საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალი

ტალახაძე მზია

ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლებში მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი საკითხის სწავლების შესახებ

პედაგოგიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო
ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

13.00.02 – სწავლებისა და აღზრდის თეორია და მეთოდიკა

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფესორი ს. თოფურია;
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
კანდიდატი, უფროსი მეცნიერ
თანამშრომელი ხ. რუხაია

2006

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

მე-20 საუკუნის მე-2 ნახევარში მოხდა ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლების სახელმძღვანელოების არსებითი ცვლილება. კერძოდ შემოტანილ იქნა მათემატიკური ანალიზის ელემენტები საკმაოდ დიდი დოზით. სახელმძღვანელოებში გაჩნდა მათემატიკური ანალიზის ისეთი ცნებები და საკითხები როგორიცაა: ფუნქციის ზღვარი და მისი თვისებები, ფუნქციის წარმოებული და მისი თვისებები, ინტეგრალი ფუნქციიდან და მისი თვისებები, აგრეთვე გამახვილდა ყურადღება მათ გამოყენებებზე. სასწავლო პროგრამების ასეთმა ცვლილებამ არსებითი სიძნელეები შეუქმნა, როგორც მოსწავლეებს, ასევე მათ პედაგოგებს. მოსწავლეთათვის საკმაოდ ძნელი აღმოჩნდა ზღვრის ცნების ღრმად გაგება, რამაც გარკვეული დაღი დაასვა შემდგომ მასზე დაშენებული სხვა საკითხების შესწავლას. ეს ცვლილება მოხდა ისე, რომ თვით პედაგოგებს არ ჰქონდათ შემუშავებული ის მეთოდები და გზები, რითაც ისინი მათემატიკური ანალიზის ზემოთ ხსენებულ საკითხებს დაიყვანდნენ მოსწავლეებამდე. ეს პროცესი იმდენად მტკივნეული აღმოჩნდა, რომ იმდროინდელი ცნობილი მეცნიერებიც აქტიურად ჩაებნენ ამ მეთოდური სიცარიელის შევსების საქმეში, კერძოდ დაიწყო მეთოდური კვლევა იმ მიზნით, რომ წარმოებული განსაზღვრულიყო ზღვრის ცნების გარეშე. შემდგომ წლებში გაჩნდა ბევრი ამ სახის სამეცნიერო-მეთოდური შრომები. მაგალითად: [2],[6],[7],[8],[10],[11],[26],[27],[37],[38].

განსაკუთრებით საინტერესოა ლ. პონტრიაგინის მოსაზრება ამ საკითხთან დაკავშირებით: "მართალია ჩემი მოსწავლეობის პერიოდში ანალიზი არ ისწავლებოდა საშუალო სკოლაში, მაგრამ მე უნივერსიტეტში ჩაბარებამდე კარგად ვფლობდი მას. ვიცოდი რა არის

წარმოებული, ინტეგრალი და შემეძლო ამ აპარატის გამოყენება მაგალითების ამოხსნაში. ამასთან მე არ მქონდა საერთოდ წარმოდგენაც ზღვართა თეორიაზე. მისი არსებობის შესახებ მე მხოლოდ უნივერსიტეტში ჩაბარების შემდეგ გავიგე და ამით ძალიან გაოცებული დავრჩი. მე ვფიქრობ, რომ ანალიზის სწავლების დაწყება საშუალო სკოლაში ზღვართა თეორიით მიზანშეწონილი არ არის. უნდა გვახსოვდეს, რომ ისტორიულად ზღვართა თეორია აღმოცენდა, როგორც ზედნაშენი უკვე არსებულ ანალიზზე."[83]

მიუხედავად ყოველივე ზემოთ თქმულისა ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლებისათვის განკუთვნილ სახელმძღვანელოებში რაიმე არსებითი ცვლილება არ მომხდარა. ბუნებრივია, ეს პრობლემა ამჟამადაც აქტუალურია და საჭიროებს ამ მიმართულებით კვლევა ძიების გაგრძელებას.

ჩემს სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები წარმოადგენს ამ მიმართულებით გაწეული კვლევის შედეგებს. კვლევის ძირითადი მიზანი იყო ზღვრის ცნების გარეშე წარმოებულის ცნების განსაზღვრა და მისი სწავლების მეთოდიკის შემუშავება. კერძოდ ჩვენს მიერ წარმოებული განსაზღვრულ იქნა, როგორც გარკვეული სახის დიფერენციალური გამოსახულების გამარტივების შედეგად მიღებული ალგებრული გამოსახულება. ეს განსაზღვრა აღმოჩნდა საკმაოდ მარტივი, ადვილად გასაგები, რამდენადაც როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ იგი დაიყვანება ელემენტარულ ალგებრულ გარდაქმნებზე. შესაბამისად შემუშავდა ამ ცნებასთან დაკავშირებული მათემატიკური ანალიზის სხვა ცნებების სწავლების მეთოდიკა. ეს შედეგები მოცემულია ჩემს სადისერტაციო ნაშრომში, რომელიც შედგება ორი თავისაგან და დასკვნისაგან.

პირველი თავი „წარმოებულის სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში" შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან.

პირველ პარაგრაფში განხილულია მათემატიკის სწავლების მიზნები, კერძოდ მოსწავლეში ლოგიკური აზროვნებისა და მათემატიკური შემოქმედების უნარის გამომუშავება. როდესაც მოსწავლე თვითონ აღმოაჩენს იმას, რაც დიდი ხანია მეცნიერებაშია აღმოჩენილი იგი აზროვნებს, როგორც პირველ აღმომჩენი.

განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა მათემატიკური ანალიზის ელემენტების სწავლების აუცილებლობის დასაბუთებას.

მე-19 და მე-20 საუკუნეების მიჯნაზე მრეწველობისა და ტექნიკის განვითარებამ მათემატიკის სწავლებაში შეიტანა გარკვეული კორექტივები. აუცილებელი შეიქმნა მათემატიკაში მიღწეული მეცნიერული გამოკვლევები რაიმე გზებითა და საშუალებით მიგვეტანა საზოგადოებამდე. ყოველივე ეს სასკოლო მათემატიკურ განათლებაში რეფორმის საერთაშორისო მოძრაობის აღმოცენებისა და განვითარების მიზეზი გახდა. შეიქმნა რეფორმისტული მოძრაობა რომლის მეთაურად ფ. კლაინი გვევლინება. მისი აზრით სასკოლო მათემატიკის კურსში სხვა საკითხებთან ერთად შეტანილი უნდა ყოფილიყო მათემატიკური ანალიზის ელემენტები.

ლაგრანჟის მიერ განხილული (კერძოდ ზღვრის ცნების გარეშე ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა) მეთოდის ირგვლივ გამოქვეყნებული შრომების განხილვისა და ახალი გზების მოძებნის ნიადაგზეა აგებული ჩვენი მეთოდი. შრომაში გამოყენებულია უმარტივესი ცნებები და დამტკიცებები, ამასთან დაცულია მათემატიკური სიმკაცრე.

მეორე პარაგრაფში შემუშავებულია ზღვრის გარეშე წარმოებულის განსაზღვრის ერთი მეთოდი.

წარმოებულის ცნება ეს არის იგივე ფუნქციის ცნება ახალ ასპექტში, ამიტომ სანამ გადავიდოდეთ წარმოებულის განსაზღვრაზე, მანამ საჭიროა განვლილი მასალის გამეორების საშუალებით

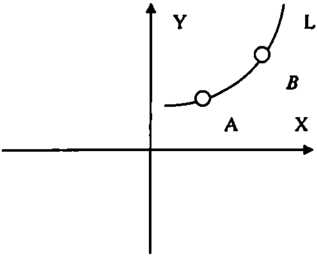
მოსწავლეებში განვამტკიცოთ ცოდნა ფუნქციის შესახებ, ფუნქციის წარმოებული, ხომ მისი საშუალებით განისაზღვრება და წარმოებული თვითონ არის ფუნქცია.

ფუნქციის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ცნებაა. ფუნქციური დამოკიდებულების ცნების გამოყენებით შეგვიძლია ავსახოთ მატერიალურ სამყაროში არსებული დამოკიდებულებანი. ამ ცნებით ნათლად გამოისახება რეალური სინამდვილის ცვალებადობა და დინამიურობა, რეალური ობიექტებისა და პროცესების ურთიერთკავშირი.

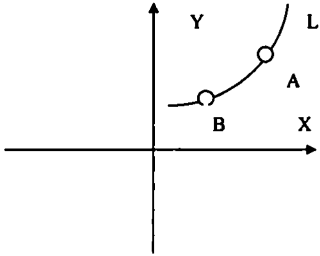
ფუნქციის თანამედროვე გაგებას საფუძვლად უდევს შესაბამისობის იდეა. შესაბამისობის შინაარსის აღქმის შემდეგ ადვილი ხდება ფუნქციის ცნების არსში გარკვევა. რაც საშუალებას გვაძლევს შემეცნების გზით შევისწავლოთ ფუნქციის ირგვლივ არსებული საკითხები და მათ შორის წარმოებული.

ქვემოთ განვიხილავთ ფუნქციებს და მათ წარმოებულებს ზღვრის გამოყენების გარეშე, დავამტკიცებთ თეორემებს ჯამის, სხვაობის, განაყოფის, რთული ფუნქციების შესახებ. ახალი მეთოდის გამოყენებით გადავწყვეტთ ალგებრული, ფიზიკური და ეკონომიკური სახის ამოცანებს.

ვთქვათ მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია და მისი გრაფიკია L. ამ გრაფიკზე ავიღოთ წერტილი $A(x,y)$, A წერტილის მარჯვნივ ავიღოთ მასთან ახლოს მდებარე წერტილი $B(\xi,\eta)$ იხ.ნახაზი 1.



ნახაზი1



ნახაზი2

და შევადგინოთ ფარდობა:

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \quad \text{სადაც} \quad \xi \neq x$$

ამ ფარდობას ვუწოდოთ დიფერენციალური გამოსახულება.

თუ დიფერენციალურ გამოსახულებას ელემენტარული გარდაქმნებით ისეთ სახეზე დავიყვანთ, რომ მასში ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ექნება მაშინ ელემენტარული გარდაქმნებით მიღებულ გამოსახულებას ვუწოდოთ x წერტილში ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული და ავღნიშნოთ $f'_+(x)$ ესე იგი:

$$f'_+(x)=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}$$

ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმას ვახდენთ მხოლოდ დიფერენციალური გამოსახულების ელემენტარული გარდაქმნებით დაყვანილ გამოსახულებაში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც B წერტილი მდებარეობს A წერტილის მარცხნივ იხ. ნახაზი 2, მაშინ:

$$f'_-(x)=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}$$

და ვუწოდოთ x წერტილში ფუნქციის მარცხენა წარმოებული. თუ $f'_+(x)=f'_-(x)$, მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული x წერტილში და იგი $f'(x)$-ის ტოლია. ესე იგი

$$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)$$

თუ $f'_+(x) \neq f'_-(x)$ ან დიფერენციალური გამოსახულება ელემენტარული გარდაქმნებით არ დაიყვანება ისეთ სახეზე, რომ მასში ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ჰქონდეს, მაშინ ვიტყვით რომ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში წარმოებული არა აქვს.

დამტკიცებული გვაქვს შემდეგი თეორემები, რომლებიც წარმოადგენენ უკვე ცნობილი და მნიშვნელოვანი თეორემების ანალოგებს. [8],[37], [60]. კერძოდ:

თეორემა 1.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში, მაშინ $f(x)+g(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

თეორემა 2.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში, მაშინ $f(x)-g(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$$

თეორემა3.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში, მაშინ $f(x)*g(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$(f(x)*g(x))' = f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)$$

თეორემა 4.

თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში და $g(x) \neq 0$, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ფუნქციაც წარმოებადია x წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)*g(x)-g'(x)*f(x)}{g^2(x)}$$

მესამე პარაგრაფში მოცემულია ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული. კერძოდ ნაპოვნია, შემდეგი ფუნქციის წარმოებული:

$$y = f(x) = a_0 * x^n + a_1 * x^{n-1} + ... + a_{n-1} * x + a_n$$

ანუ ნებისმიერად აღებული მუდმივ $a_0, a_1, ... a_n$ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის წარმოებული x-ით.

$$y' = (a_0 * x^n + a_1 * x^{n-1} + ... + a_{n-1} * x + a_n)' = a_0 * (x^n)' + a_1 * (x^{n-1})' + ... + a_{n-1} * x' + a_n' =$$
$$n * a_0 * x^{n-1} + (n-1) * a_1 * x^{n-2} + ... + a_{n-1}$$

ჩვენს მიერ შემოტანილი წარმოებულის განსაზღვრა იძლევა საშუალებას მივიღოთ $y = \varphi(x) = f(g(x))$ რთული ფუნქციის წარმოებულის ფორმულა, რომელიც წარმოადგენს უკვე არსებული ფორმულის ანალოგს. კერძოდ, ვპოულობთ $y = \varphi(x) = f(g(x))$ ფუნქციის წარმოებულს:

$$y' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) * g'(x)$$

აქვე ვიხილავთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებულს. ვეყრდნობით მტკიცებებს რომლებსაც თვალსაჩინო გეომეტრიული აზრი აქვთ და ვღებულობთ დღემდე ცნობილი ფორმულების ანალოგებს, კერძოდ:

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

ამავე პარაგრაფში ვიხილავთ მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების წარმოებულებს, რომელიც წარმოადგენს უკვე არსებული ფორმულების ანალოგს, მაგრამ გამარტივებულს და მოსწავლეთათვის გასაგებ ენაზე დამტკიცებულს, კერძოდ:

$$y' = (e^x)' = e^x$$

$$y' = (a^x)' = a^x * \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} * \ln a} = \frac{1}{x * \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x * \ln e} = \frac{1}{x}$$

მეოთხე პარაგრაფში განსაზღვრულია ფუნქციის გრაფიკის მხები. ჩვენი მიზანია მოსწავლეებს თვალნათლივ წარმოვუდგინოთ მრუდის მიმართ გავლებული მხები და განვუმარტოთ მხების ცნება.

მეორე თავი წარმოებულისა და ინტეგრალის სწავლების მეთოდიკა ეკონომიკური პროფილის სასწავლებლებში შედგება სამი პარაგრაფისაგან.

პირველ პარაგრაფში მოცემულია წარმოებულის სწავლების ეფექტურობის გაზრდის ერთი მეთოდი. გამახვილებულია ყურადღება ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლებში მათემატიკის ფორმალიზებულ სწავლაზე. სწავლების ამ ტიპის ძირითად მახასიათებელ ნიშანს წარმოადგენს არამოტივირებული განსაზღვრებებისა და მოსწავლეთათვის გაუგებარი დამტკიცებების სიმრავლე. მოსწავლეთათვის გაუგებარია რაში სჭირდებათ შემოტანილი ცნებები და დამტკიცებული თეორემები. ასეთ პირობებში მოსწავლეთა უმეტესი ნაწილი კარგავს ინტერესს მათემატიკისადმი. ამიტომ სწავლების პირველ საფეხურზე მიზანშეწონილი არ არის ლოგიკურად მკაცრი დამტკიცება, პირიქით სასურველია რაც შეიძლება მეტი თვალსაჩინოების გამოყენება. მნიშვნელოვანია გამოიყოს მათემატიკის ისეთი საკითხები, რომელთაც გარკვეული კავშირი აქვთ სხვა დარგის ამოცანებთან. ეს გზა მათემატიკის აღნიშნული საკითხების სწავლების ეფექტურობას გაზრდის. ამ პარაგრაფში აღწერილია მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი საკითხის გამოყენება ეკონომიკაში. კერძოდ შემოტანილია მარჟინალური ამონაგების ცნება.

მარჟინალური ამონაგები (MR) არის მთლიანი ამონაგების ფუნქციის წარმოებული, მოთხოვნის Q ცვლადით.

$$(MR) = \frac{f(\xi) - f(Q)}{\xi - Q}\Bigg|_{\xi}^{Q} = (TR)' = f'(Q)$$

ასევე განსაზღვრულია მარჟინალური დანახარჯის (MC) ცნება:

$$(MC) = \frac{K(\xi) - K(Q)}{\xi - Q}\Bigg|_{\xi}^{Q} = K'(Q)$$

წარმოების მარჟინალური დანახარჯი $K'(Q)$, რომელიც გამოთვლილია Q რაოდენობის პროდუქციისათვის, გამოსახავს წარმოების დანახარჯის ცვლილებას საწარმოებელი პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით.

განსაზღვრულია მარჟინალური მოგების ცნება, იგი გამოთვლილია Q რაოდენობის სარეალიზაციო პროდუქციისათვის, გამოსახავს მოგების მყისიერი ცვლილებას სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით.

მეორე პარაგრაფი ეხება დიფერენცირების ოპერაციის შებრუნებულ ოპერაციას ანუ ინტეგრების ოპერაციას და მის ზოგიერთ გამოყენებას. განიხილება განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება, ამ ცნებამდე მივყავართ მრუდი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის გამოთვლას სიბრტყეზე, სადაც ვიხილავთ ჩვენი მეთოდით შემოტანილი წარმოებულის ცნებას. ასევე განხილულია განუსაზღვრელი ინტეგრალის ცნება.

მესამე პარაგრაფი არის პედაგოგიური ექსპერიმენტი. ექსპერიმენტი ჩატარდა ანზორ ჩაფიძის სახელობის 147 საშუალო სკოლაში და თბილისის პროგრამირების სპეციალიზირებულ კოლეჯ "აია"-ში. შევქმენით ექსპერიმენტული და საკონტროლო ჯგუფები, გამოვიყენეთ χ^2 კრიტერიუმი და განვიხილეთ H_0- ნულოვანი ჰიპოთეზა და H_1- ალტერნატიული ჰიპოთეზა.

შედეგები უკეთესია ექსპერიმენტულ ჯგუფებში. ეს იძლევა საფუძველს მტკიცებისათვის, რომ ჩვენი მეთოდიკური გადაწყვეტა ექსპერიმენტულად შემოწმებული და დადასტურებულია.

თავი1

წარმოებულის სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში

§1 მათემატიკური ანალიზის ელემენტების სწავლების საკითხები სამეცნიერო პედაგოგიურ ლიტერატურაში

მეცნიერების, ტექნიკისა და ცხოვრების სხვადასხვა სფეროში მათემატიკური მეთოდების გამოყენებამ ადამიანის აზროვნების ჰორიზონტის ისეთნაირი გაფართოება მოითხოვა, რომლის საფუძველზე ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლების კურსდამთავრებულებმა უნდა შეძლონ ოპტიმალურად გადაწყვიტონ მათ წინაშე წამოჭრილი ესა თუ ის ცხოვრებისეული ამოცანა. ყოველივე ამან დააყენა საკითხი ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლებში მათემატიკური ანალიზის ელემენტების სწავლების აუცილებლობის შესახებ.

სიტყვა „მეთოდიკა" წარმოდგება ბერძნული სიტყვისაგან *μεθοδος* რაც გამოკვლევას ნიშნავს. ეს არის ბუნების მოვლენათა გამოკვლევის, ჭეშმარიტების მეცნიერული შემეცნებისა და დადგენის გეგმაზომიერი გზა. ამგვარად, მეთოდოლოგია ეს არის კვლევის ხერხების ერთობლიობა ანუ მოძღვრება მეცნიერული კვლევის მეთოდების შესახებ.

სახელწოდება „მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა" შემოღებული იყო 1836 წელს გერმანელი პედაგოგისა და მათემატიკოსის ადოლფ დისტერვეგის მიერ.

თითოეული ტიპის სკოლისათვის მათემატიკის სწავლების მეთოდიკას თავისი მიმართულება და შინაარსი აქვს. ჩვენი მიზანია განვიხილოთ მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის პირობებში. პირველ ყოვლისა ყოველი საზოგადოება თავის მოთხოვნილებებს აყენებს

როგორც სწავლების ფორმებისადმი, ისე მისი შინაარსის მიმართ. სწავლების პოცესში ხდება ინფორმაციის გადაცემა ორი მიმართულებით: მასწავლებლიდან მოსწავლისაკენ და მოსწავლიდან მასწავლებლისაკენ, ეგრეთ წოდებული „უკუ კავშირი" წარმოადგენს სწავლების პროცესის არსებით შემადგენელ ნაწილს, რადგან სწავლების ყოველ ეტაპზე მოსწავლის აზროვნებითი შემოქმედების დონის, მასში გარკვეული აზროვნებითი სტრუქტურის განვითარების გარკვეული ცნებების ფორმირებისა და მის მიერ განვლილი მასალის შეთვისების ხარისხის აღრიცხვის გარეშე არ შიძლება ავაგოთ ეფექტური სწავლება.[92]

სწავლების პროცესს განსაზღვრავს პასუხი ძირითად ორ კითხვაზე:

1. რა ვასწავლოთ?
2. როგორ ვასწავლოთ?

სწავლების პროცესი უსათუოდ ითვალისწინებს:

1. სწავლების ობიექტს – ვის ვასწავლოთ?
2. სწავლების მიზნებს – რისთვის ვასწავლოთ?
3. სწავლების შინაარსს – რას ვასწავლით?
4. სწავლების მეთოდებს — როგორ ვასწავლით?

ეს არის სწავლების პროცესის ზოგადი სქემა.

„მათემატიკის სწავლების" მიზანია მოსწავლეში ლოგიკური აზოვნებისა და მათემატიკური შემოქმედების უნარის გამომუშავება. როდესაც მოსწავლე თვითონ „აღმოაჩენს" იმას რაც დიდი ხანია მეცნიერებაში აღმოჩენილი იგი აზროვნებს როგორც პირველ აღმომჩენი.

მათემატიკური შრომა მოიცავს შემოქმედების განსაკუთრებულ ელემენტს და ეს ეხება არა მხოლოდ მეცნიერების შემოქმედებით

მუშაობას არამედ ვლინდება ყოველგვარ წვრილმანში, ვლინდება ამოცანების ამოხსნაშიც. [87],[88].

აი რას ამბობს ჯ. ბრუნერი: „გონებრივი შემოქმედება ყველგან ერთნაირია როგორც მეცნიერების წინა ხაზზე, ისე სკოლის მესამე კლასში."[41]

მათემატიკის სწავლების ამოცანა სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ ჩამოუყალიბოს და განავითაროს ადამიანის გონებივი შემოქმედების ის სტრუქტურები, რომლებიც ხელს უწყობენ მათემატიკურ აღმოჩენებს.[34]

ჩვენ ვაპირებთ ვასწავლოთ მათემატიკა ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მოსწავლეებს. ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლა მიზნად ისახავს აღუზარდოს სამშობლოს განათლებული, ყოველმხრივ განვითარებული, მეცნიერებათა საფუძვლების ცოდნით აღჭურვილი და რაც მთავარია, ზნეობრივად მაღალ დონეზე მდგარი ახალგაზრდობა, რომელსაც ღირსეულად შეეძლება ცხოვრებისეული ფუნქციების შესრულება, როგორც საზოგადოებაში ისე ოჯახში. ამ მიზნების მისაღწევად მათემატიკას საკუთარი წვლილი აქვს შესატანი. არც ერთი სხვა სასკოლო საგანი არ უწყობს ხელს მოსწავლეში ლოგიკური აზროვნების ფორმირებას ისე, როგორც მათემატიკა. მისი ერთიან მეცნიერულ სისტემად ჩამოყალიბების პროცესში გამოირკვა მისი მეორე მხარე – სწორი აზროვნებისა და ჩვევების აღზრდა.

მათემატიკური ცოდნის შეთვისების პროცესში მუდმივ გვიხდება დასაბუთებათა ჩატარებისა და დედუქციური აზროვნებისათვის დამახასიათებელი მოცემული საწყისი პირობებიდან ლოგიკური დასკვნების მიღება, აბსტრაგირების უნარის გამომუშავება, კონკრეტულ სიტუაციაში საკითხის არსის გამოყოფა, მისი არა არსებითი დეტალების უკუგდებით. მათემატიკის შესწავლის დროს ეუფლება მოსწავლე ანალიზის, განზოგადების აუცილებელი და საკმარისი

პირობების გამოყოფის, ცნების განსაზღვრების, მსჯელობის შედგენის, დასმული ამოცანის ამოხსნის გზების მოძებნის ჩვევებს. ყოველივე ეს აყალიბებს სწორ აზროვნებას, მის განსაკუთრებულ თვისებებს, როგორიცაა: აზრთა დალაგება, სიზუსტე, გარკვეულობა, ლაკონურობა. მათემატიკა ხელს უწყობს მოსწავლის მეტყველების განვითარებას, აზრის სწორად გამოხატვას. მათემატიკის შესწავლა მოითხოვს საკმაო დაძაბვასა და დროს. კარგად დაყენებული სწავლების პირობებში მოსწავლეებს უვითარდებათ დაკვირვების უნარი, ყურადღება, საქმისადმი გულისყურის გამოჩენის ჩვევა, ინიციატივა და გამტანობა. მათემატიკა როგორც ადამიანის გონების საუკეთესო დისციპლინა ყველაზე გამოსადეგია იმისათვის, რომ აღვზარდოთ ახალგაზრდებში მისწრაფება შრომისაკენ, უკეთესისაკენ ცხოვრებაში, სამართლიანობისა და ჭეშმარიტებისაკენ. ყოველივე ამას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა მოსწავლის ზნეობრივად აღზრდისა და მისი ხასიათის ჩამოყალიბებისათვის. მათემატიკის შესწავლით მიღებული ჩვევები, საშუალებას აძლევს სკოლადამთავრებულს შემდგომში ცხოვრების გზაზე ეფექტურად დაეუფლონ თავის პროფესიას, გაიღონ ენერგია საჭირო და აუცილებელი შრომისათვის, ყურადღებით მოეკიდონ ყოველგვარ სამუშაოს, რომლის შესრულებაც გარკვეულ დაძაბვას და პასუხისმგებლობას მოითხოვს. სწორედ ამიტომაც მოხდა ისე, რომ სამეცნიერო-ტექნიკური რევოლუციის ეპოქაში ფართო გავრცელება მოიპოვა მათემატიკის ცოდნამ ახალგაზრდობისათვის.[3],[63],[72].

