ТБИЛИССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. ИВАНЭ ДЖАВАХИШВИЛИ

Бокелавадзе Тенгиз Зауриевич

РЕШЕТКИ ПОДГРУПП И ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ W–СТЕПЕННЫХ ГРУПП ХОЛЛА

Специальность 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математичесских наук

Научные руководители: Доктор физико-математических наук
профессор А.А.ЛАШХИ

Кандидат физико-математических наук,
.доцент А.Д.ТАВАДЗЕ

Тбилиси

2006

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ

L - решетка с нулем и единицей;

N, Z, Q, R, C - множество натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел;

P - множество всех простых чисел;

$\leq, \cup, \cap$ - частичный порядок, объединение и пересечение в решетке L;

0, $1(I)$ - наименьший и наибольший элементы L;

$[u, v]$ - интервал, т.е. множество w, $u \leq w \leq v$;

$U(mod\, L)$ – и модулярный элемент в L;

$x^y = y^{-1}xy$;

$< X >$ - подгруппа порожденная множеством $X \subseteq G$.

$H \trianglelefteq G$ - нормальная подгруппа G;

$H \cup K =< H,K >$;

$[X,S] =< [x,s],\ x \in X,\ s \in S >$;

$G' = [G, G]$;

$Z(G)$- центр группы G;

$N(X)$ - нормализатор множества $X \subseteq G$;

$Aut(G)$- группа автоморфизмов G;

$L(G)$ - решетка всех подгрупп;

$\zeta(X)$ - решетка нормальных делителей;

$CL(G)$ - решетка смежных классов;

$f : L(G) \to L(G_1)$ - решеточный изоморфизм; для подгруппы $A \subseteq G$ и ее образа при f будем пользоваться обозначениями $f(A)$ либо A^f.

Остальные обозначения будут приводиться по ходу изложения.

Все основные определения и обозначения стандартные и их можно найти в монографиях А. Г. Куроша [3], [4] и Г. Гретцера [54], Г. Биркгофа [55], М. Судзуки [53], Р. Шмидта [61].

ВВЕДЕНИЕ

Понятие дискретной W–степенной группы ввел Ф.Холл [20]. Он же обобщил для них некоторые результаты из теории нильпотентных групп. Значение W–степенных нильпотентных групп в общей теории абстрактных групп определяется тем, что всякая конечно порожденная нильпотентная группа без вкручения вкладывается в некоторую W–степенную группу.

В настоящее время имеется ряд работ, в которых изучаются свойства W–степенных групп. Вопрос о матричной представимости W–степенных нильпотентных групп раасматривался Ю.И.Мерзляковым [12].

Алгоритмическими вопросами W–степенных нильпотентных групп занимались М.И.Каргаполов, В.П.Ремесленников, Н.С.Ромоновский, В.Л.Романьков, В.А.Чуркин (1969), Г.А.Мясников, В.Н.Ремесленников [13]. Общая теория W–степенных групп была развита Х.Х.Магомаевым [5], [6], А.Д.Тавадзе [16-17, 19], А.Д.Тавадзе, А.Л.Шмелькиным [13], М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленниковым [36], М. Г. Амаглобели [37-41].

Впервые пронильпотентные группы, определенные над кольцом рациональных чисел появились в работе А.И.Мальцева [9], в которой была установлена связь между проективными пределами нильпотентных D-групп и нормированными алгебрами Ли над кольцом рациональных чисел. Позднее эти соответствия подробно изучал М.Лазар в своей фундаментальной работе [31].

Вопрос о связи между пронильпотентными группами и полными алгебрами Хопфа рассматривал Д.Квиллен [33]. Из работ, относящихся к пронильпотентным Z-группам, отметим работу Г.Баумслага и У.Стамбаха (1977).

Стимулирующее воздействие на исследование пронильпотентных W–групп в случае, когда W является кольцом рациональных чисел или его собственным подкольцом, оказала связь этих групп с некоторыми топологическими задачами. Эта связь хорошо иллюстрируется в работе А.Боусфильда и Д.Кана [28].

Приведенные выше соображения указывают на своеобразие и актуальность исследования свойств *W*–групп, причем целесообразно рассмотреть как общий случай биномиального кольца (в зависимости от задачи), так и некоторые частные случаи – кольца главных идеалов, поля, факториальные кольца и т.д.

С другой стороны изучение свойств (универсальных) алгебр, в частности, групп, алгебр Ли и т.д. можно проводить опираясь на те или иные исходные свойства. В ряде исследований, решается следующая задача: изучить влияние свойств множества всех подалгебр (подгрупп) на свойства самой алгебры (группы). Тем самым выяснить, насколько полно теоретико-множественные операции, заданные на множестве всех подалгебр (подгрупп), определяют свойства алгебраических операций.

Исследования связей между строением группы и строением решетки ее подгрупп посвящено огромное ·количество работ, что подитожено в монографии Р Шмидта [61]. Имеется большое количество работ, изучающих случай полугрупп, колец, модулей, алгебр Ли и т.д.

Все это подтверждает актуальность исследования W–степенных групп на фоне решетки ее подгрупп.

Целью работы является изучение *W*–степенных нильпотентных групп Холла с решеточной точки зрения и выявление связей между строением *W*–степенной группы *G* и строением решетки всех ее подгрупп *L(G)*.

В частности:

(1) Изучение строения *G* с некоторыми естественными ограничениями на *L(G)*: - дистрибутивность, модулярность, полумодулярность и т.д.;

(2) Исследование решеточных изморфизмов *W*–степенных групп над общими биномиальными кольцами;

(3) Доказательство основной теоремы проективной геометрии для нильпотентных *W*–степенных групп над кольцами главных идеалов.

Объектами исследования являются *W*–степенная группа *G*, решетка ее подгрупп *L(G)* и решеточные изоморфизмы.

В диссертационной работе применяются методы общей теории групп, теории колец и решеток, теории алгебр Ли.

Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором единолично.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и разработанные в ней методы могут быть применены в дальнейших исследованиях по теории W–степенных групп, алгебр Ли и теории решеток, а также для проведения спецкурсов и спецсеминаров для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на научных семинарах Тбилисского, Кутаисского и Батумского Университетов, Грузинского Технического Университета, на Республиканских математических конференциях (Тбилиси, 1997, 2001, 2005), на международной конференции "Group Theory Methods in Physics and Mathematics" (Батуми, 2003).

По теме диссертации автором опубликовано 9 научных работ: список см. в конце диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, семи параграфов и списка литературы. Отметим, что для полного представления картины в библиографии приведен список работ относительно W–степенных групп и смежных вопросов.

В первом параграфе приводится определение и некоторые известные факты относительно W–степенных групп Холла.

Там же приведены некоторые тодкества относительно коммутаторов в группах, которые в последующих изложениях и вычислениях будут играть существенную роль.

Во втором параграфе описаны решетки подгрупп и решетки смежных классов W–степенных групп с некоторыми ограничениями; в частности даны необходимые и достаточные условия модулярности и дистрибутивности решеток W–подгрупп, а также необходимые и достаточные условия разложимости в прямое произведение дистрибутивности, модулярности и т.д. для решетки смежных классов.

В третьем параграфе изучены общие условия решеточных изоморфизмов W–степенных групп, в частности поведение нормальных подгрупп, нижних центральных рядов.

В четвертом параграфе изучены биективные отображения порожденные решеточными изоморфизмами. Там же доказана локальная теорема Мальцева для W–степенных групп.

В пятом параграфе изучены нильпотентные класса 2 W–степенные группы. Показано, что нильпотентная класса 2 W–степенная группа без кручения порожденная двумя элементами свободна.

В шестом параграфе доказана решеточная определяемость свободных нильпотентных W–степенных групп над биномиальными кольцами. Здесь же доказана основная теорема для нильпотентных класса 2 W–степенных групп.

В заключительном седьмом параграфе работы доказана основная теорема проективной геометрии для чистых W–степенных групп над кольцами главных идеалов.

1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ W–СТЕПЕННЫХ ГРУПП

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ФАКТЫ.

Ф. Холл ввел один класс групп, названных им W-степенными, или просто W-группами, являющийся обобщением понятия W-модуля на случай произвольной локально нильпотентной группы. Значение W-групп в общей теории абстрактных групп определяется тем, что любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения вкладывается в некоторую W-группу (Ф. Холл [20]).

Введем основные определения.

Пусть W - биномиальное кольцо, т.е. область цельности, содержащая Z в качестве подкольца и вместе с каждым элементом λ все биномиальные коэффициенты:

$$\binom{\lambda}{n}=\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!},\ n\in N.$$

Например, W может быть кольцом Z целых чисел, кольцом Z_p целых p-адических чисел, полем Q рациональных чисел, полем R действительных чисел, вообще, любым полем нулевой характеристики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Группа G класса нильпотентности m называется W-степенной группой, если для любых x из G и $\lambda\in W$ однозначно определен элемент $x^{\lambda}\in G$, причем выполняется следующие аксиомы ($x,y,x_1,\ldots x_n$ - произвольные элементы из G; λ, μ - произвольные элементы из W):

а) $x^1=x, x^{\lambda}x^{\mu}=x^{\lambda+\mu}$, $(x^{\lambda})^{\mu}=x^{\lambda}x^{\mu}$

в) $y^{-1}x^{\lambda}y=(y^{-1}xy)^{\lambda}$;

с) $x_1^{\lambda}x_2^{\lambda}\ldots x_n^{\lambda}=(x_1x_2\ldots x_n)^{\lambda}\tau_2^{\binom{\lambda}{2}}(x)\ldots\tau_m^{\binom{\lambda}{m}}(x)$, где m-класс нильпотентности группы $< x_1, x_2, ..., x_n >$; $\tau_k(x)$- k-е слово Петреску от $x_1, x_2, ..., x_n$. Напомним, что для каждого $k \in N$ k-е слово Петреску $\tau_k(x_1, x_2, ..., x_n) = \tau_k(x)$ определяется рекуррентно из соотношения

$$x_1^k x_2^k ... x_n^k = \tau_1^k(x) \tau_2^{\binom{k}{2}}(x) ... \tau_{k-1}^{\binom{k}{k-1}}(x)$$

В свободной группе F с базисом $x_1, x_2, ..., x_n$. Хорошо известно (см., например [20]), что $\tau_k(x)$ принадлежит подгруппе $F_k - k$-му члену нижнего центрального ряда группы F.

Естественность аксиом а) и в) очевидна. Аксиома с) является перенесением аналогичного свойства при целых λ для локально нильпотентных групп.

Из этих аксиом следует, что $1^\lambda = 1, x^0 = 1, x^{-1} = (x^\lambda)^{-1}$. Легко заметить, что если G абелева, эти аксиомы превращаются в обычное определение W-модуля, в котором обычные аддитивные понятия заменены мультипликативными. Ясно также, что если n-целое рациональное число, рассматриваемое как элемент кольца W, то x^n имеет обычное значение. При фиксированном $a \in G$ отображение $\lambda \to a^\lambda$ является гомоморфизмом аддитивной группы кольца W на подгруппы a^W группы G, и ядро этого отображения 1 является идеалом в W- порядковым идеалом элемента a, или просто порядком элемента a. Если этот порядковый идеал равен 0 при всех $a \neq 1$, то G называется группой без кручения.

Нильпотентные группы являются Z степенными группами. Произвольный W-модуль является абелевой W-группой, полные нильпотентные группы с однозначным извлечением корня - Q степенными группами. Напомним, что полная группа с однозначным извлечением корня называется D -группой, так что Q-степенная группа – это нильпотентная D-группа.

Произвольной W-группой над кольцом W назовем такой проективный предел дискретных W-степенных нильпотентных групп G_i, класса

i, $i=1,2,...$, что гомоморфизм $\pi_i : G_{i+1} \to G_i$-это факторизация по последнему члену нижнего центрального ряда.

Большой запас примеров таких групп в случае, когда W - кольцо целых чисел, можно получить, если брать нильпотентно апроксимируемые группы и пополнять их относительно топологии, определяемой нижним центральным рядом.

Значение W-степенных групп в общей теории абстрактных групп определяется тем, что любая конечно порожденная нильпотентная группа G без кручения вкладывается в некоторую W-степенную группу G^W.

В случае, когда $W=Q$, то G^Q-нильпотентная D группа. Если W-поле действительных чисел, то в качестве G^R может быть получена односвязная нильпотентная группа Ли. В случае полей рациональных и действительных чисел теоремы вложения были получены А.И. Мальцевым с использованием теории групп и алгебр Ли [9], [10].

Отметим еще два важных примера W-степенной группы.

Пусть П – некоторое множество простых чисел. Нильпотентная группа G называется П-локальной (или локальной в П), если для любого элемента $g \in G$ и любого простого числа $p \notin \Pi$ уравнение $x^p = g$ имеет в П единственное решение. При $G = \varnothing$ очевидно, что получается нильпотентная D-группа.

П-локальная нильпотентная группа является Z_Π подкольцо поля рациональных чисел Q, которое состоит из чисел вида m/n, причем не делится ни на одно простое число из П.

Если W-кольцо p-простое число, то G^W является p-адическим пополнением группы G, т.е. пополнением группы G, которое получается взятием в качестве окрестностей единицы множества всех нормальных подгрупп K группы G таких, что $|G:K|$ есть степень P, а затем рассматривать ее как дискретную группу.

Очевидно, что W-группа является мультиоперативной группой. Понятия W-подгруппы, W-факторгруппы и W-гомофорфизма определяется, как обычно. Скажем, что подгруппы H W-допустима в G, если она является W-подгруппой.

ЛЕММА 1.1.1. *Ядра W-гомоморфизмов- это в точности нормальные W-подгруппы [5].*

1.2. КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫЕ W-СТЕПЕННЫЕ ГРУППЫ

ЛЕММА 1.2.1. *Пусть G есть W-группа.*

Тогда, если коммутатор [a, b] содержится в центре, то при любых $\lambda,\mu \in W$ имеем: a) $[a^\lambda, b] = [a,b]^\lambda$, b) $[a, b^\lambda] = [a,b]^\lambda$, c) $[a^\lambda, b^\mu] = [a,b]^{\lambda\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$[a^\lambda, b] = a^{-\lambda} b^{-1} a^\lambda b = a^{-\lambda}(b^{-1}ab)^\lambda = t_1{}^\lambda(a^{-1}, b^{-1}ab) \dots t_c{}^{(\lambda)}_c(a^{-1}, b^{-1}ab),$$

где все $t_i(i \geq 2)$ содержится в коммутанте H' группы $H = \langle a^{-1}, b^{-1}ab \rangle = \langle a^{-1}, [a,b] \rangle$ и с-класс нильпотентности группы H. Так как $[a,b]$ содержится в центре, то H абелева и $H' = 1$. Отсюда следует, что все $t_i(i \geq 2)$ равны единицы, а так как $t_1(a^{-1}, b^{-1}ab) = a^{-1}b^{-1}ab$, справедливость равенства а) доказана.

Аналогично доказываются и другие равенства.

ЛЕММА 1.2.2. *Централизатор любого множества M W-группы будет W-подгруппой.*

Действительно, пусть $C = C_G(M)$ – централизатор M в G. Если $z \in C$ и $\chi \in M$, то $z = x^{-1}zx$, $z^\lambda = x^{-1}z^\lambda x$ и, следовательно, $z^\lambda \in C$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2.1. *Центр произвольной W-группы W-допустим.*

ТЕОРЕМА 1.2.1. Члены и факторы верхней центральной цели $1 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots$ W-группы G суть W-группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для Z_1 теорема верна согласно следствию. Пусть теорема верна для всех индексов $\alpha < \beta$. Если число $\beta - 1$ существует, то группа $Z_{\beta-1}$, а потому и $G / Z_{\beta-1}$, суть W-группы. Но тогда группа $Z_\beta / Z_{\beta-1}$ сама W-допустима как центр W-группы $G / Z_{\beta-1}$. Отсюда следует, что $Z_\beta W$-допустима. Если же β предельное, то Z_β есть объединение возрастающей последовательности W-подгрупп и поэтому опять W-допустима.

ТЕОРЕМА 1.2.2. *Члены и факторы нижнего центрального ряда нильпотентной W-группы G суть W-группы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G = G_1 \supset G_2 \supset ... \supset G_k \supset 1$ – нижний центральный ряд группы G. Тогда при $k = 1$ теорема очевидна. Докажем теорему индукцией по классу нильпотентности W-группы. Предварительно докажем, что группа G_k W-допустима. По определению $G_k = [G_{k-1}, G]$ и порождается коммутаторами вида $[x, y]$, где $x \in G_{k-1}$ и $y \in G$. Достаточно поэтому показать, что если $[a,b] \in G_x$, то $[a,b]^\lambda \in G_k$, где $a \in G_{k-1}$, $b \in G$. Но это следует из леммы 2.1.

Действительно, так как $[a,b]$содержится в центре то $[a,b]^\lambda = [a,b^\lambda]$ но этот коммутатор принадлежит G_k. Отсюда следует, что группа G / G_k есть W-группа, а так она имеет меньший класс нильпотентности, чем G, то по предположению члена и факторы ряда $G / G_k \supset G_1 / G_k \supset ... \supset G_{k-1} / G_k \supset 1$ суть W-группы. Это означает W-допустимость членов и факторов группы G. Теорема доказана.

Пусть M – произвольное подмножество W- группы G. Пересечение всех W-подгрупп группы G, содержающих множество M, будет наименьшей W-подгруппой, содержащей M и обозначаемой $< M >^W$.

Покажем, что произвольный элемент из $< M >^W$ записывается в виде произведения конечного числа степеней элементов множества M с показателями из W. Действительно, утверждение справедливо, если G

абелева (т.е. W –модуль). Предположим, что оно верно для W–группы G/G_k, имеющей класс нильпотентности, меньший, чем G. Тогда произвольный элемент g из G имеет вид $g = a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \ldots a_{i_m}^{\lambda_m} g_k$, где $g_k \in G_k$.

Значит, достаточно показать, что любой элемент из G_k есть слово от степеней элементов множества M с показателями из W. В самом деле, G_k порождается коммутаторами вида $[x,y]$, где $x \in G$, $y \in G_{k-1}$, а так как эти коммутаторы содержатся в центре, то достаточно показать, что произвольный коммутатор такого вида есть слово от степеней элементов M с показателями из W. Пусть

$$x = a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \ldots a_{i_m}^{\lambda_m} g_k \quad \text{и} \quad y = a_{j_1}^{\mu_1} \ldots a_{j_n}^{\mu_n} g'_k, \quad g_k, g'_k \in G_k.$$

Тогда

$$[x,y] = \left[a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \ldots a_{i_m}^{\lambda_m} g_k, a_{j_1}^{\mu_1} a_{j_2}^{\mu_2} \ldots a_{j_n}^{\mu_n} g'_k \right] = \left[a_{i_1}^{\lambda_1} a_{i_2}^{\lambda_2} \ldots a_{i_m}^{\lambda_m}, a_{j_1}^{\mu_1} a_{j_2}^{\mu_2} \ldots a_{j_n}^{\mu_n} \right],$$

так как g_k, g'_k содержатся в центре. Но этот коммутатор есть слово от степеней элементов множества M с показателями из W, что и требовалось показать.

Отсюда следует также, что $< M >^W$ состоит из всех элементов группы, равных произведениям конечного числа степеней элементов множества M с показателями из W.

Если $< M >^W = G$, множество M назовем системой W–образующих группы G.

ТЕОРЕМА 1.2.3. *Если $G = < x_1, x_2, \ldots, x_n >^W$ –конечно порожденная W–группа, то простые коммутаторы $[y_1, y_2, \ldots y_k]$ (то G_{k+1}), где y_i некоторые из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем не обязательно различные, служат системой W–образующих для W–группы G_k / G_{k+1}.*

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ теорема очевидна. Пусть она верна для $k-1$. Подгруппа G_k порождается всеми коммутаторами $c=[a_1,a_2,..,a_{k-1},a_k]$, где $a_i \in G$. Но $c=[[a_1,...,a_{k-1}],a_k]$ и $[a_1,a_2,...,a_{k-1}]\in G_{k-1}$, откуда, в силу предположения индукции, $[a_1,a_2,...,a_{k-1}]=u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ...u_n^{\lambda_n} \upsilon$, где $\lambda_i \in W$, $u_1, u_2,..., u_n$ – коммутаторы вида $[y_1,...,y_{k-1}]$, причем y_i – это некоторые из элементов x_i и $\upsilon \in G_k$.

Поэтому

$$c=\left[u_1^{\lambda_1} ...u_n^{\lambda_n} \upsilon,a_k\right]=\left[u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ...u_n^{\lambda_n}, a_k\right]\left[u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ...u_n^{\lambda_n}, a_k,\upsilon\right][\upsilon,a_k]=$$

$$=\left[u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} ...u_n^{\lambda_n},a_k\right](mod\, G_{k+1}),$$

так как

$$\left[u_1^{\lambda_1} ...u_n, a_k,\upsilon\right]\in G_{k+1} \text{ и } [\upsilon,a_k]\in G_{k+1}.$$

Но $a_k = x_{i_1}^{\eta_1} x_{i_2}^{\eta_2} ...x_{i_m}^{\eta_m}$, $\eta_i \in W, u_i \in G_{k-1}$, откуда, повторяя предыдущие рассуждения, получаем $c=\prod\left[u_j^{\lambda_j}, x_{is}^{\eta_s}\right](mod\, G_{r+1})$. Кроме того,

$$\left[u^{\lambda},x^{\eta}\right]=[u,x]^{\lambda\eta}\ (mod\, G_{k+1}).$$

Следовательно, W – группа G_k / G_{k+1} порождается коммутаторами вида $[u,x](mod\, G_{k+1})$ или $[y_1,...,y_{k-1},x_{ir}]\,(mod\ G_{K+1})$.

ТЕОРЕМА 1.2.4. *Конечно порожденная W-группа $G=\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle^W$ нильпотентна и имеет тот же класс, что и абстрактная подгруппа $H=\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$.*

Действительно, пусть с-класс нильпотентности группы H. По теореме 1.2.3 факторгруппа G_k / G_{k+1} порождается простыми коммутаторами

$[y_1, y_2, \ldots, y_{\bar{m}}] \pmod{G_{k+1}}$, где y_i – некоторые из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если $k = c+1$, то коммутатор $[y_1, y_2, \ldots, y_c, y_{c+1}] = 1$ и, следовательно, $G_{c+1} = G_{c+2} = \ldots = 1$. Отсюда следует, что с- класс нильпотентности группы G.

1.3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОММУТАТОРОВ

Напомним некоторые известные факты [3], [4], [20], [61];

Пусть G - произвольная группа

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots \qquad (1.3.1)$$

- ее нижняя центральная цепь. Если для некоторого натурального n подгруппа G_{n+1} оказывается единичной, то W-группа G называется n– ступенно нильпотентной (класса n) или, короче, n–нильпотентной . Ее нижней центральной цепью служит конечный ряд

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset e \qquad (1.3.2.)$$

Коммутатор $x_1^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2$ пары элементов x_1 и x_2 из группы G обозначают через $[x_1, x_2]$. Простой (правонормированный) коммутатор, составленный из m элементов $x_1, \ldots, x_m$ группы G определяют индуктивно

$$[x_1, \ldots, x_m] = [[x_1, \ldots, x_{m-1}], x_m] \qquad (1.3.3.)$$

W-подгруппа $G_m (m = 2,3,\ldots)$ из (1.3.2.) порождается всевозможными простыми коммутаторами вида (1.3.3):

$$G_m = \langle [x_1, \ldots, x_m] \rangle. \qquad (1.3.4)$$

Предпоследний член G_n ряда (1.3.2.) лежит в центре $Z(G)$группы G.

Группа G_{m-1} / G_m лежит в центре фактор-группы $G / G_m (m = 2,3,\ldots)$.

Предположим, что элементы g и g' из группы G связаны соотношением

$$g = g' g_m,$$

где g_m - некоторый элемент из G_m. Тогда это соотношение удобно записывать в виде

$$g = g'(mod\, G_m),$$

или просто

$$g = g'(G_m).$$

Если W-группа G порождается элементами $x_1, x_2, \ldots$, то фактор-группа $G_{m-1}/G_m (m = 2,3,\ldots)$ порождается всевозможным простым коммутаторами $[y_1, \ldots, y_{m-1}]\,(G_m)$, где y_i - некоторые (не обязательно различные) из образующих $x_1, x_2, \ldots$.

Если группа G конечно порожденная, то фактор-группа

$$G_{m-1}/G_m (m = 2,3,\ldots)$$

обладает тем же свойством.

Мы используем понятие веса $w(k)$ коммутатора k из группы G. Вес $w(k)$ определяют рекуррентно: элементам g из группы G приписывают вес $w(g) = 1$; вес коммутатора $k = [g_1, g_2]$ считают равным сумме

$$w(k) = w(g_1) + w(g_2)$$

весов элементов g_1, g_2, составляющих этот коммутатор. Естественно, что вес $w(x_i)$ каждого из образующих $x_i (i = 1,2,\ldots)$ группы G равен единице. Из самого определения следует, что вес элемента, являющегося в группе коммутатором, зависит от формы записи этого коммутатора.

Каждый коммутатор k веса $w(k) = m$ лежит в m-м члене G_m цепи (1.3.1). Поэтому, в силу 1.3.1, коммутатор k представим в виде некоторого произведения степеней простых коммутаторов того же веса m.

