ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ვარლამ მესხია

ჰაარის ვეივლეტის შესაბამისი მწკრივის აბსოლუტური და უპირობო კრებადობების შესახებ

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის
სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

01.01.01 – მათემატიკური ანალიზი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი ვასილ ბუღაძე

თბილისი
2006

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

ფუნქციათა ორთოგონალური სისტემების თეორიაში მნიშვნელოვანი ნაბიჯი იყო მე-20 საუკუნის 80-იან წლებში განვითარებული ვეივლეტების თეორია 90-იან წლებში მან ჩამოყალიბებული სახე მიიღო და გადმოიცა რამდენიმე მონოგრაფიაში ს მალას [1] მიერ შემუშავებული იქნა მრავალმასშტაბიანი ანალიზის მეთოდი, რამაც თავის მხრივ წარმოშვა ვეივლეტთა ფართო კლასების აგების შესაძლებლობა ამ მეთოდის გამოყენებით ი დობეშიმ [2] ააგო კომპაქტურ საყრდენიანი გლუვი ვეივლეტები, რომლებმაც ფართო გამოყენება ჰპოვეს როგორც თეორიული, ისე პრაქტიკული საკითხების კვლევისას კერძოდ, სიგნალთა და სახეთა თეორიაში და მათ პრაქტიკულ გამოყენებებში

ალფრედ ჰაარმა [3] ააგო დღეისათვის კარგად ცნობილი კლასიკური სისტემა ჰაარის ერთგანზომილებიანი და n-განზომილებიანი ვეივლეტი ჰაარის კლასიკური სისტემის განერცობებია შესაბამისად ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე და $\mathbb{R}^n$ -ზე ჰაარის ვეივლეტმა, მისი საყრდენის კომპაქტურობის გამო, დიდი გამოყენება ჰპოვა სიგნალთა თეორიაში

პირველ თავში შესწავლილია ჰაარის ჯერადი განცალებადი ვეივლეტის მიმართ ფუნქციათა კომპოზიციის ფურიეს მწკრივის აბსოლუტური კრებადობის ზოგიერთი საკითხი

განსაზღვრება. ვთქვათ g ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილი ღერძის $[a,b]$ სეგმენტზე ვიტყვით, რომ g ფუნქცია მოქმედებს $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა რაიმე A კლასში, თუ ამ კლასის

ყოველი f ფუნქციისათვის, რომლის მნიშვნელობები $[a,b]$-შია, კომპოზიცია $g \circ f$ ეკუთვნის A კლასს

ჰაარის კლასიკური სისტემისათვის ვ ბუღაძის [4] მიერ დამტკიცებული იყო, რომ იმ ფუნქციათა კლასში, რომელთა ფურიე-ჰაარის მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მოქმედებენ მხოლოდ $cx+d$, $c, d \in \mathbb{R}$, სახის ფუნქციები ანუ მხოლოდ და მხოლოდ წრფივი ოპერაციები ინახავენ ფურიე-ჰაარის მწკრივის აბსოლუტურ კრებადობას

შემდგომში დაისვა საკითხი ხომ არ გაფართოვდებოდა კლასი იმ ოპერაციებისა, რომელნიც ინახავენ ფურიე-ჰაარის მწკრივის აბსოლუტურ კრაბადობას, თუ შემოვიფარგლებოდით უწყვეტი ფუნქციებით აღმოჩნდა, რომ (იხ [5]) ფუნქციათა კლასის ამგვარი შეზღუდვაც არ იძლევა იმ ოპერაციათა კლასის გაფართოებას, რომლებიც ფურიე-ჰაარის მწკრივის აბსოლუტურ კრაბადობას ინახავენ

შემოვიღოთ აღნიშვნა $A_\psi(\mathbb{R}^n)$-ით აღვნიშნოთ კლასი n ცვლადის კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებისა, რომელთა ფურიე-ჰაარის მწკრივი ჰაარის n განზომილებიანი განცალებადი ვეივლეტის მიმართ აბსოლუტურად კრებადია, ანუ

$$A_\psi(\mathbb{R}^n) = \{f \cdot f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \sum_{q^{\varepsilon}_{j,k} \in Q} \sum_{\varepsilon \in E} |a^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(f)\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(x)| < \infty,\ x \in \mathbb{R}^n\}$$

ჰაარის ჯერადი ვეივლეტის მიმართ ფუნქციათა კომპოზიციის შესაბამისი ფურიე-ჰაარის მწკრივის განხილვისას აღმოჩნდა, რომ მწკრივის აბსოლუტურ კრებადობას ინახავენ მხოლოდ და მხოლოდ cx, $c \in \mathbb{R}$ სახის ოპერაციები, კერძოდ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1. ვთქვათ, g ნამდვილი ფუნქციაა, მოცემული ნამდვილი ღერძის რაიმე $[a,b]$ სეგმენტზე იმისათვის, რომ g მოქმედებდეს $A_\psi(\mathbb{R}^n)$

კლასში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ g–ს ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$g(x)=cx, \qquad x \in \mathbb{R},$$

სადაც c რაიმე ნამდვილი რიცხვია

აღმოჩნდა, რომ ჯერადი ვეივლეტის შემთხვევაშიც მხოლოდ უწყვეტი ოპერაციებისა და შიგა ფუნქციების განხილვა საზოგადოდ არ იძლევა იმ ოპერაციათა კლასის გაფართოებას, რომელნიც ინახავენ ფურიე-ჰაარის მწკრივის აბსოლუტურ კრებადობას შემდეგი თეორემის ანალოგი ფურიე-ჰაარის მწკრივებისათვის დამტკიცებული იყო ვ ბუღაძის [5] მიერ

$C(\mathbb{R}^2)$-ით აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^2$-ზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტ ფუნქციათა კლასი

თეორემა 2. ვთქვათ, g არის უწყვეტი ფუნქციაა, მოცემული $[a,b]$ სეგმენტზე $[a,b] \subset \mathbb{R}$ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისა, რომ g მოქმედებდეს $A_\psi(\mathbb{R}^2)\cap C(\mathbb{R}^2)$-ში არის ის რომ g-ს ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$g(x) = cx, \qquad x \in [a, b],$$

სადაც c ნამდვილი რიცხვია

მეორე თავში შესწავლილია ჰაარის ორჯერადი განცალებადი ვეივლეტის შესაბამისი მწკრივის თითქმის ყველგან უპირობო და თითქმის ყველგან აბსოლუტური კრებადობის ექვივალენტობის საკითხი.

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქციათა $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [0,1]$, მწკრივი მწკრივს ეწოდება თითქმის ყველგან უპირობოდ კრებადი, თუ ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერი $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ გადანაცვლებისათვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}(x)$$

მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია ამასთან აღვნიშნოთ, რომ მწკრივის განშლადობის ნულ'ზომის სიმრავლე დამოკიდებულია σ გადანაცვლებაზე

არსებობს მაგალითები ფუნქციათა მწკრივებისა, რომელნიც თითქმის ყველგან უპირობოდ კრებადი არიან, მაგრამ თითქმის ყველგან აბსოლუტურად კრებადი არა

1967 წელს ე. ნიკიშინმა და პ ულიანოვმა [6] აჩვენეს, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ მოცემულია ჰაარის რაიმე

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

მწკრივი მაშინ, ყოველ ფიქსირებულ ზომად $E \subset [0,1]$ სიმრავლეზე ჰაარის მწკრივის თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობა ეკვივალენტურია თითქმის ყველგან აბსოლუტური კრებადობისა

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ ე ნიკიშინის და პ ულიანოვის შედეგის ანალოგი სამართლიანია ჰაარის ორჯერადი განცალებადი ვეივლეტის მიმართ მწკრივებისათვის კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3. ჰაარის ორჯერადი განცალებადი $\{h^{i}_{j,k_1,k_2}(x,y)\}$, $j, k_1, k_2 \in Z$, i=1,2,3 ვეივლეტის შესაბამისი ნებისმიერი შემდეგი სახის მწკრივისათვის

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{3} a^{(i)}_{j,k_1,k_2} h^{(i)}_{j,k_1,k_2}(x,y),$$

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left\{a^{(i)}_{j,k_1,k_2}\right\}^{i=1,2,3}_{j,k_1,k_2 \in \mathbf{Z}} \in \mathbb{R},$$

თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობა ექვივალენტურია თითქმის ყველგან აბსოლუტური კრებადობისა

თავი I

ჰაარის ჯერადი განცალებადი ვეივლეტის მიმართ ფუნქციათა კომპოზიციის ფურიეს აბსოლუტურად კრებადი მწკრივების შესახებ

§ 1.1. ვეივლეტის განსაზღვრა და ცნობილი ფაქტები

$\mathbb{R}$ და $\mathbb{Z}$ სიმბოლოებით აღვნიშნავთ შესაბამისად ნამდვილ და მთელ რიცხვთა სიმრავლეებს

მრავალმასშტაბიანი ანალიზი წარმოადგენს $L^2(\mathbb{R})$ სივრცის იმ ჩაკეტილ V_j, $j \in \mathbb{Z}$, ქვესივრცეთა მიმდევრობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

1 $V_j \subset V_{j+1}$, ყოველი $j \in \mathbb{Z}$,

2 $f \in V_j \Leftrightarrow f(2(\ )) \in V_{j+1}$, ყოველი $j \in \mathbb{Z}$-ისთვის,

3. $\bigcap_{j \in z} V_j = \{0\}$,

4 $\overline{\bigcup_{j \in z} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,

5 არსებობს ისეთი $\varphi \in V_0$ ფუნქცია, რომ $\{\varphi(\ -k)\ k \in \mathbb{Z}\}$ სისტემა არის V_0 სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი.

φ ფუნქციას, რომლის არსებობა აღნიშნულია მე-5 პირობაში, ეწოდება მოცემული მრავალმასშტაბიანი ანალიზის მასშტაბის ფუნქცია

მრავალმასშტაბიანი ანალიზი საშუალებას იძლევა აიგოს ვეივლეტთა ფართო კლასები

ვ ე ი ვ ლ ე ტ ი ეწოდება $L^2(\mathbb{R})$ კლასის ისეთ ψ ფუნქციას, რომლისგან წარმოქმნილი $\{\psi_{j\,k}, j,k \in \mathbb{Z}\}$ სისტემა არის $L^2(\mathbb{R})$ სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი ([7], [8] გვ. 43-100, [9] თავი I), სადაც

$$\psi_{j\,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k),\quad j,k \in \mathbb{Z}$$

ψ-ის როლში ავიღოთ ჰაარის ორთონორმირებული სისტემის მეორე ფუნქცია, რომელსაც h-ით აღვნიშნავთ

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0, & x \in R \setminus [0,1] \end{cases}$$

მაშინ h ფუნქციით განსაზღვრული $\{h_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ სისტემა იქნება სრული ორთონორმირებული ბაზისი ღერძზე კვადრატით ინტეგრებად ფუნქციათა კლასში და h ფუნქციას ვუწოდებთ ჰ ა ა რ ი ს ვ ე ი ვ ლ ე ტ ს ([8], [9])

$\mathbb{R}^n$ სივრცის $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ვექტორს შემდგომი მსჯელობისას აღვნიშნავთ X სიმბოლოთი

$L^2(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში მრავალმასშტაბიანი ანალიზისა და n–ჯერადი ვეივლეტების ასაგებად გამოიყენება $L^2(\mathbb{R})$ სივრცის მრავალმასშტაბიანი ანალიზების ტენზორული ნამრავლის მეთოდი [10].

ვთქვათ, Q არის

$$q_{j\,k}=\left\{x\in\mathbb{R}^n,\ 2^j x-k\in[0,1)^n\right\},\ k\in\mathbb{Z}^n,\ j\in\mathbb{Z}$$

ორობითი კუბების სიმრავლე, ხოლო E არის 2^n-1 ცალ $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\quad,\varepsilon_n)$ ვექტორთა სიმრავლე, სადაც ε_i ღებულობს 0 ან 1 მნიშვნელობას, ამასთან ყველა ერთდროულად 0 არ ხდება

განვიხილოთ

$$\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(x)=2^{\frac{nj}{2}}\psi^{\varepsilon_1}(2^j x_1-k_1)\cdots\psi^{\varepsilon_n}(2^j x_n-k_n) \tag{1 1 1}$$

ფუნქციათა სისტემა, სადაც $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ .\varepsilon_n)\in E$, $q_{j,k}\in Q$, ხოლო $\psi^0=\varphi$ და $\psi^1=\psi$ აქ φ და ψ სწორედ ის ფუნქციებია, რომლებიც $L^2(\mathbb{R}^n)$ სივრცის მრავალმასშტაბიანი ანალიზის აგებაში მონაწილეობენ ასე-თი წესით აგებული $\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}$ ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს ორთო-ნორმირებულ ბაზისს $L^2(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში და მას n–ჯერადი განცალე-ბადი ვეივლეტი ეწოდება

ჩვენ განვიხილავთ ჰაარის n–ჯერად განცალებად ვეივლეტს, რომელიც მიიღება (1 1 1) სისტემისაგან, თუ φ და ψ ფუნქციების როლში ავიღებთ შესაბამისად ჰაარის ვეივლეტის წარმომქმნელ ფუნ-ქციას და ჰაარის ვეივლეტის მასშტაბის ფუნქციას, რომლებიც შემ-დეგნაირად განისაზღვრებიან

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ -1, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus[0,1),\end{cases} \tag{1 1.2}$$

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus[0,1],\end{cases} \tag{1.1.3}$$

როდესაც $n=2$, (1.1.1), (1.1.2) და (1.1.3) მოგვცემს ჰაარის ორჯერად განცალებად ვეივლეტს, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(x,y) = 2^{j}\psi^{\varepsilon_1}(2^{j}x-k_1)\psi^{\varepsilon_2}(2^{j}y-k_2),\ \varepsilon\in E,\ q_{j,k}\in Q \quad (1.1.4)$$

