Тбилисский государственный университет
им. И. Джавахишвили

На правах рукописи

Аплаков Александр Раминович

Об абсолютной сходимости рядов коэффициентов Фурье–Хаара

01.01.01 – Математический анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

представленная на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
профессор **У. К. Гогинава**

Тбилиси – 2002

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению абсолютной сходимости простых и кратных рядов коэффициентов Фурье–Хаара для некоторых классов функций ограниченной обобщенной вариации.

Ортонормированная на отрезке $[0,1]$ и полная в пространстве $L([0,1])$ система функций $\{\chi_n(t)\}$ была построена Хааром [42] в 1909 году. Непосредственным поводом для этого послужило хорошо известное свойство тригонометрической системы, состоящее в том, что существуют ряды Фурье от непрерывных функций, расходящиеся в отдельных точках (Дю Буа-Реймон, 1876, [21]). Желание выяснить, является ли это свойство общим для всех ортонормированных полных систем, привело Хаара к построению системы $\{\chi_n(t)\}$, которая обладает тем свойством, что ряд Фурье по этой системе от любой непрерывной функции сходится к ней равномерно.

Перейдём к определению функций системы $\{\chi_m(t)\}$. Для $m = 1$ полагается $\chi_1(t) = 1$ на $[0,1]$. Если же номер $m \geq 2$, то он единственным образом записывается в виде $m = 2^n + k$ $(k = 1, \ldots, 2^n;\ n = 0, 1, \ldots)$. Тогда

$$\chi_m(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } t \in \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } t \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right], \\ 0 & \text{при } t \notin \left[\dfrac{k-1}{2^n}, \dfrac{k}{2^n}\right]. \end{cases}$$

Во внутренних точках разрыва функции Хаара полагаются равными полусумме пределов справа и слева, а на концах отрезка $[0,1]$ – своим предельным значениям изнутри отрезка. Система $\chi_m(t)$ ортонормирована на отрезке $[0,1]$ и полна в пространстве $L([0,1])$ [43].

В работе [36] П. Л. Ульянов сформулировал целый ряд свойств системы Хаара, одни из которых аналогичны, другие – принципиально отличны от свойств тригонометрической системы.

Кроме того, в работах [35], [37] П. Л. Ульянов показал, что система Хаара может быть полезной в решении важных вопросов общей теории ортогональных рядов.

Следует отметить, что для рядов Фурье–Хаара в отличие от тригонометрических рядов Фурье и рядов Уолша существенно отличны друг от друга следующие виды сходимости: а) абсолютная сходимость ряда коэффициентов Фурье; б) абсолютная сходимость почти всюду; в) абсолютная сходимость всюду; г) абсолютная сходимость на множестве положительной меры. На это впервые обратил внимание П. Л. Ульянов [39], [40].

Нами была поставлена задача изучить абсолютную сходимость рядов коэффициентов Фурье–Хаара для тех или иных классов функций. Для этой цели предварительно приведем краткую историю изучаемого вопроса.

Хорошо известно, что понятие вариации функций было введено Г. Жорданом в 1881 году в работе [23]. В 1924 году, обобщая понятие вариации Жордана, Н. Винер [8] рассмотрел классы V_p $(p \geq 1)$ функций ограниченной p-й вариации. В 1937 году Л. ЮНГ [51] ввёл понятие Φ – вариации функции.

Определение ([51]). Пусть Φ – строго возрастающая непрерывная функция на $[0, \infty)$ и $\Phi(0) = 0$. Скажем, что функция f имеет ограниченную Φ – вариацию на $[a, b]$, или $f \in \mathrm{V}_\Phi$, если

$$v_\Phi(t) = \sup_{\Pi} \sum_{k=1}^{n} \Phi\big(\big|f(x_k) - f(x_{k-1})\big|\big) < \infty,$$

где $\Pi = \{a \le x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \le b\}$ есть произвольное разбиение сегмента $[a, b]$.

Если $\Phi(u) = u$, тогда V_Φ совпадает с классом Жордана V, а когда $\Phi(u) = u^p$, $p > 1$, он совпадает с классом Винера V_p.

В 1974 году З. А. Чантурия [47] ввел понятие модуля изменения функций.

Определение ([47]). Пусть f ограничена на $[a, b]$. Модулем изменения функции f называется функция целочисленного неотрицательного аргумента $\nu(n, f)$, определенная следуюшим образом: $\nu(0, f) = 0$, а при $n \ge 1$

$$\nu(n, f) = \sup_{\Pi_n} \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(x_{2k+1}) - f(x_{2k})\right|,$$

где Π_n произвольная система n непересекающихся интервалов (x_{2k}, x_{2k+1}), $k = 0, 1, \dots, n-1$ из сегмента $[a, b]$.

Модуль изменения $\nu(n, f)$ неубывающая и выпуклая вверх функция ([47], [33]). Функцию с такими свойствами назовём модулем изменения. Обозначим через $V[\nu(n)]$ класс тех функций f на $[a, b]$, для которых, при заданном модуле изменения $\nu(n)$, имеем $\nu(n, f) = O(\nu(n))$, при $n \to \infty$.

З. А. Чантурия [48] рассмотрел вопрос равномерной сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе в терминах модуля непрерывности и модуля изменения функции.

В 1990 году Х. Кита и К. Ионеда [26] ввели понятие обобщённого класса Винера $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$.

Пусть функция f с периодом 1 определена на $(-\infty, \infty)$. Назовём Δ-ой разбиение с периодом 1, если оно представлеят собой совокупность таких точек t_i, для которых

$$\Delta: \ \cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} < \cdots,$$

при этом $t_{k+m} = t_k + 1$, для $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а m положительное целое число.

Определение ([26]). Пусть $1 \le p(n) \uparrow p$, при $n \to \infty$, где $1 \le p \le \infty$. Скажем, что функция f принадлежит классу $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$, если

$$V\big(f; p(n) \uparrow p\big) =$$

$$= \sup_{n \ge 1} \sup_{\Delta} \left\{ \Big(\sum_{k=1}^{m} \left| f(t_k) - f(t_{k-1}) \right|^{p(n)} \Big)^{1/p(n)} : \ \rho(\Delta) \ge \frac{1}{2^n} \right\} < \infty,$$

где $\rho(\Delta) = \inf\limits_{k} |t_k - t_{k-1}|$.

Когда $p(n) = p$ для всех n, тогда класс $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$ совпадает с классом Винера V_p.

Свойства функций из класса $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$, а также равномерная сходимость и расходимость в точке ряда Фурье по тригонометрической системе и по системе Уолша были рассмотрены в работах Кита [27] и У. Гогинавы [10], [13], [15].

В 1999 году Т. Ахобадзе [2] обобщил класс введенный Китой и Ионедой следующим образом:

Пусть φ возрастающая функция, определенная на множестве натуральных чисел. При этом $\varphi(1) \ge 2$ и

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = +\infty.$$

Допустим, f конечная функция с периодом 1, определенная на интервале $(-\infty, +\infty)$. Пусть Δ множество таких точек t_i, для которых

$$\cdots t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < t_{m+1} < \cdots,$$

при этом $t_{k+m} = t_k + 1$, когда $k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$, а m положительное целое число.

Определение ([2]). Пусть $1 \le p(n) \uparrow p$, при $n \to \infty$, где $1 \le p \le \infty$.

Скажем, что функция f принадлежит классу $\mathrm{BV}(p(n)\uparrow p,\varphi)$, если

$$V\big(f,p(n)\uparrow p,\varphi\big)=$$
$$=\sup_{n\geq 1}\sup_{\Delta}\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}\left|f(t_k)-f(t_{k-1})\right|^{p(n)}\right)^{1/p(n)}:\ \rho(\Delta)\geq\frac{1}{\varphi(n)}\right\}<\infty,$$

где $\rho(\Delta)=\min\limits_{k}|t_k-t_{k-1}|$.

Заметим, что если $p(n)=p$ для всех n, тогда класс $\mathrm{BV}(p(n)\uparrow p,\varphi)$ совпадает с классом Винера V_p. Если $\varphi(n)=2^n$, $n=1,2,\ldots$, тогда класс $\mathrm{BV}(p(n)\uparrow p,\varphi)$ совпадает с классом $\mathrm{BV}(p(n)\uparrow p)$.

Некоторые обобщения вариации функции были также рассмотрены в работах Д. Уотермана [41], Т. Карчава [24], Т. Ахобадзе [4].

В теории рядов Фурье важную роль играют взаимоотношения между вышеупомянутыми классами. Вопросы такого типа были изучены в работах следующих авторов: М. Авдиспахич [1], З. Чантурия [48], А. Белов [6], М. Медведева [31], Т. Ахобадзе [5], У. Гогинава ([16], [17]).

Диссертация состоит из двух глав. Теоремы нумеруются внутри глав – номер главы, номер параграфа, номер теоремы.

I глава посвящается изучению сходимости рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(f)|^{\beta}, \tag{0.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}|C_n(f)| \tag{0.2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}|C_n(f)|^{\beta} \tag{0.3}$$

где через $C_n(f)$ обозначены коэффициенты Фурье–Хаара функции $f \in L([0,1])$, т.е.,

$$C_n(f) = \int\limits_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt.$$

Приведём основные результаты, известные по поводу сходимости этих рядов.

Чисельский и Муселяк [50] показали, что если $0 < \beta \leq 1$ и интегральный модуль непрерывности $\omega_1(\delta, f)$ функции f удовлетворяет условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/2}\Big(\omega_1\Big(\frac{1}{n}, f\Big)\Big)^{\beta} < \infty,$$

тогда ряд (0.1) сходится. Если же

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}}\omega_1\Big(\frac{1}{n}, f\Big) < \infty,$$

тогда сходится ряд (0.2). Они также показали, что если $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ и $f \in \mathrm{V}_p$, тогда (0.1) сходится при $\beta = 1$. П. Л. Ульянов ([36], [38]) же доказал, что в случае $f \in V$ требование $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ не обязательно. Он, в частности, показал, что если $f \in V$, тогда ряд (0.1) сходится при $\beta > 2/3$, но не обязательно для $\beta = 2/3$, а ряд (0.2) сходится когда $\alpha < 1/2$, но не обязательно при $\alpha = 1/2$ (см. так же Мак-Лафлин [30]).

Для функций из класса V_p Б. И. Голубов ([18], [19]) изучил вопросы сходимости рядов (0.1) и (0.2). А именно, он установил справедливость следующих

Теорема 0.1 (Б. Голубов [18]). *а) Если $f \in \mathrm{V}_p$ $(p \geq 1)$, то при всяком $\beta > \frac{2p}{2+p}$ имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

б) Для любого $p \geq 1$ существует функция $f_0 \in \mathrm{V}_p$ (более того, $f_0 \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{p}$), для которой при $\beta = \frac{2p}{2+p}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 0.2 (Б. Голубов [18]). *а) Если $f \in \mathrm{V}_p$ $(p \geq 1)$, то при всяком $\alpha < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ имеем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)| < \infty.$$

б) Для любого $p \geq 1$ существует функция $f_0 \in V_p$ (более того, $f_0 \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{p}$), для которой при $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)| = \infty.$$

Результаты Б. Голубова были обобщены Л. Лейндлером [29]. В. Г. Кротов [28] установил связь между гладкостью функции и сходимостью ряда (0.3). Далее, Г. З. Табатадзе [34] для ряда (0.3) доказал следующую

Теорема 0.3 (Г. Табатадзе [34]). *а) Пусть $f \in V_p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$, если $\beta > 0$ и $1 + \alpha < \beta(\frac{1}{p} + \frac{1}{2})$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

б) Для произвольного $p \in [1, \infty)$ существует $f_0 \in V_p[0,1]$ (точнее $f_0 \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{p}$), такая, что при $1 + \alpha = \beta(\frac{1}{p} + \frac{1}{2})$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Для функций из класса $V[\nu(n)]$ З. Чантурия [49] доказал, что если модуль изменения функции f удовлетворяет условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3\beta/2}\nu^{\beta}(n,f)<\infty,$$

тогда ряд (0.1) сходится. Если $\alpha \geq 1/2$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-3/2}\nu(n,f)<\infty,$$

тогда сходится ряд (0.2). Он также показал, что при определённых условиях эти результаты неусиляемы. Эти результаты Обобщила Р. Месхиа [32].

У. К. Гогинава [14] исследовал сходимость рядов (0.1) и (0.2) для функций из класса $\mathrm{BV}(p(n)\uparrow p)$. В частности, он доказал следующие

Теорема 0.4 (У. Гогинава [14]). *а) Пусть* $f\in \mathrm{BV}\left(p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}\right)$, *где* $\beta\in(2/3,2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/p(n)+1/2)-1]}}<\infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|C_n(f)\right|^{\beta}<\infty.$$

б) Пусть последовательность $\{p(n):\ n\geq 1\}$ *удовлетворяет условие* $(A)^{(*)}$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/p(n)+1/2)-1]}}=\infty \ \text{ для } \beta\in(2/3,2),$$

тогда существует функция $f_0\in \mathrm{BV}(1<p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2-\beta})$, *такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_n(f_0)|^{\beta}=\infty.$$

(∗) опрсделение условии (A) см. на стр. 30.

Теорема 0.5 (У. Гогинава [14]). *а) Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right)$ *для* $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1/p(n)-1/2-\alpha)}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)| < \infty.$$

б) Пусть последовательность $\{p(n) : n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (A) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1/p(n)-1/2-\alpha)}} = \infty,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right)$, *такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)| = \infty.$$

Так как класс $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi)$ является обобщением класса $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$, то естественно можно поставить следующую задачу: пусть $f \in \mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$, и найти достаточное условие для стремления $p(n)$ к критическому показателю, которое обеспечивает сходимость ряда (0.1).

В § 2 I главы мы даем ответ на этот вопрос. В частности, справедлива

Теорема 1.2.1. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi)$, *где* $\beta \in (2/3, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/p(\tau(2^n))+1/2)-1]}} < \infty, \quad (*)$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

(*) определение функции $\tau(r)$ см. на стр. 30.

Естественно ставится вопрос о неусиляемости этой теоремы. Мы утверждаем, что при определенных условиях это действительно так. А именно, справедлива

Теорема 1.2.2. *Пусть последовательность* $\{p(n)\ :\ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (A, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/p(\tau(2^n))+1/2)-1]}} = \infty, \quad \textit{где} \ \ \beta \in (2/3, 2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$*, такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Вышеупомянутые задачи ставятся и для изучения сходимости рядов (0.2) и (0.3). Для них мы доказываем следующие

Теорема 1.2.3. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$*, где* $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/p(\tau(2^n))-1/2)-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)| < \infty.$$

Теорема 1.2.4. *Пусть последовательность* $\{p(n)\ :\ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (A, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/p(\tau(2^n))-1/2)-\alpha]}} = \infty, \quad \textit{где} \ \ \alpha \in (-1/2, 1/2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$*, такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)| = \infty.$$

Теорема 1.2.5. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{1+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(\tau(2^n)))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.2.6. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (A, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(\tau(2^n)))-1-\alpha]}} = \infty, \ \ \text{где} \ \ \beta > 0, \ \ \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Из Теорем 1.1.5-1.1.6 при $\varphi(n) = 2^n$, получаем следующее

Следствие 1.2.1. *а) Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(n))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

б) Пусть последовательность $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *удовлетвореят условие* (A) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(n))-1-\alpha]}} = \infty, \ \ \text{где} \ \ \beta > 0, \ \ \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

§ 3 I главы посвящается изучению сходимости рядов (0.1), (0.2), и (0.3) в том случае, когда коэффициенты Фурье определены по так называемой системе типа Хаара, т.е., по классу χ полных ортонормированных систем $\chi(p_n)$, содержащий систему Хаара. Класс этот был определен Н. Я. Виленкиным [7] (см. также [25], стр. 474) и тесно связан с теорией мультипликативных систем.

Пусть $\{p_n\}$ – бесконечная последовательность простых чисел, таких, что

$$2 \leq p_n \leq N \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $N \geq 2$ – натуральное число.