Мы будем часто пользоваться известными тождествами для коммутаторов:

$$[x_1, x_2] = [x_2, x_1]^{-1}, \qquad (1.3.5)$$

$$[x_1, x_2 x_3] = [x_1, x_3][x_1, x_2][x_1, x_2, x_3], \qquad (1.3.6)$$

$$[x_1 x_2, x_3] = [x_1, x_3][x_1, x_3, x_2][x_2, x_3], \qquad (1\,3.7)$$

$$[x_1,x_2^{-1}]=[x_1,x_2]^{-1}[[x_1,x_2]^{-1},x_2^{-1}], \qquad (1.3.8)$$

$$[x_1^{-1},x_2]=[x_1,x_2]^{-1}[[x_1,x_2]^{-1},x_1^{-1}], \qquad (1.3.9)$$

В дальнейшем используется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.1 *Пусть $G_m(m=2,3,...)$ члены нижней центральной цепи группы G. Тогда для любого простого коммутатора $[x_1^{\alpha_1},...,x_m^{\alpha_m}]$ из G_m справедливо сравнение*

$$[x_1^{\alpha_1},...,x_m^{\alpha_m}]=[x_1,...,x_m]^{\alpha_1...\alpha_m}(G_{m+1}) \qquad (1.3.10)$$

Доказательство следует из отмеченного выше и из равенства: $G_{n+1}=e$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.2. *Пусть $G=<a_1,a_2,...>$ - n-нильпотентная W-группа и G_n- предпоследний член ее нижнего центрального ряда. Рассмотрим в G подгруппу $G^{\lambda}=<a_1^{\lambda},a_2^{\lambda},...>$, порожденную λ-ми степенями, $\lambda\in Z$ образующих $a_i(i=1,2,...)$. Тогда любой коммутатор веса n из $(G^{(\lambda)})_n$ выражается через λ^n-е степени коммутатора того веса из G_n, записанные через первые степени a_i.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу тождеств (1.3.5.) – (1.3.8.), следствие достаточно доказать для любого простого коммутатора $[x_1^{\lambda},...,x_1^{\lambda}]$ веса n из $(G^{(\lambda)})_n$. Но для такого коммутатора следствие 1.3.1. дает точное равенство.

$$[x_1^{\lambda},...,x_n^{\lambda}]=[x_1,...,x_n]^{\lambda^n}.$$

Этим следствием 1.3.2 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.3. *Любой простой коммутатор $k=[x_1^{\alpha_1},...,x_m^{\alpha_m}]$ веса m из n-нильпотентной группы $G=<a_1,a_2,...>$ выражается в виде некоторого произведения простых коммутаторов веса не меньшего чем m, относительно первых степеней образующих $a_1,a_2,...$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (1.3.5.) – (1.3.7.) следует, что переход от заданного коммутатора k веса m к коммутаторам веса, не меньшего чем m, происходит за счет снижения степени α_l элементов x_i, составляющих коммутатор k. Многократным применением предложения 1.3.1 к коммутаторам из G_{m+1}, G_{m+2} и прочим, появляющимся в правой части сравнений, удается выразить коммутатор k в виде произведения коммутаторов, записанных через первые степени элементов $x_1,\dots,x_m$. Допустим, что хотя бы один из x_j является некоторым словом

$$x_j = a_{j1}^{a_{j1}} \dots a_{js}^{a_{js}}$$

относительно образующих a_i. Тогда новым применением формул (1.3.5.) – (1.3.9) и повторением описанного выше процесса удается получить требуемый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.2. *Пусть G- нильпотентная W-группа класса n, $a_1, a_2,\dots,a_n$, - любые ее элементы и p - простое число, $p > n$. Тогда из всякого коммутатора $[a_1^{p^{\alpha_1}}, a_2^{p^{\alpha_2}}, \dots a_k^{p^{\alpha_k}}]$ извлекается корень степени p^γ, где $\gamma = \sum_1^k a_l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свой собирательный процесс, Ф. Холл [34] показал, что при простом p, большем класса n группы G, любое выражение $(g_1 g_2 \dots g_r)^{p^\alpha}$, где $g_l \in G(i = 1,\dots,r)$, представимо в виде

$$(g_1 g_2 \dots g_r)^{p^\alpha} = g_1^{p^\alpha} g_2^{p^\alpha} \dots g_r^{p^\alpha} \upsilon_1^{p^\alpha} \upsilon_2^{p^\alpha} \dots \upsilon_t^{p^\alpha},$$

где $\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_l$ - некоторый элементы из коммутатора подгруппы, порожденной элементами $g_1, g_2, \dots, g_r$. Опираясь на этот результат А.Л. Шмелькин ([33]) установил, что при указанном соотношении между p и n все элементы вида g^{p^α} из G образуют в G подгруппу. Это означает, что из каждого элемента вида $g_1^{p^\alpha} g_2^{p^\alpha} \dots g_r^{p^\alpha}$ извлекается корень степени p^α:

$$g_1^{p^\alpha} g_2^{p^\alpha} \dots g_r^{p^\alpha} = (g_1 g_2 \dots g_r \cdot u_1 u_2 \dots u_8)^{p^s} \qquad (1.3.11.)$$

где каждое из $u_1, u_2, \dots, u_s$ является произведением степени коммутаторных форм от элементов $g_1, g_2, \dots, g_r$.

Представим теперь в виде (1.3.11) коммутатор $[a^{p^\alpha}, b^{p^\beta}]$ веса два:

$$[a^{p^\alpha}, b^{p^\beta}] = a^{-p^\alpha} b^{-p^\beta} a^{p^\alpha} b^{p^\beta} = (a^{-p^\alpha} b^{-1} a^{p^\alpha} b u_1 u_2 \dots u_m)^{p^\beta} \ (1.3.12).$$

Здесь каждое из u_l - произведение степени коммутаторных форм от элементов $a^{-p\alpha} b^{-1} a^{p\alpha}$ и b:

$$u_i = \prod_j f_{jj}^{\varepsilon}$$

Естественно, что каждую из форм f_j можно считать правонормированным коммутатором:

$$f_j = [g_{ji}, g_{j2}, \dots, g_{ji_j}].$$

Пусть, для определенности,

$$g_{j1} = a^{-p^\alpha} b^{-1} b^{p^\alpha}, \quad g_{j2} = b$$

(при $g_{j1} = b, \quad g_{j2} = a^{-p^\alpha} b^{-1} a^{p^2}$ рассуждения аналогичны).

Тогда

$$[g_{j1}, g_{j2}] = a^{-p\alpha} b a^{p^\alpha} b^{-1} a^{-p^\alpha} b^{-1} a^{p^\alpha} b =$$
$$= (a^{-1})^{p^\alpha} (bab^{-1})^{p\alpha} (a^{-1})^{p^\alpha} (b^{-1}ab)^{p^\alpha} = g_{j_0}^{p^\alpha}, \qquad g_{j_0} \in G'$$

Это означает, что из $[g_{j_1}, g_{j_2}]$ извлекается корень степени p^α. Но тогда тем же путем убеждаемся, что корень p^α-й степени извлекается из коммутатора

$$[g_{j1}, g_{j2}, g_{j3}] = [g_{j0}^{p^\alpha}, g_{j\alpha}] = (g_{j0}^{-1})^{p^\alpha} (g_{j3}^{-1} g_{j0} g_{j3})^{p^\alpha}$$

(здесь $g_{j3} = a^{-p^\alpha} b^{-1} a^{p^\alpha}$ или b) и т.д. Следовательно, корень той же степени извлекается из f_j а потому и из u_i:

$$u_i = w_i^{p^\alpha} \qquad (i = 1,\dots,m).$$

Таким образом, выражение (1.3.12) можно переписать в виде

$$[a^{p^\alpha}, b^{p^\beta}] = ((a^{-1})^{p^\alpha}(b^{1}ab)^{p^\alpha} w_1^{p^\alpha} w_1^{p^\alpha} \dots w_m^{p^\alpha} P^{p^\beta}.$$

Остается извлечь корень p^α-й степени из выражения

$$(a^{-1})^{p^\alpha}(b^{-1}ab)^{p^\alpha} w_1^{p^\alpha} \dots w_m^{p^\alpha} = z^{p^\alpha}$$

и тем доказать, что из коммутатора $[a^{p^\alpha}, b^{p^\beta}]$ извлекается корень степени $p^{\alpha+\beta}$, т.е. $[a^{p^\alpha}, b^{p\beta}] = z^{p^{\alpha+\beta}}$.

Рассмотрим теперь произвольный коммутатор $[a_1^{p^{\alpha_1}}, a_1^{p^{\alpha_2}}, \dots, a_k^{p_k}]$ веса k. Выше было показано, что

$$[a_1^{p^{\alpha_1}}, a_2^{p^{\alpha_2}}] = z_1^{p^{\alpha_1+\alpha_2}}.$$

Аналогично можно показать, что

$$[a_1^{p^{\alpha_1}}, a_2^{p^{\alpha_2}}, a_3^{p^{\alpha_3}}] = [z_1^{p^{\alpha_1+\alpha_2}}, a_3^{p^{\alpha_3}}] = z_2^{p^{\alpha_1+\alpha_3}}.$$

Следовательно становится очевидной индукция, приводящая к требуемому результату:

$$[a_1^{p^{\alpha_1}}, a_2^{p^{\alpha_2}}, \dots, a_k^{p^{\alpha_k}}] = z_{k-1}^{p^\gamma}, \qquad \gamma = \sum_1^k \alpha_i.$$

Предложение доказано.

2. О НЕКОТОРЫХ РЕШЕТКАХ СВЯЗАННЫХ С W-СТЕПЕННЫМИ ГРУППАМИ

2.1. W-СТЕПЕННЫЕ ГРУППЫ С МОДУЛЯРНОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДГРУПП

Решетка L называется модулярной, если любых $x, y, x \in L$ выполняются условия модулярности:

$$\text{Если } x \le z, \text{ то } x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z.$$

ЗАМЕЧАНИЯ: Пусть L некоторая решетка и $x, y, x \in L$.

(i) Если $x \le z$, то $x \le (x \cup y) \cap z$ и $y \cap z \le (x \cup y) \cap z$, поэтому $x \cup (y \cap z) \le (x \cup y) \cap z$ выполняется в любой решетке. Следовательно условие модулярности эквивалентно условию $(x \cup y) \cap z \le x \cup (y \cap z)$.

(ii) Каждая дистрибутивная решетка модулярна. Напомним, что решетка дистрибутивна, если условия дистрибутивности выполняются:

(1) $x \cup (y \cap z) = (x \cap y) \cap (x \cup z)$,

(2) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cap (x \cup z)$.

Если L дистрибутивна и $x \le z$, то тогда $x \cup z = z$ и следовательно,

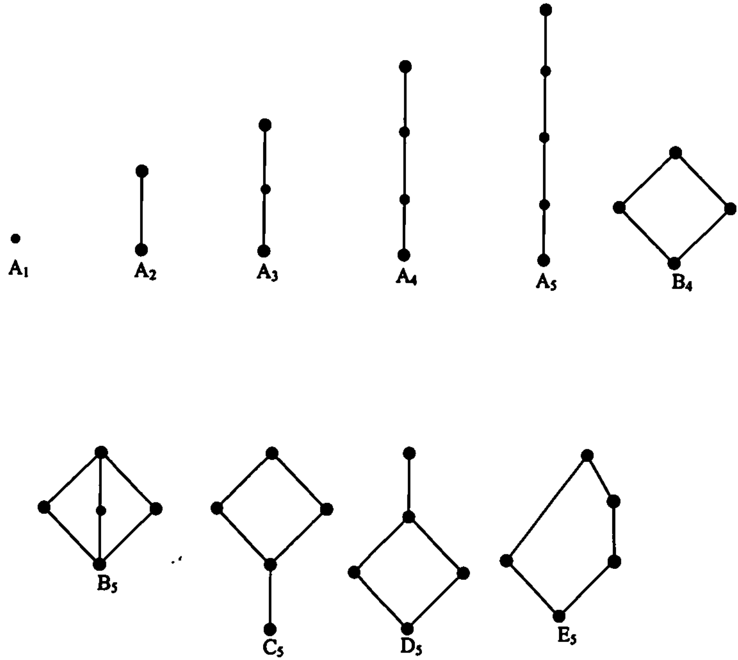
$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) = (x \cup y) \cap z.$$

(iii) Если L модулярная решетка, то

$$x \cup (y \cap (x \cup z)) = (x \cup y) \cap (x \cup z).$$

Так как $x \le x \cup z$. Покажем обратное. Если равенство выполнено в L, то условие $x \le z$ влечет $x \cup z = z$ и следовательно, $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$. Таким образом, условие модулярности можно записать через равенство.

Каждое конечное частично диорядочное множество P и следовательно каждую конечную решетку можно реализовать через некоторую «плоскую» диаграмму. Действительно, если $x, y \in P$, $x < y$, то этим элементам можем сопоставить точки на плоскости P_x, P_y при этом точки P_x будет «ниже» точки P_y и соединим их отрезком. Тогда все конечные решетки из n элементов, $n \le 5$ исчерпываются следующими диаграммами Хессе.



Легко видеть, что единственная немодулярная решетка из пяти или меньше элементов, эта решетка типа E_5-пентагон.

ТЕОРЕМА 2.1.1. (Г. Гертцер [54], Р. Шмидт [61]). *Решетка L тогда и только тогда модулярна, когда она не содержит подрешетку изоморфную E_5.*

Будем говорить, что α модулярный элемент в L и писать $\alpha \, mod \, L$, если

(i) $x \cup (\alpha \cap z) = (x \cup \alpha) \cap z$, для всех $x \leq z$;

(ii) $\alpha \cup (y \cap z) = (\alpha \cup y) \cap z$, для всех $\alpha \leq z$.

Подгруппа M W-степенной группы G называется модулярной, если M модулярной элемент в решетке всех W-подгрупп G.

Понятие модулярного элемента было введено А.Г. Курошем (1940).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.1. *Пусть G некоторая W-степенная группа. Тогда*

(a) если N нормальный делитель в G, то $NH = HN$ для всех $H \in L(G)$;

(b) если $M \le G$ и $MH = HM$ для всех $H \in L(G)$, то $H \bmod L(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (a) Если N нормальный делитель в G, то $Nx = xN$ для любого $x \in G$ и поэтому $NH = HN$ для любого $H \in L(G)$.

(b) Пусть $X \le Z \le G$. Тогда ясно, что $X \cup (M \cap Z) \le (X \cup M) \cap Z$.

Более того, если $g \in (X \cup M) \cap Z$, то так как $X \cup M = XM$ найдутся $x \in X$ и $m \in M$ такие, что $g = xm$. Так как $X \le Z$ имеем $n. = x^{-1}g \in Z$ и поэтому $g = xm \in X \cup (M \cap Z)$. Далее $X \cup (M \cap Z) = (X \cup M) \cap Z$ и условие (i) выполняется. Предложим, что $Y, Z \in L(G)$ и $M \le Z$. Тогда $M \cup (Y \cap Z) \le (M \cup Y) \cap Z$ и из условия $g = my \in (MUY) \cap Z$ $m \in M \le Z$ находим, что $y \in Z$.

Поэтому $g \in M \cup (y \cap Z)$ и (ii) выполнено. Следовательно M модулярный элемент в $L(G)$. Предложение доказано.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Решетка нормальных делителей и решетка всех подгрупп абелевой W-степенной группы G модулярны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Заметим предварительно, что множество нормальных делителей является решеткой. Обозначим ее через $C(G)$. Так как нормальные делители модулярные элементы в $L(G)$ они тем более будут модулярными в $C(G)$ в подрешетке $L(G)$. Следовательно, каждый элемент $C(G)$ модулярен т.е. $C(G)$модулярна. Если Gабелева, то тогда $C(G) = L(G)$. Теорема доказана.

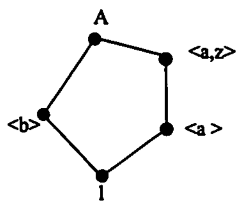
ТЕОРЕМА 2.1.3. *W-степенная группа G над произвольным биномиальным кольцом W тогда и только тогда обладает модулярной решеткой подгрупп, когда она абелева.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону теорема очевидна в силу предложения 2.1.2.

Предложим, что $L(G)$ модулярная решетка. Если G неабелева в силу локальной нильпотентности в ней найдутся элементы $x, y \in G$ такие, что $A = < x, y >$ неабелева и нильпотентна класса 2, т.е.

$$[x,y] = Z \neq 1, \qquad <[x,y]> = Z(A).$$

Это в свою очередь означает наличие в решетке $L(A)$ и следовательно в решетке $L(G)$ пентагона



Теорема доказана.

2.2. ДИСТРИБУТИВНЫЕ РЕШЕТКИ W-ПОДГРУПП

Решетка L называется дистрибутивной, если для любых $x, y, z \in L$ выполняется тождества дистрибутивности:

(1) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$,

(2) $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$.

Заметим, что так как дистрибутивность определяется через тождества подрешетка, прямая сумма и гомоморфный образ дистрибутивной решетки дистрибутивны.

Более того решетка дистрибутивна, если в ней выполняется одно из отмеченных выше тождеств. Действительно, пусть выполняется (1), тогда для $x, y, z \in L$ имеем

$$(x\cap y)\cup(x\cap z)=[(x\cap y)\cup x]\cap[(x\cap y)\cup z]=$$
$$=x\cap[z\cup(x\cap y)]=x\cap[(z\cap x)\cap(z\cup y)]=x\cap(y\cup z)$$

Следовательно выполняется (2). Индикация $(2)\Rightarrow(1)$ доказывается аналогично.

W-степенную группу G назовем локально циклической, если W подгруппа $A\subset G$ порожденная конечным числом элементов порождается одним элементом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.1. *Если G локально циклическая W-степенная группа над произвольным биномиальным кольцом W, то решетка $L(G)$ дистрибутивна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A,B,c\in L(G)$ произвольные W-подгруппы. Тогда $A\cap B\subseteq A$, $A\cap B\subseteq B\subseteq B\cup C$, значит $A\cap B\subseteq A\cap(B\cup C)=U$ следовательно,

$$V=(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)=U.$$

Докажем обратное включение $U\subseteq V$. Рассмотрим произвольный элемент

$$g\in U,\ g=a=bc,\ a\in A,\ \ b\in B,\ c\in C.$$

Поскольку G локально циклична $u^{\alpha}=b,\ u^{\beta}=c$, $\alpha,\beta\in W$, так как $<b,c>=<u>$. С другой стороны $b^m c^n=u$, $u^{m\alpha+n\beta}=u$, $a=bc=u^{\alpha+\beta}$.

Предложим, что

$$x=a^{\alpha}=u^{\alpha(\alpha+\beta)}=b^{\alpha+\beta}\in A\cap B,$$
$$y=a^{\beta}=u^{\beta(\alpha+\beta)}=a^{\alpha+\beta}\in A\cap C.$$

Тогда

$$a=u^{\alpha+\beta}=u^{(\alpha+\beta)(m\alpha+n\beta)}=u^{m\alpha(\alpha+\beta)+n\beta(\alpha+\beta)}=x^m\cdot y^n.$$

Следовательно $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $U\subseteq V$.

Предложение доказано.

Пятиэлементная решетка B_5 называется диамантом. Справедлива (см. Г. Гретцер [54], Г. Биркгоф [55]).

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Решетка L тогда и только тогда будет дистрибутивной, когда она не содержит диамант.*

ТЕОРЕМА 2.2.2. *W-степенная группа G над кольцом главных идеалов W тогда и только тогда обладает дистрибутивной решеткой W-подгрупп когда она локально циклична.*

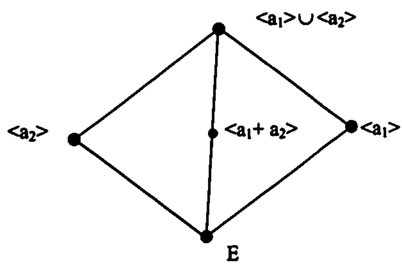
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону теорема является следствием предложения 2.3.1.

Предположим, что решетка подгрупп $L(G)$ дистрибутивна. Тогда W-группа G окажется абелевой (теорема 2.2.1).

Допустим, что в G имеется конечно-порожденная (но не однопорожденная) подгруппа A. Разложим A в прямое произведение циклических подгрупп (см. С. Ленг).

$$A = < a_1 > + < a_2 > + ... + < a_n >$$

В этом случае в $L(A)$ содержится диамант



Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1. Теорема не дает гарантии того, чтобы из дистрибутивности решетки подгрупп, в общем случае, следовала локальная цикличность. Существуют кольца для которых решетка подмодулей не локально циклических модулей дистрибутивны. Однако для биномальных колец вопрос открыт.

Из доказанного выше следует.

ТЕОРЕМА 2.3.3. *W-степенная группа G над кольцом главных идеалов тогда и только тогда циклична, когда решетка $L(G)$ дистрибутивна с условием максимальности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно и легко доказуема, что группа (W-степенная группа) решетка подгрупп которой удовлетворяет условию максимальности конечно-порождена. Так как $L(G)$ дистрибутивна и удовлетворяет условию максимальности G локально циклична и конечно порождена, следовательно циклична. Обратно если G циклична $L(G)$ дистрибутивна (теорема 2.3.2). Более того, если $1 < H \leq G$, то решетка $L(G/H)$имеет конечную длину. Ясно, что $L(G)$ удовлетворяет условию максимальности.

Теорема доказана

2.3. РЕШЕТКА СМЕЖНЫХ КЛАССОВ $CL(G)$

Пусть G произвольная W-степенная группа над биномиальным кольцом W. Рассмотрим множество $CL(G)$ состоящее из всех смежных классов G по всем W-подгруппам и пустого множества $\varnothing$. На $CL(G)$ введем частичный порядок:

$$X_1 \subseteq X_2 \Leftrightarrow X_1 \leq X_2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.1. *Множество $CL(G)$ является полной решеткой относительно операции «$\bigcup$» и «$\bigcap$», которые определяются следующим образом: для $U_\alpha = a_\alpha \cdot A_\alpha$, $\alpha \in \overline{J}$*

(i) $\bigcap\limits_{\alpha\in\overline{J}} U_\alpha$ - теоретико-множественное пересечение;

(ii) $\bigcup_{\alpha\in\bar{J}} U_\alpha = a_\beta < A_\alpha, a_\alpha a_\beta^{-1},\ \alpha\in\bar{J} >$, *где* β *некоторый фиксированный индекс* $\bar{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{U_\alpha,\ \alpha\in\bar{J}\}\subseteq CL(A)$.

Предположим, что $\bigcap U_\alpha \neq \varnothing$. Тогда $\exists a\in A$ для которого $a\in U_\alpha$, $\alpha\in\bar{J}$. Более того $U_\alpha = a\cdot A_\alpha$ для каждого α. Мы должны показать, что $a(\bigcap_{\alpha\in\bar{J}} A_\alpha)$ точная нижняя грань.

Пусть $b\cdot B$ смежный класс для которого $b\cdot B\le aA_\beta$ для всех $\beta\in\bar{J}$. Тогда имеем $ba^{-1}\in A_\beta$ и $B\le A_\beta$. Действительно, $b\in aA_\beta \Rightarrow b = ax\in A_\beta \Rightarrow ba^{-1}\in A_\beta$.

Пусть $d\in B$. Имеем $b\cdot d\in A_\beta \Rightarrow bd = ac$, $c\in A_\beta \Rightarrow d(ab^{-1})c,\ d\in A_\beta$.

Ясно, что $B\subseteq \bigcap_{\alpha\in\bar{J}} A_\alpha$, $ba^{-1}\in \bigcap_{\alpha\in\bar{J}} A_\alpha$.

Далее $b\cdot B\subseteq b\cdot(\bigcap_{\alpha\notin\bar{J}} A_\alpha) = a(ba^{-1})[\bigcap_{\alpha\notin\bar{J}} A_\alpha] = a[\bigcap_{\alpha\notin\bar{J}} A_\alpha] = \bigcap_{\alpha\notin\bar{J}} U_\alpha$ и следовательно $a[\bigcap_{\alpha\notin\bar{J}} A_\alpha]$ точная нижняя грань.

Если теперь это пересечение пустое множество, то мы можем предполагать $\varnothing$ как нижнюю точную грань.

Докажем теперь существование точной верхней грани. Зафиксируем некоторый индекс $\beta\in\bar{J}$. Рассмотрим W-подгруппу $< A_\alpha, a_\beta a_\alpha^{-1},\ \alpha\in\bar{J} >$.

Очевидно, что $a_\gamma A_\gamma \le a_\beta < A_\alpha, a_\beta a_\alpha^{-1} >$ верхняя грань для каждого $\gamma\in\bar{J}$.

Пусть $b\cdot B$ смежный класс для которого $\forall_\gamma\in\bar{J}$ имеем $a_\gamma b_\gamma \le b\cdot B$. Так как $a_\gamma b^{-1}\in B$ находим

$$a_\alpha a_\beta^{-1} = (a_\alpha b^{-1})^{-1}\in B \Rightarrow < A_\alpha, a_\alpha a_\beta^{-1}, \alpha\in\bar{J} > = \Omega\le B \Rightarrow a_\beta\Omega\le a_\beta B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\beta\Omega\le b\cdot(A_\beta b^{-1})B \Rightarrow a_\beta\Omega\le b\cdot B$$

Следовательно, $a_\beta \Omega$ точная верхняя грань. Ясно, что фиксация индекса β не меняет ситуацию.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.2. *Пусть G произвольная W-степенная группа над биномиальным кольцом W. Решетка $CL(G)$ тогда и только тогда разложима в прямое произведение когда и G циклическая группа экспоненты 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим решеточный изоморфизм

$$\varphi : CL(G) \to \overline{L} = L_1 \times L_2.$$

Так как $\varnothing, 1 \in CL(G)$, в решетках $\overline{L}$, L_1, L_2 найдутся наибольший и наименьший элементы. Обозначим их:

$$\overline{E}, \overline{O} \in \overline{L},\ E_1, O_1 \in L_1,\ E_2,\ O_2 \in L_2.$$

Предположим, что

$$\varphi(bB) = (E_1, O_2) = \overline{E}_1 \in \overline{L},$$

$$\varphi(cC) = (O_1, E_2) = \overline{E}_2 \in \overline{L}.$$

Ясно, что для каждого $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \overline{L}$ имеем $\overline{X} = (\overline{X} \cap \overline{E}_1) \cup (\overline{X} \cap \overline{E}_2)$.

Следовательно для каждого $a \in A$ находим

$$a = [a \cap (bB)] \cup [a \cap (cC)],$$

из чего находим $G = (bB) \cup (cC)$.