ჰაარის ორჯერადი განცალებადი ვეივლეტის ასაგებად აუცილებელია შემდეგი სამი წარმომქმნელი ფუნქცია, რომლებიც აიგება φ და ψ ფუნქციების მეშვეობით

$$h^{1}(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y),$$
$$h^{2}(x,y) = \psi(x)\,\varphi(y),$$
$$h^{3}(x,y) = \psi(x)\,\psi(y).$$

თუ $f\in L(\mathbb{R}^2)$, მაშინ მის ფურიეს მწკრივს ჰაარის ორჯერადი ვეივლეტის მიმართ აქვს შემდეგი სახე

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{3} a^{(i)}_{j,k_1,k_2}(f)h^{(i)}_{j,k_1,k_2}(x,y), \quad (1.1.5)$$

სადაც

$$a^{(i)}_{j\,k_1\,k_2}(f) = \int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)\,h^{(i)}_{j,k_1,k_2}(x,y)dx\,dy \quad (1.1.6)$$

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ j,k_1,k_2\in Z,\ i=1,2,3,$$

არიან f ფუნქციის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები (1.1.4) სისტემის მიმართ

თუ $f\in L(\mathbb{R}^n)$, მაშინ მის ფურიეს მწკრივს ექნება სახე

$$\sum_{q_{j,k}\in Q}\sum_{\varepsilon\in E} a^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(f)\,\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(x), \quad (1.1.7)$$

სადაც

$$a^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(x)dx,\ q_{j,k}\in Q,\ \varepsilon\in E,\ x\in\mathbb{R}^n, \quad (1.1.8)$$

არიან f ფუნქციის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები (1.1.1) სისტემის მიმართ

$$A_\psi(\mathbb{R}^n)=\left\{f \;\; L^2(\mathbb{R}^n),\ \sum_{q_{j,k}\in Q}\sum_{\varepsilon\in E}|a^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(f)\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(x)|<\infty\right\} \qquad (119)$$

$C(\mathbb{R}^2)$-ით აღვნიშნავთ $\mathbb{R}^2$-ზე განსაზღვრულ ყველა უწყვეტ ფუნქციათა კლასს

§ 1.2. ჰაარის ჯერადი განცალებადი ვეივლეტის მიმართ ფურიეს აბსოლუტურად კრებადი მწკრივების შესახებ

ჩვენ ახლა დავამტკიცებთ თეორემას, რომელიც ადგენს იმ ფუნქციათა კლასს, რომელებიც მოქმედებენ $A_\psi(\mathbb{R}^n)$-ში

თეორემა 1.2.1. ვთქვათ, g ნამდვილი ფუნქციაა, მოცემული რაიმე $[a,b]$ სეგმენტზე იმისათვის, რომ g მოქმედებდეს $A_\psi(\mathbb{R}^n)$ კლასში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ g –ს ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$g(x) = cx, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (1.2\,1)$$

სადაც c ნამდვილი რიცხვია

დამტკიცება. თეორემის პირობის საკმარისობა ადვილი საჩვენებელია მართლაც, თუ $f \in A_\psi(\mathbb{R}^n)$, მაშინ ცხადია, რომ $cf \in A_\psi(\mathbb{R}^n)$, სადაც $c \in \mathbb{R}$

ვაჩვენოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა ამისათვის დავუშვათ, რომ g-ს არ აქვს (1.2 1) სახე და დავამტკიცოთ, რომ მოიძებნება ისეთი f ფუნქცია $A_\psi(\mathbb{R}^n)$ კლასიდან, რომ $g \circ f \notin A_\psi(\mathbb{R}^n)$.

თუ g არ არის (1.2.1) სახის, მაშინ

$$g(x) = c_1x + d_1, \quad d_1 \neq 0, \qquad (1.2.2)$$

ან g –ს (1.2.2) ფორმით წარმოდგენა შეუძლებელია, ანუ g არ არის წრფივი ფუნქცია. ჯერ დავუშვათ, რომ g არის (1.2.2) სახის. $A_\psi(\mathbb{R}^n)$ კლასიდან ავიღოთ იგიურად ნული ფუნქცია $f \equiv 0$, გვექნება

$$g \circ f = c_1 f + d_1 = d_1 \bar{\in} A_\psi(\mathbb{R}^n)$$

მაშასადამე, (1.2.2) სახის ფუნქციები არ მოქმედებენ $A_\psi(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციათა კლასში

ახლა განვიხილოთ მეორე შემთხვევა, ანუ დავუშვათ, რომ g-ს არ აქვს (1.2.2) სახე ადვილი მისახვედრია, რომ მოიძებნება წერტილთა სამეული t_1, t_2, t_3 $[a,b]$ სეგმენტში (ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $t_1 < t_2 < t_3$) ისეთი, რომ სიბრტყის წერტილთა $(t_1, g(t_1)), (t_2, g(t_2)), (t_3, g(t_3))$ სამეული ერთ წრფეზე არ ძევს, ანუ

$$g(t_3) \neq g(t_1) + \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}(t_3 - t_1)$$

წინასწარ განვსაზღვროთ f_1 ფუნქცია შემდეგნაირად

$$f_1(x_1, x_2, \quad, x_n) = \begin{cases} t_2, & (x_1, x_2, \quad, x_n) \in [0,1]^n, \\ 0, & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus [0,1]^n \end{cases}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ

$$t_2 - t_1 \geq t_3 - t_2. \qquad (1.2.3)$$

ავაგოთ f ფუნქცია შემდეგი სახით

$$
f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} t_2, & (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0), \\ t_2, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-1}, 2^{-2l}\right] \times [0,1)^{n-1}, \\ t_3, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-2}, 2^{-2l-2} + 2^{-2l-3}\right] \times [0,1)^{n-1}, \\ t_2, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-2} + 2^{-2l-3}, 2^{-2l-2} + 2^{-2l-3} + \alpha_l\right] \\ & \qquad \times [0,1)^{n-1}, \\ t_1, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-2} + 2^{-2l-3} + \alpha_l, 2^{-2l-1}\right] \times [0,1)^{n-1}, \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus [0,1)^n, \end{cases}
$$

$$
l = 0,1,2,\ldots \qquad (1.2.4)
$$

სადაც $\{\alpha_l\}_{l=0}^{\infty}$ ისეთი ორად-რაციონალური რიცხვებია, რომ $0 \le \alpha_l \le 2^{-2l-3}$,

$$
\left| \int\limits_{\left[2^{-2l-2}, 2^{-2l-1}\right] \times [0,1)^{n-1}} (f(x) - f_1(x))dx \right| < 2^{-2(2l+2)}, \; x \in \mathbb{R}^n, \; l = 0,1,\ldots \qquad (1.2.5)
$$

ორად-რაციონალური რიცხვების ყველგან მკვრივობიდან და f და f_1 ფუნქციების განსაზღვრიდან გამომდინარე (1.2.5) პირობის დამაკმაყოფილებელი α_l, $l = \overline{1,\infty}$ რიცხვების შერჩევა ადვილი საჩვენებელია. განვიხილოთ $f_2 = f - f_1$ ფუნქცია და ვაჩვენოთ, რომ $f_2 \in A_\psi(\mathbb{R}^n)$. ამ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე

$$
f_2(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0), \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-1}, 2^{-2l}\right] \times [0,1)^{n-1} \\ t_3 - t_2, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-2}, 2^{-2l-2} + 2^{-2l-3}\right] \times [0,1)^{n-1}, \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-2} + 2^{-2l-3}, 2^{-2l-2} + 2^{-2l-3} + \alpha_l\right] \\ & \qquad \times [0,1)^{n-1}, \\ t_1 - t_2, & (x_1, \ldots, x_n) \in \left[2^{-2l-2} + 2^{-2l-3} + \alpha_l, 2^{-2l-1}\right] \\ & \qquad \times [0,1)^{n-1}, \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus [0,1)^n, \end{cases}
$$

$$
l = 0,1,2,\ldots \qquad (1.2.6)
$$

თავდაპირველად განვიხილოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ის ნაწილი, რომლის $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ელემენტებისათვის გვაქვს

$$x_1 > 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \qquad (1.27)$$

$\left\{\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}\right\}^{\varepsilon \in E}_{q_{j,k} \in Q}$ სისტემის განსაზღვრებიდან გამომდინარე (იხ (1.13) და (1.14)) ყოველი $x = (x_1, \ldots, x_n)$-სთვის, რომელიც (1.27)-ს აკმაყოფილებს მოიძებნება ისეთი $j_1(x_1, \ldots, x_n)$ მთელი რიცხვი, რომ ყოველი j-სთვის, $j \leq j_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi^{\varepsilon}_{q_{j,0}}$ ფუნქციის საყრდენი მოიცავს $x = (x_1, \ldots, x_n)$ წერტილს და ამასთან, საყრდენის ის ნაწილი, სადაც $\psi^{\varepsilon}_{q_{j,0}}$ ფუნქციის შემადგენელი ფუნქციები (იხ (1.13) და (1.14)) ყველა დადებითია (აღნიშნული ნაწილი არის $\psi^{\varepsilon}_{q_{j,0}}$ ფუნქციის საყრდენი ძელის $\frac{1}{2^n}$ ნაწილი) მოიცავს $[0,1]^n$ კუბს

f_2 ფუნქციის შესაბამისი კოეფიციენტებისათვის გვექნება (j რანგის ყველა სხვა $\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}$, $j \leq j_1(x_1, \ldots, x_n)$, $k \neq (0, \ldots, 0)$ ფუნქციები ნულია $x = (x_1, \ldots, x_n)$ წერტილში)

$$a^{\varepsilon}_{q_{j,0}}(f_2) = \int_{\mathbb{R}^n} f_2(x_1, \ldots, x_n)\, \psi^{\varepsilon}_{q_{j,0}}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= 2^{\frac{nj}{2}} \int_{[0,1]^n} f_2(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

(1.26)-ის ძალით და (1.23)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$a^{\varepsilon}_{q_{j,0}}(f_2) \leq 2^{\frac{nj}{2}}(t_2 - t_1), \quad j \leq j_1 \qquad (1.28)$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\sum_{\substack{q^{\varepsilon}_{j,0} \in Q \\ j \leq j_1}} \sum_{\varepsilon \in E} \left| a^{\varepsilon}_{q_{j,0}}(f_2) \cdot \psi^{\varepsilon}_{q_{j,0}}(x_1, \ldots x_n) \right| \leq$$

$$\leq (2^n - 1) \sum_{j \leq j_1(x_1 \quad x_n)} 2^{nj} (t_2 - t_1) < \infty \tag{1.2.9}$$

f_2 ფუნქციის განსაზღვრებიდან აგრეთვე გამომდინარეობს, რომ მოიძებნება ისეთი $j_2(x_1, \quad, x_n) \geq j_1(x_1, \quad, x_n)$ მთელი რიცხვი, რომ თუ $j \geq j_2(x_1, \quad, x_n)$ და შესაბამისი $\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}$ ფუნქციის საყრდენი შეიცავს $x = (x_1, \ .., x_n)$ წერტილს, მაშინ ეს საყრდენი მთლიანად შევა f_2-ის მუდმივობის იმ არეში, სადაც $x = (x_1, . \ , x_n)$ წერტილი ძევს. ყოველი $j \geq j_2$ რანგისათვის $x = (x_1, \quad, x_n)$ წერტილს შეიცავს მხოლოდ ერთი $k(j) = (k_1(j), \quad, k_n(j))$ n–ეულის შესაბამისი $2^n - 1$ ცალი $\left\{\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k(j)}}\right\}^{\varepsilon \in E}$ ფუნქცია, დანარჩენი $k = (k_1, \quad, k_n), k \in \mathbb{Z}^n$ n-ეულების შესაბამისი ფუნქციების საყრდენები არ შეიცავენ $x = (x_1, . \ . , x_n)$ წერტილს $k(j)$ n-ეულების შესაბამისი კოეფიციენტები f_2 ფუნქციისა - $\left\{a^{\varepsilon}_{q_{j,k(j)}}(f_2)\right\}^{\varepsilon \in E}, j \geq j_2$, ნულის ტოლი არიან რადგან შესაბამისი $\left\{\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k(j)}}\right\}^{\varepsilon \in E}, j \geq j_2$ ფუნქციების საყრდენები შედიან f_2-ის მუდმივობის არეში ხოლო დანარჩენი $k = (k_1, \ . \ , k_n)$ n-ეულების შესაბამისი კოეფიციენტები $\left\{a^{\varepsilon}_{q_{j,k}}\right\}, \varepsilon \in E, j \geq j_2$, ნულის ტოლი არიან, იმიტომ, რომ $\left\{\psi_{q_{j,k}}\right\}, \varepsilon \in E$, ფუნქციების საყრდენები სულ არ შეიცავენ $x = (x_1, \quad, x_n)$ წერტილს ამგვარად,

$$a^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(f_2) = 0, \ j \geq j_2(x_1, \quad, x_n), \ \varepsilon \in E, \ k \in Z^n \tag{1.2 10}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ j_1-დან j_2-მდე ყოველი რანგისთვის მხოლოდ $2^n - 1$ ცალი არანულოვანი კოეფიციენტი გვაქვს, (1,2,9)-ისა და (1.2 10)-ის ძალით გვექნება

$$\sum_{q_{j,k} \in Q} \sum_{\varepsilon \in E} \left| a^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(f_2) \ \psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}(x_1, \quad x_n) \right| < +\infty \tag{1.2.11}$$

ყოველი $x = (x_1, \ldots, x_n)$-ისთვის, რომლისთვისაც $x_1 > 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$. გარდა ამისა, ადვილი დასანახია, რომ (1.2.11)-ს ადგილი აქვს აგრეთვე $\{x : x_1 = 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\} \setminus \left(\{0\} \times [0,1)^{n-1}\right)$ სიმრავლეზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (1.2.11)-ს ადგილი აქვს $\{0\} \times [0,1)^{n-1}$ სიმრავლის ყოველ წერტილზე. ავიღოთ ნებისმიერი x წერტილი $\{0\} \times [0,1)^{n-1}$ სიმრავლიდან. ცხადია $x_1 = 0$ და $0 < x_2, \ldots, x_n \le 1$. ამგვარად, გვაინტერესებს მხოლოდ $\psi^{\varepsilon}_{q_j(0,k_2,\ldots,k_n)}$ ფუნქციების შესაბამისი კოეფიციენტები f_2 ფუნქციისა, რადგან თუ $k_1 \neq 0$, მაშინ $\psi^{\varepsilon}_{q_j(0,k_2,\ldots,k_n)}(0,x_2,\ldots,x_n)=0$.