სკოლაში მათემატიკის შესწავლის მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს აგრეთვე მოსწავლეთა მომზადება იმ უმაღლეს სასწავლებლებში სწავლის გასაგრძელებლად, სადაც მიმდინარეობს მათემატიკისა და მისი გამოყენებათა შესწავლა.

მათემატიკის სწავლების მიზნები, როგორც აგრეთვე სხვა საგნებისაც, განიცდიან ცვლილებებს იმის მიხედვით თუ რა

ამოცანებს უყენებს სკოლას საზოგადოება. ის რაც უნდა ვასწავლოთ მოსწავლეებს უთუოდ უნდა იყოს მათემატიკური მეცნიერების მთელი მოცულობიდან ამოკრეფილი დარგებისა, თემებისა და საკითხების ერთობლიობა. მასალის შერჩევა ისე უნდა მოხდეს, რომ ერთი მთლიანი შეადგინოს – სასკოლო მათემატიკა.

ვთქვათ, გადაიწყვიტა პრობლემა რას ვასწავლით? ეხლა ისმება კითხვა: როგორ ვასწავლოთ? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა. მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა მჭიდროდ უკავშირდება მათემატიკას, ლოგიკას, პედაგოგიკასა და ფსიქოლოგიას. მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა ეყრდნობა ამ საგნებს და იყენებს თავისი საკუთარი პრობლემების გადაწყვეტაში. მათემატიკა გვაძლევს ობიექტს, რომელიც დიდაქტიკურ დამუშავებას განიცდის. პედაგოგიკა, ლოგიკა და ფსიქოლოგია მიგვითითებენ როგორი უნდა იყოს ამ დამუშავების შედეგი და როგორ უნდა მივაღწიოთ ამას.

დიდია მათემატიკის სწავლების მეთოდების კავშირი ფსიქოლოგიასთან, განსაკუთრებით – პედაგოგიურ ფსიქოლოგიასთან. პედაგოგიური ფსიქოლოგია შეისწავლის მოზარდის კონკრეტულ ფსიქოლოგიურ მოქმედებას აღზრდისა და სწავლების პირობებში. მის ძირითად პრობლემას წარმოადგენს მოსწავლეთა მიერ ცოდნის შეთვისება და ჩვევათა გამომუშავება სწავლების პროცესში. იგი ექსპერიმენტულ გამოკვლევათა საფუძველზე ადგენს სასწავლო საგნის ამა თუ იმ საკითხის შესწავლის შესაძლებელ ასაკს. ამგვარად პედაგოგიური ფსიქოლოგია მჭიდროდ უკავშირდება მათემატიკის სწავლების მეთოდიკას.[22],[23],[28],[68]. მაგრამ ფსიქოლოგიური ექსპერიმენტის ხასიათი ერთგვარად ზღუდავს მისი შედეგების გამოყენებას. „ფსიქოლოგები განსაკუთრებულ ყურადღებასა და ნაშრომებს უთმობენ შემეცნების მარტივ და მოკლე აქტებს, ამიტომ ფსიქოლოგიას შეუძლია მოგვცეს საინტერესო მითითებები, მიგნებები,

მაგრამ არ შეიძლება ჰქონდეს სწავლების პრობლემების საბოლოო დადგენის პრეტენზია."—ამბობს დ. პოია.[84]

იგივე აზრისაა ცნობილი ფსიქოლოგი ვ. კრუტეცკი. „ საჭიროდ მიმაჩნია ხაზი გავუსვა იმას, რომ ჩვენი ნაშრომი წმინდა ფსიქოლოგიურ ხასიათს ატარებს. ამიტომ არც ახლა და არც შემდგომში არავითარ პრეტენზიას არ ვაცხადებთ მათემატიკის სწავლების მეთოდების პედაგოგიურ ანალიზზე და არც მათემატიკის სწავლების ახალი მეთოდების შექმნაზე. ჩვენი ღრმა რწმენით ეს არ არის ფსიქოლოგების საქმე. ეს არის საქმე მეცნიერი მათემატიკოსების, პედაგოგებისა და მეთოდისტების – შესაბამის დარგში კვალიფიცირებული და ერუდირებული ადამიანების საქმე. . ფსიქოლოგიას კი შეუძლია და უნდა ითანამშრომლოს მასთან, წარმოადგინოს საჭირო მასალა, ჩაატაროს ამა თუ იმ საკითხის ფსიქოლოგიური გამოკვლევა."[66],[67].

მათემატიკის სწავლების ზოგადი მეთოდიკა მოიცავს მთლიანად სასკოლო მათემატიკის სწავლების მეთოდიკას როგორც დამოუკიდებელი მეცნიერების საერთო თეორიას. კერძო მეთოდიკა მოიცავს კონკრეტული საკითხების სწავლების მეთოდიკას.

მათემატიკის სწავლების მეთოდიკას, როგორც მეცნიერების წარმოშობას დიდი ხნის ისტორია არა აქვს. დაკავშირებულია იგი იოჰან ჰენრიხ პესტალოცის (1748-1824) სახელთან.

მიუხედავად თავისი პატარა ისტორიისა მათემატიკის სწავლების მათოდიკა მე-20 საუკუნეში დიდად განვითარდა. ამას უსათუოდ ხელი შეუწყო მე-20 საუკუნის 50-იან წლებში სასკოლო მათემატიკის გარდაქმნისათვის რეფორმისტული მოძრაობის განსაკუთრებულმა აღმხელობამ და ამ მოძრაობაში დიდი მეცნიერი მათემატიკოსების აქტიურმა მონაწილეობამ. მათემატიკის სწავლების მეთოდიკის არემ გაფართოება განიცადა მასში უმაღლეს სკოლაში მათემატიკური

საგნების სწავლების მეთოდური დამუშავების აუცილებელი აღიარებით. ეს მდგომარეობა მსოფლიოს ყველა ცივილიზებულ ქვეყანაში დამკვიდრდა და მუშაობა ამ ასპარეზზე დღეისათვის აქტიურად ვითარდება. „ნებისმიერი ცივილიზაცია, თუ ის ღირსია ეს სახელი ატაროს ჭეშმარიტების ძიებაშია."[58],[85]. ხშირად ადამიანი შეძლებს ხოლმე დაადგინოს ჭეშმარიტება თავისი მიხვედრით, მიგნებით, თავის წარმოდგენებზე დაყრდნობით — ინტუიციით „ცდამ გამეორებულმა მილიონჯერ გამოუმუშავა ადამიანებს აზროვნებითი დაკვირვების განსაკუთრებული უნარი."[42]. „ინტუიცია ესაა ცოცხალი წარმოდგენა შესასწავლი მასალის ღრმა გაგებასთან შერწყმული" (ჟ. დიედონე)

„ინტუიცია, ეს იდუმალი ცხოვრებისეული ელემენტი ყოველთვის აქტიურად მონაწილეობს მათემატიკურ შემოქმედებაში. აღვიძებს და მიმართულებას აძლევს ყველაზე აბსტრაქტულ აზროვნებასაც კი. მიუხედავად ამისა, არსებობს ინტუიციის გამაგრების ტენდენცია ზუსტი და მკაცრი დამტკიცებებით." რ. კურანტი.

„მათემატიკური სიმკაცრის მიზანია დააკანონოს ინტუიციის მონაპოვარი და ამის გარდა არასოდეს ჰქონია მათემატიკურ სიმკაცრეს სხვა მიზანი"[90],[94]

ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა აღმოაჩინეს სიდიდეთა უთანაზომობა, აქვე გაჩნდა უსასრულობის ცნება. ორი სიდიდე უთანაზომო აღმოჩნდებოდნენ მაშინ, როდესაც მათი საერთო უდიდესი საზომის მოსაძებნად საჭირო შეიქმნებოდა გამოთვლის უსასრულოდ გაგრძელება. ბუნებრივია, რომ აქედან ისეთ დასკვნამდე მივიდნენ, რომ საერთო უდიდესი საზომი ამ შემთხვევაში უსასრულოდ მცირეა და ერთიმეორესთან შესადარებელი სიდიდეები მას უსასრულოდ მრავალჯერ შეიცავენ. ამ შემთხვევაში საბერძნეთის მათემატიკოსები სიდიდეებს განსაზღვრავდნენ უსასრულო რიცხვების ანუ უსასრულოდ

მიახლოების საშუალებით. უწყვეტი სიდიდეები მათ ჰქონდათ წარმოდგენილი როგორც უსასრულოდ მრავალი, უსასრულოდ მცირე განუყოფელ ნაწილაკებისაგან შემდგარი სიდიდეები. უწყვეტ სიდიდეთა ასეთ წარმოდგენას არ ეთანხმებოდა ელეატური ფილოსოფიური სკოლის წარმომადგენელი (მე-5 საუკუნე ჩვენს ერამდე) ძენონი; ძენონი უწყვეტობას უპირისპირებს წყვეტილობას, უსასრულობას უპირისპირებს სასრულობას. იგი მკაცრად უარყოფს მათ ურთიერთკავშირს. იგი უარყოფს უწყვეტობისა და წყვეტილობის ერთიანობას, უსასრულობისა და სასრულობის ერთიანობას. მისი აზრით მოძრაობა რომელიც თავისი ბუნებით უწყვეტი უნდა იყოს შეუძლებელია, ვინაიდან ჩვენ არ შეგვიძლია ის უწყვეტად წარმოვიდგინოთ, რადგან შეუძლებელია უწყვეტი მოძრაობა გამოვსახოთ დაყოფილ მომენტებად მისი დაშლის საშუალებით. მათემატიკოსები უსასრულობას ხსნიდნენ მხოლოდ სახელწოდებით, რომელიც შეიცავდა უარყოფით წარმოდგენას იმის შესახებ, რომ უსასრულობა შეუძლებელია მიღწეულ იქნას და ვერ ხედავდნენ უსასრულობისა და სასრულობის ერთიანობას ამიტომ ძენონის არგუმენტები დამაჯერებლად ჟღერდა როდესაც ის ილაშქრებდა მათ წინააღმდეგ. საბერძნეთის მათემატიკოსებმა ძენონს დაუჯერეს და უსასრულობის იდეა, როგორც დადებითად დამტკიცების საშუალება უარყვეს, ამიტომ ევდოქსოსმა გამოიგონა "ამოწურვის მეთოდი" რომელიც მაშინდელ მათემატიკოსებს საშუალებას აძლევდა დაემტკიცებინა თეორემები უსასრულობის ცნების გამოუყენებლად. ეს მეთოდი ძალიან დიდი და მოუხერხებელი იყო.

მიუხედავად იმისა, რომ "ამოწურვის მეთოდით" შესაძლებელი იყო თეორემების დამტკიცება უსასრულობის ცნების გამოუყენებლად ძველი ბერძნები მაინც იძულებულები იყვნენ ამ ცნებას დაყრდნობოდნენ, თუმცა სიტყვა "უსასრულობის" გვერდის ავლით.

ამოწურვის მეთოდს საფუძვლად ზღვრის ცნება უდევს, ვინაიდან ამ მეთოდით დამტკიცების შემთხვევაში ცდილობენ ზღვრისა და მიახლოებით მნიშვნელობას შორის სხვაობა ყოველ ნებისმიერ სიდიდეზე ნაკლები გახადონ, მაგრამ ზღვრის ცნების შემოღება ნიშნავდა უსასრულობის ცნების შემოღებას, რაც როგორც უკვე ვიცით, ძენონთან კამათის შემდეგ ერთხელ და სამუდამოდ უარყოფილ იქნა საბერძნეთის მათემატიკოსების მიერ.

ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებსა და სოფისტებს შორის დავა მიმდინარეობდა უსასრულობის ცნების და საერთოდ მოძრაობის რეალობის გარშემო. ძენონი უარყოფდა მოძრაობის ფიზიკურ რეალობას, მისი ცნობილი სოფიზმები ამტკიცებდნენ მოძრაობის შეუძლებლობას. საბერძნეთის მათემატიკოსებმა ძენონის სოფიზმები ვერ დაარღვიეს, რადგან ვერაფერი რეალური ვერ დაუპირისპირეს, ამიტომ ძენონს დაუჯერეს და მოძრაობის რეალობაზე და მასთან დაკავშირებულ უსასრულობის ცნებაზე სამუდამოდ ხელი აიღეს.

ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა საფუძველი ჩაუყარეს იმ უდიდეს სამეცნიერო შენობას რომელიც, შემდგომში აგებული იქნა მე-16, მე-17 საუკუნეებში. მათემატიკა საკმაოდ ხანგრძლივი შეჩერების შემდეგ, იმავე საფუძველს დაუბრუნდა.

მათემატიკური ანალიზისა და საერთოდ უმაღლესი მათემატიკის საწყისების სწავლების მეთოდების შემუშავებით ყველა დიდი მეცნიერი იყო და არის დაინტერესებული. უმაღლესი მათემატიკის შექმნისაკენ პირველი ნაბიჯები გადადგა რენე დეკარტმა. მისმა კოორდინატთა მეთოდმა [29],[30],[48]. ცვლადი სიდიდის ცნებამ და ძველი ბერძენი მათემატიკოსების მიერ გეომეტრიაში მოძრაობის ცნების შემოტანამ დიდი როლი ითამაშა უსასრულობის ცნების წარმოშობაზე მათემატიკაში, რომელიც სოფიზმის გავლენით ძველი საბერძნეთის მათემატიკოსებმა უარყვეს.

მათემატიკაში უსასრულო მცირეთა ანალიზის წარმოშობის საქმეში დიდი როლის შემსრულებელ პიერ-დე-ფერმას შრომებს “უმაღლესი რიგის ყველა ჰიპერბოლის კვადრატურა“ და “მაქსიმუმისა და მინიმუმის შესახებ” დიდი მნიშვნელობა აქვს პრაქტიკული თვალსაზრისით, რადგან ეს მეთოდები პრაქტიკული სახის ამოცანების ზუსტი გადაწყვეტის საშუალებას იძლევა.

1637-1638 წლებში ფერმასა და დეკარტს შორის პოლემიკამ მწვავე ხასიათი მიიღო. ფერმამ მკაცრად გააკრიტიკა დეკარტის „დიოპტრიკა“ და მასთან ერთად გაუგზავნა დეკარტს თავისი ნაშრომი „მაქსიმუმისა და მინიმუმის შესახებ“. ამ ნაშრომში ფერმა ფაქტიურად აწარმოებს ოპერაციას, რომელსაც ეხლა დიფერენცირება ეწოდება. იგი იყენებს მას არა მხოლოდ მაქსიმუმსა და მინიმუმზე ამოცანების ამოსახსნელად, არამედ მრუდისადმი მხების გავლების ამოცანების ამოსახსნელად. [96].

ზღვრის ცნების განსაზღვრა ფერმამ მოგვცა 1665 წელს გამოცემულ ნაშრომში “უსასრულო სიდიდეთა არითმეტიკა”, იგი შემდგომში მდგომარეობდა: “ეს მუდმივი სიდიდეა, რომელსაც ცვლადი ისე უახლოვდება, რომ მათ შორის სხვაობა შეიძლება გახდეს ყოველ მოცემულ სიდიდეზე ნაკლები”. ზღვრის ასეთი სახით განსაზღვრა მნიშვნელოვანია ზღვართა თეორიის ელემენტების შესწავლისას მოსამზადებელ სამუშაოებში.

ლაიბნიცთან ერთად ნიუტონი დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის გამომგონებელია. ეს ნათლად ჩანს მისი „ფლუქსიათა და უსასრულო მწკრივთა მეთოდიდან“. უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის გამოყენება, რომელიც თვითონ ლაიბნიცს ეკუთვნის, ვერც მრავალნაირობით და ვერც მოცულობით ვერ შეედრება ნიუტონის „საწყისებში“ მოცემულ გამოკვლევებს.

საკითხის სწავლებისადმი თავისებური მეთოდით გამოირჩევა ლაიბნიცის შრომა „ უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობათა მოძებნის და მხების განსაზღვრის ახალი მეთოდი უცვლელი წილადისა და ირაციონალურ სიდიდეთა შემთხვევაში და მათი გამოკვლევის სპეციალური ხერხი", რომელიც დაიბეჭდა 1684 წელს ჟურნალში "მეცნიერთა შრომები"[46] მასში მოკლედაა გადმოცემული დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი პრინციპები განსაზღვრებებისა და დამტკიცებების გარეშე. სწავლების ასეთი ფორმა დღესაც ფართოდ გვხვდება. იგი ვლინდება სხვადასხვა საკითხების სწავლებისას.

ლაიბნიცის მოკლედ დაწერილმა ნაშრომმა, რომელიც 1684 წელს გამოქვეყნდა, ახალი ეპოქა გახსნა მათემატიკის ისტორიაში. ამ ნაშრომმა საფუძველი ჩაუყარა უსასრულოდ მცირეთა აღრიცხვის ნამდვილ დასაწყისს, მოგვცა რა საკმაოდ მარტივი წესები, რომელთა კომბინაცია შემდგომში მუშაობის საშუალებას იძლეოდა.
მაგალითად ზღვართა თეორიის ელემენტების სწავლების პროცესში ზოგიერთი მეცნიერ-მეთოდისტი მიმართავს შემდეგ წესს: ზღვრის ცნების შემოტანისა და სათანადო დამტკიცების გარეშე მაგალითების განხილვის ხარჯზე შემოიფარგლებიან ამ საკითხის სწავლებით. ფუნქციის წარმოებულის ცნებისა და მასთან დაკავშირებული თეორემების დამტკიცების გარეშე ასწავლიან აღნიშნულ საკითხს. ამ მეთოდს მიმართავენ დღესაც საქართველოს ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლებში. წარმოებულის სწავლების პროცესში აღნიშნული მეთოდის გამოყენებას მივყავართ ფორმალურ სწავლებამდე.

ზემოთ მოყვანილ მეცნიერთა და სხვათა შრომების პედაგოგიურ და მეთოდურ ღირსების გათვალისწინებით საკითხის გადმოცემისა და სწავლების ახალი მეთოდების გამოყენების თვალსაზრისით დიდი როლი შეასრულა ლეონარდ ეილერმა მათემატიკურ ანალიზში

გამოცემული სახელმძღვანელოებით [98],[99] რომლითაც მან ხელი შეუწყო, როგორც მათემატიკური მეცნიერების სისტემური კურსის ისე მათემატიკური სწავლების მეთოდების გაუმჯობესებას. ეილერი თავისი "დიფერენციალური აღრიცხვის" შესავალში ამბობს: დიფერენციალური აღრიცხვის განსაზღვრისათვის საჭიროა მისი საწყისი საფუძვლების გააზრება". ამით ეილერი ეწინააღმდეგება ფორმალურ სწავლებას და ზოგიერთი მეთოდისტის დღევანდელ აზრს, წარმოებულის სწავლების შესახებ ზღვრის ან სხვა მოსამზადებელი სამუშაოების გარეშე. ამ მიზნით იგი განსაზღვრავს თუ როგორ სიდიდეს ეწოდება მუდმივი და როგორს ცვლადი. მაგალითებზე დაყრდნობით ხსნის ცვლად სიდიდეებს შორის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას და შემდეგ გადადის ფუნქციის დიფერენცირებისა და ინტეგრალური აღრიცხვის შესაბამის განსაზღვრებაზე.

ეილერის ნაშრომებში ზღვრის ცნებას ვერსად ვერ ვიპოვით. ეილერი წინააღმდეგია იმ მათემატიკოსებისა, რომლებმაც საჭიროდ დაინახეს დიფერენციალისა და აბსოლუტურ ნულს შორის განსხვავების შემოყვანა და საგანგებო კატეგორიის უსასრულოდ მცირეთა სიდიდის დაწესება, მაგრამ ისეთის, რომელიც ყოველ მოცემულ სიდიდეზე ნაკლები იქნება.

ეილერი განიხილავს პრინციპულ საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია დიფერენციალური აღრიცხვის დაფუძნებასთან. ეილერს განზრახული აქვს ყველა ბუნდოვანებათა თავიდან მოშორება, რომლებიც დაკავშირებულია სიტყვა "უსასრულობასთან", როგორც უსასრულოდ დიდის, ისე უსასრულოდ მცირის მიმართ. მაგრამ ეილერი არა თუ აღწევს მიზანს არამედ საწინააღმდეგოს ღებულობს. მიზეზი ამის იმაში მდგომარეობს, რომ ეილერი არსად არ იძლევა მათემატიკური ცნებების – ცვლადი სიდიდისა და მისი ზღვრის – შესახებ საკმაოდ ზუსტ განსაზღვრას. ცვლადი სიდიდისათვის ეილერი

გვაძლევს ტავტოლოგიურ განსაზღვრას: "ცვლადი სიდიდე არის ისეთი სიდიდე, რომელიც მოცემული საკითხის განხილვისას, იზრდება ან მცირდება რა, იცვლება". ზღვრის ცნება როგორც უკვე ავღნიშნეთ, მას სრულებით არ შემოჰყავს; ამის გამო უსასრულოდ მცირედ ის გულისხმობს არა ცვლად სიდიდეს, არამედ თითქოს მუდმივ სიდიდეს, რომელიც ყოველ სიდიდეზე ნაკლებია, ხოლო უსასრულოდ დიდ სიდიდედ ისეთ მუდმივს, რომელიც ყოველ სიდიდეზე მეტია. აქედან ცხადია, რომ უსასრულოდ დიდი არ არსებობს და უსასრულოდ მცირე ნულის ტოლია.

ეილერი დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის სწავლების საფუძველს უსასრულო მცირეთა ანალიზის სწავლებაში ხედავს. აღნიშნული პრობლემით აგრეთვე დაინტერესებულები იყვნენ: რობერვალი (1602-1675), ტორიჩელი (1608-1647), ბარროუ(1630-1677), ლაგრანჟი (1736-1815).

ეილერისა და ბევრ მის თანამოაზრეთაგან განსხვავებით ჟოზეფ ლუი ლაგრანჟი ცდილობდა უსასრულო მცირეთა ანალიზის განდევნას მათემატიკიდან. წარმოებულს ლაგრანჟი განსაზღვრავდა როგორც ამ ფუნქციის უსასრულო მწკრივად დაშლის მეორე წევრის კოეფიციენტს. ეს დაშლა მთლიანად ეყრდნობა ზღვრის თვისებებს და ზღვრის ცნებისაგან განთავისუფლება მხოლოდ მოჩვენებითია, რადგან ასეთი თეორიის მკაცრი ამოხსნისას კვლავ მივდივართ ზღვრის ცნებამდე.

აღნიშნულმა თეორიამ მარცხი განიცადა, რადგან ვერც ლაგრანჟმა და ვერც მისმა მიმდევრებმა ვერ შეძლეს თეორიულად დაესაბუთებინათ "წარმოებულის მწკრივის " შემოტანა.

ლაგრანჟისეული მეთოდით წარმოებულის სწავლებას ბევრი მეცნიერ-მეთოდისტი შეეცადა. მათ შორის არიან:

1. ბენდუქიძე ავ. მრავალწევრის ექსტრემუმი და მისი მოძებნა [2]
2. კაკაბაძე გ. ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული [10]

3. კაკაბაძე გ. წარმოებული ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე[11]
4. კაპანაძე დ. წარმოებულის სწავლების ერთი ვარიანტის შესახებ[12]

მე-19 და მე-20 საუკუნეების მიჯნაზე მრეწველობისა და ტექნიკის განვითარებამ ევროპაში მათემატიკის სწავლებაში სულ უფრო მეტად პრაქტიკაში გამოყენების მიზნები წამოსწია წინ. აუცილებელი შეიქმნა მათემატიკაში მიღწეული მეცნიერული გამოკვლევები რაიმე გზებითა და საშუალებით მიგვეტანა საზოგადოებამდე. ყოველივე ეს მე-19 და მე-20 საუკუნეების მიჯნაზე სასკოლო მათემატიკურ განათლებაში რეფორმის საერთაშორისო მოძრაობის აღმოცენებისა და განვითარების მიზეზი გახდა. შეიქმნა "რეფორმისტული მოძრაობა" რომლის მეთაურად ფ. კლაინი გვევლინება. მისი აზრით სასკოლო მათემატიკის კურსში სხვა საკითხებთან ერთად შეტანილი უნდა ყოფილიყო მათემატიკური ანალიზის ელემენტები, შექმნილი ჯერ კიდევ მე-18 საუკუნეში და მაინც მათემატიკის სასკოლო კურსის ფარგლებს გარეთ დარჩენილი ორნახევარი საუკუნის მანძილზე.[4],[33],[38],

1902 წელს საფრანგეთში სკოლის რეფორმასთან დაკავშირებით გატარდა მათემატიკის სწავლების რეფორმაც, რაც იმაში გამოიხატება, რომ საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამაში შეტანილი იქნა უმაღლესი მათემატიკის ელემენტები. [44],[76]. 1904 წელს ბრესლავის ყრილობაზე გამოსულმა ორატორებმა ფ. კლაინის მეთაურობით დაასაბუთეს მათემატიკის სწავლების რეფორმის აუცილებლობა, რის შედეგად არჩეული იქნა კომისია 12 წევრის შემადგენლობით რომელთაც დაევალათ საშუალო სკოლის მათემატიკის პროგრამის შედგენა. კომისიის მიერ შემუშავებული დეტალური პროგრამა მათემატიკის სწავლების რეფორმისათვის წარედგინა 1905 წელს ქ. მერანის ყრილობას დასამტკიცებლად. ამ პროგრამას ეწოდა "მერანის" პროგრამა. ეს პროგრამა საფუძვლად დაედო საშუალო სკოლაში

მათემატიკის სწავლების რეფორმას ევროპის სხვადასხვა ქვეყნებში. [44],[45],[49],[53],[76]. რეალურად, სასწავლებლებში უმაღლესი მათემატიკის ელემენტების აღნიშნული პროგრამით სწავლება, სავალდებულო გახდა 1907-1908 წლებში. მათემატიკური სწავლების გაუმჯობესების გზებს მიეძღვნა სრულიად რუსეთის 1 და 2 ყრილობები 1911 და 1914 წლებში[89]

1914 წელს პარიზში მოწვეულ მათემატიკური განათლების საერთაშორისო კომისიაზე პროფესორ ე. ბორელის მიერ წინა პლანზე წამოწეული იყო უმაღლესი მათემატიკის ელემენტების სწავლების აუცილებლობა.[43] მე-20 საუკუნის 30-იანი წლებიდან როგორც მსოფლიოს სხვადასხვა ქვეყნებში ასევე საბჭოთა კავშირში იცვლება ტრადიციული და შემოდის ახალი საკითხებით გამდიდრებული პროგრამები. ძირითადად ეს ეხება ზღვართა თეორიის ელემენტებსა და წარმოებულის სწავლების საკითხებს. პროფ. ი. არნოლდის, ი. დუბროვის, ა. მარკუშევიჩის და ჩეტვერუხინის მიერ 1947 წელს შეიქმნა ახალი პროგრამა, რომელიც ითვალისწინებდა მათემატიკური ანალიზის საწყისების სწავლებას საშუალო სკოლაში. ამ პროგრამას ემხრობოდნენ: პ.ალექსანდროვი, ა.კოლმოგოროვი, ა.მარკუშევიჩი და სხვა. ეწინააღმდეგებოდნენ: ს. ნოვესოლოვი, ბ. კუტუზოვი, პ. მოდენოვი და სხვა. აღნიშნული იდეის გარშემო კამათი არ ცხრებოდა 1964 წლამდე. ამ წელს კი შეიქმნა სამუშაო კომისიები აკად. მარკევიჩის მიერ და ახალი პროგრამის პროექტი[39] სადაც ადგილი ეთმობოდა დიფერენციალური აღრიცხვის სწავლებას. მათემატიკის სასწავლო პროგრამების ირგვლივ ფართოდ გაშლილი დისკუსიის მიუხედავად 1968 წლიდან მოქმედებაში შემოვიდა აკად. ა. ნ. კოლმოგოროვის რედაქციით შემუშავებული პროგრამა.[60],[61].