Покажем, что $B = C$. Существует $a \in G$ для которого $aB \le cC$. Предложим обратное. Тогда

$$[aB] \cap [bB] \neq \varnothing \Rightarrow ab_1 = bb_2 \Rightarrow a \in bB, \forall a \in G.$$

Поэтому

$$B = A \Rightarrow B = A \Rightarrow \exists a, aB \le cC \Rightarrow B \le C.$$

Аналогично, $B \le C$ и поэтому $B = C$. Таким образом имеем $G = (b \cdot B) \cup (cB)$.

Это в свою очередь дает

$$O \in \begin{cases} bB, \\ или \\ cB \end{cases}$$

Если $O \in bB$, то $b \in B$. Достаточно очевидно, что $c \in B$, так как иначе $G = B$ и $G = B \cup C$. Мы должны показать, что B максимален в G. Для этого достаточно показать, что B максимальная подгруппа абелевой W группы G. Предположим, что существует подгруппа Z для которой $B \subset Z \subset G$. Поэтому существует $g \in Z$, $g \notin B$. С другой стороны $G = B \cup (cB)$ влечет

$$g = cB,\ g = cu,\ u \in B \Rightarrow c = gu^{-1},\ \ g,u \in Z,\ c \in Z.$$

Так как $B \subset Z$ и $c \in Z$ находим $B \cup C = Z$, т.е. $G \subseteq Z$. Следовательно, $Z = G$ и B максимальная W-подгруппа и поэтому максимальна и G, Предположим теперь, что одна из решеток L_2 и L_2 содержит более двух элементов. Тогда существует $Y_1 \in L_2$ для которого $E_1 \supset Y_1 \supset O_1$. В $\overline{L}$ рассмотрим цепь:

$$(O_1, E_2) \supset (Y_1, E_2) \supset (E_1, E_2).$$

Тогда для изоморфизма φ^{-1} имеем

$$\varphi^{-1}[(O_1, E_2)] = bB \subset \varphi^{-1}[(Y_1, E_2)] = f \cdot F \subset \varphi^{-1}[(E_1, E_2)] = G.$$

Это означает, что имеем строгие включения $B \subset F \subset G$, что противоречиво. Следовательно решетки L_1 и L_2 состоят всего лишь из двух элементов, поэтому $CL(G)$ содержит четыре элемента, что в свою очередь означает, что $G =< x >$ - циклическая группа экспоненты 2.

ТЕОРЕМА 2.3.1. *Пусть G W–степенная группа над кольцом W. $CL(G)$ решетка смежных классов. Тогда*

(i) $CL(G)$ модулярна тогда и только тогда, когда W поле и G циклична;

(ii) $CL(G)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда она разложима в прямое произведение;

(iii) Если W кольцо главных идеалов, то $CL(G)$ полумодулярна снизу тогда и только тогда, когда она модулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *(i)* для любых $a,b \in G$, $a \neq 1$ имеем

$[(b<a>) \cup 0] \cap <a> = [(b<a>) \cap <a>] \cup 0,$

$(b<a>) \cup 0 = <a> \cup <b>.$

Далее для любого $a \neq 0$ имеем,

$<a> = (b<a>) \cup <a> \Rightarrow b<a> \leq <a>, b \in <a> \Rightarrow <a> = G.$

Следовательно, каждый ненулевой элемент порождает G.

Предположим теперь, что G циклична и W поле. Покажем, что $CL(G)$ модулярна. Убедимся в справедливости равенства

$[(aX) \cup (bY)] \cap (bZ) = [(aX) \cap (bY)] \cup (bY)$

где X, Y, Z, $Y \subseteq Z$ подгруппы и a, $b \in G$.

Учитывая, что G имеет всего лишь две подгруппы G и 1 имеем следующую таблицу:

	X	Y	Z	$[(aX) \cap (bY)] \cap (bZ)$	$[(aX) \cap (bZ)] \cup (bY)$
1	G	G	G	G	G
2	G	1	G	G	G
3	G	1	1	B	B
4	1	G	G	G	G
5	1	1	G	$\begin{cases} G, & a \neq b \\ a, & a = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} G, & a \neq b \\ a, & a = b \end{cases}$
6	1	1	1	b	b

Следовательно, $CL(G)$ модулярна. *(i)* доказана.

(ii) Необходимость. Пусть $a \neq 1$ произвольный элемент. Имеем:

$(a \cup a^2) \cap a^3 = (a \cap a^3) \cup (a^3 \cap a^2).$

Ясно, что $a \cup a^2 = <a>$. Ясно также, что $a^3 \cap a^2 = 1$, т.к. иначе $a=1$.

Таким образом имеем

$<a> \cap a^3 = a \cap a^3 \Rightarrow a^3 = a \cap a^3 \Rightarrow a^3 = a, \quad a^2 = 1$

т.е. каждый ненулевой элемент имеет экспоненту (порядок) 2.

Пусть теперь $b \in G, b \neq 1$. Тогда

$$\begin{array}{ccc} (<ab> \cup <a>) \cap <b> & = & (<ab> \cap <b>) \cup (<a> \cap <b>) \\ || & & || \\ <b> & = & 1 \end{array}$$

Следовательно G содержит всего лишь два элемента.

(iii) Так как W кольцо главных идеалов найдется максимальная подгруппа $X \subset G$ и элемент $a \notin G$.

Далее, $G=X \cup (aX)$ и G покрывает X. Следовательно, по условию aX покрывает $X \cap (aX)$.

Поэтому $X=1$ это означает, что W есть поле и G циклична.

2.4. НЕКОТОРЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА РЕШЕТКЕ $CL(G)$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.1. *Если W поле, то решетка $CL(G)$ с дополнениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $aX \in CL(G)$ и Y максимальная подгруппа в G содержащая X и пусть $b \in Y$. Тогда $G =< b > \cup Y; \quad Y \cap [bY] = \varnothing$.

Так как $X \subseteq Y$ имеем $X \cap [bY] \subseteq Y \cap [bY] = \varnothing \Rightarrow [aY] \cap [abY] = \varnothing$.

С другой стороны,

$[aX] \cup [abY] = a < X,Y,b >= a < X,Y,aba^{-1} >= G \Rightarrow [aX] \cup [abY]$ наибольший элемент $CL(G)$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.2. *Если W поле то решетка $CL(G)$ с относительными дополнениями тогда и только тогда, когда $L(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из того факта, что каждый замкнутый интервал в решетке с относительными дополнениями является решеткой с относительными дополнениями и из того, что $L(G) \cong [\varnothing, G] \subset CL(G)$.

Докажем достаточность. Рассмотрим интервал $[u,v] \leq L(G)$, где $U = aX, \ v = bY$. Если $U = \varnothing$, то имеем $[u,v] = [\varnothing, bY] \cong [\varnothing, Y] \cong L(Y)$ и так как $L(G)$ решетка с дополнениями, интервал $[u,v]$ также решетка с дополнениями.

Пусть $U \neq \varnothing$. Тогда $[u,v] = [aX, bY] \cong [X,Y]$. Тек как $L(G)$ решетка с относительными дополнениями, мы находим, что интервал $[X,Y]$ и темболее $[U,V]$ решетки с дополнениями. Следовательно каждый интервал в $CL(G)$ с дополнениями. Значит решетка $CL(G)$ с относительными дополнениями.

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.3. *Если W поле, что условие Жордана-Дедекинда выполняется в $CL(G)$ тогда и только тогда, когда оно выполнено в $L(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из того факта, что $L(G)$ совпадает с интервалом $[\varnothing, G] \subseteq CL(G)$.

Для доказательства достаточности предложим, что $U = aX$, $V = bY$, $U > V$.

Построим цепи

$U = A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_{n-1} \supset A_n = V$, (*)

$U = B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_{m-1} \supset B_m = V$ (**)

Каждый элемент $\mu \in A$ определяет автоморфизм $\widetilde{\mu} \in Aut[CL(G)]$ следующим образом $\widetilde{\mu} : CL(G) \to CL(G)$, $\widetilde{\mu} : x \to x\mu$, $\widetilde{\mu} : (U) = U\mu$.

Тогда автоморфизм $\widetilde{a}(a \in G)$ трансформирует цепи (*) и (**) в неуплотняемые цепи между X и Y. Следовательно $m = n$.

Если далее $V = \varnothing$, можем предлагать, что $A_{n-1} = a$, $B_{m-1} = b$.

Тогда $U = aX = bY$ и используя автоморфизм $\widetilde{a} = (-\widetilde{a})$ мы обнаруживаем неуплотняемую цепь длины $n-1$ для (*) и неуплотняемую цепь длины $m-1$ для (**). Оба эти цепи соединяют X и (в нашем случае) $\varnothing = Y$.

Следовательно $m - 1 = n - 1 \Rightarrow m = n$.

Предложение доказано.

3. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

3.1. О НЕКОТОРЫХ НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ ПРИ РЕШЕТОЧНОМ ИЗОМОРФИЗМЕ

Свойства различных алгебраических систем зачастую выявляются путем изучения их подсистем - подгрупп в группе, идеалов в кольцах, промежуточных полей поля расширения и подгрупп его группы Галуа и т.п. Проблематика, связанная с изучением множества всех подгрупп группы G (множество это образует структуру $L(G)$) и получением на этой основе информации о строении самой группы, была открыта работой A. Ротлендер (1928). Эта работа имела своим источником задачи теории расширений, а основным объектом изучения - решетки подгрупп конечных абельных групп. Впоследствии вокруг проблемы определяемости группы структурой своих подгрупп, изоморфизмов этой решетки и многих смежных вопросов возникла общая литература (см. библиографию в монографиях А. Г. Куроша [4], Г. Гретцера [54], Р. Шмидта [61]).

Две группы G и G^{φ} называют структурно изоморфными, если изоморфны структуры $L(G)$ и $L(G^{\varphi})$ их подгрупп. Изоморфизм φ между $L(G)$ и $L(G^{\varphi})$ называют структурным изоморфизмом (проектированием - $\varphi(G)=G^{\varphi}$) между самими группами.

Принято говорить, что группа определяется структурой своих подгрупп (структурно определяется), если она изоморфна всякой группе, которой она структурно изоморфна.

Некоторое свойство группы G (ее подгруппы H) принято называть структурным инвариантом, если оно сохраняется при всякой структурном изоморфизме $\varphi(G)=G^{\varphi}$ группы G, т.е. если это свойство имеет место для каждого образа G^{φ} группы G.

Естественно, что структурным инвариантом оказывается каждое свойство группы G (его называют структурным), которое определяется в терминах структуры $L(G)$. Описание некоторого свойства группы G в терминах $L(G)$ считают решеточной характеристикой G.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.1. *При решеточном изоморфизме $\varphi : L(G) \to L(G_1)$ имеем $Z(G) = Z(\varphi(G)) = Z(G_1)$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.1.3. и из того факта, что подгруппа $A \subseteq Z(G)$ тогда и только тогда, когда для любого $X \in G$ W-подгруппа $< x, A >$-абелева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. *Пусть X и Y W–степенные группы над кольцами W_1 и W_2 соответственно. Будем говорить, что отображение $f{:}X \to Y$ полулинейный изоморфизм относительно изоморфизма $\sigma : W_1 \to W_2$ (σ - полулинейный изоморфизм), если для любых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in W_1$ имеет место равенство*

$$f(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) = f(x_1)^{\sigma(\alpha_1)} f(x_2)^{\sigma(\alpha_2)}$$

и полулинейным антиизоморфизмом

$$f(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}) = f(x_2)^{\sigma(\alpha_2)} f(x_1)^{\sigma(\alpha_1)}.$$

Напомним стандартные обозначения:

$Z(X)$ - центр группы X; $N(A)$ - нормализатор подмножества $A \leq X$; $[A,B]$ - множество всех элементов (коммутаторов) вида $[a,b]$, $a \in A$, $b \in B$; $f{:}L(X) \to L(Y)$ решеточный изоморфизм. Для подмножества $A \leq X$ обозначим через $<A>$ обозначим W–подгруппу порожденную A.

Решетку $L(0,1 \in L)$ назовем решеткой без кручения, если ни один элемент L не покрывает 0. W–степенная группа G называется группой без кручения, если условие $x^{\alpha}=1$, $\alpha \in W$, $x \in G$ влечет, что либо $\alpha=1$, либо $x=1$. Назовем W–степенную группу G чистой, если решетка $L(G)$ без кручения. Ясно, что не для всякой группы G без кручения решеток $L(G)$ без кручения, т.е. не каждая группа без кручения будет чистой. Действительно, если W поле, то любая W–группа G над W без кручения, тогда как она не будет чистой: для любого $x \in G$ решетка $L(<x>)$ имеет вид  – т.е. состоит из двух элементов.

Элемент $x \in G$ назовем чистым, если решетка $L(<x>)$ без кручения; и элементом без кручения, если W–подгруппа $<x>$ без кручения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.2. *Если $f:L(X)\to L(Y)$ решеточный изоморфизм, то следующие условия эквивалентны:*

(i) $f(N(A))=N(f(A))$, для всех $A \trianglelefteq L(X)$;

(ii) $f([A,A])=[f(A),f(A)]$, для всех $A \trianglelefteq L(X)$;

(iii) $f([A,B])=[f(A),f(B)]$, для всех $A,B \in L(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложения. $(i)\Rightarrow(ii)$.

Если $[A,A]\le B\le A\le G$ то $N(B)\ge A$ и следовательно $f(N(B))=N(f(B))\ge f(A)$. Поэтому каждая подгруппа $f(A)/f([A,A])$ является нормальным делителем. Из нильпотентости. C следует, что $f(A)/f([A,A])$ абелева.

Следовательтно, $f([A,A])\ge[f(A),f(A)]$.

Аналогично, $f^{-1}([f(A),\ f(A)])\ge[f^{-1}(fA)),\ f^{-1}(f(A))]=[A,A]$.

Поэтому можем писать

$$[f(A),\ f(A)])\ge f([A,A])\Rightarrow f([A,A])=[f(A),f(A)].$$

$(ii)\Rightarrow(iii)$ Так как

$[A,B]=\cup<[X,Y],X\le A,Y\le B,X,Y$ цикличны $>$ достаточно рассмотреть случай когда A и B оба цикличны. Имеем формулу

$x^{-\alpha}[x^{\lambda},y^{\mu}]x^{\alpha}=[x^{\lambda+\alpha},y^{\mu}][x^{\alpha},y^{\mu}]^{-1}$, что показывает $[A,B]\trianglelefteq A\cup B$

Из этого находим $[A,B]=[A\cup B,A\cup B]$.

$(iii)\Rightarrow(i)$. $B\le N(A)$ тогда и только тогда, когда $[A,B]\le A$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1.1. *Решеточный изоморфизм f переводит центральный ряд в центральный ряд и следовательно, сохраняет класс нильпотентности на подгруппах.*

Подгруппа $A \subseteq G$ называется изолированной, если для любого $x \in G$ имеем $<x>\cap A=1$ либо $<x>\cap A=<x>$. Пересечение всех изолированных групп содержащих A обозначим через $I(A)$. Ясно, что $I(A)$ изолированная подгруппа; назовем ее изолятором A.

3.2. ИЗОЛИРОВАННЫЙ НИЖНИЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ РЯД

Рассмотрим n-нильпотентную W-степенную группу G без кручения. Известны примеры (см., например, [4]), показывающие, что факторы G_m / G_{m+1} нижнего центрального ряда группы G уже могут содержать периодические элементы. В некоторых случаях (с тем, чтобы избежать кручения в факторах) полезно в группе G рассматривать ряд

$$G = G_1 \supseteq I(G_2) \supseteq \ldots \supseteq I(G_n) \supseteq e \qquad (3.2.1.)$$

составленный из изоляторов (см. [4], [20]) $I(G_m)$членов $G_m (m = 1,2,\ldots,n)$. Ряд (3.2.1) является изолированным, так как составлен из изолированных групп $I(G_m)$. В то же время это центральный ряд группы G. (см. [4], [20])

Факторы $I(G_m)/I(G_{m+1})(m = 1,2,\ldots,n)$ абелевы и не имеют кручения. Факторгруппы $G/I(G_m)$ всей группы G по членам ряда (3.2.1) оказываются нильпотентными группами без периодических элементов.

Известно (см. [4], [20]), что класс нильпотентности изолятора $I(G_m)$ совпадает с классом самой подгруппы G_m. Отсюда следует, что длина ряда (3.2.1) в точности равна n и, значит, всюду в (3.2.1) должны быть сохранены знаки точного включения.

Ясно, что класс нильпотентности каждой из фактор-групп $G/I(G_m)$ равен m - 1 (меньше класса n группы G).

Ряд $G = G_1 \supset I(G_2) \supset \ldots \supset I(G_n) \supset e$, составленный из изоляторов членов нижнего центрального ряда группы G назовем изолированным нижним центральным рядом этой группы.

Можно дать иное (структурное) определение изолированного нижнего центрального ряда в терминах, инвариантных относительного структурных изоморфизмов. Это определение опирается на следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Изолятор $I(G_m)$ m-го члена $(m = 2,...,n)$ нижнего центрального ряда n-нильпотентной группы G без кручения совпадает с пересечением $\bigcap\limits_{\alpha} H_\alpha$ всех изолированных нормальных делителей H_α группы G, фактор-группы G/H_α по которым без кручения и $(m-1)$ - нильпотентны.*

Доказательство. Предположим, что H_α - произвольный изолированный нормальный делитель группы G, для которого фактор-группа G/H_α $(m-1)$- нильпотентна. Тогда очевидно, что m-й член G_m нижнего центрального ряда группы G содержится в H_α. В силу изолированности H_α, в нем содержится также изолятор $I(G_m)$. С другой стороны, фактор-группа $G/I(G_m)$ также без кручения и $(m-1)$-нильпотентна. Остается учесть, что во всякой группе и, в частности, в нильпотентной группе, пересечение любого множества изолированных групп само изолировано [4]. Следовательно,

$$I(G_m) = \bigcap_{\alpha} H_\alpha .$$

3.3. О РЕШЕТОЧНЫХ ИЗОМОРФИЗМАХ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ *W*-ГРУПП

Рассмотрим проектирование $\varphi = \varphi_G$ группы G на группу $G^\varphi : \varphi_G(G)^\varphi$. Решеточный изоморфизм φ_G переносит каждую подгруппу H из G на соответствующую подгруппу H^φ из G^φ и индуцирует между этими подгруппами некоторое проектирование $\varphi_G(H) : \varphi_G(H) = H^\varphi$.

Индекс G, которым снабжен символ $\varphi_G(H)$ (и аналогичные ему), указывающий на происхождение соответствующего проектирования (равно как и обозначение подгруппы H), в дальнейшем, если это приводит в недоразумениям, опускается.

Если при этом подгруппы H и H^φ инвариантны соответственно в группах G и G^{φ} то проектирование φ_G индуцирует естественный структурный изоморфизм $\varphi = \overline{\varphi}_G$ между фактор-группами G/H и G^{φ}/H^{φ}:

$$\overline{\varphi}_G(G/H) = (G/H)^{\overline{\varphi}} = G^{\varphi}/H^{\varphi}.$$

П. Г. Конторович и В. И. Плоткин [61] доказали, что если G - локально нильпотентная группа без кручения и H - ее инвариантная изолированная подгруппа, то $H^{\varphi} = \varphi_G(H)$ является инвариантной изолированной подгруппой в G^{φ}.

В ряде случаев оказывается полезной.

ТЕОРЕМА 3.3.1 *При решеточном изоморфизме φ_G изолированному нижнему центральному ряду*

$$G = G_1 \supset I(G_2) \supset \ldots \supset I(G_n) \supset e$$

n-нильпотентой W-группы G без кручения соответствует изолированный нижний центральный ряд

$$G^{\varphi} = G_1^{\varphi} \supset I(G_2^{\varphi}) \supset \ldots \supset I(G_n^{\varphi}) \supset e$$

W-группы $G^{\varphi} = \varphi_G(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H_{α} - произвольная инвариантная изолированная подгруппа группы G, для которой фактор-группа G/H_{α} является $(m-1)$-нильпотентной. Проектировано φ согласно 3.3. переносит подгруппу H_{α} на инвариантную изолированную подгруппу H_{α}^{φ} группы G^{φ}. Между фактор-группами G/H_{α} и $G^{\varphi}/H_{\alpha}^{\kappa}$ проектирование φ индуцирует естественное проектирование $\overline{\varphi}$. Поэтому, фактор-группа $G^{\varphi}/H_{\alpha}^{\kappa}$ также $(m-1)$-нильпотентна и не имеет кручения.

Подгруппами H_{α}^{φ} исчерпываются все инвариантные изолированные подгруппы N^{φ} из G^{φ}, для которых фактор-группы G^{φ}/N^{φ} m-1-нильпотентны и без кручения. В том легко убедиться, рассмотрев структурный изоморфизм φ^{-1}, обратный проектированию φ. Действительно, подгруппа $N=(N^{\varphi})^{\varphi-1}$ оказывается одной из подгрупп H_{α}. Далее, по теореме 3.2.1, примененной к группе G^{φ}, получаем: $\bigcap\limits_{\alpha} H_{\alpha}^{\varphi} = I(G_m{}^{\varphi})^*$.

В то же время, по самому определению структурного изоморфизма φ справедливо соотношение

$$\varphi(\bigcap_{\varphi} H_{\alpha})=\bigcap_{\varphi}\varphi(H_{\alpha})=\bigcap_{\varphi} H_{\alpha} \qquad \text{или} \qquad \varphi(I(G_m))=I(G_m{}^{\varphi})$$

для любого $m = 1,2,...$ Этим теорема доказана.

Известно, что верхний центральный ряд нильпотентной группы G всегда изолирован [3], [4]. Это обстоятельство позволяет показать [3], [61] что при структурном изоморфизме φ верхнему центральному ряду группы G соответствует верхний центральный ряд группы G^{φ}. Аналогичное высказывание в отношении нижнего центрального ряда пока преждевременно. Отметим лишь, что из теоремы 3.3.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.3.1. *Пусть нижний центральный ряд группы без кручения G изолирован. Тогда при структурном изоморфизму φ этому ряду соответствует нижний центральный ряд*

$$G^{\varphi} = G_1^{\varphi} \supset G_2^{\varphi} \supset ... \supset G_n^{\varphi} \supset e$$

группы G^{φ}.

Пусть G - чистая нильпотентная группа. Аналогично можно показать, см. [4], [20] что центр $Z(G)$ такой группы изолирован. Поэтому, имеет место включение $I(G_n) \subseteq Z(G)$.

Центр непериодической конечно-порожденной нильпотентной группы содержит элементы без кручения.

Справедливость этого утверждения очевидна, если помнить, что:

В непериодической конечной порожденной нильпотентной группе всегда содержится чистый нормальный делитель см. [3].

Каждый нормальный делитель нильпотентной группы имеет нетривиальное пересечение с ее центром.

4. О НЕКОТОРЫХ БИЕКТИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ИНДУЦИРУЮЩИХ РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ

4.1. ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

При изучении решеточных изоморфизмов нильпотентных групп нами используется результат Бера (1939):

Каждое проектирование $\varphi(H)=H^{\varphi}$ произвольной абелевой группы H линейного ранга $r(H)>1$ на некоторую группу H^{φ} индуцируется ровно двумя изоморфизмами между $\varphi_{1,H}$ и $\varphi_{2,H}$ H и H^{φ}. Если при этом h - любой элемент из группы H и $\varphi_{1,H}(h)=h'$ где h' - элемент из H^{φ}, то $\varphi_{2,H}(h)=h'^{-1}$.

Известно также, что если заданное проектирование $\varphi(A)=A^{\varphi}$ смешанной группы A индуцируется групповыми изоморфизмами, то индуцируется точно двумя: $\varphi_{1,A}$, $\varphi_{2,A}$. Для того чтобы выделить один из них, достаточно задать образ какого-нибудь элемента a бесконечного порядка из A. Так, если, например, $\varphi_{1,A}(a)=a'$; $<a'>=<a>^{\varphi}$ ($\varphi_{1,A}(b)=b'$; $<b'>=<b>^{\varphi}$ - любой элемент из A'), то

$$\varphi_{2,A}(a)=a'^{-1}, \quad \varphi_{2,A}(b)=b'^{-1}$$

В дальнейшем между элементами структурного изоморфных нильпотентных групп устанавливаются специального вида взаимно однозначные соответствия; описание их дает

ЛЕММА 4.1.1. *Каждое проектирование $\varphi_G(G)=G^{\varphi}$ конечно порожденной нильпотентной группы G, содержащей не менее называемых элементов бесконечного порядка, на некоторую группу G^{φ} индуцируется двумя взаимно однозначными соответствиями $\varphi_{1,G}$ и $\varphi_{2,G}$ между элементами групп G и G^{φ}. Эти соответствия являются изоморфизмами на каждой паре абелевых подгрупп A из G и $A^{\varphi}=\varphi_G(A)$ из G^{φ}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G абелева, то лемма уже доказана. Поэтому последующее имеет смысл для неабелевой группы G. Выберем в G некоторую максимальную абелеву подгруппу H. В силу теоремы 4, $r(H) > 1$. Поэтому проектирование $\varphi_G(H) = H^{\varphi}$ где H^{φ}-некоторая подгруппа из G^{φ}, индуцируется ровно двумя изоморфизмами $\varphi_{1,H}$, $\varphi_{2,H}$ между H и H^{φ}. Выберем и зафиксируем один из них, например $\varphi_{1,H}$. Тем самым зафиксируется изоморфизм $\varphi_{1,H}(Z(G)) = Z(G^{\varphi})$ между центрами групп G и G^{φ} (естественно, что $Z(G)$ лежит в H). Пусть теперь g - произвольный элемент из G. Построим абелеву подгруппу

$$A(g) = << g >; \ Z(G) >$$

и соответствующую ей проектировании φ_G в G^{φ} подгруппу

$$A^{\varphi}(g) = << g >^{\varphi}; \ Z(G^{\varphi}) >$$

Группа $A(g)$ непериодическая. Ее структурный изоморфизм $\varphi_G(A(g)) = A^{\varphi}(g)$ порождается некоторым групповым. Действительно, для каждой абелевой подгруппы A из G можно указать в G ее содержащую максимальную абелеву подгруппу M. Для M (лемма) реализуется: имеется ровно два изоморфизма $\varphi_{1,M}$ и $\varphi_{2,M}$, индуцирующих проектирование $\varphi_G(M) = M^{\varphi}$. Но тогда и проектирование $\varphi_G(A) = A^{\varphi}$ индуцируют два изоморфизма: $\varphi_{1,M}(A)$ и $\varphi_{2,M}(A)$. Сказанное справедливо, в частности, и для подгруппы $A(g)$. Из двух изоморфизмов $\varphi_{1,M}(A(g))$, $\varphi_{2,M}(A(g))$ выделим тот, который совпадает на $Z(G)$ с зафиксированным изоморфизмом $\varphi_{1,Z}(Z(g)) = Z(G^{\varphi})$. Такое выделение однозначно в силу.