შევნიშნოთ, რომ უარყოფითი j რანგების შესაბამისი მწკრივისათვის მსჯელობა იქნება ანალოგიური იმ მსჯელობისა, რითაც მივიღეთ (1.2.9) გამოსახულება. იმის გათვალისწინებით, რომ $x = (0, \ldots, x_n)$ წერტილი $\{0\} \times [0,1)^{n-1}$ სიმრავლიდანაა, ყოველი დადებითი j რანგისთვის ნულისგან განსხვავებული იქნება $2^n - 1$ ცალი $k(j) = \{0, k_2(j), k_3(j), \ldots, k_n(j)\}$ n-ეულის შესაბამისი $\left\{\psi^{\varepsilon}_{q_j,k(j)}\right\}_{\varepsilon \in E}$, ფუნქცია, რომლისთვისაც $0 \le k_i(j) \le 2^j$, $i = 2, \ldots, n$, რადგან $(0, x_1, \ldots, x_n) \in \{0\} \times [0,1)^{n-1}$. ახლა განვიხილოთ ამ $\psi^{\varepsilon}_{q_j,k(j)}$ ფუნქციების შესაბამისი კოეფიციენტი f_2 ფუნქციისა. ვთქვათ, $\varepsilon = (1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$. დანარჩენი ε-ებისათვისაც ანალოგიური მსჯელობა გვექნება:

$$a^{\varepsilon}_{q_j,k(j)}(f_2) = 2^{\frac{nj}{2}} \int\limits_{[0,2^{-j-1})\prod_{i=2}^{n}\left(k_i(j)2^{-j},(k_i(j)+1)2^{-j}\right)} f_2(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n -$$

$$-\,2^{\frac{nj}{2}}\int\limits_{[2^{-j-1},2^{-j})\prod\limits_{i=2}^{n}\left(k_i(j)\,2^{-j},(k_i(j)+1)2^{-j}\right)} f_2(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n,\quad j\geq 0 \qquad (1.2.12)$$

ახლა დავუშვათ, რომ j ლუწია, $j=2r$, მაშინ f_2-ის განსაზღვრებიდან გამომდინარე (იხ (1.2.6)), ტოლობაში მეორე ინტეგრალი ნულის ტოლია. პირველი ინტეგრალისთვის კი (პირველი ინტეგრალი აღვნიშნოთ I_1-ით, მეორე კი I_2-ით) გვექნება

$$I_1=\int\limits_{[0,2^{-j-1})\prod\limits_{i=2}^{n}\left(k_i(j)\,2^{-j},(k_i(j)+1)2^{-j}\right)} f_2(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n=$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\int\limits_{[2^{-2r-2s-2},2^{-2r-2s-1})\prod\limits_{i=2}^{n}\left(k_i(j)\,2^{-2r},(k_i(j)+1)2^{-2r}\right)} f_2(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n \qquad (1.2.13)$$

f_2 ფუნქციის მნიშვნელობები, რომლებსაც იგი ღებულობს, საინტეგრაციო

$$[2^{-2r-2s-2},2^{-2r-2s-1})\times\prod_{i=2}^{n}\left(k_i(j)\;2^{-2r},(k_i(j)+1)2^{-2r}\right)_i,\ s=0,\ldots,\infty$$

სიმრავლეზე გადანაწილებულია

$$[2^{-2r-2s-2},2^{-2r-2s-1})\times[0,1)^{n-1}$$

ძელის ზომით პროპორციულ ძელებზე, ადვილი დასანახია, რომ პროპორციულობის კოეფიციენტია $\dfrac{1}{2^{2r(n-1)}}$, ამიტომ (1.2.5)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$|I_1|\le \frac{1}{2^{2r(n-1)}}\sum_{s=0}^{\infty}\left|\int\limits_{[2^{-2r-2s-2},2^{-2r-2s-1})[0,1)^{n-1}} f_2(x_1,\dots,x_n)dx_1 \quad dx_n\right|\le$$

$$\le \frac{1}{2^{2r(n-1)}}\sum_{s=0}^{\infty}2^{-2(2(r+s)+2)}=2^{-2r(n-1)}\sum_{s=0}^{\infty}2^{-4(r+s)-4}=$$

$$=2^{-j(n-1)}\sum_{s=0}^{\infty}2^{-2j-4-4s}<2^{-j(n-1)}\cdot 2^{-2j-3} \tag{1.2.14}$$

ამგვარად, როცა j არის ლუწი, (1.2.14)-დან მივიღებთ, რომ

$$\left|a^{\varepsilon}_{q_j\,k(j)}(f_2)\right| \le 2^{\frac{nj}{2}} \quad 2^{-j(n-1)} \quad 2^{-2j-3} \tag{1.2.15}$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა j კენტია, ანუ როცა j=2r+1 (1.2.5)-ის ძალით და იმის გათვალისწინებით, რომ ძელთა პროპორციულობის კოეფიციენტია $2^{-(2r+1)(n-1)}$, (1.2.12)-ში მეორე ინტეგრალისთვის გვექნება

$$|I_2|=\left|\int\limits_{[2^{-j-1},2^{-j})\prod_{i=2}^{n}(k_i(j)\,2^{-j},(k_i(j)+1)2^{-j})} f_2(x_1,\dots,x_n)dx_1 \quad dx_n\right|=$$

$$=\frac{1}{2^{-(2r+1)(n-1)}}\left|\int\limits_{[2^{-2r-2},2^{-2r-1}]\times[0,1)^{n-1}} f_2(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdot \ dx_n\right|<$$

$$<\frac{1}{2^{(2r+1)(n-1)}}\ \frac{1}{2^{2(2r+2)}}=\frac{1}{2^{j(n-1)}}\cdot\frac{1}{2^{2j+2}}. \tag{1.2.16}$$

(1.2.5)-დან გამომდინარე I_1-ისთვის გვექნება

$$|I_1|=\left|\int\limits_{[0,2^{-j-1})\prod_{i=2}^{n}(k_i(j)\,2^{-j},(k_i(j)+1)2^{-j})} f_2(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n\right|=$$

$$= \frac{1}{2^{(2r+1)(n-1)}} \left| \int\limits_{[0,2^{-2r-2}]\times[0,1)^{n-1}} f_2(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \cdot\ dx_n \right| =$$

$$= \frac{1}{2^{(2r+1)(n-1)}} \left| \sum_{s=0}^{\infty} \int\limits_{[2^{-(2r+2s+2)},2^{-(2r+2s+1)}]\times[0,1)^{n-1})} f_2(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \quad dx_n \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^{(2r+1)(n-1)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j+2+4s}} < \frac{1}{2^{j(n-1)}} \ \frac{1}{2^{2j+2}} \qquad (1.2.17)$$

კენტი j რიცხვებისათვის, ანუ როცა j=2r+1 (1.2.16)-ისა და (1.2.17)-ის გათვალისწინებით (1.2 12)-დან მივიღებთ რომ

$$\left| a_{q_{j,k(j)}}(f_2) \right| < 2^{\frac{nj}{2}} \ 2^{-j(n-1)} \ 2^{-2j-1}. \qquad (1.2.18)$$

ამგვარად (1.2 15)-ისა და (1.2 18)-ის ძალით ნებისმიერი ნატურალური j–ისთვის გვექნება

$$\left| a^{\varepsilon}_{q_{j,k(j)}}(f_2) \right| < 2^{\frac{nj}{2}} \ 2^{-j(n-1)} \cdot 2^{-2j-1} \qquad (1.2.19)$$

(1.2.19) – კი თავის მხრივ მოგვცემს

$$\sum_{\substack{q_{j,k(j)}\in Q \\ j\ge 0}} \sum_{\varepsilon\in E} \left| a^{\varepsilon}_{q_{j,k(j)}}(f_2) \Psi^{\varepsilon}_{q_{j,k(j)}}(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon\in E} 2^{\frac{nj}{2}} \cdot 2^{-2j-1} \ 2^{-j(n-1)} \cdot 2^{\frac{nj}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon\in E} 2^{nj} \cdot 2^{-nj} \cdot 2^{-2j-1} \cdot 2^{j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon\in E} 2^{-j-1} = (2^n - 1) \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} = 2^n - 1 \qquad (1.2.20)$$

აქედან გამომდინარე (1 1 7) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $\{0\}\times[0,1)^{n-1}$ სიმრავლეზე. ამგვარად (1.2.11)-ისა და (1.2.20)-ის ძალით f_2–ის შესაბამისი (1.1 7) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $\{x : x = (x_1,\ldots,x_n), x_1 \ge 0,\ldots x_n \ge 0\}$ სიმრავლეზე.

ახლა ვთქვათ $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x\ x=(x_1,\ \ ,x_n), x_1 \geq 0,.\ \ x_n \geq 0\}$, მაშინ ყოველი ისეთი $\psi^{\varepsilon}_{q_{j,k}}, q_{j\,k} \in Q, \varepsilon \in E$ ფუნქციისათვის, რომლის საყრდენი შეიცავს $x=(x_1, .\ .\ , x_n)$ წერტილს, მთელი მისი საყრდენი მთლიანად შედის $\mathbb{R}^n \setminus \{x: x=(x_1,\ \ ,x_n), x_1 \geq 0,\ \ x_n \geq 0\}$ სიმრავლეში რადგან f_2 ნულის ტოლია ამ სიმრავლეზე (იხ 1.2 6) შესაბამისი კოეფიციენტებიც ნულის ტოლი იქნებიან

ამგვარად, f_2-ის შესაბამისი (1 1 7) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია ყოველი x-ისთვის $\mathbb{R}^n$-დან, ანუ $f_2 \in \mathbb{A}_\psi(\mathbb{R}^n)$

ანალოგიური მსჯელობით ადვილად დამტკიცდება, რომ $f_1 \in \mathbb{A}_\psi(\mathbb{R}^n)$, მაშასადამე გამომდინარე იქიდან, რომ $f = f_1 + f_2$, გვექნება $f \in \mathbb{A}_\psi(\mathbb{R}^n)$

ახლა განვიხილოთ $g \circ f$ კომპოზიცია, სადაც g–ს არ აქვს (1.2 2) სახე ანუ იგი არაწრფივია და ვაჩვენოთ, რომ $g \circ f \,\overline{\in}\, \mathbb{A}_\psi(\mathbb{R}^n)$

f-ის აგებიდან გამომდინარე (იხ (1.2 4)) გვექნება

$$g(f(x_1,\ \ ,x_n)) = \begin{cases} g(t_2),\ (x_1,\ \ ,x_n) = (0,\ \ .,0), \\ g(t_2),\ (x_1,\ \ ,x_n) \in \left[2^{-2l-1}, 2^{-2l}\right] \times [0,1)^{n-1} \\ g(t_3), (x_1,\ \ ,x_n) \in \left[2^{-2l-2}, 2^{-2l-2} + 2^{-2l-3}\right] \times [0,1)^{n-1}, \\ g(t_2), (x_1,\ \ ,x_n) \in \left[2^{-2l-2} + 2^{-2l-3}, 2^{-2l-2} + 2^{-2l-3} + \alpha_l\right] \\ \qquad \times [0,1)^{n-1}, \\ g(t_1), (x_1,\ \ ,x_n) \in \left[2^{-2l-2} + 2^{-2l-3} + \alpha_l, 2^{-2l-1}\right] \times [0,1)^{n-1}, \\ \mathrm{g}(0), (x_1,\ \ ,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus [0,1)^n, \end{cases}$$

$$l = 0,1,2, \qquad (1.2\ 21)$$

თუ $g(0)$ არ უდრის ნულს, ცხადია $g \circ f \,\overline{\in}\, L^2(\mathbb{R}^n)$ და მაშასადამე $g \circ f \,\overline{\in}\, \mathbb{A}_\psi(\mathbb{R}^n)$ ამგვარად, განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა $g(0)=0$

$$H(f(x_1,\dots,x_n))=\begin{cases}0, & (x_1,\ \ ,x_n)=(0,\ \ ,0),\\ 0, & (x_1,\ .\ ,x_n)\in\left[2^{-2l-1},2^{-2l}\right]\times[0,1)^{n-1}\\ g(t_3)-\left(g(t_1)+\dfrac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}(t_3-t_1)\right), & \\ \quad (x_1,\dots,x_n)\in\left[2^{-2l-2},2^{-2l-2}+2^{-2l-3}\right]\times[0,1)^{n-1}, & \\ 0, & (x_1,\ ..,x_n)\in\left[2^{-2l-2}+2^{-2l-3},2^{-2l-2}+2^{-2l-3}+\alpha_l\right)\times[0,1)^{n-1},\\ 0, & (x_1,\ \ ,x_n)\in\left[2^{-2l-2}+2^{-2l-3}+\alpha_l,2^{-2l-1}\right]\times[0,1)^{n-1},\end{cases}$$

$$l=0,1,2,.$$

ავნიშნოთ

$$q=g(t_3)-\left(g(t_1)+\frac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}(t_3-t_1)\right).$$

