ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

კახა ბიწაძე

ჰაარის სისტემისა და ჰაარის ვეივლეტის მიმართ ფურიეს მწკრივების განშლადობისა და კრებადობის ზოგიერთი საკითხი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

01.01.01 – მათემატიკური ანალიზი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი ვასილ ბუღაძე

თბილისი – 2002

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

R-ით აღვნიშნოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, Z-ით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, N-ით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო Z_0-ით – არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე.

ჰაარის $\{\chi_p\}_{p=0}^{\infty}$ სისტემის ფუნქციები (იხ. [1] ან [2]) განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\chi_0(t) = 1, \text{ თუ } t \in [0,1],$$

$$\chi_1(t) = \chi_0^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, \text{ თუ } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

$$\chi_p(t) = \chi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{თუ } t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n}, & \text{თუ } t \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}\right), \\ 0, & \text{თუ } t \in [0,1] \setminus \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right), \end{cases}$$

$$\chi_{2^{n+1}-1}(t) = \chi_n^{(2^n-1)}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{თუ } t \in \left[\frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n}, & \text{თუ } t \in \left[\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}, 1\right], \\ 0, & \text{თუ } t \in [0,1] \setminus \left[\frac{2^n-1}{2^n}, 1\right], \end{cases}$$

სადაც $p = 2^n + k$, $n \in Z_0$, $0 \le k \le 2^n - 1$. ჰაარის სისტემა სრული ორთონორმირებული სისტემაა $[0,1]$ სეგმენტზე.

$[0,1]$-ზე განსაზღვრული, ლებეგის აზრით ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიე-ჰაარის მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) \sim \sum_{p=0}^{\infty} a_p(f)\chi_p(x) = a_0(f) + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1} a_n^{(k)}(f)\chi_n^{(k)}(x), \tag{1}$$

სადაც

$$a_0(f) = \int_0^1 f(t)dt\,, \quad a_p(f) = a_n^{(k)}(f) = \int_0^1 f(t)\chi_n^{(k)}(t)dt,$$

$$p = 2^n + k,\ \ n \in \mathbf{Z}_0,\ \ 0 \le k \le 2^n - 1,$$

f ფუნქციის ფურიე-ჰაარის კოეფიციენტებია.

ჰაარის სისტემის ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განვრცობის ერთ-ერთი მაგალითია ჰაარის ვეივლეტი, რომელიც ვეივლეტთა ოჯახის ერთ-ერთი წარმომადგენელია. ვეივლეტთა ფართო კლასების აგების საშუალებას იძლევა ს. მალას მეთოდი, რომელსაც მრავალმასშტაბიან ანალიზს უწოდებენ.

ვეივლეტი ეწოდება $L^2(\mathrm{R})$ კლასის ისეთ Ψ ფუნქციას, რომლისგან წარმოქმნილი $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathrm{Z}\}$ სისტემა არის $L^2(\mathrm{R})$ სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, სადაც

$$\Psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \quad j,k \in \mathrm{Z}. \tag{2}$$

Ψ ფუნქციის როლში ავიღოთ ჰაარის სისტემის მეორე ფუნქცია, რომელსაც h-ით აღვნიშნავთ და რომელიც ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ასეა განსაზღვრული:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, & \text{თუ } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0, & \text{თუ } x \in \mathrm{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

ამ ფუნქციით განსაზღვრული $\{h_{j,k} : j,k \in \mathrm{Z}\}$ სისტემა სრული ორთონორმირებული ბაზისია $L^2(\mathrm{R})$ სივრცეში და მას ჰაარის ვეივლეტს უწოდებენ (იხ. [3]).

$f \in L^2(\mathrm{R})$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს ჰაარის ვეივლეტის მიმართ აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) \sim \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{j,k}(f) h_{j,k}(x), \quad x \in \mathrm{R},$$

სადაც

$$a_{j,k}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h_{j,k}(t) dt, \quad j,k \in \mathrm{Z},$$

f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია ჰაარის ვეივლეტის მიმართ.

0,1] მონაკვეთის (ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის) ჰ ო მ ე ო მ ო რ ფ ი ზ მ ი ეწოდება $[0,1]$ მონაკვეთის (ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის) ურთიერთცალსახა უწყვეტ ასახვას თავის თავზე.

ვიტყვით, რომ φ ჰომეომორფიზმი მოქმედებს ფუნქციათა A კლასში, თუ ყოველი $f \in A$ ფუნქციისათვის $f \circ \varphi \in A$.

ვთქვათ A_χ არის ისეთ $f \in L[0,1]$ ფუნქციათა კლასი, რომელთა ფურიე-ჰაარის მწკრივი ყველგან აბსოლუტურად კრებადია, ხოლო S_χ — ისეთ $f \in L[0,1]$ ფუნქციათა კლასი, რომელთა ფურიე-ჰაარის მწკრივი ყველგან კრებადია. ჰაარის ვეივლეტისათვის ანალოგიურად განისაზღვრებიან A_h და S_h კლასები.

ვთქვათ $\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = 1 - x, x \in [0, 1]$. ცხადია, რომ თუ $f \in A_\chi$, მაშინ $f \circ \varphi_2 \in A_\chi$ და თუ $f \in S_\chi$, მაშინ $f \circ \varphi_2 \in S$.