Изоморфизм $\varphi_{1,M}(A(g))$ относит элементу g некоторый элемент g' из G. Тем самым между всеми элементами групп G и G^{φ} возникает взаимно однозначное соответствие $\varphi_{1,G}$, а именно: если g - произвольный элемент из G, то элементом $g' = \varphi_{1,G}(g)$ служит тот из образующих циклической группы $<g>^{\varphi}$, который определен групповым изоморфизмом $\varphi_{1,M}(A(g))=A^{\varphi}(g)$, т.е. в конечном счете, изоморфизмом $\varphi_{1,H}(H)$, или, что то же, изоморфизмом $\varphi_{1,H}(Z(G))$.

Рассмотрим теперь второй индуцирующих проектирование $\varphi_G(H)=H^{\varphi}$ изоморфизмов: $\varphi_{1,H}(H)$. С его помощью, подобно тому как показано выше, можно построить еще одно взаимно однозначное соответствие $\varphi_{2,G}$ между элементами групп G и G^{φ}. Как видно соответствия $\varphi_{1,G}$ и $\varphi_{2,G}$ не совпадают по меньшей мере, на элементах бесконечного порядка и поэтому оказываются различными. Из самого построения этих соответствий видно, что каждое из них порождает проектирование $\varphi_G(G)=G^{\varphi}$ и является изоморфизмом на всякой паре абелевых подгрупп A и $A^{\varphi}=\varphi_G(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.1. Если из двух возможных соответствий $\varphi_{1,G}$, $\varphi_{2,G}$ мы выбираем какое-либо одно, то будем обозначать его тем же символом $\varphi=\varphi_G$, что и рассматриваемое проектирование.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1.2. Пусть H и $H^{\varphi}=\varphi_G(H)$ - центральные подгруппы в группах G и G^{φ}. На фактор-группах G/H и $G^{\varphi}/H^{\varphi}=\overline{\varphi}_G(G/H)$ соответствия $\varphi_{1,G}$, $\varphi_{2,G}$ порождают естественные соответствия $\overline{\varphi}_{1,G}$ и $\overline{\varphi}_{2,G}$, индуцирующие проектирование $\overline{\varphi}_G$. А именно: для произвольного $\overline{g}=gH$ из G/H

$$\overline{\varphi}_{i,G}(\overline{g})=\varphi_{i,G}(g)H^{\varphi} \qquad (i=1,2)$$

и не зависит от выбора представителя в классе $\overline{g}$. Действительно, если $g_1=gh.\ h\in H$, то по лемме 2 (ведь g и h коммутируют!)

$$\varphi_{i,G}(g_1)=\varphi_{i,G}(g)\varphi_{i,G}(h)$$

и поэтому

$$\overline{\varphi}_{i,G}(g_1H)=\varphi_{i,G}(g)\varphi_{i,G}(h)H^{\varphi}=\varphi_{i,G}(g)H^{\varphi}$$

ЛЕММА 4.1.2 *Пусть G - чистая нильпотентная группа и H - ее центральная подгруппа. Тогда коль скоро пара*

$$\bar{u} = uH,\ \bar{v} = vH$$

независимых элементов бесконечного порядка порождает в G/H нильпотентную класса 2 подгруппу с конечным коммутантом, то представители u, v смежных классов $\bar{u}, \bar{v}$ в самой группе G порождают свободную нильпотентную класса 2 подгруппу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в фактор-группе G/H пара независимых элементов $\bar{u}, \bar{v}$ бесконечного порядка порождает нильпотентную класса 2 подгруппу $<\bar{u}, \bar{v}>$ с циклическим коммутантом $<[\bar{u}, \bar{v}]>$ порядка m:

$$[\bar{u}, \bar{v}]^m = e.$$

Рассмотрим представители u, v смежных классов $\bar{u}, \bar{v}$. Во первых, ясно, что u; v-независимые элементы бесконечного порядка. Во – вторых, их коммутатор удовлетворяет соотношению

$$[u, v]^m = h,$$

в котором h - некоторый центральный элемент. Но тогда, заключаем, что сам коммутатор $[u, v]$ лежит в центре группы G. Отсюда и следует требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1.1. *Пусть в конечно-порожденной нильпотентной класса 2 группе G содержится не менее двух независимых элементов бесконечного порядка, и пусть из некоммутируемости любой пары независимых элементов бесконечного порядка следует некоммутируемость любых их степеней. Тогда каждое проектирование φ_G переносит группу G на группу G^{φ}, ей изоморфную, и индуцируется одним изоморфизмом и одним антиизоморфизмом между G и G^{φ}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что условия теоремы вытекает центральность периодической части $P(G)$ группы G.

Пусть x - любой элемент из $P(G)$ и v - произвольный элемент бусконечного порядка. Могут представиться следующие возможности:

(i) В $Z(G)$ имеется элемент z бесконечного порядка, не зависящий от v Тогда независящими окажутся элементы xz и v. Убедимся в перестановочности x и v. Действительно, в случае получаем противоречие: с одной стороны (по условию теоремы), порядок коммутатора

$$[xz,\ v] = [x, v]$$

бесконечный, а с другой, в силу инвариантности $P(G)$ в G - конечный.

(ii) Все элементы бесконечного порядка из $Z(G)$ зависит от v. В этом случае не зависящий от v элемент и должен найтись вне $Z(G)$. Выберем показатель k таким, чтобы $v^k \in Z(G)$, тогда

$$[xu, v^k] = [xu, v]^k = e$$

и значит, коммутируют сами независимые элементы xu и v. В то же время

$$[xu, v] = [x, v][u, v] = e$$

что возможно лишь при $[u, v] = [x, v] = e$.

(iii). Пусть элементы z из $Z(G)$ и u независимы и имеют бесконечный порядок. Тогда независимыми окажутся элементы xz и yv (x, y - любое из $P(G)$). Их коммутатор

$$[xz,\ yv] = [x,\ y][x,\ v] = [x, y]$$

имеет конечный порядок; следовательно, коммутируют элементы xz и yv а потому x и y.

Этим завершено доказательство включения $P(G) \subset Z(G)$.

В согласии с леммой 4.1.1, установим теперь между элементами G и G^{φ} одно из двух возможных взаимно однозначных соответствий, индуцирующих рассматриваемое проектирование φ_G убедимся, что это соответствие φ является либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом.

Пусть x и y - любые два элемента из группы G. Рассмотрим все возможные случаи.

Элементы x и y коммутируют между собой.

Установленное нами выше взаимно однозначное соответствие является изоморфизмом (лемма 4.3.1.) на абелевых подгруппах

$$A = \langle\langle x\rangle, \langle y\rangle\rangle$$

и

$$A^{\varphi} = \langle\langle x\rangle^{\varphi}, \langle y\rangle^{\varphi}\rangle.$$

Поэтому если $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$, где $\langle x'\rangle = \langle x\rangle^{\varphi}, \langle y'\rangle = \langle y\rangle^{\varphi}$, то

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = x'y'.$$

Элементы x и y не коммутируют.

x, y - независимые элементы бесконечного порядка.

В рассматриваемом случае, по условию теоремы, коммутатор $k = [x, y]$ имеет бесконечный порядок и потому подгруппа $B = \langle x, y\rangle$ будет свободной нильпотентной класса 2. Проектирование φ переносит подгруппу B на подгруппу

$$B^{\varphi} = \langle\langle x\rangle^{\varphi}, \langle y\rangle^{\varphi}\rangle$$

из G^{φ}. Выбор соответствия φ между элементами G и G^{φ} основан не фиксации некоторого изоморфизма между центрами $Z(G)$ и $Z(G^{\varphi})$. При этом (см. лемму 4.1.1) автоматически фиксируется также определенный изоморфизм между центрами $Z(B) = \langle k\rangle$ и $Z(B^{\varphi}) = \langle k\rangle^{\varphi}$. Но это в свою очередь определяет одно из двух взаимно однозначных соответствий между элементами B и B^{φ}, индуцирующих проектирование φ_G группы B на B^{φ}. В работе [6] доказано, что одно из этих соответствий является изоморфизмом, а другое – антиизоморфизмом. Следовательно, справедливо одно из двух:

$$\text{либо } \varphi(xy) = x'y', \text{ либо } \varphi(xy) = y'x'. \qquad \text{(A)}$$

x, y - зависимые элементы бесконечного порядка.

Допусти, что в группе G найдется центральный элемент z бесконечного порядка, зависящий от x. Тогда ясно, что

$$x = a^m z, \quad y = b^l z$$

где a, b - некоторые элементы из $P(G)$. Но это, в силу вышеотмеченного, означает, что сами элементы x и y центральные. Поэтому, при условии некоммутируемости x и y, следует продолжить, что каждый центральный элемент бесконечного порядка от x не зависит. Построим теперь в G абелевы подгруппы $< x, z >$ и $< y, z >$. На каждой из них проектирование φ индицируется изоморфизмом φ :

$$\varphi(xz) = x'z', \quad \varphi(yz^{-1}) = y'z'^{-1}, \ .$$

Элементы xz и yz^{-1} независимы и не коммутируют. Действительно, в одном случае x и y оказались бы зависящими от z. Значит, к подгруппе $< xz, yz^{-1} >$ применим предыдущий результат. Поэтому, с учетом двух предшествующих равенств, получаем либо соотношение

$$\varphi(xy) = \varphi(xz)(yz^{-1})) = \varphi(xz)\, \varphi(yz^{-1}) = x'y'$$

либо второе из соотношений (А).

Итак, для каждой пары элементов x и y на G реализуется одна из возможностей (А). В таком случае соответствие φ оказывается либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом между группами G и G^{φ}. Если предположить, что φ - изоморфизм (антиизоморфизм), то второе описание леммой 4.1.1 соответствие между элементами из G и G^{φ}, окажется антиизоморфизмом (изоморфизмом).

Теорема доказана.

4.2. ПРОЕКТИРОВАНИЯ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ С НЕ МЕНЕЕ ЧЕМ ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Вопрос об определяемости чистой не локальной циклической нильпотентной группы структурой своих подгрупп решается положительно [см. 56].

ЛЕММА 4.2.1 *Пусть в конечно-порожденной n-нильпотентной группе G содержится не менее двух независимых элементов бесконечного порядка. Пусть, кроме того, коммутатор любой пары независимых элементов бесконечного порядка, порождающих в G нильпотентную класса 2 подгруппу, имеет также бесконечный порядок. Тогда если φ_G - проектирование группы G на некоторую группу G^{φ}, то на каждой паре нильпотентных класса 2 (абелевых) подгрупп M из G и M^{φ} из G^{φ} одно из описанных леммой 4.2.1. соответствий $\varphi_{1,G}(M)$, $\varphi_{2,G}(M)$ оказывается изоморфизмом, а второе – антиизоморфнизмом (вторым изоморфизмом).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в группе G некоторую максимальную 2-нильпотентную (абелеву) подгруппу M. В силу условия леммы и теоремы 4, в ней содержится не менее двух независимых элементов бесконечного порядка и каждая пара некоммутатирующих независимых элементов бесконечного порядка порождает свободную 2-нильпотентную подгруппу. Проектирование φ_G переносит M на некоторую подгруппу M^{φ} из группы G^{φ}: $\varphi_G(M) = M^{\varphi}$.

Остается воспользоваться теоремой 4.2.1, из которой следует, что на группе M одно из соответствий, например $\varphi_{1,G}(M)$, оказывается изоморфизмом, а второе $\varphi_{2,G}(M)$ - антиизоморфизмом (вторым изоморфизмом), индуцирующим проектирование $\varphi_G(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.1 Пусть M и M^{φ} - две различные максимальные 2-нильпотентные подгруппы из G. Из леммы 4.2.1 еще не следует (это утверждение вытекает лишь из теоремы 8), что отображение $\varphi_{1,G}$ на подгруппе M^{φ} является изоморфизмом тогда и только тогда, когда изоморфизмом является отображение $\varphi_{1,G}$ на подгруппе M^{φ}. Априори можно думать, что на некоторых 2-нильпотентных подгруппах из G соответствие $\varphi_{1,G}$ - изоморфизм, а на других – антиизоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.1 *Пусть φ - проектирование чистой конечно-порожденной некоммуникативной нильпотентной группы G на группу G^{φ}. Пусть, далее M и M^{φ} - пара сопоставляемых между собой проектированием φ 2-нильпотентных подгрупп из G и G^{φ}. Тогда одно из описанных леммой 2 соответствий $\varphi_{1,G}(M)$, $\varphi_{2,G}(M)$ является изоморфизмом, а другое – антиизоморфизмом между M и M^{φ}.*

ЛЕММА 4.2.2. *Пусть выполнены условия следствия 4.2.1, и пусть подгруппа $(G_n)^{\varphi}$ является образом при проектировании φ предпоследнего члена G_n нижнего центрального ряда группы G. Тогда соответствия $\varphi_{1,G}$ и $\varphi_{2,G}$ определенный леммой 4.1.1, порождают на фактор-группах $\overline{G} = G/G_n$ и $\overline{G}^{\varphi} = G^{\varphi}/(G_n)^{\varphi}$ естественные взаимно однозначные соответствия $\overline{\varphi}_{1,G}$ и $\overline{\varphi}_{2,G}$. Эти соответствия индуцируют естественный решеточной изоморфизм $\overline{\varphi}_G(\overline{G})$ между $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$, порожденный проектированием φ_G, и оказываются изоморфизмами на каждой паре абелевых подгрупп $\overline{A}$ и $\overline{A}^{\varphi}$ из этих фактор-групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что при любом решеточном изоморфизме φ_T произвольной нильпотентной группы T без кручения каждой ее центральной подгруппе S соответствует также центральная подгруппа S^{φ} из T^{φ}. Значит, в частности, центральной в группе G^{φ} оказывается подгруппа $(G_n)^{\varphi} = \varphi_G(G_n)$. Это позволяет говорить об естественном проектировании фактор-группы $\overline{G}$ на $\overline{G}^{\varphi}$. Установим между элементами групп G и G^{φ} соответствия $\varphi_{1,G}$ и $\varphi_{2,G}$, определенные леммой 4.1.1.

Пусть $\overline{A}$ - произвольная абелева подгруппа из группы $\overline{G}$ и $\overline{A}^{\varphi}$ - соответствующая ей проектирований $\overline{\varphi}_G$ подгруппа из $\overline{G}^{\varphi}$. Перейдем от фактор-групп $\overline{G}$, $\overline{G}^{\varphi}$ к самим группам G, G^{φ} и рассмотрим в них прообразы A, A^{φ} групп $\overline{A}, \overline{A}^{\varphi}$. Очевидно, что G *и* G^{φ} оказываются 2-нильпотентными (абелевыми) подгруппами групп G *и* G^{φ}. Как следует из леммы 4.2.1, проектирование $\varphi_G(A)$ группы A *на* A^{φ} индуцируется одним изоморфизмом $\varphi_{1,G}(A)$ и одним антиизоморфизмом $\varphi_{2,G}(A)$ (двумя изоморфизмами $\varphi_{1,G}(A)$ и $\varphi_{2,G}(A)$). Но тогда ясно, что соответствия $\overline{\varphi}_{1,G}(A)$ и $\overline{\varphi}_{2,G}(A)$ между абелевыми группами $\overline{A}$ *и* $\overline{A}^{\varphi}$ оказываются изоморфизмами.

ЛЕММА 4.2.3. *Пусть выполнены условия следствия 4.2.1, и пусть* $\varphi_{1,G}$, $\varphi_{2,G}$, *- соответствия между элементами групп* G *и* $G^{\varphi} = \varphi_G(G)$, *описанные леммой 4.1.1. Тогда ими порожденные и изученные леммой 4.2.2 соответствия* $\overline{\varphi}_{1,G}$, $\overline{\varphi}_{2,G}$ *между фактор-группами* $\overline{G}$ *и* $\overline{G}^{\varphi} = \overline{\varphi}(\overline{G})$ *образуют одну из тех пар* $\varphi_{1,\overline{G}}$, $\varphi_{2,\overline{G}}$ *соответствий, которые в силу леммы 4.1.1 могут быть построены на группах* $\overline{G}$, $\overline{G}^{\varphi}$. *Доказательство непосредственно следует из того, что:*

(a) соответствия $\overline{\varphi}_{1,G}$, $\overline{\varphi}_{2,G}$ *(как следует из леммы 4.2.3) являются изоморфизмами между центрами* $Z(\overline{G})$ *и* $Z(\overline{G})^{\varphi}$ *и индуцируют проектирование* $\overline{\varphi}_G[Z(\overline{G})] = Z(\overline{G})^{\varphi}$;

(b) построение каждой пары $\overline{\varphi}_{1,\overline{G}}$, $\overline{\varphi}_{2,\overline{G}}$ *соответствий, индуцирующих на группах* $\overline{G}$ *и* $\overline{G}^{\varphi}$ *любое проектирование* $\overline{\varphi}_{\overline{G}}(\overline{G}) = \overline{G}^{\varphi}$ *(в частности, проектирование* $\overline{\varphi}_{\overline{G}}(\overline{G}) = \overline{G}^{\varphi}$, *обеспечиваются выбором именно тех двух*

изоморфизмов между $Z(\overline{G})$ *и* $Z(\overline{G}^{\varphi})$ *которые индуцируют проектирование* $\overline{\varphi}_G[Z(\overline{G})]=Z(\overline{G}^{\varphi})$ *(в частности,* $\overline{\varphi}_G[Z(\overline{G})]=Z(\overline{G}^{\varphi})$*)* *(см. лемму 4.1.1).*

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2.2. Утверждения лемм 4.2.2 и 4.2.3 остаются в силе, если вместо фактор-групп G/G_n и $G^{\varphi}/(G_n)^{\varphi}$ рассматривать в них фактор-группы $G/I(G_n)$ и $G^{\varphi}/I(G_n{}^{\varphi})$, так как, $[I(G_n)]=I(G_n{}^{\varphi})$.

4.3. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МАЛЬЦЕВА ДЛЯ W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.1. *Пусть G W-степенная группа. Предположим, что задана система $Z=\{G_{\alpha}, \alpha\in\overline{J}\}$ элементов из $L(G)$. Эту систему будем называть локальной базой W-группы G, если объединение любых двух элементов этой системы входит в некоторый элемент этой же системы и для любого $X\in G$ существует $\alpha\in\overline{J}$ такой, что $X\in G_{\alpha}$, т.е. если*

$(i)\ \forall\alpha,\beta\in\overline{J},\ \exists\gamma\in\overline{J}\ \ L_{\alpha}\cup L_{\beta}\subseteq L\gamma$

$(ii)\ \forall x\in G,\ \exists\alpha\in\overline{J}:\qquad x\in G_{\alpha}.$

ТЕОРЕМА 4.3.1. (ЛОКАЛЬНАЯ). *Пусть даны W-степенные группы G и G' определенные над кольцами W и W' соответственно, $f: L(G)\to L(G')$решеточный изоморфизм. Допустим, что в G существует локальная база $Z=\{G_{\alpha}, \alpha\in\overline{J}\}$ такая, что ограничение f на каждом $L(G)$ порождается полулинейным изоморфизмом. Тогда f тоже порождается полулинейным изоморфизмом между G и G'.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как W-группа является универсальной алгеброй, мы можем использовать следствие теоремы Гадаля-Мальцева, которое для нашего случая можно сформулировать так: если каждый элемент локальной базы группы G имеет свойство, которое можно записать через конечное число логических функций, логических операций, кванторов, переменных и символов, то это свойство имеет и сама группа G.

Пусть f_α полулинейный изоморфизм относительно изоморфизма $h_\alpha : W \to W'$ порожденный ограничением f на $L(G_\alpha)$.

Пусть $\Lambda \subset W$ группа единиц W и $h_\alpha(\Lambda) = \Lambda'$.

Определим логические функции:

$$A(\ell,\ell') = \begin{cases} \textit{истинно}, \ell' = \ell^{\psi\alpha} \\ \textit{ложно}, \ell' \neq \ell^{\psi\alpha} \end{cases},$$

$$C(\lambda,\lambda') = \begin{cases} \textit{истинно}, \ \lambda' = \lambda^{h_\alpha} \\ \textit{ложно}, \ \lambda' \neq \lambda^{h_\alpha} \end{cases},$$

$$У(\varepsilon,\varepsilon') = \begin{cases} \textit{истинно}, \ \varepsilon' = \varepsilon^{h_\alpha} \\ \textit{ложно}, \ \varepsilon' \neq \varepsilon^{h_\alpha} \end{cases}.$$

Учитывая, что f порождается полулинейным изоморфизмом ψ_α, можем писать, что $<\ell>^\varphi = <\ell>^{\psi_\alpha} = <\ell^{\psi_\alpha}>$. Значит φ переводит каждую циклическую W-группу в циклическую подгруппу.

Имеем, что для любого $\ell \in G$ найдется $\ell^* \in G'$, что $<\ell>^\varphi = <\ell^*>$.

Так как $\Lambda \subset W$ группа единиц W, для любого $\alpha \in \bar{J}$ и любого $\ell \in G$ имеем

$$\bigvee_{\varepsilon\in\Lambda} (\ell^{\psi_\alpha} = \varepsilon\ell^*).$$

Имеем, что для любых $\ell \in L$, $r \in R$ найдутся такие $\ell^* \in L'$, $r^* \in R'$, что

$$<\ell>^\varphi = <\ell^*> \quad \text{и} \quad <r>^\varphi = <r^*>.$$

Так как $\Lambda \subset W$ группа единиц, для любого $\alpha \in J$ и любых $\ell \in L$ и $r \in W$ будем иметь:

$$\bigvee_{\varepsilon\in\Omega} (\ell^{\psi_\alpha} = \varepsilon\ell^*), \ \bigvee_{\varepsilon\in\Omega} (r^{f_\alpha} = \varepsilon r^*) \quad .$$

Учитывая эти рассуждения, обсуждаемое свойство группы G_α можно записать таким образом:

1. $\forall \ell \in G_\alpha \ \exists \ell \in L_\alpha^\varphi : A(\ell,\ell')$;

2. $\forall \ell' \in G_\alpha^\varphi \ \exists \ell \in G_\alpha^\varphi : A(\ell,\ell')$;

3. $A(\ell,\ell'_1)\wedge A(\ell,\ell'_2)\Rightarrow \ell'_1=\ell'_2$;

4. $A(\ell,\ell')\wedge A(\ell,\ell')\Rightarrow \ell_1=\ell_2$;

5. $A(\ell_1,\ell'_1)\wedge A(\ell_2,\ell'_2)\Rightarrow A(\ell_1\cdot\ell_2,\ \ell'_1\cdot\ell'_2)$;

6. $\forall\lambda\in\Lambda\ \ \exists\lambda'\in\lambda' : C(\lambda,\lambda')$;

7. $\forall\lambda'\in\Lambda'\ \ \exists\lambda\in\lambda : C(\lambda,\lambda')$;

8. $C(\lambda,\lambda'_1)\wedge C(\lambda,\lambda'_2)\Rightarrow \lambda'_1=\lambda'_2$;

9. $C(\lambda_1,\lambda')\wedge C(\lambda_2,\lambda'')\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2$;

10. $C(\lambda_1,\lambda'_1)\wedge C(\lambda_2,\lambda'_2)\Rightarrow C(\lambda_1+\lambda_2,\lambda'_1+\lambda')\wedge C(\lambda_1\lambda_2,\lambda'_1\lambda'_2)$;

11. $A(\ell_1,\ell'_1)\wedge C(\lambda,\lambda')\Rightarrow A(\lambda\ell,\lambda'\ell')$.

12. $E(\varepsilon,\varepsilon'_1)\wedge E(\varepsilon,\varepsilon'_2)\Rightarrow \varepsilon'_1=\varepsilon'_2$;

13. $E(\varepsilon,\varepsilon')\wedge E(\varepsilon_2,\varepsilon')=\varepsilon_1=\varepsilon_2$;

14. $E(\varepsilon,\varepsilon'_1)\wedge E(\varepsilon,\varepsilon'_2)\Rightarrow E(\varepsilon_1\varepsilon_2,\varepsilon'_1\varepsilon'_2)$;

15. $\forall\ell\in L_\alpha,\ \ \exists_\gamma\in\Omega, \forall\varepsilon\in\Omega\setminus\gamma$;

Следовательно, этим свойством обладает и само группа.

4.4. О ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫХ СООТВЕТСТВИЯХ НА АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУППАХ

Основная теорема проективной геометрии (классический вариант) дает возможность представления коллинеаций и решеточных изоморфизмов векторных пространств над полями и телами через полулинейные изоморфизмы.

В настоящее время имеется много разных обобщений отмеченной теоремы для модулей над общими кольцами. По этому поводу см. [62], [63], [64], [65] и цитированную там литературу.

Сформулируем теорему для модулей над кольцами главных идеалов, т.к. этот вариант нами будет использован в дальнейших изложениях.