დაშვებიდან გამომდინარე $(t_1,g(t_1)),(t_2,g(t_2))$ და $(t_3,g(t_3))$ სამეული ერთ წრფეზე არ ძევს (იხ. გვ. 12), ამიტომ $q\neq 0$

გამოვთვალოთ შემდეგი კოეფიციენტები

$$a^{\varepsilon}_{q_{2r}(0,\ ,0)}(H)=2^{rn}\int\limits_{[0,2^{-2r-1})[0,2^{-2r})^{n-1}}H(x_1,\ \ ,x_n)dx_1\ \ dx_n-$$

$$-2^{rn}\int\limits_{[2^{-2r-1},2^{-2r})[0,2^{-2r})^{n-1}}H(x_1,\ .,x_n)dx_1\ \cdot dx_n \qquad (1\ 2.27)$$

H ფუნქციის განსაზღვრიდან ადვილი დასანახია, რომ (1.2.27)-ში მეორე ინტეგრალი ნულის ტოლია, პირველი ინტეგრალისთვის კი გვექნება

$$\int\limits_{[0,2^{-2r-1})[0,2^{-2r})^{n-1}}H(x_1,\dots,x_n)dx_1\ \cdot dx_n=$$

$$=\sum_{s=1}^{\infty}\int\limits_{[2^{-2r-2s}\ 2^{-2r-2s}+2^{-2r-2s-1}]\times[0,2^{-2r})^{n-1}}H(x_1,\ .,x_n)dx_1\ \ dx_n=$$

$$=q\sum_{s=1}^{\infty}\int\limits_{[2^{-2r-2s},2^{-2r-2s}+2^{-2r-2s-1}]\times[0,2^{-2r})^{n-1}}dx_1\cdot dx_n\qquad=$$

$$=q\sum_{s=1}^{\infty}2^{-2r-2s-1}\cdot 2^{-2r(n-1)}=q2^{-2rn-1}\sum_{s=1}^{\infty}2^{-2s}=$$

$$= 2^{-2rn}\frac{q}{6} \qquad (1.2.28)$$

მაშასადამე (1.2.27), (1.2.28)-ის გათვალისწინებით მოგვცემს

$$a^{\varepsilon}_{q2r,(0,..,0)}(H) = 2^{rn}\ 2^{-2rn}\ \frac{q}{6} = 2^{-rn}\ \frac{q}{6} \qquad (1.2.29)$$

აქედან გამომდინარე

$$\sum_{r=0}^{\infty}\left|a^{\varepsilon}_{q2r(0,..,0)}(H)\Psi^{\varepsilon}_{q2r(0,...,0)}(0,..,0)\right| =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}2^{rn}\ 2^{-rn}\ \frac{q}{6} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{q}{6} = +\infty.$$

ამგვარად (1.2.26) სრულდება, მაშასადამე $g \circ f \notin \mathbb{A}_{\psi}(\mathbb{R}^n)$ ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 1.3. უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ

მას შემდეგ რაც დადგინდა რომ, $A_{\psi}(\mathbb{R}^n)$ კლასში მოქმედებენ მხოლოდ წრფივი $g(x)=cx$, $c\in\mathbb{R}$, სახის ფუნქციები, დაისვა საკითხი ხომ არ გაფართოვდება კლასი იმ ოპერაციებისა, რომლებიც ინახავენ აბსოლუტურად კრებადობას, თუ შემოვიფარგლებით მხოლოდ უწყვეტი ფუნქციების განხილვით. აღმოჩნდა, რომ კლასის ამგვარი შეზღუდვა არ გვაძლევს გაფართოებას იმ ოპერაციათა სიმრაველისა რომლებიც ფურიეს მწკრივის აბსოლუტურად კრებადობას ინახავენ კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1.3.1 ვთქვათ g არის უწყვეტი ფუნქცია მოცემული $[a,b]$ სეგმენტზე იმისთვის, რომ $g \circ f \in A_{\psi}(\mathbb{R}^2)$ ყოველი f ფუნქციისათვის

$A_\psi(\mathbb{R}^2)\cap C(\mathbb{R}^2)$ კლასიდან, $a\le f(x,y)\le b$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ g-ს ჰქონდეს შემდეგი სახე

$$g(x)=cx,\quad x\in[a,b],$$

სადაც c ნამდვილი რიცხვია

დამტკიცება. თუ g არის cx სახის, მაშინ ცხადია რომ $g\circ f\in A_\psi(\mathbb{R}^2)$ ყოველი f-სთვის $A_\psi(\mathbb{R}^2)\cap C(\mathbb{R}^2)$ სიმრავლიდან

აუცილებლობის დასამტკიცებლად ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი

ლემა 1. (იხ [5]) ვთქვათ, $[a,b]$ სეგმენტზე მოცემულია უწყვეტი V ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება

$$V(x_1)<V(a)+\frac{V(b)-V(a)}{b-a}(x_1-a) \tag{1 3.1}$$

რაიმე x_1-ისთვის $[a,b]$-დან მაშინ არსებობს წრფივი l ფუნქცია და წერტილი $x'\in[a,b]$ ისეთი, რომ

$$\begin{aligned} V(x')=l(x'),\quad & l(x)\le V(x),\ x\in[a,x'), \\ & l(x)<V(x),\ x\in(x',b] \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის აუცილებლობა ვთქვათ, g არის cx სახის, მაშინ იგი არის ან $cx+d$ სახის $d\neq 0$ ან მისი წრფივი სახით წარმოდგენა შეუძლებელია ვთქვათ, g არის $cx+d$ სახის, მაშინ f-ის როლში შეგვიძლია ავიღოთ იგივურად ნულის ტოლი ფუნქცია გვექნება

$$g(f)=cf+d=d\notin L^2(\mathbb{R}^2)$$

ე ი დაგვრჩება განსახილველი ის შემთხვევა, როცა g არაწრფივია ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში მოიძებნება ისეთი x_1 წერტილი $[a,b]$-დან, რომ g-სთვის ადგილი ექნება (13 1)

ლემა 1-დან გამომდინარე, არსებობს წრფივი l ფუნქცია და წერტილი $x' \in [a,b]$ ისეთი, რომ g-სთვის ადგილი აქვს (1.3.2) თუ $(g(x) - l(x))$-ს აღვნიშნავთ $k(x)$-ით, (1.3.2)-დან გამომდინარე გვექნება

$$k(x') = 0, \quad k(x) > 0, \text{ თუ } x \in (x', x' + \delta), \qquad (1.3.3)$$
$$k(x) \geq 0, \text{ თუ } x \in (x' - \delta, x')$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციისათვის, რომელსაც აქვს (1.3.3)-ის თვისებები, მოიძებნება ფუნქცია $f \in A_\psi(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2)$, $x' - \delta \leq f(x,y) \leq x' + \delta$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ისეთი, რომ

$$k \circ f \bar{\in} A_\psi(\mathbb{R}^2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, n_0 ისეთი ნატურალური რიცხვია რომ, $\frac{1}{n_0} < k(x' + \delta)$ k-ის უწყვეტობიდან გამომდინარე და იმის გათვალისწინებით, რომ $k(x') = 0$ მოიძებნება ისეთი x_{n_0}, $0 < x_{n_0} < \delta$, რომ

$$k(x' + x_{n_0}) = \frac{1}{n_0}$$

ამგვარი მსჯელობით ადვილი დასანახია, რომ არსებობს x_{n_0+1} ისეთი რომ $0 < x_{n_0+1} < x_{n_0}$ $k(x' + x_{n_0+1}) = \frac{1}{n_0 + 1}$ თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ ინდუქციით, მივიღებთ $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ მიმდევრობას, რომლისთვისაც

$$0 < x_{n+1} < x_n < \delta \quad \text{და} \quad k(x' + x_n) = \frac{1}{n}, \ n \geq n_0 \qquad (1.3.4)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\alpha_n = x' + x_n$, გვექნება $x' < \alpha_{n+1} < \alpha_n < x' + \delta$, $k(\alpha_n) = \frac{1}{n}$. k-ს უწყვეტობიდან გამომდინარე და იმის გათვალისწინებით რომ $k(x) > 0$, (1.3.4) მოგვცემს $\alpha_n \downarrow x$, $n \to \infty$

ახლა ავაგოთ $f:\mathbb{R}^2 \to [x'-\delta;\ x'+\delta]$ ფუნქცია, რომელიც ლემის პირობებს დააკმაყოფილებს.

ვთქვათ, $f(x,y)=0$, როცა $(x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus[-1,2]^2$ $[0,1]^2$–ზე f განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$
f(x,y)=\begin{cases}
x'+x_n,\ \text{თუ}\ (x,y)\in\left[\dfrac{1}{2^{2n+2}}+\dfrac{1}{2^{8n}},\dfrac{1}{2^{2n+2}}+\dfrac{1}{2^{2n+3}}-\dfrac{1}{2^{8n}}\right]^2, \\
x'-x_n,\ \text{თუ}\ (x,y)\in\left[\dfrac{1}{2^{2n+2}}+\dfrac{1}{2^{2n+3}}+\dfrac{1}{2^{8n}},\dfrac{1}{2^{2n+1}}-\dfrac{1}{2^{8n}}\right]^2, \\
x', \qquad \text{თუ}\ (x,y)\in[0,1]^2\setminus \\
\qquad\qquad \setminus\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}\left(\left[\dfrac{1}{2^{2n+2}},\dfrac{1}{2^{2n+2}}+\dfrac{1}{2^{2n+3}}\right]^2\cup\left[\dfrac{1}{2^{2n+2}}+\dfrac{1}{2^{2n+3}},\dfrac{1}{2^{2n+1}}\right]^2\right),
\end{cases}
$$

$$n\geq n_0 \qquad (1.3.5)$$

f-ს წრფივად გავაგრძელებთ შემდეგ მართკუთხედებზე

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{8n}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+2}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}\right],$$

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+2}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{8n}}\right],$$

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}-\frac{1}{2^{8n}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+2}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}\right],$$

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}-\frac{1}{2^{8n}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}\right],$$

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}+\frac{1}{2^{8n}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}},\frac{1}{2^{2n+1}}\right],$$

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}},\frac{1}{2^{2n+1}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}+\frac{1}{2^{8n}}\right],$$

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}}-\frac{1}{2^{8n}},\frac{1}{2^{2n+1}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}},\frac{1}{2^{2n+1}}\right],$$

$$\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}},\frac{1}{2^{2n+1}}\right]\times\left[\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{2^{8n}},\frac{1}{2^{2n+1}}\right]$$

f ფუნქციას წრფივად გავაგრძელებთ აგრეთვე $[-1,2]^2 \setminus [0,1]^2$ სიმრავლეზე

ვაჩვენოთ რომ f უწყვეტია მთელ სიბრტყეზე. f-ის განსაზღვრებიდან გამომდინარე f უბან-უბან წრფივია მთელ $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ სიმრავლეზე, რაც ნიშნავს მის უწყვეტობას $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$-ზე

ახლა ვაჩვენოთ რომ f უწყვეტია $(0,0)$ წერტილში f-ის განსაზღვრებიდან გამომდინარე $f(0,0)=x'$ ამასთან

$$\max_{(x\ y)\in\left[0\ \frac{1}{2^{2n+2}}\right]^2} |f(x,y)|=a_n,\ n\geq n_0$$

ამგვარად, (134)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\lim_{\substack{(x\ y)\to(0,0)\\ (x\ y)\in[0\ 1]^2}} f(x,y) = x' = f(0,0)$$

ცხადია რომ (f-ის წრფივობიდან გამომდინარე $[-1,1]^2\setminus[0,1]^2$-ზე)

$$\lim_{\substack{(x\ y)\to(0,0)\\ (x,y)\in[-1,1]^2\setminus[0,1]^2}} f(x,y) = x' = f(0,0)$$

ამგვარად, $f\in C(\mathbb{R}^2)$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $f\in A_\psi(\mathbb{R}^2)$ f-ის განსაზღვრებიდან ცხადია რომ $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$ ვაჩვენოთ რომ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ჰაარის ორგანზომილებიანი ვეივლეტის მიმართ აბსოლუტურად კრებადია მთელ სიბრტყეზე

ვთქვათ $(x'',y'')\neq(0,0)$ წერტილი ეკუთვნის სიბრტყის პირველ მეოთხედს ცხადია, მოიძებნება ისეთი მთელი $j_1(x''y'')$ რიცხვი, რომ ყოველი $j\leq j_1(x^0 y^0)$ მთელი რიცხვისთვის $(x^0 y^0)$ წერტილი ეკუთვნის $h^{(i)}_{j,0,0}$, i=1,2,3, ფუნქციათა საყრდენს ამასთან შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ $[0,2]^2$ შედის ამ საყრდენის პირველ მეოთხედში

თუ გავითვალისწინებთ რომ, $f(x,y)=0$ როცა $(x,y)\in[0,\infty)^2\setminus[0,2]^2$, შესაბამის კოეფიციენტებისათვის გვექნება

$$a^i_{j,0,0}(f)=\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)h^i_{j\,0\,0}dxdy=2^j\int_{[0,2]^2} f(x,y)dxdy, \tag{1.3.6}$$

$$i=1,2,3,\ j\le j_1(x,y)$$

f-ის განსაზღვრებიდან ადვილი სანახავია, რომ

$$\left|\int_{[0,2]^2} f(x,y)dxdy\right| \le 4\max\left\{\left|x'+x_{n_0}\right|,\left|x'-x_{n_0}\right|\right\}\equiv D \tag{1.3.7}$$