ზღვართა თეორიის ქლემენტები საბჭოთა კავშირში 1948 წლამდე ისწავლებოდა გეომეტრიის სასკოლო კურსში, 1949 წლიდან იგი

შემოვიდა ალგებრის სასკოლო კურსში. რასაც მოჰყვა მწვავე კამათი. რ. მაცკინა და მ. მაცკინი ზღვრის კოშისეულ განსაზღვრას საკმარისად თვლიდნენ.[74] ეს განმარტება, როგორც ცნობილია ემყარება ε-ის მეთოდს, უსასრულოდ მცირეს გარეშე, ხოლო განმარტების აღქმისათვის მას წინ უძღვის მხოლოდ უსასრულო მიმდევრობის ცნება, რაც მოსწავლის აზროვნების მომწიფებისათვის საკმარისი არ არის. ზღვრის ცნების უკეთ აღქმისათვის აკად. ა. მარკუშევიჩი, ა. სიკორსკი და რ. ჩერკასოვი საკითხის განხილვას მაგალითებით იწყებენ [75] და მიდიან ზღვრის განმარტებამდე, რომელიც ემყარება ε-ის მეთოდს უსასრულოდ მცირეს ცნების გარეშე. ანალოგიურად იქცევა ე. კოჩეტკოვა და ე. კოჩეტკოვი თავიანთ საცდელ სახელმძღვანელოში.[59] აღნიშნული საკითხი საკმაოდ კარგადაა გადმოცემული ა. კოლმოგოროვის რედაქციით გამოცემულ სახელმძღვანელოში[65] საკითხის საერთო სახით განხილვა სასარგებლო იქნება სპეციალიზებული კლასების მოსწავლეთათვის.[61],[73]. რეფორმისტული მოძრაობა არნახული სისწრაფით ვითარდებოდა საფრანგეთში, ბელგიაში, იტალიაში, ამერიკაში, იაპონიაში, ზელანდიაში, პერუში, კოლუმბიაში, ვიეტნამში, ბირმაში და ა. შ. [49], [53], [86], [93].

მთელ რიგ ქვეყნებში და მათ შორის საქართველოში დღის წესრიგში დგას უმაღლესი მათემატიკის ელემენტების სწავლების ან არსწავლების საკითხი. დღეისათვის საქართველოს ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლების პროგრამის მიხედვით უმაღლესი მათემატიკის ელემენტებისაგან ისწავლება მხოლოდ წარმოებული (განმარტების გარეშე) და მხოლოდ მაგალითების ახსნა, წარმოებულის ცხრილის განხილვის ხარჯზე. აღნიშნული საკითხების სწავლების მეთოდებზე მუშაობდნენ მრავალი მეცნიერები:

ბურჭულაძე ვ., გოკიელი ლ., ქელბაქიანი ვ., ბენდუქიძე ავთ., კაკაბაძე გ., კაპანაძე დ. და მრავალი სხვა.

დღემდე შემუშავებული ზღვართა თეორიის სწავლების მეთოდთაგან ვერც ერთი ვერ აკმაყოფილებს ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლის მოთხოვნილებებს, თავისი მოცულობისა და გამოყენებული საკითხების გამო. ნებისმიერი ამ შრომათაგანი ვერ უზრუნველყოფს საკითხის სრულფასოვან წარმოდგენას და მიუღებელია მათი სწავლება ნებისმიერი ტიპის საშუალო სკოლაში. ყოველი ეს მეთოდი შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას სპეციალიზებულ სკოლებში.

ლაგრანჟის მიერ განხილული მეთოდის ირგვლივ გამოქვეყნებული შრომების განხილვისა და ახალი გზების მოძებნის ნიადაგზე აგებულია ახალი მეთოდი, რომელიც ჩვენი სადისერტაციო თემაცაა. მასში აღწერილი შრომათაგან განსხვავებით სრული სახითაა წარმოდგენილი წარმოებულისა და დიფერენციალის სწავლება ზოგადსაგანმანათლებლო საშუალო სკოლებში. შრომაში გამოყენებულია უმარტივესი ცნებები და დამტკიცებები, ამასთან დაცულია მათემატიკური სიმკაცრე. თანამედროვე სკოლის სახელმძღვანელოები იმეორებენ საუნივერსიტეტო დედუქციურ მიდგომას. ასეთი მიდგომა გაანგარიშებულია 17-18 წლის სტუდენტებისათვის, რომელთაც უკვე გააკეთეს არჩევანი ხოლო სასკოლო ასაკი 16 წლამდეა და მათთვის პროფესიის არჩევა ჯერ კიდევ წინ არის და არაა აუცილებელი, მათ თავისი მომავალი მათემატიკას დაუკავშირონ. ამიტომ თავიდანვე ვიტყვით, რომ საუბარია არა მათემატიკურ კლასებზე, რომლებმაც ზღვრისა და უწყვეტობის ცნებები არ იციან.

ნებისმიერი მეთოდის გამოყენებით წარმოებულის ცნების შესწავლა არ იქნება მყარი თუ არ განვიხილავთ მის საწინააღმდეგო

„ინტეგრების“ ოპერაციას. კერძოდ შემოტანილი გვაქვს განუსაზღვრელი და განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება. აქვე ნაჩვენებია, რომ განუსაზღვრელი ინტეგრალი არ არის ცალსახა ოპერაცია, რაც შეეხება განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებას იგი შემოტანილია მრუდი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის საშუალებით და რადგან ფიგურის ფართობს აქვს სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა ამიტომ აქედან ჩანს რომ, განსაზღვრული ინტეგრალი ცალსახა ოპერაცია. [47],[81].

საინტერესოა ისეთი სახის ამოცანების განხილვა, რომლებიც პრაქტიკულ საქმიანობასთანაა ახლოს. ასეთი სახის საკითხები ფართოდაა განხილული ლიტერატურაში მათი გაცნობით მოსწავლეები მიქლენ იმ დასკვნამდე, რომ ბევრი თეორიული საკითხი პრაქტიკული სახის ამოცანების გადაწყვეტამ შექმნა. ნიუტონი წარმოებულის ცნებამდე მიიყვანა მექანიკაში მოძრაობის სიჩქარის განსაზღვრის ამოცანამ, ხოლო ლაიბნიცი გეომეტრიაში წირისადმი მხების გავლების ამოცანამ. ასეთი სახის ამოცანები დღესაც ფართოდ იხსნება. წარმოებულის გამოყენება და ყოველივე ამის სწავლა მოსწავლეს უყალიბებს უნარ-ჩვევებს, რომ შემდგომში მარტივად გადაწყვიტოს მის წინაშე წამოჭრილი ამოცანები. განვიხილავთ ეკონომიკური სახის ამოცანებს რომლებიც წარმოებულის გამოყენებით იხსნება. აი რას ამბობს ა. ალექსანდროვი მათემატიკის შესახებ „არაფერია გასაკვირი, რომ ეს მეცნიერება, ისე როგორც სხვა წარმოიშვა ადამიანის მოთხოვნილების საფუძველზე. ყოველი ახალი აღმოცენებული ცოდნა არასრული მდგომარეობიდან სრულყოფილში გადადის. წარმოიშობა რა გრძნობადი აღქმის გზით იგი თანდათან ხდება ჩვენი განხილვის საგანი და ბოლოს გონების საკუთრებად იქცევა“ [35] მოსწავლეს აუცილებელია ჩამოვუყალიბოთ სათანადო უნარ-ჩვევები ეს კი მიიღწევა მათემატიკური საქმიანობის სრულყოფილი წარმართვით

"მათემატიკის სწავლება შესაძლოა და უნდა აიგოს ისე, რომ მოსწავლე მათემატიკური საქმიანობის ერთი დონიდან თანმიმდევრობით გადადიოდეს მომდევნო უფრო მაღალ დონეზე"[50],[90]

წარმოებულის სწავლებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი – პრაქტიკული სახის ამოცანების განხილვის შედეგად, შემოვიტანოთ წარმოებულის ცნება ან გამოვიყენოთ დედუქციის მეთოდი – ჯერ მივცეთ წარმოებულის განსაზღვრა და შემდეგ ვუჩვენოთ მისი პრაქტიკული გამოყენება. წარმოებულის შემოღებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ გეომეტრიული გზა– მკვეთიდან მხებისაკენ.

საკითხის გადაწყვეტა იმის შესახებ, თუ რომელი გზით შემოვიღოთ წარმოებულის ცნება, დამოკიდებულია როგორც კლასის მომზადებაზე ასევე პედაგოგზე.[31],[32][37],[97].

ჩვენი აზრით რომელიც ემთხვევა ლ. პონტრიაგინის მოსაზრებას მათემატიკურ ანალიზთან პირველი გაცნობა არ უნდა იწყებოდეს ზღვართა თეორიის შესწავლით ისტორიულად ინტეგრალური და დიფერენციალური აღრიცხვა იყო მათემატიკის კარგად განვითარებული დარგები მანამდე სანამ, გაჩნდებოდა ზღვართა თეორია.[1],[25]. ეს უკანასკნელი აღმოცენდა როგორც რომელიღაც ზედნაშენი უკვე არსებულ თეორიაზე. [83]

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე ვიტყვით, რომ დღეისათვის მათემატიკის სასკოლო პროგრამების დახვეწა დამუშავება არ არის დასრულებული და არც შეიძლება იყოს. სწავლების მეთოდიკის გარეშე „ესა თუ ის აღმოჩენა საკმაო ხანს ჯერ კიდევ მეცნიერებათა მხოლოდ ერთი გარკვეული ჯგუფისათვის არის ხოლმე ხელმისაწვდომი და გაცილებით უფრო გვიან ხდება მთელი განათლებული საზოგადოების საკუთრება". [9]

მხოლოდ მეთოდიკის წყალობით მიეწოდება უმოკლეს დროში ახალი აღმოჩენები საზოგადოებას და მათ შორის საშუალო სკოლის მოსწავლეებსაც.

ყოველივე ზემოთ აღწერილი სასწავლო პროგრამებისა და სწავლების მეთოდების ისტორიული მიმოხილვისა და დღევანდელი ცხოვრებისეული მოთხოვნების ნიადაგზე აქტუალურია ჩვენი სადისერტაციო თემა „მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი საკითხის სწავლების შესახებ“

იმისათვის, რომ მოსწავლეს ჩამოვუყალიბოთ მათემატიკური ცოდნის რეალური პრაქტიკული გამოყენების უნარი, საჭიროა შევქმნათ იმის საფუძველი, რომ სკოლის შემდგომ პერიოდში იგი მომზადებული იყოს შრომითი გონებრივი საქმიანობისათვის.

ასაკობრივ თავისებურებათა და მოტივაციის მნიშვნელობა

ადამიანთა საზოგადოებაში ბავშვობიდან დიდობაში გადასვლა ითვალისწინებს ცოდნის, ნორმებისა და ჩვევების გარკვეული სისტემის ფლობას, რის შედეგადაც ინდივიდს შეუძლია შრომა, საზოგადოებრივი ფუნქციის შესრულება და აქედან გამომდინარე ატაროს სოციალური ვალდებულება.

ფსიქოლოგები ანსხვავებენ მოზარდობისა და ჭაბუკობის პერიოდს, მაგრამ ქრონოლოგიური ზღვრები ამ პერიოდებისა პირობითია, ისინი იკვეთებიან. 14-18 წლის ადამიანებს, ხან მოზარდებს და ხანაც ჭაბუკებს უწოდებენ. 14-15 და 16-17 წლებს შორის ასაკს ზოგი განსაზღვრავს როგორც ადრეულ ჭაბუკობას, ზოგი კი მოწიფულობის დასასრულს. მე-7 საერთაშორისო კონფერენციაზე, რომელიც მიეძღვნა ასაკობრივი მორფოლოგიის, ფიზიოლოგიისა და ბიოქიმიის პრობლემებს, მიღებულ იქნა ასაკობრივი პერიოდიზაციის

შემდეგი სქემა: მოზარდობის პერიოდი 13-16 წ.წ. ბიჭებისათვის და 12-15 წ.წ. გოგონებისათვის, ჭაბუკობისა 17-21წ.წ. ბიჭებისათვის და 16-20 წ.წ. გოგონებისათვის. [62]

ფსიქოლოგიურ-პედაგოგიურ ლიტერატურაში აქცენტი გადააქვთ შემოქმედების წამყვანი ფორმების ცვლაზე. თუმცა ეს პერიოდიზაციაც არ არის ცალსახა და არ მოიცავს პიროვნების განვითარების ყველა მხარეს. დ. ელკონინი 11-დან 17 წლამდე პერიოდს უწოდებს "მოზარდობის" პერიოდს და მას მიიჩნევს წამყვან შემოქმედებითად (საშუალო სასკოლო ასაკი). [56] იგი სპორტულ, მხატვრულ, შრომით და სხვა საზოგადოებრივ ორგანიზაციულ ურთიერთობებს თვლის საზოგადოებრივ სასარგებლო შემოქმედებით საქმიანობად. შემოქმედების ამ გზაზე მოზარდები ითვისებენ იმ ხერხებს რომლებიც საჭიროა ურთიერთობის დასამყარებლად დასახული ამოცანის მიხედვით შეგნებულად ეუფლებიან კოლექტივში მიღებულ ნორმებს. 15-17 (უფროსი სასკოლო) წლებში წამყვანი ხდება სასწავლო პროფესიული შემოქმედება, რის გამოც უფროსკლასელებში ფორმირდება განსაზღვრული შემეცნებითი და პროფესიული ინტერესი, კვლევითი ინტერესის ელემენტები. ისინი აგებენ ცხოვრებისეულ გეგმებს და გამოუმუშავდება თვითშეგნება.[40] ლ. ბოჟოვიჩი უფროს სასკოლო ასაკს მიიჩნევს, როგორც ჭაბუკობისას, მიმართავს რა ყველა თავის შეხედულებას პიროვნების მოტივაციური სფეროს განვითარებისკენ. უფროსკლასელის მიერ ცხოვრებაში თავისი ადგილისა და პოზიციის განსაზღვრა მსოფლმხედველობის ჩამოყალიბება, თვითშეგნება და მორალური შეგნება. პროფ. ა. პეტროვსკის სახელმძღვანელოში "ასაკობრივი და პედაგოგიური ფსიქოლოგია" მოზარდობის პერიოდი დადგენილია 11-12 და 14-15 წლებს შორის, ხოლო 14-15 და 17 წლებს შორის პერიოდი განისაზღვრება, როგორც ადრეული ჭაბუკობის პერიოდი. [82].

ამგვარად, უნივერსალური სქემის ნაცვლად მხედველობაში უნდა მივიღოთ არა მარტო ქრონოლოგიური ასაკი ან შესასწავლი ინდივიდის განვითარების ფაზა, არამედ:

1. იმ საზოგადოების კულტურის საერთო ნიშნები, რომელსაც ის ეკუთვნის;
2. მისი სოციალურ-ეკონომიური მდგომარეობა;
3. მისი განვითარების ისტორიული სიტუაცია და მისი თაობის თავისებურებები;
4. მისი სქესი;
5. მისი ინდივიდუალურ-ტოპოლოგიური თვისებები.

15-18 წლების ასაკობრივი ჯგუფის ახალგაზრდებისათვის დამახასიათებელია ძიებითი აქტივობის მოთხოვნა. ესაა ცხოვრებისეული მოვლენებისადმი შემოქმედებითი მიდგომა-დამოკიდებულება. ამ პერიოდში აღსანიშნავია მსოფლმხედველობის ჩამოყალიბება. მსოფლმხედველობის ჩამოყალიბება ადრე იწყება გარკვეული ზნეობრივი ჩვევების ათვისებითა და სიმპატია-ანტიპატიების ჩამოყალიბებით, რომლებიც შემდგომ ცნობიერდებიან და ქცევის პრინციპებად იქცევიან. პიროვნების განვითარების უფრო მაღალ საფეხურზე, ჭაბუკობის ასაკში, ეს პრინციპები ერთ მთლიან სისტემად ყალიბდება, რაც პიროვნებას საშუალებას აძლევს არა მარტო გაიგოს და შეიმეცნოს სამყარო, არამედ შეაფასოს კიდეც იგი და გაარკვიოს მასთან დამოკიდებულება. მსოფლმხედველობის ფორმირების პირველი მაჩვენებელია სამყაროს ზოგადი პრინციპებისადმი, ბუნებისა და ადამიანური ყოფიერების უნივერსალური კანონებისადმი შემეცნებითი ინტერესი. უნდა აღინიშნოს, რომ ამ დონეს უფროსკლასელთა ნაწილი უფრო გვიან აღწევს. ამ ასაკში იზრდება არა მარტო ცოდნის დონე და მოცულობა, არამედ მნიშვნელოვნად ფართოვდება გონებრივი თვალსაწიერი და

ჩნდება კონკრეტული ფაქტების მრავალფეროვნების ზოგად პრინციპებზე დაყვანის თეორიული ინტერესი და მოთხოვნილება.

უფროს სასკოლო ასაკში მსოფლმხედველობის განმტკიცებას ხელს უწყობს სასწავლო დისციპლინების თეორიული საფუძვლების ათვისება და საგანთაშორისო კავშირების განვითარება. ჭაბუკები ეცნობიან ბუნებისა და საზოგადოების ზოგად კანონებს, რის საფუძველზე უმუშავდებათ სამყაროს განზოგადოებული და სისტემატიზირებული ხედვა.

მსოფლმხედველობა არის სამყაროს შესახებ თეორიულად დასაბუთებული შეხედულებათა სისტემა. მსოფლმხედველობრივი სისტემები განსხვავდებიან იმით, თუ როგორია მათი მეთოდები, კავშირი მეცნიერებასთან, საზოგადოებრივ ძალებთან, რომელთა ინტერესსაც ისინი გამოხატავენ. ყოველი მსოფლმხედველობა მოიცავს არა მარტო სამყაროს ახსნის თეორიას, არამედ მისი შემეცნების მეთოდებსაც. მეცნიერულია მსოფლმხედველობა, როდესაც სწორად ასახავს სინამდვილეს, განმტკიცებული და დადასტურებულია საბუნებისმეტყველო საზოგადოებრივ მეცნიერებათა მონაცემებით, საზოგადოებრივი პრაქტიკით. [56]

გარდამავალი ასაკის ბავშვებისაგან განსხვავებით, რომელმაც მოიპოვა რაღაც ინფორმაცია, მათ აინტერესებთ ამ მოვლენის ახსნა, უფროსკლასელი ცდილობს გაიგოს, რა იცის მეცნიერებამ ამ მოვლენის შესახებ. თუ იგი აღმოაჩენს, რომ ამ მოვლენის შესახებ განსხვავებული შეხედულებები არსებობს, ჭაბუკი ცდილობს გაიაზროს ეს განსხვავებული თვალსაზრისები და შეიმუშაოს საკუთარი აზრი.

უფროსკლასელთა სასწავლო საქმიანობა შინაარსითა და ხასიათით მნიშვნელოვნად განსხვავდება გარდამავალი ასაკის საქმიანობისაგან. უფროს სასკოლო ასაკში სასწავლო საქმიანობა გვევლინება შემეცნებითი ფსიქიკური პროცესის განვითარების

მამოძრავებელ ძალად. მაშინ როცა გარდამავალი სასკოლო ასაკისათვის სასწავლო საქმიანობა " მნემურ-რეპროდუქციულ" ხასითს ატარებს, მათთვის მთავარია იმის დამახსოვრება, რაც მოისმინეს და სახელმძღვანელოში ამოიკითხეს.

არსებითი ძვრები ხდება უფროსკლასელთა აზროვნების განვითარების მიმართულებით, იცვლება გონებრივი მუშაობის ხასიათი. აზროვნება ღებულობს აქტიურ, დამოუკიდებელ შემოქმედებით ხასიათს. ინტელექტუალური განვითარება მხოლოდ იმაში კი არ გამოიხატება, რომ გროვდება გარკვეული ცოდნა და იცვლება ინტელექტის გარკვეული მხარეები, არამედ ყალიბდება გონებრივი შემოქმედების ინდივიდუალური სტილი. იწყება ნამდვილი მეცნიერული პრობლემური აზროვნების ფორმირება. რის გამოც ხდება სასწავლო საგნების ინტერესების მეცნიერულ ინტერესებში გადაზრდა. 16-17 წლის ასაკიდან გარკვეული ტემპით ვითარდება დასკვნითი აზროვნების უნარი, რასაც ლოგიკური აზროვნების ჩამოყალიბების თვალსაზრისით გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება. ლაპარაკობენ, უფროსკლასელთა აზროვნების სიღრმის შესახებ, რომელშიც გულისხმობენ იმას, რომ ახლა ჭაბუკს შეუძლია მოვლენათა სიმრავლიდან არსებითის გამოყოფა და გამომწვევი მიზეზების დადგენა. მათზე ძლიერ მოქმედებს დასაბუთება და ლოგიკა. ყოველივე ეს თეორიული და შემოქმედებითი აზროვნების ჩამოყალიბების წინამძღვარია. ჭაბუკობის პერიოდი გონებრივი შესაძლებლობების განვითარების განსაკუთრებული პერიოდია. საბჭოთა ფსიქოლოგი ნ. ლეიტისი [71] საკუთარი ექსპერიმენტის ანალიზის შედეგებზე დაყრდნობით აღნიშნავს, რომ ჭაბუკებს თეორიული აზროვნების მეტად განვითარებული დონე შეენიშნებათ, ისინი ხშირად და პრინციპულად სვამენ კითხვას "რატომ? მათი აზროვნებით შემოქმედება უფრო

აქტიური და დამოუკიდებელია, მათთვის უფრო საინტერესოა ის, რაც დამოუკიდებელ აზროვნებას მოითხოვს.

შემეცნებითი ფუნქციებისა და ინტელექტის განვითარებას ჭაბუკობისას აქვს ორი მხარე – რაოდენობრივი და თვისობრივი. რაოდენობრივი ცვლილებები გამოიხატება იმაში, რომ ჭაბუკი ინტელექტუალურ ამოცანებს ხსნის იოლად, სწრაფად და ეფექტურად, ვიდრე აქამდე, ხოლო თვისობრივი ცვლილებები შემეცნებითი პროცესების სტრუქტურაში ძვრა: მთავარია არა ის თუ როგორ ამოცანებს ხსნის, არამედ როგორ აკეთებს ამას.

ინდივიდის გონებრივი განვითარების მაჩვენებელია ისეთი ამოცანები, რომელთა ამოსახსნელად იყენებს ახალ გონებრივ თვისებებს, ახალი გონებრივი თვისებები კი მჟღავნდება საინტერესოში. ამიტომ იმისათვის რათა გამოვლინდეს პიროვნების რეალური გონებრივი პოტენციალი, უნდა შეირჩეს უპირატესი ინტერესის სფერო [78].

ინტერესი, როგორც პიროვნების შემოქმედების არჩევითი მიმართულება წარმოადგენს რთულ ფსიქოლოგიურ პროცესს. ფსიქოლოგიური გარემო, რომელთანაც ურთიერთობს პიროვნება, განსაზღვრავს ინტერესის ფორმირებას.