ТЕОРЕМА 4.4.1. *(Представление решеточных изоморфизмов через полулинейные функции).*

Пусть X и Y модули без кручения над кольцами главных идеалов K и K_1 соответственно; Λ и Λ_1 группы обратимых элементов (единиц) K и K_1; $L(X)$ и $L(Y)$ решетки подмодулей. Если $dimX \geq 3$, $f : L(X) \to L(Y)$ решеточный изоморфизм, то тогда существует изоморфизм колец $\sigma : K \to K_1$ и σ–полулинейный изоморфизм $\varphi : X \to Y$ такой, что $f(A)=\varphi(A)$ для любого подмодуля $A \in L(X)$.

Если при этом $\varepsilon \in \Lambda$, то отображение $\varphi_\varepsilon : \varepsilon x \to \sigma(\varepsilon)\varphi(x)$, $\forall x \in X$ также будет полулинейным изоморфизмом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.1. В наших дальнейших рассуждениях, т.к. мы придерживаемся мультипликативной записи имеем:

$$\varphi_\varepsilon : x^\varepsilon \to \varphi(x)^{\sigma\varepsilon}.$$

В дальнейшем выжную роль в построении биективных отображений порождающих решеточный изоморфизм W–степенных нильпотентных групп играет следующая

ЛЕММА 4.4.1. *Пусть G и $G^\varphi = G_1$ локально нильпотентные W–степенные группы без кручения над кольцами W и W_1 соответственно.*

Если G неабелева и $dimZ(G) \geq 2$, то тогда $\varphi : L(G) \to L(G_1)$ решеточный изоморфизм индуцируется взаимно однозначными соответствиями φ_ε, $\varepsilon \in \Lambda$ между элементами G и G_1, которые являются полулинейными изоморфизмами относительно некоторого изоморфизма $\sigma : W \to W_1$ на каждой паре абелевых подгрупп $A \subset G$ и $\varphi(A) \in \varphi(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в G некоторую максимальную абелеву подгруппу H, тогда $dimH \geq 3$, так как $Z(G) \subset H$ и $dimZ(G) \geq 2$.

Тогда $\varphi(H)$ также абелева и $dim\varphi(H) \geq 3$. Поэтому применяя теорему 4.3.1 заключаем, что существует изоморфизм $\sigma : W \to W_1$ такой, что на каждой паре абелевых подгрупп H и $\varphi(H)$ решеточный изоморфизм φ индуцируется полулинейными изоморфизмами φ_ε, $\varepsilon \in \Lambda$. Выберем и зафиксируем один из них, например $\varphi = \varphi_1$. Тем самым фиксируется полулинейный изоморфизм $\varphi_1 = \varphi : Z(G) \to Z(G_1)$.

Пусть теперь x произвольный элемент из G. Построим абелеву подгруппу $A(g) = <g> \cup Z(G)$ и соответствующую ей при решеточном изоморфизме подгруппу $[A(g)]^{\varphi} = <g>^{\varphi} \cup Z(G_1)$.

Решеточный изоморфизм $\varphi : A(g) \to [A(g)]^{\varphi}$ порождается полулинейным изоморфизмом относительно $\sigma : W \to W_1$. Действительно, для каждой абелевой подгруппы A из G можно указать ее содержащую максимальную абелеву подгруппу M. Так как $dimM \geq 3$ для нее применима Теорема 4.3.1, т.е. решеточный изоморфизм $\varphi : L(M) \to L(M^{\varphi})$ индуцируется σ-полулинейными изоморфизмами φ_{ε} $\varepsilon \in \Lambda$; но тогда решеточный изоморфизм $\varphi : L(A) \to L(A^{\varphi})$ также индуцируется σ-полулинейными изоморфизмами φ_{ε} $\varepsilon \in \Lambda$. Сказанное справедливо, в частности и для подгруппы $A(g)$. Из всевозможных σ-полулинейных изоморфизмов φ_{ε} $\varepsilon \in \Lambda$ выделим тот, который совпадает на $Z(G)$ с зафиксированным полулинейным изморфизмом $\varphi_1 = \varphi : Z(G) \to Z(G^{\varphi})$. Такое выделение однозначно. Полулинейный изоморфизм $\varphi_1 = \varphi : A(g) \to [A(g)]^{\varphi}$ относит элементу g некоторый элемент $g' = \varphi(g)$. Тем самым между элементами G и $G^{\varphi}=G_1$ установлено взаимно однозначное соответствие $\varphi_1 = \varphi : G \to G_1$, а именно: если g – произвольный элемент из G, то элементом $g' = \varphi_1(g)$ служит тот из образующих циклической подгруппы $< g' >$, который определяется σ-полулиненым изоморфизмом $\varphi_1 : A(g) \to \{A(g)]^{\varphi}$ т.е. в конечном счете полулинейным изоморфизмом $\varphi_1 : H \to H^{\varphi}$.

Рассмотрим теперь некоторый другой σ-полулинейный изоморфизм $\varphi_{\varepsilon} = \varphi_1^{\alpha\varepsilon}$ индуцирующий решеточный изоморфизм φ. С его помощью, аналогично можно построить еще одно взаимно однозначное соответствие $\varphi_{\varepsilon} = \varphi_1^{\alpha\varepsilon} : G \to G_1$. Ясно, что соответствия φ_{ε} $\varepsilon \in \Lambda$ для разных ε не совпадают, по меньшей мере, на образующих циклических подгруппах, т.е. оказываются различными.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4.2. Пусть H и $H^{\varphi} = \varphi(H)$ центральные подгруппы в группах G и G^{φ}. На фактор-группах G/H и G^{φ}/H^{φ} соответствия $\overline{\varphi}_{\varepsilon}$, $\varepsilon\in\Lambda$ порождают естественные соответствия индуцирующие решеточны изоморфизм $\overline{\varphi} : L(G/H) \to L(G^{\varphi} / H^{\varphi})$, а именно,

для $\overline{g} = gH \in G/H$ $\quad \overline{\varphi}_{\varepsilon}(\overline{g}) = \varphi_{\varepsilon}(g)H^{\varphi}$, $\varepsilon\in\Lambda$

и не зависит от выбора представителя в классе $\overline{g}$.

Действительно, если $g_1 = gh$, $h \in H$, то $\varphi_{\varepsilon}(g_1) = \varphi_{\varepsilon}(g)\varphi_{\varepsilon}(h)$ т.к. g и h коммутируют.

Поэтому

$$\overline{\varphi}_{\varepsilon}(g_1 H) = \varphi_{\varepsilon}(g)\varphi_{\varepsilon}(h)H^{\varphi} = \varphi_{\varepsilon}(g)H^{\varphi}.$$

5. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ КЛАССА 2 W СТЕПЕННЫЕ ГРУППЫ

5.1. О СМЕШАННЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КЛАССА 2 W-СТЕПЕННЫЕ ГРУПАХ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1.1. *Коммутант G_2 нильпотентной класса 2 W-группы G, порожденной двумя независимыми элементами u, v без кручения порядка, изолирован в ней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коммутант G_2 группы $G=<u;v>$ порожден коммутатором $[u,v]$ и потому является циклической группой. Изучим две возможности:

(a). Коммутатор $[u,v]$ элемент без кручения. Убедимся в изолированности коммутанта. Предположим обратное: тогда в G должно выполниться некоторое соотношение вида:

$$u^{\alpha}v^{\beta}=[u,v]^{\gamma} \quad (\gamma\neq 0). \qquad (5.1.1.)$$

Рассмотрим фактор-группу G/G_2 и в ней образы $\bar{u},\bar{v}$ образующих u,v группы G. Эта фактор-группа абелева и в ней реализуется соотношение

$$\bar{u}^{\alpha}\bar{v}^{\beta}=e \qquad (5.1.2.)$$

Покажем, что оба показателя α и β в (5.1.2.) должны быть отличными от нуля. Действительно если, например $\alpha\neq 0,\ \beta=0$, то из соотношения

$$u^{\alpha}=[u,v]^{\gamma}$$

вытекает, что

$$[u,v]^{\alpha}=[u_{\alpha},v]=[[u,v]^{\gamma},v]=e,$$

т. е. периодичность G_2.

Предположим, что элементы $\bar{u},\bar{v}$ без кручения.

Соотношение (5.1.2.) свидетельствует о том, что ранг фактор-группы $\overline{G}=G/G_2$ с двумя образующим $\bar{u},\bar{v}$ равен единице. Убедимся, что рассматриваемом случае $\overline{G}$ не имеет кручения. Допустим обратное; тогда группа $\overline{G}$ должна распадаться в прямое произведение

$$\overline{G} = <\overline{x}> \times <\overline{y}>$$

в котором $<\overline{y}>$ W-группа без кручения, и при $\overline{x}^k = e$. При переходе к самой группе заключаем, что в ней содержится такой элемент x, k-я $(k \in W)$ степень лежит в G_2 и, следовательно, в центре $Z(G)$.

Пусть теперь w - любой элемент из G. Тогда

$$[x^k, w] = [x, w]^k = e \qquad (5.1.3.)$$

Мы, рассматриваем тот случай, когда G_2 - циклическая группа без кручения. Поэтому из (5.1.3.) следует, что

$$[x, w] = e,$$

т.е. x лежит в центре. Отсюда немедленно вытекает, что группа G оказывается расширением центра $Z(G)$ с помощью циклической группы без кручения $<y>$, а потому [3] вопреки условию теоремы является абелевой группой. Тем самым возможность кручения в фактор-группе $\overline{G}$ исключается. Итак, $\overline{G}$ оказывается абелевой W группой без кручения ранга один, порожденной лишь двумя элементами $\overline{u}$ и $\overline{v}$. Поэтому $\overline{G}$ обязана быть циклической без кручения. Но тогда, и сама группа G обязана быть свободной циклической. Это заключение, однако, противоречит условию теоремы и исключает реализацию в G соотношения (5.1.2.) в предположении, что элементы $\overline{u}$, $\overline{v}$ без кручения.

Предположим теперь, что элементы $\overline{u}$, $\overline{v}$ периодические, т.е. :

$$\overline{u}^{\alpha} = \overline{v}^{\beta} = e.$$

Это означает, при переходе в самой группе G, что для некоторых $\sigma,\ \tau \in W$ выполняются равенства.

$$u^{\alpha} = [u, v]^{\sigma}, \quad v^{\beta} = [u, v]^{\tau}$$

т.е. означает зависимость элементов u и v.

(b) Коммутатора $[u, v]$ периодический элемент. В этом случае из всякого соотношения

$$u^{\alpha} = [u, v]^{\gamma} v^{\beta}$$

вида (5.1.1.) вытекает либо зависимость элементов u и v, либо конечность порядка одного из них, что исключено условиями теоремы. Заметим, что в рассматриваемой ситуации периодическая часть всей группы G исчерпывается коммутантом G_2.

5. 2. СВОБОДНЫЕ КЛАССА 2 НИЛЬПОТЕНТНЫЕ W-СТЕПЕННЫЕ ГРУППЫ

ТЕОРЕМА 5.2.1. *Нильпотентная класса 2 W-степенная группа G, порожденная двумя независимыми элементами u, v бесконечного порядка, тогда и только тогда оказывается свободной нильпотентной класса 2, когда никакие степени u, v не коммутируют между собой.*

НЕОБХОДИМОСТЬ. Предположим, что

$$[u^{\gamma}, v^{\delta}] = e$$

Тогда, в силу следствия 1.3.2., имеем:

$$[u, v]^{\gamma\delta} = e,$$

т.е. G_2 вопреки предположению, периодичен.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Если никакие степени элементов u, v не коммутируют, то коммутатор $[u, v]$ без кручения. В этом случае в группе G вообще нет кручения. Действительно, наличие в G периодических элементов эквивалентно выполнению некоторого соотношения вида (5.1.1). Однако в рассматриваемой ситуации подробные соотношения в G не реализуются (см. предложение 5.1.1.). Остается вспомнить, что всякая нильпотентная класса 2 W-группа без кручения с двумя образующими является свободной нильпотентной класса 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.1. Из предшествующего очевидно, что теореме можно придать следующую формулировку:

Нильпотентная класса 2 W-группа, порожденная двумя независимыми элементами без кручения, тогда и только тогда является свободной нильпотентной класса 2 W-группой, когда ее коммутант без кручения.

ЛЕММА 5.2.1. *Если в n-нильпотентной W-группе G содержится не менее двух независимых элементов без кручения, то и в фактор-группе G/G_n найдется не менее двух подобных элементов.*

(i) Предположим, что в G_n имеется хотя бы один элемент без кручения. Тогда ясно, что среди элементов бесконечного порядка имеется по крайней мере один правонормированный коммутатор $k=[x,y]$ веса n, где вес $w(x)=n-1$. Действительно, в ином случае и вся W- подгруппа G_n оказалась бы периодической. Но если коммутатор k без кручения, то и элементы x и y такие же элементы. Более того, они независимы (заметим, что подгруппа $<x,y>$, в силу теоремы 5.1.1, - свободная нильпотентна класса 2). Смежные классы $\bar{x}=xG_n, \bar{y}=yG_n$ не могут оказаться зависимыми и в фактор-группе G/G_n. В самом деле, предложим обратное, и пусть $\bar{x}^{\alpha}=\bar{y}^{\beta}$. Это означает, что $x^{\alpha}=y^{\beta}k_1$ лежит в k_1. В таком случае

$$[x^{\alpha},y]=[y^{\beta}k_1,y]=e,$$

так как элемент k_1 центральный. Следовательно, вопреки предложению, и коммутатор k оказывается периодическим.

(ii) Допустим теперь, что G_n - периодическая группа. Выберем в G два независимых элемента u и v без кручения. Построим фактор-группу G/G_n и рассмотрим в ней смежные классы $\bar{u}=uG_n$, $\bar{v}=vG_n$. Ясно, что $\bar{u}$ и $\bar{v}$ независимы: в ином случае мы придем к некоторому соотношению

$$u^{\alpha}=v^{\beta}k,\ k\in G_n,$$

откуда, с учетом периодичности k_1, вытекает зависимость u от v. Остается заметить, что $\bar{u}$ и $\bar{v}$ элементы без кручения.

ЗАМЕЧАНЕ 5.2.2. Пусть G - неабелева нильпотентная группа без кручения. Тогда в ней заведомо содержится не менее двух независимых элементов. Действительно, из зависимости каждой пары элементов из G вытекает коммутируемость некоторых их степеней, что влечет за собой (в нильпотентной группе без кручения) перестановочность самих элементов.

Далее известно, что фактор-группа G/Z Не может быть локально циклической. Справедливость леммы 5.2.1 в рассматриваемом случае следует из предыдущего.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2.3. Очевидно, что лемма 5.2.1. справедлива и для фактор-группы G/I нильпотентной группы без кручения по I/G_n. Переход к соответствующим фактор-группам позволяет из леммы 5.2.1. получить

СЛЕДСТВИЕ 5.2.1. *В каждой фактор-группе $G/I(G_m)$ $(m = 2,...,n)$ неабелевой нильпотентной W-группы G без кручения содержится не менее двух независимых элементов.*

ТЕОРЕМА 5.2.2. *Пусть в конечно порожденной n-нильпотентной группе G содержится не менее двух независимых элементов без кручения. Тогда всякая ее максимальная m-нильпотентная подгруппа $(m \le n)$ содержит также по крайней мере два независимых элемента без кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в G произвольную максимальную m-нильпотентную $(m \le n)$ подгруппу M. Ясно, что центр $Z(G)$ лежит в M. Рассмотрим в G нормальный делитель без кручения N; такой существует. Пересечение N с M содержит по крайней мере один центральный элемент z без кручения. Предложим, что все элементы без кручения из M зависят от z. Тогда , в силу условия теоремы, элемент h без кручения, не зависящий от z, должен найтись в группе G вне ее подгруппы M.

Рассмотрим $P(M)$ максимальную периодическую W-подгруппу M. Тогда так как, M имеет конечное число образующих решетка $L(P(M))$ имеет конечную длину и следовательно, можем выбрать показатель $\ell \in W$ так, чтобы h^ℓ принадлежал централизатору $Z(P(M))$.

Построим теперь в G подгруппу $< h^l, M >$. Из предыдущего следует; что класс нильпотентности этой подгруппы остается равным классу m нильпотентности подгруппы M. Действительно, каждый элемент u без кручения из M (он зависит от z) можно представить в виде $u = az$, где α из

$P(M)$. Значит, ${}^{\flat}h^{\ell}$, коммутирует с любым периодическим элементом, коммутирует также с каждым элементом u. Этим доказано, что выбранная нами подгруппа M не может быть в группе G максимальной m-нильпотентной подгруппой.

Обозначим через Ω свободную нильпотентную класса 2 W-степенную группу порожденную двумя элементами x, y т.е. $\Omega = < x, y >$.

5.3. ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ $Aut[L(G)]$

Ясно, что групповой изоморфизм индуцирует естественное проектирование. Общие условия, при которых заданный структурный изоморфизм индуцируется групповым, остаются пока невыясненными. Существуют проектирования (например, бесконечной циклической группы, группы порядка p^{α}, p- простое), не индуцируемые групповыми изоморфизмами. В то же время установлено (см., например [55], [56], [55]), что проектирования многих групп всегда возникают при некоторых групповых изоморфизмах. В связи с этими фактами полезно рассмотреть группу $Aut[L(G)]$ всех автоморфизмов структуры $S(G)$ заданной группы G.

Рассмотрим группу $Aut(G)$ всех автоморфизмов группы G. Обозначим через гомоморфизм f (при естественном соответствии между автоморфизмами группы G и ими индуцируемыми автопроектированиями). Пусть K - ядро гомоморфизма f. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.3.1. *Пусть G - неабелева группа без кручения. Тогда ядро K естественного гомоморфизма $f : Aut[G] \to Aut[L(G)]$ исчерпывается единицей группы $Aut[G]$ т.е. f оказывается мономорфизмом $Aut[G]$ в $Aut[L(G)]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через J подгруппу из $Aut[G]$, состоящую из всех внутренних автоморфизмов группы G. Убедимся, что перечисление $K \cap I$ тривиально. Допустим обратное и выберем в $K \cap I$ произвольный элемент ω. Пусть g_ω есть тот элемент группы G, который реализует автоморфизм ω. Так как ω вызывает тождественное автопроектирование группы G, то для любой подгруппы H из G имеем:

$$g_\omega H g_\omega^{-1} = H.$$

Рассмотрим совокупность всех подобных элементов g_ω; ее принято называть нормой $T(G)$ группы G [3]. Ясно, что центр группы принадлежит норме. Бэр доказал, что норма $T(G)$ группы G без кручения совпадает с $Z(G)$. Но из того, что элемент g_ω центральный, немедленно следует, что автоморфизм ω тождественный и пересечение $K \cap I$ тривиально.

Пусть теперь σ - любой элемент ядра K. Так как J и K - нормальные делитель в $Aut[G]$, то из предыдущего вытекает, что σ коммутирует с каждым внутренним автоморфизмом, т.е. σ - нормальный автоморфизм группы G.

Изучим две возможности:

(i) Группа G обладает нетривиальным центром. Выберем в группе G элемент a, не лежащий в ее центре (такой элемент должен найтись по условию теоремы). Тогда, в силу того, что G группа без кручения для любого σ из K либо $\sigma(a) = a$, либо $\sigma(a) = a^{-1}$.

Допустим, что $\sigma(a) = a$. Покажем, что в таком случае для каждого центрального элемента z из G справедливо равенство $\sigma(z) = z$. Действительно, предположим, что реализуется другая возможность: $\sigma(z) = z^{-1}$. Тогда, с одной стороны,

$$\sigma(az) = \sigma(a)\sigma(z) = az^{-1},$$

а с другой,

$$\sigma(az) = (az)^{\varepsilon}, \qquad |\varepsilon| = 1.$$

Если $\varepsilon = 1$, то из последних двух соотношений следует, что $z^2 = e$, чего не может быть в чистой группе.

Если $\varepsilon = -1$, то тем путем приходим вновь к противоречию: $a^2 = e$.

Убедимся теперь, что каждого элемента b из $G \setminus Z$ выполняется соотношение $\sigma(b) = b$. Предположим, что это не так. Тогда единственная возможность – это $\sigma(b) = b^{-1}$. Возьмем любой центральный элемент z. При сделанных предположениях имеем:

$$\sigma(bz) = \sigma(b)\sigma(z) = b^{-1}(z).$$

В то же время

$$\sigma(bz) = (bz)^{\mu}, \qquad |\mu| = 1.$$

Теперь легко убедиться, что при любом $|\mu| = 1$ последние два соотношения не совместимы с чистой группы G.

Допустим, что $\sigma(a) = a^{-1}$. В этом случае, так же как в предыдущем случае можно установить, что для любого z из $Z(G)$ и каждого b из $G \setminus Z$ имеют место соотношения:

$$\sigma(z) = z^{-1}, \qquad \sigma(b) = b^{-1}.$$

Убедимся, что эти условия в неабелевой группе не реализуется. В самом деле, выберем в G пару некоммутатирующим элементов a и b. Тогда как отмечено выше,

$$\sigma(ab) = (ab)^{-1},$$

с другой стороны,

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) = a^{-1}b^{-1}.$$

Отсюда следует, вопреки выбору элементов $a,\ \ b$, что

$$[a, b] = e$$

Этим доказано, что автоморфизм σ тождественный.

(ii) Центр группы G тривиален. В этом случае проходят рассуждения, приведенные в G для конечной группы. А именно: выберем в группе G пару произвольных элементов a и b. Обозначим через i внутренний автоморфизм, реализуемый элементом b. Тогда

$$\iota(a) = bab^{-1}, \qquad \iota(\sigma(a)) = b\sigma(a)b^{-1} \quad .$$

В то же время

$$\sigma(\iota(a) = \sigma(b)\sigma(a)\sigma(b^{-1})$$

Отсюда, в силу нормальности σ, получаем:

$$\sigma(a) = b^{-1}\sigma(b)\sigma(a)\sigma(b)^{-1}b.$$

Последнее означает, что элемент b^{-1} принадлежит центру $Z(G)$. Остается учесть, что в рассматриваемом случае центр тривиален. Из этого немедленно следут, что $\sigma(b) = b$ т.е. σ- тождественный автоморфизм.

Основная теорема параграфа 7, устанавливает индуцируемость решеточного изоморфизма чистой неабелевой нильпотентной W-группы G с неодномерным центром полулинейным изоморфизмом.

6. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ НИЛЬПОТЕНТНЫХ W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

6.1. РЕШЕТОЧНАЯ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

Скажем, что группа определяется решеткой своих подгрупп, если она изоморфна всякой группе которой она решеточно изоморфна.

Здесь рассматриваются решеточные изоморфизмы свободных нильпотентных W-групп над общими биномиальными кольцами.

Будет показано, что свободная нильпотентная группа определяется решеткой своих подгрупп.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1.1. *Пусть в группе G имеется центральный ряд*

$$E = A_0 \subset A_1 \subset .... \subset A_k \subset ... \subset A_n = G \qquad (*)$$

с факторами $G' A_k (k = 0,1...,n-1)$ без кручения. Тогда ряд подгрупп

$$E = A_0^\varphi \subset A_1^\varphi \subset .... \subset A_k^\varphi \subset ... \subset A_n^\varphi = G^\varphi,$$

соответствующий ряду (*) при решеточным изоморфизме φ, будем центральным рядом группы G^φ с факторами без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что всякая группа, решеточно изоморфна некоторой, сама будет без кручения. В частности, при условия теоремы, без кручения оказывается группа G^φ.

Легко проверить, что подгруппе A_1, лежащей в центре группы G без кручения, соответствует при φ подгруппа A_1^φ, лежащая в центре $G^{\varphi 1}$). В самом деле, пусть g^φ - любой элемент G^φ и g - такой элемент из G, что $< g >^\varphi = < g^\varphi >$. Тогда подгруппа $< A_1^\varphi, g^\varphi > \subset G^\varphi$ соответствует при φ подгруппе $< A_1, g > \subset G$. Но эта – абелева без кручения. Группа $< A_1^\varphi, G^\varphi >$ также абелева без кручения, и потому A_1^φ принадлежит центру G^φ.

Проведем индукцию по k. Пусть уже для всех $l \le k$, доказано, что фактор-группа $A_{l+1}^\varphi / A_l^\varphi$ лежит в центре G^φ / A_l^φ. Это означает, что A_{k+1}^φ

нормальный делитель G^{φ} и что может быть образована фактор-группа $G^{\varphi} / A^{\varphi}_{k+1}$. Изоморфизм φ индуцирует решеточный изоморфизм между фактор-группами G / A_{k+1} и $G^{\varphi} / A^{\varphi}_{k+1}$. По условию G / A_{k+1} - группа без кручения. Следовательно, если A_{k+2} / A_{k+1} лежит в ее центре, то согласно 1.2. фактор-группа A_{k+2} / A_{k+1} лежит в центре $G^{\varphi} / A^{\varphi}_{k+1}$ и т.д.

ТЕОРЕМА 6.1.1. *При решеточным изоморфизме φ верхнему центральному ряду*

$$E = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_k \subset \ldots Z_n = G \qquad (6.1.1.)$$

нильпотентной группы без кручения G соответствует верхний центральный ряд

$$E = Z^{\varphi}_0 \subset Z^{\varphi}_1 \subset \ldots \subset Z^{\varphi}_k \subset \ldots Z^{\varphi}_n = G^{\varphi} \qquad (6.1.2.)$$

группы G^{φ}, решеточно изоморфной G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3], что все факторы верхнего центрального ряда (6.1.1.) нильпотентной группы без кручения не содержат периодических элементов. Поэтому в силу предложения 3.4.1. ряд (6.1.2.) будет центральным рядом группы G^{φ}. Допустим, далее, что

$$E = (Z^{\varphi})_0 \subset (Z^{\varphi})_1 \subset \ldots \subset (Z^{\varphi})_k \subset \ldots (Z^{\varphi})_n = G^{\varphi} \qquad (6.1.3.)$$

- ее верхний центральный ряд (отметим, что несколько последних членов этого ряда могут совпасть с G^{φ}). В силу определения этого ряда

$$(Z_k)^{\varphi} \subseteq (Z^{\varphi})_k$$

для любого k. При обратном изоморфизме φ^{-1} окажется, что

$$Z_k \subseteq (Z^{\varphi})^{\varphi-1}_k$$

и ряду (6.1.3.) будет соответствовать (предложение 6.1.1.) некоторый центральный ряд

$$E = (Z^{\varphi})^{\varphi-1}_0 \subset (Z^{\varphi})^{\varphi-1}_1 \subset \ldots \subset (Z^{\varphi})^{\varphi-1}_k \subset \ldots (Z^{\varphi})^{\varphi-1}_n = G$$

группы G. Сравнения его с верхним центральным рядом (6.1.1.) этой группы устанавливаем для любого k, что $Z_k \supseteq (Z^{\varphi})_0^{\varphi-1}$ т.е. что (6.1.2) – верхний центральный ряд G^{φ}.