განვიხილოთ შესაბამისი კოეფიციენტები (1.3.6) და (1.3.7) -დან გვექნება

$$\left|a^i_{j0,0}(f)\right| \le 2^j \quad D,\quad j\le j_1(x,y),\quad i=1,2,3$$

ფურიეს მწკრივის შესაბამისი წევრები ასე შეფასდება

$$\left|a^i_{j\,0,0}(f)\,h^i_{j,0\,0}(x^0,y^0)\right| \le 2^{2j} \quad D \tag{1.3.8}$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.3.8)-ს გვექნება

$$\sum_{j\le j_1(x^0\ y^0)}\sum_{k_1\ k_2=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{3}\left|a^i_{j\,k_1\ k_2}(f)h^i_{j\,k_1\ k_2}(x^0,y^0)\right|=$$

$$=\sum_{j\le j_1(x^0,y^0)}\sum_{i=1}^{3}\left|a^i_{j\,0\,0}(f)h^i_{j\,0,0_2}(x^0,y^0)\right|\le 3D\sum_{j\le j_1(x^0\ y^0)}2^{2j}<\infty \tag{1.3.9}$$

f-ფუნქციის განსაზღვრისას, სიბრტყე წარმოდგება ორად-რაციონალურ კოორდინატებიანი მართკუთხედების გაერთიანებად, თითოეულ მათგანზე ფუნქცია წრფივია აღვნიშნოთ ის მართკუთხედი Δ_{x^0,y^0}-ით რომელიც შეიცავს (x^0,y^0) წერტილს ცხადია, მოიძებნება ისეთი $j_2(x^0,y^0)$ მთელი რიცხვი, რომ თუ $j\ge j_2(x^0,y^0)$ და $h^i_{j,k_1\,k_2}$ ფუნქციის საყრდენი შეიცავს (x^0,y^0) წერტილს, მაშინ ეს საყრდენი მთლიანად შედის ამ მართკუთხედში ყოველი j რანგისთვის სამი ასეთი ფუნქცია გვექნება

$$h^{(1)}_{j,k_1^0,k_2^0},\ h^{(2)}_{j,k_1^0,k_2^0},\ h^{(3)}_{j,k_1^0,k_2^0}, \qquad (1.3.10)$$

k_1^0, k_2^0 მთელ რიცხვთა შესაბამისი წყვილია

ამ რანგის დანარჩენი ფუნქციების საყრდენები არ შეიცავენ (x,y) წერტილს და მაშასადამე ამ წერტილში ნულის ტოლი არიან

Δ_{x^0,y^0}-ზე f ფუნქციის წრფივობის გამო, (1.3.10) ფუნქციების შესაბამისი ფურიეს კოეფიციენტები ასე შეფასდება

$$\left|a^i_{j,k_1^0,k_2^0}\right| = \left|\int\limits_{\Delta_{x^0,y^0}} f(x,y)\, h^i_{j,k_1^0,k_2^0}(x,y)dxdy\right| \le$$

$$\le 2^j\,\frac{M(x^0,y^0)}{2^j}\,\frac{1}{2^{2j}} = \frac{M(x^0,y^0)}{2^{2j}}, \qquad (1.3.11)$$

სადაც $M(x^0,y^0)$ არის იმ წრფივი ფუნქციის გრაფიკის მიერ საკოორდინატო სიბრტყესთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხის ტანგენსი, რომელიც ლოკალურად განხილული (x^0,y^0) წერტილის მიდამოში ემთხვევა f ფუნქციას

(1.3.10)-ის გათვალისწინებით მწკრივის შესაბამისი წევრებისათვის გვექნება

$$\left|a^i_{j,k_1^0,k_2^0}\, h^i_{j,k_1^0,k_2^0}(x^0,y^0)\right| \le \frac{M(x^0,y^0)}{2^{2j}}\, 2^j = \frac{M(x^0,y^0)}{2^j}. \qquad (1.3.12)$$

(1.3.10) და (1.3.11)-დან გამომდინარე (x^0,y^0) წერტილში გვექნება

$$\sum_{j\ge j_2(x^0,y^0)} \sum_{k_1,k_2\in Z}^{\infty} \sum_{i=1}^{3}\left|a^i_{j,k_1,k_2}(f) h^i_{j,k_1,k_2}(x^0,y^0)\right| =$$

$$= \sum_{j\ge j_2(x^0,y^0)} \sum_{i=1}^{3}\left|a^i_{j,k_1^0,k_2^0} h^i_{j,k_1^0,k_2^0}(x^0,y^0)\right| \le 3 \sum_{j\ge j_2(x^0,y^0)} \frac{M(x^0,y^0)}{2^j} < +\infty$$

რაც შეეხება $j_1(x^0,y^0)$-დან $j_2(x^0,y^0)$-მდე რანგის ფუნქციებს, რომელთა საყრდენები შეიცავენ (x^0,y^0) წერტილს, მათი რაოდენობა სასრულია,

ხოლო იმავე რანგის ის ფუნქციები, რომელთა საყრდენები არ შეიცავენ (x^0,y^0) წერტილს, ამ წერტილში ნულის ტოლნი არიან. მაშასადამე, (1.3.9) და (1.3.12)-დან გამომდინარე (1.1.5) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია I საკოორდინატო მეოთხედში.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ (1.1.5) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია დანარჩენ მეოთხედებშიც.

ახლა ვაჩვენოთ (1.1.5) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია (0,0) წერტილშიც. ყოველ j რანგისთვის (0,0) წერტილს შეიცავენ მხოლოდ $h^{(i)}_{j,0,0}$, i=1,2,3, ფუნქციების საყრდენები. ამიტომ

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{i=1}^{3}\left|h^i_{j,k_1,k_2}(0,0)\quad a^i_{j,k_1,k_2}\right| = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{3}\left|h^i_{j,0,0}(0,0)\quad a^i_{j,0,0}\right| \quad (1.3.14)$$

უარყოფითი j რანგების შესაბამის წევრებისაგან შემდგარი ქვემწკრივისათვის აბსოლუტურად კრებადობა დამტკიცდება იმის ანალოგიურად, როგორც დავამტკიცეთ (1.3.8) შეფასება.

ვთქვათ, j≥0. განვიხილოთ $a^1_{j,0,0}(f)$, $j\geq 0$, კოეფიციენტები

$$a^1_{j,0,0}(f)=\int_{\mathbf{R}^2} f(x,y)h^1_{j,0,0}\,dx\,dy=\int_{[0,2^{-j}]^2} f(x,y)h^1_{j,0,0}(x,y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_{[0,2^{-j}]^2}(f(x,y)-x')h^1_{j,0,0}(x,y)\,dx\,dy+\int_{[0,2^{-j}]^2}x'\,h^1_{j,0,0}(x,y)\,dx\,dy \qquad (1.3.15)$$

ამ გამოსახულებაში II ინტეგრალი ნულია $\left\{h_{j,k_1k_2}\right\}_{j\in Z}^{i=1,2,3}$ სისტემის განსაზღვრებიდან.

ვთქვათ, j კენტია, $j=2r+1$ და დავუშვათ, $j\geq 2n_0+1$. მაშინ (1.3.14) მიიღებს სახეს

$$\int\limits_{[0,2^{-j}]^2} (f(x,y) - x')\, h^1_{j,0,0}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{V=o}^{\infty} \left(\int\limits_{[2^{-(2r+2l+2)},\, 2^{-(2r+2l+2)} + 2^{-(2r+2V+3)}]^2} (f - x')\, h^1_{j,0,0}(x,y)\,dx\,dy \, + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{[2^{(2r+2l+2)} + 2^{-(2r+2l+2)},\, 2^{(2r+2l+3)}]^2} (f - x')\, h^1_{j,0\,0}(x,y)\,dx\,dy \right)$$

f ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ამ მწკრივის ზოგადი წევრის შემადგენელი ეს ორი ინტეგრალი ნიშნით მოპირდაპირე და აბსოლუტური მნიშვნელობით ერთმანეთის ტოლია, ე ი (1 1 5) მწკრივის ის წევრები, რომელთა რანგი კენტია და ($2n_0+1$)-ზე მეტი, 0-ის ტოლია ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ ლუწი j რანგის მქონე ფუნქციის წევრებიც ნულის ტოლნი არიან, როცა $j > 2n_0 + 1$

აქედან გამომდინარე (1.3 14) მწკრივში არანულოვანი იქნება დადებითი j–ს შესაბამისი მწკრივის მხოლოდ სასრული ნაწილი ე.ი. (1.3 12) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია (0,0) წერტილში აქედან გამომდინარე (1 1.5) მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია მთელ $\mathbb{R}^2$ სიბრტყეზე

ამგვარად, ჩვენ ვაჩვენეთ რომ $f \in C(\mathbb{R}^2) \cap A_\psi(\mathbb{R}^2)$, ახლა განვიხილოთ $g \circ f$ კომპოზიცია და ვაჩვენოთ რომ მისი ფურიეს მწკრივი არ არის აბსოლუტურად კრებადი, (0,0) წერტილში

f-ის განსაზღვრების ძალით და k ფუნქციის თვისებების გათვალისწინებით გვექნება

$k(f(x,y)) \geq 0$, თუ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{k}(f(x,y)) = 0 \text{ თუ } (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \left(\left[\frac{1}{2^{2n+2}}, \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+3}} \right] \right)^2 \cup$$

$$\cup\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}},\frac{1}{2^{2n+1}}\right]^2 \tag{1.3.16}$$

$$k(f(x,y))=\frac{1}{n},\ \text{თუ}\quad (x,y)\in\left[\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{8n}},\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+3}}-\frac{1}{2^{8n}}\right]^2,\quad n\geq n_0.$$

გვაქვს:

$$a^1_{2l,0,0}(k\circ f)=2^{2l}\int\limits_{[0,2^{-2l-1}]\times[0,2^{-2l}]}k(f(x,y))dx\,dy-$$

$$-2^{2l}\int\limits_{[0,2^{-2l-1},2^{-2l}]\times[0,2^{-2l}]}k(f(x,y))dx\,dy \tag{1.3.17}$$

(1.3.16)-ის ძალით II ინტეგრალი ნულის ტოლია ხოლო I-ისათვის გვექნება

$$\int\limits_{[0,2^{-2l-1}]\times[0,2^{-2l}]}k(f(x,y))dx\,dy\geq\int\limits_{[2^{-2l-2}+2^{-8l},2^{-2l-2}+2^{-2l-3}-2^{-8l}]^2}k(f(x,y))dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{l}\left(\frac{1}{2^{2l+3}}-\frac{2}{2^{8l}}\right)^2\geq\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2^{4l+8}}.$$

აქედან გამომდინარე, გვექნება

$$a^1_{2l,0,0}\geq\frac{2^{2l}}{l\cdot 2^{4l+8}}=\frac{1}{l\cdot 2^{2l+8}} \tag{1.3.18}$$

ამგვარად

$$\left|a^1_{2l,0,0}(k\circ f)h^1_{2l,0,0}\right|\geq 2^{2l}\frac{1}{l\cdot 2^{2l+8}}=\frac{1}{2^8\, l}$$

აქედან კი

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{3}\left|a^i_{j,k_1,k_2}(k\circ f)h^i_{j,k_1,k_2}(0,0)\right|\geq\sum_{l=0}^{\infty}\left|a^1_{2l,0,0}(k\circ f)h^1_{2l,0,0}(0,0)\right|\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^8}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l}=+\infty \tag{1.3.19}$$

ამგვარად, $k\circ f\overline{\in}A_\psi(\mathbb{R}^2)$. განვიხილოთ $g\circ f$ კომპოზიცია გვექნება

$$g(f(x,y))=l(f(x,y))+k(f(x,y))$$

რადგან l წრფივი ფუნქციაა, გვექნება

$$g(f(x,y)) = cf(x,y) + d + k(f(x,y))$$

f ფუნქციის აგებიდან გამომდინარე გვექნება $g(f(x,y)) = d + k(0)$, როცა $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [-1,2]^2$ თუ $d \neq -k(0)$, მაშინ, ცხადია, $g \circ f \overline{\in} L^2(\mathbb{R}^2)$, და ამგვარად $g \circ f \overline{\in} A_\psi(\mathbb{R}^2)$

ახლა დავუშვათ, $d = -k(0)$ მაშინ $g(f(x,y)) = 0$, როცა $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus [-1,2]^2$ ამასთან $g \circ f$ უწყვეტი ფუნქციაა, როგორც უწყვეტი ფუნქციების კომპოზიცია ამიტომ $g \circ f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. განვიხილოთ $g \circ f$ კომპოზიციის $a^1_{2l,0,0}(g \circ f)$, $l = 1,2,$ ფურიეს კოეფიციენტები

$$a^1_{2l,0,0}(g \circ f) = 2^{2l} \int\limits_{[0\,2^{2l}]^2} (cf(x,y) + k(0)) h^1_{2l\,0,0}(x,y)dx\,dy +$$

$$+ 2^{2l} \int\limits_{[0\,2^{2l}]^2} k(f(x,y)) h^1_{2l\,0\,0}(x,y)dx\,dy \qquad (13.20)$$

(13.20)-ის მეორე ინტეგრალი წარმოადგენს $k \circ f$ კომპოზიციის $a^1_{2l\,0,0}(k \circ f), l = 1,2,$ ფურიეს კოეფიციენტებს, რომელთა შესაბამისი მწკრივი (13.19)-დან გამომდინარე, აბსოლუტურად განშლადია (0,0) წერტილში, რაც შეეხება პირველ ინტეგრალს, იგი არის f ფუნქციის $a^1_{2l\,0,0}(k \circ f)$, $l = 1,2,$ ფურიეს კოეფიციენტების ნამრავლი მუდმივ c რიცხვზე ამგვარად, კოეფიციენტების შესაბამისი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადი იქნება (0,0) წერტილში ამგვარად, ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \left| a^1_{2l\,0\,0}(g \circ f)\, h^1_{2l\,0\,0}(0,0) \right| = +\infty \qquad (13.21)$$

(13.21) კი თავის მხრივ ნიშნავს, რომ $g \circ f \overline{\in} A_\psi(\mathbb{R}^2)$ ამით თეორემა დამტკიცებულია

თავი II

ჰაარის ორჯერადი ვეივლეტის თითქმის ყველგან უპირობო და თითქმის ყველგან აბსოლუტური კრებადობის შესახებ

§ 2.1. დამხმარე ცნებები და დებულებები

შესავალში ჩვენ მოვიყვანეთ ვეივლეტის განსაზღვრება და განვიხილეთ მისგან წარმოქმნილი სისტემა.