შემეცნებითი ინტერესი ვარაუდობს დადებითი დამოკიდებულების არა მხოლოდ შემეცნების ობიექტისადმი, არამედ შემეცნებითი შემოქმედების მიმართაც. ამიტომ მათემატიკის სწავლებისას, კერძოდ წარმოებულების სწავლებისას განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს მოსწავლეთა ჩართვას შემოქმედებითი ამოცანების ამოხსნაში. ეს განაპირობებს შინაგანი იძულების განვითარებას მუდმივი შემოქმედებითი შემეცნებითი მოღვაწეობისაკენ. შემეცნებითი ინტერესი მოიცავს სამ ფსიქოლოგიურ ელემენტს: ინტელექტი (ამოცანების ამოხსნისათვის მზადყოფნა), ემოცია (ახალი სიტუაციით დაკვირვება),

ნებისყოფა (ძალების გამოყენება ამოხსნისათვის) ე. ი. პიროვნების დადებითი ინტელექტუალური ემოციური დამოკიდებულება ცოდნისადმი, რომელიც სტიმულს აძლევს ცოდნის ღრმა ფლობას მათი პრაქტიკაში გამოყენების მიზნით [15],[69],[70]. "შემეცნებითი ინტერესი არის სწავლების ძლიერი მოტივი, რომელიც გარკვეულ პირობებში გარდაიქმნება თვით პიროვნების მყარ განათლებად მისი ცალკეული ქმედებისა და შემოქმედების მძლავრ მაღვივებელ ძალად [77].

გარკვეული სურვილებისაგან განსხვავებით, შემეცნებითი ინტერესში ჩართვით მკვეთრად გამოსახულია გარკვეული ობიექტებისკენ მიმართულება რომლის შემეცნებისკენაც მიისწრაფვის მოსწავლე.

§1.2 წარმოებულის განსაზღვრის ერთი მეთოდი

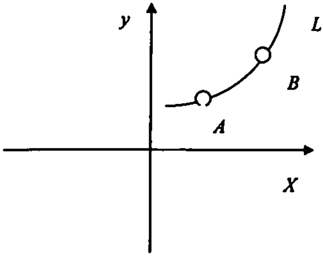
წარმოებულის ცნება ეს არის იგივე ფუნქციის ცნება ახალ ასპექტში, ამიტომ სანამ გადავიდოდეთ წარმოებულის განსაზღვრაზე, მანამ საჭიროა განვლილი მასალის გამეორების საშუალებით მოსწავლეებში განვამტკიცოთ ცოდნა ფუნქციის შესახებ, ფუნქციის წარმოებული ხომ მისი საშუალებით განისაზღვრება და წარმოებული თვითონ არის ფუნქცია.

ფუნქციის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ცნებაა. ფუნქციური დამოკიდებულების ცნების გამოყენებით შეგვიძლია ავსახოთ მატერიალურ სამყაროში არსებული დამოკიდებულებანი. ამ ცნებით ნათლად გამოისახება რეალური სინამდვილის ცვალებადობა და დინამიურობა, რეალური ობიექტებისა და პროცესების ურთიერთკავშირი.

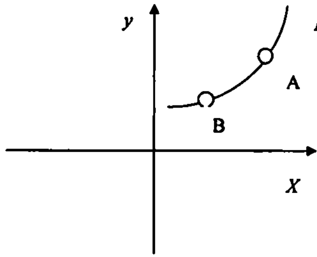
ფუნქციის თანამედროვე გაგებას საფუძვლად უდევს შესაბამისობის იდეა. შესაბამისობის შინაარსის აღქმის შემდეგ ადვილი ხდება ფუნქციის ცნების არსში გარკვევა. რაც საშუალებას გვაძლევს შემეცნების გზით შევისწავლოთ ფუნქციის ირგვლივ არსებული საკითხები და მათ შორის წარმოებული.

ქვემოთ განვიხილავთ ფუნქციებს და მათ წარმოებულებს ზღვრის გამოყენების გარეშე, დავამტკიცებთ თეორემებს ჯამის, სხვაობის, განაყოფის, რთული ფუნქციების შესახებ. ახალი მეთოდის გამოყენებით გადავწყვეტთ ალგებრული, ფიზიკური და ეკონომიკური სახის ამოცანებს.

ვთქვათ მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქცია და მისი გრაფიკია L. ამ გრაფიკზე ავიღოთ წერტილი $A(x,y)$, A წერტილის მარჯვნივ ავიღოთ მასთან ახლოს მდებარე წერტილი $B(\xi,\eta)$ (იხ. ნახაზი 1)



ნახაზი 1



ნახაზი 2

და შევადგინოთ ფარდობა

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} \text{ სადაც } \xi \neq x \qquad (1.2.1)$$

ამ ფარდობას ვუწოდოთ დიფერენციალური გამოსახულება.

თუ დიფერენციალურ გამოსახულებას ელემენტარული გარდაქმნებით ისეთ სახეზე დავიყვანთ, რომ მასში ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ექნება მაშინ ელემენტარული გარდაქმნებით მიღებულ გამოსახულებას ვუწოდოთ x წერტილში ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული და ავღნიშნოთ $f'_+(x)$ ესე იგი

$$f'_+(x)=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} \qquad (1.2.2)$$

ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმას ვახდენთ მხოლოდ დიფერენციალური გამოსახულების ელემენტარული გარდაქმნებით დაყვანილ გამოსახულებაში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც B წერტილი მდებარეობს A წერტილის მარცხნივ (ნახაზი 2) მაშინ

$$f'_-(x)=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} \qquad (1.2.3)$$

და ვუწოდოთ x წერტილში ფუნქციის მარცხენა წარმოებული. თუ $f'_+(x)=f'_-(x)$ მაშინ ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული x წერტილში და იგი $f'(x)$-ის ტოლია ესე იგი

$$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x) \tag{1.2.4}$$

თუ $f'_+(x)\neq f'_-(x)$ ან დიფერენციალური გამოსახულება ელემენტარული გარდაქმნებით არ დაიყვანება ისეთ სახეზე რომ მასში ξ -ის ნაცვლად x-ის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ჰქონდეს მაშინ ვიტყვით რომ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში წარმოებული არა აქვს.

აქვე მივუთითოდ მოსწავლეებს, რომ წარმოებული მოცემული $x=x_0$ მნიშვნელობისათვის, თუ იგი არსებობს არის სრულიად განსაზღვრული რიცხვი. თუ წარმოებული არსებობს მონაკვეთის ყოველ წერტილში რომელშიც განსაზღვრულია ფუნქცია, მაშინ წარმოებული წარმოადგენს x-ის ფუნქციას.

თეორემა 1. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში მაშინ $f(x)+g(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x) \tag{1.2.5}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ $f(x)+g(x)$ ფუნქციისათვის დიფერენციალური გამოსახულება. გვექნება:

$$\left.\frac{f(\xi)+g(\xi)-(f(x)+g(x))}{\xi-x}\right|_{\xi}^{x}=\left.\frac{f(\xi)-f(x)+g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\right|_{\xi}^{x}=\left(\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}+\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\right)\Big|_{\xi}^{x}$$
$$\left.\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\right|_{\xi}^{x}+\left.\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\right|_{\xi}^{x}=f'(x)+g'(x)$$

მართლაც, მივიღეთ, რომ $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 2: თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში მაშინ $f(x)-g(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\left(f(x)-g(x)\right)' = f'(x)-g'(x) \tag{1.2.6}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ $f(x)-g(x)$ ფუნქციისათვის დიფერენციალური გამოსახულება:

$$\frac{f(\xi)-g(\xi)-(f(x)-g(x))}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{f(\xi)-f(x)-g(\xi)+g(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} = \left(\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}-\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\right)\Big|_{\xi}^{x} =$$
$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} - \frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} = f'(x)-g'(x)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა3. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში მაშინ $f(x)*g(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია იმავე წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$(f(x)*g(x))' = f'(x)*g(x)+g'(x)*f(x) \tag{1.2.7}$$

დამტკიცება: შევადგინოთ $f(x)*g(x)$ ფუნქციისათვის დიფერენციალური გამოსახულება:

$$\left(f(x)*g(x)\right)' = \frac{f(\xi)*g(\xi)-f(x)*g(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{f(\xi)*g(\xi)-f(x)*g(\xi)+f(x)*g(\xi)-f(x)*g(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}$$

$$= \frac{(f(\xi)-f(x))*g(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} + \frac{f(x)\left(g(\xi)-g(x)\right)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} = \left(\frac{(f(\xi)-f(x))*g(x)}{\xi-x}+\frac{f(x)\left(g(\xi)-g(x)\right)}{\xi-x}\right)\Big|_{\xi}^{x} =$$
$$g(x)*\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} + f(x)*\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x} = f'(x)*g(x)+g'(x)*f(x)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

თეორემა 4. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია x წერტილში და $g(x)\neq 0$ მაშინ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ფუნქციაც წარმოებადია x წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)*g(x)-g'(x)*f(x)}{g^2(x)} \tag{1.2.8}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ფუნქციის დიფერენციალური გამოსახულება:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=\frac{f(\xi)*g(x)-f(x)*g(\xi)}{g(x)*g(\xi)*(\xi-x)}\Bigg|_{\xi}^{x}=\\ &=\frac{f(\xi)*g(x)-f(x)*g(x)+f(x)*g(x)-f(x)*g(\xi)}{g(x)*g(\xi)*(\xi-x)}\Bigg|_{\xi}^{x}=\\ &=\frac{f(\xi)-f(x)}{(\xi-x)*g(x)}*\frac{g(x)}{g(\xi)}\Bigg|_{\xi}^{x}-\frac{f(x)}{g(x)}*\frac{g(\xi)-g(x)}{g(\xi)*(\xi-x)}\Bigg|_{\xi}^{x}=\\ &=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}*\frac{1}{g(\xi)}\Bigg|_{\xi}^{x}-\frac{f(x)}{g(x)*g(\xi)}\Bigg|_{\xi}^{x}*\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=\\ &=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)*g'(x)}{g^2(x)}=\frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში, მაშინ $k*f(x)$ ფუნქციაც წარმოებადია, სადაც $k=const$ და მართებულია

$$(kf(x))'=k*f'(x) \tag{1.2.9}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ $k*f(x)$ ფუნქციისათვის დიფერენციალური გამოსახულება:

$$(k*f(x))'=\frac{k*f(\xi)-k*f(x)}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=k*\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=k*f'(x)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.[17]

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი1. ვიპოვოთ $y=x^2$ ფუნქციის წარმოებული. შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$(x^2)'=\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}\Big|_\xi^x=\frac{(\xi-x)*(\xi+x)}{\xi-x}\Big|_\xi^x=(\xi+x)\Big|_\xi^x=2*x$$

ამგვარად მივიღებთ $(x^2)'=2x$

მაგალითი2. ვიპოვოთ $y=k*x$ ფუნქციის წარმოებული . შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$(k*x)'=\frac{k*\xi-k*x}{\xi-x}\Big|_\xi^x=k*\frac{\xi-x}{\xi-x}\Big|_\xi^x=k$$

ამგვარად, $(kx)'=k$

ყველა განხილულ მაგალითში ფუნქციებს განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში ჰქონდათ წარმოებული. მაგრამ არსებობს ფუნქციები რომელთაც განსაზღვრის არის შიგა წერტილში წარმოებული არა აქვს.

მაგალითი3. ვიპოვოთ $y=|x|$ ფუნქციის წარმოებული $x=0$ წეტილში.

1) ვიპოვოთ მარჯვენა წარმოებული $x>0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს $y=x$, ამიტომ $|x|$-ის წარმოებული ასეთ წერტილებში x'-ის ტოლია ესე იგი x-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის $|x|'=1$

$$y_+'(0)=\frac{\xi-x}{\xi-x}\Big|_\xi^x=1\Big|_\xi^x=1$$

2) ვიპოვოთ მარცხენა წარმოებული $x<0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს $y=-x$, ამიტომ უარყოფითი x-ებისათვის $|x|'=-1$

$$y'_{-}(0)=\frac{-\xi+x}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=-1\Big|_{\xi}^{x}=-1$$

ამგვარად, $y'_{+}(0)\neq y'_{-}(0)$ მოცემულ ფუნქციას 0 წერტილში წარმოებული არა აქვს.

მაგალითი4. ვიპოვოთ $y=|x|+x^2$ ფუნქციის წარმოებული $x=0$ წერტილში.

1) ვიპოვოთ მარჯვენა წარმოებული $x>0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს $y=x+x^2$

$$y_{+}'=\frac{\xi+\xi^2-x-x^2}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=\frac{\xi-x+(\xi-x)*(\xi+x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=(1+\xi+x)\Big|_{\xi}^{x}=1+2*x$$

$$y'_{+}(0)=(1+2*x)\Big|_{x}^{0}=1+2*0=1$$

2)ვიპოვოთ მარცხენა წარმოებული $x<0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$y=-x+x^2$$

$$y'_{-}(x)=\frac{-\xi+\xi^2+x-x^2}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=(-1+\xi+x)\Big|_{\xi}^{x}=-1+2*x$$

$y'_{-}(0)=(-1+2*x)\Big|_{\xi}^{x}=-1$ საბოლოოდ მივიღებთ $y'_{-}(0)\neq y'_{+}(0)$. ამგვარად, მოცემულ ფუნქციას 0 წერტილში წარმოებული არა აქვს.

მაგალითი5. ვიპოვოთ $y=x^2+2x+8$ ფუნქციის წარმოებული. შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$(x^2+2x+8)'=\frac{\xi^2+2\xi+8-(x^2+2x+8)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=\frac{\xi^2-x^2}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}+\frac{2\xi-2x}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}+\frac{8-8}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=$$

$$=(\xi+x)\Big|_{\xi}^{x}+2\Big|_{\xi}^{x}+0\Big|_{\xi}^{x}=2x+2$$

ამგვარად $(x^2+2x+8)' = 2x+2$

§1.3 ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოებული

გამოვთვალოთ შემდეგი ფუნქციის წარმოებული:

$$y = f(x) = a_0 * x^n + a_1 * x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} * x + a_n \qquad (1.3.1$$

ანუ, ნებისმიერად აღებული მუდმივ $a_0, a_1, \ldots a_n$ კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის წარმოებული x-ით.

უპირველეს ყოვლისა გამოვთვალოთ ერთწევრად დაყვანილი უმარტივესი n ხარისხის მრავალწევრის წარმოებული.

გვაქვს:
$$y = f(x) = x^n \qquad (1.3.2)$$

(1.3.2) ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლისას ჩვენ ვისარგებლოთ ალგებრის ერთი ძალიან მარტივი, მაგრამ მნიშვნელოვანი ფორმულით რომლის დამტკიცებასაც აქ მოვიყვანთ.

ალგებრის ამ ფორმულის ჩაწერისა და დამტკიცებისათვის შემოვიტანოთ განსახილველად ორი u და v ცვლადის მრავალწევრი $\varphi_k(u,v)$, რომელიც მოცემულია ფორმულით:

$$\varphi_k(u,v) = u^k + u^{k-1}v + u^{k-2} * v^2 + \ldots + u * v^{k-1} + v^k \qquad (1.3.3)$$

ამგვარად, $\varphi_k(u,v)$ მრავალწევრი წარმოადგენს $u^i * v^j$ სახის ერთწევრების ჯამს სადაც i და j არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია დაკავშირებული პირობით $i + j = k$, $\varphi_k(u,v)$ მრავალწევრი გავამრავლოთ u სიდიდეზე, ანუ შევადგინოთ მრავალწევრი:

$$\varphi_k(u,v) * u \qquad (1.3.4)$$

ეს მრავალწევრი წარმოადგენს $u^{i+1} * v^j$ სახის ერთწევრების ჯამს. ამგვარად (1.3.4) მრავალწევრი წარმოადგენს $u^p * v^q$ სახის ერთწევრების

ჯამს, სადაც p და q მთელი არაუარყოფითი რიცხვებია, დაკავშირებული პირობით $p \geq 1$ $p+q=k+1$

ამგვარად (1.3.4) მრავალწევრი შეიცავს ყველა შესაკრებს, რომელიც შედის $\varphi_{k+1}(u,v)$ მრავალწევრში v^{k+1} წევრის გამოკლებით, ამიტომ გვაქვს ტოლობა:

$$\varphi_k(u,v) * u = \varphi_{k+1}(u,v) - v^{k+1} \tag{1.3.5}$$

ზუსტად ასევე $\varphi_k(u,v)$ და v-ზე გამრავლებით მივიღებთ ფორმულას:

$$\varphi_k(u,v) * v = \varphi_{k+1}(u,v) - u^{k+1} \tag{1.3.6}$$

(1.3.5) ფორმულას გამოვაკლოთ (1.3.6), მივიღებთ:

$$\varphi_k(u,v) * (u-v) = u^{k+1} - v^{k+1} \tag{1.3.7}$$

თუ ამ ტოლობაში $k+1$ შევცვლით n-ით და მიღებულ შესაბამისობას გავყოფთ $(u-v)$-ზე, მივიღებთ ჩვენთვის მნიშვნელოვან ფორმულას:

$$\frac{u^n - v^n}{u-v} = \varphi_{n-1}(u,v) \tag{1.3.8}$$

სადაც, $\varphi_{n-1}(u,v)$ განისაზღვრება ფორმულით:

$$\varphi_{n-1}(u,v) = u^{n-1} + u^{n-2} * v + ... + u * v^{n-2} + v^{n-1} \tag{1.3.9}$$

აქ $n \geq 1$, შევნიშნოთ, რომ $\varphi_{n-1}(u,v)$ მრავალწევრი შეიცავს ზუსტად n წევრს.

(1.3.8) ფორმულის გამოყენებით გამოვთვალოთ $y = x^n$ ფუნქციის წარმოებული. შევადგინოთ მისთვის დიფერენციალური გამოსახულება:

$$(x^n)' = \frac{\xi^n - x^n}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = (\xi^{n-1} + \xi^{n-2} * x + ... + \xi * x^{n-2} + x^{n-1})\Big|_{\xi}^{x} = n * x^{n-1} \tag{1.3.10}$$

(1.3.8) ფორმულა სამართლიანია $n \geq 2$-სათვის, შესაბამისად $n=0$ შემთხვევა არ განიხილება.

განვიხილოთ $f(x) = c$, $c = const$, კონკრეტული შემთხვევა. შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$f'(x)=\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=\frac{c-c}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=0\Big|_{\xi}^{x}=0$$

ე.ი. მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია. მუდმივის წარმოებულის ნიშნის გარეთ გატანისა და ჯამის წარმოებულის წესის გათვალისწინებით შეგვიძლია გამოვიყვანოთ გაწარმოების განზოგადებული წესი. დავუშვათ მოცემულია $f_1(x), f_2(x),....,f_m(x)$ ფუნქციები და $c_1,c_2,...,c_m$ მუდმივები.

დავამტკიცოთ, რომ

$$(c_1*f_1(x)+c_2*f_2(x)+..+c_m*f_m(x))'=c_1*f_1'(x)+c_2*f_2'(x)+...+c_m*f_m'(x) \quad (1.3.11)$$

ამ დამტკიცებას ვაწარმოებთ ინდუქციის მეთოდით. $m=1$ შემთხვევაში იგი ემთხვევა ჩვენს მიერ უკვე განხილულ წესს, დავუშვათ იგი სამართლიანია $(m-1)$ რაოდენობა ფუნქციებისათვის და დავამტკიცოთ m რაოდენობა ფუნქციებისათვის. თუ გამოვიყენებთ ჯამის წაროებულის პოვნის წესს გვექნება:

$$(c_1*f_1(x)+c_2*f_2(x)+..+c_m*f_m(x))'=(c_1*f_1(x)+c_2*f_2(x)+...+c_{m-1}*f_{m-1}(x))'+c_m*f_m'(x)=$$
$$=c_1*f_1'(x)+c_2*f_2'(x)+...+c_m*f_m'(x)$$

ამგვარად (1.3.11) დამტკიცებულია.

ყოველივე ზემოთ თქმულის გათვალისწინებით შეგვიძლია ვიპოვოთ (1.3.1) ფუნქციის წარმოებული:

$$(a_0*x^n+a_1*x^{n-1}+...+a_{n-1}*x+a_n)'=a_0*(x^n)'+a_1*(x^{n-1})'+...+a_{n-1}*x'+a_n'=$$
$$n*a_0*x^{n-1}+(n-1)*a_1*x^{n-2}+...+a_{n-1}$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია $y=\varphi(x)=f(u)$ ფუნქცია, სადაც $u=g(x)$. თუ არგუმენტის რაიმე x მნიშვნელობისათვის $u=g(x)$, ფუნქცია წარმოებადია, ხოლო u-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის $\varphi(x)=f(u)$

ფუნქციაც წარმოებადია, მაშინ რთული $\varphi(x)=f(g(x))$ ფუნქციის წარმოებული არსებობს და მართებულია ტოლობა:

$$\varphi'_x = f'_u * g'_x \qquad (1.3.13)$$

მართლაც განვიხილავთ, რა $y=\varphi(x)=f(g(x))$ ფუნქციის დიფერენციალურ გამოსახულებას მივიღებთ:

$$(\varphi(x))' = \frac{\varphi(\xi)-\varphi(x)}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{f(g(\xi))-f(g(x))}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{f(g(\xi))-f(g(x))}{g(\xi)-g(x)}\Big|_{\xi}^{x} * \frac{g(\xi)-g(x)}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} \qquad (1.3.14)$$

$$= f'(g(x)) * g'(x) = f'(u) * g'(x)$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი1.

ვიპოვოთ $\varphi(x)=(3*x+1)^{10}$ ფუნქციის წარმოებული.

იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\varphi(x)=f(g(x))$ რთული ფუნქციის სახით. სადაც:, $u=g(x)=3*x+1$, $g'(x)=3$, $f(u)=u^{10}$,

$f'(u)=10*u^9$, $\varphi'(x)=f'(u)*g'(x)$, $\varphi'(x)=10*u^9*3=30*(3*x+1)^9$

მაგალითი2.

ვიპოვოთ $\varphi(x)=\sqrt[3]{7*x^4+4*x+1}$ ფუნქციის წარმოებული. იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\varphi(x)=f(g(x))$ რთული ფუნქციის სახით, სადაც

$u=g(x)=7*x^4+4*x+1$, $f(u)=u^{\frac{1}{3}}$ რადგან $g'(x)=28*x^3+4$ $f'(u)=\frac{1}{3}*u^{\frac{-2}{3}}$;

$$\varphi'(x)=f'(u)*g'(x)=\frac{1}{3*\sqrt[3]{(7*x^4+4*x+1)^2}}*(28*x^3+4)$$

მაგალითი3.

ვიპოვოთ $\varphi(x)=f(g(x))=(x^2+1)^n$ რთული ფუნქციის წარმოებული. ამისათვის შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$((x^2+1)^n)' = \frac{(\xi^2+1)^n-(x^2-1)^n}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{(\xi^2+1)^n-(x^2-1)^n}{(\xi^2+1)-(x^2-1)}\Bigg|_{\xi}^{x} \frac{(\xi^2+1)-(x^2-1)}{\xi - x}\Bigg|_{\xi}^{x} =$$

$$=((\xi^2+1)^{n-1}+(\xi^2+1)^{n-2}*(x^2+1)+\ldots+(x^2+1)^{n-1})\Big|_{\xi}^{x} 2x =$$

$$((x^2+1)^{n-1}+(x^2+1)^{n-1}+\ldots+(x^2+1)^{n-1})2x = 2nx*(x^2+1)^{n-1}$$

ა6

$$u = g(x) = x^2 + 1, \quad g'(x) = 2x, \ f(u) = u^n, \ f'(u) = nu^{n-1},$$

$$\varphi'(x) = f'(u)g'(x) = nu^{n-1}2x = 2nx(x^2+1)^{n-1}$$

მაგალითი4.

ვიპოვოთ $\varphi(x) = f(g(x)) = (3x+1)^{10}$ რთული ფუნქციის წარმოებული ამისათვის შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$\frac{(3\xi+1)^{10} - (3x+1)^{10}}{\xi - x}\Bigg|_{\xi}^{x} = \frac{(3\xi+1)^{10} - (3x+1)^{10}}{(3\xi+1) - (3x+1)}\Bigg|_{\xi}^{x} \frac{(3\xi+1) - (3x+1)}{\xi - x}\Bigg|_{\xi}^{x} =$$

$$((3\xi+1)^9 + (3\xi+1)^8(3x+1) + ...+ (3x+1)^9)\Big|_{\xi}^{x} * 3\Big|_{\xi}^{x} = 10(3x+1)^9 * 3 = 30(3x+1)^9$$

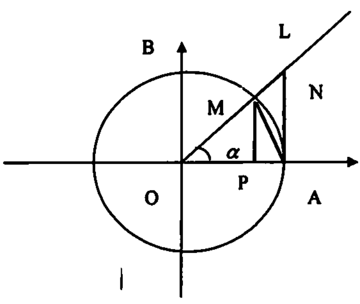
ან

$$u = g(x) = 3x+1, \ g'(x) = 3, f(u) = u^{10}, f'(u) = 10u^9,$$

$$\varphi'(x) = f'(u)g'(x) = 10u^9 3 = 30(3x+1)^9$$

ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებული

გამოვთვალოთ $\sin\alpha$ და $\cos\alpha$ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებული, სადაც α კუთხე იზომება რადიანებში



ნახაზი 1

ვთქვათ K რომელიღაც ერთეულოვანი წრეწირია. ე.ი. $r=1$. A-თი ავღნიშნოთ წრეწირის აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი, B-თი -ოორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილი. α კუთხე ავიღოთ ისე, რომ:

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2} \tag{1.3.15}$$

M-ით ავღნიშნოთ L სხივის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი. L სხივი აბსცისთა ღერძთან ქმნის α კუთხეს. A წერტილზე ავღმართოთ მართობი იგი L სხივს კვეთს N წერტილში. განვიხილოთ სამკუთხედი $\Delta\, OAN$ ამ სამკუთხედიდან:

$$AN = tg\alpha \tag{1.3.16}$$

M წერტილიდან X-თა ღერძის მიმართ დავუშვათ მართობი და გადაკვეთის წერტილი ალვნიშნოთ P-თი. განვიხილოთ $\Delta\, OMP$

$$PM = \sin\alpha \tag{1.3.17}$$

ნახაზიდან AM რკალისათვის გვექნება:

$$A\breve{M} = r * \alpha = \alpha \tag{1.3.18}$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ:

$$PM \le AM \le A\breve{M} \tag{13.19}$$

(1.3.17) და (1.3.18) ფორმულების გამოყენებით გვაქვს

$$\sin\alpha \le \alpha \tag{1.3.20}$$

ნახაზიდან გვაქვს, რომ $S_{\Delta OAN} \ge S_{seqtorOAM}$ ხოლო $S_{\Delta OAN} = \frac{1}{2} * tg\alpha$ და $S_{seqtorOAM} = \frac{1}{2} * \alpha$ ამ ორი ფორმულის გათვალისწინებით გვაქვს

$$tg\alpha \ge \alpha \tag{1.3.21}$$

(1.3.20) და (1.3.21) ფორმულებიდან გვაქვს, რომ $\sin\alpha \le \alpha \le tg\alpha$ ეს ორმაგი უტოლობა გავყოთ $\sin\alpha$-ზე, $\sin\alpha \ne 0$, $1 \le \frac{\alpha}{\sin\alpha} \le \frac{1}{\cos\alpha}$, აქედან

$\cos\alpha \le \frac{\sin\alpha}{\alpha} \le 1$ მოვახდინოთ ჩასმა $\cos\alpha\Big|_\alpha^0 \le \frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big|_\alpha^0 \le 1$ აქედან $1 \le \frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big|_\alpha^0 \le 1$, და მივიღებთ გამოსახულებას:

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big|_\alpha^0 = 1 \tag{1.3.22}$$

ცხადია, უარყოფითი α-სათვისაც $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ გამოსახულების მნიშვნელობა ერთის ტოლია.