ვ.ბუღაძემ [4] დაადგინა, რომ ცვლადის უწყვეტად დიფერენცირებად ჰომეომორფულ გარდაქმნათა შორის მხოლოდ φ_1 და φ_2 მოქმედებენ A_χ და S_χ კლასებში.

დისერტაციის **პირველ თავში** დადგენილია ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ყველა იმ უწყვეტად დიფერენცირებადი ჰომეომორფიზმების კლასი, რომლებიც მოქმედებენ A_h და S_h კლასებში.

შენიშვნა. წარმოდგენილი დისერტაცია შედგება სამი თავისაგან. თეორემები, ლემები და შედეგები დანომრილია თავის შიგნით — თავის ნომერი, პარაგრაფის ნომერი, თეორემის (შესაბამისად, ლემის, შედეგის) ნომერი .

$k\ 2^{-m}$ სახის რიცხვებს, სადაც $k,m \in \mathrm{Z}$, ეწოდებათ ო რ ა დ - რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ - რ ი . ყველა სხვა სახის რიცხვებს ეწოდებათ ო რ ა დ - ი რ ა ც ი ო ნ ა ლ უ რ ი .

ორადი ინტერვალი ეწოდება

$$\Delta_k^{(m)} \equiv \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)$$

სახის ინტერვალს, სადაც $k,m \in$. m რიცხვს ეწოდება $\Delta_k^{(m)}$ ინტერვალის რ ა ნ გ ი . $\overset{+}{\Delta}{}_k^{(m)}$ და $\overset{-}{\Delta}{}_k^{(m)}$ აღნიშნავენ, შესაბამისად, ინტერვალებს

$$\left[k \cdot 2^{-m}, (2k+1)/2^{-m-1}\right) \text{ და } \left[(2k+1)/2^{-m-1}, (k+1)/2^{-m}\right).$$

$_x^{(m)}$ აღნიშნავს წერტილის მომცველ ($x \in \mathrm{R}$) რანგის ორად ინტერვალს.

შენიშნოთ, რომ ნებისმიერი $j,k \in \mathrm{Z}$ რიცხვებისათვის $\Delta_k^{(j)}$ ინტერვალი წარმოადგენს $h_{j,k}$ ფუნქციის საყრდენს (იხ. (2)). ამასთან

$$h_j^{(k)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{თუ } x \in \overset{+}{\Delta}{}_k^{(j)} \\ -2^{\frac{j}{2}}, & \text{თუ } x \in \overset{-}{\Delta}{}_k^{(j)} \\ 0, & \text{თუ } x \in \mathrm{R} \setminus \Delta_j^{(k)}. \end{cases} \tag{3}$$

განვსაზღვროთ ფუნქციათა H კლასი შემდეგნაირად:

ვთქვათ H არის ისეთი უწყვეტად დიფერენცირებად $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ჰომეომორფიზმების კლასი, რომელთათვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

1 $\varphi^{-1}(0)$ ორად-რაციონალურია;

2 ა) თუ φ ზრდადი ჰომემომორფიზმია, მაშინ არსებობს ისეთი მთელი n_0 რიცხვი, რომ $\varphi'(x) = 2^{n_0}$ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის;

ბ) თუ φ კლებადი ჰომემომორფიზმია, მაშინ არსებობს ისეთი მთელი n_0' რიცხვი, რომ $\varphi'(x) = -2^{n_0'}$ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის;

დისერტაციის პირველი თავის ძირითადი შედეგებია:

შედეგი 1.2.1. ყველა უწყვეტად დიფერენცირებად ჰომეომორფიზმებს შორის მხოლოდ H კლასის ჰომეომორფიზმები მოქმედებენ A_h კლასში.

შედეგი 1.2.2. ყველა უწყვეტად დიფერენცირებად ჰომეომორფიზმებს შორის მხოლოდ H კლასის ჰომეომორფიზმები მოქმედებენ S_h კლასში.

დისერტაციის **მეორე თავში** განხილულია ფურიე-ჰაარის მწკრივების ნული ზომის სიმრავლეებზე განშლადობის საკითხები.

ტრიგონომეტრიული მწკრივებისათვის განშლადობის საკითხები დიდი ხანია კვლევის საგანია და ამ მიმართულებით გადაჭრილია მნიშვნელოვანი პრობლემები.

1876 წელს პ. დიუ ბუა-რეიმონმა [5] ააგო ისეთი უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ზოგიერთ წერტილებში.

1911 წელს ნ. ნ ლუზინმა [6] ააგო ხარისხოვანი მწკრივი $S = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, რომელიც განშლდია $T = \{z : |z| = 1\}$ წრეწირზე. მან აგრეთვე დაამტკიცა, რომ მწკრივის ნამდვილი ნწილი თითქმის ყველგან განშლადია T-ზე. მოგვიანებით ს.ბ. სტეჩკინმა [7], [8] დაამტიცა, რომ ლუზინის მაგალითში მწკრივის როგორც ნამდვილი, ისე წარმოსახვით ნაწილი, ყველგან განშლადია T-ზე.