ორი ცვლადის ფუნქციებისთვის შეიძლება აგებულ იქნას რამდენიმე ანალოგი ამ სისტემისა. ჩვენ განვიხილავთ ორი ცვლადის განცალებად ვეივლეტს. იგი განისაზღვრება ერთგანზომილებიანი ვეივლეტისა და მისი შესაბამისი მასშტაბის ფუნქციის მეშვეობით.

ვთქვათ, ψ ერთი ცვლადის ვეივლეტია, ხოლო φ კი მისი შესაბამისი მასშტაბის ფუნქცია. განვიხილოთ ორი ცვლადის შემდეგი ფუნქციები

$$
\begin{aligned}
h^{(1)}(x,y) &= \psi(x)\varphi(y),\\
h^{(2)}(x,y) &= \varphi(x)\psi(y),\\
h^{(3)}(x,y) &= \psi(x)\psi(y).
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

(2.1.1) ფუნქციების საშუალებით მიღებული

$$
\begin{aligned}
h^{(1)}_{j,k_1,k_2}(x,y) &= 2^j\psi(2^j x-k_1)\varphi(2^j y-k_2),\\
h^{(2)}_{j,k_1,k_2}(x,y) &= 2^j\varphi(2^j x-k_1)\psi(2^j y-k_2),\\
h^{(3)}_{j,k_1,k_2}(x,y) &= 2^j\psi(2^j x-k_1)\psi(2^j y-k_2),
\end{aligned}
\tag{2.1.2}
$$

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad j,k_1,k_2\in\mathbb{Z}$$

(2.1.2) სისტემა სრული ორთონორმირებული სისტემაა $L^2(\mathbb{R}^2)$ სივრცეში.

ვთქვათ,

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right),\\ -1, & x\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right),\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus[0,1),\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\ 1),\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus[0,1).\end{cases}\tag{2.1.3}$$

ამ შემთხვევაში (2.1.2) მოგვცემს ჰაარის ორჯერად განცალებად ვეივლეტს განვიხილოთ ამ ვეივლეტის შესაბამისი რაიმე მწკრივი

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{+\infty}\ \sum_{i=1}^{3} a^{(i)}_{j\,k_2,k_2} h^{(i)}_{j\,k_1,k_2}(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \tag{2.1.4}$$

განსაზღვრება. (იხ [11]) ვიტყვით რომ, (2.1.4) მწკრივი კრებადია (x,y) წერტილში, თუ კრებადია შემდეგი მიმდევრობა

$$S_n(x,y)=\sum_{j=-n}^{n}\ \sum_{k_1\ k_2=-2^{n+j}}^{2^{n+j}-1}\ \sum_{i=1}^{3} a^{(i)}_{j\,k_2,k_2} h^{(i)}_{j\,k_1\ k_2}(x,y) \tag{2.1.5}$$

§ 2.2. ჰაარის ორჯერადი განცალებადი ვეივლეტის თითქმის ყველგან უპირობო და თითქმის ყველგან აბსოლუტური კრებადობა

თავდაპირველად ვაჩვენოთ რომ სამართლიანია

ლ ე მ ა 2.2.1 ვთქვათ, მოცემულია რაიმე

$$\sum_{j=M}^{N}\ \sum_{k_1\ k_2=0}^{2^j-1} a^{(i)}_{j\,k_1\ k_2} h^{(i)}_{j\,k_1\ k_2}(x,y), \tag{2.2.1}$$

$$1\le M<N\quad 1\le i\le 3,\ (x,y)\in[0,1]^2$$

პოლინომი ძალიან მოიძებნება ისეთი σ გადანაცვლება პოლინომის შესაკრებებისა (ან რაც იგივეა, მოიძებნება (j,k_1,k_2) სამეულების,

$j=M, \ldots, N$, $k_1,k_2=0, \ldots, 2^j-1$, სიმრავლის ურთიერთცალსახა ასახვა თავის თავში), რომ ნებისმიერი (x,y) წერტილისათვის $[0,1]^2$-იდან

$$\max_{\substack{M\le p\le q\le N\\ 0\le U_1,U_2\le 2^p-1\\ 0\le V_1,V_2\le 2^q-1}} \left| \sum_{k_1=U_1}^{2^p-1} \sum_{k_2=U_2}^{2^p-1} a^{(i)}_{\sigma(p,k_1,k_2)} h^{(i)}_{\sigma(p,k_1,k_2)}(x,y) + \right.$$

$$+\sum_{j=p+1}^{q-1} \sum_{k_2,k_2=0}^{2^j-1} a^{(i)}_{\sigma(j,k_1,k_2)} h^{(i)}_{\sigma(j,k_1,k_2)}(x,y) + \tag{2.2.2}$$

$$\left. +\sum_{k_1=0}^{V_1} \sum_{k_2=0}^{V_2} a^{(i)}_{\sigma(q,k_1,k_2)} h^{(i)}_{\sigma(q,k_1,k_2)}(x,y) \right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{4} \sum_{j=M}^{N} \sum_{k_1,k_2=0}^{2^j-1} \left| a^{(i)}_{j,k_1,k_2} h^{(i)}_{j,k_1,k_2} \right|$$

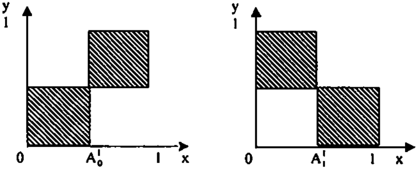
ყოველი i-სთვის დამტკიცება ერთნაირია, ამიტომ შემოვიფარგლებით $i=3$ შემთხვევით და სიმარტივისათვის i-ს აღარ დავწერთ

დამტკიცება. განვიხილოთ h_{j,k_1,k_2}, $j\ge 0$, $k_1,k_2=0, \ldots, 2^j-1$, ფუნქციები, შევისწავლოთ მათი სუპორტების ურთიერთგანლაგება, დადებითობისა და უარყოფითობის მუალედები

ადვილი სანახავია რომ, ყოველი j რანგის ფუნქციის სუპორტი წარმოადგენს $j+1$ რანგის ოთხი ფუნქციის სუპორტის გაერთიანებას, აქედან ორი მათგანის გაერთიანება j რანგის ფუნქციისთვის დადებითობის სიმრავლეა, დანარჩენი ორის გაერთიანება კი უარყოფითობის ამასთან შევნიშნოთ რომ ყოველი j-სთვის, $[0,1]^2$ წარმოადგენს 2^{2j} ფუნქციის თანაუკვეთი სუპორტის გაერთიანებას

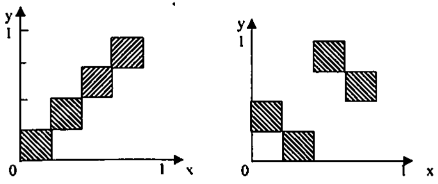
$[0,1]^2$ წარმოვადგინოთ 2^j ცალი $\{A_l^j\}$, $l=0, \ldots, 2^j-1$, თანაუკვეთ სიმრავლეთა გაერთიანებით $\{I^j_l\}$, $l=0, \ldots, 2^j-1$, სიმრავლეები ავაგოთ შემდეგი წესით A_0^0 იყოს თვითონ $[0,1]^2$, რომელიც ამასთან h_{000} ფუნქციის სუპორტია

როცა $j=1$ ავაგებთ A_0^1 და A_1^1 სიმრავლეებს (ნახ 1) პირველი მათგანი იქნება h_{000} ფუნქციის დადებითობის სიმრავლე, მეორე კი უარყოფითობის A_0^1 და A_1^1 წარმოადგენენ შესაბამისად h_{100}, h_{111} ფუნქციების და h_{101} h_{110} ფუნქციების სუპორტების გაერთიანებას



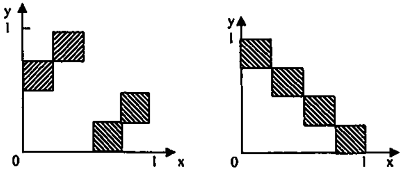
ნახ 1

ამრიგად როცა $j=1$, $[0,1]^2$-ს წარმოვადგინეთ A_0^1 და A_1^1 თანაუკვეთ სიმრავლეთა გაერთიანებით როცა $j=2$ ავაგოთ ოთხი A_0^2, A_1^2, A_2^2 და A_3^2 სიმრავლე შემდეგნაირად, A_0^1 და A_1^1 დავყოთ მათი შესაბამისი ფუნქციების დადებითობისა და უარყოფითობის შუალედებად გვექნება



A_0^2 A_1^2

$$A_0^1 = A_0^2 \cup A_1^2$$



A_2^2 A_3^2

ნახ 2

$A_1^1 = A_2^2 \cup A_3^2$

ამგვარად j=2 შემთხვევაში ჩვენ ავაგეთ ოთხი სიმრავლე რომელთათვისაც

$$[0,1]^2 = A_0^2 \cup A_1^2 \cup A_2^2 \cup A_3^2, \quad A_{\nu_1} \cap A_{\nu_2} = \varnothing, \ \nu_1 \neq \nu_2$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი A_ℓ^2, $\ell = 0,1,2,3$ წარმოადგენს 4 ცალი j=2 რანგის ფუნქციის სუპორტის გაერთიანებას

თუ ნაბიჯ-ნაბიჯ, ამგვარი წესით, ყოველი j-სთვის გავაგრძელებთ სიმრავლეების აგებას ანუ ყოველ A_ℓ^j-ის $\ell = 0, \ ,2^j - 1$, დავყოფთ დადებითობისა და უარყოფითობის შესაბამისად $A_{2\ell}^{j+1}$ და $A_{2\ell+1}^{j+1}$ სიმრავლეებად, საბოლოო ჯამში ყოველი j-ისთვის მივიღებთ 2^j ცალ A_ℓ^j სიმრავლეს შემდეგი თვისებებით

ა) $[0,1]^2 = \bigcup\limits_{\ell=0}^{2^j-1} A_\ell^j$, $j \geq 0$

ბ) $A_\ell^j \cap A_\nu^j = \varnothing$, $j \geq 0$, $\ell \neq \nu$, $\ell, \nu = 0, . \ ,2^j - 1$, (2.2.3)

გ) $A_\ell^j = A_{2\ell}^{j+1} \cup A_{2\ell+1}^{j+1}$

ყოველი A_ℓ^j არის j რანგის 2^j ცალი ფუნქციის სუპორტის გაერთიანება ამასთან, ყოველი A_ℓ^j იყოფა j+1 რანგის ორ $A_{2\ell}^{j+1}$ და $A_{2\ell+1}^{j+1}$ სიმრავლედ, სადაც $A_{2\ell}^{j+1}$ დადებითობის, ხოლო $A_{2\ell+1}^{j+1}$ კი

უარყოფითობის სიმრავლეა A_l^j-ის შესაბამისი 2^j ცალი ფუნქციისათვის.

შემოვიღოთ აღნიშვნა H_l^j–ით აღვნიშნოთ იმ (j,k_1,k_2) სამეულთა სიმრავლე, რომელთა შესაბამის ფუნქციათა სუპორტების გაერთიანება არის A_l^j

ზემოთ აღნიშნულის გათვალისწინებით, ნებისმიერი (j,k_1,k_2) სამეულისათვის H_l^j-დან გვექნება

$$
\begin{aligned}
&h_{j,k_1,k_2}(x,y) \ge 0, \quad \text{თუ} \quad (x,y) \in A_{2l}^{j+1}, \\
&h_{j,k_1,k_2}(x,y) \le 0, \quad \text{თუ} \quad (x,y) \in A_{2l+1}^{j+1}, \\
&h_{j,k_1,k_2}(x,y) = 0, \quad \text{თუ} \quad (x,y) \in [0,1]^2 \setminus A_l^j
\end{aligned}
\tag{2.2.4}
$$

B_l^j-ით აღვნიშნოთ შემდეგი ჯამი

$$B_l^j(x,y) = \sum_{(j,k_1,k_2)\in H_l^j} a_{j,k_1,k_2} h_{j,k_1,k_2}(x,y) \tag{2.2.5}$$

დავუშვათ, რომ

$$a_{j,k_1,k_2} \ge 0, \quad 0 \le j \le N, \quad k_1,k_2 = 0,1,\ldots,2^j-1 \tag{2.2.6}$$

ამ დაშვებისა და (10)-ის ძალით ყოველი j-ისთვის (0, 1, 2, …, N) სიმრავლიდან და ყოველი l-ისთვის (0, 1, …, 2^j-1) სიმრავლიდან გვექნება

$$
\begin{aligned}
&B_l^j(x,y) \ge 0, \quad \text{თუ} \quad (x,y) \in A_{2l}^{j+1}, \\
&B_l^j(x,y) \le 0, \quad \text{თუ} \quad (x,y) \in A_{2l+1}^{j+1}, \\
&B_l^j(x,y) = 0, \quad \text{თუ} \quad (x,y) \in [0,1]^2 \setminus A_l^j
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

ჩვენი მიზანია, რომ ყოველი N-ისათვის B_l^j, $j=0,\ldots,N$, $l=0,\ldots,2^j-1$, ფუნქციები ისე გადავნომროთ (დავალაგოთ), რომ ყოველი (x,y) წერტილისათვის $[0,1]^2$-იდან, მოიძებნებოდეს ისეთი ნომერი, რომ ამ ნომრამდე ყოველი ნომრის შესაბამისი B_l^j იყოს