$\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების წარმოებულების გამოთვლისას ვისარგებლოთ ტრიგონომეტრიაში ცნობილი ფორმულებით:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2*\sin\frac{\alpha-\beta}{2}*\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2*\sin\frac{\alpha+\beta}{2}*\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$\sin x$ ფუნქციისათვის ჩავწეროთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$\frac{\sin\xi - \sin x}{\xi - x} = 2*\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}*\cos\frac{\xi+x}{2}}{\xi-x} = \frac{\sin\frac{\xi-x}{2}*\cos\frac{\xi+x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}$$

$$(\sin x)' = \frac{\sin\xi - \sin x}{\xi - x}\Big|_\xi^x = \frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}\Big|_\xi^x * \cos\frac{\xi+x}{2}\Big|_\xi^x = \frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}\Big|_{\xi-x}^0 * \cos\frac{\xi+x}{2}\Big|_\xi^x =$$

$$= 1*\cos\frac{2*x}{2} = \cos x$$

ანალოგიურად, $\cos x$ ფუნქციისათვის ჩავწეროთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$\frac{\cos\xi - \cos x}{\xi - x} = -2*\frac{\sin\frac{\xi+x}{2}*\sin\frac{\xi-x}{2}}{\xi-x} = -\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}*\sin\frac{\xi+x}{2}$$

$$(\cos x)' = \frac{\cos\xi - \cos x}{\xi - x}\Big|_\xi^x = -\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}\Big|_\xi^x * \sin\frac{\xi+x}{2}\Big|_\xi^x = -\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}\Big|_{\xi-x}^0 * \sin\frac{\xi+x}{2}\Big|_\xi^x =$$

$$= -1*\sin\frac{2*x}{2} = -\sin x$$

ამგვარად, ვიცით $\sin x$ და $\cos x$ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა წარმოებული და ფარდობის წარმოებული, ამიტომ ადვილად ვიპოვით tgx და $ctgx$ ფუნქციების წარმოებულებს:

$$(tgx)' = (\frac{six}{\cos x})' = \frac{\sin' x * \cos x - \cos' x * \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = (\frac{\cos x}{\sin x})' = \frac{\cos' x * \sin x - \sin' x * \cos' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები

ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი წინადადება, რომელსაც დაუმტკიცებლად მივიღებთ: [17],[18] არსებობს 2-ზე მეტი და 3-ზე ნაკლები რიცხვი რომელსაც e-თი ავღნიშნავენ და რომლისთვისაც $y = e^x$ მაჩვენებლიან ფუნქციას 0 წერტილში აქვს 1-ის ტოლი წარმოებული.

$$\frac{e^{\xi} - e^{x}}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{e^{\xi} - e^{0}}{\xi - 0}\Big|_{\xi}^{0} = \frac{e^{\xi} - 1}{\xi}\Big|_{\xi}^{0} = 1 \tag{1.3.23}$$

ვიპოვოთ $y = e^x$ ფუნქციის წარმოებული. შევადგინოთ მისთვის დიფერენციალური გამოსახულება:

$$y' = (e^x)' = \frac{e^{\xi} - e^{x}}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = e^x(\frac{e^{\xi - x} - 1}{\xi - x}\Big|_{\xi - x}^{0}) = e^x \tag{1.3.24}$$

ვიპოვოთ $y = a^x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x * \ln a} \tag{1.3.25}$$

|

$y = a^x$ ფუნქციის გაწარმოებისათვის შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება და გამოვიყენოთ (1.3.23) და (1.3.25) ფორმულები.

$$(a^x)' = (e^{x*\ln a})' = \frac{e^{\xi*\ln a} - e^{x*\ln a}}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{e^{x\ln a}(e^{\xi*\ln a - x*\ln a} - 1)}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} = \frac{e^{x*\ln a}(e^{(\xi-x)*\ln a} - 1)}{(\xi - x)*\ln a} * \ln a\Big|_{\xi}^{x} =$$

$$e^{x\ln a} * \ln a * \frac{e^{(\xi-x)*\ln a} - 1}{(\xi - x)*\ln a}\Big|_{(\xi-x)\ln a}^{0} = a^x * \ln a \qquad (1.3.26)$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$y' = (a^x)' = a^x * \ln a \qquad (1.3.27)$$

ვიპოვოთ $y = \log_a x$ ფუნქციის წარმოებული, ამისათვის განვიხილოთ $x = x$ იგივეობა და მოვახდინოთ შემდეგი გარდაქმნები

$$\begin{aligned} x &= x \\ x &= a^{\log_a x} \end{aligned} \qquad (1.3.28)$$

ვიპოვოთ (1.3.28) ფუნქციის წარმოებული

$$\begin{aligned} x' &= (a^{\log_a x})' \\ 1 &= a^{\log_a x} * \ln a * (\log_a x)' \end{aligned} \qquad (1.3.29)$$

(1.3.29)-დან მივიღებთ ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებულის შემდეგ ფორმულას

$$(\log_a x)' = \frac{1}{a^{\log_a x} * \ln a} = \frac{1}{x * \ln a} \qquad (1.3.30)$$

როდესაც $a = e$ მაშინ $\log_a x = \ln x$ და (1.3.30) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x * \ln e} = \frac{1}{x} \qquad (1.3.31)$$

§1.4 ფუნქციის მხების განსაზღვრის ერთი მეთოდი

მანამ, სანამ წირის მხებს განვესაზღვრავთ, შევნიშნოთ, რომ მოსწავლეებმა იციან წრფის განტოლება შემდეგი სახით:

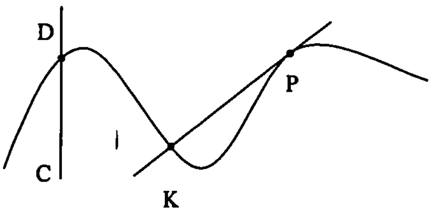
$$y = kx + b \quad \text{ან} \quad y - y_0 = k(x - x_0) \tag{1.4.1}$$

$k = tg\alpha$, α არის კუთხე მხებსა და OX ღერძის დადებით მიმართულებას შორის. $A(x_0, y_0)$ ის წერტილია, რომელზეც გადის წრფე.

მეათეკლასელებმა ასევე იციან, რომ თუ წრფე გადის ორ $A(x_0, y_0)$ და $B(x_1, y_1)$ წერტილებზე, მაშინ მისი საკუთხო კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$k = tg\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{1.4.2}$$

ჩვენი მიზანია მოსწავლეებს თვალნათლივ წარმოვუდგინოთ მრუდის მიმართ გავლებული მხები და განვუმარტოთ მხების ცნება. ამასთან დაკავშირებით ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლებში მხები ძირითადად განისაზღვრება წრეწირის მიმართ. წრფეს, რომელსაც წრეწირთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს მხებს უწოდებენ. ასეთი განსაზღვრა ყველა მრუდისათვის არ გამოდგება. მაგალითად:

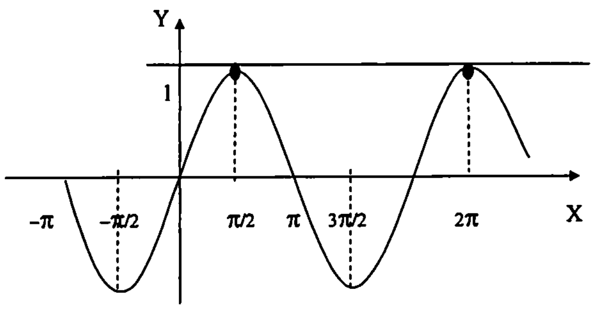


ნახ.1

CD წრფეს წირთან აქვს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი, მაგრამ იგი მხები არ არის. KP წრფეს წირთან აქვს ორი საერთო წერტილი, იგი არის წირის მხები P წერტილში, ხოლო K წერტილში კი - მკვეთი. $y = ax^2$ პარაბოლას ოორდინატთა ღერძთან აქვს ერთი საერთო წერტილი, მაგრამ ეს ღერძი მისი მხები არ არის. აქედან ვასკვნით, რომ სრულიად არ არის საჭირო, რომ P წერტილში გავლებულ მხებს წირთან ერთი შეხების წერტილი ჰქონდეს, როგორც ეს არის წრეწირის შემთხვევაში.

განვიხილოთ $y = \sin x$ ფუნქცია და მისი გრაფიკი. გავავლოთ აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფე $y = 1$ წერტილში. მას აქვს გრაფიკთან უსასრულო შეხების წერტილები, მაგრამ იგი მხებია. (იხ.ნახ.2)

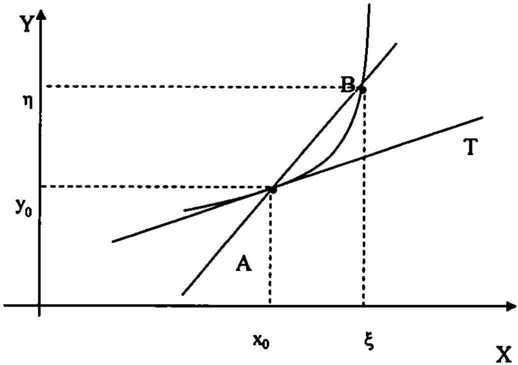
$y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხები ნებისმიერად აღებულ $M(x_0, y_0)$ წერტილში არის ისე წრფე, რომელიც გადის $M(x_0, y_0)$ წერტილზე და სხვა წრფეებთან შედარებით, რომლებიც გადიან $M(x_0, y_0)$ წერტილზე ყველაზე მჭიდროდ ეკვრის მოცემული გრაფიკის, მოცემულ წერტილს. ეს არ არის მხების მკაცრი მათემატიკური განსაზღვრა, ეს არის მხოლოდ მისი ინტუიციური აღწერა.



ნახ 2.

დავსვათ ამოცანა: როგორ განვსაზღვროთ მხები, ანუ როგორ წრფეს ვუწოდოთ მოცემულ წერტილში წირის მხები?

განვიხილოთ $y=f(x)$ ფუნქცია. მის გრაფიკზე ავიღოთ $A(x_0,y_0)$ და $B(\xi,\eta)$ წერტილები, გავავლოთ AB მკვეთი:



ნახ 3.

B წერტილი ვამოძრაოთ წირზე, A დავტოვოთ უძრავად. როდესაც B წერტილი მიუახლოვდება A წერტილს, AB მკვეთი მიიღებს AT მდებარეობას. AT-ს ვუწოდოთ მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხები $A(x_0,y_0)$ წერტილში. ცხადია $y_0=f(x_0)$ და $\eta=f(\xi)$ ამიტომ (1.4.1) ფორმულის თანახმად, ჩავწეროთ მხების განტოლება:

$$y-f(x_0)=k(x-x_0)$$

სადაც k არის უცნობი საკუთხო კოეფიციენტი. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ იგი. |

განვიხილოთ მაგალითები. ვთქვათ მოცემულია $y=f(x)=x^2$ ფუნქცია. მის გრაფიკზე ავიღოთ წერტილები $A(x_0,y_0)$ და $B(\xi,\eta)$. ცხადია $y_0=f(x_0)=x_0^2$, $\eta=f(\xi)=\xi^2$.

(1.4.2) ფორმულის თანახმად:

$$k_{მკ}=\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}=\frac{\xi^2-x_0^2}{\xi-x_0}=\xi+x_0 \qquad \text{მოვახდინოთ ჩასმა } \Big|_{\xi}^{x_0}$$

$$k_{მკ}\Big|_{\xi}^{x_0}=\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}\Big|_{\xi}^{x_0}=\frac{\xi^2-x_0^2}{\xi-x_0}\Big|_{\xi}^{x_0}=\xi+x_0\Big|_{\xi}^{x_0}=2x_0=f'(x_0) \qquad (1.4.3)$$

ეს კი წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად $y=f(x)=x^2$ ფუნქციის წარმოებულია x_0 წერტილში.

$y-x_0^2=k(x-x_0)$ წრფეს, რომელიც გადის $A(x_0,y_0)$ წერტილზე და რომლის საკუთხო კოეფიციეტია $2x_0$ ვუწოდოთ $y=f(x)=x^2$ პარაბოლის მხები $A(x_0,y_0)$ წერტილში. ამგვარად $f'(x_0)=k_{მხ}$ და მხების განტოლებას ექნება სახე:

$y-x_0^2=k_{მხ}(x-x_0)$ ანუ $y-x_0^2=f'(x_0)(x-x_0)$ ანუ $y-x_0^2=2x_0(x-x_0)$ (1.4.4)

(1.4.4) ფორმულიდან შეიძლება ვიპოვოთ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი. $y=0$ მაშინ $x=\frac{x_0}{2}$. ამგვარად მხები გადის $A(x_0,y_0)$ და $C(\frac{x_0}{2},0)$ წერტილებზე. მხები აიგება $A(x_0,y_0)$ და $C(\frac{x_0}{2},0)$ წერტილებზე წრფის გავლებით.

განვიხილოთ $y=f(x)=x^3$ ფუნქცია. მის გრაფიკზე ავიღოთ ნებისმიერად $A(x_0,y_0)$ წერტილი. ცხადია $y_0=f(x_0)=x_0^3$. ჩავწეროთ $A(x_0,y_0)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება შემდეგი სახით:

$$y-x_0^3=k(x-x_0) \qquad (1.4.5)$$

$y=f(x)=x^3$ ფუნქციის გრაფიკზე ავიღოთ მეორე $B(\xi,\eta)$ წერტილი., ცხადია $\eta=f(\xi)=\xi^3$. (1.4.2) ფორმულის თანახმად:

$$k_{მკ}=\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}=\frac{\xi^3-x_0^3}{\xi-x_0}=\xi^2+x_0\xi+x_0^2 \qquad \text{მოვახდინოთ ჩასმა } \Big|_{\xi}^{x_0}$$

$$k_{მკ}\Big|_{\xi}^{x_0} = \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0}\Big|_{\xi}^{x_0} = \frac{\xi^3 - x_0^3}{\xi - x_0}\Big|_{\xi}^{x_0} = (\xi^2 + x_0\xi + x_0^2)\Big|_{\xi}^{x_0} = 3x_0^2 = f'(x_0) \quad (1.4.6)$$

განსაზღვრის თანახმად, (1.4.6) არის $y = f(x) = x^3$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში.

$y - x_0^3 = k(x - x_0)$ წრფეს, რომელიც გადის $A(x_0, y_0)$ წერტილზე და რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $3x_0^2$ ვუწოდოთ $y = f(x) = x^3$ ჰიპერბოლას მხები $A(x_0, y_0)$ წერტილში.

ამგვარად, $k_{მხ} = 3x_0^2 = f'(x_0)$ და მხების განტოლებას ექნება სახე:

$$y - x_0^3 = k_{მხ}(x - x_0) \text{ ანუ } y - x_0^3 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ ანუ } y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0) \quad (1.4.7)$$

იმისათვის, რომ ავაგოთ მხები, ვიპოვოთ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი. როდესაც $y = 0$ მაშინ $x = \frac{2x_0}{3}$. ამგვარად, მხები აიგება $C(\frac{2x_0}{3}, 0)$ და $A(x_0, y_0)$ წერტილებზე წრფის გავლებით.

განვიხილოთ $y = f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ ფუნქცია. მის გრაფიკზე ავიღოთ $A(x_0, y_0)$ წერტილი და $B(\xi, \eta)$ წერტილი.

ცხადია $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{x_0}, \eta = f(x) = \frac{1}{\xi}$ (1.4.2) ფორმულის თანახმად:

$$k_{მკ} = \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0} = \frac{\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x_0}}{\xi - x_0} = \frac{-(\xi - x_0)}{(\xi - x_0)\xi x_0} = -\frac{1}{\xi x_0} \qquad \text{მოვახდინოთ ჩასმა } \Big|_{\xi}^{x_0}$$

$$k_{მკ}\Big|_{\xi}^{x_0} = \frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi - x_0}\Big|_{\xi}^{x_0} = \frac{\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x_0}}{\xi - x_0}\Big|_{\xi}^{x_0} = \frac{-(\xi - x_0)}{(\xi - x_0)\xi x_0}\Big|_{\xi}^{x_0} = -\frac{1}{\xi x_0}\Big|_{\xi}^{x_0} = -\frac{1}{x_0^2} = f'(x_0)$$

ამგვარად $y - \frac{1}{x_0} = k(x - x_0)$ წრფეს, რომელიც გადის $A(x_0, y_0)$ წერტილზე და რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $-\frac{1}{x_0^2}$, ვუწოდოთ $y = f(x) = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის მხები $A(x_0, y_0)$ წერტილში.

ამგვარად, $k_{\text{მხ}}=-\frac{1}{x_0^2}=f'(x_0)$ და მხების განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$y-\frac{1}{x_0}=k_{\text{მხ}}(x-x_0) \text{ ანუ } y-\frac{1}{x_0}=f'(x_0)(x-x_0) \text{ ანუ } y-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0) \quad (1.4.8)$$

იმისათვის, რომ ავაგოთ მხები, (1.4.8) ფორმულიდან ვიპოვოთ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი. როდესაც $y=0$ მაშინ $x=2x_0$, ამგვარად მხები აიგება $A(x_0,y_0)$ და $C(2x_0,0)$ წერტილებზე წრფის გავლებით.

განვიხილოთ $y=f(x_0)=\sqrt{x}, x>0$ ფუნქცია. მის გრაფიკზე ავიღოთ ორი $A(x_0,y_0)$ და $B(\xi,\eta)$ წერტილი. (1.4.2) ფორმულის ძალით:

$$k_{\text{მკ}}=\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}=\frac{\sqrt{\xi}-\sqrt{x_0}}{\xi-x_0}=\frac{1}{\sqrt{\xi}+\sqrt{x_0}} \qquad \text{მოვახდინოთ ჩასმა } \Big|_{\xi}^{x_0}$$

$$k_{\text{მკ}}\Big|_{\xi}^{x_0}=\frac{f(\xi)-f(x_0)}{\xi-x_0}\Big|_{\xi}^{x_0}=\frac{\sqrt{\xi}-\sqrt{x_0}}{\xi-x_0}\Big|_{\xi}^{x_0}=\frac{1}{\sqrt{\xi}+\sqrt{x_0}}\Big|_{\xi}^{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=f'(x_0) \qquad (1.4.9)$$

ამგვარად, $y-\sqrt{x_0}=k(x-x_0)$ წრფეს, რომელიც გადის $A(x_0,y_0)$ წერტილზე და რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ ვუწოდოთ $y=f(x_0)=\sqrt{x}, x>0$ ფუნქციის გრაფიკის მხები $A(x_0,y_0)$ წერტილში.

ამგვარად, $k_{\text{მხ}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}=f'(x_0)$ და მხების განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$y-\sqrt{x_0}=k_{\text{მხ}}(x-x_0) \text{ ანუ } y-\sqrt{x_0}=f'(x_0)(x-x_0) \text{ ანუ } y-\sqrt{x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) \quad (1.4.10)$$

ვიპოვოთ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი. (1.4.10)-დან, როდესაც $y=0$ მაშინ $x=-x_0$. მხები აიგება $A(x_0,y_0)$ და $C(-x_0,0)$ წერტილებზე წრფის გავლებით.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან ჩამოვაყალიბოთ მხების ზოგადი განსაზღვრა:

$y-y_0=k(x-x_0)$ წრფეს[21], რომელიც გადის $A(x_0,y_0)$ წერტილზე და რომლის საკუთხო კოეფიციენტია $f'(x_0)$ ვუწოდოთ $y=f(x)$ ფუნქციის მხები $A(x_0,y_0)$ წერტილში.

ამგვარად, მხების განტოლებას აქვს სახე:

$$y-f(x_0)=k_{\text{მხ}}(x-x_0) \quad \text{ანუ} \quad y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1.4.11)$$

თავი2. წარმოებულისა და ინტეგრალის სწავლების მეთოდიკა ეკონომიკური პროფილის სასწავლებლებში

§ 2.1 წარმოებულის სწავლების ეფექტურობის გაზრდის ერთი მეთოდი

საქართველოს ზოგადსაგანმანათლებლო სასწავლებლებში მათემატიკის ფორმალიზებული სწავლება სისტემად იქცა. ფორმალიზებული სწავლების ძირითად მახასიათებელ ნიშანს წარმოადგენს არამოტივირებული განსაზღვრებებისა და მოსწავლეთათვის გაუგებარი დამტკიცებების სიმრავლე. მათემატიკის სწავლების აღნიშნულმა მეთოდმა დააქვეითა მათემატიკის სწავლების დონე, რადგან მოსწავლეთათვის გაუგებარია რაში სჭირდებათ შემოტანილი ცნებები და დამტკიცებული თეორემები. ასეთ პირობებში მოსწავლეთა უმეტესი ნაწილი კარგავს ინტერესს მათემატიკისადმი, რადგან მოსწავლემ ვერ გასცა პასუხი კითხვებს: რატომ ვსწავლობთ მათემატიკას? რაში გამოვიყენებთ მათემატიკის ამა თუ იმ საკითხს?

მიზანშეწონილი არაა სწავლების პირველ საფეხურზე ლოგიკურად მკაცრი დასაბუთებების მიცემა, პირიქით სასურველია სწავლების დასაწყისში რაც შეიძლება მეტი თვალსაჩინოების გამოყენება, მასალის გადმოცემის ცხოვრებისეულ მაგალითებზე აგებით და მხოლოდ თანმიმდევრობით გადასვლა აბსტრაქტულ იდეებზე. ასევე მნიშვნელოვანია გამოიყოს მათემატიკის ისეთი საკითხები რომელთაც გარკვეული კავშირი აქვთ სხვა დარგის ამოცანებთან და გავამახვილოთ ყურადღება ამ კავშირზე. ჩვენი აზრით ეს გზა მათემატიკის აღნიშნული საკითხების სწავლების ეფექტურობას გაზრდის.

მათემატიკის სწავლების ამოცანა, ხომ სწორედ იმაში მდგომარეობს, რომ ჩამოაყალიბოს და განავითაროს მოსწავლეთა გონებრივი შემოქმედების ის სტრუქტურები, რომლებიც ხელს უწყობენ მათემატიკურ აღმოჩენებს. სწორედ აქაა მათემატიკის სწავლების თავისებურება, მისი განსხვავება სხვა საგნების სწავლების პროცესებისა და მეთოდებისაგან.

ჩვენ ქვემოთ აღვწერთ მათემატიკის ზოგიერთი საკითხების შესწავლის ისეთ პროცესებს რომლებიც ჩვენი აზრით მაგალითად ეკონომიკის პროფილის ლიცეუმის მოსწავლეებს დაანახებს მათემატიკური ანალიზის ელემენტების საჭიროებას და აქედან გამომდინარე მისი დამოკიდებულება შესასწავლი საკითხებისადმი იქნება ნაყოფიერი.

ჩვენს მიერ შემოტანილი იყო წამოებულის ცნება როგორც სპეციალური სახის დიფერენციალური გამოსახულება. თუ ანალიზს გავუკეთებთ წარმოებულის განსაზღვრას ჩვენ მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ ფუნქცია ზრდადი იქნება იმ წერტილის მახლობლობაში სადაც წარმოებული დადებითია, ხოლო კლებადი იმ წერტილის მახლობლობაში სადაც წარმოებული უარყოფითია. მართლაც განვიხილოთ შემდეგი გამოსახულება $\dfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$, იგი ავღნიშნოთ $k(\xi)$ ანუ

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x} = k(\xi) \tag{2.1.1}$$

ცხადია, როცა $\xi = x$, მაშინ ეს გამოსახულება განსაზღვრული არ არის. თუ დავუშვებთ, რომ

$$\left.\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\right|_{\xi}^{x} = k(\xi)\Big|_{\xi}^{x} = f'(x) \tag{2.1.2}$$

მაშინ (2.1.1) შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$f(\xi)-f(x)=k(\xi)(\xi-x) \tag{2.1.3}$$

ვთქვათ, x წერტილზე წარმოებული არ არის ნულის ტოლი, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ x-თან ახლოს მდებარე ყოველ ξ წერტილში $f'(x)$ და $k(\xi)$ აქვთ ერთნაირი ნიშანი ე.ი. არსებობს ისეთი მცირე დადებითი ε რიცხვი, რომ ყველა ξ რომლისთვისაც $|\xi-x|<\varepsilon$, $f'(\xi)$ და $k(\xi)$ ნიშნები ერთმანეთს ემთხვევა. ავიღოთ x-თან ახლოს მდებარე ξ_1 და ξ_2 მნიშვნელობები ისე, რომ შესრულებული იყოს პირობა

$$\xi_1<x<\xi_2 \tag{2.1.4}$$

(2.1.2) ტოლობაში გავითვალისწინოთ, რომ $k(\xi)$ აქვს $f'(x)$-ის ნიშანი და (2.1.3)-ის მარჯვენა მხარის ნიშნის გათვალისწინებით, მივიღებთ, რომ როცა $f'(x)>0$ მაშინ გვაქვს

$$f(\xi_1)<f(x)<f(\xi_2) \tag{2.1.5}$$

და როდესაც $f'(x)<0$ მაშინ გვაქვს

$$f(\xi_1)>f(x)>f(\xi_2) \tag{2.1.6}$$

ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის განსაზღვრებიდან გამომდინარე ჩანს, რომ ზემოთ მოცემულ (2.1.5) შემთხვევაში ფუნქცია ზრდადია x წერტილის ხსენებულ მიდამოში, ხოლო (2.1.6) შემთხვევაში კი ფუნქცია კლებადია x-ის ზემოთ მოცემულ მიდამოში.