СЛЕДСТВИЕ 6.1.1. *Группа G^{φ}, решеточно изоморфная n-ступенной нильпотентной группой без кручения сама будет n-ступенной нильпотентной группой без кручения.*

СЛЕДСТВИЕ 6.1.2. *Группа G^{φ}, решеточно изоморфная локально нильпотентной группе G без кручения, сама является локально нильпотентной группой без кручения.*

Назовем размерностью абелевой W-группы A максимальное число линейно независимых элементов фактор-группы A по ее периодической части.

Тогда для любой подгруппы B из A следует, что

$$\dim A = \dim A / B + \dim B \qquad (6.1.4.)$$

Пусть A - разрешимая группа и

$$A \supset A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n = E$$

какой либо ее нормальный разрешимый ряд. По определению

$$\dim A = \sum_{k=0}^{n-1} \dim A_k / A_{k+1}.$$

Из теоремы Шрейдера следует независимость $\dim A$ от выбора нрмального ряда и справедливости соотношения (6.1.4) для разрешимых групп. Имеет место

ЛЕММА 6.1.1. *Пусть*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = E$$

- нижний центральный ряд свободной n-ступенной нильпотентной группы с r образующими.

Тогда, если $\dim G_k / G_{k+1}$ равен $\dim G'_k / G'_{k+1} (k = 0,1,\ldots,n-1)$, то G' изоморфна G.

Доказательство аналогично доказательству соответствия леммы работы [58].

Обозначим через N ядро естественного гомоморфизма $G \to G'$.

Так как G - без кручения , то либо $N = E$, либо $dim N \geq 1$. В силу $dim G' = dim G - dim N$ по условию же $dim G' = dim G$. Следовательно, $dim N = 0$. Тем самым изоморфизм G' и G доказан.

ТЕОРЕМА 6.1.1. *Пусть X и Y W-степенные группы над кольцами W_1 и W_2 соответственно, если X свободная группа, $X \not\cong \Omega$, то тогда $W_1 \cong W_2$ и $X \cong Y$*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сперва, что $W_1 \cong W_2$. Если $dim Z(X) \geq 2$, то тогда в X найдется подгруппа A, $dim A \geq 3$ и из основной теоремы проективной геометрии следует, что решеточный изоморфизм индуцируется полулинейным изоморфизмом, что в свою очередь влечет изоморфизм $W_1 \cong W_2$.

Если же $dim Z(X) = 1$ и $X \not\cong \Omega$, то т.к. X свободная нильпотентная группа в X имеется фактор X / X_α такой, что $dim Z(X) \geq 2$ и по той же причине заключаем, что $W_1 \cong W_2$.

Пусть G - свободная n-ступенная нильпотентная группа с r образующими и

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = E \qquad (6.1.5)$$

- ее нижний центральный ряд. Известно, что все факторы G_k / G_{k+1} $(k = 1,2,\ldots n-1)$ являются свободными абелевыми группами. При решеточном изоморфизме φ между группами G и G^φ ряду (6.1.5.).

Соответствует (теорема 1) некоторый центральный ряд

$$G^\varphi = G_0^\varphi \supset G_2^\varphi \supset \ldots \supset G_{n-1}^\varphi \supset G_n^\varphi = E \qquad (6.1.6.)$$

группы G^φ.

Изоморфизм φ индуцирует решеточный изоморфизм между свободным абелевым фактором G_k / G_{k+1} ряда (6.1.5) и фактором $G_k^\varphi / G_{k+1}^\varphi$

ряда (6.1.6.). Следовательно свободная абелева группа определяется решеткой своих подгрупп, так как в этом случае dim совпадает с количеством образующих, что является решеточным инвариантом и потому соответствующие факторы рядов (6.1.5.) и (6.1.6.) оказываются изморфными:

$$G_k^{\varphi} / G_{k+1}^{\varphi} \cong G_k / G_{k+1}.$$

Так как из определения решеточного изоморфизма следует, что группы G и G^{φ} имеют одно и то же минимальное число образующих элементов, то лемма позволяет заключить, что G и G^{φ} изоморфны

СЛЕДСТВИЕ 6.1.3. *При решеточном изоморфизме φ нижнему центральному ряду (6.1.5.) свободной нильпотентной W-группы соответствует нижний центральный ряд (6.1.6.) группы G^{φ}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме $G^{\varphi} / G_k^{\varphi}$ изоморфна G / G_k, ибо G / G_k есть k-ступенная нильпотентная свободная группа. Но если $G^{\varphi} / G_k^{\varphi}$ есть свободная k-ступенная нильпотентная группа, то заведомо G_k^{φ} есть k-й член нижнего центрального ряда G^{φ}.

6.2. РЕШЕТОЧНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КЛАССА 2 W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦОМ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Решеточный изоморфных групп G и G^{φ} уже установлено в согласии с предложением 1.1. Одно из двух возможных взаимно однозначных соответствии. Это соответствие будем обозначать буквой ψ, а элемент из G^{φ}. Соответствующий при ψ элементу a на G через a^{ψ}.

ЛЕММА 6.2.1. *Всякая нильпотентная класса 2 группа (G без кручения с двумя образующими является свободной нильпотентной класса 2 группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверятся, что коммутант K группы G - циклическая подгруппа. Изолятор $J(K)$ коммутанту K является циклической подгруппой. Рассмотрим фактор-группу $G/_{J(K)}$. Она абелевы и не может быть циклической, так как $J(K)$ содержится в центре группы G. Следовательно, $G/_{J(K)}$ - абелева группа с двумя образующими. Это означает, что любая, о том числе и свободная, нильпотентна класса 2 группа с двумя образующими имеет рациональный ранг, равный трем. Но всякая нильпотентна класса 2 группа без кручения является факторгруппой свободной нильпотентной класса 2 группы . Отсюда следует, что если бы группе не была бы свободна, ее рациональный ранг не мог бы равняется трем. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2.2. *Пусть G и G^{φ} - решеточно изоморфные группы. G- нильпотентная класса 2 группа без кручения. Тогда для любых ее двух непереставовочных элементов a и b и их коммутатора $K=b^{-1}a^{-1}ba=[b,a]$ при некотором $\lambda \in W$, ε, $\mu \in \Lambda$, $\eta = \pm 1$ и показателях ε, μ, η таких, что $|\varepsilon|=|\mu|=|\eta|=1$ имеют место равенства:*

1. $(ab)^{\psi}=(a^{\psi})^{\sigma(\varepsilon)}(b^{\psi})^{\sigma(\mu)}(K^{\psi})^{\lambda}$,

2. $K^{\psi}=((b^{\psi})^{-1}(a^{\psi})^{-1}b^{\psi}a^{\psi})^{\eta}$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 2.1. и 2.2. работы [58], так как, в силу леммы 6.2.1 подгруппа $<a,b>$ группы G оказывается свободной нильпотентной класса 2.

ТЕОРЕМА 6.2.1. *Пусть G и G^{φ}- две решеточно-изоморфные группы. G- нильпотентная класса 2, не локально циклическая группа без кручения. Тогда группы G и G^{φ} изоморфны и решеточный изоморфизм φ индуцируется одним антиизоморфизмом между элементами групп G и G^{φ}.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу отметим, что G^{φ} такие нильпотентные класса 2 W-группы без кручения. Группа G содержит, по крайней мере, два независимых элемента и имеет отличный от единицы центр Z. Следовательно, между элементами группы G и G^{φ} установлено, как уже отмечалось, взаимно однозначное соответствие φ, индуцирующее решеточный изоморфизм φ. Докажем, что соответствие ψ является изоморфизмом, либо антиизоморфизмом. Для этого достаточно доказать, что для любых двух элементов a и b из G имеет место одно из двух равенств:

$$(ab)^{\psi} = a^{\psi}b^{\psi} \text{ или } (ab)^{\psi} = b^{\psi}a^{\psi}$$

Если a и b - неперестановочные элементы, то на основании предложения 1.1. $(ab)^{\psi} = a^{\psi}b^{\psi}$

Пусть теперь a и b - любые два неперестановочных элемента на группе G. Тогда по лемме 1.3. реализуется одна из восьми возможностей:

$$(ab)^{\psi} = (a^{\psi})^{\varepsilon}(b^{\psi})^{\mu}(k^{\psi})^{\lambda} \qquad (6.2.1)$$

$$K^{\psi} = ((b^{\psi})^{-1}(a^{\psi})^{-1}b^{\psi}a^{\psi})^{\eta} \qquad (6.2.2)$$

$$\varepsilon,\ \mu,\ \eta \in \Lambda$$

Покажем, что на самом деле все возможности приводятся к двум: либо $(ab)^{\psi} = a^{\psi}b^{\psi}$ либо $(ab)^{\psi} = b^{\psi}a^{\psi}$.

Предложим сначала, что $\varepsilon = \mu = 1$ т.е.

$$(ab)^{\psi} = a^{\psi}b^{\psi}(k^{\psi})^{\lambda}$$

При этом, согласно равенству (3), либо $k^{\psi} = k'$, либо $k^{\psi} = (k')^{-1}$, где $k' = (b^{\psi})^{-1}(a^{\psi})^{-1}b^{\psi}a_{\psi}$.

Разберем сперва случай, когда $k^{\psi} = k'$. Покажем, что при этом варианте любого натурального S имеет место равенство:

$$(a^{S}b^{S})^{\psi} = (a^{\psi})^{S}(b^{\psi})^{S}(k')^{\lambda S} \qquad (6.2.3)$$

Действительно, во-первых, элементы G и G^{φ} перестановочны по модулю коммутанта, $ba = abk \ (k = [b,a])$. Во-вторых,

$$(ba)^{\varphi} = (abk)^{\psi} = (ab)^{\psi}k^{\psi} = a^{\psi}b^{\psi}(k^{\psi})^{\lambda}k^{\psi} =$$
$$= a^{\psi}b^{\psi}(k')^{\lambda+1} = b^{\psi}a^{\psi}(k')^{\lambda}$$

Далее $(ab)(ba) = a^{2}b^{2}k^{2}$. Тогда

$$(a^2b^2k^2)^\psi(ab)^\psi(ba)^\psi = a^\psi b^\psi(k')^\lambda b^\psi a^\psi(k')^\lambda =$$
$$= a^\psi(b^\psi)^\lambda a^\psi(k')^{2\lambda} = (a^\psi)^{2\lambda}(b^\psi)^2(k')^{2\lambda}$$

Отсюда $(a^2b^2)^\psi = (a^2b^2k^2k^{-2})^\psi = (a^2b^2k^2)^\psi = (a^\psi)^2(a^\psi)^2(k')^{2\lambda}$

Предложим уже доказанным равенство:

$$(a^{S-1}b^{S-1})^\psi = (a^\psi)^{S-1}(b^\psi)^{S-1}(k')^{(S-1)\lambda}$$

Отметим, что элементы $a^{s-1}b^{s-1}$ и ba перестановочны

$$(a^{S-1}b^{S-1})(ba) = a^{S-1}b^Sa = a^Sb^Sk^S = ba^Sb^{S-1} = (ba)(a^{S-1}b^{S-1}).$$

Поэтому

$$(a^Sb^Sk^S)^\psi = (a^{S-1}b^{S-1})^\psi(ba)^\psi = (a^\psi)^{S-1}(b^\psi)^{S-1}(k')^{(S-1)\lambda}b^\psi a^\psi(k')^\lambda =$$
$$= (a^\psi)^S(b^\psi)^S(k')^S(k')^{\lambda S}$$

Следовательно

$$(a^Sb^S)^\psi = (a^Sb^Sk^Sk^{-S})^\psi = (a^\psi)^S(b^\psi)^S(k')^S(k')^{\lambda S}(k')^{-S} =$$
$$= (a^\psi)^S(b^\psi)^S(k')^S(k')^{\lambda S}$$

Равенство (6.2.3) доказано.

С другой стороны, по лемме 6.2.2, примененной к элементам a^S и b^S и с учетом формулы (6.2.3) получаем равенство

$$(s^Sb^S)^\psi = (a^\psi)^S(b^\psi)^S[(b^\psi)^S(k')^{\gamma S^2}, \qquad (6.2.4)$$

где γ - целое число, которое зависит, вообще говоря, от S.

Сравнивая полученные для любого натурального соотношении (6.2.3) и (6.2.4), находим, что $S\lambda = S^2\gamma$ т.е. $\lambda = S\gamma$. Но тогда, если хотя бы одно γ равно 0, то $\lambda = 0$. Если же все γ отличим от нуля, то из того, что любое натуральное S делит λ, также следует, что $\lambda = 0$. Значит в рассматриваемом случае $(ab)^\psi = a^\psi b^\psi$.

Пусть теперь $K^\psi = (K')^{-1}$. Покажем, что в этом случае $(ab)^\psi = b^\psi a^\psi$. Подробно тому, как делали в предыдущем случае, получаем:

$$(ba)^\psi = (abk)^\psi = (ab)^\psi K^\psi = a^\psi b^\psi(k')^\lambda(k')^{-1}b^\psi a^\psi(k')^{\lambda-2}$$

$$(a^2b^2k^2)^\psi = (ab)^\psi (ba)^\psi = a^\psi b^\psi (ba)^\psi = a^\psi b^\psi (k')^\lambda b^\psi a^\psi (k')^{\lambda-2} = \\ = a^\psi (b^\psi)^2 a^\psi (k')^{2\lambda-2} = (a^\psi)^2 (b^\psi)^2 (k')^{2\lambda}.$$

Тогда

$$(a^2b^2)^\psi = (a^2b^2k^2k^{-2})^\psi = (a^2b^2k^2)^\psi (k^\psi)^{-2} = \\ = (a^\psi)^2(b^\psi)^2(k')^{2\lambda}(k')^2 = (a^\psi)^2(b^\psi)^2(k')^{2(\lambda+1)}.$$

Пусть уже показано, что

$$(a^{S-1}b^{S-1})^\psi = (a^\psi)^{S-1}(b)^{S-1}(k')^{(S-1)(\lambda+S-1)}.$$

Затем получим:

$$(a^Sb^Sk^S)^\psi = (a^{S-1}b^{S-1}ba)^\psi = (a^{S-1}b^{S-2})^\psi (ba)^\psi = \\ = (a^\psi)^{S-1}(b^\psi)^{S-1}(k')^{(S-1)(\lambda+S-1)} b^\psi a^\psi (k')^{\lambda-1} = \\ = (a^\psi)^{S-1}(b^\psi)^S a^\psi (k')^{(S-1)(\lambda+S-2)}(k')^{\lambda-2} = \\ = (a^\psi)^S(b^\psi)^S(k')^{(\lambda+S-2)}$$

$$(a^Sb^S)^\psi = (a^Sb^SK^Sk^{-S})^\psi = (a^Sb^Sk^S)^\psi (k^{-S})^\psi = \\ = (a^\psi)^S(b^\psi)^S(k')^{(\lambda+S-1)}$$

С другой стороны

$$(a^Sb^S)^\psi = (a^\psi)^S(b^\psi)^S(k')^{S^2\gamma}.$$

Следовательно, $S(\lambda+S-1) = S^2\gamma$ откуда

$$\lambda - 1 = S(\gamma - 1).$$

для любого натурального S. Если хотя бы для одного S число ν равно I, то $\lambda = 1$. Если же все ν отличны от 1, то любое натуральное S делит $\lambda - 1$. Значит $\lambda - 1 = 0$ и $\lambda = 1$. Но тогда $(ab)^\psi = b^\psi a^\psi$.

Итак, если в равенстве (6.2.1) показатели ε и μ равны I, то либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 1$, а значит либо $(ab)^\psi = a^\psi b^\psi$, либо $(ab)^\psi = b^\psi a^\psi$.

Аналогичным путем убедимся, что реализация каждой из остальных трех возможностей, представляемых соотношением (6.2.1), в сочетании с любой из двух возможностей, представляемых соотношением (6.2.2) приводит либо к $(ab)^\psi = (a^\psi)^\varepsilon (b^\psi)^\mu$ либо к $(ab)^\psi = (b^\psi)^\varepsilon (a^\psi)^\mu$.

Покажем невозможность хотя бы одного из равенств $\varepsilon \neq 1, \mu \neq 1$.

Предположим, что $(ab)^{\psi} = a^{\psi}(b^{\psi})^{\alpha}$. Вызываем элемент z из центра Z. Тогда получим:

$$(zab)^{\psi} = z^{\psi}(ab)^{\psi} = z^{\psi}a^{\psi}(b^{\psi})^{\alpha} \qquad (6.2.5)$$

С другой стороны, принимая во внимание равенства $(zab)^{\psi} = (azb)^{\psi}$ * и $(zb)^{\psi} = z^{\psi}b^{\psi}$, следует, что для $(zab)^{\psi}$ реализуется одно из восьми равенств:

$$(zab)^{\psi} = (azb)^{\psi} = a^{\psi}(zb)^{\psi} = a^{\psi}z^{\psi}b^{\psi} \qquad (6.2.6)$$

$$(zab)^{\psi} = z^{\psi}b^{\psi}a^{\psi} \qquad (6.2.7)$$

$$(zab)^{\psi} = a^{\psi}(z^{\psi})^{\alpha}(b^{\psi})^{\beta} \qquad (6.2.8)$$

$$(zab)^{\psi} = (z^{\psi})^{\alpha}(b^{\psi})^{\beta}a^{\psi} \qquad (6.2.9)$$

$$(zab)^{\psi} = (a^{\psi})^{\alpha}z^{\psi}b^{\psi} \qquad (6.2.10)$$

$$(zab)^{\psi} = z^{\psi}b^{\psi}(a^{\psi})^{\beta} \qquad (6.2.11)$$

$$(zab)^{\psi} = (a^{\psi})^{\alpha}(z^{\psi})^{\alpha}(b^{\psi})^{\beta} \qquad (6.2.12)$$

$$(zab)^{\psi} = (z^{\psi})^{\beta}(b^{\psi})^{\alpha}(a^{\psi})^{\alpha} \qquad (6.2.13)$$

Сравним теперь каждое из полученных равенств с равенством (6.2.5). В любом случае получим противоречие. Действительно, из сравнения (6.2.6), (6.2.8) и (6.2.11) с равенством (6.2.5) получим периодичность одного из элементов: b^{ψ}, z^{ψ} или $(a^{\psi})(b^{\psi})^{-1}$, что противоречит отсутствию кручения в группе G. Сравним теперь равенства (6.2.7), (6.2.10), (6.2.12) и (6.2.5). Во всех случаях получим перестановочность элементов a^{ψ} и b^{ψ}, что противоречит неперестановочности элементов a и b (6.2.3). Осталось сравнить равенства (6.2.9) и (6.2.5). Сделаем это. Тогда получим:

$$(z^{\psi})^{2} = (b^{\psi})^{\beta}a^{\psi}b^{\psi}(a^{\psi})^{\alpha} = [b^{\psi}, a^{\psi}]^{\alpha}.$$

Но z^{ψ} - произвольный элемент из z^{φ}, в частности можно считать, что $z^{\psi} = [b^{\psi}, z^{\psi}]^{\alpha}$. Следовательно, и в этом случае приходим к противоречию –

перестановочности элементов a^{ψ} и b^{ψ}. Итак наше предположение, что $(ab)^{\psi} = a^{\psi}(b^{\psi})^{\beta}$ невозможно.

Аналогичным образом, даже проще, так как для $(zab)^{\psi}$ в каждом следующем случае остается меньше возможностей. Можно показать противоречивость равенств: $(ab)^{\psi} = (b^{\psi})^{\beta}a^{\psi}$, $(ab)^{\psi} = (a^{\psi})^{\alpha}(b^{\psi})^{\beta}$, $(ab)^{\psi} = (b^{\psi})^{\beta}(a^{\psi})^{\alpha}$, $(ab)^{\psi} = (a^{\psi})^{\alpha}b^{\psi}$.

Поэтому для любых элементов a и b из реализуется одна из возможностей: $(ab)^{\psi} = a^{\psi}b^{\psi}$ или $(ab)^{\psi} = b^{\psi}a^{\psi}$. Как уже отмечалось это значит, что ψ оказывается либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом.

Наконец, очевидно, что когда ψ - изоморфизм (антиизоморфизм), вторым взаимно однозначным соотношением ψ, между элементами групп G и G^{φ}. Индуцирующим решеточный изоморфизм φ, оказывается и антиизоморфизм (изоморфизм).

Теорема доказана.

7. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЧИСТЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП

7.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ДЛЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ W-СТЕПЕННЫХ ГРУПП КЛАССА 3

В общей теории групп долго стояла проблема: индуцируется ли любой решеточный изоморфизм нильпотентной группы без кручения групповым изоморфизмом (Наличие аналога основной теоремы проективной геометрии). Она положительно была решена Л.Е.Садовским (Проектирования и изоморфизмы нильпотентных групп: *Известия АН СССР*, т.29, 1965, 171-208).

Несмотря на то, что наблюдается большое сходство между нильпотентными группами (без кручения) и алгебрами Ли, аналогичная задача для алгебр Ли рещается отрицательно (А.А.Лашхи, 1973, 1994).

Ниже мы укажем на возможное обобщение отмеченной теоремы для W–степенных групп.

Пусть теперь W–степенные группы X и Y определены над кольцами W_1 и W_2 соответственно. Будем говорить, что справедлива основная теорема проективной геометрии, если решеточный изоморфизм $f{:}L(X)\to L(Y)$ влечет наличие изоморфизма σ: $W_1\to W_2$ и σ-полулинейного изоморфизма μ: $X\to Y$ такого, что для любой подгруппы $A\in L(X)$ имеет место равенство

$$f(A)=\mu(A).$$

Ясно, что наличие основной теоремы проективной геометрии в абелевом случае тоже самое, что справедливость теоремы для модулей над общими кольцами. По этому поводу имеется большое количество работ [62]- [65].

ТЕОРЕМА 7.1.1. (ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ W–СТЕПЕННЫХ ГРУПП).

Пусть X и Y суть W–степенные группы определенные над кольцами главных идеалов W_1 и W_2 соответственно; $\varphi : L(X)\to L(Y)$ - решеточный изоморфизм. Если X чистая нильпотентная W–степенная группа и $\dim(Z(X)) \geq 2$, то существует изоморфизм σ: $W_1\to W_2$ и σ-полулинейный *изоморфизм μ: $X \to Y$ такой, что для любой подгруппы $A \trianglelefteq L(X)$ справедливо $\mu(A)=\varphi(A)$.*

Заметим, что наличие чистоты X гарантирует чистоту Y и тот факт, что основное кольцо W_1 (и следовательно W_2) не является полем. Ниже приведем пример показывающий, что для случая полей теорема не верна.

ПРИМЕР 5.1.1. Пусть $\Omega=<a,b>$ свободная нильпотентная класса 2 W–степенная группа, порожденная двумя элементами a и b. Предположим, что основное кольцо W является полем. Рассмотрим автоморфизм φ решетки $L(\Omega)$, $\varphi \in Aut[L(\Omega)]$, который все 2-порожденные подгруппы оставляет на месте, а однопорожденные отображает произвольно, но тождественно по модулю коммутанта $z=[a,b]$, т.е.

$$\varphi(<x>)=<xz>.$$

Легко видеть, что решеточный автоморфизм φ не порождается никаким автоморфизмом Ω (никаким полулинейным автоморфизмом).

Доказательство теоремы опирается на кольцевое обобщение основной теоремы проективной геометрии, а также ряд свойств коммутаторов в W–степенных группах.

Доказательство теоремы проведем индукцией по классу n группы G. Примем два индуктивных предложения:

Теорема верна для всех групп G класса, не более чем $n-1$ одно из двух соответствий $\varphi_{\varepsilon,G}$; $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$ порождающих проектирование $\varphi(G)=G^{\varphi}$ и описаны леммой, на любой ее m-нильпотентной $(m \le n-1)$ подгруппе является полулинейным изоморфизмом, а второе – полулинейным антиизоморфизмом.

Основание для индуктивного предположения имеется: для произвольной W-группы G класса $n=2$ теорема верна (параграф 6).

Оснований для индуктивного предложения для $n \ge 3$ пока нет: полулинейным изоморфизм $\varphi_{\varepsilon,G}$ и полулинейным антиизоморфизм $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$ на всех абелевых подгруппах чистой нильпотентной класса 2 группы оказываются полулинейными изоморфизмами.

Придадим силу предположению, для чего проведем

Доказательство теоремы для групп G класса $n=3$. В принципе это то же доказательство, что и в общем случае. Однако, во-первых, оно несколько проще, а во-вторых, является существенным шагом в общих рассуждения.

Пусть группа G удовлетворяет требованиям теоремы и имеют класс $n=3$. Установим между элементами групп G и G^{φ} соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}$; $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$, описанные леммой. При этом на фактор-группах $\overline{G}=G/G_3$ и $\overline{G}^{\varphi}=G^{\varphi}/(G_3)^{\varphi}$ возникнут соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}$; $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$.