Далее, следующим образом определим последовательность целых чисел m_n $(n \geq 0)$

$$m_0 = 1; \quad m_n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n, \quad n \geq 1.$$

Тогда для любой точки $t \in [0,1] \setminus Q$ имеет место единственное разложение

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_k(t)}{m_k}, \quad \text{где } 0 \leq j_k(t) \leq p_k - 1,$$

а

$$Q = \left\{\frac{\ell}{m_n}\right\}, \quad 0 \leq \ell \leq m_n, \quad n \geq 0.$$

Кроме того, любое целое число $m \geq 2$ единственным образом представляется в виде:

$$m = m_n + r(p_{n+1} - 1) + s$$

$$(n = 0, 1, \ldots; \quad r = 0, \ldots, m_n - 1; \quad s = 1, \ldots, p_{n+1} - 1).$$

Полагаем $\chi_1(t) \equiv 1$ на отрезке $[0,1]$, а при $m \geq 2$

$$\chi_m(t) \equiv \chi_{nr}^{(s)}(t) =$$
$$= \begin{cases} \sqrt{m_n} \exp\left\{2\pi i \dfrac{j_{n+1}(t)}{p_{n+1}}\right\} & \text{при } t \in \left(\dfrac{r}{m_n}, \dfrac{r+1}{m_n}\right) \setminus Q, \\ 0 & \text{при } t \notin \left[\dfrac{r}{m_n}, \dfrac{r+1}{m_n}\right]. \end{cases}$$

В остальных точках интервала $(0,1)$ функции $\chi_m(t)$ полагаются равными полусумме своих предельных значений справа и слева по множеству $[0,1] \setminus Q$, а на концах $[0,1]$ - предельным значениям изнутри отрезка.

Таким образом, мы определили систему $\chi\{p_n\}$ класса χ. Сам класс χ есть совокупность всех систем $\chi\{p_n\}$ с каким-либо $N \geq 2$.

Как показал Н. Виленкин (см. [15], стр. 476), любая система класса χ полна и ортонормированна на отрезке $[0,1]$. Если все $p_n = 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то получаем систему Хаара.

Коэффициенты Фурье функции $f \in L([0,1])$, как обычно, определяются соотношением

$$a_m(f) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_m(t)}\, dt \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Аналог Теорем 0.1 и 0.2 для системы $\chi\{p_n\}$ являются следующие теоремы Б. Голубова и А. Рубинштеина [20].

Теорема 0.6 ([20]). *Пусть система $\chi\{p_n\} \in \chi$. Тогда*

1) *если $f \in V_p$ при некоторм $1 \leq p < \infty$, то при вском $\beta > \frac{2p}{2+p}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m(f)|^\beta < \infty.$$

2) *Для любого* $1 \le p < \infty$ *существует функция* $f_0 \in V_p$ (*более, того,* $f_0 \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{p}$), *для которой при* $\beta = \frac{2p}{2+p}$ *имеем*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 0.7 ([20]). *Пусть система* $\chi\{p_n\} \in \chi$. *Тогда*

1) *если* $f \in V_p$ *при некотором* $1 \le p < \infty$, *то при всяком* $\alpha < \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} |a_m(f)| < \infty.$$

2) *Для любого* $1 \le p < \infty$ *существует функция* $f_0 \in \mathrm{V}_p$ (*более того,* $f_0 \in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{p}$), *для которой при* $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ *имеем*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha} |a_m(f_0)| = \infty.$$

Задачи, поставленные в § 2, можно поставить и для изучения сходимости рядов коэффициентов Фурье по системе типа Хаара функций из классов $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$ и $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi)$. В § 3 мы доказываем следующие

Теорема 1.3.1. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}\right)$, *где* $\beta \in (2/3, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.2. *Пусть последовательность* $\{p(n): \ n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (B) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} = \infty, \quad \text{где} \ \ \beta \in (2/3, 2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}\right)$, *такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 1.3.3. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right)$, *где* $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])-\alpha-1/2}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)| < \infty.$$

Теорема 1.3.4. *Пусть последовательность* $\{p(n): \ n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (B) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])-\alpha-1/2}} = \infty, \quad \text{где} \ \ \alpha \in (-1/2, 1/2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)| = \infty.$$

Теорема 1.3.5. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1-\alpha}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.6. *Пусть последовательность* $\{p(n) : n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (B) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1-\alpha}} = \infty, \quad \text{где } \beta > 0, \quad \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha\,,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 1.3.7. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$, *где* $\beta \in (2/3, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.8. *Пусть последовательность* $\{p(n) : n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (B, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} = \infty, \quad \text{где } \beta \in (2/3, 2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 1.3.9. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$, *где* $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)| < \infty.$$

Теорема 1.3.10. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (B, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} = \infty, \quad где \ \ \alpha \in (-1/2, 1/2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)| = \infty.$$

Теорема 1.3.11. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1-\alpha}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.12. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (B, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1-\alpha}} = \infty, \quad где \ \ \beta > 0, \ \ \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

II глава диссертации посвящена изучению сходимости рядов коэффициентов Фурье по кратной системе Хаара.

Пусть

$$\chi_{\vec{m}}(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{N} \chi_{m_i}(x_i), \quad x_i \in [0,1] \ \ (i = 1, 2, \ldots, N)$$

N – кратная $(N \geq 2)$ система Хаара на $[0,1]^N$, где

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N), \quad \vec{m} = (m_1, \ldots, m_N) \ \ (m_i = 1, 2, \ldots, \ \ i = 1, \ldots, N).$$

Кратный коэффициент Фурье–Хаара для функций $f \in L([0,1]^N)$ обозначим через $C_{\vec{m}}(f)$, т.е.,

$$C_{\vec{m}}(f) = \int\limits_{[0,1]^N} f \cdot \chi_{\vec{m}} \, d\vec{x}.$$

Скажем что $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на $[0,1]^N$, если

$$\left\| f(\cdot + h) - f(\cdot) \right\|_C = O\left(\|h\|^{\alpha}\right),$$

где

$$\|h\| = \Big(\sum_{i=1}^{N} h_i^2 \Big)^{1/2}, \ \ \alpha \in (0,1].$$

Мы изучаем сходимость следующих рядов:

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left| C_{m_1,\ldots,m_N}(f) \right|^{\beta}, \tag{0.4}$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (m_i + 1)^{\gamma} \left| C_{m_1,\ldots,m_N}(f) \right|, \tag{0.5}$$

$$\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(m_i+1)^{\gamma}\left|C_{m_1,\ldots,m_N}(f)\right|^{\beta} \tag{0.6}$$

В 1970 году В. Цагарейшвили [45] показал, что если $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$ и $N = 2$, то ряд (0.4) сходится при $\beta > \frac{2}{\alpha+1}$. Если же $\beta = \frac{2}{\alpha+1}$, существует функция $f_\alpha \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, такая, что ряд (0.4) расходится.

В 1973 году Л. В. Жижиашвили [22] высказал гипотезу о сходимости ряда (0.4) для функций $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, когда $N \ge 3$ и $\beta > \frac{2}{1+\frac{2\alpha}{N}}$. В 1976 г. В. Цагарейшвили [46] потвердил эту гипотезу, доказав что в этих условиях ряд (0.4) действительно сходится. Но если $\beta = \frac{2}{1+\frac{2\alpha}{N}}$, тогда существует $f_\alpha \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, такая что ряд (0.4) расходится.

Заметим, что при $N = 1$ этот результат был доказан Б. Голубовым [18].

В 1981 г. Г. Табатадзе [34], обобщая соответствующий результат В. Кротова [28] для одномерного случая, доказал следующую

Теорема 0.7 ([34]). *а) Пусть $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на $[0,1]^N$, $\alpha \in (0,1]$. Тогда, если $\beta > 0$ и $\gamma + 1 < \beta(\frac{\alpha}{N} + \frac{1}{2})$, то*

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}m_i^{\gamma}\left|C_{m_1,\ldots,m_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

б) Для любого $\alpha \in (0,1)$ существует функция $f_\alpha \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на $[0,1]^N$ такая, что при $\gamma + 1 = \beta(\frac{\alpha}{N} + \frac{1}{2})$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}m_i^{\gamma}\left|C_{m_1,\ldots,m_N}(f_\alpha)\right|^{\beta} = \infty.$$

Г. Гаймназаров [9] для функций, имеющих ограниченную вариацию в смысле Харди (см. [44]), доказал, что в случае $N = 2$ и $\beta = 1$ сходится ряд (0.4).

В последнее время в изучении равномерной сходимости кратных рядов Фурье У. Гогинава (см. [11] для $p = 1$ и [12] для $p > 1$) успешно применил функции, которые, в отличии от вариации Харди, имеют лишь ограниченные частные p-вариации.

Определение ([12]). Пусть функция f определена на $[0,1]^N$ и имеет период 1 по каждой переменной. Назовем f функцией с ограниченной частной p-вариацией ($f \in \mathrm{PBV}_p$), если для каждой $i = 1, 2, \ldots, N$

$$V_i(f) = \sup_{x_j, j\in\{1,2,\ldots,N\}\setminus\{i\}} \sup_{\Pi} \sum_{k=0}^{n-1} \Big| f\big(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^{(2k)}, x_{i+1}, \ldots, x_N\big) -$$
$$- f\big(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^{(2k+1)}, x_{i+1}, \ldots, x_N\big)\Big|^p < \infty,$$

$n = 1, 2, \ldots$, где Π любая система непересекающихся интервалов $(x_i^{(2k)}, x_i^{(2k+1)})$, $k = 0, \ldots, n-1$ из $[0,1]$, т.е.,

$$0 \le x_i^{(0)} < x_i^{(1)} \le x_i^{(2)} < \cdots \le x_i^{(2n-2)} < x_i^{(2n-1)} \le 1.$$

Как легко видеть, имеет место следующее включение: $\mathrm{Lip}\,\frac{1}{p} \subset \mathrm{PBV}_p$. Поэтому, естественно, возникает вопрос об изучении сходимости рядов (0.4), (0.5) и (0.6) в более широком классе, чем $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

В § 2 II главы мы даем ответы на этот вопрос. В частности, доказываем следующие

Теорема 2.2.1. *Пусть $f \in \mathrm{PBV}_p$, $p \ge 1$ на $[0,1]^N$. Если $\beta > \frac{2pN}{2+pN}$, тогда*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \big|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\big|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть $f \in \mathrm{PBV}_p$, $p \ge 1$. Если $\alpha < \frac{1}{pN} - \frac{1}{2}$, тогда*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \big|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\big| < \infty.$$

Теорема 2.2.3. *Пусть* $f \in \mathrm{PBV}_p$, $p \geq 1$. *Если* $\beta > 0$ *и* $\alpha + 1 < \beta(\frac{1}{pN} + \frac{1}{2})$, *тогда*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Так как $\mathrm{Lip}\,\frac{1}{p} \subset \mathrm{PBV}_p$, поэтому неусиляемость этих теорем при $p > 1$ следует из теорем В. Цагарейшвили [46] и Г. Табатадзе [34].

Итак. эти теоремы являются в определенном смысле многомерными аналогами теоремы Б. Голубова [18].

Из вышесказанного следует (как в § 2 Главы I), найти достаточные условия для стремления $p(n)$ к критическому показателю, которые обеспечивали-бы сходимость рядов (0.4), (0.5) и (0.6). Для этого предварительно определим следующие классы функций.

Пусть функция f определена на $\mathbb{R}^N$ и имеет период 1 по каждой переменной. Назовём $\Pi^{(i)}$ разбиение с периодом 1, если

$$\Pi^{(i)}: \; \cdots < t_{-1}^{(i)} < t_0^{(i)} < t_1^{(i)} < \cdots < t_{m_i}^{(i)} < t_{m_i+1}^{(i)} < \cdots,$$

$t_{k+m_i}^{(i)} = t_{k+1}^{(i)}$, для каждого $k \in Z$, где m_i целое неотрицательное число.

Пусть $\varphi_i(i = 1, \ldots, N)$ возрастающие функции, определённые на множестве натуральных чисел, $\varphi_i(1) \geq 2$ и

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_i(n) = +\infty.$$

Определение. Пусть $1 \leq p_i(n) \uparrow p$, когда $n \to \infty$ $(i = 1, \ldots, N)$ и $1 \leq p \leq \infty$.

Скажем, что функция f принадлежит классу $\mathrm{BV}_i(p_i(n) \uparrow p)$, если

$$V_i(p_i(n) \uparrow p) =$$

$$= \sup_{x_s,\, s\in\{1,\ldots,N\}\setminus\{i\}} \sup_{n\geq 1} \sup_{\Pi^{(i)}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{m_i} \left| f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, t_j^{(i)}, x_{i+1}, \ldots, x_N\right) - \right.\right.\right.$$

$$-f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},t_{j-1}^{(i)},x_{i+1},\ldots,x_N\right)\Big|^{p_i(n)}\Bigg)^{1/p_i(n)}\ :\ \rho(\Pi^{(i)})\geq\frac{1}{2^n}\Bigg\}<\infty,$$

где

$$\rho(\Pi^{(i)})=\inf_k\left|t_k^{(i)}-t_{k-1}^{(i)}\right|.$$

Для $N=1$ см. [26].

Ясно, что когда $p_i(n)=p$ для каждой $n(i=1,\ldots,N)$, тогда класс $\bigcap\limits_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i(p_i(n)\uparrow p)$ совпадает с классом PBV_p.

Определение. Пусть $1\leq p_i(n)\uparrow p$, когда $n\to\infty$ $(i=1,\ldots,N)$ и $1\leq p\leq\infty$.

Скажем, что функция f принадлежит классу $\mathrm{BV}_i(p_i(n)\uparrow p,\varphi_i)$, если

$$V_i(p_i(n)\uparrow p,\varphi_i)=$$

$$=\sup_{x_s,\,s\in\{1,\ldots,N\}\setminus\{i\}}\ \sup_{n\geq1}\ \sup_{\Pi^{(i)}}\Bigg\{\Bigg(\sum_{j=1}^{m_i}\Big|f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},t_j^{(i)},x_{i+1},\ldots,x_N\right)-$$

$$-f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},t_{j-1}^{(i)},x_{i+1},\ldots,x_N\right)\Big|^{p_i(n)}\Bigg)^{1/p_i(n)}\ :\ \rho(\Pi^{(i)})\geq\frac{1}{\varphi_i(n)}\Bigg\}<\infty,$$

где

$$\rho(\Pi^{(i)})=\inf_k\left|t_k^{(i)}-t_{k-1}^{(i)}\right|.$$

Для $N=1$ см. [2].

В § 3 II главы мы доказываем теоремы о сходимости рядов (0.4), (0.5) и (0.6) для функций из класса $\bigcap\limits_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i(p_i(n)\uparrow p,\varphi_i)$.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $f\in\bigcap\limits_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\left(p_i(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2-\beta)},\varphi_i\right)$, *где* $\beta\in\left(\frac{2N}{2+N},2\right)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(\tau_i(2^n)))-1]}}<\infty\ \ (i=1,\ldots,N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta}<\infty.$$

Следствие 2.3.1 (при $N=1$ см. [52]). *Пусть* $f\in\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\left(p(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2-\beta)},\varphi\right)$, *где* $\beta\in\left(\frac{2N}{2+N},2\right)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(\tau(2^n)))-1]}}<\infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta}<\infty.$$

Следствие 2.3.2. *Пусть* $f\in\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\left(p_i(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2-\beta)}\right)$, $\beta\in\left(\frac{2N}{2+N},2\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(n))-1]}}<\infty\ \ (i=1,\ldots,N),$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\left|C_{n_1,n_2,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta}<\infty.$$

Следствие 2.3.3 (при $N=1$ см. [14]). *Пусть* $f\in\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\left(p(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2-\beta)}\right)$, *где* $\beta\in\left(\frac{2N}{2+N},2\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(n))-1]}}<\infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\left|C_{n_1,n_2,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta}<\infty.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}, \varphi_i\right)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np_i(\tau_i(2^n))-1/2-\alpha]}} < \infty \quad (i = 1, \dots, N),$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right| < \infty.$$

Следствие 2.3.4 (при $N = 1$ см. [52]). *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}, \varphi\right)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np(\tau(2^n))-1/2-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right| < \infty.$$

Следствие 2.3.5. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}\right)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np_i(n)-1/2-\alpha]}} < \infty \quad (i = 1, \dots, N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left|C_{n_1,n_2\dots,n_N}(f)\right| < \infty.$$

Следствие 2.3.6 (при $N = 1$ см. [14]). *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}\right)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np(n)-1/2-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right| < \infty.$$

Теорема 2.3.3. *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}, \varphi_i\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2+2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(\tau_i(2^n)))-1-\alpha]}} < \infty \quad (i=1,\dots,N),$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.7 (при $N=1$ см. [55]). *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}, \varphi\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2+2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(\tau(2^n)))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.8. *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2+2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(n))-1-\alpha]}} < \infty \quad (i=1,\dots,N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.9 (при $N = 1$ см. [55]). *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2 + 2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(n))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i + 1)^{\alpha} \left| C_{n_1,\ldots,n_N}(f) \right|^{\beta} < \infty.$$

Результаты диссертации докладывались на семинарах по теории функций в Тбилисском государственном университете (руководитель академик АН Грузии Л. В. Жижиашвили), на кафедре математического анализа ТГУ (зав. кафедрой проф. Г. Е. Ткебучава).