შევნიშნოთ, რომ თუ ფუნქცია ზრდადია x წერტილის მიდამოში, მისთვის შესრულებულია (2.1.5) უტოლობები, მაშინ (2.1.2) ფარდობა დადებითია, მაგრამ როდესაც ξ მიუახლოვდება x-ს, იგი შეიძლება გაუტოლდეს ნულს. ე.ი. წარმოებული ზრდადობის შუალედში არ არის აუცილებელი, რომ იყოს დადებითი. იგი მხოლოდ არაუარყოფითია. ე.ი.

$$f'(x)\geq 0 \tag{2.1.7}$$

წარმოებული არ არის აუცილებელი იყოს უარყოფითი კლებადობის შუალედში, იგი შეიძლება იყოს ნულიც. ე.ი.

$$f'(x) \le 0 \qquad (2.1.8)$$

ამბობენ, რომ x წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი თუ x-თან ახლოს მდებარე წერტილებისათვის ფუნქციის მნიშვნელობები მოცემულ წერტილებში არ აღემატება x წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობას, ზუსტად ასევე ვიტყვით, რომ ფუნქციას x წერტილში აქვს მინიმუმი თუ x-თან ახლოს მდებარე არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის ფუნქციას აქვს მნიშვნელობა არა ნაკლები ვიდრე x წერტილში. გამოდის, რომ მინიმუმისა და მაქსიმუმის წერტილებში $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული გადაიქცევა ნულად.

$$f'(x) = 0 \qquad (2.1.9)$$

მართლაც $f(x)$ ფუნქციას მაქსიმუმის წერტილებში არ შეიძლება ჰქონდეს დადებითი წარმოებული, რადგან დადებითი წარმოებულის შემთხვევაში x წერტილის მარჯვნივ ფუნქცია მეტია ვიდრე x წერტილში. ეს კი ნიშნავს, რომ x წერტილი არ არის მაქსიმუმის წერტილი. ზუსტად ასევე $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის შემთხვევაში $f(x)$ არ შეიძლება ჰქონდეს უარყოფითი წარმოებული, რადგან ამ შემთხვევაში x წერტილის მარცხნივ მას აქვს მნიშვნელობა, რომელიც აღემატება x წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობას. ე.ი. გვრჩება შემთხვევა $f'(x)=0$. ანალოგიურად ვღებულობთ, რომ მინიმუმის შემთხვევაშიც $f'(x) = 0$

$f(x)$ ფუნქციის წარმოებული $f'(x)$ თვითონ არის ფუნქცია და ამიტომ შეიძლება ავიღოთ მისი წარმოებული $(f'(x))'$. მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება $f''(x)$.

იმისათვის, რომ ფუნქციას ჰქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი როდესაც $x = x_0$ აუცილებელია $f'(x) = 0$ მაგრამ ეს ტოლობა არ არის საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას $x = x_0$ წერტილში ჰქონდეს მაქსიმუმი ან მინიმუმი, ამის გარდა იგი არ იძლევა საშუალებას განვასხვაოთ მაქსიმუმი და მინიმუმი. ადვილი

საჩვენებელია, რომ თუ $f'(x_0)=0$ და $f(x)$ ფუნქციას $x=x_0$ წერტილში აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი მაშინ მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი იძლევა საშუალებას განვასხვაოთ მინიმუმი და მაქსიმუმი. კერძოდ როდესაც $f''(x)<0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, თუ $f''(x)>0$ მაშინ კი მინიმუმი. მართლაც, თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ $f'(x)$ ფუნქციის პირველი $(f'(x))'$ წარმოებული იქცევა ნულად როდესაც $x=x_0$. ამგვარად

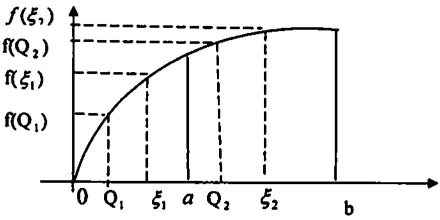
როდესაც $x<x_0$ გვაქვს $f'(x)<0$

როდესაც $x>x_0$ გვაქვს $f'(x)>0$

ე.ი. თუ x_0 წერტილს მარცხნიდან მივუახლოვდებით ფუნქცია $f(x)$ იზრდება, ხოლო თუ x_0-ს მარჯვნივ გავცდებით იგი კლებულობს ე.ი. გვაქვს მაქსიმუმი. ანალოგიურად თუ $f''(x_0)>0$ მაშინ $f'(x)$ ფუნქციის პირველი წარმოებული $(f'(x))'$ დადებითია და როცა $x=x_0$ ფუნქცია $f'(x)$ გადაიქცევა ნულად. ამგვარად როცა $x<x_0$ გვაქვს $f'(x)<0$, როცა $x>x_0$ გვაქვს $f'(x)>0$. ე.ი. თუ x_0 წერტილს მარცხნიდან მივუახლოვდებით ფუნქცია $f(x)$ კლებულობს, ხოლო თუ x_0 წერტილს გავცდებით მარჯვნივ იგი იზრდება, ეს კი ნიშნავს, რომ გვაქვს მინიმუმი.

როგორც წარმოებულის ტრადიციულ განსაზღვრას, ასევე ჩვენს მიერ მოყვანილ წარმოებულის განსაზღვრას დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. იგი შეიძლება გამოყენებული იქნეს სხვადასხვა დარგში, კერძოდ ეკონომიკაში.

განვიხილოთ შემდეგი ეკონომიკური ამოცანა. მთლიანი ამონაგები (TR) არის საწარმოს მიერ წარმოებული Q რაოდენობის საქონლის P ფასად გაყიდვით შემოსული თანხა. დავუშვათ მთლიანი ამონაგების ფუნქციის $(TR)=f(Q)$ გრაფიკია წირი, რომელიც გამოსახულია ნახაზზე.



ნახაზიდან ჩანს, რომ $f(Q)$ ზრდადი ფუნქციაა $(0,b)$ შუალედში ამასთან იგი უფრო სწრაფად იზრდება $(0,a)$ შუალედში. ამ ამოცანას გააჩნია შემდეგი ეკონომიკური შინაარსი. თუ შევადარებთ ერთმანეთს გაყიდული საქონლის ერთი და იმავე რაოდენობით ზრდას Q_1 რაოდენობიდან ξ_1-მდე $(0,a)$ შუალედში და Q_2-დან ξ_2-მდე (a,b) შუალედში დავრწმუნდებით, რომ პირველ შემთხვევაში ამონაგების ცვლილება (ნამატი) საქონლის ერთეულზე გაანგარიშებით არის

$$\frac{f(\xi_1)-f(Q_1)}{\xi_1-Q_1}$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$\frac{f(\xi_2)-f(Q_2)}{\xi_2-Q_2}$$

ნახაზიდან ისიც ჩანს, რომ

$$f(\xi_1)-f(Q_1)>f(\xi_2)-f(Q_2)$$
$$\xi_1-Q_1=\xi_2-Q_2$$

ამიტომ

$$\frac{f(\xi_1)-f(Q_1)}{\xi_1-Q_1}>\frac{f(\xi_2)-f(Q_2)}{\xi_2-Q_2}$$

ე.ი. გაყიდული პროდუქციის $\xi_1-Q_1=\xi_2-Q_2$ რაოდენობით გაზრდისას მთლიანი ამონაგების საშუალო ცვლილება პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით უფრო მეტია $(0,a)$ ინტერვალის Q_1

წერტილისათვის ვიდრე (a,b) ინტერვალის Q_2 წერტილისათვის. ამგვარად:

$$\frac{f(\xi)-f(Q)}{\xi-Q} \qquad (2.1.10)$$

შეფარდება აღწერს მთლიანი ამონაგების "ცვლილების სიჩქარეს" პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით, როდესაც გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა იზრდება Q-დან ξ-მდე, რაც უფრო მცირეა $\xi-Q$ რიცხვი, მით უფრო ზუსტად ახასიათებს აღნიშნული შეფარდება $f(Q)$ ფუნქციის "ცვლილების სიჩქარეს" Q-ს მახლობლობაში. უფრო ზუსტი მახასიათებელი კი იქნება თუ (2.1.10) გამოსახულებაში მოვახდენთ ისეთ გარდაქმნებს, რომ ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ექნება და შემდეგ მოვახდენთ ჩასმას $\Big|_{\xi}^{Q}$, თუ ჩასმის შედეგი არის განსაზღვრული გამოსახულება, მაშინ მას ეწოდება მარჟინალური ამონაგები და იგი აღინიშნება (MR) სიმბოლოთი. ე. ი.

$$(MR)=\frac{f(\xi)-f(Q)}{\xi-Q}\Big|_{\xi}^{Q} \qquad (2.1.11)$$

(2.1.2) გამოსახულების მარჯვენა მხარე არის $f(Q)$ ფუნქციის წარმოებული

$$(MR)=\frac{f(\xi)-f(Q)}{\xi-Q}\Big|_{\xi}^{Q}=(TR)'=f'(Q) \qquad (2.1.12)$$

ამგვარად, მარჟინალური ამონაგები არის მთლიანი ამონაგების ფუნქციის წარმოებული მოთხოვნის Q ცვლადით.

ამოცანა: მთლიანი ამონაგების ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით $(TR)=f(Q)=-2Q^2-10Q$

ა) გამოვთვალოთ მარჟინალური ამონაგები ნებისმიერი Q-სათვის;

ბ) შევადაროთ მარჟინალური ამონაგები Q=1 და Q=2 მნიშვნელობებისათვის და გავაკეთოთ ეკონომიკური დასკვნები.

შევადგინოთ მოცემული ფუნქციისათვის (2.1.12) სახის გამოსახულება

$$(TR)'=\frac{f(\xi)-f(Q)}{\xi-Q}\Bigg|_{\xi}^{Q}=\frac{-2\xi^2+10\xi+2Q^2-10Q}{\xi-Q}\Bigg|_{\xi}^{Q}=-2(\xi+Q)\Big|_{\xi}^{Q}=-4Q+10$$

ამგვარად, მარჟინალური ამონაგებისათვის მივიღებთ

$$(MR)=-4Q+10$$

თუ $Q=1$ მაშინ $(MR)=6$

თუ $Q=2$ მაშინ $(MR)=2$

ეს ნიშნავს, რომ $Q=Q_1=1$ წერტილში ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე მეტია ვიდრე $Q=Q_2=2$ წერტილში. ამიტომ თუ პროდუქციის გაყიდვის დონე Q_1 და Q_2 მნიშვნელობებისათვის გაიზრდება ერთი და იმავე $\xi_1-Q_1=\xi_2-Q_2$ რაოდენობით მაშინ გაყიდვის დონის გაზრდა Q_1-დან ξ_1 -მდე უფრო მეტ ამონაგებს მოგვიტანს ვიდრე გაყიდვის დონის გაზრდა Q_2-დან ξ_2-მდე.

მთლიანი დანახარჯი (*TC*) არის თანხა, რომელიც დაიხარჯა საწარმოს მიერ Q რაოდენობის პროდუქციის წარმოებისათვის. ცხადია, რომ სრული დანახარჯი (*TC*) გაიზრდება, თუ წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობა გაიზრდება. ამიტომ სრული დანახარჯის (*TC*) ფუნქცია ზრდადია Q არგუმენტის მიმართ. წარმოების მთლიანი დანახარჯები წარმოების მოკლე დროის მანძილზე იყოფა ე.წ. მუდმივ და ცვალებად დანახარჯებად. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯი (*FC*) არაა დამოკიდებული წარმოებული პროდუქციის რაოდენობაზე და იგი დაკავშირებულია მიწის გადასახადთან, აღჭურვილობასთან, რენტასთან და შესაძლოა აგრეთვე მაღალ პროფესიონალური შრომის ანაზღაურებასთან. ამ ტიპის დანახარჯების მუდმივობა პირობითია, რადგან დროის გრძელი მონაკვეთის განმავლობაში მათ შეიძლება ცვლილება განიცადონ.

წარმოების ცვალებადი დანახარჯი (VC) მოიცავს თანხებს, რომლებიც იხარჯება ნედლეულზე, ენერგეტიკულ რესურსებზე და აგრეთვე შრომის ანაზრაურებაზე ერთი ერთეული პროდუქციის წარმოებისათვის.

მთლიანი ცვალებადი დანახარჯი (TVC). რომელიც შეესაბამება რაოდენობის პროდუქციის ერთეულის წარმოებას გამოითვლება ფორმულით:

$$(TVC)=(VC)*Q$$

წარმოების მთლიანი დანახარჯი (TC) ტოლი იქნება ფიქსირებული (FC) დანახარჯის და მთლიანი ცვალებადი (TVC) დანახარჯის ჯამის (TC)=(FC)+(VC)*Q . ეს ფუნქცია ავღნიშნოთ K(Q), ანუ

$$K(Q)=(FC)+(VC)*Q$$

(VC) არის პროდუქციის ერთეულის წარმოებისთვის საჭირო ცვალებადი დანახარჯი, Q კი წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა.

ჩვენი მიზანია დავახასიათოთ დანახარჯის K ფუნქციის ცვლილების სიჩქარე წარმოებული პროდუქციის Q რაოდენობის ცვლასთან დაკავშირებით. ვთქვათ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა გაიზარდა Q-დან ξ-მდე, მაშინ შესაბამისი დანახარჯი იქნება $K(\xi)-K(Q)$. წარმოების დანახარჯის საშუალო ცვლილება წარმოებული პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებით

$$\frac{K(\xi)-K(Q)}{\xi-Q}$$

თუ მოცემულ გამოსახულებაში მოვახდენთ ისეთ გარდაქმნებს, რომ ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ექნება და მოვახდენთ ჩასმას $\Big|_{\xi}^{Q}$, თუ ჩასმის შედეგი არის განსაზღვრული

გამოსახულება მაშინ მას ეწოდება წარმოების მარჟინარული (MC) დანახარჯი.

$$(MC)=\frac{K(\xi)-K(Q)}{\xi-Q}\bigg|_{\xi}^{Q}=K'(Q)$$

ამგვარად წარმოების მარჟინალური დანახარჯი $K'(Q)$ რომელიც გამოთვლილია Q რაოდენობის პროდუქციისათვის გამოსახავს წარმოების დანახარჯის ცვლილებას საწაროებელი პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით.

მოგების Π ფუნქცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულით.

$$\Pi(Q)=(TR)-(TC)$$

სადაც (TR) არის მთლიანი ამონაგები, ხოლო (TC) მთლიანი დანახარჯი, Q აქ არის გაყიდული პროდუქციის რაოდენობა. პროდუქციის რეალიზაციის $\xi-Q$ რაოდენობით გაზრდას შეესაბამება მოგების $\Pi(\xi)-\Pi(Q)$ რაოდენობით ცვლილება. მოგების საშუალო ცვლილება სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით გამოითვლება შეფარდებით

$$\frac{\Pi(\xi)-\Pi(Q)}{\xi-Q}$$

თუ მოცემულ გამოსახულებაში მოვახდენთ ისეთ გარდაქმნებს, რომ ξ-ის ნაცვლად x-ის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ექნება და მოვახდენთ ჩასმას $\bigg|_{\xi}^{Q}$, თუ ჩასმის შედეგი არის განსაზღვრული გამოსახულება მაშინ მას ეწოდება მარჟინალური მოგება. ე. ი.

$$\frac{\Pi(\xi)-\Pi(Q)}{\xi-Q}\bigg|_{\xi}^{Q}=\Pi'(Q)$$

ამგვარად, მარჟინალური მოგება რომელიც გამოთვლილია Q რაოდენობის სარეალიზაციო პროდუქციისათვის, გამოსახავს მოგების მყისიერ ცვლილებას სარეალიზაციო პროდუქციის ერთეულზე გაანგარიშებით.[14],[16],[20].

§2.2 ინტეგრალის ცნება და მისი ზოგიერთი გამოყენება

ყოველთვის, როდესაც მათემატიკაში განიხილება რომელიმე ოპერაცია, იბადება კითხვა: მოიძებნება თუ არა ამ ოპერაციის შებრუნებული ოპერაცია. მაგალითად, შეკრების ოპერაციასთან ერთად, განიხილება მისი შებრუნებული – სხვაობის ოპერაცია; გამრავლების ოპერაციასთან ერთად, განიხილება მისი შებრუნებული – გაყოფის ოპერაცია; ხარისხში აყვანის ოპერაციასთან ერთად, განიხილება მისი შებრუნებული – ფესვის ამოღების ოპერაცია. შებრუნებული ოპერაციის განსაზღვრისას ყურადღება უნდა მიექცეს შემდეგ ორ ძირითად საკითხს:

1) როგორია ამ ოპერაციის განსაზღვრის არე;

2) ამ ოპერაციის შედეგი არის თუ არა ერთადერთი.

ჩვენ განვსაზღვრეთ დიფერენცირების ოპერაცია. ეხლა კი განვიხილავთ მის შებრუნებულ ოპერაციას, რომელსაც ინტეგრება ეწოდება.

ინტეგრების ოპერაცია საინტერესოა არა მარტო როგორც დიფერენცირების შებრუნებული ოპერაცია, არამედ მას დიდი გამოყენება აქვს სხვადასხვა სახის ამოცანების ამოხსნისას, კერძოდ, ფართობის გამოთვლისას. მრუდი წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობის გამოთვლას სიბრტყეზე მივყავართ ინტეგრებადობამდე. ამასთან, ინტეგრალი განუსაზღვრელი არ არის, რადგან ფიგურის ფართობს აქვს სრულიად განსაზღვრული მნიშვნელობა.

ვთქვათ, მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია. $h(x)$ არის იმავე არგუმენტის ფუნქცია და თუ სრულდება პირობა:

$$h'(x) = f(x), \tag{2.2.1}$$

მაშინ $h(x)$–ს ეწოდება $f(x)$–ის ინტეგრალი ან $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია. $f(x)$ ფუნქციიდან $h(x)$ ფუნქციაზე გადასვლის ოპერაციას (2.2.1)–ის გათვალისწინებით, ეწოდება დიფერენცირების შებრუნებული ოპერაცია და მას ინტეგრების ოპერაციას უწოდებენ. თვალნათლივ ჩანს, რომ იგი არ არის ცალსახა. კერძოდ, თუ $h(x)$ აკმაყოფილებს (2.2.1), მაშინ $h(x)+c$, სადაც c მუდმივია, აგრეთვე აკმაყოფილებს (2.2.1). მართლაც,

$$\left(h(x)+c\right)' = h'(x)+c' = h'(x)+0 = f(x). \tag{2.2.2}$$

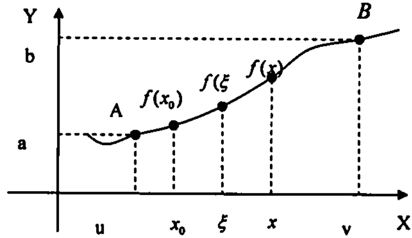
(2.2.1) განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$h(x) = \int f(x)dx. \tag{2.2.3}$$

რადგან ეს ფორმულა $h(x)$-ს განსაზღვრავს არა ცალსახად, არამედ მხოლოდ მუდმივის სიზუსტით, ამიტომ მარჯვენა მხარეში მდგომ ინტეგრალს ეწოდება განუსაზღვრელი.

ახლა განვიხილოთ ფიგურის ფართობის გამოთვლის უმარტივესი ამოცანა, რომელსაც მივყავართ განსაზღვრულ ინტეგრალამდე.

ვისარგებლოთ მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციით და მისი გრაფიკით (იხ. ნახ1.), რომელიც აგებულია ჩვეულებრივ მართკუთხა დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში. დავუშვათ ჯერ, რომ გრაფიკი მთლიანად გადის აბცისთა ღერძს ზემოთ. ვთქვათ, u და v არის $f(x)$ ფუნქციის x არგუმენტის ორი მნიშვნელობა, ამასთან $u<v$.



ნახ. 1

L გრაფიკის წერტილები u და v აბსცისებით აღვნიშნოთ A და B -თი. ბუნებრივია, გამოიყოფა სიბრტყის ნაწილი, რომელიც ქვემოდან შემოსაზღვრულია აბცისთა ღერძის [u,v] მონაკვეთით, მარცხნიდან - A წერტილის a ორდინატით, მარჯვნიდან –B წერტილის b ორდინატით და ზემოდან – L გრაფიკის [AB] ნაწილით. სიბრტყის ეს ნაწილი აღვნიშნოთ $Q(u,v)$-თი. ამ ნაწილს აქვს განსაზღვრული ფართობი. იგი აღვნიშნოთ $H(u,v)$-თი. ახლა ავიღოთ $f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის x_0 და x ორი მნიშვნელობა და დავუშვათ, რომ

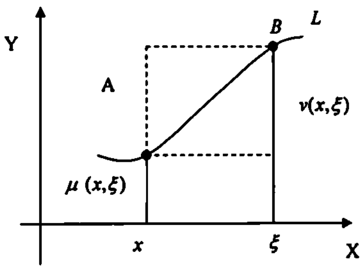
$$H(x_0,x)=h(x) \tag{2.2.4}$$

შესაბამისი ფართობი აღვნიშნეთ $h(x)$-ით, რითაც ხაზი გავუსვით, რომ მას ვიხილავთ, როგორც x ცვლადის ფუნქციას. ახლა ვიპოვოთ $h(x)$ ფუნქციის $h'(x)$ წარმოებული. ამისათვის, x-თან ახლოს ავირჩიოთ (2.2.1) ფუნქციის არგუმენტის რომელიმე ξ მნიშვნელობა. ვიგულისხმოთ, რომ $\xi<x$. $h(x)$-ის წარმოებულის გამოსათვლელად ჯერ გამოვთვალოთ $h(\xi)-h(x)$ ან $Q(x_0,\xi)$ და $Q(x_0,x)$ ფიგურათა ფართობების სხვაობა. ეს სხვაობა ტოლია $Q(x,\xi)$ ფიგურის ფართობისა. გვაქვს, რომ

$$h(\xi)-h(x)=H(x,\xi) \tag{2.2.5}$$

$Q(x,\xi)$ ფიგურის $H(x,\xi)$ ფართობს, არ გამოვთვლით ზუსტად მხოლოდ მივცემთ შეფასებას. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები. $f(x)$

ფუნქციის არგუმენტის ნებისმიერი u და v ორი მნიშვნელობისათვის $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმი [u, v]-ზე აღვნიშნოთ $\mu(u, v)$-თი, ხოლო $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმი [u, v]-ზე – $\nu(u, v)$-თი. მართკუთხედი [u, v] ფუძით და $\mu(u, v)$ სიმაღლით აღვნიშნოთ $M(u, v)$-თი, ხოლო მართკუთხედი [u, v] ფუძით და $\nu(u, v)$ სიმაღლით – $N(u, v)$-თი. ეს აღნიშვნები გამოვიყენოთ იმ შემთხვევისთვის, როდესაც $u = x$ და $v = \xi$ (იხ.ნახ.2.).



ნახ. 2

ვხედავთ, რომ $M(x,\xi)$ მართკუთხედი მოთავსებულია $Q(x,\xi)$ ფიგურაში, ხოლო თვით $Q(x,\xi)$ ფიგურა მოთავსებულია $N(x,\xi)$ მართკუთხედში. რადგან $M(x,\xi)$ და $N(x,\xi)$ მართკუთხედების ფართობებია შესაბამისად $(\xi - x)\,\mu(x,\xi)$ და $(\xi - x)\,\nu(x,\xi)$ (2.2.5), მივიღებთ შემდეგ ორმაგ უტოლობას:

$$(\xi - x)\,\mu(x,\xi) \le h(x,\xi) \le (\xi - x)\,\nu(x,\xi) \tag{2.2.6}$$

ანუ

$$(\xi - x)\,\mu(x,\xi) \le h(\xi) - h(x) \le (\xi - x)\,\nu(x,\xi). \tag{2.2.7}$$

(2.2.7) გამოსახულება გავყოთ $(\xi - x)$-ზე და მოვახდინოთ $\frac{h(\xi)-h(x)}{\xi - x}$ გამოსახულების გარდაქმნა ისე, რომ მასში ξ-ის ნაცვლად xის ჩასმით გამოსახულებას აზრი ჰქონდეს და მოვახდინოთ ჩასმა $\Big|_{\xi}^{x}$, მივიღებთ:

$$\mu\,(x,\xi)\Big|_{\xi}^{x} \le \frac{h(\xi)-h(x)}{\xi - x}\Big|_{\xi}^{x} \le \nu\,(x,\xi)\Big|_{\xi}^{x}.$$

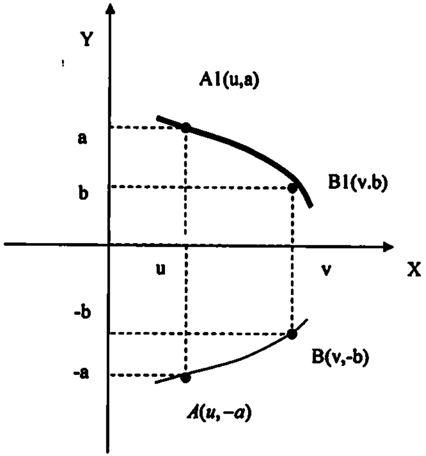
განსაზღვრის თანახმად,

$$f(x) \le h'(x) \le f(x)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$h'(x) = f(x), \tag{2.2.8}$$

აღვნიშნოთ, რომ სიბრტყის $Q(x_0, x)$ ნაწილი გადაიქცევა მონაკვეთად, თუ $x = x_0$, და ამიტომ მისი ფართობი ნულის ტოლია. ამგვარად, $h(x_0) = 0$. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც გამოსათვლელი ფიგურის ფართობი შემოსაზღვრულია აბსცისთა ღერძის [u,v] მონაკვეთი მარცხნიდან A წერტილის – a ორდინატით, მარჯვნიდან B წერტილის – b ოორდინატით და ქვემოდან $y = -f(x)$ ფუნქციის L გრაფიკის [AB] მონაკვეთით (ნახ. 3.).