არადადებითი, ხოლო ამ ნომრის შემდეგ კი არაუარყოფითი ანუ ნებისმიერი (x,y)-ისთვის $[0,1]^2$-იდან, მოიძებნებოდეს ისეთი r ნომერი, რომ

$$\begin{aligned} &B_s(x,y) \le 0, \quad \text{თუ} \quad s < r, \\ &B_s(x,y) \ge 0, \quad \text{თუ} \quad r \le s \le 2^{N+2}, \quad 1 \le r \le 2^{N+2}, \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

სადაც $B_s(x,y) = B_\ell^j(x,y)$ ანუ S არის (j,ℓ)-ის შესაბამისი ნომერი

ავაგოთ სპეციფიკური სახის გადანომვრა $\{B_\ell^j\}$, $j=0,\ldots,N$, $\ell=0,\ldots,2^j-1$, ფუნქციებისა და ვაჩვენოთ რომ ეს გადანომვრა აკმაყოფილებს (2.2.8)-ს

როცა N=1 გვაქვს სამი B_0^0, B_0^1 და B_1^1 ფუნქცია B_0^0-ის წინ განვათავსოთ მისი დადებითობის შესაბამისი B_0^1 ფუნქცია, B_0^0-ის შემდგომ კი მისი უარყოფითობის შესაბამისი B_1^1 ფუნქცია

$$\begin{aligned} &B_0^1, B_0^0, B_1^1 \\ &B_1, B_2, B_3 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

ახლა კი ყოველი N-ისათვის მოვახდინოთ გადანომვრა $(N$-1)-ის შესაბამისი გადანომვრიდან

$(N$-1)-ის შესაბამისი გადანომვრისას ამოწერილ $2^{N+1}-1$ ცალ ფუნქციას დაემატება N-რანგის 2^N ცალი $B_0^N, B_1^N, \ldots, B_{2^N-1}^N$ ფუნქციები, ისე რომ ყოველ $(N$-1) რანგის B_ℓ^{N-1}, $\ell=0,\ldots,2^{N-1}-2$, ფუნქციას წინ ამოეწერება მისი დადებითობის სიმრავლის $A_{2\ell}^N$-ის შესაბამისი $B_{2\ell}^N$ ფუნქცია, ხოლო B_ℓ^{N-1}-ის შემდეგ კი შეგვხვდება უარყოფითობის სიმრავლის $A_{2\ell+1}^N$-ის შესაბამისი $B_{2\ell+1}^N$ ფუნქცია

გადანომვრის აგებული სქემიდან, აშკარაა, რომ N რანგის ფუნქციები დაიკავებენ კენტ ნომრებს $(N$-1) რანგის ფუნქციები მეორე ნომრიდან დაწყებული, შეგვხვდება ყოველ მეოთხე ნომერზე და ა შ

ამგვარად, ყოველ (j,ℓ)-ს $j=0,\ldots,N$, $\ell=0,\ldots,2^j-1$, შეესაბამება ნომერი შემდეგი წესით

$$
\begin{array}{ll}
(\ell, N) \leftrightarrow 1 + 2\ell, & \ell = 0, \ldots, 2^{N} - 1 \\
(\ell, N-1) \leftrightarrow 2 + 4\ell, & \ell = 0, \ldots, 2^{N-1} - 1 \\
\ldots & \\
(\ell, j) \leftrightarrow 2^{N-j} + 2^{N-j+1}\,\ell, & \ell = 0, \ldots, 2^{j} - 1 \\
\ldots & \ldots \\
(0,0) \leftrightarrow 2^{N} &
\end{array}
\qquad (2.2.10)
$$

ვაჩვენოთ რომ, (2.2.10)–ში მოცემული წესით გადანომრილი B_ℓ^j, $j=0,\ldots,N$, $\ell=0,\ldots,2^j-1$, ფუნქციები აკმაყოფილებენ (2.2.8)-ში მოყვანილ პირობებს.

ამასთან ვაჩვენოთ რომ თუ (x,y) ეკუთვნის B_ℓ^N ფუნქციის A_ℓ^N სუპორტს, B_ℓ^N-ის ყველა წინამსწრები ფუნქცია (2.2.10) გადანომვრისას არადადებითია, ხოლო B_ℓ^N-ის შემდგომი ფუნქციები კი არაუარყოფითები. ე.ი. უნდა ვაჩვენოთ რომ (2.2.8)-ში r ემთხვევა B_ℓ^N-ის ნომერს, ან ერთით მეტია მის ნომერზე, თუ $(x,y)\in A_\ell^N$ (ასეთ B_ℓ^N ფუნქციას კუწოდოთ საზღვარი არადადებით და არაუარყოფით ფუნქციებს შორის).

მტკიცება ვაწარმოოთ ინდუქციით N-ის მიმართ. ვთქვათ N=1. ამ შემთხვევაში გვაქვს (2.2.9)-ში მოცემული ფუნქციები. მათთვის (2.2.8)-ის სამართლიანობა ადვილი შესამოწმებელია.

დავუშვათ რომ (2.2.8) სრულდება N-ის შესაბამისი გადანომრისთვის და ვაჩვენოთ, რომ შესრულდება (N+1)-ის შესაბამისი გადანომვრისათვის. ამასთან დავუშვათ, რომ, როცა $(x,y)\in A_\ell^N$, $0 \le \ell \le 2^N - 1$, საზღვარს N-ის შესაბამის გადანომვრაში არადადებით და არაუარყოფით ფუნქციებს შორის წარმოადგენს B_ℓ^N ფუნქცია და ვაჩვენოთ რომ ამ შემთხვევაში (ანუ თუ $(x,y)\in A_\ell^N$), (N+1)-ის შესაბამის გადანომვრაში საზღვარი იქნება ან $B_{2\ell}^{N+1}$ ან $B_{2\ell+1}^{N+1}$ ფუნქცია

ავიღოთ (N+1)-ის შესაბამისი გადანომვრა გადანომვრის აგებიდან ცხადია რომ ლუწ ნომერზე განლაგდებიან 0-დან N-რანგამდე ფუნქციები N-ის შესაბამისი გადანომვრის მიმდევრობით, კენტ ნომრებს კი დაიკავებენ (N+1)-რანგის $B_0^{N+1}, B_1^{N+1}, \quad , B_{2^{N+1}-2}^{N+1}$ ფუნქციები

ავიღოთ ნებისმიერი (x,y) წერტილი $[0,1]^2$-დან (2.2.3)-ის თანახმად (x,y) ეკუთვნის A_ℓ^N-ს, რომელიმე $0 \le \ell \le 2^N - 1$-ისთვის, ამიტომ დაშვების თანახმად N-ის შესაბამის გადანომვრაში B_ℓ^N არის საზღვარი არადადებით და არაუარყოფით ფუნქციებს შორის როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, N-ის შესაბამისი გადანომვრის ფუნქციები, (N+1)-ის შესაბამის გადანომვრისას დაიკავებენ ლუწ ნომრებს, ამიტომ (N+1)-ის შესაბამისი გადანომვრისას $B^{\ }$-ის წინამსწრები ყველა ლუწნომრიანი ფუნქცია არადადებითი იქნება, ხოლო $B^{\ }$-ის შემდგომი ყველა ლუწნომრიანი კი უარყოფითი

რაც შეეხება კენტნომრიან ფუნქციებს, რომელთაც (N+1)-რანგის ფუნქციები წარმოადგენენ, (2.2.7)-იდან გამომდინარე ნულის ტოლი არიან, როცა $(x,y) \in A_\ell^N$, გარდა $B_\ell^{\ }$ ან $B_2^{\ }{}_{+1}^{+1}$ ფუნქციებისა, აღვნიშნოთ რომ ეს ორი ფუნქცია იკავებს $B_\ell^{\ }$-ის წინა და შემდგომ ნომრებს (N+1)-ის შესაბამისი გადანომვრისას

ვთქვათ, $(x,y) \in A_{2\ell}^{N+1}$ ამ შემთხვევაში (N+1)-ის შესაბამის გადანომვრაში საზღვრის ფუნქცია იქნება $B_{2\ell}^{\ +1}$ მართლაც, მისი წინამსწრები ყველა ფუნქცია ლუწი ნომრით არადადებითია, როგორც B_ℓ^N-ის წინამსწრები ლუწნომრიანი ფუნქციები, ასევე მისი შემდგომი ლუწნომრიანი ფუნქციებიდან $B^{\ }$ ფუნქცია დადებითია, რადგან $(x,y) \in A_{2\ell}^{\ }$, ხოლო დანარჩენი ფუნქციები კი არაუარყოფითები როგორც $B_\ell^{\ }$-ის შემდგომი ლუწნომრიანი ფუნქციები რაც შეეხება კენტნომრიან ფუნქციებს, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ნულის ტოლი არიან

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ B_{2l+1}^{N+1} ფუნქცია იქნება საზღვარი, როცა $(x,y)\in A_{2l+1}^{N+1}$ ინდუქციის ძალით ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ (2.2.10) გადანომვრა აკმაყოფილებს (2.2.8)-ს N-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ჩვენი საბოლოო მიზანია, რომ (2.2.2) პოლინომში $a_{j,k_1k_2}h_{j,k_1,k_2}$, $j=M,\dots,N$, $k_1,k_2=0,\dots,2^j-1$, სიდიდეები ისე გადავანაცვლოთ რომ შესრულდეს (2.2.1).

(14) აღნიშვნიდან თითოეული B_l^j, $j=M,\dots,N$, $l=0,\dots,2^j-1$, წარმოადგენს 2^j ცალი $a_{j,k_1,k_2}h_{j,k_1,k_2}$ ფუნქციის ჯამს. ამრიგად ყოველ B_l^j-ს შეესაბამება 2^j ცალი $a_{j,k_1,k_2}h_{j,k_1,k_2}$, ფუნქცია. ჩვენ აგებული გვაქვს $\{B_l^j\}$ $j=0,\dots,N$, $l=0,\dots,2^j-1$ ფუნქციების (2.2.9) გადანომვრა, რომელიც (2.2.8)-ს აკმაყოფილებს. (2.2.10)-დან ჩანს, რომ პირველ ნომერს ანუ B_1-ს შეესაბამება B_0^N. B_0^N-ს კი თავის მხრივ შეესაბამება 2^N ცალი $a_{N,k_1k_2}h_{N,k_1,k_2}$ ფუნქცია. ეს 2^N ცალი ფუნქცია რაიმე წესით გადავნომროთ პირველი 2^N ნატურალური რიცხვით. მეორე ნომრით (16)-ში გვხვდება B_2-ის შესაბამის B_1^{N-1} ფუნქცია. მისი შესაბამისი 2^{N-1} ცალი $a_{N-1,k_1,k_2}h_{N-1,k_1,k_2}$ ფუნქცია შემდეგი $2^N+1, 2^N+2,\dots,2^N+2^{N-1}$ ნატურალური რიცხვებით გადავნომროთ.

თუ ამ პრინციპით გავაგრძელებთ გადანომვრას, ამასთან თუ მოცემული გადანომვრისას M-ზე დაბალი რანგის ფუნქციებს გამოვტოვებთ, საბოლოოდ ჩვენ მივიღებთ a_{j,k_1,k_2}, h_{j,k_1,k_2}, $j=M,\dots,N$, $k_1,k_2=0,\dots,2^j-1$ ფუნქციების, ანუ (j,k_1,k_2), $j=M,\dots,N$, $k_1,k_2=0,\dots,2^j-1$ სამეულების გადანომვრას $\left(1,2,3,\dots,\frac{2^{2N+2}-2^{2M}}{3}\right)$ ნატურალური რიცხვებით.

(2.2.4) და (2.2.7) პირობებიდან და (2.2.6) დაშვებიდან ჩანს რომ B_j^i-ის ნიშანი ემთხვევა მისი შესაბამისი ყველა $a_{j,k_1,k_2} h_{j,k_1,k_2}$ ფუნქციის ნიშანს ამის მხედველობაში მიღებით და (2.2.10)-ის გათვალისწინებით, $a_{j,k_1,k_2} h_{j,k_1,k_2}$ ფუნქციების ზემოთ აღწერილი გადანომერისთვის გვექნება, რომ ნებისმიერი (x,y)-ისთვის $[0,1]^2$-დან, მოიძებნება ისეთი ν ნატურალური რიცხვი $1 \le \nu \le \frac{2^{2N+2}-2^{2N}}{3}$ რომლისთვისაც

$$
\begin{aligned}
&a_t h_t(x,y) \le 0, \quad \text{თუ} \quad 1 \le t \le \nu, \\
&a_t h_t(x,y) \ge 0, \quad \text{თუ} \quad \nu < t \le \frac{2^{2N+2}-2^{2M}}{3},
\end{aligned}
\tag{2.2.11}
$$

სადაც ყოველი t ჩვენს მიერ წარმოებული გადანომერით შეესაბამება (j,k_1,k_2) სამეულს

განვიხილოთ

$$
\sum_{t=1}^{\frac{2^{2N+2}-2^{2M}}{3}} a_t\, h_t(x,y), \qquad (x,y)\in[0,1]^2,
$$

სადაც $a_t\ h_t(x,y)$ წევრები ჩვენს მიერ დალაგებული მიმდევრობით გვხვდება (2.2.11)-იდან გამომდინარე ადვილი სანახავია რომ

$$
\sup_{1\le t_1 \le t_2 \le \frac{2^{2N+2}-2^{2M}}{3}} \left|\sum_{t=t_1}^{t_2} a_t h_t(x,y)\right| \ge \frac{1}{2}\sum_{j=M}^{N}\sum_{k_1,k_2=0}^{2^j-1}\left|a_{j,k_1,k_2} h_{j,k_1,k_2}(x,y)\right| \tag{2.2.12}
$$

(2.2.12) პირობა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, თუ დავუშვებთ, რომ ყველა a_{j,k_1,k_2} კოეფიციენტი არადადებითია

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა ვთქვათ, a_{j,k_1,k_2}, $j=M,\dots,N$, $k_1,k_2=0,\dots,2^j-1$, კოეფიციენტები სხვადასხვა ნიშნისაა დავაჯგუფოთ ერთად დადებით კოეფიციენტებიანი და ერთად უარყოფით კოეფიციენტებიანი $a_{j,k_1,k_2} h_{j,k_1,k_2}$ წევრები თითოეულ j ჯგუფში

მოვახდინოთ (2.2.10)-ის ანალოგიური გადანომვრა, (2.2.11)-იდან გამომდინარე გვექნება.

$$\max_{1\le l_1\le l_2\le \frac{2^{2N+2}-2^{2M}}{3}}\left|\sum_{l=l_1}^{l_2} a_l h_l(x,y)\right| \ge$$

$$\ge \max\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{S}\left|a_l h_l(x,y)\right|,\ \frac{1}{2}\sum_{l+S}^{2^{2N+2}-2^{2M}}\left|a_l h_l(x,y)\right|\right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{4}\sum_{j=M}^{N}\ \sum_{k_1,k_2=0}^{2^j-1}\left|a_{j,k_1,k_2}h_{j,k_1,k_2}(x,y)\right|,\quad (x,y)\in[0,1]^2, \qquad (2.2.13)$$

სადაც S არის არაუარყოფითი a_{j,k_1,k_2} კოეფიციენტების რაოდენობა.