1923 წელს ა. ნ. კოლმოგოროვმა [9] ააგო ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი თითქმის ყველგან განშლადია $[0,2\pi]$-ზე. მანვე 1926 წლს ააგო ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი ყველგნ განშლადია $[0,2\pi]$-ზე (იხ. [10]).

1951 წელს ს. ბ. სტეჩკინმა [7] დაამტკიცა, რომ ნული ზომის ყოველი სიმრავლისათვის არსებობს ფუნქცია $f \in L^2(0,2\pi)$, რომლის ფურიეს მწკრივი განშლადია ამ სიმრავლეზე.

1963 წელს ლ. ვ. ტაიკოვმა [11] დაამტკიცა, რომ თუ $p \geq 1$, მაშინ ნული ზომის ყოველი სიმრავლისათვის არსებობს ფუნქცია $f \in L^p(0,2\pi)$, რომლის ფურიეს მწკრივი და მის მიმართ შეუღლებული მწკრივი შემოუსაზღვრელად განშლადნი არიან ამ სიმრავლეზე.

1966 წელს ჟ. -პ. კაჰანმა და ი. კაცნელსონმა [12] დაამტკიცეს, რომ ნული ზომის ყოველი სიმრავლისათვის არსებობს ნამდვილი ცვლადის კომპლექსურმნიშვნელობებიანი უწყვეტი ფუნქცია, რომლის ფურიეს მწკრივი შემოუსაზღვრელად განშლადია ამ სიმრავლეზე. 1970 წელს ვ. ვ. ბუზდალინმა [13] ეს შედეგი გადაიტანა ნამდვილ ფუნქციებზე.

1966 წელს ლ. კარლესონმა [14] დაამტკიცა, რომ თუ $f \in L^2(0,2\pi)$, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია $(0,2\pi)$-ზე.

1967 წელს რ. ჰანტმა [15] განაზოგადა ლ. კარლესონის შედეგი, დაამტკიცა რა, რომ თუ $f \in L^p(0,2\pi)$ და $p > 1$, მაშინ f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თითქმის ყველგნ კრებადია $(0,2\pi)$-ზე.

ზქოთ წარმოდგენილი საკითხები განხილულ იქნა ჰაარის მწკრივებისთვისაც. აქვე შვნიშნოთ, რომ ამ თემატიკის ისტორიული ცნობები, თანამედროვე მდგომარეობა და პრობლემატიკა გადმოცემულია ბ. ი. გოლუბოვის[16], პ. ლ. ულიანოვის[17]და უ. უეიდის[18] შრომებში.

190 წელს ა. ჰაარმა [19] დაამტკიცა, რომ $[0,1]$-ზე უწყვეტი ყოველი ფუნქციის ფურიეჰაარის მწკრივი თანაბრად კრებადია$[0,1]$-ზე ამ ფუნქციისაკენ. მანვე დაამტკიც, რომ ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ყოველი ფუნქციის ფურიე-ჰაარის მწკრიი თითქმის ყველგან კრებადია $[0,1]$-ზე ამ ფუნქციისაკენ.

1?1 წელს ვ. ი. პროხორენკომ [20] დაამტკიცა, რომ ნული ზომის ყოველი სიმრავლისათის არსებობს ფუნქცია $\bigcap\limits_{p\geq 1} L^p$ კლასიდან, რომლის ფურიე-ჰაარის მწკრივი განშლადიამ სიმრავლეზე.

192 წელს ვ. ბუღაძემ [21] დაამტკიცა, რომ ნული ზომის ყოველი სიმრავლისათვის ასებობს ისეთი შემოსაზღვრული, ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიე-ჰაარის მწკრიი განშლადია ამ სიმრავლეზე.

nგანზომილებიან $[0,1]^n$კუბზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ინტეგრებადი f ფუნციის ფურიე-ჰაარის n-ჯერად მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim \sum_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 0}^{\infty} a_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(f)\chi_{m_1}(x_1)\chi_{m_2}(x_2)\ldots\chi_{m_n}(x_n),$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n,$$

სადაც

$$a_{m_1 m_2 \ldots, m_n}(f) = \int\limits_{[0,1]^n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\chi_{m_1}(t_1)\chi_{m_2}(t_2)\ldots\chi_{m_n}(t_n)dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

f ფუნციის ფურიე-ჰაარის კოეფიციენტებია, ხოლო $\{\chi_{m_1}\chi_{m_2}\cdots\chi_{m_n}\}$ — ჰაარის n-ჯერდი სისტემაა, $m_1, m_2, \ldots, m_n = 1,2,\ldots,\ \ n \geq 2,\ n \in \mathrm{N}$

ვქვათ $\{x_{m_1, m_2, \ldots, m_n}\}_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 1}^{\infty}$ რიცხვითი მიმდევრობაა, ხოლო $\lambda > 1$ რაიმე ნამდვილრიცხვია. $\{x_{m_1, m_2, \ldots, m_n}\}_{m_1, m_2, \ldots, m_n = 1}^{\infty}$ მიმდევრობას ეწოდება λ-კრებადი რაიმე ნამდვილ C რიცხვისაკენ, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვისათვის მოიძებნება ისეი $p \in \mathrm{N}$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $m_k > p$ ნატურალური რიცხვებისათვის,

$k = 1, 2.., n$,რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{m_i}{m_j} < \lambda, \quad i, j = 1,2,\dots,n, \tag{*}$$

სამართლიანია უტოლობა

$$|x_{m_1,m_2,\dots,m_n} - \mathbf{C}| < \varepsilon .$$

თუ უკანასკნელი უტოლობა სრულდება (*) პირობების გარეშე, მაშინ მოცემულ მიმდევრობას ეწოდება პრინგსჰეიმის აზრით კრებადი **C** რიცხვისაკენ.

