k}ds_k\right\}\le$$

$$\le A\left\{\int_{0}^{\pi}\min\left(\delta^2,s_k\right)s_k^{-2}\frac{\int_{[0,\pi]^{|B|-1}}\min\{\min_{i\in|B|\setminus\{k\}}\omega_2(s_i),\omega_2(s_k)\}\prod_{i\in B\setminus\{k\}}s_i^{-1}ds_i}{s_k}ds_k\right\}\le$$

$$\le A\int_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left(\delta^2,s_k\right)s_k^{-2}\min_{i\in B}\omega_2(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i.$$

Таким образом, соотношение (1.4.1) и вместе с ним пункт (а) теоремы 1.4.1 доказана.

б) Без ограничения общности считаем, что сопряжение ведется первым m $(1 \le m \le n)$ переменным.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} x_1(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m) \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \dfrac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \\ \qquad x_i \in [0,\pi], i = 1,\dots,m, x_j \in [-\pi,\pi], j = m+1,\dots,n, \\ 0, \qquad x_i \in [-\pi, 0] \text{ для некоторого } i \ (i = 1,\dots,m). \end{cases}$$

Функцию F продолжим 2π-периодически на все пространство R^n.

Покажем, что

$$F \in H(\omega_2; C(T^n)).$$

В силу определения функции F, можно оценить только выражение

$$F(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - 2F(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(x_1 - h, x_2, \dots, x_n).$$

Сначала будем считать, что $x_1 + h$, x_1 и $x_1 - h$ принадлежать отрезку $[0,\pi]$.

По определению функции F имеем

$$F(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - 2F(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(x_1 - h, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= (x_1 + h)(\pi - x_1 - h)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m) \times$$

$$\times \int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m -$$

$$-2x_1(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m +$$

$$+(x_1 - h)(\pi - x_1 + h)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m .$$

Если $x_1 \le Ch$ или $\pi - x_1 \le Ch$ ($C = const > 0$), то

$$|F(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - 2F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(x_1 - h, x_2, \ldots, x_n)| \le$$

$$= (x_1 + h)(\pi - x_1 - h)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\omega_2(t_1)}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m +$$

$$+2x_1(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\omega_2(t_1)}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m +$$

$$+(x_1 - h)(\pi - x_1 + h)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\omega_2(t_1)}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m \le$$

$$\le (x_1 + h)(\pi - x_1 - h) \int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2} dt_1 + 2x_1(\pi - x_1) \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2} dt_1 +$$

$$+(x_1 - h)(\pi - x_1 + h) \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2} dt_1 \le \omega_2(2(x_1 + h)(\pi - x_1 - h)) +$$

$$+\omega_2(2(x_1-h)(\pi-x_1))+\omega_2(2(x_1-h)(\pi-x_1+h))\le A\omega_2(h).$$

Пусть теперь условие: $x_1 \le Ch$ или $\pi - x_1 \le Ch$ $(C = const > 0)$, не выполнено. Тогда

$$F(x_1+h,x_2,\ldots,x_n)-2F(x_1,x_2,\ldots,x_n)+F(x_1-h,x_2,\ldots,x_n)=$$

$$=(x_1+h)(\pi-x_1-h)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m-$$

$$-2x_1(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m+$$

$$+(x_1-h)(\pi-x_1+h)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m=$$

$$=x_1(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\left[\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m-\right.$$

$$-2\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m+$$

$$+\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m\Bigg]+$$

$$+\Bigg[h(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m-$$

$$-h(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m\Bigg]+$$

$$+\Bigg[hx_1x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m-$$

$$-hx_1x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m\Bigg]-$$

$$-h^2 x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m + h^2 x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m = \sum_{j=1}^{4} I_j.$$

Оценим интегралы I_j $(j = 1,\ldots,4)$ по отдельности.

$$|I_2 + I_3| = \Bigg| h(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m -$$

$$-h(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m +$$

$$+hx_1x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m -$$

$$-hx_1x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m \Bigg| =$$

$$= \Bigg| h(\pi - 2x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m -$$

$$- h(\pi - 2x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m \Bigg| \le$$

$$\le \pi h x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times \Bigg| \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m +$$

$$+ \int\limits_{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m \Bigg| \le$$

$$\le \pi h \left| \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2} dt_1 + \int\limits_{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2} dt_1 \right| .$$

$\min\{(x_1+h)(\pi-x_1-h),(x_1-h)(\pi-x_1+h)\}$ обозначим через a, тогда в силу свойства 4 модулей непрерывности второго порядка получим, что

$$|I_2+I_3|\le Ah^2\left[\frac{\omega_2(a)}{a^2}+\frac{\omega_2(2a)}{4a^2}\right]\le A\omega_2(h).$$

$$|I_4|\le h^2x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\left[\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_m\right]\le$$

$$\le h^2\left[\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1+\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1\right]\le$$

$$\le Ah^2\left[\frac{\omega_2((x_1-h)(\pi-x_1+h))}{[(x_1-h)(\pi-x_1+h)]^2}+\frac{\omega_2((x_1+h)(\pi-x_1-h))}{[(x_1+h)(\pi-x_1-h)]^2}\right].$$

Так как $h<(x_1-h)(\pi-x_1+h)$ и $h<(x_1+h)(\pi-x_1-h)$, поэтому в силу свойства 4 модулей непрерывности второго порядка будем иметь:

$$|I_4|\le A_2\omega_2(h),\ \ A_2=const>0.$$

Для оценки I_1 рассмотрим два случая.

1. Пусть $x_1\in\left[0,\frac{\pi-h}{2}\right]$ или $x_1\in\left[\frac{\pi+h}{2},\pi\right]$, тогда

$$|I_1| \le x_1(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times\left| \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m - \right.$$

$$-2\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m +$$

$$\left. + \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m \right|.$$

$$|I_1| \le A x_1(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\times$$

$$\times\left| \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{x_1(\pi-x_1)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_m \right| \le$$

$$\le A_1 x_1(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_m(\pi - x_m)\left| \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \frac{1}{\prod\limits_{i=2}^{m} t_i^2} \left[\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{t_1^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\min\left\{\omega_2(t_1 - A_2 h), \min\limits_{2\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}\right\}}{(t_1 - A_2 h)^2} \right] dt_1 dt_2 \cdots dt_m \right| + A_1\omega_2(h) \le$$

$$-\frac{\min\left\{\omega_2(t_1-A_2h),\min\limits_{2\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}\right\}}{(t_1-A_2h)^2}\Bigg]dt_1dt_2\cdots dt_m\Bigg|+A_1\omega_2(h)\le$$

$$\le A_1x_1(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\left|\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}-\min\left\{\omega_2(t_1-A_2h),\min\limits_{2\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}\right\}}{\prod\limits_{i=2}^{m}t_i^2(t_1-A_2h)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2A_2ht_1\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=2}^{m}2t_i^2t_1^2(t_1-A_2h)^2}+\frac{A_2h^2\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=2}^{m}2t_i^2t_1^2(t_1-A_2h)^2}\right|dt_1dt_2\cdots dt_m+A_1\omega_2(h)\le$$

$$\le A_3x_1(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_m(\pi-x_m)\times$$

$$\times\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\left|\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}-\min\left\{\omega_2(t_1-A_2h),\min\limits_{2\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}\right\}\right|}{\prod\limits_{i=2}^{m}t_i^2(t_1-A_2h)^2}dt_1dt_2\cdots dt_m+$$

$$+h\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=2}^{m}t_i^2t_1(t_1-A_2h)^2}dt_1dt_2\cdots dt_m+$$

$$+h^2\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)}\frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{m}t_i^2(t_1-A_2h)^2}dt_1dt_2\cdots dt_m+A_1\omega_2(h)=$$

$$=J_1+J_2+J_3+A_1\omega_2(h).$$

Оценим интеграли J_i $(i=1,2,3)$ по отдельности.

$$J_2 \le A_3 h \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h} \frac{\omega_2(t_1)}{(t_1-A_2h)^2}dt_1 \le A_4 h^2 \frac{\omega_2(x_1(\pi-x_1))}{(x_1(\pi-x_1))^2} \le A\omega_2(h),$$

$$J_3 \le A_3 h^2 \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1(t_1-A_2h)^2}dt_1 \le A_4 h^3 \frac{\omega_2(x_1(\pi-x_1))}{(x_1(\pi-x_1))^3} \le$$

$$\le A\frac{h}{x_1(\pi-x_1)}\omega_2(h) \le A\omega_2(h).$$

Оценим теперь J_1.

$$J_1 \le Ax_1(\pi-x_1)\cdots x_m(\pi-x_m) \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_m(\pi-x_m)}^{2x_m(\pi-x_m)} \left| \frac{\min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=2}^{m} t_i^2 (t_1-A_2h)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\min\left\{\omega_2(t_1-A_2h), \min\limits_{2\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}\right\}}{\prod\limits_{i=2}^{m} t_i^2 (t_1-A_2h)^2} \right| dt_1 dt_2 \cdots dt_m.$$

Выражение $\min\left\{\omega_2(t_1-A_2h), \min\limits_{2\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}\right\} - \min\limits_{1\le i\le m}\{\omega_2(t_i)\}$ обозначим через $J_{1,1}$.

$$|J_{1,1}| = \begin{cases} 0, \\ \omega_2(t_k) - \omega_2(t_1-A_2h), \\ \omega_2(t_1) - \omega_2(t_1-A_2h). \end{cases}$$

Т.е.,

$$|J_{1,1}| \le \omega_2(t_1) - \omega_2(t_1-A_2h).$$

Замечание. Пусть ω_2 - модуль непрерывности второго порядка. Рассмотрим функцию

$$\omega(x) = \int\limits_{\delta}^{2\delta} \frac{\omega^*(x)}{x}dx,$$

где $\omega^*(x)=\dfrac{\omega_2(x)}{x}$.

ω производная функция и

$$\left|\omega'(\delta)\right|=\left|\frac{\omega^*(2\delta)-\omega^*(\delta)}{\delta}\right|\le\frac{(2A+1)\omega^*(\delta)}{\delta}.$$

Функция $\dfrac{\omega^*(x)}{x}$ почти убывает. Поэтому можно получить, что

$$\frac{1}{4A}\omega^*(\delta)\le\omega(\delta)\le A\omega^*(\delta).$$

Т.е.,

$$\left|\omega'(\delta)\right|\le A\frac{\omega(\delta)}{\delta}$$

$\dfrac{\omega(\delta)}{\delta}$ почти убывает, вместо ω^* можно рассмотреть ω.

Т.е., $$\omega_2(x)=x\cdot\omega(x),$$

причем ω_2 производная функция.

$$\left|J_{1,1}\right|\le t_1\omega(t_1)-(t_1-A_2h)\omega(t_1-A_2h)=A_2t_1h\omega'(t_1-A_2h+\theta A_2h)+$$

$$+A_2h\omega(t_1-A_2h)\le A_2t_1h\frac{\omega(t_1-A_2h+\theta A_2h)}{t_1-A_2h+\theta A_2h}+A_2h\omega(t_1-A_2h).$$

Отсюда получим

$$\left|J_1\right|\le A_3x_1(\pi-x_1)h\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{x_1(\pi-x_1)+A_2h}\frac{\omega(t_1-A_2h)}{(t_1-A_2h)^2}dt_1\le A_4\omega_2(h).$$

Т.е.,

$$\left|I_1\right|\le A\omega_2(h).$$

2. Пусть $x_1\in\left[\dfrac{\pi-h}{2},\dfrac{\pi+h}{2}\right]$, тогда

$(x_1+h)(\pi-x_1-h)<x_1(\pi-x_1)$ и $(x_1-h)(\pi-x_1+h)<x_1(\pi-x_1)$,

кроме того

$$x_1(\pi - x_1) - (x_1 + h)(\pi - x_1 - h) \le 2h^2$$

и

$$x_1(\pi - x_1) - (x_1 - h)(\pi - x_1 - h) \le 2h^2$$

В таких условиях можно заключит, что

$$|I_1| \le A\omega_2(h).$$

Если один из точек $x_1 - h$, x_1, $x_1 + h$ не приноддежит $[0,\pi]$, то в силу определения функции F можно заключить, что и в этом случае

$$|F(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - 2F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(x_1 - h, x_2, \ldots, x_n)| \le A\omega_2(h).$$

Т.е.,

$$\omega_{2,i}(F;\delta)_{C(T^n)} = O(\omega_2(\delta)),\ \delta \to 0+,\ i = 1, \ldots, m.$$

Кроме того, отметим, что при $m < i \le n$ (в случае $m \ne n$) $\omega_{2,i}(F;\delta)_{C(T^n)} = 0$.

Покажем теперь, что функция F удовлетворяет неравенству $(1.4.1)_1$ при $B = \{1, \ldots, m\}$ и $k = m$.

По определению сопряженной функции и функции F будем иметь:

$$\widetilde{F}_{\{1,\ldots,m\}}(0,\ldots,0,\ldots,0) - 2\widetilde{F}_{\{1,\ldots,m\}}(0,\ldots,0,-h,0,\ldots,0) + \widetilde{F}_{\{1,\ldots,m\}}(0,\ldots,0,-2h,0,\ldots,0) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{T^m} [F(s_1,\ldots,s_{m-1},s_m - 2h,0,\ldots,0) - 2F(s_1,\ldots,s_{m-1},s_m - h,0,\ldots,0) +$$

$$+ F(s_1,\ldots,s_{m-1},s_m,0,\ldots,0)] \prod_{i=1}^{m} ctg\frac{s_i}{2} ds_i = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{[0,\pi]^{m-1}} \int_T [F(s_1,\ldots,s_{m-1},s_m - 2h,0,\ldots,0) -$$

$$-2F(s_1,\ldots,s_{m-1},s_m-h,0,\ldots,0)+F(s_1,\ldots,s_{m-1},s_m,0,\ldots,0)\Big]\prod_{i=1}^{m} ctg\frac{s_i}{2}ds_i=$$

$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^m\int\limits_{[0,\pi]^{m-1}}\left[\int\limits_{-\pi-2h}^{\pi-2h}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)ctg\frac{s_m+2h}{2}ds_m-\right.$$

$$\left.-2\int\limits_{-\pi-h}^{\pi-h}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)ctg\frac{s_m+h}{2}ds_m+\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)ctg\frac{s_m}{2}ds_m\right]\prod_{i=1}^{m-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i=$$

$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^m\times\int\limits_{[0,\pi]^{m-1}}\left[\int\limits_{0}^{\pi-2h}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)\left[ctg\frac{s_m+2h}{2}-2ctg\frac{s_m+h}{2}+ctg\frac{s_m}{2}\right]ds_m+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\pi-2h}^{-\pi}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)ctg\frac{s_m+2h}{2}ds_m-2\int\limits_{-\pi-h}^{-\pi}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)ctg\frac{s_m-h}{2}ds_m\right]\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{m-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^m\int\limits_{[0,\pi]^{m-1}}\int\limits_{0}^{\pi}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)\left[ctg\frac{s_m+2h}{2}-\right.$$

$$\left.-2ctg\frac{s_m+h}{2}+ctg\frac{s_m}{2}\right]ds_m\prod_{i=1}^{m-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i.$$

$$\left|\widetilde{F}_{\{1,\ldots,m\}}(0,\ldots,-2h,\ldots,0)-2\widetilde{F}_{\{1,\ldots,m\}}(0,\ldots,0,-h,0,\ldots,0)+\widetilde{F}_{\{1,\ldots,m\}}(0,\ldots,0,\ldots,0)\right|\geq$$

$$\geq\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^m\int\limits_{[0,\pi]^{m-1}}\left[\int\limits_{0}^{\pi}F(s_1,\ldots,s_m,0,\ldots,0)\left[ctg\frac{s_m+2h}{2}-2ctg\frac{s_m+h}{2}+ctg\frac{s_m}{2}\right]\right]ds_m$$

$$\times\prod_{i=1}^{m-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\geq A\int\limits_{[0,\pi]^m}\min_{1\leq i\leq m}\{\omega_2(s_i)\}\prod_{i=1}^{m}s_i^{-1}\frac{h^2}{(s_m+2h)(s_m+h)}ds_i\geq$$

$$\geq A_1\int\limits_{[0,\pi]^m}\min(h^2,s_m^2)s_m^{-2}\min_{1\leq i\leq m}\omega_2(s_i)\prod_{i=1}^{m}s_i^{-1}ds_i\ ,$$

где A и A_1 некоторые положительные константы.

Т.е., неравенство $(1.4.1.)_1$ доказано для $k=m$, и функция F удовлетворяет условиям пункта (б) теоремы 1.4.1.

Если $k<m$, то возможен случай, когда $k \notin B$, т.е. $m<k\le n$.

Для таких значений k построим следующую функцию:

Пусть $B=\{1,\dots,n-1\}$ и $k=n$.

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_i)_{i\ge1}$ такую, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \le 1 \quad (b_0=0).$$

Положим

$$\tau_m = 2\sum_{j=0}^{m-1}\omega_2^{-1}(b_j),$$

$$\tau_m^* = \tau_m + \omega_2^{-1}(b_m), \quad m=1,2,\dots,$$

где $\omega_2^{-1}(b_m)$ ($m=1,2,\dots$) — некоторый элемент множества $\{t:\omega_2(t)=b_m\}$.

Теперь построим функций G_m (m=1,2,...) следующим образом:

$$G_m(x)=G_m(x_1,\dots,x_n)=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{(x_n-\tau_m)^2(\tau_{m+1}-x_n)^2}{(\tau_m^*-\tau_m)^4}x_1(\pi-x_1)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times \\ \times\displaystyle\int_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)}\cdots\int_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1\cdots dt_{n-1}, \\ \qquad\qquad x_i\in[0,\pi],\quad i=1,\dots,n-1,\quad x_n\in[\tau_m,\tau_{m+1}], \\ 0, \qquad x_i\in[-\pi,0] \text{ для некоторого } i\ (i=1,\dots,n-1). \end{cases}$$

Положим

$$G(x_1,\dots,x_n)=\sum_{m=1}^{\infty}G_m(x_1,\dots,x_n).$$

Построенную функцию G продолжим 2π-периодически на все пространство R^n.

Покажем, что

$$\omega_{2,i}(G;\delta)_{C(T^n)}=O(\omega_2(\delta))$$

$$\delta\to 0+,\ i=1,\dots,n-1.$$

В силу опредения функции G оценим только выражение

$$G(x_1+h,x_2\dots,x_n)-2G(x_1,\dots,x_n)+G(x_1,\dots,x_n).$$

Сначала рассмотрим тот случай, когда x_1-h, x_1 и x_1+h принадлежат отрезку $[0,\pi]$.

Пусть $x\in[\tau_m,\tau_{m+1}]$ для некоторого m $(m=1,2,\dots)$, тогда по определению функции G будем иметь:

$$G(x_1+h,x_2,\dots,x_n)-2G(x_1,x_2,\dots,x_n)+G(x_1-h,x_2,\dots,x_n)=$$

$$=G_m(x_1+h,x_2,\dots,x_n)-2G_m(x_1,x_2,\dots,x_n)+G_m(x_1-h,x_2,\dots,x_n)=$$

$$=\frac{(x_n-\tau_m)^2(\tau_{m+1}-x_n)^2}{(\tau_m^*-\tau_m)^4}\Big[(x_1+h)(\pi-x_1-h)x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\ \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}-$$

$$-2x_1(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)}\ \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}+$$

$$+(x_1-h)(\pi-x_1+h)x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\left.\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}\right].$$

Если $x_1\le Ch$ или $\pi-x_1\le Ch$, то получим, что

$$|G(x_1+h,x_2,\ldots,x_n)-2G(x_1,x_2,\ldots,x_n)+G(x_1-h,x_2,\ldots,x_n)|\le$$

$$=(x_1+h)(\pi-x_1-h)x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}+$$

$$+2x_1(\pi-x_1)x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}+$$

$$+(x_1-h)(\pi-x_1+h)x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}\le$$

$$\le(x_1+h)(\pi-x_1-h)\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1+2x_1(\pi-x_1)\int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)}\frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1+$$

$$+(x_1-h)(\pi-x_1+h)\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1\le\omega_2(2(x_1+h)(\pi-x_1-h))+$$

$$+\omega_2(2(x_1-h)(\pi-x_1))+\omega_2(2(x_1-h)(\pi-x_1+h))\le A\omega_2(h).$$

Пусть теперь условие: $x_1 \le Ch$ или $\pi - x_1 \le Ch$, не выполнено

Тогда

$$G(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - 2G(x_1, x_2, \dots, x_n) + G(x_1 - h, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \frac{(x_n - \tau_m)^2 (\tau_{m+1} - x_n)^2}{(\tau_m^* - \tau_m)^4} x_1 (x_1 + h)(\pi - x_1 - h) x_2 (\pi - x_2) \cdots x_{n-1} (\pi - x_{n-1}) \times$$

$$\times \left[\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})} \frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}, b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} - \right.$$

$$-2 \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{2x_1(\pi-x_1)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})} \frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}, b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} +$$

$$\left. \times \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})} \frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}, b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} \right] +$$

$$+ \frac{(x_n - \tau_m)^2 (\tau_{m+1} - x_n)^2}{(\tau_m^* - \tau_m)^4} \left[h(\pi - x_1) x_2 (\pi - x_2) \cdots x_{n-1} (\pi - x_{n-1}) \times \right.$$

$$\times \int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})} \frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}, b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} -$$

$$- h(\pi - x_1) x_2 (\pi - x_2) \cdots x_{n-1} (\pi - x_{n-1}) \times$$

$$\left. \times \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})} \frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}, b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} \right] +$$

$$+\frac{(x_n-\tau_m)^2(\tau_{m+1}-x_n)^2}{(\tau_m^*-\tau_m)^4}\Bigg[hx_1x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}-$$

$$-hx_1x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}\Bigg]+$$

$$+\frac{(x_n-\tau_m)^2(\tau_{m+1}-x_n)^2}{(\tau_m^*-\tau_m)^4}\Bigg[h^2x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}-$$

$$-h^2x_2(\pi-x_2)\cdots x_{n-1}(\pi-x_{n-1})\times$$

$$\times\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}\Bigg]=\sum_{j=1}^{4}I$$

Оценим интегралы I_j $(j=1,2,3,4)$ по отдельности.

Аналогичными рассуждениями, как и выше, в случае функции F, можно получить, что

$$|I_2+I_3|\le A\omega_2(h)$$

и

$$|I_4| \le A\omega_2(h).$$

Оценим теперь I_1.

В случае, когда $x_1 \in \left[\frac{\pi-h}{2}, \frac{\pi+h}{2}\right]$, в силу соотношения

$$(x_1+h)(\pi - x_1 - h) < x_1(\pi - x_1) \quad \text{и} \quad (x_1-h)(\pi - x_1 + h) < x_1(\pi - x_1),$$

а также

$$x_1(\pi - x_1) - (x_1+h)(\pi - x_1 - h) \le 2h^2$$

и

$$x_1(\pi - x_1) - (x_1-h)(\pi - x_1 + h) \le 2h^2,$$

можно заключить, что

$$|I_1| \le x_1(\pi - x_1)\left[\int\limits_{(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{x_1(\pi-x_1)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1 + \int\limits_{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}^{2x_1(\pi-x_1)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{x_1(\pi-x_1)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1 + \int\limits_{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2x_1(\pi-x_1)} \frac{\omega_2(t_1)}{t_1^2}dt_1\right] \le$$

$$\le Ah^2 \frac{\omega_2(x_1(\pi - x_1))}{[x_1(\pi - x_1)]^2} \le A_1\omega_2(h).$$

Пусть теперь $x_1 \in \left[0, \frac{\pi-h}{2}\right]$ или $x_1 \in \left[\frac{\pi+h}{2}, \pi\right]$. Тогда

$$|I_1| \le Ax_1(\pi - x_1)x_2(\pi - x_2)\cdots x_{n-1}(\pi - x_{n-1}) \times$$

$$\times \left| \int\limits_{x_1(\pi-x_1)}^{(x_1+h)(\pi-x_1-h)} \int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)} \cdots \int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})} \frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\}, b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} t_i^2} dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} - \right.$$

$$-\int\limits_{(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{x_1(\pi-x_1)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}+$$

$$+\int\limits_{2x_1(\pi-x_1)}^{2(x_1+h)(\pi-x_1-h)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}-$$

$$\left.-\int\limits_{2(x_1-h)(\pi-x_1+h)}^{2x_1(\pi-x_1)}\int\limits_{x_2(\pi-x_2)}^{2x_2(\pi-x_2)}\cdots\int\limits_{x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}^{2x_{n-1}(\pi-x_{n-1})}\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_2(t_i)\},b_m\right\}}{\prod\limits_{i=1}^{n-1}t_i^2}dt_1dt_2\cdots dt_{n-1}\right|.$$

Анологичними рассуждениями, как и в случае функции F, получили, что и в этом случае

$$|I_1|\le A\omega_2(h).$$

Т.е.,

$$\omega_{2,i}(G;\delta)_{C(T^n)}=O(\omega_2(\delta)),$$

$$\delta\to 0+,\ i=1,\dots,n-1.$$

В случае $i=n$, принимая во внимание определение функций G_m, тот факт, что $\frac{\omega_2(t)}{t^2}$ почти убывает и лемму 1.2.6, мы заключаем, что

$$\omega_{2,n}(G;\delta)_{C(T^n)}=O(\omega_2(\delta)),\ \delta\to 0+.$$

Т.е.,

$$G\in H(\omega_2;C(T^n)).$$

Пусть $h=\tau_m^*-\tau_m$.

Пользуясь определением сопряженной функции и функции G_m, получаем

$$\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(0,0,\dots 0,\tau_m+2h)-2\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(0,0,\dots 0,\tau_m+h)+\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(0,0,\dots 0,\tau_m)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1}\int_{T^{n-1}}-2G_m(s_1,\dots,s_{n-1},\tau_m^*)\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i=$$

$$=2\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{n-1}\int_{[0,\pi]^{n-1}}G_m(s_1,\dots,s_{n-1},\tau_m^*)\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i.$$

$$\left|\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(0,0,\dots 0,\tau_m+2h)-2\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(0,0,\dots 0,\tau_m+h)+\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(0,0,\dots 0,\tau_m)\right|\geq$$

$$\geq A\int_{[0,\pi]^{n-1}}\min\left\{\min_{1\leq i\leq n-1}\omega_2(s_i),b_m\right\}\prod_{i=1}^{n-1}s_i^{-1}ds_i=A\int_{[0,\pi]^{n-1}}\min\left\{\min_{1\leq i\leq n-1}\omega_2(s_i),\omega_2(h)\right\}\prod_{i=1}^{n-1}s_i^{-1}ds_i.$$

Т.е., неравенство $(1.4.2.)_1$ доказано.

Теорема 1.4.1 доказана.

Глава 2

О деформации некоторых функциональных классов в пространстве $L(T^n)$

§ 2.1. Некоторые известные результаты и вспомогательные утверждения

Как уже было отмечено в главе 1 диссертации, в теории функции вещественной переменной хорошо известна теорема И.И.Привалова об инвариантности класса функции $Lip(\alpha;C(T))$ $(0<\alpha<1)$ относительно оператора $\tilde{f}$. Харди и Литтльвуд [30] показали, что и класс $Lip(\alpha;L(T))$ $(0<\alpha<1)$ инвариантен относительно оператора $\tilde{f}$, а в случае $\alpha=1$, Зигмундом было доказано аналог теоремы Харди-Литтльвуда для модулей неприрывности второго порядка.