Убедимся, что одно из соответствий $\varphi_{\varepsilon,G}$; $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$ является полулинейным изоморфизмом, а другое – полулинейным антиизоморфизмом между $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$ Остановимся, для определяемости, на соответствии $\overline{\varphi}=\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}$. Группа $\overline{G}$ является, вообще говоря, смешанной нильпотентной класса 2. Ее периоди-ческая часть $P(\overline{G})$, как легко проверить, лежит в центре $Z(\overline{G})$. Для любых двух элементов $\overline{x},\overline{y}$ из $\overline{G}$ реализуется одна из трех возможностей $\overline{x},\overline{y}$

1) коммутируют;

2) порождают в $\overline{G}$ свободную 2 нильпотентную подгруппу;

3) порождают в $\overline{G}$ 2 нильпотентную подгруппу с периодическим коммутатором.

В случаях 1) и 2), убеждаемся в справедливости одного из двух равенств:

$$\overline{\varphi}(\overline{x}\overline{y})=\overline{\varphi}(\overline{x})\varphi(\overline{y}), \qquad \overline{\varphi}(\overline{x}\overline{y})=\overline{\varphi}(\overline{y})\varphi(\overline{x})$$

В случае 3) рассмотрим в G прообраз $H=<xG_3,yG_3>$ подгруппы $H=<\overline{x},\overline{y}>$. Подгруппа H свободная 2 нильпотентная. Поэтому уже известный результат [60] дает одно из двух: либо

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y),$$

либо

$$\varphi(xy) = \varphi(y)\varphi(x).$$

Теперь, возвращаясь к фактор-группе $\overline{G}$, можем заключить, что для всех пар элементов $\bar{x}, \bar{y}$ из $\overline{G}$ выполняется либо только первая, либо только вторая альтернатива. Будем, для определенности, предполагать, что $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}$ - полулинейный изоморфизм, а $\overline{\varphi}_{\varepsilon^{-1},G}$ - полулинейный антиизоморфизм.

Рассмотрим в группе G произвольную пару a, b элементов, порождающих в точности 3-нильпотентную подгруппу $T = <a,b>$ (чистой группе G такая подгруппа T должна найтись. Очевидно, что при этом условии a, b и $[a, b]$ не лежат в G_3. Пусть далее, при соответствии $\varphi = \varphi_{\varepsilon,G}$ (порождеающем соответствие $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$) $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. Тогда имеем

$$\varphi(ab) = a'b'c_1', \quad \varphi([ab]) = [a'b']c_2',$$

где c_1', c_2' - некоторые элементы из $(G_3)^{\varphi}$.

Построим в группе G подгруппы

$$A = <a,[a,b],Z(G)>, \qquad B = <b,[a,b],Z(G)>.$$

Одна из них, по крайней мере, должна быть нильпотентной класса 2, так как в ином случае класс всей группы T оказался меньшим трех. Пусть например, нильпотентной класса 2 является подгруппа A. Практирование φ_G сопоставляет ей группу

$$A^{\varphi} = \varphi_G(A) = <a',[a',b']c_2', Z(G^{\varphi})>$$

На паре подгрупп A и A^{φ} соответствие $\varphi_{1,G}(A)$ либо полулинейный изоморфизм, либо полулинейный антиизоморфизм. Допустим, для определенности, что $\varphi_{\varepsilon,G}(A)$ - полулинейный изоморфизм. Тогда, с учетом центральности элемента c_2' имеем:

$$\varphi([[a,b],a]) = [[a',b'],a']$$

Далее, рассмотрим еще одну пару подгрупп: подгруппу B и

$$B^{\varphi} = \varphi_G(B) = < b', [a',b']c'_2, A(G^{\varphi}) >.$$

1) Допустим, что $\varphi_{\varepsilon,G}(B)$ - также полулинейный изоморфизм. Тогда

$$\varphi([[a,b],b = [[a',b'],b'] .$$

2) Пусть $\varphi_{\varepsilon,G}(B)$ - полулинейный антиизоморфизм. Тогда

$$\varphi([[a,b],b = [b',[a',b']]$$

Рассмотрим теперь соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}(M)$ между подгруппами

$$M = < ab,[a,b],Z(G) > \text{ и } M^{\varphi} = < a'b'c'_1,[a',b']c'_2,Z(G^{\varphi}) >$$

(i)Предложим, что $\varphi_{\varepsilon,G}(M)$ - полулинейный изоморфизм. В этом случае

$$\varphi([[a,b],ab]) = [[a',b']c'_2,a'b'c'_1]$$

Но, ввиду принадлежности элементов c'_1, c'_2 к центру, в силу полулинейного изоморфизма $\varphi_{\varepsilon,G}(Z) = Z^{\varphi}$, имеем:

$$\varphi([[a,b],a][[a,b],b]) = \varphi([[a,b],a])\varphi([[a,b],b]) = [[a',b'],a'][[a',b'],b'] .$$

Отсюда, получаем равенство, противоречащее чистоте группы G:

$$[[a',b'],b']^2 = e .$$

(ii)Предложим, что $\varphi_{\varepsilon,G}(M)$ - полулинейный антиизоморфизм. Тогда, как и прежде, имеем:

$$\varphi([[a,b],a][[a,b],b]) = \varphi([[a,b],a])\varphi([[a,b],b]) = [a',[a'b']],[b',[a',b']] .$$

Отсюда вновь приходим к противоречию:

$$[[a',b'],a']^2 = e$$

Таким образом, $\varphi_{\varepsilon,G}(B)$ полулинейным антиизоморфизмом быть не может в предложении, что им не является $\varphi_{\varepsilon,G}(A)$. Теперь, учитывая, что на центрах $Z(G)$ и $Z(G)^{\varphi}$ соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}$ - полулинейный изоморфизм, легко заключаем, что $\varphi_{\varepsilon,G}$ оказывается полулинейным изоморфизмом как на подгруппе M так и на каждой подгруппе вида

$$M = < abh,[a,b], [a,h, [b,h], Z(G) >$$

из G, где h - произвольный элемент группы G. Тем самым для каждой тройкой элементов a, b, h из G справедливо равенство

$$\varphi([[a,b],h]) = [[a',b'],h']$$

в котором $h' = \varphi(h)$. Полученный результат означает, в частности, что

Подгруппа $(G_3)^\varphi = \varphi_G(G_3)$ является предпоследним членом $(G_3)^\varphi$ нижнего центрального ряда группы G^φ, а соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}(G_3)$ является полулинейным изоморфизмом между G_3 и $G_3{}^\varphi$.

7.2. ПОСТРОЕНИЕ W-ПОДГРУППЫ $G^{(\lambda)}$

Отметим, что соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}(M^\bullet)$ оказывается полулинейным антиизоморфизмом, если группа $M^\bullet$ нильпотентным класса 2 и если полулинейным антиизоморфизмом является $\varphi_{\varepsilon,G}(A)$. Соответствие $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}(G_3)$ оказывается вторым полулинейным изоморфизмом между G_3 и $G_3{}^\varphi$.

Построим в группе G подгруппу $G^{(\lambda)}$, порожденную λ-ми ($\lambda > 3$ и простое) степенями ее элементов. Из леммы следует, что при любом λ

$$\varphi_G(< g^\lambda >) = < g'^\lambda >$$

если

$$\varphi_G(< g >) = < g' >.$$

Следовательно проектирование φ_G сопоставляет подгруппу $G^{(\lambda)}$ с подгруппой $(G^\varphi)^{(\lambda)}$, порожденной λ-ми степенями элементов из G^φ. Непосредственно видно, что $G^{(\lambda)}$ - конечно-порожденная и не локально циклическая группа. Поэтому, опираясь на лемму, между элементами из $G^{(\lambda)}$ и $(G^\varphi)^{(\lambda)}$ можно построить такие соответствия $\varphi_G(G^{(\lambda)}) = (G^\varphi)^{(\lambda)}$ легко установить, что одно из этих соответствий, $\varphi_{\varepsilon,G^{(\lambda)}}$, совпадает на группе $G^{(\lambda)}$ с соответствием $\varphi_{\varepsilon,G}(G^{(\lambda)})$, построенным по лемме 2 на всей группе G, а второе – с $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}(G^{(\lambda)})$. В самом деле, построение соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}$ обеспечивается фиксацией определенного полулинейного изоморфизма между $Z(G)$и $Z(G^{\varphi})$ (см. лемму 2). В то же время построение соответствия $\varphi_{\varepsilon,G^{(\lambda)}}$ проводится на основе фиксации одного из тех полулинейных изоморфизмов между центрами $Z(G^{(\lambda)})$ и $Z[(G^{\varphi})]^{(\lambda)}$, которые индуцируют проектирование $\varphi_G(Z(G^{(\lambda)}))$. Остается учесть, что пересечение $Z(G)\bigcap Z(G^{(\lambda)})$ нетривиально.

Обратимся к подгруппе $T^{(\lambda)} =< a^{\lambda},b^{\lambda} >$. Ясно, что ее класс равен классу $n=3$ группы T. Устанавливаем равенства:

$$\varphi(a^{\lambda}b^{\lambda}) = a'^{\lambda}b'^{\lambda}c_{\lambda'_1},$$

$$\varphi([a^{\lambda}b^{\lambda}]) = [a'^{\lambda},b'^{\lambda}]c'_{\lambda 1},$$

аналогичные предыдушим. Здесь элементы $c_{\lambda'_1}$ и $c_{\lambda'_2}$ принадлежат предпоследнему члену $(G^{\varphi})_3{}^{(\lambda)}$ нижнего центрального ряда группы $(G^{\varphi})^{(\lambda)}$.

Покажем, что элементы $c_{\lambda'_1}$ и $c_{\lambda'_2}$ единичные. С этой целью запишем второе из соотношений в виде

$$\varphi([a,b]^{\lambda^2} h) = [a',b']^{\lambda^2} h'c_{\lambda'_2},$$

где h - некоторый элемент из G_3 а h' - из $G_3{}^{\varphi}$. Очевидно, что формальные записи элементов h и h' через коммутаторные формы веса 3 составлено из G_3 и $G_3{}^{\varphi}$ получаются идентичными. Но тогда имеем, что $\varphi(h) = h'$. Далее, подгруппа $<[a,b];h>$ абелева. Поэтому последнее соотношение можно переписать в виде.

$$\varphi([a,b]^{\lambda^2} h) = \varphi([a,b]^{\lambda^2}\varphi(h) = [a',b']^{\lambda^2} h'c_{\lambda'_2}$$

или в виде

$$\varphi([a,b]^{\lambda^2})=[a',b']^{\lambda^2}h'c_{\lambda_2}'.$$

В то же время из второго равенства и леммы получаем:

$$\varphi([a,b]^{\lambda^2})=[a',b']^{\lambda^2}c_2'^{\lambda^2}$$

Сравнивая эти последние, устанавливаем, что

$$c_2'^{\lambda^2}=c_{\lambda_2}'.$$

Элемент $c_{\lambda_2'}$ лежит в $(G^{\varphi})_3^{(\lambda)}$ и потому может быть записан в виде

$$c_{\lambda_2'}=c_{\lambda_2'}^{\prime\lambda^2}.$$

Отсюда, в силу однозначности извлечения корня в группе G, находим:

$$c_2'=c_{\lambda_2}^{\lambda}$$

Последнее равенство справедливо при любом простом $\lambda>n$, что в конечно порожденной группе G несовместимо с условием максимальности [3] и может выполняется лишь при $c_2'=e'$, а значит, и при $c_{\lambda_2'}=e'$.

Таким образом,

$$\varphi([a,b])=[a',b']$$

Покажем, что $c_1'=c_{\lambda_1}'=e'$. Для этого из первого соотношения, опираясь на лемму, находим:

$$\varphi((a,b)^{\lambda})=(a'b'c_1')^{\lambda},$$

или, преобразуя по известным коммутаторным тождествам,

$$\varphi(a^{\lambda}b^{\lambda}[b,a]^{1/2\lambda(\lambda-1)}h_0)=a'^{\lambda}b'^{\lambda}[b',a']^{1/2\lambda(\lambda-1)}c_1'^{\lambda}h_0',$$

где $h_0\in G_3$ и $h_0'\in G_3$. Доказано, что на каждой подгруппе M^* вида соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}(M^*)$ есть полулинейный изоморфизм, коль скоро им является соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}(A)$. Поэтому последнее равенство можно записать в виде

$$\varphi(a^\lambda b^\lambda)(\varphi([b,a]))^{1/2\lambda(\lambda-1)}\varphi(h_0)=a'^\lambda b'^\lambda[b',a']^{1/2\lambda(\lambda-1)}c_1'^\lambda h_0'.$$

Далее, в силу идентичности формальной записи элементов h_0 и h_0' через коммутаторные формы веса 3, заключаем, что $\varphi(h_0)=h_0'$. В то же время имеем:

$$\varphi([b,a)^{1/2\lambda(\lambda-1)}=[b',a']^{1/2\lambda(\lambda-1)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(a^\lambda b^\lambda)=a'^\lambda b'^\lambda c_1'^\lambda$$

Из сравнения полученного результата с первым соотношением вытекает:

$$c_2'^{\lambda^2}=c_{\lambda_2'}.$$

Остается провести рассуждения, аналогичные заключенной части предыдущего, которые и дают требуемый результат: $c_1'=c'_{\lambda_1}=e$.

Таким образом, $\varphi(ab)=a'b$.

7.3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ПРОЕКТИВНОЕ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ n-НИЛЬПОТЕНТНЫХ W-ГРУПП

Итак, если элементы a,b из G порождают группу T класса m, то:

1) при $m=3$ либо $\varphi(ab)=a'b'(\varphi_{\varepsilon,G}(A)$ - полулинейный изоморфизм), либо $\varphi(ab)=b'a'(\varphi_{\varepsilon,G}(A)$ - полулинейный антиизоморфизм);

2) при $m=2$ либо $\varphi(ab)=ab$, либо $\varphi(ab)=a'b'$ (характер $\varphi_{\varepsilon,G}(A)$ пока не определяет однозначно тип соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}(T)$.

3) при $m=1$ всегда $\varphi(ab)=a'b'$.

Из этих результатов немедленно следует, что на всей группе G соответствие $\varphi=\varphi_{\varepsilon,G}$, является либо полулинейным изоморфизмом, либо полулинейным антиизоморфизмом. Если допустим, что $\varphi_{1,G}$ - полулинейный антиизоморфизм, то полулинейным антиизоморфизмом должно оказаться, вопреки предлагаемому и соответствие $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}$. Значит, $\varphi_{\varepsilon,G}$ - полулинейным изоморфизм на всей группе G.

Рассуждения, аналогичные предшествующим, позволят установить, что второе из соответствий $\varphi_{\varepsilon,G}$ является полулинейным антиизоморфизмом.

Доказательству теоремы для групп класса $n > 3$ предпошлем ряд лемм. Доказательство каждой из них проводится в индуктивных предложениях.

ЛЕММА 7.3.1. *Пусть $\varphi(G) = G^{\varphi}$ - проектирование чистой конечнопорожденной n-нильпотентной $(n > 1)$ группы G, $\dim Z(G) > 1$ и пусть $\varphi_{\varepsilon}, \phi_{\varepsilon^{-1}}$ - определенные леммой соответствия между элементами групп G и G^{φ}. Тогда для любых двух элементов a и b из G равенства*

$$\varphi_{\varepsilon}(a) = a', \qquad \varphi_{\varepsilon}(b) = b'$$

влекут за собой для произведений $ab, a'b'$ и коммутаторов $[a, b]$, $[a', b']$ соотношения:

$$\varphi_{\varepsilon}(ab) = a'b'c_1',$$

$$\varphi_{\varepsilon}([a, b]) = [a', b']\, c^2.$$

В то же время из равенств

$$\varphi_{\varepsilon^{-1}}(a) = a'^{-1}, \quad \varphi_{\varepsilon^{-1}}(b) = b'^{-1}$$

вытекает, что

$$\varphi_{\varepsilon^{-1}}(ab) = b'^{-1}a'^{-1}c_3',$$

$$\varphi_{\varepsilon^{-1}}([a,b]) = [b', a']\, c_4',$$

где $c_1'(i = 1,\dots,4)$ - некоторые элементы из предпоследнего члена $I(G_n^{\varphi})$ изолированного нижнего центрального ряда группы G^{φ}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проектирование φ_G порождает естественное проектирование $\overline{\varphi}_G$ фактор-группы $\overline{G} = G / I(G_n)$ на $\overline{G}^{\varphi} = G^{\varphi} / I(G_n^{\varphi})$. Проектирование $\overline{\varphi}_G$ индуцируется двумя соответствиями - $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}$ и $\overline{\varphi}_{\varepsilon^{-1},G}$ между элементами из $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$. Это именно те соответствия, которые описаны выше и порождены соответствиями $\varphi_{\varepsilon,G}$ и $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$. Группа $\overline{G}$ - чистая конечно-порожденная нильпотентная класса $n-1$. Для нее, по индуктивному предложению, справедлива теорема. Следовательно, одно из соответствий $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}$, $\overline{\varphi}_{\varepsilon^{-1},G}$ оказывается полулинейным изоморфизмом, а другое – полулинейным антиизоморфизмом между G и G^{φ}. Выберем, для определенности, то из соответствий φ, которое на фактор-группах $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$ порождает полулинейный изоморфизм. Предположим, что при выбранном нами соответствии φ

$$\varphi(a)=a', \qquad \varphi(b)=b'.$$

Если группа $H=<a,b>$ имеет класс нильпотентности меньший класса G то, в силу индуктивного предположения, можно считать уже доказанным, что

$$\varphi(a,b)=a'b', \qquad \varphi([a,b])=[a'b']$$

Имеет смысл поэтому считать в дальнейшем, что класс H в точности равен n. При этом естественно предложить, что $n>3$, так как для $n\leq 3$ уже доказано более сильное утверждение. В таком случае коммутатор $[a,b]$ заведомо не лежит в $I(G_n)$ так как иначе подгруппа H оказалась бы нильпотентной класса 2. Естественно, что $I(G_n)$ не принадлежит также ни один из элементов a и b. Обозначим через a', b' образы в $\overline{G}$ элементов a, b, а через $\overline{a}', \overline{b}'$ - образы a', b' в $\overline{G}^{\varphi}$. Выбранное раннее соответствие $\overline{\varphi}$ является полулинейным изоморфизмом, поэтому из

$$\overline{\varphi}(\overline{a})=\overline{a}', \qquad \overline{\varphi}(\overline{b})=\overline{b}'$$

следует, что

$$\overline{\varphi}(\overline{a}\,\overline{b})=\overline{a}',\overline{b}',$$

$$\overline{\varphi}([\overline{a},\overline{b}])=[\overline{a}',\overline{b}'].$$

Переходя к самим группам G и G^{φ}, получаем соответствия:

$$\varphi(ab)=a'b'c_1',$$

$$\varphi([a,b]) = [a',b']c'_2,$$

в которых c'_1 и c'_2 - некоторые элементы из $I(G_n^{\varphi})$. Но это и есть искомые соотношения, в которых следует считать $\varphi = \varphi_{\varepsilon,G}$.

Рассмотрим теперь соответствие $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$, которое на фактор-группах $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$ порождает полулинейный антиизоморфизм $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$ (напомним, что $\overline{\varphi}_{\varepsilon^{-1},G}$, подобно $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}$ индуцирует проектирование $\overline{\varphi}_G$). Леммой установлено, что коль скоро для соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}$ выполнены соотношения, то для $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$ обязаны выполняться симметричные соотношения. Остается провести рассуждения, аналогичные изложенным выше, и прийти к соотношениям.

Ради некоторой компактности изложения утверждения последующих лемм мы будем относить только одному из двух возможных соответствий $\varphi_{\varepsilon}, \varphi_{\varepsilon^{-1}}$ между элементами решеточно изоморфных групп G и G^{φ}, а именно, к тому соответствию φ, которое превращается в полулинейный изоморфизм $\overline{\varphi}$ между фактор-группами $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$. Легко представить себе содержание соответствующих утверждений, коль скоро φ превращается в полулинейный антиизоморфизм $\overline{\varphi}$.

ЛЕММА 7.3.2. *При условиях леммы 7.3.1. и соответствии φ, выбранном в согласии с соотношениями, справедливы следующие равенства:*

$$\varphi(a^{\alpha}) = a'^{\alpha}, \qquad \varphi(b^{\beta}) = b'^{\beta},$$

где α, β - любые целые;

$$\varphi(a^2 b^{\mu}) = a^2 b'^{\mu} c'_{5,2,\mu}, \tag{*}$$

$$\varphi([a^2, b^{\mu}]) = [a'^2, b'^{\mu}]\, 0_{\beta,2,\mu} \tag{**}$$

где $|\varepsilon| = |\mu| = 1$ и $c'_{\beta,2,\mu}$ - некоторые элементы из $I(G_n^{\varphi})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость (непосредственно вытекает из самого построения соответствия φ, которое на каждой абелевой подгруппе из $\bar{G}$ является полулинейным изоморфизмом (лемма). К соотношениям (*) и (**) мы приходим тем же путем, как и выше, используя тот факт, что по модулю $I(G_n)$ соответствие предпололагается полулинейным изоморфизмом.

ЛЕММА 7.3.3. *При условиях леммы 7.3.1. соответствие φ, выбранное каждому коммутатору $k=[x_1,...,x_m]$ веса $m>3$ из G_m записанному относительно первых степеней элементов a и b. относит коммутатор*

$$k'=\varphi(k)=[x'_1,...,x'_m]; \qquad (***)$$

$$x'_i=\varphi(x_i) \qquad (i=1,2,..., m)$$

из образа $(G_m)^\varphi$ подгруппы G_m при проектировании φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в G_m произвольный коммутатор $k=[x_1,...,x_m]$, в котором каждая составляющая $x_i (i=1,...,m)$ равна a или b. В согласии с леммой 7.3.1.

$$\varphi([x_1, x_2])=[x'_1, x'_2]c'_0,$$

где c'_0 лежит в $I(G_n{}^\varphi)$. Построим в G подгруппу $B=\{[x_1, x_2], x_3\}$, порожденную коммутатором $[x_1, x_2]$ веса 2 и элементом x_3. Класс m-нильпотентности подгруппы B заведомо меньше n. Проектирование φ_G переносит подгруппу B на подгруппу $B^\varphi=<[x'_1, x'_2]\ c'_0, x'_3>$ из G^φ. В силу предположения, соответствие $\varphi_G(B)$ между элементами B и B^φ (оно индуцирует проектирование $\varphi_G(B)$ между группами B и B^φ) является полулинейным изоморфизмом. Следовательно,

$$\varphi([[x_1, x_2], x_3])=[[x'_1,x'_2]c'_0, x'_3].$$

Но элемент c'_0 - центральный, поэтому

$$[[x'_1, x'_2]c'_0, x'_3]=[[x'_1, x'_2], x'_3].$$

Тем самым (***) доказано для всех коммутаторов веса 3. Будем считать (***) доказанным для всех коммутаторов $[x_1,...,x_m]$ веса $m\le n-1$.

Рассмотрим l-нильпотентную (заведомо $l<n$) подгруппу

$$D = < [x_1,...,x_{n-1}],\ x_n >,$$

и ей соответствующую при проектировании φ подгруппу

$$D^{\varphi} = < [x'_1,...,x'_{n-1}],\ x'_n >$$

Коммутатор $[[x_1,...,x_{n-1}],\ x_n]$ веса n из группы G в подгруппе D является коммутатором веса 2. Тогда из предложения сразу следует соотношение

$$\varphi([[x_1,...,x_{n-1}],\ x_n]) = [[x'_1,...,x'_{n-1}],\ x'_n],$$

которое и оказывается требуемым соотношением (***) для $m = n$.

ЛЕММА 7.3.4. *Рассмотрим любой набор $k_1, k_2,...,k_3$, простых коммутаторов, записанных через первые степени элементов a, b, группы G. Пусть вес каждого из них не меньше трех. Тогда при условиях леммы 7.3.1. соответствие φ, дает:*

$$\varphi(k_1^{\alpha_1}...k_3^{\alpha_3}) = k_1'^{\alpha_1}...k_3'^{\alpha_3};$$

$$\varphi(k_i) = k_i' \qquad (i = 1,...,s)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим в G подгруппу $Q = < k_1,...,k_3 >$, порожденную заданным набором коммутаторов. Класс ее нильпотентности заведомо меньше n. Доказательство вытекает из того, что на подгруппах Q и $Q^{\varphi} = < k'_1,...,k'_3 >$ соответствие φ (индуктивное предположение) является полулинейным изоморфизмом, индуцирующим рассматриваемое проектирование $\varphi_G(Q) = Q^{\varphi}$.

ЛЕММА 7.3.5. *При условиях леммы 8.3.1. соответствие φ оказывается полулинейным изоморфизмом на каждом члене $G_m (m > 3)$ нижнего центрального ряда группы G.*

Доказательство достаточно очевидно из предыдущих рассуждений.