ო. ძაგნიძემ [22] დაამტკიცა, რომ $f \in L[0,1]^2$ფუნქციის ფურიე-ჰაარის ორჯერადი მწკრივი შეიძლება თითქმის ყველგან განშლადი იყოს, მაგრამ აუცილებლად თითქმის ყველგან λ-კრებადია (λ>1) ამ ფუნქციისაკენ. გარდა ამისა $f \in L\log^+ L[0,1]^2$ ფუნქციის ფურიე-ჰაარის ორჯერადი მწკრივი თითქმის ყველგან კრებადია ამ ფუნქციისკენ.

მორე თავში დამტკიცებული თეორემა წარმოადგენს ვ. ბუღაძის შედეგის ანალოგს მრავალი ცვლადის ფუნქციის ფურიე-ჰაარის ჯერადი მწკრივისათვის (პრინგსჰეიმის აზრით კრებადობისათვის; უფრო მეტიც λ -კრებადობისათვის).

თეორემა 2.2.1. **n**-განზომილებიანი $[0,1]^n$კუბის ნული ზომის ყოველი E ქვესიმრავლისათვის არსებობს $[0,1]^n$-ზე განსაზღვრული, შემოსაზღვრული, ზომადი ფუნქცია ისეთი რომ ამ ფუნქციის ფურიე-ჰაარის **n**-ჯერადი მწკრივი არ არის λ-კრებადი E სიმრავლეზე, თუ λ>1.

დისერტაციის **მესამე თავში** განხილულია ფურიე-ჰაარის მწკრივების განშლადობის სიმრავლეებთან დაკავშირებული საკითხები.

Eსიმრავლეს ეწოდება $\widetilde{G}_\delta$ტიპის სიმრავლე, თუ ის შეიძლება წარმოდგეს შემდეგი სახით:

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k, \quad G_{k+1} \subset G_k, \quad G_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} < \alpha_i^{(k)}, \beta_i^k >, \quad k \in \mathbb{N},$$

სადაც$< \alpha_i^{(k)}, \beta_i^k >$ შუალედები, $i = 1, 2, \dots,$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, ხოლო α (β_i^k)წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს G_k სიმრავლეს მაშინ, როცა α_i^k (β_i^k)ირაციონალურია ($< a,b >$აღნიშავს ერთ-ერთს შემდეგი სიმრავლეებიდან (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$).

ვთქვათ მოცემული გვაქვს რაიმე A სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციებისაგან შედგენილი ფუნქციონალური მწკრივი, რომლის კერძო ჯამების მიმდევრობაა S_n. მაშინ

$$E = \{t : t \in A, \ \lim_{n\to\infty} S_n \text{ ზღვარი არ არსებობს}\}$$

სიმრავლეს ეწოდება მოცემული ფუნქციონალური მწკრივის გ ა ნ შ ლ ა დ ო ბ ი ს სიმრავლე;

$$E_0 = A \setminus E$$

სიმრავლეს ეწოდება მოცემული ფუნქციონალური მწკრივის კ რ ე ბ ა დ ო ბ ი ს სიმრავლე;

$$E' = \{t : t \in A, \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \, |S_n| = \infty\}$$

სიმრავლეს ეწოდება მოცემული ფუნქციონალური მწკრივის შ ე მ ო უ ს ა ზ ღ ვ რ ე - ლ ა დ გ ა ნ შ ლ ა დ ო ბ ი ს სიმრავლე.

197, წელს მ. ა. ლუნინამ [23] დაამტკიცა შემდეგი თეორემა: ვთქვათ φ ნებისმიერო, 0 , ∞)ზე არაკლებადი, ლუწი ფუნქციაა. ამასთან

$$\varphi(0) = 0, \ \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \varphi(\infty) = +\infty$$

მაშინ $\widetilde{G}$ ტიპის ნული ზომის ყოველი E სიმრავლისათვის არსებობს ფუნქცია $L \cap \varphi(L$ ლასიდან, რომლის ფურიე-ჰაარის მწკრივი შემოუსაზღვრელად განშლადია E სმრავლეზე და კრებადია $[0,1] \setminus E$ სიმრავლეზე.

197 წელს ვ. ი. პროხორენკომ [20] დაამტკიცა, რომ $[0,1]$-ის ყოველი თვლადი F ქვესირავლისათვის არსებობს შემოსაზღვრული ფუნქცია, რომლის ფურიე-ჰაარიჱ ჻კრივი განშლადია F სიმრავლეზე და კრებადია $[0,1] \setminus F$ სიმრავლეზე (რაც იმას ნოშავს, რომ $[0,1]$-ის ყოველი თვლადი F ქვესიმრავლე წარმოადგენს რომელიღაც ემოსაზღვრული ფუნქციის ფურიე-ჰაარის მწკრივის განშლადობის სიმრავლეს

მესმე თავში დამტკიცებული თეორემა წარმოადგენს ამ უკანასკნელი შედეგის ანალოგ მრავალი ცვლადის ფუნქციის ფურიე-ჰაარის ჯერადი მწკრივისათვის (პრინგსჰეიმის აზრით კრებადობისათვის; უფრო მეტიც λ -კრებადობისათვის).