В настоящей главе диссертаций изучается проблема нарушения инвариантности классов $H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^n))$ $(n\geq 2)$ относительно действующего на них многомерного оператора сопряжения $\tilde{f}_B$.

Теперь приведем утверждения, которые играют важную роль при доказательстве основных результатов.

Лемма 2.1.1. (см. [11, с. 239]. а) Пусть функция $f\in L(T^n)$ и для некоторого $\beta\in[0,n-1]$

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left(f_i;\frac{1}{p}\right)_{L(T^n)}\right][\ln(p+1)]^{\beta}<+\infty. \qquad (2.1.1)$$

Тогда все функции $\widetilde{f}_B$ с $|B|\in[1;\beta+1]$ интегрируемы на T^n.

б) Пусть $\beta\in[0, n\text{-}1]$ - некоторое число. Существует функция $f\in L(T^n)$, для которой с указанной β выполнено (2.1.1), однако функции $\widetilde{f}_B$ с $|B|\in(\beta+1,m]$ не интегрируемы на T^n.

Лемма 2.1.2. (см. например, [28, с. 111]). Для любого модуля непрерывности ω

$$\frac{\omega(u_2)}{u_2}\le 2\frac{\omega(u_1)}{u_1},\quad u_1<u_2,$$

а при выпуклости ω множитель 2 в правой части данного неравенства можеть быть опущен.

§2.2. О деформации классов $H(\omega_1,...,\omega_m; L(T^m))$

Справедлива

Теорема 2.2.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega_1,...,\omega_m;\ L(T^m))$ $(m\ge 2)$ и модули непрерывности ω_i $(i=1,..., m)$ удовлетворяют условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B\in\left[\bigcap_{i\in B}H_i(\omega_i|\ln|^{|B|-1};L(T^m))\right]\bigcap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B}H_j(\omega_j|\ln|^{|B|};L(T^m))\right];$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_1,...,\omega_m;\ L(T^m))$ $(m\ge 2)$ такая, что

$$\omega_i(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^m)}\ge C\omega_i(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1}$$

при $0\le\delta\le\delta_0$, $i\in B$,

$$\omega_j(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^m)}\ge C\omega_j(\delta)|\ln\delta|^{|B|}$$

при $0\le\delta\le\delta_0$, $j\in M\setminus B$, где C и δ_0 положительные константы.

Доказательство. а) Так как модули непрерывности ω_i (i=1,..., m) удовлетворяют условию Зигмунда, то $\tilde{f}_B \in L(T^m)$ (см. лемма 2.1.1), причем порядок сопряжения не имеет значения. Справедливость утверждения пункта (а), с учетом сказанного, вытекает из леммы 1.2.5.

б) Рассмотрим тот случай, когда размерность евклидова пространства равна m ($m \geq 2$), а количество сопряжений оператора $\tilde{f}_B$ равно m-1.

Не нарушая общности наших рассуждений, доказательство утверждения пункта (б) при $|B|=m-1$ приведем лишь для оператора

$$\tilde{f}_{\{1,\ldots,m-1\}}(x_1,\ldots,x_m) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{m-1} \int\limits_{T^{m-1}} f(x_1+u_1,\ldots,x_{m-1}+u_{m-1},x_m) \times \\ \times \prod_{i=1}^{m-1} ctg\frac{u_i}{2} du_1 \cdots du_{m-1}. \tag{2.2.1}$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_n)_{n\geq 1}$ такую, что

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < 1, \quad b_0 = 0,$

2) $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} b_i < b_n,$

3) Для любого i (i=1,...,m)

$$\omega_i^{-1}(b_{n+1}) < \left[\omega_i^{-1}(b_n)\right]^{\frac{1}{1-\alpha_i}},$$

где α_i ($0<\alpha_i<1$) (i=1,...m) удовлетворяют условию леммы 1.2.1.

Положим

$$\tau_{n,i}=2\sum_{k=0}^{n-1}\omega_i^{-1}(b_k),$$

$$\tau_{n,i}^{*}=\tau_{n,i}+\omega_i^{-1}(b_n)\ (i=1,...,m;\ n=1,2,...).$$

Далее, для любого n=1,2,... рассмотрим функцию $g_{n,i}:T\to R(i=1,...m)$ следующего вида:

$$g_{n,i}(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau_{n,i}^{*}-\tau_{n,i}}, & u\in\left[0,\tau_{n,i}^{*}-\tau_{n,i}\right];\\ 0, & u\in T\setminus\left[0,\tau_{n,i}^{*}-\tau_{n,i}\right].\end{cases}$$

При любом n=1,2,... положим:

$$G_n(x)=G_n(x_1,...,x_m)=\begin{cases}\dfrac{b_n}{\tau_{n,m}^{*}-\tau_{n,m}}g_{n,1}(x_1)\cdots g_{n,m-1}(x_{m-1})\omega_m(x_m),\\ \qquad x_i\in T(i=1,...,m-1),\ x_m\in[\tau_{n,m},\tau_{n,m}^{*});\\ 0, \qquad x_i\in T(i=1,...,m-1),x_m\in T\setminus[\tau_{n,m},\tau_{n,m}^{*}).\end{cases}$$

Далее, определим теперь функцию $G{:}T^m\to R$ равенством

$$G(x)=G(x_1,...,x_m)=\sum_{n=1}^{\infty}G_n(x_1,...,x_m).$$

Построенную функцию G продолжим 2π-периодически на все пространство R^m. Очевидно, что $G\in L(T^m)$.

Докажем, что

$$G\in H(\omega_1,...,\omega_m;\ L(T^m)).$$

Пусть $0<h<\omega_m^{-1}(b_1)$. Тогда

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,...,x_{m-1},x_m+h)-G(x_i,...,x_m)\right\|_{L(T^m)}=$$
$$=\int_{T^m}\left|G(x_1,...,x_{m-1},x_m+h)-G(x_1,...,x_m)\right|dx_1\cdots dx_m\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^m}\left|G_n(x_1,...,x_{m-1},x_m+h)-G_n(x_1,...,x_m)\right|dx_1\cdots dx_m=\sum_{n=1}^{\infty}I_n(h).$$

Оценим интегралы $I_n(h)$ (n=1,2,....) по отдельности.

Существует такой номер N, что $h \in \left[\tau^*_{N+1,m} - \tau_{N+1,m}, \tau^*_{N,m} - \tau_{N,m}\right)$.

Если n=1,..., N, то по построению функции G_n будем иметь:

$$I_n(h) \le \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}-h} \left|G_n(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h) - G_n(x_1,\dots,x_m)\right| dx_1 \cdots dx_m +$$

$$+ \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}-h}^{\tau_{n,m}} G_n(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h) dx_1 \cdots dx_m + \int_{T^{m-1}} \int_{\tau^*_{n,m}-h}^{\tau^*_{n,m}} G_n(x_1,\dots,x_m) dx_1 \cdots dx_m \le$$

$$\le \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}-h} [\omega_m(x_m+h) - \omega_m(x_m)] \frac{b_n}{\tau^*_{n,m} - \tau_{n,m}} g_{n,1}(x_1)\dots g_{n,m-1}(x_{m-1}) dx_1 \cdots dx_m +$$

$$+ \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}-h}^{\tau_{n,m}} \frac{b_n}{\tau^*_{n,m} - \tau_{n,m}} \omega_m(x_m+h) g_{n,1}(x_1)\dots g_{n,m-1}(x_{m-1}) dx_1 \cdots dx_m +$$

$$+ \int_{T^{m-1}} \int_{\tau^*_{n,m}-h}^{\tau^*_{n,m}} \frac{b_n}{\tau^*_{n,m} - \tau_{n,m}} \omega_m(x_m) g_n(x_1)\dots g_{n,m-1}(x_{m-1}) dx_1 \cdots dx_m \le b_n \omega_m(h) +$$

$$+ \frac{2b_n}{\tau^*_{n,m} - \tau_{n,m}} h \omega_m(\tau^*_{n,m}).$$

При n=N+1,...

$$I_n(h) \le 2\omega_m(\tau^*_{n,m}) b_n.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h) - G(x_1,\dots,x_m) \right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N} b_n \omega_m(h) + \sum_{n=1}^{N} \frac{2b_n}{\tau^*_{n,m} - \tau_{n,m}} h \omega_m(\tau^*_{n,m}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2\omega_m(\tau^*_{n,m}) b_n.$$

Если $\tau^*_{N+1,m} - \tau_{N+1,m} \le h \le (\tau^*_{N,m} - \tau_{N,m})^{\frac{1}{1-\alpha_m}}$, то в силу леммы 1.2.1 и построению последовательности $(b_n)_{n\ge1}$ будем иметь:

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h) - G(x_1,\dots,x_m) \right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{N} b_n \omega_m(h) + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{\tau^*_{n,m} - \tau_{n,m}} \omega_m(\tau^*_{n,m}) h^{\alpha_m} h^{1-\alpha_m} + 2\omega(\pi) \sum_{n=M+1}^{\infty} b_n \le A_1 \omega_m(h),$$

если же $(\tau^*_{N,m}-\tau_{N,m})^{1-\alpha_m}<h<\tau^*_{N,m}-\tau_{N,m}$ то принимая во внимание леммы 1.2.1 и 2.1.2 и свойства последовательности $(b_n)_{n\geq 1}$, получим

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-G(x_1,\ldots,x_m)\right\|_{L(T^m)}\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{N}b_n\omega_m(h)+2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{b_n}{\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}}\omega(\tau^*_{n,m})h^{\alpha_m}h^{1-\alpha_m}+$$

$$+2\frac{b_N}{\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}}h\omega_m(\tau^*_{N,m})+2\omega(\pi)\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n\leq A_2\omega_m(h),$$

где A_1 и A_2 некоторые положительные константы.

Значит,

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-G(x_1,\ldots,x_m)\right\|_{L(T^m)}\leq A\omega_m(h),\ A=const>0.$$

Для $0<h<\omega_k^{-1}(b_1)$ $(k=1,\ldots,m-1)$ имеем:

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},\ldots,x_m)-G(x_1,\ldots,x_m)\right\|_{L(T^m)}=$$

$$\int_{T^m}\left|G(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_m)-G(x_1,\ldots,x_m)\right|dx_1\cdots dx_m\leq$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}}\left|G_n(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_m)-G_n(x_1,\ldots,x_m)\right|dx_1\cdots dx_m=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}}\frac{b_n}{\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}}\omega_m(x_m)g_{n,1}(x_1)\ldots g_{n,k-1}(x_{k-1})g_{n,k+1}(x_{k+1})\ldots g_{n,m-1}(x_{m-1})\times$$

$$\times\left|g_{n,k}(x_k+h)-g_{n,k}(x_k)\right|dx_1\cdots dx_m\leq\sum_{n=1}^{\infty}b_n\omega_m(\tau^*_{n,m})\int_T\left|g_{n,k}(x_k+h)-g_{n,k}(x_k)\right|dx_k.$$

Существует такой номер N, что $h\in\left[\tau^*_{N+1,k}-\tau_{N-1,k},\tau^*_{N,k}-\tau_{N,k}\right)$.

При $n=1,\ldots,N$,

$$\int_T\left|g_{n,k}(x_k+h)-g_{n,k}(x_k)\right|dx_k=\frac{2h}{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}},$$

и при $n=N+1$,

$$\int_T\left|g_{n,k}(x_k+h)-g_{n,k}(x_k)\right|dx_k\leq 2.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,\dots,x_m)-G(x_1,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le 2\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}}\omega_m(\tau^*_{n,m})h+2\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n\omega_m(\tau^*_{n,m}).$$

Если $\tau^*_{N+1,k}-\tau_{N+1,k}\le h\le(\tau^*_{N,k}-\tau_{N,k})^{\frac{1}{1-\alpha_k}}$, то по лемме 1.2.1 и по построению последовательности $(b_n)_{n\ge1}$ будем иметь:

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)-G(x_1,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)} \le B_1\omega_k(h).$$

Если же $(\tau^*_{N,k}-\tau_{N,k})^{\frac{1}{1-\alpha_k}}<h<\tau^*_{N,k}-\tau_{N,k}$, то

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,\dots,x_m)-G(x_1,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le 2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{b_n}{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}}\omega_m(\tau^*_{n,m})h+2\frac{b_N}{\tau^*_{N,k}-\tau_{N,k}}\omega_m(\tau^*_{N,m})h+2\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n\omega_m(\tau^*_{n,m})\le B_2\omega_k(h),$$

где B_1 и B_2 - положительные константы.

Значит,

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)-G(x_1,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)} \le B\omega_k(h),\ B=const>0.$$

Т.е.,

$$G\in H(\omega_1,\dots,\omega_m;\, L(T^m)).$$

Оценим теперь $\omega_k(\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}};\delta)_{L(T^m)}$ (k=1,...,m) снизу.

Для $h=\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}$ (n=2,3,...) согласно (2.2.1) и по построению функции G получим:

$$(2\pi)^{2m-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h)-\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)} \ge$$

$$\ge \int\limits_{T^{m-1}}\int\limits_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}}\left|\int\limits_{T^{m-1}}\frac{b_n}{\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}}\omega_m(x_m)g_{n,1}(x_1+u_1)\cdots\times\right.$$

$$\left.\times g_{n,m-1}(x_{m-1}+u_{m-1})\prod_{i=1}^{m-1}ctg\frac{u_i}{2}du_1\cdots du_{m-1}\right|dx_1\cdots dx_m \ge$$

$$\geq b_n\omega_m(\tau_{n,m})\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_{n,1}(x_1+u_1)ctg\frac{u_1}{2}du_1\right|dx_1\cdots\times$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_{n,m-1}(x_{m-1}+u_{m-1})ctg\frac{u_{m-1}}{2}du_{m-1}\right|dx_{m-1}.$$

Для любого k (k=1,...,m-1) оценим интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_{n,k}(x_k+u_k)ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k$$

снизу.

$$\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_{n,k}(x_k+u_k)ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k\geq\int\limits_{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}}^{\pi/2}\left[\int\limits_{x_k-(\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k})}^{x_k}\frac{1}{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}}\frac{1}{u_k}du_k\right]dx_k\geq$$

$$\geq\frac{1}{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}}\int\limits_{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}}^{\pi/2}\frac{\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}}{x_k}dx_k\geq\left|\ln(\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k})\right|\geq C_1\left|\ln(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})\right|,$$

где $C_1=const$ и $C_1>0$.

Т.е.,

$$(2\pi)^{2m-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,...,m-1\}}(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}))-\widetilde{G}_{\{1,\ ,m-1\}}(x_1,\ldots,x_m)\right\|_{L(T^m)}\geq$$

$$\geq C_2\omega_m(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})\left|\ln(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})\right|^{m-1},\qquad C_2=const>0.$$

Значит,

$$\omega_m(\widetilde{G}_{\{1,...,m-1\}};\delta)_{L(T^m)}\geq C_3\omega_m(\delta)\,|\ln\delta\,|^{m-1},$$

$$\delta\to 0+,\quad C_3=const.$$

Пусть теперь $h=\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k}$ (k=1,...,m-1; n=2,3,...)

По построению функции G имеем:

$$(2\pi)^{2m-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,...,m-1\}}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1},\ldots,x_m)-\widetilde{G}_{\{1,...,m-1\}}(x_1,\ldots,x_m)\right\|_{L(T^m)}\geq$$

$$\geq\int\limits_{T^{m-1}}\int\limits_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}}\left|\int\limits_{T^{m-1}}\frac{b_n}{\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}}\omega_m(x_m)g_{n,1}(x_1+u_1)\cdots\times\right.$$

$$\times g_{n,k-1}(x_{k-1}+u_{k-1})g_{n,k+1}(x_{k+1}+u_{k+1})\cdots g_{n,m-1}(x_{m-1}+u_{m-1})\times$$

$$\left.\times(g_{n,k}(x_k+u_k+h)-g_{n,k}(x_k+u_k))\prod_{i=1}^{m-1}ctg\frac{u_i}{2}du_1\cdots du_{m-1}\right|dx_1\cdots dx_m\geq$$

$$\geq b_n\omega_m(\tau_{n,m})\int_0^{\pi/2}\left|\int_T g_{n,1}(x_1+u_1)ctg\frac{u_1}{2}du_1\right|dx_1\cdots\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\left|\int_T g_{n,k-1}(x_{k-1}+u_{k-1})ctg\frac{u_{k-1}}{2}du_{k-1}\right|dx_{k-1}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\left|\int_T g_{n,k+1}(x_{k+1}+u_{k+1})ctg\frac{u_{k+1}}{2}du_{k+1}\right|dx_{k+1}\cdots\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\left|\int_T g_{n,m-1}(x_{m-1}+u_{m-1})ctg\frac{u_{m-1}}{2}du_{m-1}\right|dx_{m-1}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\left|\int_T (g_{n,k}(x_k+u_k+h)-g_{n,k}(x_k+u_k))ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k\geq$$

$$\geq C_5\omega_k(\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k})\left|\ln(\tau^*_{n,k}-\tau_{n,k})\right|^{m-2}.$$

Значит,

$$\omega_k(\widetilde{G}_{\{1,\ldots,m-1\}};\delta)_{L(T^m)}\geq C_5\omega_k(\delta)|\ln\delta|^{m-2},$$

$$\delta\to 0+,\quad k=1,\ldots,m-1,\ C_5=const.$$

Для функции $\widetilde{G}_{\{1,\ldots,m\}}$ можно заключить, что

$$\omega_m(\widetilde{G}_{\{1,\ldots,m\}};\delta)_{L(T^m)}\geq C\omega_m(\delta)|\ln\delta|^{m-1},$$

$$\delta\to 0+,\ C=const.$$

Теорема 2.2.1 доказана.

§ 2.3. Деформации классов $H(\omega_2;L(T^m))$

Справедлива

Теорема 2.3.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega_2;L(T^m))$ $(m\geq 2)$ и модуль непрерывности второго порядка ω_2 удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B \in \left[\bigcap_{i\in B} H_i\left(\omega_2 |\ln|^{|B|-1}; L(T^m)\right)\right] \cap \left[\bigcap_{j\in M\setminus B} H_j\left(\omega_2 |\ln|^{|B|}; L(T^m)\right)\right],$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_2;L(T^m))$ $(m\geq 2)$ такая, что

$$\omega_{2,i}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1}$$

$$(i\in B,\ \delta\to 0+),$$

$$\omega_{2,j}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_2(\delta)|\ln\delta|^{|B|}$$

$$(j\in M\setminus B,\ \delta\to 0+\ ),\ C=const>0.$$

Доказательство. а) Так как модуль непрерывности второго порядка ω_2 удовлетворяет условию Зигмунда, то $\widetilde{f}_B \in L(T^m)$ (см. лемма 2.1.1 и лемма 1.2.3), причем порядок сопряжения не имеет значения. Справедливость утверждения пункта (а) с учетом сказанного, вытекает из леммы 1.2.5.

б) Рассмотрим тот случай, когда размерность евклидова пространства равна m $(m\geq 2)$, а количество сопряжений оператора $\widetilde{f}_B$ равно m-1.

Не нарушая общности наших рассуждении, доказательство утверждения пункта (б) при $|B|=m$-1 приведем лишь для оператора

$$\widetilde{f}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_m) =$$

$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{m-1} \int_{T^{m-1}} f(x_1+u_1,\dots,x_{m-1}+u_{m-1},x_m)\prod_{i=1}^{m-1} ctg\frac{u_i}{2}du_1\cdots du_{m-1}.$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_n)_{n\geq 1}$ такую, что

1) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < 1, \quad b_0 = 0;$

2) $\sum_{i=n+1}^{\infty} b_i \leq b_n;$

3) $\omega_2^{-1}(b_{n+1}) \leq [\omega_2^{-1}(b_n)]^{2-\alpha}$,

где $\omega_2^{-1}(b_n)$ (n=1,2,...) некоторый элемент множества $\{t: \omega_2(t)=b_n\}$, а α ($1 \leq \alpha < 2$) удовлетворяет условию леммы 1.2.1.

Положим

$$\tau_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} \omega_2^{-1}(b_k), \quad \tau_n^* = \tau_n + \omega_2^{-1}(b_n) \quad (n = 1,2,\ldots).$$

Для любого n=1,2,... рассмотрим функцию $g_n: T \to R$ следующего вида

$$g_n(u) = \begin{cases} \dfrac{u(\tau_n^* - \tau_n - u)}{(\tau_n^* - \tau_n)^3}, & u \in [0, \tau_n^* - \tau_n]; \\ 0, & u \in T \setminus [0, \tau_n^* - \tau_n]. \end{cases}$$

При любом n=1,2,... положим:

$$G_n(x_1,\ldots,x_m) = \begin{cases} \dfrac{b_n}{(\tau_n^* - \tau_n)^3} g_n(x_1)\ldots g_n(x_{m-1})(x_m - \tau_n)(\tau_n^* - x_m) \\ \qquad x_i \in T \ (i = 1,\ldots,m-1) \ x_m \in [\tau_n; \tau_n^*); \\ \\ 0, \qquad x_i \in T \ (i = 1,\ldots,m-1), \ x_m \in T \setminus [\tau_n, \tau_n^*). \end{cases}$$

Определим функцию $G: T^m \to R$ равенством

$$G(x) = G(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x_1,\ldots,x_m).$$

Построенную функцию G продолжим 2π-периодически на все пространство R^m.

Функция G принадлежит классу $L(T^m)$.

Докажем, что

$$G \in H(\omega_2; L(T^m)).$$

Пусть $0<2h<\tau_1^*-\tau_1$. Рассмотрим

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)}=$$

$$=\int_{T^m}\left|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right|dx_1\cdots dx_m\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^m}\left|G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G_n(x_1,\ldots,x_m)+G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right|dx_1\cdots dx_m.$$

Существует такой номер N, что $2h\in[\tau_{N+1}^*-\tau_{N+1};\tau_N^*-\tau_N]$.

Если n=1,...,N, то

$$\int_{T^m}\left|G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G_n(x_1,\ldots,x_m)+G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right|dx_1\cdots dx_m\le$$

$$\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n-h}^{\tau_n^*-h}\left|G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G_n(x_1,\ldots,x_m)+G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right|dx_1\cdots dx_m+$$

$$+\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n-h}^{\tau_n+h}G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)dx_1\cdots dx_m+2\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n}^{\tau_n+h}G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m)dx_1\cdots dx_m+$$

$$+\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n^*-h}^{\tau_n^*}G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m)dx_1\cdots dx_m+\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n^*-h}^{\tau_n^*+h}G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)dx_1\cdots dx_m=$$

$$=\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n+h}^{\tau_n^*-h}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}h^2g_n(x_1)\ldots g_n(x_{m-1})dx_1\cdots dx_m+$$

$$+\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n-h}^{\tau_n+h}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}(x_m+h-\tau_n)(\tau_n^*-x_m-h)g_n(x_1)\ldots g_n(x_{m-1})dx_1\cdots dx_m+$$

$$+2\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n}^{\tau_n+h}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}(x_m-\tau_n)(\tau_n^*-x_m)g_n(x_1)\ldots g_n(x_{m-1})dx_1\cdots dx_m+$$

$$+\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_n^*-h}^{\tau_n^*+h}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}(x_m-h-\tau_n)(\tau_n^*-x_m+h)g_n(x_1)\ldots g_n(x_{m-1})dx_1\cdots dx_m\le$$

$$\le 9\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}h^2.$$

При n=N+1,

$$\int_{T^m}\left|G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G_n(x_1,\ldots,x_m)+G_n(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right|dx_1\cdots dx_m \le 4$$

Т.е.,

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)} \le$$
$$\le 14\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}h^2+\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n.$$

1. Пусть $\tau_{N+1}^*-\tau_{N+1}\le 2h\le(\tau_N^*-\tau_N)^{\frac{2}{2-\alpha}}$.

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)} \le$$
$$\le 14\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}h^\alpha\cdot h^{2-\alpha}+2b_{N+1}\le A_1\,\omega_2(h).$$

2. Пусть $(\tau_N^*-\tau_N)^{\frac{2}{2-\alpha}}<2h<\tau_N^*-\tau_N$.

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)} \le$$
$$\le 9\sum_{n=1}^{N-1}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}h^\alpha\cdot h^{2-\alpha}+\frac{b_n}{(\tau_N^*-\tau_N)^2}h^2+2b_{N+1}\le 9A_1'\omega_2(h)+A_2'\omega_2(h)+$$
$$+2\omega_2(h)=A_2\omega_2(h)$$

Значит,

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)}\le A\omega_2(h)$$

Пусть $0<2h<\tau_1^*-\tau_1$. Для любого k=1,...,m-1 рассмотрим

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_m)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_k-h,\ldots,x_m)\right\|_{L(T^m)}=$$
$$=\int_{T^m}\left|G(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_m)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_k-h,\ldots,x_m)\right|dx_1\cdots dx_m\le$$
$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^m}\int_{\tau_n}^{\tau_n^*}\left|G(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_m)-2G(x_1,\ldots,x_m)+G(x_1,\ldots,x_k-h,\ldots,x_m)\right|dx_1\cdots dx_m=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^m}\int_{\tau_n}^{\tau_n^*}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}(x_m-\tau_n)(\tau_n^*-x_m)g_n(x_1)\ldots g_n(x_{k-1})g_n(x_{k+1})\ldots g_n(x_{m-1})\times$$

$$\times\left|g_n(x_k+h)-2g_n(x_k)+g_n(x_k-h)\right|dx_1\cdots dx_m\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_T\left|g_n(x_k+h)-2g_n(x_k)+g_n(x_k-h)\right|dx_k.$$

Существует такой номер N, что $2h\in[\tau_{N+1}^*-\tau_{N+1},\tau_N^*-\tau_N)$.

При n=1,...,N

$$\int_T\left|g_n(x_k+h)-2g_n(x_k)+g_n(x_k-h)\right|dx_k\le$$

$$\le\int_h^{(\tau_n^*-\tau_n)-h}\left|g_n(x_k+h)-2g_n(x_k)+g_n(x_k-h)\right|dx_k+$$

$$+\int_{-h}^{h}g_n(x_k+h)dx_k+2\int_0^h g_n(x_k)dx_k+$$

$$+2\int_{(\tau_n^*-\tau_n)-h}^{\tau_n^*-\tau_n}g_n(x_k)dx_k+\int_{(\tau_n^*-\tau_n)-h}^{(\tau_n^*-\tau_n)+h}g_n(x_k-h)dx_k\le\frac{2h^2}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}+\frac{2h^2}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}+$$

$$+\frac{2h^2}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}+\frac{2h^2}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}+\frac{2h^2}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}=\frac{10h^2}{(\tau_n^*-\tau_n)^2},$$

а при n=N+1,...

$$\int_T\left|g_n(x_k+h)-2g_n(x_k)+g_n(x_k-h)\right|dx_k\le 4.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)-2G(x_1,\dots,x_m)+G(x_1,\dots,x_k-h,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)}\le$$

$$\le10\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}h^2+4\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n.$$

1. Если $\tau_{N+1}^*-\tau_{N+1}\le2h\le(\tau_N^*-\tau_N)^{\frac{2}{2-\alpha}}$, то

$$(2\pi)^m\left\|G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)-2G(x_1,\dots,x_m)+G(x_1,\dots,x_k-h,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)}\le$$

$$\le10B_1\omega_2(h)+8\omega_2(h)=B_1\omega_2(h).$$

2. Если $(\tau_N^*-\tau_N)^{\frac{2}{2-\alpha}}<2h<\tau_N^*-\tau_N$, то

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)-2G(x_1,\dots,x_m)+G(x_1,\dots,x_k-h,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le 10\sum_{n=1}^{N-1}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^2}h^2+10\frac{b_N}{(\tau_N^*-\tau_N)^2}h^2+8b_{N+1}\le B_2\omega_2(h).$$

Значит,

$$(2\pi)^m \left\| G(x_1,\dots,x_k+h,\dots,x_m)-2G(x_1,\dots,x_m)+G(x_1,\dots,x_k-h,\dots,x_m)\right\|_{L(T^m)} \le B\omega_2(h)$$

Т.е.,

$$G\in H(\omega_2;L(T^m)).$$

Пусть $2h=\tau_n^*-\tau_n$.