ЛЕММА 7.3.6. *При условиях леммы 7.3.1. и соответствии φ, для любого целого λ дает равенство*

$$\varphi(a^{\lambda} b^{\lambda}) = a'^{\lambda} b'^{\lambda} c_1'^{\lambda} c_2'^{-\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из построения соответствия φ (см. лемму) следует, что при любых целых λ и l справедливы равенства:

$$\varphi((ab)^{\lambda}) = (a'b'c_1')^{\lambda}, \qquad \varphi([a,b]^{l}) = [a',b']^{l}\, c_2'^{\,l}.$$

Далее, непосредственным подсчетом находим, что

$$(ab)^{\lambda} = a^{\lambda} b^{\lambda} [b,a]^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} h, \quad h \in G_3.$$

Аналогично,

$$(a'b'c_1')^{\lambda} = a'^{\lambda} b'^{\lambda} [b',a']^{\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)} c_1'^{\lambda} h',$$

где h' - некоторый элемент из G_3^{φ}. Заметим, что элемент h' записывается через коммутаторы из G_3^{φ} формально так те, как и элемент h - через коммутаторы из G_3. Следовательно, в силу леммы 7.3.3., $\varphi(h) = h'$. Рассмотрим в G подгруппу

$$Q = \langle ab, [b,a], h \rangle$$

класса m, заведомо меньшего, чем n. Подгруппу Q проектирование $\varphi_G(Q)$ переносит на подгруппу

$$Q^{\varphi} = \langle a'b'c_1', \ [b',a']\, c_2', h' \rangle.$$

Индуктивное предположение позволяет утверждать, что соответствие φ - полулинейным изоморфизм между Q и Q^{φ} Поэтому

$$\varphi((ab)^{\lambda}\ [b,a]^{l}\ h^{-1}) = \varphi((ab)^{\lambda})\varphi([b,a]^{l}\varphi(h^{-1})).$$

Если считать $l = -\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)$, то этому равенству, с учетом трех ему предшествующих, можно придать вид:

$$\varphi(a^{\lambda} b^{\lambda}) = a'^{\lambda} b''^{\lambda} c_1'^{\lambda} c_2'^{-\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)}.$$

Пусть G - нильпотентная группа класса n, удовлетворяющая условиям теоремы, и a,b - какая либо пара ее элементов, порождающая в точности n-нильпотентную подгруппу H. Рассмотрим проектирование $\varphi(G) = G^{\varphi}$. Пусть φ - то из двух соответствии $\varphi_{\varepsilon}, \varphi_{\varepsilon^{-1}}$ между элементами G и G^{φ}, которое описано леммой. На фактор-группе $\overline{G} = G / G_3$ соответствие φ порождает некоторое соответствие $\overline{\varphi}$, которое индуцирует проектирование $\overline{\varphi}(\overline{G}) = G^{\varphi} / G_3^{\varphi}$, возникающее при φ. Легко видеть, что $\overline{\varphi}$ не зависит от выбора представителей в смежных классах из $\overline{G}$. Фактор-группа G нильпотентна класса 2 и обладает, вообще говоря, кручением. Пусть $\overline{A}$ - любая абелева подгруппа из $\overline{G}$. Ее прообраз A в G имеет класс, не больший $n-1$. Поэтому, в силу предположения, отображение $\varphi(A) = A^{\varphi}$ - полулинейный изоморфизм (полулинейный антиизоморфизм). Значит, полулинейным изоморфизмом является отображение $\overline{\varphi}(\overline{A}) = \overline{A}^{\varphi}$. Последнее, между прочим, говорит о том, что соответствие $\overline{\varphi}$ является для $\overline{G}$ именно таким, какое описано леммой. Выберем в $\overline{G}$ произвольную пару элементов $\overline{x}, \overline{y}$. Тогда для них выполняется одно из двух равенств:

$$\overline{\varphi}(\overline{x}\,\overline{y}) = \varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y}), \qquad \overline{\varphi}(\overline{x}\,\overline{y}) = \varphi(\overline{y})\varphi(\overline{x}).$$

Действительно, если $\overline{x}$ и $\overline{y}$ коммутируют, то это следует из предшествующих рассуждений ($\overline{T} = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$- абелева). Если подгруппа $\overline{\varphi}$ нильпотентна класса 2 с периодическим коммутатором (при некотором $\rho [\overline{x}, \overline{y}]^{\rho} \in G_3$), то, как легко проверить, класс прообраза $\overline{T}$ в G не больше $n-1$. Но тогда, соответствие $\varphi(T)$ - полулинейный изоморфизм (полулинейный антиизоморфизм), а значит, таким же оказывается соответствие G. Наконец, если подгруппа $\varphi(ab) = \varphi(b)\,\varphi(a)\,(G_3^{\varphi}) = b'a'\,(G_3^{\varphi})$ свободная нильпотентна класса 2, то требуемый результат вытекает из предыдущего параграфа. Остается воспользоваться уже известным результатом, из которого следует, что на всей группе $\overline{G}$ соответствие $\overline{\varphi}$ - либо полулинейный изоморфизм, либо полулинейный антиизоморфизм. Однако при условии, что φ определяется соотношениями (*)-(**), соответствие $\overline{\varphi}$ полулинейным антиизоморфизмом быть не может. В самом деле, предположим обратное; тогда для всех $\bar{x}, \bar{y}$ из $\bar{G}$ мы бы имели:

$$\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{y})\, \varphi(\bar{x}).$$

Если, в частности, положить здесь $\bar{x} = \bar{a},\ \bar{y} = \bar{b}$ (где $\bar{a}, \bar{b}$ - образы a, b в $\bar{G}$), то, возращаясь к группе G, получаем:

$$\varphi(ab) = \varphi(b)\, \varphi(a)\, (G_3^{\varphi}) = b'a'\, (G_3^{\varphi}).$$

Сравнивая эти соотношения, устанавливаем, что $[a', b'] \in G_3^{\varphi} c_1'^{-1}$. Но это, вопреки предположению, означает, что класс подгруппы $H^{\varphi} = \varphi(H)$ меньше n.

Таким образом, соответствие $\bar{\varphi}$ - полулинейный изоморфизм и потому, в частности,

$$\bar{\varphi}(\bar{a}\bar{b}) = \bar{\varphi}(\bar{a})\, \bar{\varphi}(\bar{b}), \qquad \bar{\varphi}([\bar{a}, \bar{b}]) = [\bar{\varphi}(\bar{a}), \bar{\varphi}(\bar{b})].$$

Возвращаясь к группе G, находим:

$$\varphi(ab) = a'b'g_1',$$
$$\varphi([a, b]) = [a', b']\, g_2',$$

где g_1', g_2' - некоторые элементы из G_3^{κ}. Из сравнения с (*) и (**) следует, что $c_1', c_2' \in G_3^{\varphi}$.

Построим в группе G подгруппу $G^{(\lambda)}$, порожденную λ-ми степенями ($\lambda > n$ и простое) элементов из G. Эта подгруппа удовлетворяет всем условиям теоремы. Проектирование φ относит подгруппе $G^{(\lambda)}$ подгруппу $(G^{\varphi})^{(\lambda)}$ из G_{φ}, также порожденную λ-ми степенями ее элементов (лемма 2).

Аналогично убеждаемся, что соответствие $\varphi_{\varepsilon, G}$ построенное на всей группе G, совпадает на $G^{(\lambda)}$ с соответствием $\varphi_{\varepsilon, G^{(\lambda)}}$, которое строится на $G^{(\lambda)}$ с помощью ее центра. К подгруппе $G^{(\lambda)}$ справедливы все предыдущие рассуждения. Поэтому (если заметить, что класс подгруппы $H = < a^{\lambda}, b^{\lambda} >$ равен классу H).

$$\varphi(a^{\lambda} b^{\lambda}) = a'^{\lambda} b'^{\lambda} c'_{\lambda_1},$$

$$\varphi([a^{\lambda}, b^{\lambda}]) = [a'^{\lambda} b'^{\lambda}]\, c'_{\lambda_2}.$$

Здесь $c'_{\lambda_1}, c'_{\lambda_2}$ - некоторые центральные элементы из $(G^{\varphi})^{(\lambda)}$, лежащие в (G^{φ}) и зависящие, вообще говоря, от λ.

ЛЕММА 7.3.7. *Элемент c'_2 соотношений оказывается единичным, т.е.*

$$\varphi([a, b]) = [a', b'].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С помощью коммутаторных тождеств последнее равенство можно переписать в виде

$$\varphi([a, b])^{\lambda_2} h) = [a', b']^{\lambda_2} h' c'_{\lambda_2},$$

где элемент h лежит в G_3, а элемент h' - в $G_3{}^{\varphi}$. При этом записи элементов h и h' через коммутаторные формы соответственно из G_3 и $G_3{}^{\varphi}$ формально идентичны. Поэтому, по лемме 7.3.4. $\varphi(h) = h'$. Отсюда, так же как в лемме 7.3.5. получаем:

$$\varphi([a, b]^{\lambda}) = [a', b']^{\lambda_2} c'_{\lambda_2}.$$

С другой стороны имеем (лемма):

$$\varphi([a, b]^{\lambda^2}) = [a', b']^{\lambda_2} c_2'^{\lambda_2}.$$

Сравнивая последние равенство, находим:

$$c_2'^{\lambda^2} = c_{\lambda_2'}$$

Элемент c'_{λ_2} лежит в $(G^{\varphi})_3{}^{(\lambda)}$, поэтому (при λ простом и большем n) из него можно извлечь корень степени λ^3: $c'_{\lambda_2} = c_{\lambda}'^{\lambda^3}$. Тогда, в силу однозначности операции извлечения корня в чистой нильпотентной группе, дает:

$$c'_2 = c'_{\lambda_3}{}^{\lambda}$$

Но последнее означает, что из вполне определенного элемента c'_2 извлекается корень λ-й степени при произвольном простом $\lambda > n$, что в силу условия максимальности может выполниться лишь при $c'_2 = e$.

Следовательно, и $c'_{\lambda_3} = e$.

ЛЕММА 7.3.8. *Элемент c'_1 в соответствии оказывается единичным, т.е.*

$$\varphi(ab) = a'b'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 7.3.6 имеем:

$$\varphi(a^\lambda b^\lambda) = a'^\lambda b'^\lambda c_1'^\lambda.$$

Следовательно, находим:

$$c_1'^\lambda = c_{\lambda_1}.$$

Элемент c_{λ_1} лежит в $(G^\varphi)_3{}^{(\lambda)}$ и потому может быть представлен в виде:

$$c'_{\lambda_1} = c_\lambda'^{\lambda^3},$$

где c'_λ - некоторый элемент из G. Полученный результат вновь противоречит условию максимальности, выполняющемуся в группе G, и приводит, так же как и в лемме 7.3.7 к требуемому результату: $c'_1 = e,\ c'_{\lambda_1} = e$.

ЛЕММА 7.3.9. *При условиях леммы 7.3.1 и соответствии $\varphi = \varphi_{\varepsilon^{-1}}$, элементы c'_3 и c'_4 оказываются единичными, т.е.*

$$\varphi(ab) = b'^1 a'^{-1},$$

$$\varphi([a, b]) = [b', a']$$

Доказательство этой леммы ничем существенным не отличается от доказательств лемм 7.3.7 и 7.3.8 (оно требует лишь соответствующей переформулировки предшествующих лемм) и потому здесь опускается.

При доказательстве лемм 7.3.7 и 7.3.9 предполагалось, что класс m подгруппы $H=<a,b>$ равен n. Если же $m<n$, то уже предположение позволяло заключить, что

$$\varphi_1(ab)=\varphi_1(a)\varphi_1(b), \qquad \varphi_2(ab)=\varphi_2(b)\ \varphi_2(a).$$

Зададимся произвольным проектированием φ группы G, удовлетворяющей условиям теоремы, на некоторую группу G^{φ}. Убедимся, что существует по крайней мере один полулинейный изоморфизм между G и G^{φ}, индуцирующий заданное проектирование φ. Для этого, в согласии с леммой, установим между элементами G и G^{φ} соответствия φ_{ε} и $\varphi_{\varepsilon^{-1}}$ зафиксируем одно из них: $\varphi=\varphi_{\varepsilon}$. Пусть a и b - любые два элемента группы G. Тогда из предшествующих лемм следует, что либо $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$, либо $\varphi(ab)=\varphi(b)\varphi(a)$. В таком случае для всех элементом из G выполняется либо только первое, либо только второе соотношение. Это и означает, что соответствие φ_{ε} оказывается либо полулинейным изоморфизмом ($\varphi_{\varepsilon^{-1}}$ - полулинейным антиизоморфизмом), либо полулинейным антиизоморфизмом ($\varphi_{\varepsilon^{-1}}$ - полулинейным изоморфизмом).

Теорема позволяет заключить, что полученный с помощью леммы в полулинейный изоморфизм является единственным полулинейным изоморфизмом, индуцирующим заданное проектирование.

Итак, считая, что предположение выполнено соответственно для всех классов не больших $n-1$ и $n-2$ мы доказывали справедливость предположения для всех удовлетворяющих условиям теоремы 8 групп класса n. Для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в выполнении предположения для групп класса $n+1$ $(n>2)$.

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы и имеет класс $n+1>3$. Зададимся произвольным проектированием $\varphi_G(G)=G^{\varphi}$ группы G. Построим известные соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}$, $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}$. Выберем в G некоторую максимальную m-нильпотентную $(3 \le m < n+1)$ подгруппу $H^{\bullet}$. Она содержит центр $Z(G)$ и удовлетворяет условиям теоремы. Соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}(H^{\bullet})$ и $\varphi_{\varepsilon^{-1},G}(H^{\bullet})$ индуцируют проектирование $\varphi(H^{\bullet}) = H^{\bullet\varphi}$ и оказываются парой таких соответствий между элементами $H^{\bullet}$ и $H^{\bullet\varphi}$, которую по лемме можно построить при помощи центра $Z(H^{\bullet})$. Но класс $H^{\bullet}$ не превосходит n; поэтому, в силу, одно из этих соответствии (например, $(H^{\bullet}))$ – полулинейный изоморфизм, в второе – полулинейный антиизоморфизм.

Покажем, что в вышеупомянутых предположениях полулинейным

изоморфизмом оказывается каждое соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}$ (полулинейным антиизоморфизмом - $\varphi_{\varepsilon,G}(H)$), определенное на любой m-нильпотентной подгруппе $(m \le n)$ из G.

Действительно, переход к фактор-группе $\overline{G} = G/I(G_n)$, мы оказываемся в условиях леммы 7.3.1.. Класс $\overline{G}$ равен $n > 2$ и поэтому одно из соответствий $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}$, $\overline{\varphi}_{\varepsilon^{-1},G}$ - полулинейный изоморфизм, второе – полулинейный антиизоморфизм как между $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$, так, и подавно, между каждой парой $\overline{T}$ и $\overline{T}^{\varphi} = \overline{\varphi}_G(\overline{T})$ их l-нильпотентных $(l \le n)$ подгрупп; в частности между образами $\overline{H}^{\bullet}$ и $\overline{H}^{\bullet\varphi}$ подгрупп $H^{\bullet}$ и $H^{\bullet\varphi}$ в $\overline{G}$ и $\overline{G}^{\varphi}$. Выше предполагалось, что $\varphi_{\varepsilon,G}(H^{\bullet})$ - полулинейный изоморфизм; значит, полулинейным изоморфизмом является $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}(\overline{H}^{\bullet})$, а потому и соответствие $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}(\overline{G})$, индуцируемое соответствием $\varphi_{\varepsilon,G}$ на всей фактор-группе $\overline{G}$. Но тогда очевидно, что полулинейным изоморфизмом является соответствие $\overline{\varphi}_{\varepsilon,G}(\overline{T})$ на любой подгруппе $\overline{T}$ и $\overline{G}$.

Пусть теперь H - произвольная подгруппа из G класса m и $\overline{H}$ - ее образ в $\overline{G}$. Ясно, что класс l подгруппы $\overline{H}$ либо равен классу H, либо меньше его на единицу. Если $l \geq 2$, то $\varphi_{\varepsilon,G}(H)$ не может быть полулинейным антиизоморфизмом, так как не является $\varphi_{\varepsilon,G}(\overline{H})$. Остается рассмотреть те нильпотентные класса 2 подгруппы H из G, для которых $l=1$. Но в данном случае можно провести рассуждения, аналогичные приведенным в 8.3.3. для $n=3$. Из них следует, что на всех нильпотентных класса 2 подгруппах H на G все соответствия $\varphi_{\varepsilon,G}(H)$ либо полулинейно антиизоморфные. Остается учесть, что на нильпотентной класса 2 подгруппе H_0 входящей подгруппу T и G класса $t>2$ (такая заведомо существует при $n>3$), соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}(H_0)$ - полулинейный изоморфизм, ибо таковым является соответствие $\varphi_{\varepsilon,G}(T)$. Этим завершено доказательство теоремы.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев К.К., Письмо в редакцию. Алгебра и логика 10(1971),№2, 226-228.
2. Каргаполов М.И., Ремесленников В.П., Романовский Н.С.,Романьков В.Л.,Чуркин В.А., Алгоритмические вопросы для ν-степенных групп. Алгебра и логика8(1969),№6,643-659.
3. Курош А.Г., Теориа групп. Москва. Гостехиздат.1953
4. Курош А.Г., Теориа групп. Наука, Москва, 1967.
5. Магомаев Х.Х., К теории W-групп, I. Изв. высш учебн. заведений, Математика, 1971,№1, 45-62.
6. Магомаев Х.Х.,К теории W-групп, II. Изв. высш учебн. заведений, Математика, 1971, №4, 50-58.
7. Мальцев А.И., Об одном классе однородных пространств. Изв. Акад. наук СССР, серю Матем. 13(1949),№1,9-32.
8. Мальцев А.И.,Нильпотентные группы без кручения. Изв. Акад.наук СССР, сер. Матем. 13(1949), №3, 201212.
9. Мальцев А.И.,О нормированных Алгебрах Ли над полем рациональных чисел. Докл. Акад. наук СССР 62(1948), №6 745-748.
10. Мальцев А.И., Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы. Матем. сб. 15(1949), №3, 347-366
11. Мальцев А.И., Об алгебах с тождественными определяющими соотношениями. Матем. сб. 26(1950), №1, 19-33.
12. Мерзляков Ю.И., О матричном представлении автоморфизмов, расширений и разрешимых групп. Алгебра и логика 7(1968), №3, 63-104.
13. Мясников А.Г., Ремесленников В.Н., Изоморфизмы и элементарные свойства нильпотентных степенных групп. Докл. Акад. наук СССР 258(1981), №5. 1056-1059.
14. Нейман Х., Многообразия групп. Наука, Москва, 1969.

15.Платонов В.П., Строение топологических локально проективно нильпотентных групп с нормализаторным условием. Матем. сб. 72(114)(1967), №1, 38-58.

16.Тавадзе А.Д., О проинильпотентных группах. Сообщ. Акад. наук ГССР 79(1975), №2, 301-304.

17.Тавадзе А.Д., Периодические пронильпотентные группы. Сообщ. Акад. наук ГССР 88(1977), №2, 289-291

18.Тавадзе А.Д., Шмелькин А.Д., Подгруппы свободных пронильпотентных групп. Сообщ. Акад. наук. ГССР 93(1979), №2, 277-279.

19.Тавадзе А.Д., Проективные пронильпотентные РУ-группы. Сообщ. Акад. наук ГССР 84(1976), №2, 273-276.

20.Холл Ф., Нильпотентные группы, Математика, Период сб. перев. ин. статей 12:1(1968), 3-36.

21.Ширшов А.И., Подалгебры свободных лиевых алгебр. Матем, сб. 33(1953), №2, 441-452.

22.Ширшов А.И., О свободных кольцах Л. Матем. сб. 5(1958). №2, 113-122.

23.Ширшов А.И., Об одной гипотезе теории алгебр Ли. Сибирский матем. Журн. 3(1962), №2, 297-301.

24.Шмелькин А.Л., Свободные понильпотентные группы. Изд. Акад. наук СССР, серия матем. 28(1964), №1, 91-122.

25.Шмелькин А.Л., Свободные произведения и нильпотентные группы без кручения. Сибирский матем. Журн. 3(1962), №4, 625-640.

26.Шмелькин А.Л., О нижнем центральном центральном ряде свободного произведения групп. Алгебра и логика 8(1969), №1, 129-137.

27.Baumslag G., Stammbach U. On the inverse limit of nilpotent groups. Comment. Math. Helv. 52(1977). No. 2, 219-233.

28. Bousfield A.K., Kan D.M., Homotopy limits, completions and localizations/ Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

29.Hall P., The splitting properties of relatively free groups. Proc. London Math. Soc. (3) 4(1954), 343-256.

30.Hilton P., Mislin G., Roitberg J., Topological localization and nilpotent groups. Bull. Amer. MAth. Soc. 78(1972), 1060-1063.

31.Lazard M., Sur les groupes nilpotents et les anneux de Lie. Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. (3) 71(1954), 101-190.

32.Megnus W. Uber Bezienhingeri awischen hoheren Kommutatoren. J. Heine Angew. MAth. 177(1937), 105-155.

33.Quillen D., Rational homotopy theory. Ann. of MAth. (2) 90(1969), 205-295.

34.Warfield R.B., Jr. Nilpotent groups. Lecture Notes Mathematics, Vol. 513, Springer-Verbag, Berlin-New York, 1976.

35.Wille E., Treue Darstellung Liescher Ringe. J. Reine Angew. MAth. 177(1937), 152-160.

36.Амаглобели М.Г., Ремесленников В.Н., G-тождества и G-многообразия. Алгебра и логика 39(2000)б №3, 249-272

37.Амаглобели М.Г., G-тождества нильпотентных групп, I. Алгебра и логика 40(2001), №1.

38.Амаглобели М.Г., G-тождества нильпотентных групп, II. Алгебра и логика 40(2001), №4.

39.Амаглобели М.Г., Тензорные кольца и решетка G-свободных нильпотентных групп ступени ≤ 3. Докл. РАН 377, 6(2001), 727-729.

40. Amaglobeli M.G, Varietes of nilpotent exponental groups. Bull. Georgian Acad.Sci. 162(2000), No. 2, 226-228.

41.Amaglobeli M.G, Algoritmic problems relating to varietes of exponential nilpotent groups. Bull. Georgian Acad. Sci. 161(2000), No. 3, 401-402.

42.Rottländer A, Nachweis der Existonz nicht-istomorpher Cruppen von gleicher Situation der Untergruppen, Math, Zeitscbr., 28(1928), 641-653

43.Ore O., Structures and group theory. I, Duke Math., 9, #3(1973), 149-173

44.Ore O., Structures and group theory. II, Duke Math., 9, #4 (1938), 247-269

45.Baer R., The significance of the system of subgroups for the structure of the group. Am. J. MAth., 61 (1939), 1-44.

46.Shmidt R. Subgroup lattices of groups.Walter de Gruyter. Berlin-New York.1994.

47.Лашхи А.А Структурные изомофризмы нильпотентных колец Саабщ. АН ГССР. 1972 т.65, №1, 21-24.

48.Лашхи А.А. Проектирование магнусовых колец и алгебр. Ли, Труды ГПИ ин В.И Ленина. 1971, т 8, 7-11.

49.Lashkhi A.A. Projections of mixed Lie Rings. Univ. Algebra and its Appl. Pap. S. Banach Inst. Math. Cent. Warszawa. 1982, 57-66.

50.Лащхи А.А. Основная теорема проективной геометрии в модулях и алгебрах Лию Итоги науки техники. ВИНИТИ. проблемы геометрии. 1986, т.18, 165-187.

51.Лашхи А.А. Проектирование чистых сверхразрешеных алгебр Ли. Мат. заметки. т.26, №6, 1979, 931-937.

52.Лашхи А.А. Основная Теорема проективной геометрии в алгебрах Ли. Сообщ. АН Грузии. 149, №2, 1994, 185-188.

53.Судзуки М. Строение группы и строение структури ее подгрупп. Иностранная Литература. Москва. 1960

54.Гретцер Г. Общая теория решеток. Москва.: Мир. 1982.

55.Биркгоф Г. Теория решеток. Москва.: Мир. 1978.

56.СадовскийА.Е. Проектирования изоморфи³мы нильпотентных групп. Известия АН СССР т.29, 1965, 171-208.

57.Садовский А.Е. Некоторые теоретико – структурные вопросы теории групп. Усехи Математических наук. т. XXIII, вып 3(141), 1968, 123-157.

58.Садовский А.Е. Структура подгрупп нильпотентных групп. без кручения. Успехи Мат. Наук. т. 12, №3, (1957), 201-204

59.Пекелис А.С. О группах с изоморфными структурами под полу групп. Изв. высш. учебн. заведении, Матем. №1, (1957), 189-194

60.Scott W.R., Half homomorphisms of groups. Proc. Amer. Math. Soc., 8, №6 (1957), 1141-1144

61.Shmidt R., Subcroup lattice of a group. Walter de Grueter. Berlin, 1994.

62. McDonald B., Geometric algebra over local Rings. Marcel Dekker, new-York-Basel. 1976.

63. Camillo V.P., Inducing lattice maps by semilinear isomorphisms. Rocky Mountain II.Math. 14(1984), #2, 475-486.

64.Brehm U., Greaferath M., Shmidt S.E., Projective geometry on modular lattices. Handbook of incidence geometry. North-Holland, Amsterdam. 1995, 1115-1142.

65. Ojanguren M., Sridharan R., A note on the fundamental theorem of projective geometry. Comment. Math. Helv. 44(1969), 310-315.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. სრული W-ჯგუფის ზოგიერთი თვისების შესახებ. *ქსუ მათემატიკის კათედრის ახალგაზრდა მეცნიერთა, ასპირანტთა და მაგისტრანტთა კონფერენციის შრომები.* ქუთაისი, 2001.

2. W-ხარისხოვანი ჯგუფების სტრუქტურული იზომორფიზმის შესახებ. *ა.მ.ა. რესპ. სამეცნ. კონფერენციის შრომების კრებული,* I, ქსუ, 2003.

3. W-ხარისხოვანი ჯგუფის იზოლირებული ქვედა ცენტრალური მწკრივის შესახებ. *ა.მ.ა. რესპ. სამეცნ. კონფერენციის შრომების კრებული,* II, ქსუ, 2004.

4. On some Properties of W-power Groups.*Bull. Georgian Acad. Sci.* **172** (2005), No. 2, 202-204.

5. Lattice Isomorphisms of Free and Free Polynilpotent W-Power Groups.*Bull. Georgian Acad. Sci.* 172 (2005), No. 3, 401-403.

6. On the Fundamental Theorem of the Projective Geometry for W-Power Groups. *Bull. Georgian Acad. Sci.* 173(2006), No. 1, 17-18 (with A. Lashkhi).

7. The Lattices In Connection with W-Power Groups. *Bull. Georgian Acad. Sci.* **173**(2006) No. 3.

8. Lattice Isomorphisms of nilpotent W-Power Groups.*Bull. Georgian Acad. Sci.* **173** (2006), No. 4.

9. On complex commutators of W-Power Groups. *Geometric and group theory methods in phisics and mathematics. International school and workshop.*Batumi State University, Sep. 15-27, 2003, 50-51.