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [52]–[55].

В заключении автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору У. К. Гогинава за постановку задач и постоянное внимание при работе над диссертацией.

ГЛАВА I

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ПРОСТЫХ РЯДОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ–ХААРА

§ 1. Определения и обозначения

Обозначим через $C([0,1])$ пространство непрерывных периодических функций с периодом 1 и нормой

$$\|f\|_C = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|.$$

Пусть $f \in C([0,1])$. Тогда модулем непрерывности функции f называется функция

$$\omega(\delta, f) = \sup\Big\{|f(x') - f(x'')| : \ \ |x' - x''| \le \delta; \ \ x',\, x'' \in [0,1]\Big\}.$$

Модулем непрерывности называется неотрицательная функция неотрицательного аргумента, обладающая следующими свойствами:

1) $\omega(0) = 0$;
2) $\omega(\delta)$ не убывает;
3) $\omega(\delta)$ непрерывна на $[0,1]$;
4) $\omega(\delta_1 + \delta_2) \le \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ при $0 \le \delta_1 \le \delta_2 \le \delta_1 + \delta_2 \le 1$.

При заданном модуле непрерывности $\omega(\delta)$ через H^ω обозначим класс всех тех непрерывных функций, для которых выполнено условие $\omega(\delta, f) = O(\omega(\delta))$, когда $\delta \to 0+$.

Пусть $\{\chi_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ система Хаара. Как известно, она определяется следующим образом: $\chi_1(t) = 1$ на $[0,1]$, а для всякого $m \geq 2$

$$\chi_m(t) := \chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } t \in \left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } t \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right], \\ 0 & \text{при остальных } t \in [0,1], \end{cases}$$

где $m = 2^n + k$, $k = 1, \ldots, 2^n$; $n = 0, 1, \ldots$.

Коэффициент Фурье–Хаара функции $f \in L([0,1])$ обозначим через $C_n(f)$, т.е.,

$$C_n(f) = \int_0^1 f(t)\chi_n(t)\,dt.$$

Пусть $\chi\{p_n\}$ система типа Хаара. Коэффициент Фурье функции $f \in L([0,1])$ по этой системе определяется соотношением:

$$a_m(f) = \int_0^1 f(t)\overline{\chi_m(t)}\,dt.$$

Пусть φ возрастающая функция, определенная на множестве натуральных чисел. Кроме того $\varphi(1) \geq 2$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty.$$

Обозначим через

$$\tau(r) = \min\left\{k : \ k \in N, \ \varphi(k) \geq r\right\}, \ \ r \geq 2.$$

Определение. Скажем, что последовательность $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ удовлетворяет условие (A), если существует такая постоянная $c > 0$, что для каждой $n \geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/p(k)}} \leq \frac{c}{2^{n/p(n)}}.$$

Определение. Скажем, что последовательность $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ и функция φ удовлетворяют условие (A, φ), если существует такая постоянная $c > 0$, что для каждой $n \geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/p(\tau(k))}} \leq \frac{c}{2^{n/p(\tau(n))}} .$$

Определение. Скажем, что последовательность $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ удовлетворяет условие (B), если существует такая постоянная $c > 0$, что для каждой $n \geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p(k)}} \leq \frac{c}{m_n^{1/p(n)}} .$$

Определение. Скажем, что последовательность $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ и функция φ удовлетворяют условие (B, φ), если существует такая постоянная $c > 0$, что для каждой $n \geq 1$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p(\tau(k))}} \leq \frac{c}{m_n^{1/p(\tau(n))}} .$$

§ 2. Об абсолютной сходимости рядов коэффициентов Фурье–Хаара функций из класса $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi)$

формулировка основных результатов.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$, *где* $\beta \in (2/3, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/p(\tau(2^n))+1/2)-1]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.2.2. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (A, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/p(\tau(2^n))+1/2)-1]}} = \infty, \quad \text{где } \beta \in (2/3, 2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 1.2.3. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$, *где* $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/p(\tau(2^n))-1/2-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)| < \infty.$$

Теорема 1.2.4. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (A, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/p(\tau(2^n))-1/2-\alpha]}} = \infty, \quad \text{где } \alpha \in (-1/2, 1/2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)| = \infty.$$

Теорема 1.2.5. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(\tau(2^n)))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.2.6. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \; n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (A, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(\tau(2^n)))-1-\alpha]}} = \infty, \quad \textit{где} \;\; \beta > 0, \;\; \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Следствие 1.2.1. *а) Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(n))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

б) Пусть последовательность $\{p(n) : \; n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (A) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/p(n))-1-\alpha]}} = \infty, \quad \textit{где} \;\; \beta > 0, \;\; \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2+2\alpha,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(1 < p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Вспомогательные утверждения.

Лемма 1.2.1 (Б. Голубов [18]). *Если* $a_n \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

и

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2^{k+1}\pi t,$$

тогда для коэффициентов Фурье–Хаара функции f_0 *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=2^p+1}^{2^{p+1}} |C_n(f_0)| \geq \frac{1}{\pi} 2^{p/2} a_p.$$

Лемма 1.2.2 (Т. Ахобадзе [3]). $H^\omega \subset \mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\omega(t) = O\big(t^{1/p(\tau(1/t))}\big), \ \ t \to 0+.$$

Лемма 1.2.3. *Пусть* $1 < p(n) \uparrow p$, $n \to \infty$, *где* $p \in (1, \infty)$ *и допустим, последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (A, φ). *Если*

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2^k \pi x}{2^{k/p(\tau(2^k))}},$$

тогда

$$f_0 \in \mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi).$$

Доказательство. Пусть $|x - y| < \delta < 1$. Тогда найдётся такое натуральное n, что

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leq \delta < \frac{1}{2^n}.$$

Будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\left|f_0(x)-f_0(y)\right| \le \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos 2^k\pi x-\cos 2^k\pi y|}{2^{k/p(\tau(2^k))}} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2|\sin 2^{k-1}\pi(x-y)\sin 2^{k-1}\pi(x+y)|}{2^{k/p(\tau(2^k))}} \le \\
&\le 2\sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin 2^{k-1}\pi(x-y)|}{2^{k/p(\tau(2^k))}} + 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/p(\tau(2^k))}} = I+II.
\end{aligned}
$$

Из условии теоремы получим

$$
\begin{aligned}
&II = 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/p(\tau(2^k))}} \le \frac{c^{(*)}}{2^{n/p(\tau(2^n))}} = \frac{c\cdot 2^{\frac{1}{p(\tau(2^n))}}}{2^{(n+1)/p(\tau(2^n))}} \le \\
&\le c\,\delta^{1/p(\tau(2^n))} \le c\,\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}.
\end{aligned}
$$

Для I имеем

$$
\begin{aligned}
&I = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin 2^{k-1}\pi(x-y)|}{2^{k/p(\tau(2^k))}} \le \\
&\le c\,\delta \sum_{k=1}^{n} 2^{k(1-1/p(\tau(2^k)))} \le \\
&\le c\,\delta \sum_{k=1}^{n} 2^{k(1-1/p(\tau(2^n)))} \le \\
&\le c\,\delta\cdot 2^{n(1-1/p(\tau(2^n)))} \le c\cdot\delta^{1/p(\tau(2^n))} \le \\
&\le c\,\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}.
\end{aligned}
$$

Итак, мы получим, что

$$
\omega(\delta, f_0) = O\big(\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}\big), \quad \delta\to 0+.
$$

(*) Здесь и ниже через c будем обозначать абсолютную константу, являюшейся различными в различных местах.

Применяя Лемму 1.2.2 получаем, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\big(p(n) \uparrow p, \varphi\big).$$

Доказательства основных результатов.

Доказательство Теоремы 1.2.1. Пусть $m = 2^n + \ell$, $1 \le \ell \le 2^n$. Как легко видеть

$$C_m(f) = C_n^{(\ell)}(f) = 2^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\frac{2\ell-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2\ell-1}{2^{n+1}}} \left[f(t) - f\Big(t + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\right] dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера получим:

$$\sum_{\ell=1}^{2^n} |C_n^{(\ell)}(f)|^{p(\tau(2^{n+1}))} =$$

$$= 2^{\frac{np(\tau(2^{n+1}))}{2}} \sum_{\ell=1}^{2^n} \left| \int\limits_{\frac{2\ell-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2\ell-1}{2^{n+1}}} \left[f(t) - f\Big(t + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\right] dt \right|^{p(\tau(2^{n+1}))} \le$$

$$\le 2^{\frac{np(\tau(2^{n+1}))}{2}} \sum_{\ell=1}^{2^n} \left[\int\limits_{\frac{2\ell-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2\ell-1}{2^{n+1}}} \left|f(t) - f\Big(t + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\right| dt \right]^{p(\tau(2^{n+1}))} \le$$

$$\le 2^{\frac{np(\tau(2^{n+1}))}{2}} \sum_{\ell=1}^{2^n} \left[\Bigg(\int\limits_{\frac{2\ell-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2\ell-1}{2^{n+1}}} \left|f(t) - f\Big(t + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\right|^{p(\tau(2^{n+1}))} dt \Bigg)^{1/p(\tau(2^{n+1}))} \times \right.$$

$$\left. \times \Bigg(\int\limits_{\frac{2\ell-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2\ell-1}{2^{n+1}}} 1\, dt \Bigg)^{1-1/p(\tau(2^{n+1}))} \right]^{p(\tau(2^{n+1}))} = 2^{\frac{np(\tau(2^{n+1}))}{2}} \times$$

$$\times \sum_{\ell=1}^{2^n} \int\limits_{\frac{2\ell-2}{2^{n+1}}}^{\frac{2\ell-1}{2^{n+1}}} \left|f(t) - f\Big(t + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)\right|^{p(\tau(2^{n+1}))} dt \cdot \Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)^{p(\tau(2^{n+1}))-1} =$$

$$= \frac{2^{\frac{np(\tau(2^{n+1}))}{2}}}{2^{(n+1)(p(\tau(2^{n+1}))-1)}} \times$$

$$\times \int\limits_0^{1/2^{n+1}} \sum_{\ell=1}^{2^n} \left| f\left(t + \frac{2\ell-2}{2^{n+1}}\right) - f\left(t + \frac{2\ell-1}{2^{n+1}}\right) \right|^{p(\tau(2^{n+1}))} dt \le$$

$$\le \frac{2^{\frac{np(\tau(2^{n+1}))}{2}}}{2^{(n+1)p(\tau(2^{n+1}))}} \times$$

$$\times \sup_{t\in[0,1/2^{n+1}]} \sum_{\ell=1}^{2^n} \left| f\left(t + \frac{2\ell-2}{2^{n+1}}\right) - f\left(t + \frac{2\ell-1}{2^{n+1}}\right) \right|^{p(\tau(2^{n+1})} \le$$

$$\le \frac{1}{2^{p(\tau(2^{n+1}))}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{np(\tau(2^{n+1}))}{2}}} \cdot \left(\mathrm{V}\left(f, p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi \right) \right)^{p(\tau(2^{n+1}))}. \tag{1.1}$$

Пусть

$$\beta < p\big(\tau(2^{n+1})\big) < \frac{2\beta}{2-\beta}, \quad n \ge n_0.$$

Используя неравенство Гёльдера и условие теоремы, будем иметь:

$$\sum_{\ell=1}^{2^n} |C_n^{(\ell)}(f)|^\beta \le$$

$$\le \left(\sum_{\ell=1}^{2^n} |C_n^{(\ell)}(f)|^{p(\tau(2^{n+1}))} \right)^{\beta/p(\tau(2^{n+1}))} \cdot 2^{n(1-\beta/p(\tau(2^{n+1})))} \le$$

$$\le \frac{1}{2^\beta} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n\beta}{2}}} \cdot \left(\mathrm{V}\left(f, p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi \right) \right)^\beta \cdot 2^{n(1-\beta/p(\tau(2^{n+1})))} \le$$

$$\le \frac{c}{2^{(n+1)[\beta(1/2+1/p(\tau(2^{n+1})))-1]}}\,. \tag{1.2}$$

Из (1.2) и условия теоремы получим:

$$\sum_{m=2}^{\infty} |C_m(f)|^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=2^n+1}^{2^{n+1}} |C_\ell(f)|^\beta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{2^n} |C_{\ell+2^n}(f)|^\beta =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{\ell=1}^{2^n} |C_n^{(\ell)}(f)|^\beta + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{2^n} |C_n^{(\ell)}(f)|^\beta \leq$$

$$\leq c + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n+1)[\beta(1/2+1/p(\tau(2^{n+1})))-1]}} < \infty.$$

Теорема 1.2.1 доказана.

Доказательство Теоремы 1.2.2. Пусть $1 < p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}$, $\beta \in (2/3, 2)$ и

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2^k \pi t}{2^{k/p(\tau(2^k))}}.$$

Покажем, что f_0 является искомой функцией. Из условия теоремы и по Лемме 1.2.3 имеем

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right).$$

Пусть E_n' множество тех целых чисел ℓ, $1 \leq \ell \leq 2^n$, для которых справедливо неравенство

$$|C_n^{(\ell)}(f_0)| \geq \frac{1}{4\pi} 2^{-n(1/2+1/p(\tau(2^{n+1})))}.$$

Через E_n'' обозначим остальные целые числа из $[1, 2^n]$. Так как $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$, будем иметь:

$$\sum_{\ell \in E_n'} |C_n^{(\ell)}(f_0)| \leq$$

$$\leq 2^{n/2} \int_0^{1/2^{n+1}} \sum_{\ell \in E_n'} \left| f_0\left(t + \frac{2\ell-2}{2^{n+1}}\right) - f_0\left(t + \frac{2\ell-1}{2^{n+1}}\right) \right| dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n/2}} \sup_{t \in [0, 1/2^{n+1}]} \sum_{\ell \in E_n'} \left| f_0\left(t + \frac{2\ell-2}{2^{n+1}}\right) - f_0\left(t + \frac{2\ell-1}{2^{n+1}}\right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{n/2}} \sup_{t \in [0, 1/2^{n+1}]} \left(\sum_{\ell \in E_n'} \left| f_0\left(t + \frac{2\ell-2}{2^{n+1}}\right) - \right.\right.$$

$$-f_0\Big(t+\frac{2\ell-1}{2^{n+1}}\Big)\Big|^{p(\tau(2^{n+1}))}\Big)^{1/p(\tau(2^{n+1}))}\cdot|E_n'|^{1-1/p(\tau(2^{n+1}))}\le$$

$$\le c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(2^{n+1}))}}{2^{n/2}}\,. \tag{1.3}$$

Применяя Лемму 1.2.1 и (1.3), имеем:

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{2^{n/2}}{2^{(n+1)/p(\tau(2^{n+1}))}}\le\sum_{\ell=1}^{2^n}|C_n^{(\ell)}(f_0)|=$$

$$=\sum_{\ell\in E_n'}|C_n^{(\ell)}(f_0)|+\sum_{\ell\in E_n''}|C_n^{(\ell)}(f_0)|\le$$

$$\le c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(2^{n+1}))}}{2^{n/2}}+\frac{1}{\pi}\,2^{-n(1/2+1/p(\tau(2^{n+1})))}\cdot|E_n''|\le$$

$$\le c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(2^{n+1}))}}{2^{n/2}}+\frac{1}{4\pi}\,2^{n(1/2-1/p(\tau(2^{n+1})))},$$

$$c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(2^{n+1}))}}{2^{n/2}}\ge\frac{1}{4\pi}\,2^{n(1/2-1/p(\tau(2^{n+1})))},$$

$$|E_n'|\ge c2^n. \tag{1.4}$$

Из (1.4) получим

$$\sum_{\ell=1}^{2^n}\big|C_n^{(\ell)}(f_0)\big|^\beta\ge\sum_{\ell\in E_n'}\big|C_n^{(\ell)}(f_0)\big|^\beta\ge$$

$$\ge\Big(\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2^{n(1/2+1/p(\tau(2^{n+1})))}}\Big)^\beta\cdot|E_n'|\ge\frac{c}{2^{n[\beta(1/p(\tau(2^{n+1}))+1/2)-1]}}\,. \tag{1.5}$$

Из условия теоремы и из (1.5) будем иметь:

$$\sum_{m=2}^{\infty}\big|C_m(f_0)\big|^\beta=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{2^n}\big|C_n^{(\ell)}(f_0)\big|^\beta\ge$$

$$\ge\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c}{2^{n[\beta(1/2+1/p(\tau(2^n)))-1]}}=\infty.$$

Теорема 1.2.2 доказана.