Для функции G имеем

$$(2\pi)^{2m-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h)-2\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_m)+\right.$$

$$\left.+\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)}=\int\limits_{T^m}\left|\int\limits_{T^{m-1}}[G(x_1+u_1,\dots,x_{m-1}+u_{m-1},x_m+h)-\right.$$

$$-2G(x_1+u_1,\dots,x_{m-1}+u_{m-1},x_m)+G(x_1+u_1,\dots,x_{m-1}+u_{m-1},x_m-h)]\times$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{m-1}ctg\frac{u_i}{2}du_1\cdots du_{m-1}\right|dx_1\cdots dx_m.$$

По построению функции G получим:

$$(2\pi)^{2m-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,\ ,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h)-2\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_m)+\right.$$

$$\left.\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)}\ge$$

$$=\int\limits_{T^{m-1}}\int\limits_{\tau_n}^{\tau_n^*}\left|\int\limits_{T^{m-1}}\frac{b_n}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}(x_m-\tau_n)(\tau_n^*-x_m)g_n(x_1+u_1)\cdots\times\right.$$

$$\left.\times g_n(x_{m-1}+u_{m-1})\prod_{i=1}^{m-1}ctg\frac{u_i}{2}du_1\cdots du_{m-1}\right|dx_1\cdots dx_m\ge$$

$$\ge\frac{1}{6}b_n\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_n(x_1+u_1)ctg\frac{u_1}{2}du_1\right|dx_1\cdots\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_n(x_{m-1}+u_{m-1})ctg\frac{u_{m-1}}{2}du_{m-1}\right|dx_{m-1}.$$

Для любого k (k=1,...,m-1) рассмотрим

$$\int_0^{\pi/2}\left|\int_T g_n(x_k+u_k)ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k=\int_0^{\pi/2}\left|\int_0^{\pi}[g_n(x_k+u_k)-g_n(x_k-u_k)]ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left|\int_0^{x_k}[g_n(x_k+u_k)-g_n(x_k-u_k)]ctg\frac{u_k}{2}du_k+\right.$$

$$+\int_{x_k}^{\pi-x_k}[g_n(x_k+u_k)-g_n(x_k-u_k)]ctg\frac{u_k}{2}du_k+$$

$$\left.+\int_{\pi-x_k}^{\pi}[g_n(x_k+u_k)-g_n(x_k-u_k)]ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k\geq$$

$$\geq\int_{\tau_n^*-\tau_n}^{\pi/2}\left[\int_0^{x_k}g_n(x_k-u_k)ctg\frac{u_k}{2}du_k\right]dx_k\geq\int_{\tau_n^*-\tau_n}^{\pi/2}\left[\int_0^{x_k}g_n(x_k-u_k)\frac{1}{u_k}du_k\right]dx_k=$$

$$=\int_{\tau_n^*-\tau_n}^{\pi/2}\left[\int_{x_k-(\tau_n^*-\tau_n)}^{x_k}\frac{(x_k-u_k)(\tau_n^*-\tau_n-x_k+u_k)}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}\frac{1}{u_k}du_k\right]dx_k\geq$$

$$\geq\frac{1}{(\tau_n^*-\tau_n)^3}\int_{\tau_n^*-\tau_n}^{\pi/2}\frac{1}{x_k}\left[\int_{x_k-(\tau_n^*-\tau_n)}^{x_k}(x_k-u_k)(\tau_n^*-\tau_n-x_k+u_k)du_k\right]dx_k=$$

$$=\frac{1}{6}\int_{\tau_n^*-\tau_n}^{\pi/2}\frac{1}{x_k}dx_k=\frac{1}{6}\left(\ln\frac{\pi}{2}-\ln(\tau_n^*-\tau_n)\right)\geq\frac{1}{6}\left|\ln(\tau_n^*-\tau_n)\right|.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^{2m-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,..,m-1\}}(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m+h)-2\widetilde{G}_{\{1,..,m-1\}}(x_1,\ldots,x_m)+\right.$$

$$\left.+\widetilde{G}_{\{1,..,m-1\}}(x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-h)\right\|_{L(T^m)}\geq\frac{1}{6^m}\omega_3(\tau_n^*-\tau_n)\,|\ln(\tau_n^*-\tau_n)|^{m-1}.$$

Значит,

$$\omega_{2,m}(\widetilde{G}_{\{1,\ldots,m-1\}};\delta)_{L(T^m)}\geq C\omega_2(\delta)\,|\ln\delta|^{m-1}\quad(\delta\to 0+).$$

Функцию G от m переменных обозначим символом $\Lambda(m,l_m)$ и назовем ее функцией типа Λ размерности m по координатному направлению l_m.

Функция $\Lambda(m,l_m)$ обладает следующей особенностью:

а) $\Lambda(m,l_m)\in H(\omega_2;L(T^m))$, б) $\widetilde{\Lambda}_{\{1,\dots,m-1\}}(m,l_m) \in H(\omega_2|\ln|^{m-1};L(T^m))$,

причем, эти включения являются точными.

Точно также можно построит и функции $\Lambda(m,l_1),\dots, \Lambda(m,l_{m-1})$ $(m\geq 2)$.

Замечание. Пусть ω_2 - модуль непреривности второго порядка, который удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда существует функция $F_1 \in L(T)$ такая, что

$$A_1\omega_2(\delta)\leq\omega_2(F_1;\delta) \leq A_2\omega_2(\delta).$$

Функцию F_1 обозначим через $\Lambda(1,l_1)$.

Далее, рассмотрим функцию $F : R^m \to R$, которая в каждой точке x пространства R^m задана равенством

$$F(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \Lambda(m-1,l_k)(x_1,\dots,x_{m-1}) + \Lambda(m,l_m)(x_1,\dots,x_m).$$

$F \in H(\omega_2;L(T^m))$ и

$$\omega_{2,i}(\widetilde{F}_{\{1,\dots,m-1\}};\delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_2(\delta)\,|\ln\delta\,|^{m-2}$$

$$(i=1,\dots,m-1,\ \delta\to 0+),$$

$$\omega_{2,m}(\widetilde{F}_{\{1,\dots,m-1\}};\delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_2(\delta)\,|\ln\delta\,|^{m-1}$$

$$(\delta\to 0+),\quad C=const>0.$$

Итак, справедливость утверждения пункта (б) теоремы нами доказана в том случае, когда количество сопряжений оператора равно m-1.

Пусть Всюду на R^m

$$K(x) = \sum_{k=1}^{m} \Lambda(m,l_k)(x).$$

$K \in H(\omega_2;L(T^m))$ и

$$\omega_{2,i}(\widetilde{K}_{\{1,\dots,m\}};\delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_2(\delta)\,|\ln\delta\,|^{m-1}$$

$$(i=1,\dots,m;\ \delta\to 0+),\quad C=const>0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что утверждение Зигмунда об инвариантности класса $H(\omega_2;L(T))$ относительно действующего в нем оператора сопряжения $\widetilde{f}$, вообще говоря, не имеет место в многомерном случае.

§ 2.4. О деформации классов $H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^m))$

Справедлива

Теорема 2.4.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^m))$ $(m\geq 2,\ k\geq 3)$ и модуль непрерывности порядка k $\omega_{k,i}$ $(i=1,\dots,m)$ удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\widetilde{f}_B \in \left[\bigcap_{i\in B} H_i\left(\omega_{k,i}|\ln|^{|B|-1};L(T^m)\right)\right]\cap\left[\bigcap_{j\in M\setminus B} H_j\left(\omega_{k,j}|\ln|^{|B|};L(T^m)\right)\right];$$

б) Существует функция $F\in H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^m))$ $(m\geq 2,\ k\geq 3)$ такая, что

$$\omega_{k,i}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_{k,i}(\delta)|\ln\delta|^{|B|-1}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $i\in B$,

$$\omega_{k,j}(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^m)} \geq C\omega_{k,j}(\delta)|\ln\delta|^{|B|}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $i\in M\setminus B$,

где C и δ_0 положительные константы, не зависящие от δ.

Доказательство. а) Так как модуль непрерывности порядка k удовлетворяет условию Зигмунда, то $\widetilde{f}_B \in L(T^m)$ (сл. лемма 2.1.1 и лемма 1.2.3), причем порядок сопряжения не имеет значения. Справедливость утверждения пункта (а), с учетом сказанного, вытекает из леммы 1.2.5.

б) Рассмотрим случай, когда размерность евклидова пространства равна m ($m \geq 2$), а количество сопряжений оператора $\widetilde{f}_B$ равно m-1.

Не нарушая общности наших рассуждений, доказательство утверждения пункта (б) при $|B|=m-1$ приведем лишь для оператора

$$\widetilde{f}_{\{1,\dots,m-1\}}(x) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{m-1} \int\limits_{T^{m-1}} f(x_1+u_1,\dots,x_{m-1}+u_{m-1},x_m)\prod_{i=1}^{m-1} ctg\frac{u_i}{2}\,du_1\cdots du_{m-1}.$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_n)_{n\geq 1}$ такую, что

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < 1, b_0 = 0,$

2) $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} b_i \leq b_n,$

3) для любого i (i=1,...,m)

$$\omega_{k,i}^{-1}(b_{n+1}) \leq \left(\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{\alpha_i}{k}} \omega_{k,i}^{-1}(b_n)\right)^{\frac{k}{k-\alpha_i}},$$

где $\omega_{k,i}^{-1}(b_n)$ (n=1,2...) некоторый элемент множества $\{t : \omega_{k,i}(t)=b_n]$, а α_i ($0<\alpha_i<k$), i=1,...,m, удовлетворяют условию леммы 1.2.1.

Положим

$$\tau_{n,i} = 2\sum_{j=0}^{n-1}\omega_{k,i}^{-1}(b_j), \quad \tau_{n,i}^* = \tau_{n,i} + \frac{2}{k+1}\omega_{k,i}^{-1}(b_n)$$

$(i=1,\ldots,m;\ n=1,2,\ldots)$.

Для любого $n=1,2,\ldots$ рассмотрим функцию $g_{n,i} : T\to R$ $(i=1,\ldots,m)$ следующего вида

$$g_{n,i}(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{k-1}(\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i} - u)^{k-1}}{(\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i})^{2k-1}}, & u \in \left[0, \tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}\right], \\ 0, & u \in T \setminus \left[0, \tau_{n,i}^* - \tau_{n,i}\right] \end{cases}$$

При любом $n=1,2,\ldots$ положим:

$$G_{n,i}(x_1,\ldots,x_m) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b_n}{(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})^{2k-1}} g_{n,1}(x_1)\ldots g_{n,m-1}(x_{m-1})(x_m - \tau_{n,m})^{k-1}(\tau_{n,m}^* - x_m)^{k-1}, \\ \qquad x_i \in T(i=1,\ldots,m-1), \quad x_m \in [\tau_{n,m}, \tau_{n,m}^*), \\ 0, \qquad x_i \in T(i=1,\ldots,m-1), \quad x_m \in T \setminus [\tau_{n,m}, \tau_{n,m}^*). \end{cases}$$

Далее, определим функцию $G : T^m\to R$ равенством

$$G(x) = G(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x_1,\ldots,x_m).$$

Построенную функцию G продолжим 2π-периодически на все пространства R^m. Очевидно, что $G\in L(T^m)$.

Докажем, что

$$G \in H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^n)).$$

Пусть $0 < h < \dfrac{\tau_{1,m}^* - \tau_{1,m}}{k}$. Тогда

$$(2\pi)^m\left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)\binom{k}{j}G(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh)\right\|_{L(T^m)}\le$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{T^m}\left|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}G_n(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh)\right|dx_1\cdots dx_m=\sum_{n=1}^{\infty}I_n(h)$$

Оценим интегралы $I_n(h)$ (n=1,2,...) по отдельности.

Для заданного k существует такой номер N, что

$$kh\in\left[\tau^*_{N+1,m}-\tau_{N+1,m,}\tau^*_{N,m}-\tau_{N,m}\right]$$

Если n=1,2,...N, то по построению функции G_n будем иметь:

$$I_n(h)\le\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}-kh}\left|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{b_n}{(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})^{2k-1}}g_{n,1}(x_1)\cdots\times\right.$$

$$\left.\times g_{n,m-1}(x_{m-1})(x_m+jh-\tau_{n,m})^{k-1}(\tau^*_{n,m}-x_m-jh)^{k-1}\right|dx_1\cdots dx_m+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{T^{m-1}}\int_{\tau_{n,m}-jh}^{\tau_{n,m}}\binom{k}{j}\frac{b_n}{(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})^{2k-1}}g_{n,1}(x_1)\dots g_{n,m-1}(x_{m-1})(x_m+jh-\tau_{n,m})^{k-1}\times$$

$$\times(\tau^*_{n,m}-x_m-jh)^{k-1}|dx_1\cdots dx_m+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\int_{T^{m-1}}\int_{\tau^*_{n,m}-kh}^{\tau^*_{n,m}-jh}\binom{k}{j}\frac{b_n}{(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})^{2k-1}}g_{n,1}(x_1)\dots g_{n,m-1}(x_{m-1})(x_m+jh-\tau_{n,m})^{k-1}\times$$

$$\times(\tau^*_{n,m}-x_m-jh)^{k-1}dx_1\cdots dx_m\le A\frac{b_n}{(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})^k}h^k,A=const.$$

При n=N+1, N+2,... имеем $I_n(h)\le b_n$.

Т.е.,

$$(2\pi)^m\left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}G(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh)\right\|_{L(T^m)}\le$$

$$\le A\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})^k}h^k+\sum_{n=N+1}^{\infty}b_n.$$

Если $\tau^*_{N+1,m}-\tau_{N+1,m}\le kh\le(\tau^*_{N,m}-\tau_{N,m})^{\frac{k}{k-\alpha_m}}$, то в силу леммы 1.2.1 и по построению последовательности $(b_n)_{n\ge1}$ будем иметь:

$$(2\pi)^m \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} G(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh) \right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le A \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})^k} h^{\alpha_m} \cdot h^{k-\alpha_m} + 2b_{N+1} \le A_1 \omega_{k,m}(h),$$

если же $(\tau_{N,m}^* - \tau_{N,m})^{\frac{k}{k-\alpha_m}} < kh < (\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})$ то, принимая во внимание: лемму 1.2.1, свойства последовательности $(b_n)_{n\ge1}$, и тот факт, что $\frac{\omega_{k,m}(t)}{t^k}$ почти убывает, получим

$$(2\pi)^m \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} G(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh) \right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le A \sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_n}{(\tau_{n,m}^* - \tau_{n,m})^k} h^{\alpha_m} \cdot h^{k-\alpha_m} + A \frac{b_N}{(\tau_{N,m}^* - \tau_{N,m})^k} h^k + 2b_{N+1} \le A_2 \omega_{k,m}(h),$$

где A_1 и A_2 положительные константы.

Значит,

$$(2\pi)^m \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1) \binom{k}{j} G(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh) \right\|_{L(T^m)} \le A_3 \omega_{k,m}(h), \qquad A_3 = const.$$

Для $0 < h < \frac{\tau_{1,i}^* - \tau_{1,i}}{k}$ и для любого i=1,..., m-1 имеем:

$$(2\pi)^m \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1},\dots,x_{m-1},x_m) \right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{T^m} \left| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} G_n(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1},\dots,x_{m-1},x_m) \right| dx_1 \cdots dx_m =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,i}}^{\tau_{n,i}^*} \frac{b_n}{(\tau_{n,i}^* - \tau_{n,i})^{2k-1}} (x_m - \tau_{n,i})^{k-1} (\tau_{n,i}^* - x_m)^{k-1} \times$$

$$\times g_{n,1}(x_1)\dots g_{n,i-1}(x_{i-1})g_{n,i+1}(x_{i+1})\dots g_{n,m-1}(x_{m-1})\left|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}g_{n,i}(x_i+jh)\right|dx_1\cdots dx_m \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_T \left|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}g_{n,i}(x_i+jh)\right|dx_i = \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_n(h).$$

Оценим теперь каждый из интегралов $J_n(h)$ (n=1,2,...) по отдельности.

Очевидно, что для заданного k, существует такой номер N, что $kh \in \left[\tau^*_{N+1,i} - \tau_{N+1,i}, \tau^*_{N,i} - \tau_{N,i}\right]$, поэтому для n=1,...,N имеем:

$$J_n(h) \le \int_0^{(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})-kh}\left|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}g_{n,i}(x_i+jh)\right|dx_i + \sum_{j=1}^{k}\int_{-jh}^{0}\binom{k}{j}g_{n,i}(x_i+jh)dx_i +$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\int_{(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})-kh}^{(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})-jh}\binom{k}{j}g_{n,i}(x_i+jh)dx_i \le B\frac{h^k}{(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})^k}, B = const,$$

а для остальных натуральных n ($n \ge N+1$)–$J_n(h) \le 1$.

Отсюда следует, что

$$(2\pi)^m \left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1},\dots,x_{m-1},x_m)\right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le B\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})^k}h^k + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n .$$

Если $\tau^*_{N+1,i} - \tau_{N+1,i} \le kh \le (\tau^*_{N,i} - \tau_{N,i})^{\frac{k}{k-\alpha_i}}$, то по лемме 1.2.1 и по построению последовательности $(b_n)_n \ge 1$ будем иметь:

$$(2\pi)^m \left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1},\dots,x_{m-1},x_m)\right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le B_1\omega_{k,i}(h),\ B_1 = const.$$

Если же $(\tau^*_{N,i} - \tau_{N,i})^{\frac{k}{k-\alpha_i}} < kh < \tau^*_{N,i} - \tau_{N,i}$, то

$$(2\pi)^m \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1},\dots,x_{m-1},x_m) \right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le B\sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_n}{(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})^k} h^k + B\frac{b_N}{(\tau^*_{N,i}-\tau_{N,i})^k} h^k + 2b_{N+1} \le B_2\omega_{k,i}(h), \quad B_2 = const.$$

Значит,

$$(2\pi)^m \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} G(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1},\dots,x_{m-1},x_m) \right\|_{L(T^m)} \le$$

$$\le B_3\omega_{k,i}(h), \qquad B_3 = const.$$

Из всего вышесказанного следует, что справедливо включение

$$G \in H(\omega_{k,i},\ i\in M;\ L(T^n)).$$

Оценим теперь $\omega_{k,m}(\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}};\delta)_{L(T^m)}$ снизу.

Для $h=\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m}(n=1,2,\dots)$ имеем

$$(2\pi)^{2m-1} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh) \right\|_{L(T^m)} \ge$$

$$\ge \int_{T^m} \left| \int_{T^{m-1}} \left[\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} G(x_1+u_1,\dots,x_{m-1}+u_{m-1},x_m+jh) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^{m-1} ctg\frac{u_i}{2}\, du_1\cdots du_{m-1} \right| dx_1\cdots dx_m.$$

По построению функции G получим:

$$(2\pi)^{2m-1} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh) \right\|_{L(T^m)} \ge$$

$$\ge \int_{T^{m-1}} \int_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}} \left| \int_{T^{m-1}} \frac{b_n}{(\tau^*_n-\tau_n)^{2k-1}} (x_m-\tau_{n,m})^{k-1} (\tau^*_{n,m}-x_m)^{k-1} g_n(x_1+u_1)\cdots \times \right.$$

$$\left. \times g_n(x_{m-1}+u_{m-1}) \prod_{j=1}^{m-1} ctg\frac{u_i}{2}\, du_i \cdots du_{m-1} \right| dx_1\cdots dx_m \ge$$

$$\geq b_n \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,1}(x_1+u_1) ctg \frac{u_1}{2} \right| dx_1 \cdots \int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,m-1}(x_{m-1}+u_{m-1}) ctg \frac{u_{m-1}}{2} \right| dx_{m-1}.$$

Для любого i (i=1,...,m) оценим интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,i}(x_i+u_i) ctg \frac{u_i}{2} du_i \right| dx_i$$

снизу.

$$\int_0^{\pi/2} \left| \int_T g_{n,i}(x_i+u_i) ctg \frac{u_i}{2} du_i \right| dx_i \geq \int_{\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i}}^{\pi/2} \left(\int_0^{x_i} g_{n,i}(x_i-u_i) ctg \frac{u_i}{2} du_i \right) dx_i \geq$$

$$\geq \int_{\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i}}^{\pi/2} \left(\int_0^{x_i} g_{n,i}(x_i-u_i) ctg \frac{1}{u_i} du_i \right) dx_i =$$

$$= \int_{\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i}}^{\pi/2} \left(\int_{x_i-(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})}^{x_i} \frac{(x_i-u_i)^{k-1}(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i}-x_i+u_i)^{k-1}}{(\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i})^{2k-1}} \frac{1}{u_i} du_i \right) dx_i \geq$$

$$\geq \int_{\tau^*_{n,i}-\tau_{n,i}}^{\pi/2} \frac{1}{u_i} dx_i \geq C_i \,|\ln(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})|, \quad C_i = const.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^{2m-1} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+jh) \right\|_{L(T^m)} \geq$$

$$\geq C_2 \omega_{k,m}(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})\,|\ln(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})|^{m-1}, \; C_2 = const.$$

Значит,

$$\omega_{k,m}(\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}};\delta) \geq C\omega_{k,m}(\delta)\,|\ln\delta|^{m-1},$$

где C- некоторая положительная константа

Пусть $h = \tau^*_{n,i} - \tau_{n,i}$ $(i = 1,\dots,m-1)$. Тогда по определению функции G будем иметь:

$$(2\pi)^{2m-1} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{j} \widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+jh,x_{i+1}\dots,x_m) \right\|_{L(T^m)} \geq$$

$$\geq \int\limits_{T^{m-1}} \int\limits_{\tau_{n,m}}^{\tau^*_{n,m}} \left| \int\limits_{T^{m-1}} \frac{b_n}{(\tau^*_{n,m}-\tau_{n,m})^{2k-1}} (x_m-\tau_{n,m})^{k-1}(\tau^*_{n,m}-x_m)^{k-1} g_{n,1}(x_1+u_1)\cdots \times \right.$$

$$\times g_{n,i-1}(x_{i-1}+u_{i-1})g_{n,i+1}(x_{i+1}+u_{i+1})\cdots g_{n,m-1}(x_{m-1}+u_{m-1})\times$$

$$\left.\times\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-1}\binom{k}{j}g_{n,i}(x_i+u_i+jh)\right]\prod_{j=1}^{m-1} ctg\frac{u_i}{2}\,du_1\cdots du_{m-1}\right| dx_1\cdots dx_m \geq$$

$$\geq b_n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\int\limits_T g_{n,1}(x_1+u_1)ctg\frac{u_1}{2}\,du_1\right|dx_1\cdots\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\int\limits_T g_{n,i-1}(x_{i-1}+u_{i-1})ctg\frac{u_{i-1}}{2}\,du_{i-1}\right|dx_{i-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\int\limits_T g_{n,i+1}(x_{i+1}+u_{i+1})ctg\frac{u_{i+1}}{2}\,du_{i+1}\right|dx_{i+1}\cdots$$

$$\cdots\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\int\limits_T g_{n,m-1}(x_{m-1}+u_{m-1})ctg\frac{u_{m-1}}{2}\,du_{m-1}\right|dx_{m-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\int\limits_T\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}g_{n,i}(x_i+u_i+jh)\right]ctg\frac{u_i}{2}\,du_i\right|dx_i\geq$$

$$\geq C'\omega_{k,i}(h)\,|\ln h|^{m-2},$$

$$C'=const.$$

Т.е.,

$$\omega_{k,i}(\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}};\delta)_{L(T^m)}\geq C\omega_{k,i}(\delta)\,|\ln\delta|^{m-2},$$

$$i=1,\dots,m-1.\quad C=const$$

Легко можно видеть, что для функции $\widetilde{G}_{\{1,\dots,m-1\}}$ имеем

$$\omega_{k,m}(\widetilde{G}_{\{1,\dots,m\}};\delta)_{L(T^m)}\geq C\omega_{k,m}(\delta)\,|\ln\delta|^{m-1},\quad C=const.$$

Теорема 2.4.1 доказана.

§ 2.5. Об оценках частных модулей неприрывности сопряженной функции в общем случае

Сначала приведем некоторые определения и известные результаты.

Определение. Мы будем говорить, что функция $\varphi(t)$ $(0\leq t\leq\pi)$ принадлежит классу Ф и писать $\varphi\in\Phi$, если удовлетворены следующие условия:

1. φ непрерывна на $[0,\pi]$,
2. $\varphi\uparrow$,
3. $\varphi(t)\neq 0$ для любого t $(0<t\leq\pi)$,
4. $\varphi(t)\to 0$ при $t\to 0$.

В дальнейшем нам придется налагать на функцию $\varphi\in\Phi$ некоторые из нижеперечисленных условий:

(B) $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)=O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$,

(Z) $\int\limits_{0}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}dt=O(\varphi(\delta))$,

(S) Существует α=const $(0<\alpha<1)$ такая, что функция $\frac{\varphi(t)}{t^{\alpha}}$ почти возрастает на $[0,\pi]$.

(B_1) $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)=O\left(n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

(Z_1) $\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(t)}{t^2}dt=O\left(\frac{\varphi(\delta)}{\delta}\right)$

(S_1) Существует α=const ($0<\alpha<1$) такая, что функция $\dfrac{\varphi(t)}{t^{1-\alpha}}$ почти убывает.

Лемма 2.5.1 (см [3]). Пусть $\varphi\in\Phi$. тогда все условия (B), (Z) и (S), а также условия (B_1), (Z_1) и (S_1) равносильны.

Теорема (В.А.Окулов). Пусть $f\in L(T^n)$, $\omega_i(f;\delta)_{L(T^n)}=\omega_i(\delta)$ при $0\le\delta\le\pi$, $i=1,\dots,n$, $B\subseteq M$ и

$$\int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^{|B|}} \min_{j\in B}\omega_j(\delta_j)\prod_{j\in B}\frac{d\delta_j}{\delta_j}<\infty.$$

Тогда если $k\in B$, то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)}=O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min(\delta,s_k)s_k^{-1}\min_{j\in B}\omega_i(s_i)\prod_{j\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}$$

при $\delta\to0+$, а если $k\overline{\in}B$ (в случае, когда $B\ne M$), т о

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)}=O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left\{\min_{j\in B}\omega_i(s_i),\omega_k(\delta)\right\}\prod_{j\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}$$

при $\delta\to0+$.

Отметим здесь, что в пространствах $L^p(T^n)$ ($1<p<\infty$) зависимость между интегральными модулями непрерывности характеризуется многомерным аналогом теоремы М.Рисса [25], доказанным К.Сокол-Соколовским [26]:

Теорема (К.Сокол-Соколовски). Если функция $f\in L^p(T^n)$ при $1<p<\infty$, то

$$\left\|\widetilde{f}_B(x)\right\|_{L^p(T^n)}\le A_{p,B}\left\|f(x)\right\|_{L^p(T^n)}.$$

Теперь переходим к изложению основных теорем данного параграфа.