თეორემა 3.3.1. **n**-განზომილებიანი $[0,1]^n$ კუბის ყოველი თვლადი F ქვესიმრავლისათვის არსებობს $[0,1]^n$-ზე განსაზღვრული, შემოსაზღვრული, ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიე-ჰაარის **n**-ჯერადი მწკრივი პრინგსჰეიმის აზრით კრებადია $[0,1]^n \setminus F$ სიმრავლეზე და არ არის λ კრებადი F სიმრავლეზე, თუ λ=1.

დისერტაციის შედეგები გამოქვეყნებულია [24-26] შრომებში.

ბოლოს ავტორი გამოხატავს მადლიერებას პროფესორ ვ. ბულაძისა და თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფუნქციათა თეორიისა და ფუნქციონალური ანალიზის კათედრასთან არსებული სამეცნიერო სემინარის (ხელმძღვანელი: საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი, პროფესორი ლ. ჟიჟიაშვილი) წევრების მიმართ სასარგებლო რჩევებისათვის.

თავი I.
ცვლადის იმ გარდაქმნათა შესახებ, რომლებიც ინახავენ ჰაარის ვეივლეტის მიმართ ფურიეს მწკრივების კრებადობასა და აბსოლუტურად კრებადობას

§1. კლასის დადგენა

ვთქვათ $\{h_{j,k} : j,k \in \mathrm{Z}\}$ ჰაარის ვეივლეტია და f ფუნქცია $L^2(\mathrm{R})$ კლასიდანაა. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივს ჰაარის ვეივლეტის მიმართ აქვს შემდეგი სახე:

$$f(x) \sim \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} a_{j,k}(f) h_{j,k}(x), \quad x \in \mathrm{R}. \tag{4}$$

ყველა იმ $f \in L^2(\mathrm{R})$ ფუნქციათა კლასი, რომელთათვისაც (4) მწკრივი ყველგან აბსოლუტურად კრებადია აღვნიშნეთ A_h-ით, ხოლო ყველა იმ $f \in L^2(\mathrm{R})$ ფუნქციათა კლასი, რომელთათვისაც (4) მწკრივი ყველგან კრებადია — S_h-ით.

ფუნქციათა H კლასი განვსაზღვრეთ შემდეგნაირად:

ვთქვათ H არის ისეთი უწყვეტად დიფერენცირებადი $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ჰომეომორფიზმების კლასი, რომელთათვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $\varphi^{-1}(0)$ ორად-რაციონალურია;

2. ა) თუ φ ზრდადი ჰომემომორფიზმია, მაშინ არსებობს ისეთი მთელი n_0 რიცხვი, რომ $\varphi'(x) = 2^{n_0}$ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის;

ბ) თუ φ კლებადი ჰომემომორფიზმია, მაშინ არსებობს ისეთი მთელი n_0' რიცხვი, რომ $\varphi'(x) = -2^{n_0'}$ ნებისმიერი ნამდვილი x რიცხვისათვის;

H კლასის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ამ კლასის ჰომეომორფიზმები წარმოდგებიან შემდეგნაირად:

ა) თუ φ ზრდადი ჰომემომორფიზმია, მაშინ მოიძებნებიან ისეთი $n_0, m_0, r_0 \in \mathrm{Z}$ რიცხვები რომ

$$\varphi(x) = 2^{n_0} x + \frac{m_0}{2^{r_0}}, \quad x \in \mathrm{R}; \tag{5}$$

ბ) თუ φ კლებადი ჰომემომორფიზმია, მაშინ მოიძებნებიან ისეთი $n_0', m_0', r_0' \in \mathrm{Z}$ რიცხვები რომ

$$\varphi(x) = -2^{n_0'} x + \frac{m_0'}{2^{r_0'}}, \quad x \in \mathrm{R}. \tag{6}$$

შენიშვა. ამ თავში მოყვანილ თეორემებს ვამტკიცებთ ზრდადი ჰომეომორფიზმებისათის. კლებადი ჰომეომორფიზმებისათვის აღნიშნული თეორემები მტკიცდება ანალგიურად.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1.1.1. H კლასის ჰომეომორფიზმები მოქმედებენ A_h კლასში.

დამტკცება. ვთქვათ $\varphi \in H$. მაშინ რაიმე მთელი n_0, m_0 და r_0 რიცხვებისათვის ის წარმოიდინება (5) სახით. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $f \in A_h$ ფუნქციისასათვის $f \circ \varphi \in A_h$.