Доказательство Теоремы 1.2.3. Так как

$$C_j^{(n)} = \sqrt{2^j} \int\limits_0^{1/2^{j+1}} \left[f\Big(t + \frac{2n}{2^{j+1}}\Big) - f\Big(t + \frac{2n+1}{2^{j+1}}\Big)\right] dt$$

для $0 \le n < 2^j$, поэтому применяя неравенство Гёльдера и условия теоремы, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha |C_n(f)| = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}} n^\alpha |C_n(f)| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} |C_n(f)| = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sum_{n=0}^{2^j-1} \left|C_j^{(n)}(f)\right| \le$$

$$\le 2^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha+1/2)} \sum_{n=0}^{2^j-1} \int\limits_0^{1/2^{j+1}} \left| f\Big(t + \frac{2n}{2^{j+1}}\Big) - f\Big(t + \frac{2n+1}{2^{j+1}}\Big)\right| dt \le$$

$$\le c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha-1/2)} \sup_{t\in[0,1/2^{j+1}]} \sum_{n=0}^{2^j-1} \left| f\Big(t + \frac{2n}{2^{j+1}}\Big) - f\Big(t + \frac{2n+1}{2^{j+1}}\Big)\right| \le$$

$$\le c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\alpha-1/2)} \sup_{t\in[0,1/2^{j+1}]} \Bigg(\sum_{n=0}^{2^j-1} \Big| f\Big(t + \frac{2n}{2^{j+1}}\Big) -$$

$$- f\Big(t + \frac{2n+1}{2^{j+1}}\Big)\Big|^{p(\tau(2^{j+1}))}\Bigg)^{1/p(\tau(2^{j+1}))} \cdot 2^{j(1-1/p(\tau(2^{j+1})))} \le$$

$$\le c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)(\alpha-1/2+1-1/p(\tau(2^{j+1})))} \,\mathrm{V}\left(f, p(n)\uparrow \frac{2}{2\alpha+1}, \varphi\right) \le$$

$$\le c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j(1/p(\tau(2^j))-1/2-\alpha)}} < \infty.$$

Теорема 1.2.3 доказана.

Доказательство Теоремы 1.2.4. Пусть

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2^k \pi t}{2^{k/p(\tau(2^k))}}.$$

Из условия теоремы и по Лемме 1.2.3 имеем, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n)\uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right).$$

Из Леммы 1.2.1 и условия теоремы будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f_0)| = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} n^{\alpha} |C_n(f_0)| \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |C_n(f_0)| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \cdot 2^{j\alpha} \cdot \frac{1}{2^{(j+1)/p(\tau(2^{j+1}))}} \geq$$

$$\geq c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j(1/p(\tau(2^j))-1/2-\alpha)}} = \infty.$$

Теорема 1.2.4 доказана.

Доказательство Теоремы 1.2.5. Из условия теоремы и (1.2) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |C_n(f)|^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} n^{\alpha} |C_n(f)|^{\beta} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} |C_n(f)|^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\alpha} \sum_{n=0}^{2^j-1} |C_j^{(n)}(f)|^{\beta} \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(j+1)\alpha} \frac{c}{2^{(j+1)[\beta(1/2+1/p(\tau(2^{j+1})))-1]}} \leq$$

$$\leq c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j[\beta(1/2+1/p(\tau(2^j)))-1-\alpha]}} < \infty.$$

Теорема 1.2.5 доказана.

Доказательство Теоремы 1.2.6. Пусть

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2^k \pi t}{2^{k/p(\tau(2^k))}}.$$

Из условия теоремы и по Лемме 1.1.3 имеем, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right).$$

Из (1.5) и условия теоремы получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|C_n(f_0)|^{\beta} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} n^{\alpha}|C_n(f_0)|^{\beta} \geq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |C_n(f_0)|^{\beta} \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\alpha} \frac{c}{2^{j[\beta(1/2+1/p(\tau(2^{j+1})))-1]}} \geq$$

$$\geq c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j[\beta(1/2+1/p(\tau(2^j)))-1-\alpha]}} = \infty.$$

Теорема 1.2.6 доказана.

§ 3. Об абсолютной сходимости рядов коэффициентов Фурье по системе типа Хаара

Формулировка основных результатов.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}\right)$*, где* $\beta \in (2/3, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.2. *Пусть последовательность* $\{p(n): n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (B) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} = \infty, \quad \textit{где } \beta \in (2/3, 2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}\right)$, *такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 1.3.3. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right)$, *где* $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])-\alpha-1/2}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)| < \infty.$$

Теорема 1.3.4. *Пусть последовательность* $\{p(n): n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (B) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])-1/2-\alpha}} = \infty, \quad \textit{где } \alpha \in (-1/2, 1/2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right)$, *такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)| = \infty.$$

Теорема 1.3.5. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *где* $\beta > 0$, *и* $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1-\alpha}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.6. *Пусть последовательность* $\{p(n) : n \geq 1\}$ *удовлетворяет условие* (B) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1-\alpha}} = \infty, \quad \text{где } \beta > 0, \ \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right)$, *такая что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 1.3.7. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$, *где* $\beta \in (2/3, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.8. *Пусть последовательность* $\{p(n) : n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (B, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} = \infty, \quad \text{где } \beta \in (2/3, 2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Теорема 1.3.9. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$, *где* $\alpha \in (-1/2, 1/2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)| < \infty.$$

Теорема 1.3.10. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (B, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} = \infty, \quad \text{где} \ \ \alpha \in (-1/2, 1/2),$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)| = \infty.$$

Теорема 1.3.11. *Пусть* $f \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1-\alpha}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f)|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 1.3.12. *Пусть последовательность* $\{p(n) : \ n \geq 1\}$ *и функция* φ *удовлетворяют условие* (B, φ) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1-\alpha}} = \infty, \quad \text{где} \ \ \beta > 0, \ \ \frac{2+2\alpha}{3} < \beta < 2 + 2\alpha,$$

тогда существует функция $f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right)$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} |a_n(f_0)|^{\beta} = \infty.$$

Вспомогательные результаты.

Лемма 1.3.1 (Б. Голубов и А. Рубинштейн [20]). *Если* $C_n \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty$$

и

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_k e^{2\pi i m_k x},$$

тогда коэффициент Фурье–Хаара функции f_0 *удовлетворяет условие*

$$\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)| \geq B m_n^{1/2} C_n,$$

где B *некоторая постоянная.*

Лемма 1.3.2 (У. Гогинава [16]). $H^{\omega} \subset \mathrm{BV}(p(n) \uparrow p)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\omega(t) = O\left(t^{1/p([\log_2 1/t])}\right), \quad t \to 0+.$$

Лемма 1.3.3 ([20]). *Пусть* $m \geq 2$, *тогда*

1) $$|a_m(f)| = |a_{nr}^{(s)}(f)| \leq$$

$$\leq c\sqrt{m_n} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int\limits_{\delta_{n,r,k}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right)\right| dt; \tag{1.6}$$

2) $$\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^p \le$$

$$\le c m_n^{1-\frac{p}{2}} (p_{n+1}-1) \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int\limits_{\delta_{n,r,k}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^p dt; \qquad (1.7)$$

где

$$\delta_{n,r,k} = \left(\frac{r}{m_n} + \frac{k-1}{m_{n+1}}, \frac{r}{m_n} + \frac{k}{m_{n+1}} \right).$$

Лемма 1.3.4 (Т. Ахобадзе [3]). *Пусть* $f \in \mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi_1)$. *Если*

$$\sup_n \left(\frac{\varphi_2(n)}{\varphi_1(n)} \right)^{1/p(n)} < \infty,$$

тогда

$$f \in \mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi_2).$$

Лемма 1.3.5. *Пусть* $p(n) \uparrow p$, $p \in (1, \infty)$ *и* $\{p(n) : \ n \ge 1\}$ *удовлетворяет условие* (B). *Если*

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}},$$

тогда

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow p\right).$$

Доказательство. Для любого $0 < \delta < 1$ найдется такое натуральное n, что

$$\frac{1}{m_{n+1}} \le \delta < \frac{1}{m_n}.$$

Пусть $|x-y| < \delta < 1$,

$$|f_0(x) - f_0(y)| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos 2\pi m_k x - \cos 2\pi m_k y| + |\sin 2\pi m_k x - \sin 2\pi m_k y|}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2|\sin m_k\pi(x-y)\sin m_k\pi(x+y)| + 2|\sin m_k\pi(x-y)\cos m_k\pi(x+y)|}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} \leq$$

$$\leq 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin m_k\pi(x-y)|}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} \leq$$

$$\leq 4\sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin m_k\pi(x-y)|}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} + 4\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} = I + II.$$

Из условия леммы будем иметь:

$$II = 4\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} \leq \frac{c}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])}} \leq$$

$$\leq \frac{c\, p_{n+1}^{1/p([\log_2 m_n])}}{m_{n+1}^{1/p([\log_2 m_n])}} \leq c\,\delta^{1/p([\log_2 m_n])} \leq c\,\delta^{1/p([\log_2 1/\delta])};$$

$$I = 4\sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin m_k\pi(x-y)|}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} \leq 4\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \cdot \pi \cdot \delta}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}} =$$

$$= 4\pi\delta \sum_{k=1}^{n} m_k^{1-1/p([\log_2 m_k])} \leq 4\pi\delta \sum_{k=1}^{n} m_k^{1-1/p([\log_2 m_n])} \leq$$

$$\leq c\,\delta m_n^{1-1/p([\log_2 m_n])} \leq c\,\delta \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-1/p([\log_2 m_n])} =$$

$$= c\,\delta^{1/p([\log_2 m_n])} \leq c\,\delta^{1/p([\log_2 1/\delta])}.$$

Итак,

$$\omega(\delta, f_0) = O\big(\delta^{1/p([\log_2 1/\delta])}\big), \quad \delta \to 0+.$$

Тогда по Лемме 1.3.2 получим, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\,\big(p(n) \uparrow p\big).$$

Лемма 1.3.6. *Пусть $p(n) \uparrow p$, $p \in (1,\infty)$ и последовательность $\{p(n): n \geq 1\}$ и функция φ удовлетворяют условие (B,φ). Если*

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}},$$

тогда

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow p, \varphi\right).$$

Доказательство. Для любого $0 < \delta < 1$ найдется такое натуральное n, что

$$\frac{1}{m_{n+1}} \leq \delta < \frac{1}{m_n}.$$

Пусть $|x-y| < \delta < 1$,

$$|f_0(x) - f_0(y)| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos 2\pi m_k x - \cos 2\pi m_k y| + |\sin 2\pi m_k x - \sin 2\pi m_k y|}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2|\sin m_k\pi(x-y)\sin m_k\pi(x+y)| + 2|\sin m_k\pi(x-y)\cos m_k\pi(x+y)|}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} \leq$$

$$\leq 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin m_k\pi(x-y)|}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} \leq$$

$$\leq 4\sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin m_k\pi(x-y)|}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} + 4\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} = I + II.$$

Из условия леммы получим

$$II = 4\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} \leq \frac{c}{m_n^{1/p(\tau(m_n))}} =$$

$$= \frac{c\, p_{n+1}^{1/p(\tau(m_n))}}{m_{n+1}^{1/p(\tau(m_n))}} \leq c\,\delta^{1/p(\tau(m_n))} \leq c\,\delta^{1/p(\tau(1/\delta))};$$

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin m_k\pi(x-y)|}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k\,\pi\,\delta}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}} = \\
&= \pi\delta \sum_{k=1}^{n} m_k^{1-1/p(\tau(m_k))} \le \pi\delta \sum_{k=1}^{n} m_k^{1-1/p(\tau(m_n))} \le \\
&\le \pi\delta m_n^{1-1/p(\tau(m_n))} \le \pi\delta\left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-1/p(\tau(m_n))} = \\
&= c\,\delta^{1/p(\tau(m_n))} \le c\,\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}.
\end{aligned}
$$

Итак,

$$
\omega(\delta, f_0) = O\big(\delta^{1/p(\tau(1/\delta))}\big), \quad \delta \to 0+.
$$

Поэтому из Леммы 1.2.2 следует, что

$$
f_0 \in \mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi).
$$

Доказательства основных результатов.

Доказательство Теоремы 1.3.1. Используя Лемму 1.3.4, (1.7) и то, что $\sup\limits_n p_n \le N$, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{p([\log_2 m_n])} = \\
&= \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left|a_{nr}^{(s)}(f)\right|^{p([\log_2 m_n])} \le \\
&\le c \cdot m_n^{1-\frac{p([\log_2 m_n])}{2}} \cdot (p_{n+1}-1)\times \\
&\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_n}+\frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{k}{m_{n+1}}} \left|f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right)\right|^{p([\log_2 m_n])} dt \le \\
&\le c \cdot m_n^{1-\frac{p([\log_2 m_n])}{2}} \cdot (p_{n+1}-1)\times
\end{aligned}
$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int\limits_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}} \left|f(t) - f\Big(t+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|^{p([\log_2 m_n])} dt =$$

$$= c \cdot m_n^{1-\frac{p([\log_2 m_n])}{2}} \cdot (p_{n+1}-1)\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int\limits_{0}^{\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}} \left|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big) - f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|^{p([\log_2 m_n])} dt \le$$

$$\le c \cdot m_n^{1-\frac{p([\log_2 m_n])}{2}} \cdot (p_{n+1}-1)\Big(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\times$$

$$\times \sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big) - f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|^{p([\log_2 m_n])} \le$$

$$\le c \cdot m_n^{1-\frac{p([\log_2 m_n])}{2}} \cdot (p_{n+1}-1)\frac{p_{n+1}-1}{m_{n+1}}\times$$

$$\times\Big(\mathrm{V}\Big(f, p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}\Big)\Big)^{p([\log_2 m_n])} \le$$

$$\le c\sup_n p_n \cdot m_n^{1-\frac{p([\log_2 m_n])}{2}} \cdot m_n^{-1}\Big(\mathrm{V}\Big(f, p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}\Big)\Big)^{p([\log_2 m_n])} \le$$

$$\le c\sup_n p_n \cdot m_n^{-\frac{p([\log_2 m_n])}{2}}\Big(\mathrm{V}\Big(f, p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}\Big)\Big)^{p([\log_2 m_n])}.$$

Пусть

$$\beta < p\big([\log_2 m_n]\big) < \frac{2\beta}{2-\beta}, \quad n \ge n_0.$$

Пользуясь неравенством Гёльдера, получим

$$\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta \le$$

$$\le \Big(\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{p([\log_2 m_n])}\Big)^{\beta/p([\log_2 m_n])} \cdot (m_{n+1}-m_n)^{1-\beta/p([\log_2 m_n])} \le$$

$$\le c \cdot m_n^{-\beta/2}\Big(\mathrm{V}\Big(f, p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}\Big)\Big)^{\beta} \cdot m_n^{1-\frac{\beta}{p([\log_2 m_n])}} \le$$

$$\leq \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}}. \tag{1.8}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}|a_m(f)|^\beta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}}|a_m(f)|^\beta =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}}|a_m(f)|^\beta + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}}|a_m(f)|^\beta \leq$$

$$\leq c + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} < \infty.$$

Теорема 1.3.1 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.2. Пусть $p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}$, $\beta \in (2/3, 2)$ и