Теорема 2.5.1. а) Пусть функция $f \in H(\omega, L(T^n))$, где модуль непрерывности ω удовлетворяет условию (Z), а условие (Z_1) не выполнено, причем для $B \subseteq M$

$$\int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^{|B|}} \min_{j\in B}\omega(s_i)\prod_{j\in B}\frac{ds_j}{s_j} < \infty. \tag{2.5.1}$$

Тогда $\widetilde{f}_B \in L(T^n)$ и, если $k \in B$, то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} = O\left\{\delta\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds\cdot\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}\right\} \tag{2.5.2}$$

при $\delta \to 0+$, а если $k \overline{\in} B$ (в случае, когда $B \neq M$), то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} = O\{\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}\} \tag{2.5.3}$$

при $\delta \to 0+$;

б) Существуют функции F и G такие, что $F, G \in H(\omega; L(T^n))$, но

$$\omega_k(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\delta\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}$$

при $0 \leq \delta \leq \delta_0$, если $k \in B$, (2.5.4)

$$\omega_k(\widetilde{G}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}$$

при $0 \leq \delta \leq \delta_0$ если $k \overline{\in} B$, (2.5.5)

где C и δ_0 - положителные константы, не зависящие от δ.

Доказательство. Так как $f \in H(\omega, L(T^n))$ и ω удовлетворяет условию (2.5.1), то справедливость пункта (а) данной теоремы можно получить из теоремы В.А.Окулова. Действительно: при $k \in B$ в силу теоремы В.А.Окулова имеем:

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta) \leq C \int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min(\delta, s_k); s_k^{-1} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B} s_i^{-1} ds_i .$$

Без ограничения общности, считаем, что $k=\max\{i : i \in B\}$. Тогда будем иметь:

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta) \le$$

$$\le C\int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}}\int\limits_0^\delta \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i + C\int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}}\int\limits_\delta^1 \delta s_k^{-1}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i =$$

$$= C\sum_{B_1\subset B\setminus\{k\}}\int\limits_{[0,\delta]^{|B_1|}}\int\limits_{[\delta,\pi]^{|B|-|B_1|}}\int\limits_0^\delta \min_{i\in B_1}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i +$$

$$+ C\sum_{B_1\subset B\setminus\{k\}}\int\limits_{[0,\delta]^{|B_1|}}\int\limits_{[\delta,\pi]^{|B\setminus B_1|-1}}\int\limits_\delta^1 \delta\, s_k^{-1}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i \le$$

$$\le C\sum_{B_1\subset B}\prod_{i\in B_1\cup\{n\}}\int\limits_0^\delta \frac{(\omega(s_i))^{\frac{1}{|B_1|+1}}}{s_i}ds_i\,|\ln\delta|^{|B\setminus B_1|} + C\delta\int\limits_\delta^\pi \frac{\omega(s_i)}{s_k^2}ds_i\,|\ln\delta|^{|B|-1} +$$

$$+ C\sum_{\substack{B_1\subset B\setminus\{k\}\\ B_1\ne\varnothing}}\prod_{i\in B_1}\int\limits_0^\delta \frac{(\omega(s_i))^{\frac{1}{|B_1|}}}{s_i}ds_i\,|\ln\delta|^{|B\setminus B_1|-1}|\ln\delta|.$$

Принимая во внимание тот факт, что ω удовлетворяет условию (Z) и условия (Z) и (S) равносильны, заключаем, что

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} \le C\left[\delta\int\limits_0^\pi \frac{\omega(s)}{s^2}ds\,|\ln\delta|^{|B|-1} + \sum_{B_1\subset B}\prod_{i\in B_i}\int\limits_0^\delta\left(\frac{\omega(s_i)}{s^\alpha}\right)^{\frac{1}{|B_1|}}\frac{1}{s_i^{1-\frac{\alpha}{|B_1|}}}ds_i\,|\ln\delta|^{|B\setminus B_1|}\right] \le$$

$$\le C_1\left[\delta\int\limits_0^\pi \frac{\omega(s)}{s^2}ds\,|\ln\delta|^{|B|-1} + \sum_{B_1\subset B}\frac{\omega(\delta)}{\delta^\alpha}\prod_{i\in B_i}\int\limits_0^\delta \frac{1}{s_i^{1-\frac{\alpha}{|B_1|}}}ds_i\,|\ln\delta|^{|B\setminus B_1|}\right] \le$$

$$\le C_2\left[\delta\int\limits_0^\pi \frac{\omega(s)}{s^2}ds|\ln\delta|^{|B|-1} + \sum_{B_1\subset B}\omega(\delta)|\ln\delta|^{|B\setminus B_1|}\right].$$

Так как

$$\omega(\delta) \le A\delta\int\limits_\delta^\pi \frac{\omega(s)}{s^2}ds,$$

то заключаем, что

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} \le C\delta\int_\delta^\pi \frac{\omega(s)}{s^2}ds\,\left|\ln\delta\right|^{|B|-1},\ C = const > 0.$$

Теперь покажем, что выполнено соотношение (2.5.3). По теореме В.А.Окулова для $k \overline{\in} B$ имеем:

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} \le C \int_{[0,\delta]^{|B|}} \min\left\{\min_{i\in B}\omega(s_i),\omega(\delta)\right\}\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i =$$

$$= C\left[\int_{[0,\delta]^{|B|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i + \sum_{\substack{B_1\subset B\\ B_1\neq B\\ B_1\neq\varnothing}} \int_{[0,\delta]^{|B_1|}}\int_{[\delta,\pi]^{|B\setminus B_1|}} \min_{i\in B_1}\omega(s_i)\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i +\right.$$

$$\left. + \int_{[\delta,\pi]^{|B|}} \omega(s_i)\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i\right] \le C_1\left[\int_{[0,\delta]^{|B|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{B_1\subset B\\ B_1\neq B\\ B_1\neq\varnothing}} \int_{[0,\delta]^{|B_1|}} \min_{i\in B_1}\omega(s_i)\prod_{i\in B_1} s_i^{-1}ds_i\left|\ln\delta\right|^{|B\setminus B_1|} + \omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}\right].$$

Так как ω удовлетворяет условию (Z), и условия (Z) и (S) эквивалентны, то заключаем, что для любого B $(B\subset M,\ B\neq\varnothing)$

$$\int_{[0,\delta]^{|B|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i \le \prod_{i\in B}\int_0^\delta \frac{\omega(s_i)^{\frac{1}{|B|}}}{s_i}ds_i = \prod_{i\in B}\int_0^\delta \left(\frac{\omega(s_i)}{s_i^\alpha}\right)^{\frac{1}{|B|}} \frac{1}{s_i^{1-\frac{\alpha}{|B|}}}ds_i \le$$

$$\le A\frac{\omega(\delta)}{\delta^\alpha}\prod_{i\in B}\int_0^\delta \frac{1}{s_i^{1-\frac{\alpha}{|B|}}}ds_i \le A_1\omega(\delta).$$

Поэтому получим, что

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} \le C\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}.$$

Т.е., соотношение (2.5.3) доказано.

б) Рассмотрим сначала случай, когда $k\in B$. Предположим, не ограничивая общности, что $B=\{1,\dots,m\}$ и $k=1$, $1\le m\le n$.

Пусть ω_1 - модуль непрерывности, для которого

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_1(t)}{t} dt = O(\omega_1(\delta)) \quad \text{и} \quad \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt \neq O(\omega_1(\delta)).$$

Замечание. Не уменшая общности, можно считать, что $\omega_1(x) = \int_0^x \omega_1'(x) dx,$, где $\omega_1'(x) \geq 0$, непрерывна и не возрастает в (0,1) (см. [27]).

Рассмотрим функцию

$$\omega(x) = x \int_x^1 \frac{\omega_1(t)}{t^2} dt + \int_0^x \frac{\omega_1(t)}{t} dt.$$

Легко выдеть, что ω модуль непрерывности, которая удовлетворяет условию (Z), а условие (Z_1) не выполнено.

Теперь рассмотрим функцию

$$F(x) = F(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \min\limits_{i \in B} \left\{ \dfrac{\omega_1'(x_i)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j \right)^{m-1}} \right\}, & \text{если } x_i \in [0,1],\ i = 1,\dots,m \\ & \text{и } x_j \in [-\pi,\pi],\ j = m+1,\dots,n, \\ 0, & \text{если } (x_1,\dots,x_m) \in T^m \setminus [0,1]^m \\ & \text{и } x_j \in [-\pi,\pi],\ j = m+1,\dots,n. \end{cases}$$

Функцию F продолжим 2π-периодически на все пространство R^n.

Покажем, что $F \in L(T^n)$.

$$\int_{T^n} |F(x)| dx = (2\pi)^{n-m} \int_{[0,1]^m} \min_{i \in B} \left\{ \frac{\omega_1'(x_i)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m} x_j \right)^{m-1}} \right\} dx_1 \cdots dx_m \leq$$

$$\leq A\int_0^1\int_0^1 \frac{\omega_1'(x_1)}{x_1+x_2}dx_1dx_2 = A\int_0^1 \omega_1'(x_1)\ln(1+x_1)dx_1 - A\int_0^1 \omega_1'(x_1)\ln x_1 dx_1 \leq$$

$$\leq A\omega(1) + \int_0^1 \frac{\omega_1(x_1)}{x_1}dx_1 < +\infty.$$

Теперь покажем, что

$$F\in H(\omega;L(T^n)).$$

По определению функции F будем иметь:

$$(2\pi)^{n-m}\left\|F(x_1+h,x_2,\ldots,x_n)-F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)} \leq$$

$$\leq \int_0^{1-h}\int_0^1\ldots\int_0^1 \left| \min\left\{ \frac{\omega_1'(x_1+h)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j+h\right)^{m-1}}, \frac{\omega_1'(x_2)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j+h\right)^{m-1}},\ldots,\frac{\omega_1'(x_m)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j+h\right)^{m-1}} \right\} - \right.$$

$$\left. - \min\left\{ \frac{\omega_1'(x_1)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}}, \frac{\omega_1'(x_2)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}},\ldots,\frac{\omega_1'(x_m)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}} \right\}\right| dx_1\cdots dx_m +$$

$$+\int_{1-h}^1\int_0^1\ldots\int_0^1 \min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1'(x_i)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}}\right\}dx_1\cdots dx_m + \int_0^h\int_0^1\ldots\int_0^1 \min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1'(x_i)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}}\right\}dx_1\cdots dx_m = \sum_{k=1}^3 I_k.$$

Оценим теперь выражения I_k (k=1,2,3) по отдельности сверху.

$$I_2 \leq A\int_{1-h}^1\int_0^1 \frac{\omega_1'(x_2)}{x_1+x_2}dx_1dx_2 \leq A_1h \leq A_1\omega(h),$$

$$I_3 \leq A\int_0^h\int_0^1 \frac{\min\{\omega_1'(x_1),\omega_1'(x_2)\}}{x_1+x_2}dx_1dx_2 =$$

$$= A\int_0^h\left[\int_0^{x_1}\frac{\omega_1'(x_1)}{x_1+x_2}dx_2 + \int_{x_1}^1\frac{\omega_1'(x_2)}{x_1+x_2}dx_2\right]dx_1 =$$

$$= A_1\int_0^h \omega_1'(x_1)dx_1 + A\int_0^h\left[\int_{x_1}^h \frac{\omega_1'(x_2)}{x_1+x_2}dx_2\right]dx_1 + A\int_0^h\left[\int_h^1 \frac{\omega_1'(x_2)}{x_1+x_2}dx_2\right]dx_1 =$$

$$= A_1\omega_1(h) + A\int_0^h \omega_1'(x_2)\left[\int_0^{x_2}\frac{1}{x_1+x_2}dx_1\right]dx_2 +$$

$$+ A\int_h^1 \omega_1'(x_2)[\ln(h+x_2)-\ln x_2]dx_2 \le$$

$$\le A_2\omega_1(h) + Ah\int_h^1 \frac{\omega_1(x_2)}{x_2(h+x_2)}dx_2 \le$$

$$\le A_2\omega_1(h) + Ah\int_h^1 \frac{\omega_1(x_2)}{x_2^2}dx_2 \le A_3\omega(h).$$

$$I_1 \le \int_0^{1-h}\left[\int_0^{x_1+h}\cdots\int_0^{x_1+h}\left(\frac{\omega_1'(x_1)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}} - \frac{\omega_1'(x_1+h)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j + h\right)^{m-1}}\right)dx_2\cdots dx_m\right]dx_1 +$$

$$+ \int_0^{1-h}\left[\sum_{\substack{B_1\subset\{2,..,m\}\\ B_1\ne\varnothing}}\int_{[x_1+h,1]^{|B_1|}}\int_{[0,x_1+h]^{m-1-|B_1|}} \min_{i\in B_1}\{\omega_1'(x_i)\}\frac{\sum_{i=1}^{m-1}h^i\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1-i}}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}\left(\sum_{j=1}^m x_j+h\right)^{m-1}}dx_2\cdots dx_m\right]dx_1 =$$

$$= I_{1,1} + \sum I_{B_1}.$$

$$I_{1,1} \le \int_0^{1-h}\left[\int_0^{x_1+h}\cdots\int_0^{x_1+h}\omega_1'(x_1)\left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^{m-1}} - \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m x_j+h\right)^{m-1}}\right]dx_2\cdots dx_m\right]dx_1 +$$

$$+ \int_0^{1-h}\left[\int_0^{x_1+h}\cdots\int_0^{x_1+h}\frac{\omega_1'(x_1)-\omega_1'(x_1+h)}{\left(\sum_{j=1}^m x_j+h\right)^{m-1}}dx_2\cdots dx_m\right]dx_1 \le$$

$$\le A\int_0^{1-h}\left[\int_0^{x_1+h}\omega_1'(x_1)\left(\frac{1}{x_1+x_2}-\frac{1}{x_1+x_2+h}\right)dx_2\right]dx_1+$$

$$+\int_0^{1-h}\left[\int_0^{x_1+h}\frac{\omega_1'(x_1)-\omega_1'(x_1+h)}{x_1+x_2+h}dx_2\right]dx_1=$$

$$=A\int_0^{1-h}\omega_1'(x_1)[\ln(2x_1+h)-\ln x_1-\ln 2]dx_1+\int_0^{1-h}\left[\int_0^{x_1+h}\frac{\omega_1'(x_1)}{x_1+x_2+h})dx_2\right]dx_1-$$

$$\int_0^{1-h}\left[\int_0^{x_1+h}\frac{\omega_1'(x_1+h)}{x_1+x_2+h}dx_2\right]dx_1=A\omega_1(1-h)\ln\frac{2-h}{2-2h}+Ah\int_0^{1-h}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1(2x_1+h)}dx_1+$$

$$+\int_0^{1-h}\omega_1'(x_1)\ln 2dx_1-\int_0^{1-h}\omega_1'(x_1+h)\ln 2dx_1=$$

$$=A\omega_1(1-h)\ln\left(1+\frac{h}{2-2h}\right)+Ah\int_0^{h}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1(2x_1+h)}dx_1+$$

$$+Ah\int_0^{h}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1(2x_1+h)}dx_1+Ah\int_h^{1-h}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1(2x_1+h)}dx_1+$$

$$+\omega_1(1-h)\ln 2-\omega_1(1)\ln 2+\omega_1(h)\ln 2\le$$

$$\le A\omega_1(1-h)\ln\left(1+\frac{h}{2-2h}\right)+A_1\omega_1(h)+2\ln 2\omega_1(h)+$$

$$+Ah\int_h^{1}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1^2}dx_1\le A_2\omega(h).$$

$$I_{B_1}\le h\int_0^{1-h}\left[\int_{[x_1+h,1]^{|B_1|}}\int_{[0,x_1+h]^{m-1-|B_1|}}\frac{\min\limits_{i\in B_1}\{\omega_1'(x_i)\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m}dx_2\cdots dx_m\right]dx_1\le$$

$$\le Ah\int_0^{1-h}\left[\int_{[h,1]^{|B_1|}}\frac{\min\limits_{i\in B_1}\{\omega_1'(x_i)\}}{\left(\sum\limits_{j\in B_1}x_j+x_1\right)^{|B_1|+1}}\prod_{i\in B_1}dx_i\right]dx_1\le$$

$$\leq h\int_0^{1-h}\int_h^1 \frac{\omega_1'(x_k)}{(x_1+x_1)^2}dx_1dx_k =$$

$$= h\int_h^1 \omega_1'(x_k)\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1-h}\right)dx_k \leq h\int_h^1 \frac{\omega_1'(x_k)}{x_k}dx_k + h\int_h^1 \omega_1'(x_k) =$$

$$= h\omega_1(1)-\omega_1(h)+h\int_h^1 \frac{\omega_1(x_k)}{x_k^2}dx_k + h\omega_1(1)-\omega_1(h) = A_1\omega(h).$$

Т.е.,

$$I_1 \leq A\omega(h).$$

Значит,

$$(2\pi)^{n-m}\,\| F(x_1+h,x_2,\ldots,x_n)-F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_{L(T^n)} \leq A\omega(h),$$

и $F\in H_1(\omega, L(T^n))$.

Точно также можно показать, что $F\in H_i(\omega, L(T^n))$, $i=2,\ldots,m$.

Если $i\in[m+1,n]$, то в силу определения функции F заключаем, что

$$\omega_i(F;\delta)_{L(T^n)} = O(\omega(\delta)).$$

Т.е.,

$$F\in H(\omega; L(T^n)).$$

Оценим теперь $\omega_1(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)}$ снизу.

По определению сопряженной функции и функции F будем иметь:

$$(2\pi)^{2m}\,\| \widetilde{F}_B(x_1+h,x_2,\ldots,x_n)-\widetilde{F}_B(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_{L(T^n)} =$$

$$= \int_{T^n}\left|\int_{T^{|B|}} F(x_1+s_1+h,x_2+s_2,\ldots,x_m+s_m,x_{m+1},\ldots,x_n)-\right.$$

$$\left.-F(x_1+s_1+h,x_2+s_2,\ldots,x_m+s_m,x_{m+1},\ldots,x_n)\prod_{i\in B} ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n \geq$$

$$\geq \int_{-1}^{-h}\cdots\int_{-1}^{-h}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-x_1}^{1-x_1}\int_{-x_2}^{1-x_2}\cdots\int_{-x_m}^{1-x_m}F(x_1+s_1,x_2+s_2,\ldots,x_m+s_m,x_{m+1},\ldots,x_n)\times\right.$$

$$\left.\times\left[ctg\frac{s_1-h}{2}-ctg\frac{s_1}{2}\right]\prod_{i=1}^{m}ctg\frac{s_i}{2}ds_i ds_1\right|dx_1\cdots dx_n\geq$$

$$\geq\int_{-1}^{-h}\cdots\int_{-1}^{-h}\left[\int_{-x_1}^{1-x_1}\cdots\int_{-x_m}^{1-x_m}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1'(x_i+s_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}(x_j+s_j)\right)^{m-1}}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left[ctg\frac{s_1-h}{2}-ctg\frac{s_1}{2}\right]\prod_{i=2}^{m}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\ldots ds_m\right]dx_1\ldots dx_m\geq$$

$$\geq\int_{h}^{1}\cdots\int_{h}^{1}\left[\int_{x_1}^{1+x_1}\cdots\int_{x_m}^{1+x_m}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1'(s_i-x_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}(s_j-x_j)\right)^{m-1}}\right\}\prod_{i=2}^{m}\frac{1}{s_i}\frac{h}{(s_1-h)s_1}ds_1\ldots ds_m\right]dx_1\ldots dx_m\geq$$

$$\geq\frac{h}{2^m}\int_{h}^{h^{\frac{1}{2}}}\int_{h^{\frac{1}{3}}}^{h^{\frac{1}{4}}}\cdots\int_{h^{\frac{1}{2m-1}}}^{h^{\frac{1}{2m}}}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{x_i}\frac{1}{2x_1-h}\left[\int_{x_1}^{2x_1}\cdots\int_{x_m}^{2x_m}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1'(s_i-x_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}(s_j-x_j)\right)^{m-1}}\right\}ds_1\ldots ds_m\right]dx_1\ldots dx_m$$

$$\int_{x_1}^{2x_1}\int_{x_2}^{2x_2}\cdots\int_{x_m}^{2x_m}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1'(s_i-x_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}(s_j-x_j)\right)^{m-1}}\right\}ds_1\cdots ds_m=\int_{0}^{x_1}\int_{0}^{x_2}\cdots\int_{0}^{x_m}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1'(s_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}s_j\right)^{m-1}}\right\}ds_1\cdots ds_m\geq$$

$$\geq\int_{0}^{x_1}\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{0}^{s_2}\ldots\int_{0}^{s_2}\frac{\omega_1'(s_2)}{\left(\sum_{j=1}^{m}s_i\right)^{m-1}}ds_3\ldots ds_m\right]ds_1 ds_2\geq A\int_{0}^{x_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\omega_1'(s_2)}{s_1+s_2}ds_1 ds_2\geq$$

$$\geq A\int_{x_1}^{x_2}\omega_1'(s_2)\left[\ln(x_1+s_2)-\ln s_2\right]ds_2 = A\omega_1(x_2)\ln\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)-A\omega_1(x_1)\ln 2+$$

$$+Ax_1\int_{x_1}^{x_2}\frac{\omega_1'(s_2)}{s_2(x_1+s_2)}ds_2 \geq A_1\omega(x_1).$$

Т.е.,

$$(2\pi)^{2m}\left\|\widetilde{F}_B(x_1+h,x_2,\dots,x_n)-\widetilde{F}_B(x_1,\dots,x_n)\right\|_{L(T^n)} \geq A_2h\int_h^1\frac{\omega_1(x_1)}{x_1^2}dx_1\left|\ln h\right|^{m-1}.$$

Т.е., неравенство (2.5.4) доказано.

Теперь рассмотрим тот случай, когда $k\,\overline{\in}\,B$. Не нарушая общности, неравенству (2.5.5) докажем в том случае, когда $B=\{1,\dots,n\text{-}1\}$ и $k=n$.

Пусть ω модуль непрерывности, для которого $\dfrac{x}{\omega(x)}\to 0$ при $x\to 0$.

Через $\varphi(x)$ обозначим функцию $\dfrac{x}{\omega(x)}$.

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_m)_{m\geq 1}$ такую, что

1) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}b_m<1,\quad b_0=0,$

2) $\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}b_i<b_m;$

3) $\varphi(\omega^{-1}(b_{m+1}))<\omega^{-1}(b_m)$.

Положим

$$\tau_m=2\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{-1}(b_k),$$

$$\tau_m^*=\tau_m+\omega^{-1}(b_m)\ (m=1,2,\dots).$$

Далее, для любого m=1,2,... рассмотрим функцию $g_m:T\to R$ следующего вида

$$g_m(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau_m^*-\tau_m}, & u\in\left[0,\tau_m^*-\tau_m\right],\\ 0, & u\in T\setminus\left[0,\tau_m^*-\tau_m\right].\end{cases}$$

При любом m=1,2,... положим:

$$G_m(x)=G_m(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\dfrac{b_m}{\tau_m^*-\tau_m}g_m(x_1)..g_m(x_{n-1})\omega(x_n), & x_i\in T(i=1,\ldots,n-1),\\ & x_n\in[\tau_m,\tau_m^*);\\ 0, & x_i\in T(i=1,\ldots,n-1),\ \ x_n\in T\setminus[\tau_m,\tau_m^*).\end{cases}$$

Далее, определим функцию $G{:}T^n\to R$ равенством

$$G(x)=G(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{m=1}^{\infty}G_m(x_1,\ldots,x_n).$$

Построенную функцию G продолжим 2π-периодически на все пространство R^n. Очевидно, что $G\in L(T^n)$.

Докажем, что

$$G\in H(\omega;L(T^n)).$$

Пусть $0<h<\omega^{-1}(b_1)$. Тогда

$$(2\pi)^n\left\|G(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)-G(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}=$$

$$=\int_{T^n}\left|G(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)-G(x_1,\ldots,x_n)\right|dx_1\cdots dx_n\le$$

$$\le\sum_{m=1}^{\infty}\int_{T^n}\left|G_m(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)-G_m(x_1,\ldots,x_n)\right|dx_1\cdots dx_n=\sum_{m=1}^{\infty}I_m(h).$$

Оценим интегралы $I_m(h)$ (m=1,2,....) по отдельности.

Существует такой номер N, что $h\in[\tau_{N+1}^*-\tau_{N+1},\tau_N^*-\tau_N)$.

Если m=1,..., N, то по построению функции G_m будем иметь:

$$I_m(h)\le\int_{T^{n-1}}\int_{\tau_m}^{\tau_m^*-h}\left|G_m(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)-G_m(x_1,\ldots x_n)\right|dx_1\cdots dx_n+$$

$$+\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_m-h}^{\tau_m} G_m(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)dx_1\ldots dx_n+\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_m^*-h}^{\tau_m} G_m(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n\le$$

$$\le\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_m}^{\tau_m^*-h}[\omega(x_n+h)-\omega(x_n)]\frac{b_m}{\tau_m^*-\tau_m}g_m(x_1)\ldots g_m(x_{n-1})dx_1\cdots dx_n+$$

$$+\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_m-h}^{\tau_m}\frac{b_m}{\tau_m^*-\tau_m}\omega(x_n+h)g_m(x_1)\ldots g_m(x_{n-1})dx_1\cdots dx_n+$$

$$+\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_m^*-h}^{\tau_m^*}\frac{b_m}{\tau_m^*-\tau_m}\omega(x_n)g_m(x_1)\ldots g_m(x_{n-1})dx_1\cdots dx_n\le b_m\omega(h)+$$

$$+\frac{2b_m}{\tau_m^*-\tau_m}h\omega(\tau_m^*).$$

При $m=N+1,\ldots$

$$I_m(h)\le 2\omega(\tau_m^*)b_m.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^n\left\|G(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)-G(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}\le$$

$$\le\sum_{m=1}^{N}b_m\omega(h)+\sum_{m=1}^{N}\frac{2b_m}{\tau_m^*-\tau_m}h\omega(\tau_m^*)+\sum_{m=N+1}^{\infty}2\omega(\tau_m^*)b_m.$$

По построению последовательности $(b_m)_{m\ge1}$ будем иметь:

$$(2\pi)^n\left\|G(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)-G(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}\le A\omega(h),\ A=const>0.$$

Для $0<h<\omega^{-1}(b_1)$ имеем:

$$(2\pi)^n\left\|G(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_n)-G(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}=$$

$$\int\limits_{T^n}\left|G(x_1,\ldots,x_k+h\ldots,x_n)-G(x_1,\ldots,x_n)\right|dx_1\cdots dx_n\le$$

$$\le\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_m}^{\tau_m^*}|G_m(x_1,\ldots x_k+h,\ldots,x_n)-G_m(x_1,\ldots,x_n)|dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int_{T^{n-1}}\int_{\tau_m}^{\tau_m}\frac{b_m}{\tau^*_m-\tau_m}\omega(x_n)g_m(x_1)\ldots g_m(x_{k-1})g_m(x_{k+1})\ldots g_m(x_{n-1})\times$$

$$\times\left|g_m(x_k+h)-g_m(x_k)\right|dx_1\cdots dx_n\le\sum_{m=1}^{\infty}b_m\omega(\tau^*_m)\int_T\left|g_m(x_k+h)-g_m(x_k)\right|dx_k.$$

Существует такой номер N, что $h\in[\tau^*_{N+1}-\tau_{N+1},\tau^*_N-\tau_N)$.