ამგვარად, ჩვენ გვაქვს $a_{j,k_1,k_2}h_{j,k_1,k_2}$, $j=M,\dots,N$, $k_1,k_2=0,\dots,2^j-1$, ფუნქციების გადანომვრა რომელიც (2.2.11)-ს და (2.2.12)-ს აკმაყოფილებს გვაქვს აგრეთვე ბუნებრივი, ჰაარისეული გადანომვრა შესაბამისად ერთმანეთის ის (j,k_1,k_2) და (j',k_1',k_2') სამეულები, რომელთაც ერთი და იგივე ნომრები შეესაბამებათ ორივე გადანომვრისას ცხადია, ასეთი σ გადანაცვლება (2.2.13)-დან გამომდინარე აკმაყოფილებს (2.2.2)-ს ამით ლემა დამტკიცებულია

გავითვალისწინოთ (2.1.5) აღნიშვნა და შემოვიღოთ ახალი აღნიშვნები

$$\Delta_{M,N}(x,y) = S_N(x,y) - S_M(x,y) \qquad (2.2.14)$$

ცხადია,

$$\Delta_{M,N}(x,y) = \Delta^1_{M,N}(x,y) + \Delta^2_{M,N}(x,y) + \Delta^3_{M,N}(x,y).$$

სადაც

$$\Delta^i_{M,N}(x,y) = \sum_{j=-N}^{N}\ \sum_{k_1,k_2=-2^{N-j}}^{2^{N-j}-1} a^{(i)}_{j,k_1,k_2}h^{(i)}_{j,k_1,k_2}(x,y) -$$

$$-\sum_{j=-M}^{M}\ \sum_{k_1,k_2=-2^{M-j}}^{2^{M-j}-1} a^{(i)}_{j,k_1,k_2}h^{(i)}_{j,k_1,k_2}(x,y),\quad 1\le i\le 3 \qquad (2.2.15)$$

$\overset{\bullet}{\Delta}_{M N}(x,y)$-ით აღვნიშნოთ პოლინომი, რომელიც მიიღება $\Delta_{M N}(x,y)$ პოლინომისაგან, მის შესაკრებებზე მოდულების დასმით, $\overset{\sigma}{\Delta}_{M N}(x,y)$-ით კი პოლინომი, რომელიც მიიღება $\Delta_{MN}(x,y)$ პოლინომის შესაკრებების σ გადანაცვლებით

ანალოგიური აღნიშვნები შემოვიღოთ $\Delta'_{M N}(x,y)$ პოლინომისათვის ესენი იქნება $\overset{\bullet}{\Delta}'_{M,N}(x,y)$ და $\overset{\sigma^{(i)}}{\Delta}'_{M N}(x,y)$ პოლინომები

ლემა (1)-ის გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ მოცემულია რაიმე $\Delta'_{M,N}(x,y)$ პოლინომი, მაშინ მოიძებნება ამ პოლინომის შესაკრებთა ისეთი $\sigma^{(i)}$ გადანაცვლება რომ ყოველი (x,y)-ისათვის $[0,1]^2$-დან

$$\max_{\substack{M\le p\le q\le N\\ -2^{N-p}\le u_1,u_2\le 2^{N+p}-1\\ -2^{N-q}\le v_1,v_2\le 2^{N+q}-1}} \left|\overset{\sigma'}{\Delta}{}^{i}_{p,q}(x,y)\right| \ge \frac{1}{4}\overset{\bullet}{\Delta}{}^{i}_{MN}(x,y),\quad 1\le i\le 3 \qquad (2.2.16)$$

$\{h_{j,k_1,k_2}\}_{j,k_1,k_2\in\mathbb{Z}}$, $i=1,2,3$, ფუნქციათა სისტემის განსაზღვრებიდან გამომდინარე (21) პოლინომის წევრებიდან ნულისგან განსხვავებულები იქნებიან მხოლოდ

$$a^{(i)}_{j00}\ h^{(i)}_{j00}(x,y)=2^{j}a^{(i)}_{j00},\quad -N\le j\le -M-1,\ 1\le i\le 3, \qquad (2.2.17)$$

რიცხვები და

$$a^{(i)}_{j,k_1k_2}\ h^{(i)}_{jk_1k_2}(x,y),\ M+1\le j\le N,\ k_1,k_2=0,1,\dots,2^{j} \qquad (2.2.18)$$

ავაგოთ (2.2.15) პოლინომის წევრთა ისეთი $\sigma^{(i)}$ გადანაცვლება, რომელიც (2.2.16)-ს დააკმაყოფილებს

(2.2.13) რიცხვებიდან არადადებითი განვალაგოთ $(M+1,k_1,k_2)$, $k_1,k_2=-2^{N-M+1},\dots,0$, სამეულების შესაბამისი წევრების ადგილას, ხოლო არაუარყოფითები კი (N,k_1,k_2), $k_1,k_2=-2^{N},2^{N}+1,\dots,2^{2N}-1$

სამეულების შესაბამისი წევრების ადგილას. ეს იმას ნიშნავს, რომ ნულოვანი წევრების ჩანაცვლება მოვახდინეთ რიცხვებით

(2.2 18) წევრები პოლინომისა ლემაში მითითებული გადანაცვლებით დავალაგოთ.

დანარჩენი ნულოვანი წევრები კი (2.215) პოლინომისა თავის ადგილას დავტოვოთ.

ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ $\sigma^{(i)}$ გადანაცვლება რომელიც ლემიდან გამომდინარე (22.16)-ს აკმაყოფილებს. ჩავწეროთ $\Delta_{M,N}(x,y)$ შემდეგი სახით

$$\Delta_{M,N}(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\Delta^{i}_{M,N}(x,y), \quad (x,y)\in[0,1]^2. \qquad (2.2.19)$$

თითოეულ $\Delta^{i}_{M,N}$-ში მოვახდინოთ $\sigma^{(i)}$ გადანაცვლება. საბოლოოდ მივიღებთ (2.2 14) პოლინომის წევრთა ისეთ σ' გადანაცვლებას, რომ გვექნება

$$\max_{\substack{M\le p\le q\le N\\ -2^{N+P}\le U_1,U_2\le 2^{N+P}-1\\ -2^{N+q}\le V_1,V_2\le 2^{N+q}-1}}\left|\overset{\sigma'}{\Delta}_{p,q}(x,y)\right|\ge$$
$$\ge\max\left\{\frac{1}{4}\overset{*}{\Delta}{}^{1}_{M,N};\frac{1}{4}\overset{*}{\Delta}{}^{2}_{M,N};\frac{1}{4}\overset{*}{\Delta}{}^{3}_{M,N}\right\}\ge\frac{1}{12}\overset{*}{\Delta}_{M,N}(x,y) \qquad (2.2.20)$$

ახლა კი ვაჩვენოთ თ ე ო რ ე მ ი ს სამართლიანობა. ცხადია, რომ თითქმის ყველგან აბსოლუტური კრებადობიდან გამომდინარეობს თითქმის ყველგან უპირობო კრებადობა ვაჩვენოთ რომ პირიქითაც სამართლიანია

დავუშვათ საწინააღმდეგო ვთქვათ (2.1.4) მწკრივი თითქმის ყველგან უპირობოდ კრებადია და არ არის თითქმის ყველგან აბსოლუტურად კრებადი. ეს კი იმას ნიშნავს რომ მოიძებნება ისეთი დადებითი ზომის D ქვესიმრავლე R^2-ისა, რომ ყოველი (x,y)-ისთვის D-დან

(ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ რომ D-ს აქვს დადებითი ზომის თანაკვეთა $[0, 1]^2$-თან)

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{K_1,K_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{3} \left| a_{j,K_1,K_2}^{(i)} h_{j,K_1,K_2}(x,y) \right| = +\infty. \tag{2.2.21}$$

(2.2.21) თავის მხრივ, $\overset{\bullet}{\Delta}_{M,N}$-ის აღნიშვნის გათვალისწინებით ნიშნავს, რომ მოიძებნება დადებითი ზომის სიმრავლეთა $D_\nu \subset D$, $\nu = 1, 2, 3\ldots$ მიმდევრობა, რომლისთვისაც

$$\mu(D_\nu) > \mu(D) - \frac{1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \quad ,$$

და მთელ რიცხვთა ისეთი ზრდადი N_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, მიმდევრობა, რომ გვექნება

$$\overset{\bullet}{\Delta}_{N_\nu, N_{\nu+1}}(x, y) \geq 1, \qquad (x, y) \in D_\nu, \ \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

(2.2.20)-დან გამომდინარე მოიძებნება ისეთი σ' გადანაცვლება $\Delta_{N_\nu, N_{\nu+1}}(x, y)$ პოლინომის წევრებისა, ანუ (j, k_1, k_2, i), $j = N_\nu, \ldots, N_{\nu+1}$, $k_1, k_2 = -2^{N_\nu+1}, \ldots, 2^{N_{\nu+1}} - 1$, $i=1,2,3$ ოთხეულთა სიმრავლის ისეთი σ' ბიექცია თავის თავში რომ

$$\max_{\substack{M \leq p \leq q \leq N \\ -2^{N+P} \leq U_1, U_2 \leq 2^{N+P} - 1 \\ -2^{N+q} \leq V_1, V_2 \leq 2^{N+q} - 1}} \left| \overset{\sigma'}{\Delta}_{p,q}(x, y) \right| \geq \frac{1}{12} \overset{\bullet}{\Delta}_{N_\sigma, N_{\sigma+1}}(x, y) \geq 1 \tag{2.2.22}$$

$$(x, y) \in D_\nu, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ეს კი თავის მხრივ იმას ნიშნავს, რომ მოვახდინეთ (2.1.4)მწკრივის წევრების ისეთი გადანომვრა ნატურალური რიცხვებით,რომ მიღებული ერთმაგი მწკრივი განშლადია $\overline{\lim_{\nu \to \infty}} D_\nu$ სიმრავლეზე. ანუ თითქმის ყველა (x,y)-ისთვის D-დან ეს კი თეორემის ძალით (იხ.თ(1),[15]) და

იმის გათვალისწინებით რომ, D დადებითი ზომის სიმრავლეა ეწინააღმდეგება ჩვენს დაშვებას რომ (2.1.4) მწკრივი არის თითქმის ყველგან უპირობოდ კრებადი მივიღეთ წინააღმდეგობა, ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. S Mallat *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of* $L^2(\mathbb{R})$ Transactions of the American Mathematical Society. V. 315, N 1, 1989, pp 69-88.
2. I. Daubechies. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets.* Commun Pure Appl. Math 46 (1988), pp. 909-996
3. Haar A., *Zur Theorie der orthogonalen Funktionen systeme* , Math , Ann., 69, 1910, pp. 331-371.

4 V M. Bugadze *On absolute convergence of Haar- Fourier series of superposition of functions* Anal. math., 10,2, 1984, pp. 97-108.

5. В М Бугадзе *Ряды Фурие-Хаара суперпозиций функций*, Издю ТГУ, Тбилиси, 1988
6. Е.М. Никишин, П Л Ульянов. *Об абсолютной и безусловной сходимисти. Успехи матем наук*, т 22, вып 3, 1967, стр. 240-242.
7. Daubechies I , *Ten lectures on wavelets*, CBC-NSF regional conference in applied mathematics, 61, SIAM, 1992.

8 Hernandez E , Weiss G , *A first course on wavelets*, CRC press Inc , 1996

9. Wojtaszczyk P , *A mathematical introduction to wavelets*, Cambridge University Press, 1997.

10. Meyer Y., *Wavelets and operators,* Cambrıdge University press, 1992.

11. Toradze N., *On Certain Partial Sums of Double Separable Haar Wavelet Expansions,* Bulletin of the Georgian Academy of Sciences, v. 169, No. 1, 2004, pp.23-25

12 V Meskhia, *On Absolutely Convergent Fourier Series with respect to Haar multiple separable wavelet,* Bulletın of the Georgıan Academy of Sciences, V. 169, N 2, 2004, pp. 234-235.

13.V Meskhıa, *On Congvergence of Double-Haar Wavelet Series* , Bulletın of the Georgıan Academy of Sciences, V. 172, N 1,2005, pp. 33-34

14.V Meskhia, *On Operations Acting in the class of functions with absolutely Convergent Haar Wavelet Expansions,* Bulletın of the Georgian Academy of Sciences, V. 173, N 3, 2006,pp 458-459.

15 G Bareladze, *Notes on The unconditional convergence of multidimensional functional series,* Georgıan Mathematıcal Journal, V.7, N2, 2000, pp. 215-220