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}}.$$

Покажем, что f_0 является искомой функцией. Из Леммы 1.3.5 следует, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}\right).$$

Обозначим через E_n' множество тех целых чисел r из $[0, m_n - 1]$, для которых

$$\left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right| \geq \frac{B}{2}\, m_n^{-(1/2+1/p([\log_2 m_n]))},$$

через E_n'' – остальные целые r из $[0, m_n - 1]$. Используя (1.6) будем иметь:

$$\sum_{r\in E_n'}\left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right| \leq$$

$$\leq c\cdot m_n^{1/2}\sum_{r\in E_n'}\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1}\int\limits_{\frac{r}{m_n}+\frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{k}{m_{n+1}}}\left|f(t) - f\left(t+\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right| dt \leq$$

$$\leq c\cdot m_n^{1/2}\sum_{r\in E'_n}\int\limits_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}}\left|f(t)-f\Big(t+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|dt=$$

$$=c\cdot m_n^{1/2}\sum_{r\in E'_n}\int\limits_0^{\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}}\left|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big)-f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|dt\leq$$

$$\leq c\cdot m_n^{1/2}\Big(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\times$$

$$\times\sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]}\sum_{r\in E'_n}\left|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big)-f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|\leq$$

$$\leq c\cdot m_n^{1/2}\frac{p_{n+1}-1}{m_{n+1}}\sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]}\Bigg(\sum_{r\in E'_n}\left|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big)-\right.$$

$$\left.-f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|^{p([\log_2 m_n])}\Bigg)^{1/p([\log_2 m_n])}\times$$

$$\times|E'_n|^{1-1/p([\log_2 m_n])}\leq c\,\frac{|E'_n|^{1-1/p([\log_2 m_n])}}{m_n^{1/2}}.$$

Из Леммы 1.3.1 имеем:

$$B\,\frac{m_n^{1/2}}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])}}\leq$$

$$\leq\sum_{r=0}^{m_n-1}\left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right|\leq\sum_{r\in E'_n}\left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right|+\sum_{r\in E''_n}\left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right|\leq$$

$$\leq c\,\frac{|E'_n|^{1-1/p([\log_2 m_n])}}{m_n^{1/2}}+\frac{B}{2}\,m_n^{-(1/2+1/p([\log_2 m_n]))}\cdot|E''_n|\leq$$

$$\leq c\,\frac{|E'_n|^{1-1/p([\log_2 m_n])}}{m_n^{1/2}}+\frac{B}{2}\,m_n^{1/2-1/p([\log_2 m_n])};$$

$$c\,\frac{|E'_n|^{1-1/p([\log_2 m_n])}}{m_n^{1/2}}\geq\frac{B}{2}\,m_n^{1/2-1/p([\log_2 m_n])};$$

$$|E'_n|\geq cm_n. \tag{1.9}$$

Из (1.9) будем иметь:

$$\sum_{r=1}^{m_n-1} \left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right|^\beta \geq \sum_{r\in E_n'} \left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right|^\beta \geq$$
$$\geq \left(\frac{B}{2}\,\frac{1}{m_n^{1/2+1/p([\log_2 m_n])}}\right)^\beta \cdot |E_n'| \geq$$
$$\geq \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}}\,. \tag{1.10}$$

В заключении, из условии теоремы и из (1.10) получим:

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f_0)|^\beta = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)|^\beta \geq$$
$$\geq c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} = \infty.$$

Теорема 1.3.2 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.3. Используя (1.7) при $p = 1$ и то, что $\sup\limits_n p_n \leq N$, будем иметь:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^\alpha |a_m(f)| =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^\alpha |a_m(f)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^\alpha \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)| \leq$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^\alpha \cdot c \cdot m_n^{1/2}(p_{n+1}-1)\times$$
$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1}\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_n}+\frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{k}{m_{n+1}}} \left|f(t) - f\left(t+\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right| dt \leq$$
$$\leq c\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^\alpha \cdot m_n^{1/2}(p_{n+1}-1)\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int\limits_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt =$$

$$= c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} \cdot m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \times$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int\limits_{0}^{\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| dt \le$$

$$\le c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} \cdot m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \left(\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}} \right) \times$$

$$\times \sup_{t \in [0, \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}]} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right| \le$$

$$\le c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} \cdot m_n^{1/2} (p_{n+1} - 1) \frac{p_{n+1} - 1}{m_{n+1}} \times$$

$$\times \sup_{t \in [0, \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}]} \left(\sum_{r=0}^{m_n-1} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right) \right|^{p([\log_2 m_{n+1}])} \right)^{1/p([\log_2 m_{n+1}])} \cdot m_n^{1-1/p([\log_2 m_{n+1}])} \le$$

$$\le c \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha+1/2-1+1-1/p([\log_2 m_{n+1}])} \cdot \mathrm{V}\left(f, p(n) \uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right) \le$$

$$\le c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])-1/2-\alpha}} < \infty.$$

Теорема 1.3.3 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.4. Пусть

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}}.$$

Из Леммы 1.3.5 вытекает, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(f, p(n)\uparrow \frac{2}{1+2\alpha}\right).$$

Из условии теоремы и Леммы 1.3.1 получим:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{\alpha}|a_m(f_0)| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha}|a_m(f_0)| \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)| \geq B\sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha}\frac{m^{1/2}}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])}} \geq$$

$$\geq B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m_n^{1/p([\log_2 m_n])-\alpha-1/2}} = \infty.$$

Теорема 1.3.4 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.5. Из (1.8) и условии теоремы получим:

$$\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha}|a_m(f)|^{\beta} \leq$$

$$\leq m_{n+1}^{\alpha}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{\beta} \leq$$

$$\leq m_{n+1}^{\alpha}\frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} \leq \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1-\alpha}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha}|a_m(f)|^{\beta} \leq$$

$$\leq c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1-\alpha}} < \infty.$$

Теорема 1.3.5 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.6. Пусть

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p([\log_2 m_k])}}.$$

Используя Лемму 1.3.5, устанавливаем, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(f, p(n)\uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}\right).$$

Из (1.10) и условии теоремы будем иметь:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{\alpha}|a_m(f_0)|^{\beta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha}|a_m(f_0)|^{\beta} \geq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)|^{\beta} \geq \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1}} \geq$$

$$\leq c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p([\log_2 m_n]))-1-\alpha}} = \infty.$$

Теорема 1.3.6 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.7. Используя Лемму 1.3.4, (1.7) и то, что $\sup\limits_n p_n \leq N$, будем иметь:

$$\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{p(\tau(m_n))} =$$

$$= \sum_{s=1}^{p_{n+1}-1} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left|a_{nr}^{(s)}(f)\right|^{p(\tau(m_n))} \leq$$

$$\leq c \cdot m_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1)\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_n}+\frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{k}{m_{n+1}}} \left|f(t) - f\left(t+\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right|^{p(\tau(m_n))} dt \leq$$

$$\leq c \cdot m_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1)\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int\limits_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}} \left|f(t) - f\Big(t+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|^{p(\tau(m_n))} dt =$$

$$= c \cdot m_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1)\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int\limits_0^{\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}} \left|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big) - f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|^{p(\tau(m_n))} dt \le$$

$$\le c \cdot m_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1)\Big(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\times$$

$$\times \sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big) - f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right|^{p(\tau(m_n))} \le$$

$$\le c \cdot m_n^{1-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} (p_{n+1}-1)\,\frac{p_{n+1}-1}{m_{n+1}} \left(\mathrm{V}\left(f, p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)\right)^{p(\tau(m_n))} \le$$

$$\le c \sup_n p_n m_n^{-\frac{p(\tau(m_n))}{2}} \cdot \left(\mathrm{V}\left(f, p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)\right)^{p(\tau(m_n))}.$$

Пусть

$$\beta < p(\tau(m_n)) < \frac{2\beta}{2-\beta}, \quad n \ge n_0.$$

Пользуясь неравенством Гёльдера, получим:

$$\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta \le$$

$$\le \Bigg(\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{p(\tau(m_n))}\Bigg)^{\beta/p(\tau(m_n))} \cdot (m_{n+1}-m_n)^{1-\frac{\beta}{p(\tau(m_n))}} \le$$

$$\le c\cdot m_n^{-\frac{\beta}{2}} \cdot \left(\mathrm{V}\left(f, p(n)\uparrow\frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right)\right)^{\beta} \cdot m_n^{1-\frac{\beta}{p(\tau(m_n))}} \le$$

$$\le \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}}; \tag{1.11}$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} |a_m(f)|^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta =$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^\beta \le$$

$$\le c + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} < \infty.$$

Теорема 1.3.7 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.8. Пусть $p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}$, $\beta \in (2/3, 2)$ и

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}}.$$

Покажем, что f_0 является искомой функцией. Из Леммы 1.3.6 следует, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2-\beta}, \varphi\right).$$

Обозначим через E_n' множество тех целых чисел r из $[0, m_n - 1]$, для которых

$$\left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right| \ge \frac{B}{2} m_n^{-(1/2+1/p(\tau(m_n)))},$$

через E_n'' – остальные целые r из $[0, m_n - 1]$. Используя (1.6) будем иметь:

$$\sum_{r \in E_n'} \left|a_{nr}^{(s)}(f_0)\right| \le$$

$$\le c \cdot m_n^{1/2} \sum_{r \in E_n'} \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \int\limits_{\frac{r}{m_n} + \frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{k}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right)\right| dt \le$$

$$\le c \cdot m_n^{1/2} \sum_{r \in E_n'} \int\limits_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}} \left| f(t) - f\left(t + \frac{1}{m_{n+1}}\right)\right| dt \le$$

$$\le c \cdot m_n^{1/2} \sum_{r \in E_n'} \int\limits_{0}^{\frac{1}{m_n} - \frac{1}{m_{n+1}}} \left| f\left(t + \frac{r}{m_n}\right) - f\left(t + \frac{r}{m_n} + \frac{1}{m_{n+1}}\right)\right| dt \le$$

$$\le c\cdot m_n^{1/2}\Big(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\times$$

$$\times\sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]}\sum_{r\in E_n'}\Big|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big)-f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\Big|\le$$

$$\le c\cdot m_n^{1/2}\frac{p_{n+1}-1}{m_{n+1}}\sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]}\Bigg(\sum_{r\in E_n'}\Big|f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big)-$$

$$-f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\Big|^{p(\tau(m_n))}\Bigg)^{1/p(\tau(m_n))}\times$$

$$\times|E_n'|^{1-1/p(\tau(m_n))}\le c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}}.$$

Из Леммы 1.3.1 имеем:

$$B\,\frac{m_n^{1/2}}{m_n^{1/p(\tau(m_n))}}\le$$

$$\le\sum_{r=0}^{m_n-1}\big|a_{nr}^{(s)}(f_0)\big|\le\sum_{r\in E_n'}\big|a_{nr}^{(s)}(f_0)\big|+\sum_{r\in E_n''}\big|a_{nr}^{(s)}(f_0)\big|\le$$

$$\le c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}}+\frac{B}{2}\,m_n^{-(1/2+1/p(\tau(m_n)))}\cdot|E_n''|\le$$

$$\le c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}}+\frac{B}{2}\,m_n^{1/2-1/p(\tau(m_n))};$$

$$c\,\frac{|E_n'|^{1-1/p(\tau(m_n))}}{m_n^{1/2}}\ge\frac{B}{2}\,m_n^{1/2-1/p(\tau(m_n))};$$

$$|E_n'|\ge cm_n. \tag{1.12}$$

Из (1.12) будем иметь:

$$\sum_{r=0}^{m_n-1}\big|a_{nr}^{(s)}(f_0)\big|^{\beta}\ge\sum_{r\in E_n'}\big|a_{nr}^{(s)}(f_0)\big|^{\beta}\ge$$

$$\ge\Big(\frac{B}{2}\,\frac{1}{m_n^{1/2+1/p(\tau(m_n))}}\Big)^{\beta}\cdot|E_n'|\ge$$

$$\geq \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}}. \tag{1.13}$$

Из условии теоремы и из (1.13) получим:

$$\sum_{m=2}^{\infty}|a_m(f_0)|^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}}|a_m(f_0)|^{\beta} \geq$$

$$\geq c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} = \infty.$$

Теорема 1.3.8 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.9. Используя (1.7) при $p=1$ и то, что $\sup_n p_n \leq N$, будем иметь:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha}|a_m(f)| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha}|a_m(f)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha}\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}}|a_m(f)| \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} c\cdot m_n^{1/2}(p_{n+1}-1)\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{m_n-1}\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1}\int\limits_{\frac{r}{m_n}+\frac{k-1}{m_{n+1}}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{k}{m_{n+1}}}\left|f(t)-f\left(t+\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right|dt \leq$$

$$\leq c\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha}\cdot m_n^{1/2}(p_{n+1}-1)\times$$

$$\times\sum_{r=0}^{m_n-1}\int\limits_{\frac{r}{m_n}}^{\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}}\left|f(t)-f\left(t+\frac{1}{m_{n+1}}\right)\right|dt =$$

$$= c\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha}\cdot m_n^{1/2}(p_{n+1}-1)\times$$

$$\times \sum_{r=0}^{m_n-1} \int\limits_0^{\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}} \left| f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big) - f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right| dt \le$$

$$\le c\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} \cdot m_n^{1/2}(p_{n+1}-1)\Big(\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\times$$

$$\times \sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]} \sum_{r=0}^{m_n-1} \left| f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big) - f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\right| \le$$

$$\le c\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha} \cdot m_n^{1/2}(p_{n+1}-1)\,\frac{p_{n+1}-1}{m_{n+1}} \sup_{t\in[0,\frac{1}{m_n}-\frac{1}{m_{n+1}}]} \Bigg(\sum_{r=0}^{m_n-1} \Big| f\Big(t+\frac{r}{m_n}\Big)-$$

$$-f\Big(t+\frac{r}{m_n}+\frac{1}{m_{n+1}}\Big)\Big|^{p(\tau(m_{n+1}))}\Bigg)^{1/p(\tau(m_{n+1}))} \cdot m_n^{1-1/p(\tau(m_{n+1}))} \le$$

$$\le c\sum_{n=0}^{\infty} m_{n+1}^{\alpha+1/2-1+1-1/p(\tau(m_{n+1}))} \cdot \mathrm{V}\Big(f, p(n)\uparrow\frac{2}{1+2\alpha},\varphi\Big) \le$$

$$\le c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} < \infty.$$

Теорема 1.3.9 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.10. Пусть

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}}.$$

Из Леммы 1.3.6 получим, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\Big(p(n)\uparrow\frac{2}{1+2\alpha},\varphi\Big).$$

Из условии теоремы и Леммы 1.3.1 получим:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{\alpha}|a_m(f_0)| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha}|a_m(f_0)| \ge$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)| \geq B \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \frac{m_n^{1/2}}{m_n^{1/p(\tau(m_n))}} \geq$$

$$\leq B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{1/p(\tau(m_n))-1/2-\alpha}} = \infty.$$

Теорема 1.3.10 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.11. Из (1.11) и условии теоремы получим:

$$\sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha} |a_m(f)|^{\beta} \leq m_{n+1}^{\alpha} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f)|^{\beta} \leq$$

$$\leq m_{n+1}^{\alpha} \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} \leq \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}};$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{\alpha} |a_m(f)|^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha} |a_m(f)|^{\beta} \leq$$

$$\leq c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1-\alpha}} < \infty.$$

Теорема 1.3.11 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3.12. Пусть

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{e^{2\pi i m_k x}}{m_k^{1/p(\tau(m_k))}}.$$

Из Леммы 1.3.6 получим, что

$$f_0 \in \mathrm{BV}\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{2+2\alpha-\beta}, \varphi\right).$$

Из (1.13) и условии теоремы будем иметь:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m^{\alpha} |a_m(f_0)|^{\beta} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} m^{\alpha} |a_m(f_0)|^{\beta} \geq \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \sum_{m=m_n+1}^{m_{n+1}} |a_m(f_0)|^{\beta} \geq$$

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha} \frac{c}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1}} \geq$$

$$\geq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n^{\beta(1/2+1/p(\tau(m_n)))-1-\alpha}} =$$

Теорема 1.3.12 доказана.