При $m=1,\ldots,N$,

$$\int_T\left|g_m(x_k+h)-g_m(x_k)\right|dx_k=\frac{2h}{\tau^*_m-\tau_m},$$

и при $m=N+1$,

$$\int_T\left|g_m(x_k+h)-g_m(x_k)\right|dx_k\le 2.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^n\left\|G(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,\ldots,x_n)-G(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}\le$$

$$\le 2\sum_{m=1}^{N}\frac{b_m}{\tau^*_m-\tau_m}\omega(\tau^*_m)h+2\sum_{m=N+1}^{\infty}b_m\omega(\tau^*_m).$$

По построению последовательности $(b_m)_{m\ge1}$ будем иметь:

$$(2\pi)^n\left\|G(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_n)-G(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}\le B\omega(h)\ ,\ B=const>0.$$

Т.е.,

$$G\in H(\omega;L(T^n)).$$

Оценим теперь $\omega_n(\widetilde{G}_{\{1,\ldots,n-1\}};\delta)_{L(T^n)}$ снизу.

Для $h=\tau^*_m-\tau_m$ ($m=2,3,\ldots$) по построению функции G получим:

$$(2\pi)^{2n-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,\ldots,n-1\}}(x_1,\ldots,x_k+h,\ldots,x_n)-\widetilde{G}_{\{1,\ldots,n-1\}}(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}\ge$$

$$\ge\int_{T^{n-1}}\int_{\tau_m}^{\tau^*_m}\left|\int_{T^{n-1}}\frac{b_m}{\tau^*_m-\tau_m}\omega(x_n)g_m(x_1+u_1)\cdots\times\right.$$

$$\left.\times g_{m,n-1}(x_{n-1}+u_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{u_i}{2}du_1\ldots du_{n-1}\right|dx_1\cdots dx_n\ge$$

$$\geq b_m\omega(\tau_m)\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_m(x_1+u_1)ctg\frac{u_1}{2}du_1\right|dx_1\times\cdots$$

$$\cdots\times\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_m(x_{n-1}+u_{n-1})ctg\frac{u_{n-1}}{2}du_{n-1}\right|dx_{n-1}.$$

Для любого k (k=1,...,n-1) оценим интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_m(x_k+u_k)ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k$$

снизу.

$$\int\limits_0^{\pi/2}\left|\int\limits_T g_m(x_k+u_k)ctg\frac{u_k}{2}du_k\right|dx_k\geq\int\limits_{\tau_m^*-\tau_m}^{\pi/2}\left[\int\limits_{x_k-(\tau_m^*-\tau_m)}^{x_k}\frac{1}{\tau_m^*-\tau_m}\frac{1}{u_k}du_k\right]dx_k\geq$$

$$\geq\frac{1}{\tau_m^*-\tau_m}\int\limits_{\tau_m^*-\tau_m}^{\pi/2}\frac{\tau_m^*-\tau_m}{x_k}dx_k\geq\left|\ln(\tau_m^*-\tau_m)\right|\geq C_1\left|\ln(\tau_m^*-\tau_m)\right|,$$

где C_1=$const$ и C_1>0.

Т.е.,

$$(2\pi)^{2n-1}\left\|\widetilde{G}_{\{1,...,n-1\}}(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+(\tau_m^*-\tau_m))-\widetilde{G}_{\{1,...,n-1\}}(x_1,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}\geq$$

$$\geq C_2\omega(\tau_m^*-\tau_m)\left|\ln(\tau_m^*-\tau_m)\right|^{n-1},\qquad C_2=const>0.$$

Значит,

$$\omega(\widetilde{G}_{\{1,...,n-1\}};\delta)_{L(T^n)}\geq C_3\omega(\delta)\,|\ln\delta\,|^{n-1},$$

$$\delta\to 0+,\quad C_3=const.$$

Теорема 2.5.1 доказана.

Теорема 2.5.2. а) Пусть функция $f\in H(\omega;L(T^n))$, где модуль непреривности ω удовлетворяет условию (Z_1), а условие (Z) не выполнено, причем для $B\subseteq M$ выполнено (2.5.1). Тогда $\widetilde{f}_B\in L(T^n)$ и, если $k\in B$, то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)}=O\left\{\int\limits_0^{\delta}\int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i\right\}\qquad(2.5.6)$$

при $\delta\to 0+$, а если $k\,\overline{\in}\,B$ (в случае, когда $B\neq M$), то

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} = O\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i + \omega(\delta)\,|\ln\delta|^{|B|}\right\} \qquad (2.5.7)$$

при $\delta\to 0+$;

б) Существуют функции F и G такие, что $F,G\in H(\omega,L(T^n))$, однако

$$\omega_k(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\int\limits_0^\delta \int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $k\in B$, (2.5.8)

$$\omega_k(\widetilde{G}_B;\delta)_{L(T^n)} \geq C\left\{\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i + \omega(\delta)\,|\ln\delta|^{|B|}\right\}$$

при $0\leq\delta\leq\delta_0$, если $k\,\overline{\in}\,B$, (2.5.9)

где C и δ_0 — положительные константы, не зависящие от δ.

Доказательство. а) В условиях теоремы 2.5.2 справедливость утверждения пункта (а) получим из результата В.А.Окулова. Действительно, при $k\in B$ имеем:

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} \leq C\int\limits_{[0,\pi]^{|B|}} \min(\delta,s_k)s_k^{-1}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i =$$

$$= C\left[\int\limits_0^\delta \int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i + \int\limits_\delta^\pi \int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{\substack{i\in B\\ i\neq k}}s_i^{-1}s_k^{-2}ds_i\right] =$$

$$= C\left[\int\limits_0^\delta \int\limits_{[0,\pi]^{|B|-1}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i + \sum_{\substack{B_1\subset B\setminus\{k\}\\ B_1\neq B\setminus\{k\}\\ B_1\neq\varnothing}} \int\limits_\delta^\pi \int\limits_{[0,\delta]^{|B_1|}} \int\limits_{[\delta,\pi]^{|B\setminus B_1|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{\substack{i\in B\\ i\neq k}}s_i^{-1}ds_i + \right.$$

$$\left. + \delta\int\limits_{[\delta,\pi]^{|B|}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}s_k^{-1}ds_i + \delta\int\limits_\delta^\pi \int\limits_{[0,\delta]^{|B|-1}} \min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{\substack{i\in B\\ i\neq k}}s_i^{-1}s_k^{-1}ds_i\right] \leq$$

$$\le C_1\left[\int_0^{\delta}\int_{[0,\pi]^{|B|-1}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i+\sum_{\substack{B_1\subset B\setminus\{k\}\\ B_1\ne\varnothing}}\int_{[0,\delta]^{|B_1|}}\min_{i\in B_1}\omega(s_i)\prod_{i\in B_1}s_i^{-1}ds_i\,\left|\ln\delta\right|^{|B\setminus B_1|-1}+\right.$$

$$\left.+\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(s_k)}{s_k^2}ds_k\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}\right].$$

Для любого B_1 $(B_1\subset B,\ B_1\ne\varnothing)$

$$\int_{[0,\delta]^{|B_1|}}\min_{i\in B_1}\omega(s_i)\prod_{i\in B_1}s_i^{-1}ds_i\le\int_0^{\delta}\int_{[0,\pi]^{|B|-1}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i$$

и

$$\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(s)}{s}ds\left|\ln\delta\right|^{|B|-1}\le C\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|-1},$$

поэтому можно заключить, что

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)}\le C\int_0^{\delta}\int_{[0,\pi]^{|B|-1}}\min_{i\in B}\omega(s_i)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i.$$

Теперь покажем, что в условиях теоремы 2.5.5 выполнен соотношение (2.5.7). По теореме В.А.Окулова при $k\,\overline{\in}\,B$, имеем:

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)}\le C\int_{[0,\pi]^{|B|}}\min\left\{\min_{i\in B}\omega(s_i),\omega(\delta)\right\}\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i=$$

$$=C\left[\int_{[0,\delta]^{|B|}}\min_{i\in B}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i+\int_{[\delta,\pi]^{|B|}}\omega(\delta)\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{B_1\subset B\\ B_1\ne B\\ B_1\ne\varnothing}}\int_{[0,\delta]^{|B_1|}}\int_{[\delta,\pi]^{|B\setminus B_1|}}\min_{i\in B}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i\right]\le$$

$$\le C\left[\int_{[0,\delta]^{|B|}}\min_{i\in B}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B}s_i^{-1}ds_i+\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}+\right.$$

$$\le C\left[\int\limits_{[0,\delta]^{|B|}} \min_{i\in B}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i \quad +\omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{B_1\subset B\\ B_1\ne B\\ B_1\ne\varnothing}} \int\limits_{[0,\delta]^{|B_1|}} \min_{i\in B_1}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B_1} s_i^{-1}ds_i\left|\ln\delta\right|^{|B\setminus B_1|}\right] \le$$

Для любого $B_1 \subset B$ имеем:

$$\int\limits_{[0,\delta]^{|B_1|}} \min_{i\in B_1}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B_1} s_i^{-1}ds_i\left|\ln\delta\right|^{|B\setminus B_1|} \le$$

$$\le C\left[\int\limits_{[0,\delta]^{|B|}} \min_{i\in B}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i + \omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}\right]$$

Т.е.,

$$\omega_k(\widetilde{f}_B;\delta)_{L(T^n)} \le C\left[\int\limits_{[0,\delta]^{|B|}} \min_{i\in B}\{\omega(s_i)\}\prod_{i\in B} s_i^{-1}ds_i + \omega(\delta)\left|\ln\delta\right|^{|B|}\right].$$

б) Предположим, не ограничивая общности, что $B=\{1,\dots,m\}$, $1\le m\le n$. Пусть ω_1-модуль непрерывности, удовлетворяющая условию (Z_1), а условие (Z) не выполнено.

Положим

$$\omega(x) = \int\limits_0^x \frac{\omega_1(t)}{t}dt.$$

ω - модуль непрерывности, которая удовлетворяет аналогичные условиям, что и ω_1.

Рассмотрим функцию

$$F(x)=F(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}\min\limits_{i\in B}\left\{\dfrac{\omega_1(x_i)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m}\right\}, & \text{если } x_i\in[0,1],\ i=1,\dots,m,\\ & x_j\in[-\pi,\pi],\ j=m+1,\dots,n,\\ 0, & \text{если } (x_1,\dots,x_m)\in T^m\setminus[0,1]^m,\\ & x_j\in[-\pi,\pi],\ j=m+1,\dots,n.\end{cases}$$

Построенную функцию F продолжим 2π-периодически на вс пространство R^n.

Функция $F\in L(T^n)$. Действительно,

$$\int\limits_{T^n}|F(x)|dx=(2\pi)^{n-m}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1(x_i)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m}\right\}dx_1\cdots dx_m\le A\int\limits_0^1\frac{\omega_1(x_1)}{x_1}dx_1<+\infty.$$

Покажем, что $F\in H(\omega;L(T^n))$.

По определению функции F будем иметь:

$$(2\pi)^{n-m}\left\|F(x_1+h,x_2,\dots,x_n)-F(x_1,x_2,\dots,x_n)\right\|_{L(T^n)}\le$$

$$\le\int\limits_0^{1-h}\int\limits_0^1\dots\int\limits_0^1\left|\min\left\{\frac{\omega_1(x_1+h)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m},\frac{\omega_1(x_2)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m},\dots,\frac{\omega_1(x_m)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}\right\}-\right.$$

$$\left.-\min\left\{\frac{\omega_1(x_1)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m},\frac{\omega_1(x_2)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m},\dots,\frac{\omega_1(x_m)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m}\right\}\right|dx_1\cdots dx_m+$$

$$+\int_{1-h}^{1}\int_{0}^{1}\ldots\int_{0}^{1}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1(x_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\right)^m}\right\}dx_1\cdots dx_m+\int_{0}^{h}\int_{0}^{1}\ldots\int_{0}^{1}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1(x_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\right)^m}\right\}dx_1\cdots dx_m=\sum_{k=1}^{3}I_k.$$

Оценим теперь интеграли I_k (k=1,2,3) по отдельности.

$$I_2\le A\int_{1-h}^{1}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1}dx_1\le A_1h\le A_2\omega(h),$$

$$I_3\le A\int_{0}^{h}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1}dx_1=A_1\omega(h),$$

$$I_1\le\int_{0}^{1-h}\left[\int_{0}^{x_1}\ldots\int_{0}^{x_1}\min_{2\le i\le m}\omega_1(x_i)\left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\right)^m}-\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}\right]dx_2\cdots dx_m\right]dx_1+$$

$$+\int_{0}^{1-h}\left[\int_{x_1}^{x_1+h}\ldots\int_{x_1}^{x_1+h}\left|\frac{\min_{2\le i\le m}\omega_1(x_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}-\frac{\omega_1(x_1)}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\right)^m}\right|dx_2\cdots dx_m\right]dx_1+$$

$$+\int_{0}^{1-h}\left[\sum_{\substack{B_1\subset\{2,\ldots,m\}\\ B_1\ne\varnothing}}\int_{[0,x_1]^{|B_1|}}\int_{[x_1,x_1+h]^{m-1-|B_1|}}\min_{i\in B_1}\{\omega_1(x_i)\}\left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j\right)^m}-\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}\right]dx_2\cdots dx_m\right]dx_1+$$

$$+\int_{0}^{1-h}\left[\sum_{B_1\subset\{2,\ldots,m\}}\int_{[0,x_1+h]^{|B_1|}}\int_{[x_1+h,1]^{m-1-|B_1|}}\left|\frac{\min\{\omega_1(x_1+h),\min_{i\in B_1}\{\omega_1(x_i)\}}{\left(\sum_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}-\right.\right.$$

$$-\left.\frac{\min\{\omega_1(x_1),\min\limits_{i\in B_1}\{\omega_1(x_i)\}\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m}\right|dx_2\cdots dx_m\Bigg]dx_1=I_{1,1}+I_{1,2}+\sum I_{B_1}.$$

$$I_{1,1}\le\int\limits_0^{1-h}\left[\int\limits_0^{x_1}\ldots\int\limits_0^{x_1}\omega_1(x_2)\left[\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m}-\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}\right]dx_2\cdots dx_m\right]dx_1\le$$

$$\le A\int\limits_0^{1-h}\left[\int\limits_0^{x_1}\omega_1(x_2)\left[\frac{1}{(x_1+x_2)^2}-\frac{1}{(x_1+x_2+h)^2}\right]dx_2\right]dx_1\le A\int\limits_0^1\int\limits_0^1\omega_1(x_2)\left[\frac{1}{(x_1+x_2)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(x_1+x_2+h)^2}\right]dx_1dx_2\le Ah\int\limits_0^1\frac{\omega_1(x_2)}{x_2(x_2+h)}dx_2\le A_1\omega(h).$$

$$I_{1,2}\le\int\limits_0^{1-h}\left[\int\limits_{x_1}^{x_1+h}\ldots\int\limits_{x_1}^{x_1+h}\omega_1(x_1)\left[\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\right)^m}-\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}\right]dx_2\cdots dx_m\right]dx_1+$$

$$+\int\limits_0^{1-h}\left[\int\limits_{x_1}^{x_1+h}\int\limits_{x_1}^{x_1+h}\frac{\min\limits_{2\le i\le m}\{\omega_1(x_i)\}-\omega_1(x_1)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}x_j+h\right)^m}dx_2\ldots dx_m\right]dx_1\le$$

$$\le Ah\int\limits_0^{1-h}\frac{\omega_1(x_1)}{x_1(x_1+h)}dx_1+A\omega_1(h)\int\limits_0^{1-h}\left[\frac{1}{x_1+h}-\frac{1}{x_1+2h}\right]dx_1\le A_1\omega(h).$$

Аналогично можно показать, что для всех B_1 ($B_1\subset\{2,..,m\}$)

$$I_{B_1}\le A\omega(h).$$

Т.е.,

$$I_1\le A\omega(h).$$

Значит,

$$(2\pi)^{n-m}\|F(x_1+h, x_2,\ldots,x_n)-F(x_1,x_2,\ldots,x_n)\|_{L(T^n)} \le A\omega(h),$$

и $F\in H_1(\omega;L(T^n))$.

Точно также можно показать, что

$$F\in H_i(\omega;L(T^n)),\ i=2,\ldots,m.$$

Если $i\in[m+1, n]$, то в силу определения функции F заключаем, что

$$\omega_i(F;\delta)_{L(T^n)}=O(\omega(\delta)).$$

Т.е.,

$$F\in H(\omega;L(T^n)).$$

Оценим теперь $\omega_1(\widetilde{F}_B;\delta)_{L(T^n)}$ снизу.

По определению сопряженной функции и функции F будем иметь:

$$(2\pi)^{n-m}\left\|\widetilde{F}_B(x_1,x_2,\ldots x_m,x_{m+1},x_n)-\widetilde{F}_B(x_1-h,x_2,\ldots x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)}=$$

$$=\int\limits_{T^n}\left|\int\limits_{T^{|B|}}[F(x_1+s_1,x_2+s_2,\ldots x_m+s_m,x_{m+1},\ldots,x_n)-\right.$$

$$\left.-F(x_1+s_1-h,x_2+s_2,\ldots x_m+s_m,x_{m+1},\ldots,x_n]\prod_{i\in B}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\ldots dx_n\ge$$

$$\ge\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-1}^{0}\ldots\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cdots\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\int\limits_{-x_1}^{1-x_1}\int\limits_{-x_2}^{1-x_2}\cdots\int\limits_{-x_m}^{1-x_m}F(x_1+s_1,x_2+s_2,\ldots x_m+s_m,x_{m+1},x_n)\times\right.$$

$$\left.\times\left[ctg\frac{s_1}{2}-ctg\frac{s_1+h}{2}\right]\prod_{i=2}^{m}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_m\right|dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{-1}^{0}\ldots\int\limits_{-1}^{0}\left[\int\limits_{-x_1}^{1-x_1}\cdots\int\limits_{-x_m}^{1-x_m}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1(x_i+s_i)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{m}(x_j+s_j)\right)^m}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\left[ctg\frac{s_1}{2}-ctg\frac{s_1+h}{2}\right]\prod_{i=2}^{m}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_m\right]dx_1\cdots dx_n\ge$$

$$\ge \int_0^h \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left[\int_{x_1}^{1+x_1} \cdots \int_{x_m}^{1+x_m} \min_{i \in B} \left\{ \frac{\omega_1(s_i - x_i)}{\left(\sum_{j=1}^m (s_j - x_j) \right)^m} \right\} \times \prod_{i=2}^m \frac{1}{s_i} \frac{h}{s_1 (s_1 + h)} ds_1 \cdots ds_m \right] dx_1 \cdots dx_n \ge$$

$$\ge \int_0^h \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left[\int_{x_1}^{2x_1} \cdots \int_{x_m}^{2x_m} \min_{i \in B} \left\{ \frac{\omega_1(s_i - x_i)}{\left(\sum_{j=1}^m (s_j - x_j) \right)^m} \right\} \prod_{i=1}^m \frac{1}{s_i} \frac{h}{s_1 + h} ds_1 \cdots ds_m \right] dx_1 \cdots dx_n$$

$$\ge A \int_0^h \int_0^1 \ldots \int_0^1 \prod_{i=1}^m \frac{1}{x_i} \left[\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} \min_{i \in B} \left\{ \frac{\omega_1(s_i)}{\left(\sum_{j=1}^m s_j \right)^m} \right\} ds_1 \cdots ds_m \right] dx_1 \cdots dx_n .$$

Рассмотрим выражение

$$\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_m} \min_{i \in B} \left\{ \frac{\omega_1(s_i)}{\left(\sum_{j=1}^m s_j \right)^m} \right\} ds_1 \ldots ds_m .$$

Не ограничивая общности, допустим, что $x_1 = \min\{ x_1, \ldots, x_n \}$. Тогда

$$\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_m} \min_{i \in B} \left\{ \frac{\omega_1(s_i)}{\left(\sum_{j=1}^m s_j \right)^m} \right\} ds_1 \cdots ds_m \ge \int_0^{\frac{x_1}{2}} \left[\int_{s_1}^{2s_1} \ldots \int_{s_1}^{2s_1} \min_{i \in B} \left\{ \frac{\omega_1(s_i)}{\left(\sum_{j=1}^m s_j \right)^m} \right\} ds_2 \cdots ds_m \right] ds_1 \ge$$

$$\ge A \int_0^{\frac{x_1}{2}} \frac{\omega_1(s_i)}{s_i} ds_1 = A \omega\left(\frac{x_1}{2} \right) \ge \frac{A}{2} \omega(x_1).$$

Т.е.,

$$\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_m}\min_{i\in B}\left\{\frac{\omega_1(s_i)}{\left(\sum_{j=1}^{m}s_j\right)^m}\right\}ds_1\ldots ds_m \ge A\min_{i\in B}\{\omega(x_i)\},$$

и заключаем, что

$$(2\pi)^{2m}\left\|\widetilde{F}_B(x_1,\ldots,x_n)-\widetilde{F}_B(x_1-h,\ldots,x_n)\right\|_{L(T^n)} \ge A_1\int_0^h\int_0^1\ldots\int_0^1\min_{i\in B}\{\omega(x_i)\}\prod_{i\in B}x_i^{-1}dx_i.$$

Т.е., неравенство (2.5.8) доказано.

Теперь рассмотрим тот случай, когда $k\overline{\in}B$. Не нарушая общности, неравенству (2.5.9) докажем в том случае, когда $B=\{1,\ldots,n\text{-}1\}$ и $k=n$.

Рассмотрим вышеопределенную функцию F, но считаем, что $m=n$.

По определению сопряженной функции

$$\left\|\widetilde{F}_B(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)-\widetilde{F}_B(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\right\|_{L(T^n)}=$$

$$=\int_{T^n}\left|\int_{T^{|B|}}\left[F(x_1+s_1,\ldots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n+h)-F(x_1+s_1,\ldots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i\in B}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\ldots dx_n \ge \int_{-h}^{0}\ldots\int_{-h}^{0}\int_0^h\left|\int_{-x_1}^{1-x_1}\ldots\int_{-x_{n-1}}^{1-x_{n-1}}\left[F(x_1+s_1,\ldots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n+h)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-F(x_1+s_1,\ldots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n)\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n+$$

$$+\int_{-1}^{-h}\ldots\int_{-1}^{-h}\int_0^h\left|\int_{-x_1}^{1-x_1}\ldots\int_{-x_{n-1}}^{1-x_{n-1}}\left[F(x_1+s_1,\ldots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n+h)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-F(x_1+s_1,\ldots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n)\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n=$$

$$
=\int_{-h}^{0}\cdots\int_{-h}^{0}\int_{0}^{h}\left|\int_{-x_1}^{1-x_1}\cdots\int_{-x_{n-1}}^{1-x_{n-1}}\left[\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(x_i+s_i)\},\omega_1(x_n+h)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_j+s_j)+x_n+h\right)^n}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(x_i+s_i)\},\omega_1(x_n)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_j+s_j)+x_n\right)^n}\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n+
$$

$$
+\int_{-1}^{-h}\cdots\int_{-1}^{-h}\int_{0}^{h}\left|\int_{-x_1}^{1-x_1}\cdots\int_{-x_{n-1}}^{1-x_{n-1}}\left[\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(x_i+s_i)\},\omega_1(x_n+h)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_j+s_j)+x_n+h\right)^n}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(x_i+s_i)\},\omega_1(x_n)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(x_j+s_j)+x_n\right)^n}\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n=
$$

$$
=\int_{0}^{h}\cdots\int_{0}^{h}\int_{0}^{h}\left|\int_{x_1}^{1+x_1}\cdots\int_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}}\left[\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n+h)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n\right)^n}\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n+
$$

$$
+\int_{h}^{1}\cdots\int_{h}^{1}\int_{0}^{h}\left|\int_{x_1}^{1+x_1}\cdots\int_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}}\left[\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n+h)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}-\right.\right.
$$

$$
\left.\left.-\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n\right)^n}\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n=
$$

$$
=\int_0^h\ldots\int_0^h\int_0^h\left|\int_{x_1}^{1+x_1}\ldots\int_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}}\right[\min\left\{\min_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n)\right\}\times
$$

$$
\times\left[\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n\right)^n}-\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\right]-
$$

$$
\left.-\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n+h)\right\}-\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\right]\times
$$

$$
\left.\times\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right|dx_1\cdots dx_n+
$$

$$
+\int_h^1\ldots\int_h^1\int_0^h\left|\int_{x_1}^{1+x_1}\ldots\int_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}}\right[\min\left\{\min_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n)\right\}\left[\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n\right)^n}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\right]-
$$

$$
\left.-\frac{\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n+h)\right\}-\min\left\{\min\limits_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n)\right\}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\right]\times
$$

$$\times \prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{s_i}{2}ds_i \Bigg| dx_1\cdots dx_n.$$

Рассмотрим выражение

$$I=\int_0^h\ldots\int_0^h\int_0^h\left[\int_{x_1}^{1+x_1}\ldots\int_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}}\frac{\min\left\{\min_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i),\omega_1(x_n+h)\}\right\}-\min\left\{\min_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i),\omega_1(x_n)\}\right\}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right]dx_1\cdots dx_n+$$

$$+\int_h^1\ldots\int_h^1\int_0^h\left[\int_{x_1}^{1+x_1}\ldots\int_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}}\frac{\min\left\{\min_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i),\omega_1(x_n+h)\}\right\}-\min\left\{\min_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i),\omega_1(x_n)\}\right\}}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right]dx_1\cdots dx_n$$

и оценим его сверху:

$$I\le A\omega_1(h)\int_0^h\ldots\int_0^h\int_0^h\left[\int_{x_1+x_n}^{1+x_1}\ldots\int_{x_{n-1}+x_n}^{1+x_n}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right]dx_1\cdots dx_n+$$

$$+A\omega(h)|\ln h|^{n-1}\le A_1\omega_1(h)\int_0^h\ldots\int_0^h\int_0^h|\ln x_n|^{n-1}\frac{1}{h^n}dx_1\cdots dx_n+$$

$$A_1\omega(h)|\ln h|^{n-1}\le A_2\omega_1(h)|\ln h|^{n-1}\le A_3\omega(h)|\ln h|^{n-1}.$$

$$I_1=\int_0^h\ldots\int_0^h\int_0^h\left[\int_{x_1}^{1+x_1}\ldots\int_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}}\min\left\{\min_{1\le i\le n-1}\{\omega_1(s_i-x_i),\omega_1(x_n)\}\right\}\left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n\right)^n}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right]dx_1\cdots dx_n,$$

$$I_2 = \int\limits_h^1 \ldots \int\limits_h^1 \int\limits_0^h \left[\int\limits_{x_1}^{1+x_1} \ldots \int\limits_{x_{n-1}}^{1+x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\le i\le n-1} \{\omega_1(s_i - x_i), \omega_1(x_n)\} \right\} \left[\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} (s_j - x_j) + x_n \right)^n} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} (s_j - x_j) + x_n + h \right)^n} \right] \prod_{i=1}^{n-1} ctg \frac{s_i}{2} ds_i \right] dx_1 \cdots dx_n .$$