ნახ. 3

ამ შემთხვევაში მოცემული ფიგურის ფართობის გამოსათვლელად განვსაზღვროთ ამ ფიგურის კონგრუენტული ფიგურის ფართობი, კერძოდ, ფიგურისა, რომელიც მოცემული ფიგურის სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ.

ამრიგად, ვიპოვეთ $h(x)$ ფუნქციის წარმოებული და დავრწმუნდით, რომ $h(x)$ არის $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი.[17],[19],[81],[98],[99].

§3. პედაგოგიური ექსპერიმენტი გამოკვლევის ძირითადი ეტაპები და აპრობაცია

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტში და ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში 1999-2005წ.წ. დისერტანტი მუშაობს ივანე ჯავახიშვილის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში, ამავე უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ.

პედაგოგიური ექსპერიმენტისათვის გამოყენებულ იქნა შემდეგი სასწავლებლები:

1. ანზორ ჩაფიძის სახელობის 147 საშუალო სკოლის 10^1, 10^2, 10^3 კლასები;

2. თბილისის პროგრამირების სპეციალიზირებულ კოლეჯი "აია".

დისერტანტი მადლობას მოახსენებს ყველა იმ მასწავლებლებს რომლებიც ხელს უწყობდნენ პედაგოგიური ექსპერიმენტის ჩატარებაში.

სადისერტაციო გამოკვლევა სამ ეტაპად შესრულდა:

1. დაწყებითი ეტაპი 1997-2000წ.წ

წარმოებდა დაკვირვება სასწავლო პროცესზე, როგორც პირდაპირი –თვით დისერტანტის მიერ, ასევე არაპირდაპირი – სხვა მასწავლებლების მიერ. მეთოდური ლიტერატურის ანალიზის შედეგად გამოვლნდა წარმოებულის ზღვრებით შემოტანის მთავარი ხარვეზები. პედაგოგიური დაკვირვების შედეგების ანალიზის საფუძველზე ჩამოყალიბდა კვლევის ძირითადი ჰიპოთეზა, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს: ზღვრის ცნების გარეშე წარმოებულის ცნების განსაზღვრა და მისი სწავლების მეთოდიკის შემუშავება.

2. შემოწმებითი ეტაპი 2001-2004წ.წ.

წინასწარი ჰიპოთეზა დაზუსტდა, ჩამოყალიბდა კვლევის ჰიპოთეზის საბოლოო შინაარსი (იხ.შესავალი) და განისაზღვრა საკვლევი პრობლემის გადაჭრის კონკრეტული მეთოდური მიმართულებანი. სისტემატურად ტარდებოდა პედაგოგიური ექსპერიმენტი– სწავლების შედეგების შედარება ექსპერიმენტულსა და საკონტროლო ჯგუფებში. ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავებაში ძირითადი იყო არაპარამეტრული მათემატიკური სტატისტიკის გამოყენება. მიღებული შედეგები განსაზღვრავდა კვლევის მიმართულების განვითარებას.

3. შემაჯამებელი ეტაპი 2004-2005წ.წ.

გამოკვლევის შედეგები იხილებოდა ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თსუ სოხუმის ფილიალის "მათემატიკური ანალიზის" კათედრის სემინარებზე (2000,2001, 2002,2003,2004,2005 წ.წ.)

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თსუ სოხუმის ფილიალის პროფესორ-მასწავლებელთა სამეცნიერო კონფერენციებზე (2000წ.,2001წ.)

თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის მათემატიკური ლოგიკისა და მეთოდოლოგიის განყოფილებისა და ტექნიკური უნივერსიტეტის №63 კათედრის სემინარებზე.

სადისერტაციო გამოკვლევაზე გამოქვეყნებულია 5 შრომა:

1. ტალახაძე მ. წარმოებულის განსაზღვრის ერთი ვარიანტი., "ინტელექტი"., თბილისი., 1999წ., №3(6) გვ188-193.
2. ტალახაძე მ. ტრიგონომეტრიულ, მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციათა წარმოებული., ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის მოხსენებები., თსუ-ს გამომცემლობა თბილისი., 1999წ., ტ.25., გვ.83-85

3. ტალახაძე მ. ინტეგრალის ცნება და მისი ზოგიერთი გამოყენება. "ინტელექტი"., თბილისი., 2003წ., №2(16) გვ.141-144
4. ტალახაძე მ. წარმოებულის სწავლების ეფექტურობის გაზრდის ერთი მეთოდი. "პრომეთე" თბილისი.,2004წ., №4(16)., გვ.84-89.
5. ტალახაძე მ., ფუნქციის მხების განსაზღვრის ერთი მეთოდი., "პრომეთე"., თბილისი., 2005., 5(17)., გვ:105-109.

წარმოებდა დაკვირვება სასწავლო პროცესზე, ჩატარდა საუბარი მოსწავლეებთან და მშობლებთან.

შეიქმნა საკონტროლო და ექსპერიმენტული ჯგუფები. თითოეულ ჯგუფში ჩატარდა 3-3 გაკვეთილი და 3-3 საკონტროლო წერა, წერის შედეგები შეფასებული იქნა ხუთბალიანი სისტემით. თითოეული მოსწავლისათვის გამოთვლილ იქნა საშუალო ქულა, ქულათა რაოდენობის მიხედვით თითოეული ჯგუფი დაყოფილ იქნა ორ კატეგორიად. კერძოდ პირველ კატეგორიაში შეყვანილ იქნა მოსწავლეთა ის რაოდენობა რომლებმაც მოაგროვეს არანაკლებ 3 ქულა, ხოლო მეორე კატეგორიაში შეყვანილ იქნა ორივე ჯგუფის მოსწავლეთა ის რაოდენობა რომლებმაც მოაგროვეს 3-ზე ნაკლები ქულა.

ჩვენი მიზანია განვიხილოთ ჰიპოთეზები შემთხვევით მოვლენათა განაწილების კანონების ტოლობაზე ან განსხვავებაზე, რომლებიც ახასიათებენ შესასწავლ თვისებას განსახილველ მოვლენაზე დაკვირვების შედეგად მიღებული შერჩევის საფუძველზე. ჰიპოთეზის შემოწმება ხდება ეგრეთ წოდებული მნიშვნელოვნების კრიტერიუმით, რომელთა ძირითადი ნაწილი ეყრდნობა შესასწავლი თვისების რაოდენობრივი გაზომვების შედეგებს.

ჰიპოთეზის შემოწმებისათვის გამოყენებულია "χ^2 –კრიტერიუმი". χ^2 კრიტერიუმი გამოიყენება დამოუკიდებელი შერჩევით მიღებული ორი ერთობლიობისათვის შესასწავლი თვისებების მდგომარეობის

სახელდებითი სკალის გაზომვის საფუძველზე ამ თვისების განაწილებების შესადარებლად. [24],[51],[54].

ვთქვათ გვაქვს ორი შერჩევა, ობიექტთა ორი ერთობლიობიდან, მოცულობებით შესაბამისად n_1 და n_2. დავუშვათ, რომ ობიექტის შესასწავლი თვისება იზომება (მაგალითად განსაზღვრული ამოცანის შესრულება) თითოეული ობიექტისათვის სახელდებითი სკალით, რომელსაც აქვს მხოლოდ ორი ურთიერთგამომრიცხავი კატეგორია (მაგალითად შესრულებულია სწორად და შესრულებულია არასწორად) გაზომვის შედეგების შემთხვევითი ხასიათის გამო ობიექტები ორი შერჩევით წარმოიდგინება 4 – უჯრიანი ცხრილით 2x2. შესასწავლი თვისება პირველი ერთობლიობისათვის ხასიათდება შემთხვევითი X სიდიდით, მეორე ერთობლიობა – Y სიდიდით; ხოლო ყოველი ეს ცვლადი ღებულობს ერთ მნიშვნელობას ორი შესაძლებლობიდან.

შერჩევა	კატეგორია1	კატეგორია2
$N1$	a_{11}	a_{12}
$N2$	a_{21}	a_{22}
	$a_{11}+a_{21}$	$a_{12}+a_{22}$

$$a_{11}+a_{12}=n_1 \quad \text{და} \quad a_{21}+a_{22}=n_2$$

სადაც a_{11} არის პირველ შერჩევათა ობიექტის რაოდენობა, რომლებიც მოხვდნენ პირველ კატეგორიაში შესასწავლი თვისების მდგომარეობით. a_{12}– პირველ შერჩევათა ობიექტის ის რაოდენობაა, რომლებიც მოხვდნენ მეორე კატეგორიაში. a_{21} – მეორე შერჩევითი ობიექტის რაოდენობაა, რომლებიც მოხვდნენ პირველ კატეგორიაში. a_{22}– მეორე შერჩევათა ობიექტის რაოდენობაა, რომლებიც მოხვდნენ

მეორე კატეგორიაში. ცხადია, რომ $a_{11}+a_{12}=n_1$ და $a_{21}+a_{22}=n_2$ ხოლო საერთო დაკვირვებათა რაოდენობა

$$N=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=n_1+n_2.$$

კრიტერიუმის გამოყენებისათვის აუცილებელია შესრულდეს შემდეგი მოთხოვნები:

1. ორი შერჩევა შემთხვევითია;
2. შერჩევები დამოუკიდებელია და შერჩევების ყოველი წევრებიც დამოუკიდებელია ერთმანეთისაგან;
3. გაზომვის სკალა შეიძლება იყოს, ძალიან მარტივი სახელდებითი სკალა, ორი კატეგორიით.

ალბათობა იმისა, რომ პირველი შერჩევის ერთობლიბიდან შემთხვევით არჩეული ობიექტი ეკუთვნის პირველ კატეგორიას ავღნიშნოთ $-P_1$-ით, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ მეორე შერჩევის ერთობლიობიდან შემთხვევით არჩეული ობიექტი ეკუთვნის მეორე კატეგორიას აღვნიშნოთ P_2-ით. შეიძლება შევამოწმოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა $H_0:P_1=P_2$ (მაგალითად ჰიპოთეზა საკონტროლო და ექსპერიმენტული ჯგუფების მიერ დავალებათა სწორად შესრულების ალბათობების ტოლობისა.)

კრიტერიუმი არაა რეკომენდირებული გამოვიყენოთ თუ:

1. ორი შერჩევის მოცულობების ჯამი $n_1+n_2=N$ ნაკლებია 20-ზე;
2. ზემოთ მოყვანილ ცხრილში ერთი მაინც $a_{ij}<5$. ზოგი მკვლევარი ამ უკანასკნელს ცვლის შემდეგით: ერთი მაინც სიხშირე

$$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}<5\text{-ზე}.$$

იმ შემთხვევაშძ, როცა $a_{ij},(i,j=1,2)$ სიხშირეებიდან თუნდაც ერთი მოთავსებულია 5-სა და 10-ს შორის , მაშინ T სტატისტიკა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$T=\frac{N(|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|-\frac{N}{2})^2}{n_1n_2(a_{11}+a_{21})(a_{12}+a_{22})}$$

χ^2- კრიტერიუმი გამოიყენება იმ შემთხვევაშიც, როცა ობიექტთა ორი შერჩევის ერთობლიობა შესწავლილი თვისებათა კატეგორიების მიხედვით დაყოფილია ორზე მეტ კატეგორიად. მაგალითად საკონტროლო და ექსპერიმენტული კლასების მოსწავლეები დაყოფილია 4 კატეგორიად შეფასებათა ნიშნების (2,3,4,5) მიხედვით, რომლებსაც ღებულობენ საკონტროლო სამუშაოებში.

ექსპერიმენტის ჩატარების მიზნით ჯგუფებისაგან შიქმნა ორი დამოუკიდებელი ჯგუფი. ერთ ჯგუფს ვასწავლეთ წარმოებული ზღვრების გარეშე, ჩვენს მიერ შემოღებული მეთოდით. მეორე ჯგუფს ტრადიციული მეთოდით.[13]

ცხრილი 2.3.1. და ცხრილი 2.3.2.-დან(იხ. დანართი) გამომდინარე შევადგინოთ 4 უჯრიანი 2×2 ცხრილი

	პირველი კატეგორია	მეორე კატეგორია
პირველი შერჩევა	10	15
მეორე შერჩევა	21	6

$$n_1=25 \qquad N=n_1+n_2=52$$
$$n_2=27$$

განვიხილოთ ჰიპოთეზები:

1. ნულოვანი, H_0: $P_1=P_2$, სადაც P_1- არის ალბათობა იმისა, რომ პირველი შერჩევის ერთობლიბიდან შემთხვევით არჩეული ობიექტი ეკუთვნის პირველ კატეგორიას, ხოლო P_2- არის ალბათობა იმისა, რომ მეორე შერჩევის ერთობლიობიდან შემთხვევით არჩეული ობიექტი ეკუთვნის მეორე კატეგორიას.

2. ალტერნატიული ჰიპოთეზა H_1: $P_1 \neq P_2$

T სტატისტიკა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$T = \frac{N(|a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| - \frac{N}{2})^2}{n_1 n_2 (a_{11} + a_{21})(a_{12} + a_{22})}, \qquad \chi_{1-\alpha} = 3{,}84 \qquad \text{მაშინ}$$

$$T = \frac{52(|60 - 21*15| - 26)^2}{25*27*31*21} = \frac{2726932}{439425} \approx 6{,}2$$

ვინაიდან $T \approx 6.2 > \chi_{1-\alpha} = 3.84$ ამიტომ, H_0 ჰიპოთეზას უარყოფთ და. ვღებულობთ H_1 ჰიპოთეზას. ე.ი. $P_1 \neq P_2$ მაგრამ ცხრილის საფუძველზე ვასკვნით, რომ $P_1 > P_2$.

პედაგოგიური ექსპერიმენტის შედეგები ასახულია ცხრილებში 2.3.1. და 2.3.2. ისინი გვიჩვენებს, რომ H_0 ჰიპოთეზა შეიძლება უარვყოთ მნიშვნელობის საკმაოდ მცირე დონეზე და მივიღოთ ალტერნატიული H_1 ჰიპოთეზა. შესაბამისად საკონტროლო და ექსპერიმენტულ ჯგუფებში განსხვავება მნიშვნელოვანია.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, შედეგები უკეთესია ექსპერიმენტულ ჯგუფებში ვიდრე საკონტროლოში. ეს იძლევა საფუძველს მტკიცებისათვის, რომ ჩვენი მეთოდური გადაწყვეტა ექსპერიმენტულად შემოწმებული და დადასტურებულია.

გამოვთვალოთ ზოგიერთი ფუნქციის წარმოებული, ისე როგორც ეს საკონტროლო ჯგუფებში ჩავატარეთ.

საკონტროლო წერა №1

მაგალითი 1.

ვიპოვოთ $y = kx + C$ ფუნქციის წარმოებული (k, C მუდმივებია)

ვთქვათ, x_0 ნებისმიერი წერტილია. ვიპოვოთ $-\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ შეფარდება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(k(x_0 + \Delta x) + C - (kx_0 + C))}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$$

მაშასადამე, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to k$, როცა $\Delta x \to 0$

ვთქვათ, $f(x) = kx + b$ (k, b მუდმივებია) დავამტკიცოთ, რომ $f(x) \to ka + b$, როცა $x \to a$

ვიპოვოთ $f(x) \approx ka + b$ მიახლოებითი ტოლობის აბსოლუტური ცდომილება:

$$|f(x) - ka - b| = |k(a + \Delta x) + b - ka - b| = |k||\Delta x|$$

როცა $k = 0$, მაშინ გვაქვს ზუსტი ტოლობა. თუკი $k \neq 0$, მაშინ $f(x) \approx ka + b$ ტოლობა შესრულდება წინასწარ მოცემული h სიზუსტით, თუ ავიღებთ $|\Delta x| < \dfrac{h}{|k|}$

ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ზღვრები, როცა $x \to a$, შესაბამისად არის A და B. ეს იმას ნიშნავს, რომ $f(x) \approx A$ და $g(x) \approx B$ მიახლოებითი ტოლობები სრულდება ნებისმიერი სიზუსტით ყველა იმ x-ისათვის, რომლებიც ახლოა a. მაგრამ თუ შეგვიძლია A და B რიცხვების მიახლოებითი მნიშვნელობების პოვნა ნებისმიერი სიზუსტით, მაშრნ შევძლებთ ნებისმიერი სიზუსტით $A + B, AB, \dfrac{A}{B}$ მნიშვნელობების პოვნასაც.

ვთქვათ, როცა $x \to a, f(x) \to A,$ და $g(x) \to B$. მაშინ, როცა $x \to a$, გვაქვს:

1. $f(x) + g(x) \to A + B$;

2. $f(x)g(x) \to AB$;

3. $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}(B \neq 0)$]

ამიტომ ნებისმიერი x_0 წერტილისათვის $y' = k$ ამრიგად:

$$(kx + C)' = k$$

ამ ფორმულებიდან, თუ დავუშვებთ, რომ $k = 0$, ხოლო შემდეგ $k = 1, C = 0$ მივიღებთ შემდეგ შედეგებს

1. მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია:

$$C' = 0$$

2. $y = x$ ფუნქციის წარმოებული 1-ის ტოლია:

$$x' = 1$$

მაგალითი2.

დავამტკიცოთ, რომ $(x^3)' = 3x^2$

გამოვსახოთ ნებისმიერ x_0 წერტილში x^3 ფუნქციის ნაზრდის შეფარდება შესაბამის Δx ნაზრდთან:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

როცა $\Delta x \to 0, (\Delta x)^2$ და $3x_0\Delta x$ შესაკრებები აგრეთვე ნულისაკენ მიისწრაფვიან, ამიტომ $3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ ჯამი ნულისაკენ მიისწრაფვის როცა $\Delta x \to 0$. ამრიგად,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3x_0^2, \text{როცა } \Delta x \to 0, \text{ ესე იგი } (x^3)' = 3x^2$$

მაგალითი3.

დავამტკიცოთ, რომ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} (x \neq 0)$ ნებისმიერი $x_0 \neq 0$ სათვის.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0})\frac{1}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{\Delta x x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0(x_0 + x)}$$

თუ $\Delta x \to 0$, მაშინ $x_0 + \Delta x \to x_0, \frac{1}{x_0 + \Delta x} \to \frac{1}{x_0}$, ამიტომ

$-\frac{1}{x_0(x_0 + x)} \to -\frac{1}{x_0 x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$, როცა $\Delta x \to 0$ ამრიგად, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ მიისწრაფვის $-\frac{1}{x_0^2}$ ზღვრისაკენ, როცა $\Delta x \to 0$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

ყველა განსახილველ მაგალითში ფუნქციებს განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში ჰქონდათ წარმოებული. მაგრამ არ უნდა ვიფიქროთ, რომ საზოგადოდ ნებისმიერ ფუნქციის განსაზღვრის არის ყოველ შიგა წერტილში აქვს წარმოებული.

განვიხილოთ მაგალითი.

საკონტროლო წერა №2.

მაგალითი 1.

გავაწარმოოთ $f(x) = |x|$ ფუნქცია:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{როცა } x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

განვიხილოთ ამ ფუნქციის გრაფიკი. $x_0 > 0$ წერტილის რაიმე მიდამოს ნებისმიერი $x > 0$ წერტილისათვის $|x|$ ფუნქცია x-ის ტოლია, ამიტომ $|x|$-ის წარმოებული ასეთ წერტილებში x'-ის ტოლია, ე. ი. x-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის $|x|' = 1$. რადგან, როცა $x < 0, |x| = -x$ ამიტომ უარყოფითი x--ებისათვის $|x|' = -1$. ამ ფუნქციას 0 წერტილში წარმოებული არა აქვს. ამრიგად,

$$|x|' = \begin{cases} 1, x > 0 \\ \text{არ არსებობს, როცა } x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

დავამტკიცოთ (საწინააღმდეგოს დაშვების მეოდით), რომ $|x|$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში წარმოებული არა აქვს.

დავუშვათ, რომ ამ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს

წარმოებული, ე.ი. $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ როცა $\Delta x \to 0$, მიისწრაფვის რაიმე A

ზღვრისაკენ. $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} \approx A$ მიახლოებითი ტოლობა მართებულია 0-თან საკმარისად ახლოს მდებარე ყველა Δx--ისათვის ნებისმიერი წინასწარ მოცემული h სიზუსტით. თუ ავირჩევთ $h<1$, ვიპოვით, რომ ასეთი Δx-ებისათვის მართებულია

$$\left|\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - A\right| < 1$$

უტოლობა. კერძოდ , როცა $\Delta x > 0$, $|1-A|<1$, ე.ი. $-1<1-A<1$ ანუ $0<A<2$ (1) როცა $\Delta x<0$, $|-1-A|<1$, ე.ი. $-1<-1-A<1$, ანუ $-2<A<0$ (2)

და (2) უტოლობები ერთმანეთს ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, შვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $x=0$ წერტილში არსებობს $|x|$ ფუნქციის წარმოებული, მცდარია.

მაგალითი 2.

ვთქვათ, x-ის მოცემული მნიშვნელობის მიხედვით საჭიროა გამოვთვალოთ $z=h(x)=\sqrt{1-x^2}$, ფორმულით მოცემული h ფუნქციის შესაბამისი z მნიშვნელობა. ამისათვის ჯერ მოცემული x-ისათვის გამოვთვალოთ $y=f(x)=1-x^2$, ხოლო შემდეგ უკვე ამ y-ისათვს გამოვთვალოთ $z=g(y)=\sqrt{y}$. ამრიგად, f ფუნქციას x გადაჰყავს y-ში, ხოლო g ფუნქციას y გადაჰყავს z-ში. ამბობენ, რომ h არის g და f ფუნქციებისაგან შედგენილი რთული ფუნქცია და ამას ასე წერენ: $h(x)=g(f(x))$

თუ f ფუნქციას აქვს წარმოებული x_0 წერტილში, ხოლო g ფუნქციას — $y_0=f(x_0)$ წერტილში, მაშინ $h(x)=g(f(x))$ ფუნქციასაც x_0 წერტილში

აქვს წარმოებული და $h'(x_0) = g'(f(x_0) * f'(x_0)$. ამ ფორმულის დასამტკიცებლად უნდა განვიხილოთ $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ წილადი, როცა $\Delta x \neq 0$ და დავადგინოთ, რომ $\frac{\Delta h}{\Delta x} \to g'(y_0) * f'(x_0)$, როცა $\Delta x \to 0$. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f,$$

მაშინ:

$$\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = g(f(x_0) + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = \Delta g$$

და $\Delta y \to 0$, როცა $\Delta x \to 0$, რადგან x_0 წერტილში f წარმოებადია. დამტკიცებას მხოლოდ ისეთი f ფუნქციებისათვის ჩავატარებთ, რომლებისთვისაც x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $\Delta f \neq 0$

მაშინ:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta h}{\Delta y} * \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g}{\Delta y} * \frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'(y_0) * f'(x_0), \text{ როდესაც } \Delta x \to 0,$$

რადგან $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$, როდესაც $\Delta x \to 0$,

ხოლო $\frac{\Delta g}{\Delta y} \to g'(y_0)$, როდესაც $\Delta y \to 0$, რაც სრულდება როდესაც $\Delta x \to 0$.

მაგალითი3.

დავამტკიცოთ, რომ სინუს ფუნქციას ნებისმიერ წერტილში აქვს წარმოებული და $(\sin x)' = \cos x$ (1)

თუ გამოვიყენებთ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} * \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ ფორმულას, მივიღებთ:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) * \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} * \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2})$$

(1) ფორმულის გამოსაყვანად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$1)\ \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1, \text{ როდესაც } \Delta x \to 0;$$

2) $\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\to\cos x_0$, როდესაც $\Delta x\to 0$

ამ მტკიცებებზე დაყრდნობით მივიღებთ (1) ფორმულას. მართლაც, როცა $\Delta x\to 0$, გვაქვს: $\frac{\Delta\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}*\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\to 1*\cos x_0=\cos x_0$.

დამტკიცება: 1. და 2. მტკიცებებს რომლებსაც ზემოთ ვეყრდნობით, თვალსაჩინო გეომეტრიული აზრი აქვთ.