ГЛАВА II

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ ХААРА

§ 1. Определения и обозначения

Для функций N $(N \geq 1)$ переменных введём следующие обозначения:

$$\Delta_{h_j}(f,t) = f(t_1,\ldots,t_j+h_j,\ldots,t_N) - f(t_1,\ldots,t_j,\ldots,t_N) \ (j=1,\ldots,N),$$

$$\Delta_{h_1,h_2,\ldots,h_N}(f,t) \equiv \Delta_{h_N}\big(\Delta_{h_1,h_2,\ldots,h_{N-1}},t\big).$$

Пусть $f \in L_p([0,1]^N)$. Обозначим через

$$\omega_{1,\ldots,N}(\delta,f)_p = \sup_{|h_i|\leq\delta}\Big(\int\limits_{[0,1]^N}\big|\Delta_{h_1,h_2,\ldots,h_N}(f,t)\big|^p\,dt\Big)^{1/p}$$

$$(i=1,\ldots,N),\ \ 0<\delta<1$$

её интегральный модуль непрерывности, а через

$$\omega_i(\delta,f)_p = \sup_{|h_i|\leq\delta}\Big(\int\limits_{[0,1]^N}\big|\Delta_{h_i}(f,t)\big|^p\,dt\Big)^{1/p}\ \ (i=1,\ldots,N),\ \ 0<\delta<1$$

– её частный интегральный модуль непрерывности. Хорошо известно, что

$$\omega_{1,\ldots,N} \leq 2^{N-1}\sqrt[N]{\omega_1}\cdots\sqrt[N]{\omega_N}. \qquad (2.1)$$

Пусть $\vec{x}$ элемент Евклидова пространства $\mathbb{R}^N$ и $\vec{m}$ элемент этого пространства с неотрицательными целыми координатами.

Пусть

$$\chi_{\vec{m}}(\vec{x}) \equiv \prod_{i=1}^{N} \chi_{m_i}(x_i),$$

$x_i \in [0,1]$ $(i = 1,\dots,N)$, $N \geq 2$ – кратная система Хаара на $[0,1]^N$ и $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\vec{m} = (m_1,\dots,m_N)$.

Обозначим через $C_{\vec{m}}(f)$ кратный коэффициент Фурье–Хаара для функции $f \in L([0,1]^N)$, т.е.

$$C_{\vec{m}}(f) = \int\limits_{[0,1]^N} f \cdot \chi_{\vec{m}}\, d\vec{x}.$$

Пусть φ_i $(i = 1,\dots,N)$ возрастающие функции, определённые на множестве натуральных чисел. Кроме того, $\varphi_i(1) \geq 2$ и

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_i(n) = +\infty.$$

Обозначим через

$$\tau_i(r) = \min\left\{m : \ \ \varphi_i(m) \geq r\right\}, \ \ r \geq 2 \ \ (i = 1,\dots,N).$$

§ 2. Об абсолютной сходимости рядов коэффициентов Фурье по кратной системе Хаара функций из класса PBV_p $(p \geq 1)$

Формулировка основных результатов.

Теорема 2.2.1. *Пусть $f \in \mathrm{PBV}_p$, $p \geq 1$ на $[0,1]^N$. Если $\beta > \frac{2pN}{2+pN}$, тогда*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 2.2.2. *Пусть* $f \in \mathrm{PBV}_p$, $p \geq 1$ *на* $[0,1]^N$. *Если* $\alpha < \frac{1}{pN} - \frac{1}{2}$, *тогда*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left| C_{n_1,\ldots,n_N}(f) \right| < \infty.$$

Теорема 2.2.3. *Пусть* $f \in \mathrm{PBV}_p$, $p \geq 1$ *на* $[0,1]^N$. *Если* $\beta > 0$ *и* $\alpha + 1 < \beta(\frac{1}{pN} + \frac{1}{2})$, *тогда*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left| C_{n_1,\ldots,n_N}(f) \right|^{\beta} < \infty.$$

Вспомогательные утверждения.

Повторяя те рассуждения, которые были изложены в работе Б. Голубова [18], легко доказывается следующая

Лемма 2.2.1. *Если* $f \in \mathrm{PBV}_p$, $p \geq 1$ *на* $[0,1]^N$, *тогда*

$$\omega_i(\delta, f)_p \leq 3^{1/p} \cdot \delta^{1/p} \cdot \mathrm{V}_i(f)_p \quad (i = 1, \ldots, N), \quad 0 < \delta < 1,$$

где $\mathrm{V}_i(f)_p$ *– частная* p*-вариация функции.*

Доказательства основных результатов.

Доказательство Теоремы 2.2.1.

$$\sum_{q_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{q_N=0}^{\infty} \left| C_{q_1,\ldots,q_N}(f) \right|^{\beta} =$$

$$= \sum_{q_1=0}^{\infty} \left| C_{q_1,0,\ldots,0}(f) \right|^{\beta} + \sum_{q_2=1}^{\infty} \left| C_{0,q_2,0,\ldots,0}(f) \right|^{\beta} + \cdots + \sum_{q_N=1}^{\infty} \left| C_{0,\ldots,q_N}(f) \right|^{\beta} +$$

$$+ \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \left| C_{q_1,q_2,0,\ldots,0}(f) \right|^{\beta} + \cdots + \sum_{q_{N-1}=1}^{\infty} \sum_{q_N=1}^{\infty} \left| C_{0,\ldots,q_{N-1},q_N}(f) \right|^{\beta} + \cdots +$$

$$+\sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=1}^{\infty}\left|C_{q_1,\ldots,q_N}(f)\right|^{\beta}, \tag{2.2}$$

где $q_k = 2^{n_k} + i_k$, $i_k = 1,\ldots,2^{n_k}$; $n_k = 0,1,\ldots$; $k = 1,\ldots,N$.

Сначала исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{q_1=0}^{\infty}|C_{q_1,0,\ldots,0}(f)|^{\beta}$.

Из неравенства Гёльдера и Леммы 2.2.1 будем иметь:

$$\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\ldots,0}(f)\right|^p =$$

$$= 2^{\frac{pn_1}{2}}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\Bigg|\int\limits_{[0,1]^{N-1}}\Bigg(\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}}\Big[f(x_1,\ldots,x_N)-$$

$$-f\Big(x_1+\frac{1}{2^{n_1+1}},x_2,\ldots,x_N\Big)\Big]\,dx_1\Bigg)\,dx_2\cdots dx_N\Bigg|^p \le$$

$$\le 2^{\frac{pn_1}{2}}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\Bigg[\int\limits_{[0,1]^{N-1}}\Bigg(\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}(f,x)\right|dx_1\Bigg)\,dx_2\cdots dx_N\Bigg]^p \le$$

$$\le 2^{\frac{pn_1}{2}}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\Bigg[\int\limits_{[0,1]^{N-1}}\Bigg(\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}(f,x)\right|^p dx_1\Bigg)\,dx_2\cdots dx_N\Bigg)^{1/p}\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{[0,1]^{N-1}}\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}}1\,dx_1\cdots dx_N\Bigg)^{1-1/p}\Bigg]^p \le$$

$$\le 2^{\frac{pn_1}{2}}\cdot\frac{1}{2^{n_1(p-1)}}\int\limits_{[0,1]^{N-1}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}(f,x)\right|^p dx_1\cdots dx_N \le$$

$$\le 2^{n_1(1-\frac{p}{2})}\omega_1^p\Big(\frac{1}{2^{n_1+1}},f\Big)_p \le 2^{n_1(1-\frac{p}{2})}\cdot 3\cdot\frac{1}{2^{n_1}}\ \mathrm{V}_1^p(f)_p \le$$

$$\le c\cdot 2^{-\frac{n_1 p}{2}}\ \mathrm{V}_1^p(f)_p.$$

Пусть $\frac{2pN}{2+pN} < \beta < p$. Применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\dots,0}(f)\right|^\beta \le \left(\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\dots,0}(f)\right|^p\right)^{\beta/p} \cdot 2^{n_1(1-\beta/p)} \le$$

$$\le 2^{n_1(1-\beta/p)} \cdot \left(c \cdot 2^{-\frac{n_1 p}{2}} \mathrm{V}_1^p(f)_p\right)^{\beta/p} \le$$

$$\le c \cdot 2^{n_1(1-\beta/p)} \cdot 2^{-n_1\beta/2} \le c \cdot 2^{n_1[1-\frac{\beta}{p}-\frac{\beta}{2}]}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует

$$\sum_{q_1=2}^{\infty} \left|C_{q_1,0,\dots,0}(f)\right|^\beta =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\dots,0}(f)\right|^\beta \le c \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1[1-\frac{\beta}{p}-\frac{\beta}{2}]}.$$

Так как, по условию теоремы $1-\frac{\beta}{p}-\frac{\beta}{2} < 0$, то ряд сходится при $\beta > \frac{2pN}{2+pN}$.

Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum\limits_{q_N=1}^{\infty} |C_{q_1,\dots,q_N}(f)|^\beta$.

Применяя неравенство Гёльдера и (2.1) получим:

$$\sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1} \cdots \sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1} \Bigg| \int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1}}}^{\frac{i_1+1}{2^{n_1}}} \cdots \int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N}}}^{\frac{i_N+1}{2^{n_N}}} f(x_1,\dots,x_N) \times$$

$$\times \chi^{(i_1)}_{n_1}(x_1)\chi^{(i_2)}_{n_2}(x_2)\cdots\chi^{(i_N)}_{n_N}(x_N)\,dx_1\cdots dx_N\Bigg|^p \le 2^{p\,\frac{n_1+n_2+\dots+n_N}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1} \cdots \sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1} \left[\int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1+1}{2^{n_1+1}}} \cdots \int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N+1}}}^{\frac{2i_N+1}{2^{n_N+1}}} \left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\dots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right| dx_1\cdots dx_N\right]^p \le$$

$$\le 2^{p\,\frac{n_1+\dots+n_N}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1} \cdots \sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1} \left[\left(\int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1+1}{2^{n_1+1}}} \cdots \int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N+1}}}^{\frac{2i_N+1}{2^{n_N+1}}} \left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\dots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right|^p dx_1\cdots dx_N\right)^{1/p} \times\right.$$

$$\times\left(\int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1+1}{2^{n_1+1}}}\cdots\int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N+1}}}^{\frac{2i_N+1}{2^{n_N+1}}} 1\,dx_1\cdots dx_N\right)^{1-1/p}\Bigg]^p \le$$

$$\le 2^{p\frac{n_1+\ +n_N}{2}}\frac{1}{2^{(n_1+\cdots+n_N)(p-1)}}\int\limits_{[0,1]^N}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\ldots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right|^p dx_1\cdots dx_N \le$$

$$\le 2^{(n_1+n_2+\cdots+n_N)(1-\frac{p}{2})}\omega^p_{1,2,\ldots,N}\left(\frac{1}{2^{n_1+1}},\ldots,\frac{1}{2^{n_N+1}},f\right)_p \le$$

$$\le 2^{(n_1+\cdots+n_N)(1-\frac{p}{2})}\cdot 2^{(N-1)p}\omega_1^{p/N}\left(\frac{1}{2^{n_1+1}},f\right)_p\cdots\omega_N^{p/N}\left(\frac{1}{2^{n_N+1}},f\right)_p \le$$

$$\le 2^{(n_1+\cdots+n_N)(1-\frac{p}{2})}\cdot 2^{(N-1)p}\frac{1}{2^{\frac{n_1+\cdots+n_N}{N}}} \le c\cdot 2^{(n_1+\cdots+n_N)(1-\frac{p}{2}-\frac{1}{N})}. \qquad (2.4)$$

Пусть $\frac{2pN}{2+pN} < \beta < p$. Применяя неравенство Гёльдера из (2.4) будем иметь:

$$\sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1}\cdots\sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1}\left|C^{(i_1,\ldots,i_N)}_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^\beta \le$$

$$\le c\cdot 2^{(n_1+\cdots+n_N)(1-\frac{p}{2}-\frac{1}{N})\frac{\beta}{p}}\cdot 2^{(n_1+\cdots+n_N)(1-\frac{\beta}{p})} =$$

$$= c\cdot 2^{(n_1+\cdots+n_N)[\frac{\beta}{p}-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}+1-\frac{\beta}{p}]} = c\cdot 2^{n_1[1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}\ldots 2^{n_N[1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}. \qquad (2.5)$$

В заключении, из (2.5) получим:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=1}^{\infty}\left|C_{q_1,\ldots,q_N}(f)\right|^\beta = \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1}\cdots\sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1}\left|C^{(i_1,\ldots,i_N)}_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^\beta \le$$

$$\le \sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1[1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}\sum_{n_2=0}^{\infty}2^{n_2[1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}\ldots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{n_N[1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}.$$

Так как, по условию теоремы $1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN} < 0$, поэтому ряд сходится при $\beta > \frac{2pN}{2+pN}$.

Сходимость остальных членов ряда (2.2) доказывается аналогично.

Теорема 2.2.1 доказана.

Доказательство Теоремы 2.2.2.

$$\sum_{q_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=0}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_n+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,\ldots,q_N}(f)\right| =$$

$$= \sum_{q_1=0}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,0,\ldots,0}(f)\right| + \sum_{q_2=1}^{\infty}(q_2+1)^{\alpha}\left|C_{0,q_2,0,\ldots,0}(f)\right| + \cdots +$$

$$+ \sum_{q_N=1}^{\infty}(q_N+1)^{\alpha}\left|C_{0,\ldots,q_N}(f)\right| +$$

$$+ \sum_{q_1=1}^{\infty}\sum_{q_2=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}(q_2+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,q_2,0,\ldots,0}(f)\right| + \cdots +$$

$$+ \sum_{q_{N-1}=1}^{\infty}\sum_{q_N=1}^{\infty}(q_{N-1}+1)^{\alpha}(q_N+1)^{\alpha}\left|C_{0,\ldots,q_{N-1},q_N}(f)\right| + \cdots +$$

$$+ \sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_N+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,\ldots,q_N}(f)\right|. \qquad (2.6)$$

Сначала исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{q_1=0}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}|C_{q_1,0,\ldots,0}(f)|$.
Из (2.3) для $\beta = 1$ получим:

$$\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}(2^{n_1}+i_1+1)^{\alpha}\left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\ldots,0}(f)\right| \le c\cdot 2^{n_1\alpha}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\ldots,0}(f)\right| \le$$

$$\le c\cdot 2^{n_1\alpha}\cdot 2^{n_1[\frac{1}{2}-\frac{1}{p}]} = c\cdot 2^{n_1[\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}]}. \qquad (2.7)$$

Из (2.7) будем иметь:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,0,\ldots,0}(f)\right| = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}(2^{n_1}+i_1+1)^{\alpha}\left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\ldots,0}(f)\right| \le$$

$$\le c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1\alpha}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\ldots,0}(f)\right| \le c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1[\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}]}.$$

Так как, по условию теоремы $\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}<0$, то этот ряд сходится при $\alpha<\frac{1}{pN}-\frac{1}{2}$.

Далее, применяя (2.5) для $\beta = 1$, получим:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_N=1}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} \cdots (q_N+1)^{\alpha} \big|C_{q_1,\dots,q_N}(f)\big| \le$$

$$\le \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} 2^{(n_1+\cdots+n_N)\alpha} \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{2^{n_N}} \big|C_{n_1,\dots,n_N}^{(i_1,\dots,i_N)}(f)\big| \le$$

$$\le c \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1[\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{pN}]} \sum_{n_2=0}^{\infty} 2^{n_2[\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{pN}]} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} 2^{n_N[\frac{1}{2}+\alpha-\frac{1}{pN}]}.$$

Так как, по условию теоремы $\frac{1}{2} + \alpha - \frac{1}{pN} < 0$, поэтому этот ряд сходится при $\alpha < \frac{1}{pN} - \frac{1}{2}$.

Сходимость остальных членов ряда (2.6) доказывается аналогично.

Теорема 2.2.2 доказана.