Оценим выражения I_1 и I_2 снизу.

$$I_1 \ge \int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h \int\limits_0^h \left[\int\limits_{x_1}^{2x_1} \ldots \int\limits_{x_{n-1}}^{2x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\le i\le n-1} \{\omega_1(s_i - x_i)\}, \omega_1(x_n) \right\} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} (s_j - x_j) + x_n \right)^n} - \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} (s_j - x_j) + x_n + h \right)^n} \right] \left. \prod_{i=1}^{n-1} ctg \frac{s_i}{2} ds_i \right] dx_1 \cdots dx_n \ge$$

$$A \int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \left[\int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\le i\le n-1} \omega_1(s_i), \omega_1(x_n) \right\} \left[\frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} s_j + x_n \right)^n} - \frac{1}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} s_j + x_n + h \right)^n} \right] \times \right.$$

$$\left. \times ds_1 \cdots ds_{n-1} \right] dx_1 \cdots dx_n \ge$$

$$\ge A_1 \int\limits_0^h \ldots \int\limits_0^h \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \left[\int\limits_0^{x_1} \ldots \int\limits_0^{x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\le i\le n-1} \omega_1(s_i), \omega_1(x_n) \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{h^n}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} s_j + x_n \right)^n \left(\sum\limits_{j=1}^{n-1} s_j + x_n + h \right)^n} ds_1 \cdots ds_{n-1} \right] dx_1 \cdots dx_n \ge$$

$$\geq A_2\int_0^h\ldots\int_0^h\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x_i}\left[\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_{n-1}}\min\left\{\min_{1\leq i\leq n-1}\omega_1(s_i),\omega_1(x_n)\right\}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}s_j+x_n\right)^n}ds_1\cdots ds_{n-1}\right]dx_1\cdots dx_n.$$

Рассмотрим

$$J_1=\int_0^h\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_{n-1}}\min\left\{\min_{1\leq i\leq n-1}\{\omega_1(s_i)\},\omega_1(x_n)\right\}\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}s_j+x_n\right)^n}dx_n ds_1\cdots ds_{n-1},$$

и, не ограничивая общности, допустим, что $x_1=\min\{x_1,..,x_{n-1}\}$. Тогда

$$J_1\geq\int_0^{\frac{x_1}{2}}\left[\int_{s_1}^{2s_1}\ldots\int_{s_1}^{2s_1}\frac{\min_{1\leq i\leq n}\{\omega_1(s_i)\}}{\left(\sum_{j=1}^{n}s_j\right)^n}ds_2\cdots ds_n\right]ds_1\geq A\int_0^{\frac{x_1}{2}}\frac{\omega_1(s_1)}{s_1}ds_1\geq A_1\omega(x_1).$$

Т.е.,

$$J_1\geq A_1\min_{i\in B}\{\omega(x_i)\},$$

и заключаем, что

$$I_1\geq A\int_0^h\ldots\int_0^h\min_{i\in B}\{\omega(x_i)\}\prod_{i=1}^{n-1}x_i^{-1}dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

Тепер оценим выражение I_2 снизу.

$$I_2\geq\int_h^1\ldots\int_h^1\int_0^h\left[\int_{x_1}^{2x_1}\ldots\int_{x_{n-1}}^{2x_{n-1}}\min\{\min_{1\leq i\leq n-1}\{\omega_1(s_i-x_i)\},\omega_1(x_n)\}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n\right)^n}-\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1}(s_j-x_j)+x_n+h\right)^n}\right]\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_i\right]dx_1\cdots dx_n\geq$$

$$\geq A\int_h^1 \ldots \int_h^1 \int_0^h \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \left[\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\leq i\leq n-1} \omega_1(s_i), \omega_1(x_n) \right\} \left[\frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j + x_n \right)^n} - \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j + x_n + h \right)^n} \right] \times \right.$$

$$\left. \times ds_1 \cdots ds_{n-1} \right] dx_1 \cdots dx_n \geq$$

$$\geq A_1 \int_h^1 \ldots \int_h^1 \int_0^h \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \left[\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\leq i\leq n-1} \omega_1(s_i), \omega_1(x_n) \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{h^n}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j + x_n \right)^n \left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j + x_n + h \right)^n} ds_1 \cdots ds_{n-1} \right] dx_1 \cdots dx_n \geq$$

$$\geq A_2 \int_h^1 \ldots \int_h^1 \int_0^h \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} \left[\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\leq i\leq n-1} \omega_1(s_i), \omega_1(x_n) \right\} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j + x_n \right)^n} ds_1 \cdots ds_{n-1} \right] dx_1 \cdots dx_n$$

Рассмотрим выражение

$$J_2 = \int_0^h \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{n-1}} \min\left\{ \min_{1\leq i\leq n-1} \{\omega_1(s_i)\}, \omega_1(x_n) \right\} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j + x_n \right)^n} dx_n ds_1 \cdots ds_{n-1} ,$$

Тогда

$$J_2 \geq \int_0^{\frac{h}{2}} \int_{s_1}^{2s_1} \ldots \int_{s_1}^{2s_1} \frac{\min\limits_{1\leq i\leq n} \{\omega_1(s_i)\}}{\left(\sum_{j=1}^{n} s_j \right)^n} ds_1 \ldots ds_n \geq A \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\omega_1(s_1)}{s_1} ds_1 \geq A_1 \omega(h).$$

Т.е.,

$$J_2 \geq A_1 \omega(h),$$

и заключаем, что

$$I_2 \geq A\int_h^1 \ldots \int_h^1 \omega(h)\prod_{i=1}^{n-1} x_i^{-1}dx_1 \cdots dx_{n-1} = A\omega(h)|\ln h|^{|B|}.$$

Таким образом, мы получаем, что

$$I_2 \geq A\omega(h)|\ln h|^{|B|}.$$

Т.е.,

$$(2\pi)^{2n}\left\|\widetilde{F}_B(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h) - \widetilde{F}_B(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)\right\|_{L(T^n)} \geq$$

$$\geq A\int_{[0,h]^{|B|}} \min_{i\in B}\{\omega(x_i)\}\prod_{i\in B} x_i^{-1}dx_i + A\omega(h)|\ln h|^{|B|},\ A = const.$$

Теорема 2.5.2 доказана.

Глава 3

Об аппроксимативных свойствах средных Чезаро В пространствах C и L

§ 3.1. Обозначения и известные результаты

Символом N_0^n обозначим такое подмножество множества R^n, координаты которого неотрицательные целые числа.

Пусть $\lambda(p)$ - число тех координат точки p, которые равны нулю. Ряд

$$s(n)=\sum_{p\geq 0}2^{-\lambda(p)}\sum_{B\subset M}a_p{}^{(B)}\prod_{i\in B}\cos p_i x_i\prod_{j\in M\setminus B}\sin p_j x_j \tag{3.1.1}$$

будем называть n-кратным тригонометрическим рядом, где $\left(a_p^{(B)}\right)_{p\geq 0}$ - произвольная последовательность вещественных чисел.

Если функция $f\in L(T^n)$, то числа

$$a_p^{(B)}(f)=\frac{1}{\pi^n}\int_{T^n}f(x)\prod_{i\in B}\cos p_i x_i\prod_{j\in M\setminus B}\sin p_j x_j dx$$

будем называть n-кратными коэффициентами Фурье функции f. Ряд (3.1.1), в котором $\left(a_p^{(B)}\right)_{p\geq 0}\equiv\left(a_p^{(B)}(f)\right)_{p\geq 0}$, называют n-кратным ($n\geq 1$) тригонометрическим рядом Фурье функции f. В дальнейшем его обозначаем символом $\sigma_n[f]$, причем будем предполагать, что $\sigma_1[f]\equiv\sigma[f]$.

Рассмотрим ряд (3.1.1). Сопряженный n-кратный тригонометрический ряд по переменной x_j ($j=1,\dots,n$) определяется с помощью следующей операцией: если слагаемое ряда (3.1.1) не содержит переменного x_j, то оно (т.е. слагаемое) заменяется нулем, в противном случае $\cos p_j x_j$ надо заменить на $\sin p_j x_j$, а $\sin p_j x_j$

на - $\cos p_j x_j$. Сопряженный тригонометрический ряд (для ряда (3.1.1)) по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ определяется последовательным применением операции сопряжения относительно тех переменных, индексы которых составляют множество $B=\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ($B \neq \varnothing$). В дальнейшем n-кратный сопряженный тригонометрический ряд по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ для ряда $\sigma_n[f]$ обозначаем через $\overline{\sigma}_n[f,B]$, причем и здесь при $n=1$ предполагается, что $\overline{\sigma}_1[f,B] \equiv \overline{\sigma}[f]$.

Пусть $t \in T$ и $|\alpha| \in [0,1)$. Рассмотрим

$$K_m^\alpha(t) = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1} D_k(t),$$

$$\tau_m^\alpha(t) = \frac{1}{A_m^\alpha} \sum_{k=0}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1} \overline{D}_k(t),$$

где $A_0^\alpha = 1, \quad A_k^\alpha = \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}{k!}, \quad k \in N$ и для $|t| \in (0,\pi]$

$$D_k(t) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \cos it = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$\overline{D}_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \sin it = \frac{\cos\frac{t}{2} - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$D_k(0) = k + \frac{1}{2}, \quad \overline{D}_k(0) = 0, \quad k \in N.$$

Известна, что (см., например [14, с. 159])

$$\tau_m^\alpha(t) = \frac{1}{2} ctg \frac{t}{2} - \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=o}^{m} A_{m-k}^{\alpha-1} \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} ctg \frac{t}{2} + H_m^\alpha(t), \ t \in (0,\pi], \quad (3.1.2)$$

$$\max_{\delta\le t\le\pi}\left|K_m^\alpha(t)\right|\le Am^{-\alpha}\delta^{-(\alpha+1)},\quad A=A(\alpha)=const, \tag{3.1.3}$$

$$K_m^\alpha(t)\ge A_1 m \qquad \text{при} \quad |t|\in\left[0,\frac{1}{2m}\right], \tag{3.1.4}$$

$$\left|H_m^\alpha(t)\right|\le A_2 m^{-\alpha}t^{-1-\alpha} \qquad \text{при} \quad t\in\left[\frac{1}{m},\pi\right]. \tag{3.1.5}$$

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_i\in(-1,+\infty)$ $(i=1,\dots,n)$ и $m=(m_1,\dots,m_n)$, $m_i\in N$ $(i=1,\dots,n)$. Выражения

$$\sigma_m^\alpha(x,f)=\frac{1}{T^n}\int_{T^n}f(x+s)\prod_{i=1}^{n}K_{m_i}^{\alpha_i}(s_i)ds$$

и

$$t_m^\alpha(x,f,B)=\frac{(-1)^{|B|}}{T^n}\int_{T^n}f(x+s)\prod_{i\in M\setminus B}K_{m_i}^{\alpha_i}(s_i)\prod_{j\in B}\tau_{m_j}^{\alpha_j}(s_i)ds \tag{3.1.6}$$

называются n-кратными средними Чезаро соответственно рядов $\sigma_n[f]$ и $\bar{\sigma}_n[f,B]$ (см., например [11, с. 186]).

В теории функции вещественной переменной получен ряд результатов, связанных с аппроксимативными свойствами средных Чезаро и Пуассона-Абеля рядов Фурье функции f и их сопряженных рядов как одномерном, так и многомерном случаях. Они изложены в монографиях и обзорных статьях разных авторов.

В 1912 году С.И. Бернштейн [1] показал, что если функция $f\in\mathrm{Lip}(\alpha; C(T))$ $(0<\alpha\le1)$, то

$$\left\|\sigma_n^1[f]-f\right\|_{C(T)}\le\begin{cases}A(f)n^{-\alpha}, & 0<\alpha<1\\ A(f)n^{-\alpha}\ln(n-2), & \alpha=1,\, n\in N,\end{cases}$$

причем эти оценки неусиляемые по порядку.

В 1950 году И.П. Натансон [19] установил, что если функция $f\in C(T)$, то

$$\left\|\sigma_n^1[f]-f\right\|_{C(T)} \le 3\omega\left[f, \frac{\pi(1+2\ln n)}{4n}\right], \qquad n\in N.$$

В дальнейшем Флетт [25] установил ряд теорем, связанных с аппроксимативными свойствами (C,α) средних, $\alpha\in[0,+\infty)$, рядов $\sigma[f]$ как в отдельных точках, так и в пространстве $C(T)$. В частности были обобщены результаты С.И. Бернштейна [5] и других.

В силу результатов С.И. Бернштейна [5] и И.И. Привалова [24] можно заключить, что если функция $f\in\mathrm{Lip}(\alpha;C(T))$ $(0<\alpha<1)$, то

$$\left\|t_n^1[f]-\tilde{f}\right\|_{C(T)} \le A(f)n^{\alpha}, \; n\in N.$$

Случай α = 1 был рассмотрен Алексичом [1] 1941 году.Он в частности доказал, что если $f\in\mathrm{Lip}(1;C(T))$, то

$$\left\|t_n^1[f]-\tilde{f}\right\|_{C(T)} \le A(f)n^{-1}, \qquad n\in N.$$

Таким образом, Алексич обнаружил, что хотя в некоторых случаях функция $\tilde{f}$ не обладает теми свойствами, которыми характеризовалась исходная функция f (суммируемости, непрерывности и другими), но в смысле аппроксимативных свойств, в некоторых случаях, функция $\tilde{f}$ "лучше" ведет себя.

Следует добавить, что в 1945 году Зигмунд [12] другим методом доказал неравенство Алексича, а Флетт [29] усилил его.

Для функции многих переменных имеет место следующая

Теорема А (Л.В.Жижиашвили (см. [11, с. 322])). Пусть функция $f\in L^p(T^n)$ при некотором $p\in[1,+\infty]$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\alpha_i\in(-1;+\infty)$ $(i=1,...,n)$

и $m=(m_1,...m_n)$, $\frac{\pi}{m}=\left(\frac{\pi}{m_1},...,\frac{\pi}{m_n}\right)$, $\frac{1}{m}=\left(\frac{1}{m_1},...,\frac{1}{m_n}\right)$, $m_i \in N$ $(i=1,...,n)$. Тогда для любого $B \subset M$ имеет место неравенство

$$\left\| t_m^{\alpha}(\cdot,f,B)-\widetilde{f}_B\left(\cdot,\frac{\pi}{m}\right)\right\|_{L^p(T^n)} \le A(p,n,\alpha)\left\{\sum_{B_1\subset M}\prod_{i\in B_1}\lambda(m_i,\alpha_i)\omega_{B_1}\left(f;\frac{1}{m}\right)_{L^p(T^n)}+\right.$$

$$+\sum_{B_1\subset B}\sum_{B_2\subset M\setminus B}\prod_{i\in B_2}\lambda(n_i,\alpha_i)\omega_{B_2}\left(\widetilde{f}_{B_1}\left(\cdot,\frac{\pi}{m}\right),\frac{1}{m}\right)_{L^p(T^n)}+$$

$$+\sum_{i\in M\setminus B} m_i^{-1}\int_{1/m_i}^{\pi} s_i^{-2}\omega_i\left(\widetilde{f}_B\left(\cdot,\frac{\pi}{m}\right),s_i\right)_{L^p(T^n)} ds_i+$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n} m_i^{-1}\int_{1/m_i}^{\pi} s_i^{-2}\omega_i(f;s_i)_{L^p(T^n)}ds_i\right\}$$

где

$$\lambda(m_i,\alpha_i)=\begin{cases} m_i^{\alpha} & \alpha_i\in(-1,0)\\ \ln(m_i+2), & \alpha_i=0\\ 1\ , & \alpha_i\in(0,+\infty),\ \ m_i\in N\quad (i=1,...,m).\end{cases}$$

Следует добавыть, что если $B=M$, то предполагается, что

$$\sum_{i\in M\setminus B} m_i^{-1}\int_{1/m_i}^{\pi} s_i^{-2}\omega_i\left(\widetilde{f}_B\left(\cdot,\frac{\pi}{m}\right),s_i\right)_{L^p(T^n)} ds_i=0$$

и $B_1\neq B$.

§ 3.2. Об аппроксимативных свойствах средних Чезаро сопряженных тригонометрических рядов Фурье в пространстве $C(T^n)$

Справедлива следующая

Теорема 3.2.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega,C(T^n))$ $(n\geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, тогда

$$\sup_{x\in T}\left|t^{\alpha'}_{m'}(x,\ldots,x,f,B)-\tilde{f}_B\left(x,\ldots,x;\frac{\pi}{m'}\right)\right|=O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|}\right],$$

$$m\to\infty, B\subset M, B\neq M;$$

$$\sup_{x\in T}\left|t^{\alpha'}_{m'}(x,\ldots,x,f,M)-\tilde{f}_M\left(x,\ldots,x;\frac{\pi}{m'}\right)\right|=O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1}\right],\quad m\to\infty,$$

где $\alpha'=(\alpha,\ldots,\alpha)$, $\alpha\in(0,+\infty)$ и $m'=(m,\ldots,m)$, $\frac{\pi}{m'}=\left(\frac{\pi}{m},\ldots,\frac{\pi}{m}\right)$, $m\in N$;

б) Существует функция $F\in H(\omega,C(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\left|t^{\alpha'}_{m'}(x,\ldots,x,f,B)-\tilde{f}_B\left(x,\ldots,x;\frac{\pi}{m'}\right)\right|\geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|},$$

$$B\subset M, B\neq M,$$

$$\left|t^{\alpha'}_{m'}(x,\ldots,x,f,B)-\tilde{f}_M\left(x,\ldots,x;\frac{\pi}{m'}\right)\right|\geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1},$$

$$C=const>0.$$

Доказательство. В условиях теоремы 3.2.1 справедливость утверждения пункта (а) вытекает из теоремы А.

б) Доказательство утверждения пункта (б) при $|B|=n-1$ приведем для оператора

$$\widetilde{f}_{\{1,\dots,n-1\}}(x_1,\dots,x_n)=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1}\int\limits_{T^{n-1}} f(x_1+u_1,\dots,x_{n-1}+u_{n-1},x_n)\prod_{i=1}^{n-1} ctg\,\frac{u_i}{2}\,du_1\cdots du_{n-1}$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_k)_{k\geq 1}$ такую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < 1 \quad (b_0=0),$$

при любом m $(m=1,2,\dots)$

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} b_k < b_m, \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} b_k \left|\ln\omega^{-1}(b_k)\right|^{n-1} < b_m\left|\ln\omega^{-1}(b_m)\right|^{n-1},$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{\omega^{-1}(b_k)}{\omega^{-1}(b_i)}\right]^{\alpha-\beta} < \left(\omega^{-1}(b_k)\right)^{\varepsilon}.$$

Будем считать, что $\beta+\varepsilon<\alpha$, где β такое число, что $0<\beta<1$ и $\frac{\omega(x)}{t^{\beta}}$ почти убывает, а ε некоторое положительное число.

Пусть

$$\tau_m = 2\sum_{i=0}^{m-1}\omega^{-1}(b_i),$$

$$\tau_m^{*} = \tau_m + \omega^{-1}(b_m) \ (m=1,2,\dots).$$

Рассмотрим множества

$$A=\{x\in T^n:\ x_i\in T,\ i=1,\dots,n\text{-}1,\ -\pi\leq x_n\leq 0\},$$

$$B=\left\{x\in T^n: x_i\in T, i=1,\dots,n-1, \qquad 2\sum_{k=0}^{\infty}\omega^{-1}(b_k)\leq x_n\leq \pi\right\},$$

Для любого m=1,2,...

$$Q_m=\left\{x\in T^n: x_i\in T, i=1,\dots,n-1, x_n=\tau_m^{*}\right\},$$

$$R_m=\{x\in T^n:\ x_i\in T,\ i=1,\dots,\ n\text{-}1,\ x_n=\tau_m\},$$

$$V_m=\left\{x\in T^n: x_i\in T, i=1,\dots,n-1, \tau_m<x_n<\tau_m^{*}\right\}$$

$$W_m=\left\{x\in T^n: x_i\in T, i=1,\dots,n-1, \tau_m^{*}<x_n<\tau_{m+1}\right\}$$

$$C_m = \bigcup_{j=1}^{n-1}\left\{x \in T^n : x_i \in T, i = 1,\ldots,n-1, i \neq j, -\pi \leq x_j \leq -\sqrt[n-1]{b_m} + \tau_m, \tau_m \leq x_n \leq \tau_{m+1}\right\},$$

$$q_m^1 = \left\{x \in T : -\pi \leq x \leq -\sqrt[n-1]{b_m} + \tau_m\right\},$$

$$q_m^2 = \left\{x \in T : -\sqrt[n-1]{b_m} + \tau_m \leq x \leq \tau_m\right\},$$

$$q_m^3 = \left\{x \in T : \tau_m < x < \pi - \sqrt[n-1]{b_m}\right\},$$

$$q_m^4 = \left\{x \in T : \pi - \sqrt[n-1]{b_m} \leq x \leq \pi\right.$$

и функцию

$$g_m(u) = \begin{cases} 0, & u \in q_m^1, \\ u + \sqrt[n-1]{b_m} - \tau_m, & u \in q_m^2, \\ \sqrt[n-1]{b_m}, & u \in q_m^3, \\ \pi - u, & u \in q_m^4. \end{cases}$$

Теперь определим функцию G: $T^n \to R$. Для любого m=1,2,...

$$G(x) = G(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} g_m(x_1)\ldots g_m(x_{n-1}), & x \in Q_m, \\ 0, & x \in A \bigcup B \bigcup R_m \bigcup C_m. \end{cases}$$

Рассмотрим множество

$$\overline{V}_m = \{x \in T^n, x_i \in T, i = 1,\ldots,n-1, \tau_m \leq x_n \leq \tau_m^*\} \quad (m = 1,2,\ldots)$$

и разложим его ряд подмножеств

$$\Pi_m^k = \{x \in T^n : x_i \in q_m^{k_i}, i = 1,\ldots n-1, \tau_m \leq x_n \leq \tau_m^*\}$$

(k=1,...,4^{n-1}, k_i=1,...,4: i=1,...,n-1).

Для любого множества Π_m^k $\left(m = 1,2,\ldots; k = 1,\ldots,4^{m-1}\right)$

$$G(x) = \frac{1}{\omega^{-1}(b_m)} g_m(x_1)\ldots g_m(x_{n-1})(x_n - \tau_m)$$

$$(x \in \Pi_m^k,\ m = 1,2,\ldots; k = 1,\ldots,4^{n-1})$$

На множестве $\overline{W}_m = \{x \in T^n : x_i \in T, i = 1,..,n-1, \tau_m^* \leq x_n \leq \tau_{m+1}\}$ (m=1,2,...) функцию G определим следующим образом:

$$G(x) = G(x_1,\ldots,x_n) = G(x_1,\ldots,x_{n-1}, 2\tau_m^* - x_n).$$

Построенную функцию G продолжим 2π–периодически на все пространство R^n.

Покажем, что

$$G \in \left[\bigcap_{k=1}^{n-1} H_k(\delta; C(T^n))\right] \bigcap H_n(\omega; C(T^n)).$$

Для всех внутренних точек множества $\Pi_m^k \ (m=1,2,\ldots,k=1,\ldots,4^{m-1})$

$$\left|\frac{\partial G(x)}{\partial x_1}\right| \le \frac{\sqrt[n-1]{b_m}}{\omega^{-1}(b_m)}(x_n - \tau_m) \le 1. \tag{3.2.1}$$

Непрерывная функция G: $T^n \to R$ на множестве $A \bigcup B \bigcap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} C_m\right)$ равна нулю. Значит, в силу (3.2.1) можно заключить, что $G \in H_1(\delta; C(T^n))$.

Точно также можно показать, что функция G принадлежит классу $H_k(\delta; C(T^n))$ $(k=2,\ldots,n\text{-}1)$.

Для любой точки множества V_m $(m=1,2,\ldots)$

$$\left|\frac{\partial G(x)}{\partial x_n}\right| \le \frac{1}{\omega^{-1}(b_m)}\left|g_m(x_1)\ldots g_m(x_{n-1})\right| \le \frac{b_m}{\omega^{-1}(b_m)} = \frac{\omega(\tau_m^* - \tau_m)}{\tau_m^* - \tau_m},$$

поэтому для всех различных точек $(x_1,\ldots,x_n)$ и $(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h)$, принадлежащих V_m $(m=1,2,\ldots)$, имеем:

$$\left|G(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n+h) - G(x_1,\ldots,x_n)\right| \le \frac{\partial G(x)}{\partial x_n}|h| \le \frac{\omega(\tau_m^* - \tau_m)}{\tau_m^* - \tau_m}|h|.$$

Но так как $0 < |h| \le \tau_m^* - \tau_m$, то отсюда получим

$$|\Delta^{(n)}(h)G(x)| \le \omega(|h|),\ x \in V_m.$$

Используя лемму 1.2.6, приходым к выводу, что

$$G \in H_n(\omega; C(T^n)),$$

причем, данное включение является точным. Действительно, если $\tau_m \le x_1,\dots,x_{n-1} \le \pi - \sqrt[n-1]{b_m} \quad (m=1,2,\dots)$, то

$$\left|G(x_1,\dots,x_{n-1},\tau_m^*) - G(x_1,\dots,x_{n-1}\tau_m)\right| = \left|G(x_1,\dots,x_{n-1},\tau_m^*)\right| = \omega(\tau_m^* - \tau_m).$$

Резюмируя вышесказанное, заключаем, что справедливо включение

$$G \in \left[\bigcap_{k=1}^{n-1} H_k(\delta;C(T^n))\right] \cap H_n(\omega;C(T^n)).$$

и оно является точным.