ნებისმერი $j,k \in Z$ რიცხვებისათვის (3) ტოლობის თანახმად გვექნება, რომ

$$a_{j,k}(f \circ \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(t)) h_{j,k}(t)dt = \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(\varphi(t)) h_{j,k}(t)dt =$$

$$= 2^{\frac{j}{2}} \left(\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{2k+1}{2^{j+1}}} f(\varphi(t))dt - \int_{\frac{2k+1}{2^{j+1}}}^{\frac{k+1}{2^j}} f(\varphi(t))dt \right). \tag{7}$$

რადგან $\varphi \in H$, ამიტომ (7) ტოლობაში შეგვიძლია მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა (იხ. [27], გვ. 244), რის შედეგადაც მივიღებთ (იხ. (5)):

$$a_{j,k}(f \circ \varphi) = 2^{\frac{j}{2}} \left(\int_{\varphi\left(\frac{k}{2^j}\right)}^{\varphi\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right)} \frac{f(t)}{\varphi'(t)} dt - \int_{\varphi\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right)}^{\varphi\left(\frac{k+1}{2^j}\right)} \frac{f(t)}{\varphi'(t)} dt \right) =$$

$$=2^{\frac{j}{2}-n_0}\left(\int\limits_{k\cdot 2^{n_0-j}+\frac{m_0}{2^{r_0}}}^{(2k\cdot+1)2^{n_0-j-1}+\frac{m_0}{2^{r_0}}} f(t)dt - \int\limits_{(2k\cdot+1)2^{n_0-j-1}+\frac{m_0}{2^{r_0}}}^{(k+1)\cdot 2^{n_0-j}+\frac{m_0}{2^{r_0}}} f(t)dt\right), \quad j,k\in Z. \tag{8}$$

ვთქვათ $j>|n_0|+|r_0|$. მაშინ

$$\left[k\cdot 2^{n_0-j}+\frac{m_0}{2^{r_0}},\ (k+1)\cdot 2^{n_0-j}+\frac{m_0}{2^{r_0}}\right)=$$

$$=\left[\frac{k+m_0\cdot 2^{j-n_0-r_0}}{2^{j-n_0}},\ \frac{k+m_0\cdot 2^{j-n_0-r_0}+1}{2^{j-n_0}}\right)=\Delta^{(j-n_0)}_{k+m_0\cdot 2^{j-n_0-r_0}}.$$

ამიტომ (8)ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ (იხ. (3))

$$a_{jk}(f\circ\varphi)=2^{-\frac{n_0}{2}}\int\limits_{\Delta^{(j-n_0)}_{k+m_0 2^{j-n_0-r_0}}} f(t)h_{j-n_0,k+m_0 2^{j-n_0-r_0}}(t)dt=$$

$$=2^{-\frac{n_0}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)h_{j-n_0,k+m_0 2^{j-n_0-r_0}}(t)dt=$$

$$=2^{-\frac{n}{2}}a_{j-n_0,k+m_0 2^{j-n_0-r_0}}(f),\quad j,k\in Z,\quad j>|n_0|+|r_0|. \tag{9}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$B = -\left(|n_0| + |r_0| + \left|1 - n_0 + \log_2 \frac{|m_0| + 2^{r_0}}{2^{r_0}}\right|\right). \tag{10}$$

ვთქვათ $j < B$. მაშინ $|m_0| \cdot 2^{-r_0} < 2^{-j+n_0-1}$. ამიტომ:

1) ლუ $m_0 > 0$, მაშინ

$$\begin{gathered} k \cdot 2^{n_0-j} < k \cdot 2^{n_0-j} + m_0 \cdot 2^{-r_0} < (2k+1) \cdot 2^{n_0-j-1} < (2k+1) \cdot 2^{n_0-j-1} + m_0 \cdot 2^{-r_0} < \\ < (k+1) \cdot 2^{n_0-j} < (k+1) \cdot 2^{n_0-j} + m_0 \cdot 2^{-r_0}. \end{gathered} \tag{11}$$

2) ლუ $m_0 < 0$, მაშინ

$$\begin{gathered} k \cdot 2^{n_0-j} + m_0 \cdot 2^{-r_0} < k \cdot 2^{n_0-j} < (2k+1) \cdot 2^{n_0-j-1} + m_0 \cdot 2^{-r_0} < (2k+1) \cdot 2^{n_0-j-1} < \\ < (k+1) \cdot 2^{n_0-j} + m_0 \cdot 2^{-r_0} < (k+1) \cdot 2^{n_0-j}. \end{gathered} \tag{12}$$

შენშვნა. თუ $m_0 = 0$, მაშინ (8)-დან ვღებულობთ, რომ

$$a_{j,k}(f \circ \varphi) = 2^{-\frac{n_0}{2}} a_{j-n_0,k}(f), \quad j,k \in Z. \tag{13}$$