Доказательство Теоремы 2.2.3.

$$\sum_{q_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{q_N=0}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} \cdots (q_N+1)^{\alpha} \big|C_{q_1,\dots,q_N}(f)\big|^{\beta} =$$

$$= \sum_{q_1=0}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} \big|C_{q_1,0,\dots,0}(f)\big|^{\beta} + \sum_{q_2=1}^{\infty} (q_2+1)^{\alpha} \big|C_{0,q_2,0,\dots,0}(f)\big|^{\beta} + \cdots +$$

$$\sum_{q_N=1}^{\infty} (q_N+1)^{\alpha} \big|C_{0,\dots,q_N}(f)\big|^{\beta} +$$

$$+ \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} (q_2+1)^{\alpha} \big|C_{q_1,q_2,0,\dots,0}(f)\big|^{\beta} + \cdots +$$

$$+ \sum_{q_{N-1}=1}^{\infty} \sum_{q_N=1}^{\infty} (q_{N-1}+1)^{\alpha} (q_N+1)^{\alpha} \big|C_{0,\dots,q_{N-1},q_N}(f)\big|^{\beta} + \cdots +$$

$$+ \sum_{q_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{q_N=1}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} \cdots (q_N+1)^{\alpha} \big|C_{q_1,\dots,q_N}(f)\big|^{\beta}. \qquad (2.8)$$

Исследуем ряд $\sum\limits_{q_1=0}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} |C_{q_1,0,\dots,0}(f)|^{\beta}$.

Из (2.3) получим:

$$\sum_{q_1=0}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,0,\ldots,0}(f)\right|^{\beta} \le c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1\alpha}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\left|C_{n_1,0,\ldots,0}^{(i_1)}(f)\right|^{\beta} \le$$

$$\le c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1[\alpha+1-\frac{\beta}{p}-\frac{\beta}{2}]}.$$

Так как, по условию теоремы $\alpha+1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}<0$, поэтому этот ряд сходится, когда $\alpha+1<\beta(\frac{1}{pN}+\frac{1}{2})$.

Далее, из (2.5) будем иметь:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_N+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,\ldots,q_N}(f)\right|^{\beta} \le$$

$$\le c\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_1+\cdots+n_N)\alpha}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\cdots\sum_{i_N=1}^{2^{n_N}}\left|C_{n_1,\ldots,n_N}^{(i_1,\ldots,i_N)}(f)\right|^{\beta} \le$$

$$\le c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1[\alpha+1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}\sum_{n_2=0}^{\infty}2^{n_2[\alpha+1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}\ldots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{n_N[\alpha+1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}]}.$$

Так как, по условию теоремы $\alpha+1-\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{pN}<0$, этот ряд сходится при $\alpha+1<\beta(\frac{1}{2}+\frac{1}{pN})$.

Сходимость остальных членов ряда (2.8) доказывается аналогично.

Теорема 2.2.3 доказана.

§ 3. Об абсолютной сходимости рядов коэффициентов Фурье по кратной системе Хаара функций из классов $\bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i(p_i(n) \uparrow p, \varphi_i)$

Формулировка основных результатов.

Теорема 2.3.1. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}, \varphi_i\right)$, *где* $\beta \in (\frac{2N}{2+N}, 2)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(\tau_i(2^n)))-1]}} < \infty \quad (i = 1, \ldots, N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.1 (при $N = 1$ см. [52]). *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}, \varphi\right)$, *где* $\beta \in (\frac{2N}{2+N}, 2)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(\tau(2^n)))-1]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.2. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}\right)$, $\beta \in (\frac{2N}{2+N}, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(n))-1]}} < \infty \quad (i = 1, \ldots, N),$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,n_2\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.3 (при $N = 1$ см. [14]). *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\big(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}\big)$, *где* $\beta \in \left(\frac{2N}{2+N}, 2\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(n))-1]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,n_2\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}, \varphi_i\right)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np_i(\tau_i(2^n))-1/2-\alpha]}} < \infty \quad (i = 1, \dots, N),$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i + 1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right| < \infty.$$

Следствие 2.3.4 (при $N = 1$ см. [52]). *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}, \varphi\right)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np(\tau(2^n))-1/2-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i + 1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right| < \infty.$$

Следствие 2.3.5. *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\big(p_i(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}\big)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np_i(n)-1/2-\alpha]}} < \infty \quad (i = 1, \dots, N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\big|C_{n_1,n_2\dots,n_N}(f)\big|<\infty.$$

Следствие 2.3.6 (при $N=1$ см. [14]). *Пусть* $f\in\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\big(p(n)\uparrow\frac{2}{N(2\alpha+1)}\big)$, *где* $\alpha\in\left(-\frac{1}{2},\frac{2-N}{2N}\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[1/Np(n)-1/2-\alpha]}}<\infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\big|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\big|<\infty.$$

Теорема 2.3.3. *Пусть* $f\in\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\left(p_i(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)},\varphi_i\right)$, *где* $\beta>0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N}<\beta<2+2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(\tau_i(2^n)))-1-\alpha]}}<\infty\quad(i=1,\dots,N),$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\big|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\big|^{\beta}<\infty.$$

Следствие 2.3.7 (при $N=1$ см. [55]). *Пусть* $f\in\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\left(p(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)},\varphi\right)$, *где* $\beta>0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N}<\beta<2+2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(\tau(2^n)))-1-\alpha]}}<\infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\big|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\big|^{\beta}<\infty.$$

Следствие 2.3.8. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2+2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(n))-1-\alpha]}} < \infty \quad (i = 1, \ldots, N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.9 (при $N = 1$ см. [55]). *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2+2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(n))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Доказательства основных результатов.

Доказательство Теоремы 2.3.1. Сначала исследуем ряд

$$\sum_{q_1=0}^{\infty} |C_{q_1,0,\ldots,0}(f)|^{\beta}.$$

Так как (см. [2])

$$\omega_i\left(\frac{1}{2^{n_i+1}}, f\right)_{\beta} =$$

$$= O\left(\mathrm{V}_i(f, p(n) \uparrow p, \varphi_i) \cdot \frac{1}{2^{(n_i+1)/p(\tau_i(2^{n_i+1}))}} \right) \quad (i = 1, \ldots, N), \qquad (2.8')$$

где $\beta < p(\tau_i(2^{n_i+1}))$ $\qquad (i = 1, \ldots, N)$, Из неравенства Гёльдера и условия теоремы получим:

$$\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left| C_{n_1,0,\ldots,0}^{(i_1)}(f) \right|^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} =$$

$$= 2^{\frac{n_1 p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}{2}} \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \Bigg| \int\limits_{[0,1]^{N-1}} \Bigg(\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}} \Big[f\Big(x_1 + \frac{1}{2^{n_1+1}}, x_2, \ldots, x_N\Big) -$$

$$-f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \Big] \, dx_1 \Bigg) dx_2 \cdots dx_N \Bigg|^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} \le$$

$$\le 2^{\frac{n_1 p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \Bigg[\int\limits_{[0,1]^{N-1}} \Bigg(\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}} \left| \Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}(f, x) \right| dx_1 \Bigg) dx_2 \cdots dx_N \Bigg]^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} \le$$

$$\le 2^{\frac{n_1 p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \Bigg[\Bigg(\int\limits_{[0,1]^{N-1}} \Bigg(\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}} \left| \Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}(f, x) \right|^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} dx_1 \Bigg) dx_2 \cdots dx_N \Bigg)^{1/p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{[0,1]^{N-1}} \int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}} 1 \, dx_1 \cdots dx_N \Bigg)^{1-1/p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} \Bigg]^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} \le$$

$$\le 2^{\frac{n_1 p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}{2}} \cdot \frac{1}{2^{n_1+1}} \cdot \frac{1}{2^{(n_1+1)(p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))-1)}} \times$$

$$\times \left(\mathrm{V}_1 \left(f, p_1(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}, \varphi_1 \right) \right)^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} \le$$

$$\le \frac{1}{2^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n_1 p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}{2}}} \times$$

$$\times \left(\mathrm{V}_1 \left(f, p_1(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}, \varphi_1 \right) \right)^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}.$$

Пусть $\beta < p_1(\tau_1(2^{n_1+1})) < \frac{2\beta}{N(2-\beta)}$, $n_1 \geq n_0$. Применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\dots,0}(f)\right|^\beta \leq$$
$$\leq \left(\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\dots,0}(f)\right|^{p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))}\right)^{\beta/p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))} 2^{n_1(1-\beta/p_1(\tau_1(2^{n_1+1})))} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2^\beta}\cdot\frac{1}{2^{\frac{n_1\beta}{2}}}\cdot\left(\mathrm{V}_1\left(f, p_1(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2-\beta)}, \varphi_1\right)\right)^\beta \cdot 2^{n_1(1-\beta/p_1(\tau_1(2^{n_1+1})))} \leq$$
$$\leq \frac{c}{2^{(n_1+1)[\beta(1/2+1/p_1(\tau_1(2^{n_1+1})))-1]}}. \tag{2.9}$$

Из (2.9) и условии теоремы будем иметь:

$$\sum_{q_1=2}^{\infty} |C_{q_1,0,\dots,0}(f)|^\beta =$$
$$= \sum_{n_1=0}^{n_0}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\dots,0}(f)\right|^\beta + \sum_{n_1=n_0+1}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\dots,0}(f)\right|^\beta \leq$$
$$\leq c + \sum_{n_1=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n_1+1)[\beta(1/2+1/p_1(\tau_1(2^{n_1+1})))-1]}} < \infty. \tag{2.10}$$

Далее, исследуем ряд $\sum\limits_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum\limits_{q_N=1}^{\infty} |C_{q_1,\dots,q_N}(f)|^\beta$. Из неравенства Гёльдера и (2.1) будем иметь:

$$\sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1}\cdots\sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1}\left|\int_{\frac{i_1}{2^{n_1}}}^{\frac{i_1+1}{2^{n_1}}}\cdots\int_{\frac{i_N}{2^{n_N}}}^{\frac{i_N+1}{2^{n_N}}} f(x_1, x_2, \dots, x_N)\times\right.$$
$$\left.\times\chi^{(i_1)}_{n_1}(x_1)\cdots\chi^{(i_N)}_{n_N}(x_N)\,dx_1\cdots dx_N\right|^\beta \leq 2^{\beta\frac{n_1+\dots+n_N}{2}}\times$$

$$\times \sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1} \cdots \sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1} \left[\int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1+1}{2^{n_1+1}}} \cdots \int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N+1}}}^{\frac{2i_N+1}{2^{n_N+1}}} \left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\ldots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right| dx_1 \cdots dx_N \right]^\beta \le$$

$$\le 2^{\beta \frac{n_1+\cdots+n_N}{2}} \times$$

$$\times \sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1} \cdots \sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1} \left[\left(\int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1+1}{2^{n_1+1}}} \cdots \int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N+1}}}^{\frac{2i_N+1}{2^{n_N+1}}} \left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\ldots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right|^\beta dx_1 \cdots dx_N \right)^{1/\beta} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1+1}{2^{n_1+1}}} \cdots \int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N+1}}}^{\frac{2i_N+1}{2^{n_N+1}}} 1\, dx_1 \cdots dx_N \right)^{1-1/\beta} \right]^\beta \le$$

$$\le 2^{\beta \frac{n_1+\ +n_N}{2}} \cdot \frac{1}{2^{(n_1+\cdots+n_N)(\beta-1)}} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,1]^N} \left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\ldots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right|^\beta dx_1 \cdots dx_N \le$$

$$\le 2^{(n_1+\cdots+n_N)(1-\beta/2)} \cdot \omega^\beta_{1,2,\ldots,N}\left(\frac{1}{2^{n_1+1}},\ldots,\frac{1}{2^{n_N+1}}, f\right)_\beta \le$$

$$\le c \cdot 2^{(n_1+\cdots+n_N)(1-\beta/2)} \cdot \omega_1^{\beta/N}\left(\frac{1}{2^{n_1+1}}, f\right)_\beta \cdots \omega_N^{\beta/N}\left(\frac{1}{2^{n_N+1}}, f\right)_\beta.$$

Пусть $\beta < p_1(\tau_1(2^{n_1+1})) < \frac{2\beta}{N(2-\beta)}, \ldots, \beta < p_N(\tau_N(2^{n_N+1})) < \frac{2\beta}{N(2-\beta)}$, когда $\min\{n_1, \ldots, n_N\} \ge n_0$. Из (2.8′) получим:

$$\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{2^{n_N}} \left|C_{n_1,\ldots,n_N}^{(i_1,\ldots,i_N)}(f)\right|^\beta \le$$

$$\le c \cdot 2^{(n_1+1)[1-\beta/2-\beta/Np_1(\tau_1(2^{n_1+1}))]} \cdots 2^{(n_N+1)[1-\beta/2-\beta/Np_N(\tau_N(2^{n_N+1}))]}. \quad (2.11)$$

Из (2.11) и условии теоремы будем иметь:

$$\sum_{q_1=2}^{\infty} \cdots \sum_{q_N=2}^{\infty} \left|C_{q_1,\ldots,q_N}(f)\right|^\beta =$$

$$= \sum_{n_1=0}^{n_0} \cdots \sum_{n_N=0}^{n_0} \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{2^{n_N}} \left| C_{n_1,\ldots,n_N}^{(i_1,\ldots,i_N)}(f) \right|^{\beta} +$$

$$+ \sum_{n_1=n_0+1}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=n_0+1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \cdots \sum_{i_N=1}^{2^{n_N}} \left| C_{n_1,\ldots,n_N}^{(i_1,\ldots,i_N)}(f) \right|^{\beta} \le$$

$$\le c + \sum_{n_1=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n_1+1)[\beta(1/2+1/Np_1(\tau_1(2^{n_1+1})))-1]}} \times \cdots \times$$

$$\times \sum_{n_N=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n_N+1)[\beta(1/2+1/Np_N(\tau_N(2^{n_N+1})))-1]}} < \infty. \tag{2.12}$$

Доказав аналогично сходимость остальных членов ряда

$$\sum_{q_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{q_N=0}^{\infty} \left| C_{q_1,\ldots,q_N}(f) \right|^{\beta},$$

из (2.10) и (2.12) получим справедливость теоремы.

Теорема 2.3.1 доказана.

Доказательство Теоремы 2.3.2. Сначала исследуем ряд

$$\sum_{q_1=0}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} \left| C_{q_1,0,\ldots,0}(f) \right|.$$

Из (2.8′) и условия теоремы получим:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty} (q_1+1)^{\alpha} \left| C_{q_1,0,\ldots,0}(f) \right| \le c \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1\alpha} \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \left| C_{n_1,0,\ldots,0}^{(i_1)}(f) \right| \le$$

$$\le c \sum_{n_1=0}^{\infty} 2^{n_1(\alpha+1/2)} \sum_{i_1=1}^{2^{n_1}} \int\limits_{[0,1]^{N-1}} \left(\int\limits_{\frac{2i_1-2}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1-1}{2^{n_1+1}}} \left| f\Big(x_1 + \frac{1}{2^{n_1+1}}, x_2, \ldots, x_N\Big) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f\Big(x_1, x_2, \ldots, x_N\Big) \right| dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_N \le$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1(\alpha+1/2)}\int\limits_{[0,1]^N}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}}}\right|dx_1\cdots dx_N\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1(\alpha+1/2)}\cdot\omega_1\left(\frac{1}{2^{n_1+1}},f\right)\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=1}^{\infty}2^{n_1(\alpha+1/2)}\cdot \mathrm{V}_1\left(p_1(n)\uparrow\frac{2}{N(2\alpha+1)},\varphi_1\right)\cdot 2^{-n_1/p_1(\tau_1(2^{n_1}))}\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_1[1/p_1(\tau_1(2^{n_1}))-1/2-\alpha]}}<\infty. \tag{2.13}$$

Далее, исследуем ряд

$$\sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_N+1)^{\alpha}|C_{q_1,\dots,q_N}(f)|.$$

Из (2.1), (2.8$'$) и условии теоремы получим:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_N+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,\dots,q_N}(f)\right|\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_N)\alpha}\cdot 2^{\frac{n_1+\dots+n_N}{2}}\times$$

$$\times\sum_{i_1=0}^{2^{n_1}-1}\cdots\sum_{i_N=0}^{2^{n_N}-1}\int\limits_{\frac{2i_1}{2^{n_1+1}}}^{\frac{2i_1+1}{2^{n_1+1}}}\cdots\int\limits_{\frac{2i_N}{2^{n_N+1}}}^{\frac{2i_N+1}{2^{n_N+1}}}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\dots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right|dx_1\cdots dx_N\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_N)(\alpha+1/2)}\int\limits_{[0,1]^N}\left|\Delta_{\frac{1}{2^{n_1+1}},\dots,\frac{1}{2^{n_N+1}}}(f,x)\right|dx_1\cdots dx_N\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_N)(\alpha+1/2)}\cdot\omega_{1,2,\dots,N}\left(\frac{1}{2^{n_1+1}},\dots,\frac{1}{2^{n_N+1}},f\right)\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_N)(\alpha+1/2)}\cdot\omega_1^{1/N}\left(\frac{1}{2^{n_1+1}},f\right)\cdots\omega_N^{1/N}\left(\frac{1}{2^{n_N+1}},f\right)\leq$$

$$\leq c\prod_{i=1}^{N}\left(\mathrm{V}_i\left(p_i(n)\uparrow\frac{2}{N(2\alpha+1)},\varphi_i\right)\right)^{1/N}\times$$
$$\times\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{(n_1+1)[\alpha+1/2-1/Np_1(\tau_1(2^{n_1+1}))]}\times\cdots\times$$
$$\times\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_N+1)[\alpha+1/2-1/Np_N(\tau_N(2^{n_N+1}))]}\leq$$
$$\leq c\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_1[1/Np_1(\tau_1(2^{n_1}))-1/2-\alpha]}}\times\cdots\times$$
$$\times\sum_{n_N=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_N[1/Np_N(\tau_N(2^{n_N}))-1/2-\alpha]}}<\infty. \tag{2.14}$$

Доказав аналогично сходимость остальных членов ряда

$$\sum_{q_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=0}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_N+1)^{\alpha}|C_{q_1,\ldots,q_N}(f)|,$$

из (2.13) и (2.14) получим справедливость теоремы.