1) ერთეულოვან წრეწირზე P_0 წერტილის ორივე მხარეზე ავაგოთ $\frac{\Delta x}{2}$ სიგრძის P_0A და P_0B რკალები (იხ. ნახაზი), მაშინ AB რკალის სიგრძე უდრის $|\Delta x|$-ს, ხოლო AB ქორდის სიგრძე $2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|$-ს. მცირე Δx-ებისათვის AB ქორდის სიგრძე პრაქტიკულად არ განსხვავდება ამ ქორდით მოჭიმული AB რკალის სიგრძისაგან. მაშასადამე

$$\frac{AB}{\breve{AB}}=\frac{\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{2}\right|}=\left|\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right|\to 1\quad,\ \text{როცა}\ \Delta x\to 0,$$

2) ნახაზის განხილვისას შევამჩნევთ, რომ AB ქორდის სიგრძე ნაკლებია AB რკალის სიგრძეზე ე.ი.

$$2\sin\frac{|\Delta x|}{2}<2\frac{|\Delta x|}{2}$$

კოსინუსების სხვაობის ფორმულისა და უტოლობის გამოყენებით ვპოულობთ:

$$\left|\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})-\cos x_0\right|=\left|-2\sin\frac{\Delta x}{4}\sin(x_0+\frac{\Delta x}{4})\right|\le\left|2\sin\frac{\Delta x}{4}\right|\le\frac{|\Delta x|}{2}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\approx\cos x_0$ მიახლოებითი ტოლობა სრულდება ნებისმიერი მოცემული h სიზუსტით ყველა იმ Δx-ისათვის,

რომლისთვისაც $|\Delta x|<2h$, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\to\cos x_0$, როცა $\Delta x\to 0$.

საკონტროლო წერა №3

მაგალითი1.

ვიპოვოთ $y=e^x$ ფუნქციის წარმოებული.

ჯერ ვიპოვოთ $y=e^x$ ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში:

$$\Delta y = e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}=e^{x_0}*e^{\Delta x}-e^{x_0}=e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)$$

შემდეგი ტოლობის საშუალებით $\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to 1$, როდესაც $\Delta x\to 0$ რომელიც მივიღეთ დაუმტკიცებლად, მივიღებთ: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=e^{x_0}*\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\to e^{x_0}$, $\Delta x\to 0$. წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად აქედან გამომდინარეობს, რომ $y'=e^x$

მაგალითი 2.

ვიპოვოთ $y=a^x$ ფუნქციის წარმოებული.

ნებისმიერი მაჩვენებლიანი a^x ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $a^x=\left(e^{\ln a}\right)^x=e^{x\ln a}$. გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი, მივიღებთ რომ a^x ფუნქცია წარმოებადია ნებისმიერი x-ისათვის და $(a^x)=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}*\ln a=a^x*\ln a$

ეხლა განვიხილოთ მაგალითები, ისე როგორც ეს გავაკეთეთ ექსპერიმენტულ ჯგუფებში ანუ ჩვენ დისერტაციაში მითითებული ხერხით.

საკონტროლო წერა № 1

მაგალითი 1.

ვიპოვოთ $y=kx+C$ ფუნქციის წარმოებული (k და C მუდმივებია) შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება.

$$(kx+C)'=\frac{k\xi+C-(kx+C)}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=\frac{k(\xi-x)}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=k\Big|_{\xi}^{x}=k$$

ამგვარად მივიღეთ, რომ $(kx+C)'=k$

ამ ფორმულიდან, თუ დავუშვებთ, რომ $k=0$, ხოლო შემდეგ $k=1$ და $C=0$, მივიღებთ შემდეგ შედეგებს:

1. მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია:

$$(C)'=0$$

2. $y=x$ ფუნქციის წარმოებული 1-ის ტოლია:

$$x'=1$$

მაგალითი 2.

დავამტკიცოთ, რომ $(x^3)'=3x^2$

შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$(x^3)'=\frac{\xi^3-x^3}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=\frac{(\xi-x)(\xi^2+\xi x+x^2)}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=(\xi^2+\xi x+x^2)\Big|_{\xi}^{x}=3x^2$$

ამგვარად, მივიღეთ რომ $(x^3)'=3x^2$.

მაგალითი 3.

დავამტკიცოთ, რომ $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}(x\neq 0)$

შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$(\frac{1}{x})'=\frac{\frac{1}{\xi}-\frac{1}{x}}{\xi-x}\Bigg|_{\xi}^{x}=\frac{-(\xi-x)}{\xi x(\xi-x)}\Bigg|_{\xi}^{x}=-\frac{1}{\xi x}\Bigg|_{\xi}^{x}=-\frac{1}{x^2}$$

ამგვარად მივიღეთ, რომ $(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}(x\neq 0)$

ყველა განხილულ მაგალითში ფუნქციებს განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში ჰქონდათ წარმოებული. მაგრამ არსებობს

ფუნქციები რომელთაც განსაზღვრის არის შიგა წერტილში წარმოებული არა აქვს.

საკონტროლო წერა №2

მაგალითი1.

ვიპოვოთ $y=|x|+x^2$ ფუნქციის წარმოებული $x=0$ წერტილში.

1) ვიპოვოთ მარჯვენა წარმოებული $x>0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს: $y=x+x^2$

$$y_+'=\frac{\xi+\xi^2-x-x^2}{\xi-x}\Big|_\xi^x=\frac{\xi-x+(\xi-x)*(\xi+x)}{\xi-x}\Big|_\xi^x=(1+\xi+x)\Big|_\xi^x=1+2*x$$

$$y_+'(0)=(1+2*x)\Big|_x^0=1+2*0=1$$

2) ვიპოვოთ მარჯვენა წარმოებული $x<0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს: $y=-x+x^2$

$$y_-'(x)=\frac{-\xi+\xi^2+x-x^2}{\xi-x}\Big|_\xi^x=(-1+\xi+x)\Big|_\xi^x=-1+2*x$$

$$y_-'(0)=(-1+2*x)\Big|_\xi^x=-1$$

საბოლოოდ მივიღებთ $y_-'(0)\neq y_+'(0)$.

ამგვარად, მოცემულ ფუნქციას 0 წერტილში წარმოებული არა აქვს.

მაგალითი2.

ვიპოვოთ $\varphi(x)=(3*x+1)^{10}$ ფუნქციის წარმოებული.
იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\varphi(x)=f(g(x))$ რთული ფუნქციის სახით. სადაც:, $u=g(x)=3*x+1$, $g'(x)=3$, $f(u)=u^{10}$,
$f'(u)=10*u^9$, $\varphi'(x)=f'(u)*g'(x)$, $\varphi'(x)=10*u^9*3=30*(3*x+1)^9$

მაგალითი3.

ვიპოვოთ $\varphi(x)=\sqrt[3]{7*x^4+4*x+1}$ ფუნქციის წარმოებული. იგი შეიძლება წარმოვიდგინოთ $\varphi(x)=f(g(x))$ რთული ფუნქციის სახით, სადაც $u=g(x)=7*x^4+4*x+1$, $f(u)=u^{\frac{1}{3}}$ რადგან $g'(x)=28*x^3+4$ $f'(u)=\frac{1}{3}*u^{\frac{-2}{3}}$;

$$\varphi'(x)=f'(u)*g'(x)=\frac{1}{3*\sqrt[3]{(7*x^4+4*x+1)^2}}*(28*x^3+4)$$

საკონტროლო წერა №3

მაგალითი1.

ვიპოვოთ $\sin x$ და $\cos x$ ფუნქციების წარმოებულები:

$\sin x$ ფუნქციისათვის ჩავწეროთ დიფერენციალური გამოსახულება

$$\frac{\sin\xi-\sin x}{\xi-x}=2*\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}*\cos\frac{\xi+x}{2}}{\xi-x}=\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}*\cos\frac{\xi+x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}$$

$$(\sin x)'=\frac{\sin\xi-\sin x}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}\Big|_{\xi}^{x}*\cos\frac{\xi+x}{2}\Big|_{\xi}^{x}=1*\cos\frac{2*x}{2}=\cos x$$

ანალოგიურად $\cos x$ ფუნქციისათვის ჩავწეროთ დიფერენციალური გამოსახულება

$$\frac{\cos\xi-\cos x}{\xi-x}=-2*\frac{\sin\frac{\xi+x}{2}*\sin\frac{\xi-x}{2}}{\xi-x}=-\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}*\sin\frac{\xi+x}{2}$$

$$(\cos x)'=\frac{\cos\xi-\cos x}{\xi-x}\Big|_{\xi}^{x}=-\frac{\sin\frac{\xi-x}{2}}{\frac{\xi-x}{2}}\Big|_{\xi}^{x}*\sin\frac{\xi+x}{2}\Big|_{\xi}^{x}=-1*\sin\frac{2*x}{2}=-\sin x$$

მაგალითი 2.

ვიპოვოთ $f(x)=|x|$ ფუნქციის წარმოებული $x=0$ წეტილში.

1) ვიპოვოთ მარჯვენა წარმოებული $x>0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს: $f(x)=x$, ამიტომ $|x|$-ის წარმოებული ასეთ წერტილებში x'-ის ტოლია. ესე იგი x-ის დადებითი მნიშვნელობებისათვის $|x|'=1$

$$f_+'(0)=\frac{\xi-x}{\xi-x}\bigg|_{\xi}^{x}=1\bigg|_{\xi}^{x}=1$$

2) ვიპოვოთ მარცხენა წარმოებული $x<0$, ჩვენი ფუნქცია მიიღებს სახეს: $f(x)=-x$, ამიტომ უარყოფითი x-ებისათვის $|x|'=-1$

$$f_-'(0)=\frac{-\xi+x}{\xi-x}\bigg|_{\xi}^{x}=-1\bigg|_{\xi}^{x}=-1$$

ამგვარად, $f_+'(0)\neq f_-'(0)$ მოცემულ ფუნქციას 0 წერტილში წარმოებული არა აქვს.

მაგალითი3.

ვიპოვოთ $\varphi(x)=f(g(x))=(x^2+1)^n$ რთული ფუნქციის წარმოებული. ამისათვის შევადგინოთ დიფერენციალური გამოსახულება:

$$((x^2+1)^n)'=\frac{(\xi^2+1)^n-(x^2-1)^n}{\xi-x}\bigg|_{\xi}^{x}=\frac{(\xi^2+1)^n-(x^2-1)^n}{(\xi^2+1)-(x^2-1)}\bigg|_{\xi}^{x}\frac{(\xi^2+1)-(x^2-1)}{\xi-x}\bigg|_{\xi}^{x}=$$

$$=((\xi^2+1)^{n-1}+(\xi^2+1)^{n-2}*(x^2+1)+\ldots+(x^2+1)^{n-1})\big|_{\xi}^{x}2x=$$

$$((x^2+1)^{n-1}+(x^2+1)^{n-1}+\ldots+(x^2+1)^{n-1})2x=2nx*(x^2+1)^{n-1}$$

ან

$u=g(x)=x^2+1$, $g'(x)=2x$, $f(u)=u^n$, $f'(u)=nu^{n-1}$,

$\varphi'(x)=f'(u)g'(x)=nu^{n-1}2x=2nx(x^2+1)^{n-1}$

ც ხ რ ი ლ ე ბ ი

ცხრილი 2.3.1.

მოსწავლის №	საკონტროლო № 1	საკონტროლო № 2	საკონტროლო №3	საშუალო ქულა
1	5	4	4	13/3
2	5	5	4	14/3
3	4	5	4	13/3
4	4	5	4	13/3
5	4	4	4	4
6	4	4	4	4
7	4	4	4	4
8	4	4	3	11/3
9	4	3	3	10/3
10	4	4	3	11/3
11	4	3	3	10/3
12	4	3	3	10/3
13	3	3	3	10/3
14	3	4	3	10/3
15	3	4	3	10/3
16	3	4	4	11/3
17	3	4	4	10/3
18	3	3	4	10/3
19	3	3	3	3
20	3	3	2	8/3
21	3	3	3	3
22	3	3	3	3

23	3	2	3	8/3
24	2	3	3	8/3
25	2	2	3	7/3
26	2	3	3	8/3
27	2	2	3	7/3

3-ზე არანაკლებნიშნიანი არის 21, ხოლო 3-ზე ნაკლებნიშნიანი არის 6

ცხრილი 2.3.2.

მოსწავლის №	საკონტროლო №1	საკონტროლო № 2	საკონტროლო № 3	საშუალო ქულა
1	4	4	3	11/3
2	4	4	3	10/3
3	4	4	4	4
4	4	3	3	10/3
5	4	3	3	10/3
6	4	3	4	11/3
7	4	3	4	11/3
8	3	3	2	8/3
9	3	3	2	8/3
10	3	3	2	8/3
11	3	3	2	8/3
12	3	3	2	8/3
13	3	3	4	10/3
14	3	3	4	10/3
15	3	3	2	8/3
16	3	4	3	10/3
17	3	3	2	8/3

18	2	3	3	8/3
19	2	2	3	7/3
20	2	2	3	7/3
21	2	3	2	7/3
22	2	2	3	7/3
23	2	3	2	7/3
24	2	3	2	7/3
25	2	2	2	2

3-ზე არა ნაკლებნიშნიანი 10, ხოლო 3-ზე ნაკლებნიშნიანი არის 15

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1 ბერდუქიძე ავთ., რა არის მათემატიკური ანალიზი., თბილისი., "ლეგია"., 1994.

2. ბენდუქიძე ავთ., მრავალწევრის ექსტრემუმი და მისი მოძებნა., ჟ. ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში., 1972., №1., გვ:9-21.

3. გეგელია თ., სასკოლო მათემატიკის ფუნდამენტური ცნებები., თბილისი., "მეცნიერება"., 1985წ.

4. გეგელია თ., მათემატიკის სპეც. კურსი., თბილისი., "განათლება"., 1985.

5 გოკიელი ლ., მათემატიკის საფუძვლები., თბილისი., თბ. სახ. უნივ. გამომც., 1957.

6. გოკიელი ლ., მათემატიკური ანალიზის შესავალი., თბილისი., თბ.სტალინის სახ. უნივ. გამომც., 1938.

7. გოკიელი ლ., დიფერენციალური აღრიცხვა., ტფ. პედ. ინსტ. მათ. სექცია.,ტფილისი., 1933.

8. თოფურია ს., გ. აბესაძე., გ.ოზბეგაშვილი., ვ.ხოჭოლავა., ზ. მეტრეველი ნ. მაჭარაშვილი., მათემატიკა., 1 ნაწილი., თბილისი., "განათლება"., 1983.

9. იმერლიშვილი ე., სასკოლო მათემატიკის განვითარების ისტორიისათვის., თბილისი., თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა., 1984.

10 კაკაბაძე გ., ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული., ჟ. ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში., 1986., №4., გვ:25-38

11. კაკაბაძე გ., წარმოებული ფუნქციის ცვლილების სისწრაფე., ჟ. ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში., 1986 ., №2., გვ:45-63

12. კაპანაძე დ., იაკობ გოგებაშვილის სახელობის პედაგოგიურ მეცნიერებათა ეროვნული ინსტიტუტი., დისერტაცია პედაგოგიურ მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად., თბილისი., 1997.
13. კოლმოგოროვი ა., ალგებრა და ანალიზის საწყისები სახელმძღვანელო მე-10 და მე-11 კლასებისათვის., თბილისი., "განათლება"., 1988.
14. კრინსკი პ., მათემატიკა ეკონომისტებისათვის., თბილისი., თსუ-ს გამომც., 1974.
15. ლორთქიფანიძე დ., დიდაქტიკა., თბილისი., თსუ-ს გამომც., 1981.
16. ნატროშვილი დ., გიორგაშვილი ლ., უსანეთაშვილი მ. ჯაშიაშვილი გ., მათემატიკა ეკონომისტებისათვის., თბილისი., "გლობალ- პრინტი"., 1999.
17. ტალახაძე მ., წარმოებულის განსაზღვრის ერთი ვარიანტი., თბილისი., "ინტელექტი"., 1999., 3(6)., გვ:188-192.
18. ტალახაძე მ., ტრიგონომეტრიულ, მაჩვენებლიან და ლოგარითმულ ფუნქციათა წარმოებული., თბილისი., თსუ-ს გამომცემლობა., ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის მოხსენებები., 1999., ტ.25., გვ:83-85.
19. ტალახაძე მ., ინტეგრალის ცნება და მისი ზოგიერთი გამოყენება., თბილისი., "ინტელექტი"., 2003., 2(16)., გვ:141-144.
20. ტალახაძე მ., წარმოებულის სწავლების ეფექტურობის გაზრდის ერთი მეთოდი., თბილრსი., "პრომეთე"., 2004., 4(16)., გვ:84-89.
21. ტალახაძე მ., ფუნქციის მხების განსაზღვრის ერთი მეთოდი., თბილისი., "პრომეთე"., 2005., 5(17)., გვ:105-109.
22 უზნაძე დ., ფილოსოფიური შრომები., თბილისი., თბილისის უნივ. გამომც., 1986.

23. უზნაძე დ., ზოგადი ფსიქოლოგია., თბილისი., სტალინის სახ. უნივ. გამომც., 1940.

24. ფაცაცია მ., პედაგოგიური ექსპერიმენტი და მისი შედეგები., თბილისი., "საზრისი"., 2004., №13., გვ:26-32.

25. ქარცივაძე ი., მათემატიკური ანალიზი., ტ1., თბილისი., თბ. უნივ. გამომც., 1981.

26. ქელბაქიანი ვ., ინტეგრალი საშუალო სკოლის მათემატიკის ფაკულტატიურ კურსში., თბილისი., "განათლება"., 1975 .

27. ქელბაქიანი ვ., ალგებრა და ანალიზის საწყისები საშუალო სკოლის მათემატიკის კურსში., თბილისი., "განათლება"., 1980.

28. ჩხარტიშილი შ.-ს რედაქციით., პედაგოგიური ფსიქოლოგია., თბილისი., "განათლება"., 1965წ.

29. ცხაკაია დ., მათემატიკის ისტორია (უძველესი საუკუნეებიდან მე-18 საუკუნემდე) ., თბილისი., სამეცნიერო- მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა., 1948.

30. ცხაკაია დ., მათემატიკის ისტორია (მე-18 საუკუნიდან მე-19 საუკუნის მეორე ნახევრამდე)., თბილისი., "მეცნიერება"., 1965.

31. ხარაბაძე ა., მათემატიკის მეთოდიკის ზოგადი კურსი., თბილისი., სამეცნიერო-მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა., 1946.

32. ხარაბაძე ა., მათემატიკის სწავლების მეთოდიკა საშუალო სკოლაში., თბილისი., სამეცნიერო-მეთოდური კაბინეტის გამომცემლობა., 1954.

33. ჯინჯიხაძე ჯ., მათემატიკა., თბილისი., "განათლება"., 1993.

34. Адамар Ж., Исследование психологии изобретения в области математики., М., "Сов.радио"., 1970.

35. Александров П.С., Математика как наука., Т2.Изд М., АПН., 1995.

36. Архипов М.М., Воспитание интереса к математике., Математика в школе., М., "Просвещение"., 1964., №5., стр:24-29

37. Башмаков М.М., Карпова Г. М., Затакавай В.В., Алгебра и начала анализа для 10-11 классов., М., "Просвещение"., 1991.
38. Борель Э., Основные идеи алгебры и анализа., М.Л., Госуд. изд-во 1-я образцовая Тип. в Мск., 1927.
39. Болтянский В.Г., Колмогоров А. Н., и др., Проект программы средней школы по математике., Математика в школе., М.,"Просвещение". 1967., №1., стр:4-23.
40. Божевич Е.Д., Исследование умственной деятельности школьников в процессе обучения., Диссертация на соиск ученой степени кандидата психологических наук., М., "Наука"., 1975.
41. Брунер Дж., Процесс обучения., М., Изд-во Акад. пед. наук РСФСР., 1962., стр:15
42. Брадис В.М., Методика преподавания математики в средней школе., М., Учпедгиз., 1954.
43. Бурбаки Н., Архитектура математики., М., "Знание"., 1972.
44. Бычков Б.П., Реформа преподавания математики в средней школе Франции., Математика в школе., М., "Просвещение"., 1969., №1., стр:91-94
45. Верченко С.Б., Новые программы французской средней школы., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1978., №6., стр:74-78
46. Вилейтнер Г., Хрестоматия по истории математики составленная по первоисточникам., М.-Л., ОТНИ., 1932.
47. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г., Производная и интеграл., Пособие для учителей., М., " Просвещение"., 1976.
48. Вилейтнер Г., История математики от Декарта до середины 19 столетия., М., "Наука"., 1966.
49. Вогели Б. Р., Модернизация преподавания математики в американской школе., Математика в школе., М., "Просвещение"., 1964., № 4 ., стр:88-90

50. Гингулис Э. Ж., Развитие математических способностей учащихся., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1990., N1., стр:14-17
51. Гласс Дж., Стенли Дж., Статистические методы в педагогике и психологии., М., "Прогресс"., 1976.
52. Гнеденко Б.В., О математических способнастях и их развитии., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1982., №1.,стр:31-33
53. Гнеденко Б. В., Мария Клерико.О математическом образовании в итальянской школе., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1976., №5., стр: 90-93
54. Грабарь М.И., Красянская К.А., Применение математической статистики в педагогических исследованиях., Непараметрические методы., М.,"Прогресс"., 1977.
55. Дорофеев Г.В., Математика для каждого., М., АЯКС., 1999.
56. Ельконин Д. Б., Избранные психологические труды (Под ред. Давидова В.В., Зинченко В.П.)., М., Педагогика., 1989.
57. Карраско А., Элементы мат. анализа X-XII классах Кубинской школы., Математика в школе., М.,"Педаггогика".,1987., № 2., стр:73-74
58. Клайн М., Математика., Утрата определенности., М., "Мир"., 1984.
59. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С., Алгебра и начала анализа 9-й класс., М., "Просвещение"., 1969.
60. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 и 10 классов., М., Просвещение., 1980.
61. Колмогоров А. Н. и др., Алгебра и начала анализа.Учебное пособие для 9 кл средней школы., М., "Просвещение"., 1975.
62. Кон И.С., Психология юношеского возраста., М., "Просвещение"., 1979.

63. Колягин Ю.М., Оганесян В.А., Санинский В.Я., Луканкин Г.А., Методика преподавания математики в средней школе., Обшая методика., М., "Просвешение"., 1975.

64. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С., Алгебра и начала анализа 10-й класс., М., "Просвещение"., 1974.

65. Колмогоров А.Н., Новые програмы и некоторые основные вопросы усовершенствования курса математики в средней школе., Математика в школе., М., "Просвещение"., 1967., №2., стр:4-13

66. Крутецкий В. А., Психология математических способностей школьников., М .,"Просвещение"., 1968.

67. Крутецкий В. А., Воспитание воли., М., Учредгиз., 1957.

68. Крутецкий В. А., Основы педагогической психологии., М., "Просвещение"., 1972.

69. Леонтьев В.Г., Исследование мотивации сферы личности., Новосибирск., НГПИ., 1984.

70. Леонтьев В. Г., Формирование мотивации учебной деятельности учащихся., Новосибирск., НГПИ., 1985.

71. Лейтес Н.С., Об умственной одаренности., М., Изд. Акад. пед. наук РСФСР., 1960.

72. Ляпина С. Е., Методика преподавания математики., часть2., Ленинград., Учпедгиз., 1956.

73. Мацкин М.С., Мацкина Р.Ю., О преподавании элементов математического анализа в средней школе., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1979., №4., стр:23-26

74. Мацкин М. С., Мацкина Р. Ю., Функции и пределы., Математика в школе., М., Учпедгиз., 1960., №3., стр: 18-20

75. Маркушевич А. И., Сикорский К. Н., Черкасов Р. С., Алгебра и элементарные функции., М., "Просвещение"., 1968.

76. Маркушевич А.И., Некоторие сведения о французском школе и преподавания в ней математике., М., "Математическое просвещение"., вып2., 1957.

77. Маркова А.К., Формирование мотивации учения в школьном возрасте., М., "Просвещение "., 1983.

78. Маркушевич А.И., Сикорский К.Н., Черкасов Р.С., Алгебра и элементарные функции., М., "Просвещение"., 1968.

79. Ососков Г.А., Элементы математического анализа должно и можно ввести в школный курс математики., Математика в школе., М., Учпедгиз., 1960., №5.,стр:45-47

80. Парно И.К., Производная и ее применение к иследованию функции., Изд.2-ое., М., "Просвещение"., 1968.

81. Парно И.К., Интеграл в 10 классе средней школы., М., "Просвещение"., 1970.

82. Петровский Н. В., Опыт исследования умстенной деятельности ., М., изд-во АВ Думнов ИК., 1975.

83. Понтрягин А.С., Математический анализ для школьников., М., "Наука"., 1983.

84. Пойа Д. Усвоение математики , ее преподавание и обучение педагогическому мастерству., Математика в школе., М., "Просвещение"., 1964., N 6 ., стр:80-89.

85. Репьев В.В., Общая методика преподавания математики., М., Учпедгиз.,1958.

86. Сецуко Минэ., Шапкина В. Н., О новых програмах по математике в средних школах Японии., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1979., №6., стр:64-67

87. Симон М., Дидактика и методика в школе., М., Гиз., 1922.

88. Симон М., Дидактика и методика математики в школе., Изд.3-е., М., Гиз., 1922.

89. Соболев С. Л., Преподавания математики в Советском Союзе., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1973., № 1., стр:4-10

90. Столяр А.А., Педагогика математики. Минск., Вышэйш школа., 1986.

91. Столяр А.А., Методы обучения математике., М., "Высшая школа". 1966.

92. Столяр А.А., Чему должна учить методика преподавания математики., Математика в школе., М., "Педагогика"., 1979., №6., стр:48-51

93. У Чжо Тин. О математическом образовании в Бирманском Союзе. Математика в школе., М., "Просвещение"., 1969., № 2., стр:89

94. Фуше А., Педагогика математики., М., Просвещение., 1969.

95. Цейтен И.Г., История математики в древности и в средние века., М.- Л., ГОНТН., 1938.,стр: 55-56

96. Цейтен И.Г., История математики в 16-17 веках., М.-Л.,ОНТИ.,1938.

97. Ястребинецкий Г.А., К методике изложения темы "Производная" в 9 классе., Математика вшколе., М., "Педагогика".,1976., №5., стр:39-43.

98. Эйлер Л., Дифференциальное исчисление.,М., Главполиграфиздат в Мск., 1949.

99. Эйлер Л., Интегральное исчисление., М., Гостехиздат., 1956.