Рассмотрим выражения

$$\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(\tau_k,\dots,\tau_k;\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int\limits_{T^n\left(\{1,\dots,n-1\}\frac{1}{m}\right)} G(s_1+\tau_k,\dots,s_{n-1}+\tau_k,\tau_k)\prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{s_i}{2}\,ds_1\cdots ds_n$$

и

$$t_m^{\alpha'}(\tau_k,\dots,\tau_k G,\{1,\dots,n-1\}) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{n-1}}\int\limits_{T^n} G(\tau_k+s_1,\dots,\tau_k+s_n)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_i)\times$$

$$\times K_m^{\alpha}(s_n)\,ds_1\cdots ds_n.$$

В силу определения функции G

$$\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(\tau_k,\dots,\tau_k;\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1} \int\limits_{T^n\left(\{1,\dots,n-1\}\frac{1}{m}\right)} G(s_1+\tau_k,\dots,s_{n-1}+\tau_k,\tau_k)\prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{s_i}{2}\,ds_1\cdots ds_n = 0,$$

и поэтому будем иметь:

$$t_m^{\alpha'}(\tau_k,\dots,\tau_k G,\{1,\dots,n-1\}) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(\tau_k,\dots,\tau_k;\frac{1}{m}\right) =$$

$$= t_m^{\alpha'}(\tau_k,\dots,\tau_k G,\{1,\dots,n-1\}) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{n-1}}\int\limits_{T^n} G(\tau_k+s_1,\dots,\tau_k+s_n)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_i)\times$$

$$\times K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^{n-1}}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{-\tau_k}^{\pi-\tau_k} G(\tau_k+s_1,\dots,\tau_k+s_n)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n =$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k} G(\tau_k+s_1,\dots,\tau_k+s_n)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i^*-\tau_k}^{\tau_{i+1}-\tau_k} G(\tau_k+s_1,\dots,\tau_k+s_n)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n =$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(\tau_k+s_n-\tau_i)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots d$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i^*-\tau_k}^{\tau_{i+1}-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(2\tau_i^*-\tau_k-s_n-\tau_i)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n =$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(\tau_k+s_n-\tau_i)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(\tau_k+s_n-\tau_i)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n+2\tau_k-2\tau_i^*)ds_1\cdots ds_n.$$

Выберем k так, что $\frac{1}{2m}>\tau_k^*-\tau_k\ge\frac{A}{2m}$. Тогда получим:

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(\tau_k+s_n-\tau_i)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n\right| =$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}\prod_{j=1}^{n-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_i(\tau_k+s_j)\tau_m^\alpha(s_j)ds_j\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(\tau_k+s_n-\tau_i)K_m^\alpha(s_n)ds_n\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}\prod_{j=1}^{n-1}\int\limits_{-\sqrt[n]{b_i}+\tau_i-\tau_k}^{\pi}g_i(\tau_k+s_j)\tau_m^\alpha(s_j)ds_j\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(\tau_k+s_n-\tau_i)K_m^\alpha(s_n)ds_n\right| =$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}\prod_{j=1}^{n-1}\left[\int\limits_{-\sqrt[n-1]{b_i}+\tau_i-\tau_k}^{\tau_i-\tau_k}(\tau_k+s_j+\sqrt[n-1]{b_i}-\tau_i)\tau_m^\alpha(s_j)ds_j+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\pi-\tau_k}\sqrt[n-1]{b_i}\,\tau_m^\alpha(s_j)ds_j\right]\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(\tau_k+s_n-\tau_i)K_m^\alpha(s_n)ds_n\right|.$$

В силу (3.1.3) будем иметь:

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(\tau_k+s_n-\tau_i)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n\right|\le$$

$$\le A\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_i}{\tau_i^*-\tau_i}\left|\ln(\tau_i^*-\tau_i)\right|^{n-1}\left|\int\limits_{\tau_k-\tau_i^*}^{\tau_k-\tau_i}(\tau_k-\tau_i-s_n)K_m^\alpha(s_n)ds_n\right|\le$$

$$\le A\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_i}{\tau_i^*-\tau_i}\left|\ln(\tau_i^*-\tau_i)\right|^{n-1}\int\limits_{\tau_k-\tau_i^*}^{\tau_k-\tau_i}(\tau_k-\tau_i-s_n)\frac{1}{m^\alpha}\frac{1}{s_n^{1+\alpha}}ds_n\le$$

$$\le A_1\sum_{i=1}^{k-1}\frac{b_i}{\tau_i^*-\tau_i}\left|\ln(\tau_i^*-\tau_i)\right|^{n-1}\frac{1}{m^\alpha}\frac{\left(\tau_i^*-\tau_i\right)^2}{\left(\tau_k-\tau_i^*\right)^{1+\alpha}}\le$$

$$\le A_2\omega\left(\tau_k^*-\tau_k\right)\left|\ln(\tau_k^*-\tau_k)\right|^{n-1}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\tau_k^*-\tau_k}{\tau_i^*-\tau_i}\right)^{\alpha-\beta}.$$

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(\tau_k+s_n-\tau_i)\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^\alpha(s_i)K_m^\alpha(s_n)ds_1\cdots ds_n\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}\prod_{j=1}^{n-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g_i(\tau_k+s_j)\tau_m^\alpha(s_j)ds_j\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(\tau_k+s_n-\tau_i)K_m^\alpha(s_n)ds_n\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}\prod_{j=1}^{n-1}\int\limits_{-\sqrt[n-1]{b_i}+\tau_i-\tau_k}^{\pi}g_i(\tau_k+s_j)\tau_m^\alpha(s_j)ds_j\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(\tau_k+s_n-\tau_i)K_m^\alpha(s_n)ds_n\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}\prod_{j=1}^{n-1}\left[\int\limits_{-\sqrt[n-1]{b_i}+\tau_i-\tau_k}^{\tau_i-\tau_k}(\tau_k+s_j+\sqrt[n-1]{b_i}-\tau_i)\tau_m^\alpha(s_j)ds_j+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\pi-\tau_k}\sqrt[n-1]{b_i}\,\tau_m^\alpha(s_j)ds_j\right]\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(\tau_k+s_n-\tau_i)K_m^\alpha(s_n)ds_n\right|\le$$

$$\le A\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{b_i}{\tau_i^*-\tau_i}\left|\ln(\tau_i^*-\tau_i)\right|^{n-1}\left|\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(s_n-(\tau_i-\tau_k))K_m^{\alpha}(s_n)ds_n\right|\le$$

$$\le A\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{b_i}{\tau_i^*-\tau_i}\left|\ln(\tau_i^*-\tau_i)\right|^{n-1}\int\limits_{\tau_i-\tau_k}^{\tau_i^*-\tau_k}(s_n-(\tau_i-\tau_k))\frac{1}{m^{\alpha}}\frac{1}{s_n^{1+\alpha}}ds_n\le$$

$$\le A_1\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{b_i}{\tau_i^*-\tau_i}\left|\ln(\tau_i^*-\tau_i)\right|^{n-1}\frac{1}{m^{\alpha}}\frac{(\tau_i^*-\tau_i)^2}{(\tau_i-\tau_k)^{1+\alpha}}\le A_2b_{k+1}\left|\ln(\tau_k^*-\tau_k)\right|^{n-1}.$$

Аналогичним образом получим, что

$$\left|\sum_{\substack{i=1\\i\ne k-1}}^{\infty}\int\limits_{T^{n-1}}\int\limits_{\tau_i^*-\tau_k}^{\tau_{i+1}-\tau_k}\frac{1}{\tau_i^*-\tau_i}g_i(\tau_k+s_1)\cdots g_i(\tau_k+s_{n-1})(2\tau_i^*-\tau_k-s_n-\tau_i)\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_i)K_m^{\alpha}(s_n)ds_1\cdots ds_n\right|\le A(\tau_k^*-\tau_k)^{\alpha}.$$

Таким образом, принимая во внимание соотношения (3.1.4) и (3.1.5), можно заключить, что

$$\left|t_{m'}^{\alpha}(\tau_k,..,\tau_kG,\{1,...,n-1\})-\widetilde{G}_{\{1,...,n-1\}}\left(\tau_k,...,\tau_k;\frac{1}{m'}\right)\right|\ge$$

$$\ge\int\limits_{\sqrt[n-1]{b_k}}^{1}\cdots\int\limits_{\sqrt[n-1]{b_k}}^{1}\int\limits_{0}^{\tau_k^*-\tau_k}\frac{s_n}{\omega^{-1}(b_k)}b_k\prod_{i=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_i)K_m^{\alpha}(s_n)ds_1\cdots ds_n\ge$$

$$\ge A_1b_k\left|\ln b_k\right|^{n-1}\ge A_2\omega(\tau_k^*-\tau_k)\left|\ln(\tau_k^*-\tau_k)\right|^{n-1}\ge A_3\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1}.$$

Теперь рассмотрим выражения

$$\widetilde{G}_{\{1,...,n\}}\left(\tau_k,...,\tau_k;\frac{1}{m'}\right)=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\limits_{T^n\left(\{1,...,n\},\frac{1}{m'}\right)}G(s_1+\tau_k,...,s_n+\tau_k)\prod_{i=1}^{n}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_n,$$

$$t_{m'}^{\alpha}(\tau_k,..,\tau_k,G,\{1,...,n\})=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\int\limits_{T^n}G(s_1+\tau_k,...,s_n+\tau_k)\prod_{i=1}^{n}\tau_m^{\alpha}(s_i)ds_1\cdots ds_n.$$

$$t_{m'}^{\alpha}(\tau_k,..,\tau_k,G,\{1,...,n\})-\widetilde{G}_{\{1,...,n\}}\left(\tau_k,...,\tau_k;\frac{1}{m'}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{n}\int_{T^{n}}G(s_1+\tau_k,\ldots,s_n+\tau_k)\prod_{i=1}^{n}\tau_m^{\alpha}(s_i)ds_1\cdots ds_n-$$

$$-\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{n}\int_{T^{n}\left(\{1,\ldots,n\},\frac{1}{m}\right)}G(s_1+\tau_k,\ldots,s_n+\tau_k)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_n=$$

$$=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^{n}\left(\sum_{\substack{B\subset M\\ B\neq M}}\int_{T^{n}\setminus\left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^{n}}G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n)\prod_{i\in B}ctg\frac{s_i}{2}\prod_{j\in M\setminus B}H_m^{\alpha}(s_j)ds_1\cdots ds_n+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{B\subset M\\ B\neq M}}\int_{T^{|B|}}\int_{\left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^{|M\setminus B|}}G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n}\tau_m^{\alpha}(s_i)ds_1\cdots ds_n\right).$$

Выберем k так, что $\tau_k^{*}-\tau_k>\frac{1}{n}$. Тогда аналогичными рассуждениями, как и выше, получим:

$$\left|t_{m}^{\alpha}(\tau_k,\ldots,\tau_k,G,\{1,\ldots,n\})-\widetilde{G}_{\{1,\ldots,n\}}\left(\tau_k,\ldots\tau_k;\frac{1}{m}\right)\right|\geq$$

$$\geq\int_{\sqrt[n-1]{b_k}}^{\pi-\sqrt[n-1]{b_k}}\cdots\int_{\sqrt[n-1]{b_k}}^{\pi-\sqrt[n-1]{b_k}}\int_{0}^{\tau_k^{*}-\tau_k}b_k\frac{s_n}{\omega^{-1}(b_k)}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i}ds_1\cdots ds_n\geq$$

$$\geq A_1b_k\left|\ln b_k\right|\geq A_2\omega(\tau_k^{*}-\tau_k)\left|\ln(\tau_k^{*}-\tau_k)\right|^{n-1}\geq A_2\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1}.$$

Т.е. , справедливость утерждения пункта (б) доказана.

Теорема 3.2.1 доказана.

§ 3.3. Об аппроксимативных свойствах средных Чезаро в пространстве $L(T^n)$

Справедлива

Теорема 3.3.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega,L(T^n))$ $(n\geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,f,B)-\widetilde{f}_B\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)} = O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|}\right],$$

$$m\to\infty,\ B\subset M,\ B\neq M;$$

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,f,B)-\widetilde{f}_M\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)} = O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1}\right],\ m\to\infty,$$

где $\alpha'=(\alpha,\ldots,\alpha)$, $\alpha\in(0,+\infty)$ и $m'=(m,\ldots,m)$, $\frac{\pi}{m'}=\left(\frac{\pi}{m},\ldots,\frac{\pi}{m}\right)$, $m\in N$;

б) Существует функция $F\in H(\omega,C(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,F,B)-\widetilde{F}_B\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)} \geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{|B|},\quad B\neq M;$$

$$\left\| t_{m'}^{\alpha'}(\cdot,F,M)-\widetilde{F}_M\left(\cdot,\frac{\pi}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)} \geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1},$$

где C некоторая константа.

Доказательство. При условии теоремы 3.3.1 справедливость утверждения пункта (а) вытекает из Теоремы А.

б) Доказательство утверждения пункта (б) при $|B|=n$-1 приведем для оператора

$$\widetilde{f}_{\{1,\ldots,n-1\}}(x_1,\ldots,x_n)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1}\int_{T^{n-1}} f(x_1+u_1,\ldots,x_{m-1}+u_{n-1},x_n)\prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{u_i}{2}du_1\cdots du_{m-1}.$$

Рассмотрим строго убывающую последовательность положительных чисел $(b_m)_{m\geq 1}$ такую, что

1) $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < 1, \quad b_0 = 0,$

2) $\sum_{i=m+1}^{\infty} b_i < b_m;$

3) $\omega^{-1}(b_{m+1}) < \left[\omega^{-1}(b_m)\right]^{\frac{1}{1-\beta}},$

где β $(0< \beta<1)$ удовлетворяет условию леммы 1.2.1.

Положим

$$\tau_m = 2\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{-1}(b_k),$$

$$\tau_m^* = \tau_m + \omega^{-1}(b_m) \ (m=1,2,...).$$

Далее, для любого m=1,2,... рассмотрим функцию $g_m : T \to R$ следующего вида

$$g_m(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_m^* - \tau_m}, & u \in \left[0, \tau_m^* - \tau_m\right], \\ 0, & u \in T \setminus \left[0, \tau_m^* - \tau_m\right]. \end{cases}$$

При любом m=1,2,... положим:

$$G_m(x) = G_m(x_1,...,x_n) = \begin{cases} \dfrac{b_m}{\tau_m^* - \tau_m} g_m(x_1)..g_m(x_{n-1})\omega(x_n), & x_i \in T(i=1,...,n-1), \\ & x_n \in [\tau_m, \tau_m^*); \\ 0, \qquad x_i \in T\ (i=1,...,n-1), & x_n \in T \setminus [\tau_m, \tau_m^*). \end{cases}$$

Далее, определим функцию G:$T^n \to R$ равенством

$$G(x) = G(x_1,...,x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} G_m(x_1,...,x_n).$$

Построенную функцию G продолжим 2π-периодически на все пространство R^n. Очевидно, что $G \in L(T^n)$.

Как уже доказана в параграфе 2.5 второй главы диссертации, $G \in H(\omega; L(T^n))$.

В силу (3.1.6) и (4.1.2) имеем

$$(2\pi)^n \left\| t_{m'}^{\alpha}\left(x_1,\dots,x_n,G,\{1,\dots,n-1\}\right) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)} =$$

$$= \int_{T^n}\left| t_{m'}^{\alpha}\left(x_1,\dots,x_n,G,\{1,\dots,n-1\}\right) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{m'}\right)\right| dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \int_{T^n}\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\int_{T^n} G(x_1+s_1,\dots,x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_j)K_m^{\alpha}(s_n)ds_1\cdots ds_n - \right.$$

$$\left. -\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^{n-1}\int_{T^m\left(\{1,\dots,n-1\},\frac{1}{m}\right)} G(x_1+s_1,\dots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n)\prod_{i=1}^{n-1} ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_{n-1}\right| dx_1\cdots dx_n.$$

По построению Функции G получим:

$$(2\pi)^n \left\| t_{m'}^{\alpha}\left(x_1,\dots,x_n,G,\{1,\dots,n-1\}\right) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{m'}\right)\right\|_{L(T^m)} \ge$$

$$\ge \int_{T^{n-1}}\int_{\tau_k^*}^{\tau_{k+1}}\left| \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\int_{T^n} G(x_1+s_1,\dots,x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_j)K_m^{\alpha}(s_n)ds_1\cdots ds_n\right| \times dx_1\cdots dx_n \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi^n}\int_{-(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}}^{-(\tau_k^*-\tau_k)}\cdots\int_{-(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}}^{-(\tau_k^*-\tau_k)}\int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\int_{-x_1}^{(\tau_i^*-\tau_i)-x_1}\cdots\int_{-x_{n-1}}^{(\tau_i^*-\tau_i)-x_{n-1}}\cdots\int_{\tau_i-x_n}^{\tau_i^*-x_n}\frac{b_i}{\tau_i^*-\tau_i}\times\right.$$

$$\left.\times g(x_1+s_1)\dots g_{n-1}(x_{n-1}+s_{n-1})\omega(x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_i)K_m^{\alpha}(s_n)ds_1\cdots ds_n\right| dx_1\cdots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}}\cdots\int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}}\int_{\tau_k^*}^{\tau_{k+1}^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\int_{x_1}^{\tau_k^*-\tau_k+x_1}\cdots\int_{x_{n-1}}^{\tau_k^*-\tau_k+x_{n-1}}\int_{\tau_i-x_n}^{\tau_k^*-x_n}\frac{b_i}{(\tau_i^*-\tau_i)^n}\times\right.$$

$$\left.\times\,\omega(x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n-1}\tau_m^{\alpha}(s_j)K_m^{\alpha}(s_n)ds_1\cdots ds_n\right| dx_1\cdots dx_n.$$

Выберем k так, что $\frac{1}{4m} > \tau_k^* - \tau_k > \frac{A}{m}$. Тогда в силу (3.1.2) и (3.1.3) будем иметь:

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \cdots \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \frac{b_i}{(\tau_i^* - \tau_i)^n} \left| \int_{x_1}^{\tau_i^*-\tau_i+x_1} \cdots \int_{x_{n-1}}^{\tau_i^*-\tau_i+x_{n-1}} \int_{\tau_i-x_n}^{\tau_i^*-x_n} \prod_{j=1}^{n-1} \tau_m^{\alpha}(s_i) \times \right.$$

$$\left. \times K_m^{\alpha}(s_n) ds_1 \cdots ds_n \right| dx_1 \cdots dx_n \le$$

$$\le A \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{(\tau_i^* - \tau_i)^n} \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \cdots \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \int_{x_1}^{\tau_i^*-\tau_i+x_1} \cdots \int_{x_{n-1}}^{\tau_i^*-\tau_i+x_{n-1}} \int_{\tau_i-x_n}^{\tau_i^*-x_n} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{s_i} \frac{1}{m^{\alpha}} \times$$

$$\times \frac{1}{s_n^{1+\alpha}} ds_1 \cdots ds_n dx_1 \cdots dx_n \le$$

$$\le A \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_i}{\tau_i^* - \tau_i} \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{n-1} \frac{1}{m^{\alpha}} \int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \left(\frac{1}{(\tau_i - x_n)^{\alpha}} - \frac{1}{(\tau_i^* - x_n)^{\alpha}} \right) dx_n \le$$

$$\le A_1 b_{k+1} \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{n-1}.$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \cdots \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \frac{b_i}{(\tau_i^* - \tau_i)^n} \left| \int_{x_1}^{\tau_i^*-\tau_i+x_1} \cdots \int_{x_{n-1}}^{\tau_i^*-\tau_i+x_{n-1}} \int_{x_n-\tau_i^*}^{x_n-\tau_i} \prod_{j=1}^{n-1} \tau_m^{\alpha}(s_i) \times \right.$$

$$\left. \times K_m^{\alpha}(s_m) ds_1 \cdots ds_n dx_1 \cdots dx_n \right| \le$$

$$\le A \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_i}{\tau_i^* - \tau_i} \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{m-1} \frac{1}{m^{\alpha}} \int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \int_{x_n-\tau_i^*}^{x_n-\tau_i} \frac{1}{s_n^{1+\alpha}} ds_n dx_n \le$$

$$\le A_1 \sum_{i=1}^{k-1} \frac{b_i}{\tau_i^* - \tau_i} \frac{\tau_k^* - \tau_k}{(\tau_k^* - \tau_i)^{\alpha}} \cdot (\tau_k^* - \tau_k)^{\alpha} \times \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{m-1} \le$$

$$\le A_2 \left(\left(\tau_k^* - \tau_k\right)^{\beta} \right)^{1+\alpha} \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{m-1} \le A_3 b_k^{1+\alpha} \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{m-1}.$$

Учитывая соотношение (3.1.4), получим:

$$\frac{b_k}{(\tau_k^* - \tau_k)^n} \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \cdots \int_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \left| \int_{x_1}^{\tau_k^*-\tau_k+x_1} \cdots \int_{x_{n-1}}^{\tau_k^*-\tau_k+x_{n-1}} \int_{\tau_k-x_n}^{\tau_k^*-x_n} \prod_{j=1}^{n-1} \tau_m^{\alpha}(s_j) \times \right.$$

$$\left. \times K_m^{\alpha}(s_n) ds_1 \cdots ds_n \right| dx_1 \cdots dx_n \ge A \frac{b_k}{\tau_k^* - \tau_k} \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{n-1} \int_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \int_{\tau_k-x_n}^{\tau_k^*-x_n} m \, ds_n dx_n \ge$$

$$\ge A_1 b_k \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{n-1}.$$

Таким образом, можно заключить, что

$$(2\pi)^n \left\| t_{m'}^{\alpha}\left(x_1,\dots,x_n,G,\{1,\dots,n-1\}\right) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)} \geq$$

$$\geq \frac{b_k}{\tau_k^* - \tau_k} C_1 \left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{n-1} m(\tau_k^* - \tau_k)^2 =$$

$$= C_1 m(\tau_k^* - \tau_k)\omega(\tau_k^* - \tau_k)\left|\ln(\tau_k^* - \tau_k)\right|^{n-1} \geq$$

$$\geq C\omega\left(\frac{1}{m}\right)(\ln m)^{n-1}.$$

Рассмотрим выражение

$$(2\pi)^n \left\| t_{m'}^{\alpha}\left(x_1,\dots,x_n,G,\{1,\dots,n\}\right) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n\}}\left(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{m'}\right)\right\|_{L(T^n)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{T^n}\left|\int\limits_{T^n} G(x_1+s_1,\dots,x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n}\tau_m^{\alpha}(s_j)ds_1\cdots ds_n -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{T^n\setminus\left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^n} G(x_1+s_1,\dots,x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_n\right| dx_1\cdots dx_n \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi^n}\int\limits_{-(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}}^{-(\tau_k^*-\tau_k)}\cdots\int\limits_{-(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}}^{-(\tau_k^*-\tau_k)}\int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}}\left|\int\limits_{T^n} G(x_1+s_1,\dots,x_n+s_n)\times\right.$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\tau_m^{\alpha}(s_j)ds_1\cdots ds_n -$$

$$\left. - \int\limits_{T^n\setminus\left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^n} G(x_1+s_1,\dots,x_n+s_n)\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_n\right| dx_1\cdots dx_n.$$

В силу (3.1.2) получим

$$2\pi)^n \left\| t_{m'}^{\alpha}\left(x_1,\dots,x_n,G,\{1,\dots,n\}\right) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}\left(x_1,\dots,x_n,\frac{1}{m'}\right)\right\|_{L(T^m)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \cdots \int\limits_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \left| \sum_{B\subset M} \int\limits_{T^n \setminus \left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^n} G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n) \times \right.$$

$$\times \prod_{i\in B} ctg\frac{s_i}{2} \prod_{j\in M\setminus B} H_m^{\alpha}(s_j) ds_1 \cdots ds_n +$$

$$+ \sum_{\substack{B\subset M\\ B\neq M}} \int\limits_{T^{|B|}} \int\limits_{\left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^{|M\setminus B|}} G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n) \prod_{j=1}^{n} \tau_m^{\alpha}(s_i) ds_1 \cdots ds_n -$$

$$\left. - \int\limits_{T^n \setminus \left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^n} G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2} ctg\frac{s_i}{2} ds_1 \cdots ds_n \right| dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \cdots \int\limits_{\tau_k^*-\tau_k}^{(\tau_k^*-\tau_k)^{\frac{1}{2}}} \int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_k^*+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \left| \sum_{\substack{B\subset M\\ B\neq M}} \int\limits_{T^n \setminus \left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^n} G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n) \times \right.$$

$$\times \prod_{i\in B} ctg\frac{s_i}{2} \prod_{j\in M\setminus B} H_m^{\alpha}(s_j) ds_1 \cdots ds_n +$$

$$\left. + \sum_{\substack{B\subset M\\ B\neq M}} \int\limits_{T^{|B|}} \int\limits_{\left[-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right]^{|M\setminus B|}} G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n) \prod_{j=1}^{n} \tau_m^{\alpha}(s_i) ds_1 \cdots ds_n \right| dx_1 \cdots dx_n.$$

Выберем k так, что $\tau_k^* - \tau_k > \frac{2}{m}$,, тогда аналогичным образом, как и выше, можно показать, что

$$(2\pi)^n \left\| t_m^{\alpha'}(x_1,\ldots,x_n,G,\{1,\ldots,n\}) - \widetilde{G}_{\{1,\ldots,n\}}\left(x_1,\ldots,x_n,\frac{1}{m'}\right) \right\|_{L(T^m)} \geq$$

$$\geq A\omega(\tau_k^* - \tau_k) \left| \ln(\tau_k^* - \tau_k) \right|^{n-1} \geq A_1 \omega\left(\frac{1}{m}\right) \left(\ln\frac{1}{m}\right)^{n-1}.$$

Теорема 3.3.1 доказана.

Глава 4

Об аппроксимативных свойствах средных Пуассона-Абеля в пространствах C и L

§4.1. Некоторые обозначения

Пусть $r=(r_1...,r_n)$, $r_i\in[0,1)$ $(i=1,...,n)$. Выражения

$$f(x,r)=\frac{1}{\pi^n}\int_{T^n} f(x+s)\prod_{i=1}^{n} P(r_i,s_i)ds$$

и

$$\widetilde{f}(x,r,B)=\frac{(-1)^{|-B|}}{\pi^n}\int_{T^n} f(x+s)\prod_{i\in M\setminus B} P(r_i,s_i)\prod_{j\in B} Q(r_j,s_j)ds, \qquad (4.1.1)$$

где

$$P(r_i,s_i)=\frac{1-r_i^2}{2(1-2r_i\cos s_i+r_i^2)},$$

$$Q(r_j,s_j)=\frac{r_j\sin s_j}{1-2r_j\cos s_j+r_j^2},$$

называются средними Пуассона-Абеля соответственно рядов $\sigma_n[f]$и $\overline{\sigma}_n[f,B]$ (см., например [3, с. 187]).

Заметим, что

$$Q(r,s)=\frac{1}{2}ctg\frac{s}{2}-\frac{(1-r)^2 ctg\frac{s}{2}}{2(1-2r\cos s+r^2)}=\frac{1}{2}ctg\frac{s}{2}-R(r,s) \qquad s\in(o,\pi); \quad (4.1.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} P(r,s)ds=\pi, \qquad (4.1.3)$$

$$P(r,t)\le\frac{A\delta}{t^2}, \quad \text{где} \quad \delta=1-r,\ t\in(0,\pi),\ r\in[0,1]. \qquad (4.1.4)$$

§ 4.2. Об аппроксимативных свойствах средных Пуассона-Абеля сопряженных тригонометрических рядов Фурье в пространстве $C(T^n)$

Справедлива

Теорема 4.2.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega;\ C(T^n))$ $(n\geq 2)$, где модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда. Тогда

$$\sup_{x\in T}\left|\tilde{f}(x,...,x,r',B)-\tilde{f}_B(x,...,x,(1-r)')\right|=O\left(\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|}\right),$$

$$r\in[0,1),\ r\to 1-,\ B\subset M,\ B\neq M;$$

$$\sup_{x\in T}\left|\tilde{f}(x,...,x,r',M)-\tilde{f}_M(x,...,x,(1-r)')\right|=O\left(\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}\right),$$

$$r\in[0,1),\ r\to 1-,$$

где $r'=(r,...,r)$, $(1-r)'=(1-r,...1-r)$;

б) Существует функция $F\in H(\omega;C(T^n))$, $n\geq 2$, такая, что

$$\left|\tilde{F}(x,...,x,r',B)-\tilde{F}_B(x,...,x,(1-r)')\right|\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|},$$

$$r\in[0,1),\ r\to 1-,\ B\subset M,\ B\neq M,$$

$$\left|\tilde{F}(x,...,x,r',B)-\tilde{F}_M(x,...,x,(1-r)')\right|\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1},$$

$$r\in[0,1),\ r\to 1-,\ C=\text{const}.$$

Доказательство. а) Справедливость утверждения пункта (а) данной теоремы вытекает из результата, полученной намы в работе [7].

б) Справедливость утверждения пункта (б) покажем для оператора $\tilde{f}_{\{1,...,n-1\}}$.

Пользуемся функцией, которая была построена в пункте (б) теоремы 3.2.1.