Теорема 2.3.2 доказана.

Доказательство Теоремы 2.3.3. Сначала исследуем ряд

$$\sum_{q_1=0}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,0,\ldots,0}(f)\right|^{\beta}.$$

Из (2.9) и условии теоремы получим:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,0,\ldots,0}(f)\right|^{\beta}\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1\alpha}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\left|C^{(i_1)}_{n_1,0,\ldots,0}(f)\right|^{\beta}\leq$$
$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{n_1\alpha}\cdot 2^{(n_1+1)[1-\beta/p_1(\tau_1(2^{n_1+1}))-\beta/2]}\leq$$
$$\leq c\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_1[\beta(1/p_1(\tau_1(2^{n_1}))+1/2)-\alpha-1]}}<\infty. \tag{2.15}$$

Далее, из (2.11) и условии теоремы будем иметь:

$$\sum_{q_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=1}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_N+1)^{\alpha}\left|C_{q_1,\dots,q_N}(f)\right|^{\beta}\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_1+\dots+n_N)\alpha}\sum_{i_1=1}^{2^{n_1}}\cdots\sum_{i_N=1}^{2^{n_N}}\left|C_{n_1,\dots,n_N}^{(i_1,\dots,i_N)}(f)\right|^{\beta}\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=0}^{\infty}2^{(n_1+1)[1-\beta/2-\beta/Np_1(\tau_1(2^{n_1+1}))+\alpha]}\times\dots\times$$

$$\times\sum_{n_N=0}^{\infty}2^{(n_N+1)[1-\beta/2-\beta/Np_N(\tau_N(2^{n_N+1}))+\alpha]}\leq$$

$$\leq c\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_1[\beta(1/2+1/Np_1(\tau_1(2^{n_1})))-1-\alpha]}}\times\dots\times$$

$$\times\sum_{n_N=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n_N[\beta(1/2+1/Np_N(\tau_N(2^{n_N})))-1-\alpha]}}<\infty. \tag{2.16}$$

Доказав аналогично сходимость остальных членов ряда

$$\sum_{q_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{q_N=0}^{\infty}(q_1+1)^{\alpha}\cdots(q_N+1)^{\alpha}|C_{q_1,\dots,q_N}(f)|^{\beta},$$

из (2.15) и (2.16) получим справедливость теоремы.

Теорема 2.3.3 доказана.

В том случае, когда $\varphi_i(n)=2^n$ $(i=1,2,\dots,N)$ и $p_i(n)=p(n)$ $(i=1,2\dots,N)$, получаем следующие следствия:

Следствие 2.3.1 (при $N=1$ см. [52]). *Пусть* $f\in\bigcap_{i=1}^{N}\mathrm{BV}_i\left(p(n)\uparrow\frac{2\beta}{N(2-\beta)},\varphi\right)$, *где* $\beta\in\left(\frac{2N}{2+N},2\right)$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(\tau(2^n)))-1]}}<\infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.2. *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\big(p_i(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}\big)$, $\beta \in (\frac{2N}{2+N}, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(n))-1]}} < \infty \ \ (i = 1, \dots, N),$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,n_2\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.3 (при $N = 1$ см. [14]). *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\big(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2-\beta)}\big)$, *где* $\beta \in (\frac{2N}{2+N}, 2)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(n))-1]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left|C_{n_1,n_2\dots,n_N}(f)\right|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.4 (при $N = 1$ см. [52]). *Пусть* $f \in \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}, \varphi\right)$, *где* $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N})$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np(\tau(2^n))-1/2-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i + 1)^{\alpha} \left|C_{n_1,\dots,n_N}(f)\right| < \infty.$$

Следствие 2.3.5. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\big(p_i(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}\big)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np_i(n)-1/2-\alpha]}} < \infty \quad (i = 1, \ldots, N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \big|C_{n_1,n_2\ldots,n_N}(f)\big| < \infty.$$

Следствие 2.3.6 (при $N = 1$ см. [14]). *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\big(p(n) \uparrow \frac{2}{N(2\alpha+1)}\big)$, *где* $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2-N}{2N}\right)$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[1/Np(n)-1/2-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \big|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\big| < \infty.$$

Следствие 2.3.7 (при $N = 1$ см. [55]). *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}, \varphi\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2 + 2\alpha$ *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(\tau(2^n)))-1-\alpha]}} < \infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} (n_i+1)^{\alpha} \big|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\big|^{\beta} < \infty.$$

Следствие 2.3.8. *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p_i(n) \uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2 + 2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np_i(n))-1-\alpha]}} < \infty \quad (i = 1, \ldots, N)$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta}<\infty.$$

Следствие 2.3.9 (при $N = 1$ см. [55]). *Пусть* $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{BV}_i\left(p(n)\uparrow \frac{2\beta}{N(2\alpha+2-\beta)}\right)$, *где* $\beta > 0$, $\frac{2N(\alpha+1)}{2+N} < \beta < 2+2\alpha$, *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n[\beta(1/2+1/Np(n))-1-\alpha]}}<\infty,$$

тогда

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}(n_i+1)^{\alpha}\left|C_{n_1,\ldots,n_N}(f)\right|^{\beta}<\infty.$$

Литература

Авдиспахич М. (Avdispahic M.)

[1] On the classes $\Lambda\,\mathrm{BV}$ and $\mathrm{V}[\nu(n)]$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **95**(1985), 230–235.

Ахобадзе Т. (Akhobadze T.)

[2] Functions of generalized Wiener classes $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow p, \varphi)$ and their Fourier coefficients. *Georgian Math. J.* **7**(2000), No. 3, 401–416.

[3] Generalized $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$ class of bounded variation. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **163**(2001), No. 3, 426–428.

[4] $\mathrm{B}\,\Lambda(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$ classes of functions of bounded variation. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **164**(2001), No. 1, 18–20.

[5] Relations between H^{ω}, $\mathrm{V}[\nu(n)]$ and $\mathrm{B}\,\Lambda(p(n) \uparrow \infty, \varphi)$ classes of functions. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **164**(2001), No. 3, 433–435.

Белов А. С.

[6] Взаимоотношения между некоторыми классами обобщённой вариации. *Докл. расширенных заседаний семинара инст. прикл. математики им. И. Н. Векуа* 3(1988), 11–13.

Виленкин Н. Я.

[7] Об одном классе полных ортогональных систем. *Изв. АН СССР, серия матем.* **11**(1947), 363–400.

Винер Н. (Wiener N.)

[8] The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients. *Massachusetts J. Math.* **3**(1924), 72–94.

Гаймназаров Г.

[9] Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье–Хаара. *Докл. Акад. наук Таджс. ССР* **14**(1971), No. 2, 3–6.

Гогинава У. К. (Goginava U.)

[10] On the divergence of trigonometric Fourier series of the class $H^\omega \cap \mathrm{BV}(p(n) \uparrow \infty)$. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* **121**(1999), 63–70.

[11] On the uniform summability of multiple Walsh–Fourier series. *Anal. Math.* **26**(2000), 209–226.

[12] Uniform convergence of N-dimensional trigonometric Fourier series. *Georgian Math. J.* **7**(2000), No. 4, 665–676.

[13] On the divergence of Walsh–Fourier series of class $H^\omega \cap \mathrm{BV}(p(n) \uparrow \infty)$. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **163**(2001), No. 1, 29–30.

[14] On the absolute convergence of the series of Fourier–Haar coefficients. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **164**(2001), No. 1, 21–23.

[15] On the uniform convergence Walsh–Fourier series. *Acta Math. Hung.* **93**(2001), No. 1–2, 59–70.

[16] Relations between some classes of functions. *Sci. Math. Japonica* **53** (2001), No. 2, 223–232.

[17] Relations between $\Lambda\,\mathrm{BV}$ and $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow \infty)$ classes of functions. *Acta Math. Hung.* (to appear)

Голубов Б. И.

[18] О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара. *Изв. АН СССР, серия матем.* **6**(1964), No. 28, 1271–1296.

[19] Ряды по системе Хаара. *Итоги науки, матем. анализ*, 1970.

Голубов Б. И., Рубинштейн А. И.

[20] Об одном классе систем сходимости. *Матем. сб.* **71(113):1**(1966), 96–115.

Дю Буа-Реймон (Du Bois-Reimond)

[21] Unter suchungen über die convergenz und diverdenz der Fourieshen darstellunysformen. *Abh. Acad. Wiss., Munchen* **12**(1876), 1–103.

Жижиашвили Л. В.

[22] О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов. *Успехи матем. наук* **28**(1973), No. 2(170), 65–119.

Жордан Г. (Jordan G.)

[23] Sur la series de Fourier. *C. R. Acad. Sci. Paris* **92**(1881), 228–230.

Карчава Т.

[24] О сходимости рядов Фурье. *Докл. расширенных заседаний семинара инст. прикл. математики им. И. Н. Векуа* **3**(1988), No. 2, 93–95.

Качмаж С., Штейнгауз Г.

[25] Теория ортогональных рядов. *Москва, Физматгиз*, 1958.

Кита Х., Ионеда К. (Kita H., Yoneda K.)

[26] A generalization of bounded variation. *Acta Math. Hung.* **56**(1990), 229–238.

Кита Х. (Kita H.)

[27] Convergence of Fourier series of functions on generalized Wiener's class $\mathrm{BV}(p(n)\uparrow\infty)$. *Acta Math. Hung.* **57**(1991), 233–243.

Кротов В. Г.

[28] О коэффициентах Фурье по одной ортонормированной системе. *Изв. высш. учебн. заведений, математика*, 1975, No. 10, 33–46.

Лейндлер Л. (Leindler L.)

[29] Nicht verbesserbare struktur bedingungen. *Stud. Math.* **26**(1966), 155–163.

Мак-Лафлин Ж. (McLaughlin J. R.)

[30] Haar Series. *Trans. Amer. Math. Soc.* **137**(1969), 153–176.

Медведева М.

[31] Вложения в классах H^ω. *Мат. заметки* **64**(1998), 713–719.

Месхиа Р.

[32] Об абсолютной сходимости рядов Фурье. *Кандидат. диссерт., Тбилиси*, 1995.

Севастьянов Е. А.

[33] Кусочно-монотонная апроксимация и Ф-вариации. *Analysis Math.* **2**(1975), No. 1 141–164.

Табатадзе Г. З.

[34] Об абсолютной сходимости рядов Фурье–Хаара. *Сообщ. Акад. Наук Груз. ССР* **103**(1981), No. 3, 541–543.

Кита Х. (Kita H.)

[27] Convergence of Fourier series of functions on generalized Wiener's class $\mathrm{BV}(p(n) \uparrow \infty)$. *Acta Math. Hung.* **57**(1991), 233–243.

Кротов В. Г.

[28] О коэффициентах Фурье по одной ортонормированной системе. *Изв. высш. учебн. заведений, математика*, 1975, No. 10, 33–46.

Лейндлер Л. (Leindler L.)

[29] Nicht verbesserbare struktur bedingungen. *Stud. Math.* **26**(1966), 155–163.

Мак-Лафлин Ж. (McLaughlin J. R.)

[30] Haar Series. *Trans. Amer. Math. Soc.* **137**(1969), 153–176.

Медведева М.

[31] Вложения в классах H^ω. *Мат. заметки* **64**(1998), 713–719.

Месхиа Р.

[32] Об абсолютной сходимости рядов Фурье. *Кандидат. диссерт., Тбилиси*, 1995.

Севастьянов Е. А.

[33] Кусочно-монотонная апроксимация и Ф-вариации. *Analysis Math.* **2**(1975), No. 1 141–164.

Табатадзе Г. З.

[34] Об абсолютной сходимости рядов Фурье–Хаара. *Сообщ. Акад. Наук Груз. ССР* **103**(1981), No. 3, 541–543.

Ульянов П. Л.

[35] Расходящиеся ряды Фурье. *Успехи матем. наук* **16**(1961), No. 3, 61–142.

[36] О рядах по системе Хаара. *Докл. АН СССР* **149**(1963), No. 3, 532–534.

[37] О множителях Вейля для безусловной сходимости. *Матем. сб.* **60(102):1**(1963), 39–62.

[38] О рядах по системе Хаара. *Матем. сб.* **63**(1964), No. 3, 356–391.

[39] Об абсолютной и безусловной сходимости. *Докл. АН СССР* **169** (1966), No. 3, 536–538.

[40] Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье. *Матем. сб.* **72**(1967), No. 2, 193–225.

Уотерман Д. (Waterman D.)

[41] On Λ-bounded variation. *Studia Math.* **57**(1976), 33–45.

Хаар А. (Haar A.)

[42] Zur Theorie der ortogonalen Funktionensysteme. *Inaugural dissertation, Göttingen*, 1909.

[43] Zur Theorie der ortogonalen Funktionensysteme. *Math. Ann.* **69**(1910), 331–371.

Харди Г. (Hardy G. H.)

[44] On double Fourier series and especially those which represent the double zeta-function with real and incommensurable parameters. *Quart J. Math.* **37**(1906), No. 1, 53–79.

Цагарейшвили В. Ш.

[45] О коэффициентах Фурье–Хаара. *Сообщ. АН ГССР* **60**(1970), No. 1, 37–39.

[46] О коэффициентах Фурье–Хаара. *Сообщ. АН ГССР* **81**(1976), No. 1, 29–31.

Чантурия З. А. (Chanturia Z. A.)

[47] Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье. *Докл. АН СССР* **214**(1974), No. 1, 63–66.

[48] О равномерной сходимости рядов Фурье. *Матем. сб.* **100(142)** (1976), No. 4(8), 534–554.

[49] On the absolute convergence of the series of Fourier–Haar coefficients. *Commentationes Math.* **11**(1979), 25–35.

Чисельский З., Муселяк Ж. (Ciesielski Z., Musielak J.)

[50] On absolute convergence of Haar series. *Colloq. Math.* **7**(1959), No. 1, 61–65.

Юнг Л. (Young L.)

[51] Sur un generalization de la notion de variation de Poissance p-ieme bornee an sonce de Wiener et sur la convergence de series de Fourier. *C. R. Acad. Sci. Paris* **204**(1937), 470–472.

Аплаков А. (Aplakov A.)

[52] On the absolute convergence of the series of Fourier–Haar coefficients. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **164**(2001), No. 2, 238–241.

[53] On the absolute convergence of the multiple series of Fourier–Haar coefficients. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **165**(2002), No. 1, 32–34.

[54] Absolute convergence of N-dimensional series of Fourier–Haar coefficients. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **166**(2002), No. 1, 13–15.

[55] Об абсолютной сходимости рядов Фурье–Хаара. *Кутаисский гос. техническ. университет, "Научные Труды"* **8**(2000), 3--5.