განიხილოთ 1) შემთხვევა. ვთქვათ $m_0 > 0$. მაშინ (11) თანაფარდობის ძალით (8) ტოლიბიდან ვღებულობთ, რომ

$$a_{j,k}(f\varphi) = 2^{\frac{j}{2}-n_0}\left[\left(\int_{k2^{n_0-j}}^{(2k+1)2^{n_0-j-1}} f(t)dt + \int_{(2k+1)2^{n_0-j-1}}^{(2k+1)2^{n_0-j-1}+m_0 2^{-r_0}} f(t)dt - \int_{k2^{n_0-j}}^{k2^{n_0-j}+m_0 2^{-r_0}} f(t)dt\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\int_{(2k+1)2^{n_0-j-1}}^{(k+1)2^{n_0-j}} f(t)dt + \int_{(k+1)2^{n_0-j}}^{(k+1)2^{n_0-j}+m_0 2^{-r_0}} f(t)dt - \int_{(2k+1)2^{n_0-j-1}}^{(2k+1)2^{n_0-j-1}+m_0 2^{-r_0}} f(t)dt\right)\right] =$$

$$=2^{\frac{j}{2}-n_0}\left(\int_{k2^{n_0-j}}^{(2k+1)2^{n_0-j-1}} f(t)dt-\int_{(2k+1)2^{n_0-j-1}}^{(k+1)2^{n_0-j}} f(t)dt\right)+2^{\frac{j}{2}-n_0}\left(2\int_{(2k+1)2^{n_0-j-1}}^{(2k+1)2^{n_0-j-1}+m_0 2^{-r_0}} f(t)dt-\right.$$

$$\left.-\int_{k2^{n_0-j}}^{k2^{n_0-j}+m_0 2^{-r_0}} f(t)dt-\int_{(k+1)2^{n_0-j}}^{(k+1)2^{n_0-j}+m_0 2^{-r_0}} f(t)dt\right).$$

თუ გამოვიყენებთ ჰელდერის უტოლობას მაშინ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\left|a_{j,k}(f\circ\varphi)\right|\leq 2^{-\frac{n_0}{2}}\left|a_{j-n_0,k}(f)\right|+2^{\frac{j}{2}-n_0+2}\sqrt{|m_0|2^{-r_0}}\,\|f\|_{L^2},\ \ j,k\in Z,\ \ j<B. \tag{14}$$

ანალოგიურ შეფასებას მივიღებთ 2) შემთხვევაშიც (12) და (8) თანაფარდობების გამოყენებით.

ვთქვათ $x\in R$. თუ $j,k\in Z$, $j>|n_0|+|r_0|$ და $x\in\Delta_k^{(j)}$, მაშინ

$$\varphi(x)\in\Delta^{(j-n_0)}_{k+m_0 2^{j-n_0-r_0}}.$$

თუ $j,k\in Z$, $j<B$ და $x\in\Delta_k^{(j)}$, მაშინ

$$\varphi(x)-\frac{m_0}{2^{r_0}}\in\Delta_k^{(j-n_0)}.$$

ნებისმიერი $x\in R$ წერტილი თითოეული $j\in Z$ რიცხვისათვის ეკუთვნის არაუმეტეს ორ ერთმანეთის მომდევნო ჰაარის ვეივლეტის საყრდენს. ე. ი. ყოველი $j\in Z$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი k_j რიცხვი, რომ $x\in\Delta_{k_j}^{(j)}\cup\Delta_{k_j+1}^{(j)}$.

ამ უკანასკნელი ფაქტებისა და (10) და (14) თანაფარდობების გამოყენებით ნებისმიერი $x\in R$ წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left|a_{j,k}(f\circ\varphi)h_{j,k}(x)\right|\le$$

$$\le\sum_{j=|n_0|+|r_0|+1}^{\infty}\left(\left|a_{j-n_0,k_j+m_0 2^{j-n_0-r_0}}(f)h_{j-n_0,k_j+m_0 2^{j-n_0-r_0}}(\varphi(x))\right|+\right.$$

$$\left.+\left|a_{j-n_0,k_j+1+m_0 2^{j-n_0-r_0}}(f)h_{j-n_0,k_j+1+m_0 2^{j-n_0-r_0}}(\varphi(x))\right|\right)+$$

$$+\sum_{j=-\infty}^{B-1}\left(\left|a_{j-n_0,k_j}(f)h_{j-n_0,k_j}\left(\varphi(x)-\frac{m_0}{2^{r_0}}\right)\right|+\right.$$

$$\left.+\left|a_{j-n_0,k_j+1}(f)h_{j-n_0,k_j+1}\left(\varphi(x)-\frac{m_0}{2^{r_0}}\right)\right|+2^{\frac{j}{2}-n_0+3}\sqrt{|m_0|2^{-r_0}}\|f\|_{L^2}\right)+$$

$$+\sum_{j=B}^{|n_0|+|r_0|}\left(\left|a_{j,k_j}(f\circ\varphi)h_{j,k_j}(x)\right|+\left|a_{j,k_j+1}(f\circ\varphi)h_{j,k_j+1}(x)\right|\right)\le$$

$$\le\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left|a_{j,k}(f)h_{j,k}(\varphi(x))\right|+\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left|a_{j,k}(f)h_{j,k}\left(\varphi(x)-\frac{m_0}{2^{r_0}}\right)\right|+C,\qquad(15)$$

სადაც

$$C=\frac{2^{-n_0+3}}{\sqrt{2}-1}\sqrt{|m_0|2^{-r_0}}\|f\|_{L^2}+$$

$$+\sum_{j=B}^{|n_0|+|r_0|}\left(\left|a_{j,k_j}(f\circ\varphi)h_{j,k_j}(x)\right|+\left|a_{j,k_j+1}(f\circ\varphi)h_{j,k_j+1}(x)\right|\right).$$

შენიშვნა. თუ $m_0 = 0$ მაშინ (იხ. (13))

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left|a_{j,k}(f\circ\varphi)h_{j,k}(x)\right|\leq\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left|a_{j,k}(f)h_{j,k}(\varphi(x))\right| \tag{16}$$

რადგან $f\in A_h$ და C(იხ. (15)) მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ (15) და (16) შეფასებებიდან გამომდინარეობს, რომ $f\circ\varphi\in A_h$ თეორემა დამტკიცებულია.