Как было показано

$$G \in \left[\bigcap_{k=1}^{n-1} H_k(\delta; C(T^n))\right] \bigcap H_n(\omega; C(T^n)).$$

В силу построения функции G

$$\widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(\tau_k,\dots,\tau_k,(1-r)') = 0$$

$$\widetilde{G}(\tau_k,\dots,\tau_k; r', \{1,\dots,n-1\}) = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n} \int\limits_{T^n} G(\tau_k + s_1,\dots,\tau_k + s_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-1} Q(r,s_j) P(r,s_n) ds_1 \cdots ds_n =$$

$$= -\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{T^{n-1}} \int\limits_{\tau_m-\tau_k}^{\tau_m^*-\tau_k} G(\tau_k + s_1,\dots,\tau_k + s_n) \prod_{j=1}^{n-1} Q(r,s_j) P(r,s_n) ds_1 \cdots ds_n -$$

$$-\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{T^{n-1}} \int\limits_{\tau_m^*-\tau_k}^{\tau_{m+1}-\tau_k} G(\tau_k + s_1,\dots,\tau_k + s_{n-1}, 2\tau_m^* - \tau_k - s_n) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n-1} Q(r,s_j) P(r,s_n) ds_1 \cdots ds_n. \qquad (4.2.1)$$

В силу определения функции G и (4.2.1) можно заключить, что

$$\left|\widetilde{G}(\tau_k,\dots,\tau_k; r', \{1,\dots,n-1\}) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(\tau_k,\dots\tau_k; (1-r)'\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{b_k}^{\pi-b_k} \dots \int\limits_{b_k}^{\pi-b_k} \int\limits_{0}^{\tau_k^*-\tau_k} \frac{s_n}{\omega^{-1}(b_k)} b_k \prod_{j=1}^{n-1} Q(r,s_j) P(r,s_n) ds_1 \cdots ds_n.$$

Выберем k так, что $A(1-r) > \tau_k^* - \tau_k > 1-r$.

$$\int\limits_0^{\tau_k^*-\tau_k} \frac{s_n}{\omega^{-1}(b_k)} P(r,s_n) ds_n = \int\limits_0^{\tau_k^*-\tau_k} \frac{s_n}{\omega^{-1}(b_k)} \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos s_n + r^2)} ds_n \geq$$

$$\geq \frac{1-r}{2\omega^{-1}(b_k)} \int\limits_0^{1-r} \frac{\sin s_n}{1-2r\cos s_n + r^2} ds_n = \frac{1-r}{2\omega^{-1}(b_k)} \frac{1}{2r} \ln\left(1 + \frac{4r^2 \sin^2 \frac{1-r}{2}}{(1-r)^2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1-r}{2\omega^{-1}(b_k)} \cdot \frac{1}{2r} \ln\left(1 + \frac{4r}{\pi^2}\right) \geq \frac{1-r}{2\omega^{-1}(b_k)} \cdot \frac{1}{2r} \ln\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right) \geq \frac{1}{4A} \ln\left(1 + \frac{2}{\pi^2}\right).$$

$$\int_{b_k}^{\pi-b_k} Q(r,s_j)ds_j = \int_{b_k}^{\pi-b_k} \frac{r\sin s_j}{1-2r\cos_j + r^2}ds_j = \ln\frac{1+2r\cos b_k}{1-2r\cos b_k} \geq$$

$$\geq \left|\ln(1-2r\cos b_k + r^2)\right|.$$

Модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, поэтому в силу леммы 1.2.2. существует такое постоянное число α (0<α<1), что $\frac{\omega(t)}{t^\alpha}$ почти возрастает.

$$b_k = \omega(\tau_k^* - \tau_k) \leq A_1(\tau_k^* - \tau_k)^\alpha \leq A^\alpha A_1(1-r)^\alpha \leq (1-r)^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\left|\ln(1-2r\cos b_k + r^2)\right| \geq \left|\ln(1-2r\cos(1-r)^{\frac{\alpha}{2}} + r^2)\right| =$$

$$= \left|\ln\left((1-r)^2 + 4r\sin\frac{(1-r)^{\frac{\alpha}{2}}}{2}\right)\right| \geq \left|\ln\left((1-r)^2 + 4r\frac{(1-r)^\alpha}{4}\right)\right| \geq$$

$$\geq \left|\ln(1-r)^\alpha(1+r)\right| \geq \frac{\alpha}{2}\left|\ln(1-r)\right|.$$

таким образом,

$$\left|\widetilde{G}(\tau_k,\ldots,\tau_k;r',\{1,\ldots,n-1\}) - \widetilde{G}_{\{1,\ldots,n-1\}}(\tau_k,\ldots\tau_k;(1-r)')\right| \geq A\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}.$$

Можно показать, что

$$\left|\widetilde{G}(\tau_k,\ldots,\tau_k;r',\{1,\ldots,n\}) - \widetilde{G}_{\{1,\ldots,n\}}(\tau_k,\ldots\tau_k;(1-r)')\right| \geq A\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}$$

Теорема доказана.

§ 4.3. Об аппроксимативных свойствах средных Пуассона-Абеля в пространстве $L(T^n)$

Справедлива следующая

Теорема 4.3.1. а) Пусть функция $f\in H(\omega; L(T^n))$ $(n\geq 2)$ и модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, тогда

$$\left\|\widetilde{f}(\cdot,r',B)-\widetilde{f}_B(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}=O\left[\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|}\right],$$

$$B\subset M,\ B\neq M,\ r\in[0,1),\ r\to 1-,$$

$$\left\|\widetilde{f}(\cdot,r',M)-\widetilde{f}_M(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}=O\left[\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}\right],$$

$$r\in[0,1),\ r\to 1-,$$

где $r'=(r,\dots,r)$, $(1-r)'=(1-r,\dots,1-r)$;

б) Существует функция $F\in H(\omega; L(T^n))$ $(n\geq 2)$ такая, что

$$\left\|\widetilde{F}(\cdot,r',B)-\widetilde{F}_B(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|},$$

$$B\subset M,\ B\neq M,\ r\to 1-,$$

$$\left\|\widetilde{F}(\cdot,r',M)-\widetilde{F}_M(\cdot,(1-r)')\right\|_{L(T^m)}\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{m-1},$$

$$r\to 1-,$$

где C некоторая константа.

Доказательство. а) В силу (4.1.1) и (1.1.2)

$$\widetilde{f}(x,r',B)-\widetilde{f}_B(x,(1-r)')=\frac{(-1)^{|B|}}{\pi^h}\int_{T^n}f(x+s)\prod_{i\in M\setminus B}p(r,s_i)\prod_{i\in B}Q(r,s_i)ds-$$

$$-\frac{(-1)^{|B|}}{\pi^{|B|}}\int_{T^m(B,(1-r)')}f(x+s_B)\prod_{i\in B}\frac{1}{2}ctg\frac{s_i}{2}ds_B.$$

В силу (4.1.2) и (4.1.3) имеем

$$\widetilde{f}(x,r',B)-\widetilde{f}_B(x,(1-r)')=\frac{(-1)^{|B|}}{\pi^h}\int_{T^n}f(x+s)\prod_{i\in M\setminus B}p(r,s_i)\prod_{j\in B}Q(r,s_j)ds-$$

$$-\frac{(-1)^{|B|}}{\pi^n}\int\limits_{T^n(B,(1-r)')}\int\limits_{T^{n-|B|}} f(x+s_B)\prod_{i\in M\setminus B} p(r,s_i)\prod_{j\in B}\frac{1}{2}ctg\frac{s_j}{2}ds=$$

$$=\frac{(-1)^{|B|}}{\pi^n}\int\limits_{T^n(B,(1-r)')}\int\limits_{T^{n-|B|}}[f(x+s)-f(x+s_B)]\prod_{i\in M\setminus B} p(r,s_i)\prod_{j\in B}\frac{1}{2}ctg\frac{s_j}{2}ds+$$

$$+\frac{(-1)^{|B|}}{\pi^n}\int\limits_{T^n\setminus T^n(B,(1-r)')} f(x+s)\prod_{i\in M\setminus B} p(r,s_i)\prod_{j\in B} Q(r,s_j)ds+$$

$$\times\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{T^n(B,(1-r)')}\int\limits_{T^{n-|B|}} f(x+s)\prod_{i\in M\setminus B} p(r,s_i)\prod_{j\in B} R(r,s_j)ds+$$

$$+\sum_{\substack{B_1\subset B\\ B_1\neq B\\ B_1\neq\varnothing}}\int\limits_{T^n(B,(1-r)')}\int\limits_{T^{n-|B|}} f(x+s)\prod_{i\in M\setminus B} p(r,s_i)\prod_{k\in B}\frac{1}{2}ctg\frac{s_k}{2}\prod_{j\in B\setminus B_1} R(r,s_j)ds=$$

$$=I_1+I_2+I_3+\sum I_{B_1}$$

Принимая во вниманию (4.1.4), (4.1.5) и тот факт, что модули непрерывности ω удовлетворяет условию Зигмунда, получим

$$\|I_1\|_{L(T^n)}\leq A\omega(1-r)|\ln(1-r)|^{|B|},\quad A=\text{const}.$$

Так как $\int\limits_0^\pi Q(r,s)ds=\ln\frac{1+r}{1-r}$, поэтому в силу (4.1.3) заключаем, что

$$\|I_2\|_{L(T^n)}\leq A_1\omega(1-r)|\ln(1-r)|^{|B|},\quad A_1=\text{const}.$$

Если $1\text{-}r<s<\pi$, то

$$R(r,s)\leq\frac{1-r}{2(1-2r\cos s+r^2)}=p(r,s)\frac{1}{1+r},$$

поэтому

$$\|I_3\|_{L(T^n)}\leq A_3(1-r)\int\limits_{1-r}^{\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds\leq A_4\omega(1-r).$$

$$\left\|I_{B_1}\right\|_{L(T^n)}\leq A_5\omega(1-r)|\ln(1-r)|^{|B_1|}.$$

Значит,

$$\left\|\widetilde{f}(x,r',B)-\widetilde{f}(x,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}\le C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{|B|},\quad B\ne M.$$

Пусть B=M. Тогда

$$\widetilde{f}(x,r',M)=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\int\limits_{T^n}f(x+s)\prod_{i\in M}Q(r,s_i)ds,$$

$$\widetilde{f}_M(x,(1-r)')=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\int\limits_{T^n(M,(1-r)')}f(x+s)\prod_{i\in M}\frac{1}{2}ctg\frac{s_i}{2}ds.$$

$$\widetilde{f}(x,r',M)-\widetilde{f}_M(x,(1-r)')=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^n\int\limits_{T^n\setminus T^n(M,(1-r)')}f(x+s)\prod_{i\in M}Q(r,s_i)ds+$$

$$+\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{T^n\setminus T^n(M,(1-r)')}f(x+s)\prod_{i=1}^{n}R(r,s_i)ds+\sum_{\substack{B_1\subset B\\ B_1\ne B\\ B_1\ne\varnothing}}\int\limits_{T^n(M,(1-r)')}f(x+s)\prod_{k\in B_1}\frac{1}{2}ctg\frac{s_k}{2}\prod_{j\in M\setminus B_1}R(r,s_j)ds$$

Учитывая вышеприведенные свойства $Q(r,s)$, $P(r,s)$, $R(r,s)$, получим

$$\left\|\widetilde{f}(x,r',M)-\widetilde{f}_M(x,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}\le C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}.$$

б) Справедливость утверждения пункта (б) покажем для функции $\widetilde{f}_{\{1,\ldots,n-1\}}$.

Пользуемся той функцией, которую построили при доказательстве пункта (б) теоремы 3.3.1.

В силу (4.1.1) и (4.1.2) имеем

$$(2\pi)^n\left\|\widetilde{G}(x_1,\ldots,x_{n-1},r',\{1,\ldots,n-1\})-\widetilde{G}_{\{1,\ \ n-1\}}(x_1,\ldots,x_n,(1-r)')\right\|_{L(T^n)}=$$

$$=\int\limits_{T^n}\left|\widetilde{G}(x_1,\ldots,x_{n-1},r',\{1,\ldots,n-1\})-\widetilde{G}_{\{1,\ldots n-1\}}(x_1,\ldots,x_n,(1-r)')\right|dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\int\limits_{T^n}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\int\limits_{T^n}G(x_1+s_1,\ldots,x_n+s_n)\prod_{i=1}^{n-1}Q(r,s_i)P(r,s_n)ds_1\cdots ds_n-\right.$$

$$\left.-\frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\int\limits_{T^n(\{1,\ldots,n-1\},(1-r)')}G(x_1+s_1,\ldots,x_{n-1}+s_{n-1},x_n)\prod_{i=1}^{n-1}ctg\frac{s_i}{2}ds_1\cdots ds_{n-1}\right|dx_1\cdots dx_n.$$

По построению функции G получим

$$(2\pi)^n \left\| \widetilde{G}(x_1,\ldots,x_{n-1},r',\{1,\ldots,n-1\}) - \widetilde{G}_{\{1,\ldots,n-1\}}(x_1,\ldots,x_n,(1-r)') \right\|_{L(T^n)} \geq$$

$$\geq \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \ldots \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_{k+1}} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\pi^n} \int\limits_{T^n} G(x_1+s_1,\ldots x_n+s_n) \prod_{i=1}^{n-1} Q(r,s_i) P(r,s_n) \right| ds_1 \cdots ds_n \geq$$

$$\geq \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{-\pi/4}^{-(\tau_k^*-\tau_k)} \ldots \int\limits_{-\pi/4}^{-(\tau_k^*-\tau_k)} \int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_{k+1}} \left| \int\limits_{-x_1}^{-(\tau_k^*-\tau_k)-x_1} \ldots \int\limits_{-x_{m-1}}^{-(\tau_k^*-\tau_k)-x_{n-1}} \int\limits_{\tau_k-x_n}^{\tau_k^*-x_n} \frac{b_k}{\tau_k^*-\tau_k} g(x_1+s_1) \times \ldots \times \right.$$

$$\left. \times g_{m-1}(x_{n-1}+s_{n-1}) \omega(x_n+s_n) \prod_{i=1}^{n-1} Q(r,s_i) P(r,s_n) ds \right| ds_1 \cdots ds_n .$$

Выберем k так, что $A(1-r) > \tau_k^* - \tau_k > 1-r$.

Рассмотрим выражения

$$I_1 = \frac{1}{\tau_k^* - \tau_k} \int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_{k+1}} \int\limits_{x_n-\tau_k}^{x_n-\tau_k} P(r,s_n) ds_n dx_n$$

и

$$I_2 = \frac{1}{\tau_k^* - \tau_k} \int\limits_{\tau_k^*-\tau_k}^{\pi/4} \int\limits_{x_i}^{(\tau_k^*-\tau_k)+x_i} Q(r,s_i) ds_i dx_i \quad (i=1,\ldots,n\text{-}1) .$$

$$I_1 = \frac{1}{\tau_k^* - \tau_k} \int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_{k+1}} \int\limits_{x_n-\tau_k^*}^{x_n-\tau_k} \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos s_n + r^2)} ds_n dx_n \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau_k^* - \tau_k} \int\limits_{\tau_k^*}^{\tau_k^* + \frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}} \int\limits_{\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}}^{\tau_k^*-\tau_k} \frac{1-r^2}{2(1-2r\cos s_m + r^2)} ds_n dx_n \geq$$

$$\geq \frac{1+r}{4A} \int\limits_{\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}}^{\tau_k^*-\tau_k} \frac{\sin s_n}{1-2r\cos s_n + r^2)} ds_n = \frac{1+r}{8rA} \ln \frac{1-2r\cos(\tau_k^*-\tau_k)+r^2}{1-2r\cos\dfrac{\tau_k^*-\tau_k}{2}+r^2} =$$

$$= \frac{1+r}{8rA} \ln \left(1 + \frac{2r\left(\cos\dfrac{\tau_k^*-\tau_k}{2} - \cos(\tau_k^*-\tau_k)\right)}{1-2r\cos\dfrac{\tau_k^*-\tau_k}{2}+r^2} \right) =$$

$$=\frac{1+r}{8+A}\ln\left(1+\frac{4r\sin\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}\cdot\sin\frac{3}{4}(\tau_k^*-\tau_k)}{1-2r\cos\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}+r^2}\right).$$

$$\frac{4r\sin\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}\cdot\sin\frac{3}{4}(\tau_k^*-\tau_k)}{1-2r\cos\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}+r^2}\ge\frac{3r}{2\pi^2}\frac{(\tau_k^*-\tau_k)^2}{1-2r\cos\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}+r^2}\ge$$

$$\ge\frac{3r}{2\pi^2}\frac{(1-r)^2}{1-2r\cos\frac{A}{2}(1-r)+r^2}=\frac{3r}{2\pi^2}\frac{(1-r)^2}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{A}{4}(1-r)}\ge$$

$$\ge\frac{3r}{2\pi^2}\frac{(1-r)^2}{(1-r)^2+4r\frac{A^2}{16}(1-r)^2}=\frac{3r}{2\pi^2}\frac{1}{1+\frac{A^2r}{4}}=\frac{6r}{\pi^2(4+A^2r)}$$

T.e.,

$$I_1\ge\frac{1+r}{8rA}\ln\left(1+\frac{6r}{\pi^2(4+A^2r)}\right).$$

$$I_2=\frac{1}{\tau_k^*-\tau_k}\int_{\tau_k^*-\tau_k}^{\pi/4}\int_{x_i}^{x_i+(\tau_k^*-\tau_k)}\frac{\sin s_i}{1-2r\cos s_i+r^2}ds_i dx_i\ge$$

$$\ge\int_{\tau_k^*-\tau_k}^{\pi/4}\frac{\sin x_i}{1-2r\cos(x_i+(\tau_k^*-\tau_k))+r^2}dx_i=$$

$$=\int_{\tau_k^*-\tau_k}^{\pi/4}\frac{\sin(x_i+\tau_k^*-\tau_k)-2\sin\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}\cos\left(x_i+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}\right)}{1-2r\cos(x_i+(\tau_k^*-\tau_k))+r^2}dx_i,$$

$$\sin(x_i+\tau_k^*-\tau_k)-2\sin\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}\cos\left(x_i+\frac{\tau_k^*-\tau_k}{2}\right)\ge$$

$$\geq \sin(x_i + \tau_k^* - \tau_k) - 2\sin\frac{\tau_k^* - \tau_k}{2} \geq$$

$$\geq \sin(x_i + \tau_k^* - \tau_k) - (\tau_k^* - \tau_k) \geq \sin(x_i + \tau_k^* - \tau_k) - \frac{1}{2}(\tau_k^* - \tau_k + x_i) \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi}(x_i + \tau_k^* - \tau_k) - \frac{1}{2}(x_i + \tau_k^* - \tau_k) \geq$$

$$\geq \frac{4-\pi}{2\pi}(x_i + \tau_k^* - \tau_k) \geq \frac{4-\pi}{2\pi}\sin(x_i + \tau_k^* - \tau_k),$$

$$I_2 \geq \frac{4-\pi}{2\pi}\int_{\tau_k^*-\tau_k}^{\pi/4} \frac{\sin(x_i + \tau_k^* - \tau_k)}{1 - 2r\cos(x_i + \tau_k^* - \tau_k) + r^2} dx_i =$$

$$= \frac{4-\pi}{4\pi r}\ln\frac{1 - 2r\cos 2\left(\frac{\pi}{4} + \tau_k^* - \tau_k\right) + r^2}{1 - 2r\cos 2(\tau_k^* - \tau_k) + r^2} =$$

$$= \frac{4-\pi}{4\pi r}\left(\left|\ln(1 - 2r\cos 2(\tau_k^* - \tau_k) + r^2)\right| - \left|\ln\left(1 - 2r\cos\left(\frac{\pi}{4} + \tau_k^* - \tau_k\right) + r^2\right)\right|\right) \geq$$

$$\geq \frac{4-\pi}{4\pi r}\left(\left|\ln(1 - 2r\cos 2(\tau_k^* - \tau_k) + r^2\right| - \left|\ln\left(1 - r\sqrt{2} + r^2\right)\right|\right) \geq$$

$$\geq \frac{4-\pi}{8\pi r}\left|\ln(1 - 2r\cos 2(\tau_k^* - \tau_k) + r^2\right| - \frac{4-\pi}{8\pi r}\left|\ln\left(1 - 2r\cos 2A(1-r) + r^2\right)\right|$$

$$\geq \frac{4-\pi}{8\pi r}\left|\ln\left((1-r)^2 + 4r\sin^2 A(1-r)\right)\right| \geq \frac{4-\pi}{8\pi r}\left|\ln\left((1-r)^2 + 4A^2 r(1-r)^2\right)\right| =$$

$$= \frac{4-\pi}{8\pi r}\left|\ln(1-r)^2(1 + 4A^2 r)\right| \geq \frac{4-\pi}{16\pi r}\left|\ln(1-r)\right|.$$

Значит,

$$(2\pi)^n \left\| \widetilde{G}(x_1,\dots,x_n,r',\{1,\dots,n-1\}) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n-1\}}(x_1,\dots,x_n,(1-r)') \right\|_{L(T^n)} \geq$$

$$\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}.$$

Можно также показать, что

$$(2\pi)^n \left\| \widetilde{G}(x_1,\dots,x_n,r',\{1,\dots,n\}) - \widetilde{G}_{\{1,\dots,n\}}(x_1,\dots,x_n,(1-r)') \right\|_{L(T^n)} \geq$$

$$\geq C\omega(1-r)\left|\ln(1-r)\right|^{n-1}.$$

Теорема 4.3.1. доказана.

Список литературы

1. Алексич (Alexits G.) Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une function par les moyennes la serie de Fourier. Math. Fiz. Lapok. 1941. 48. №3-4. P. 410-422.
2. Бари Н. К. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т. 19. №5. С. 285-302.
3. Бари Н. К. Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 484-522.
4. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз. 1961.
5. Бернштейн С. Н. (Bernstein S.) Sur J',ordre de la meilleure approximation des functions constinues par des polynomes de degre donne. Mem. Acad. Roy/ Belgique, 2 - me serie. 1912. 4. P. 1-104.
6. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений Т. II. Конструктивная теория функций (1931-1953). М.: Изд-во АН, СССР, 1960.
7. Данелиа А. Н. (Danelia A.) On the approximation property of Abal-Poisson transformations of multiple conjugate trigonometric series. Bull. Georgian acad. Sci. 1999. V. 159. № 2. P. 196-197.
8. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
9. Жак И. Е. По поводу одной теоремы Л. Чезари о сопряженных функциях двух переменных. Докл. АН СССР. 1952. Т. 87. №6. С. 877-880.

10. Жак И. Е. Об одной теореме Зигмунда о сопряженных функциях. ДАН. СССР. 1954. Т. 97. №3. С. 387-389.

11. Жижиашвили Л. В. Некоторые вопросы теории тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1993.

12. Зигмунд (Zygmund A.) On the derge of approximation of function by Fejer means. Bull. Amer. Math. Soc. 1945. 51. P. 274-276.

13. Зигмунд (Zygmund A.) Shooth functions. Duke Math. J. 1945. 12. №1 P. 47-76.

14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир. 1965.

15. Лекишвили М. М. О сопряженных функциях многих переменных в классе Lipα. Матем. заметки. 1978. Т. 23. №3. С. 361-372.

16. Лекишвили М. М. О сопряженных функциях многих переменных. Сообщ. АН ГССР. 1979. Т. 94. №1. С. 21-23.

17. Лекишвили М. М. Многомерный оператор сопряжения и деформация классов $H(\omega; N)$. Сообщ. АН ГССР. 1989. Т. 135. №1. С. 57-59.

18. Лекишвили М. М., Данелиа А. Н. Многомерный оператор сопряжения и деформации классов $Z(\omega^{(2)}, C(T^n))$. Матем. заметки. 1998. Т. 63. №6. С. 853-861.

19. Натансон И. П. О точности представления непрерывных периодических функций сингулярными интегралами. ДАН СССР. 1950. Т. 73. №2. С. 273-276.

20. Никольский С. М. Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности. ДАН СССР. 1946. Т. 52. №3. С. 191-194.
21. Никольский С. М. Приближение функций многых переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
22. Окулов В. А. Многомерный аналог одной теоремы Зигмунда Матем. Заметки. 1997. Т. 61. №5. С. 717-727.
23. Осколков К. И. Неусиляемость оценки Лебега для приближения функций заданным модулем непрерывности суммами Фурье. Труды МИАН 1971. Т. 62. С. 337-345.
24. Привалов И. И. Sur les fonctions conjugues. Bull. Soc. Math. France. 1916. 44. P. 100-103.
25. Рисс (Riesz M.) Sur les fonctions conjugues. Math. z. 1927. V. 27. P. 218-244.
26. Сокол—Соколовский (Sokol—Sokolowski K.). On trigonometric series conjugate to Fourier series of two variables. Fund. Math. 1947. V. 34. P. 166-182.
27. Стороженко Э. А. О некоторых теоремах вложения. Матем. заметки. 1976. Т. 19. №2. С. 187-200.
28. Тиман. А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Н.: ГИФМЛ, 1960.
29. Флетт (Flett T. M.) On the degree of approximation by the Cesaro means of the Fourier series. Quart. J. Math. 1956. V. 7. №1. P. 81-95.
30. Харди, Литтльвуд (Hardy G. H., Littlewood J. E.) A convergence criterion for Fourier series. Math. Z. 1928. V. 28. P. 612-634.

31. Чезари (Cesari L.) Sulle cerie di Fourier delle fonzioni lipshitziane dipiu variabili. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup (4). 1938. V. 7. №2. P. 279-295.

32. Danelia A. Conjugated functions of multiple variables and deformation of $H(\omega; L(T^n))$ classes. Bull. Georgian Acad. Sci. 1997. V. 156. №2. P. 199-201.

33. Danelia A. On the deformation of Zygmund's classes $Z(\omega^{(2)}$, $L(T^m))$. Bull. Georgian Acad. Sci. 1999. V. 159. № 3. P. 401-402.

34. Danelia A. On the deformation of the classes $H(\omega; L(T^n))$. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2000. V. 122. P. 33-44.

35. Danelia A. Deformation of the $Z(\omega^{(2)}, L(T^m))$ classes. Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2000. V. 123. P. 1-13.

36. Danelia A. On approximation property of Casaro transformations. Bull. Georgian Acad. Sci. 2000. V. 161. №3. P. 385-387.

37. Danelia A. On the approximation property of Abel-Poisson transformations. Bull. Georgian Acad. Sci. 2000. V. 162. 2. P. 220-221.

38. Danelia A. On the deformation of the classes $H(\omega^{(k)}; L(T^m))$. Bull. Georgian Acad. Sci. 2000. V. 162. 3. P. 428-430.

39. Danelia A., Lekishvili M. On several properties of the conjugate functions of multivariables. Bull. Georgian Acad. Sci. 2001. V. 163. №1. P. 25-26.

40. Лекишвили М. М., Данелиа А. Н. О деформации некоторых функциональных классов в пространствах $C(T^m)$ и $L(T^m)$. Матем. Сборник. 2001. Т. 192. №8. С. 123-138.

41. Danelia A. On certain properties of the conjugate functions of many variables in the spaces $C(T^m)$ and $L(T^m)$. FJA. 2001. V. 7. №4. P. 401-405.

42. Danelia A. On the property of the conjugate function of many variables. Bull. Georgian Acad. Sci. 2002. V. 165. №3. P. 463-464.