§2. აუცილებლობა

§1-ში დამტკიცებული თეორემის თანახმად იმისათვის, რომ რაიმე ჰომემორფიზმი მოქმედებდეს A_h კლასში საკმარისია, რომ ის ეკუთვნოდეს H კლასს. ქვემოთ ნაჩვენები იქნება ამ პირობის აუცილებლობა.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1.2.1. ვთქვათ $\varphi: R\to R$ რაიმე უწყვეტად დიფერენცირებადი ჰომეომორფიზმია, ისეთი რომ $\varphi\notin H$ მაშინ არსებობს ისეთი შემოსაზღვრული ფუნქცია $f\in A_h$, რომ $f\circ\varphi\notin S_h$.

დამტკიცება. რადგან $\varphi\notin H$ ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგი ორი შემთხვევიდან ერთ-ერთს:

I. $\varphi^{-1}(0)$ორად-ირაციონალურია;

II. არსებობს ისეთი $x_0\in R$ და $n_0\in Z$ რიცხვები, რომ $2^{n_0}<\varphi'(x_0)<2^{n_0+1}$

განვიხილოთ თითოეული მათგანი.

I. ავაგოთ fფუნქცია შემდეგნაირად:

0 0

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{თუ } x\in[-1,0)\\ 0, & \text{თუ } x\in R\setminus[-1,0)\end{cases} \tag{17}$$

f ფუნქციის (ჰაარის ვეივლეტების მიმართ) ფურიეს კოეფიციენტებიდან ნუ-ლისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ $a_{j,-1}(f)$ $j=-1,-2,..$, კოეფიციენტები. ამასთან (იხ. (17))

$$|a_{j,-1}(f)|=\left|\int\limits_{\Delta_{-1}^{(j)}} f(t)h_{j,-1}(t)dt\right|=\left|\int\limits_{-2^{-j}}^{0} f(t)h_{j,-1}(t)dt\right|=\left|\int\limits_{0}^{1} h_{j,-1}(t)dt\right|<2^{\frac{j}{2}},\ \ j=-1,-2,\ldots.$$

აქედან გამომდინარე ნებისმიერი $x\in R$ წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$\left|a_{j,-1}(f)h_{j,-1}(x)\right|<2^{j},\ \ j=-1,-2,..$$

ამიტომ

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}\left|a_{j,k}(f)h_{j,k}(x)\right|<\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}<\infty,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $f\in A_h$.

(1') ტოლობის ძალით $f\circ\varphi$ სუპერპოზიციისათვის გვექნება

$$f(\varphi(t))=\begin{cases}1, \text{ თუ } \varphi^{-1}(-1)\le x\le\varphi^{-1}(0),\\ 0, \text{ თუ } x\in\left(-\infty,\varphi^{-1}(-1)\right)\bigcup\left(\varphi^{-1}(0),+\infty\right)\end{cases} \tag{18}$$

(1')-დან გამომდინარეობს, რომ $f\circ\varphi$ ფუნქციას აქვს პირველი გვარის წყვეტა $\varphi^{-1}(0)$ წერტილში, რომელიც ჩვენი დაშვების თანახმად ორად-ირაციონალურია. ამიტომ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ჰაარის ვეივლეტის მიმართ განშლადია $\varphi^{-1}(0)$ წერტილში (იხ. [28, გვ.261]).

ამრიგად I შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ შემთხვევა II. ამ შემთხვევაში არსებობენ ისეთი $x_0\in R$ და $n_0\in Z$ რიცხვები, რომ $2^{n_0}<\varphi'(x_0)<2^{n_0+1}$ ვიგულისხმოთ, რომ $\varphi^{-1}(x_0)$ ორად-რაციო-ნალურია. წინააღმდეგ შემთხვევაში თეორემას დავამტკიცებდით I შემთხვევის ანალოგიურად.

რადგან φ' ფუნქცია უწყვეტია და ორად-რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია R-ში, ამიტომ არსებობს ისეთი ორად-რაციონალური b რიცხვი, რომ $\varphi(b)$ ორად-რაციონალურია და $2^{n_0}<\varphi'(b)<2^{n_0+1}$.

ვთქვათ δ , ζ და η ისეთი რიცხვებია, რომ

$$2^{n_0} < \zeta < \varphi'(b) < \eta < 2^{n_0+1}, \ \zeta < \varphi'(x) < \eta,$$

$$\zeta < \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} < \eta, \ \ x \in (b, b + \delta), \ \ \delta > 0. \tag{19}$$

რადგან b და $\varphi(b)$ორად-რაციონალური რიცხვებია, ამიტომ ისინი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$b = p2^{-r}, \ \ \varphi(b) = q2^{-r}, \ \ p, q, r \in Z.$$

ვთქვათ $l_0 > |n_0| + |r| + 1$ ისეთი ნატურალური რიცხვია, რომ $2^{-l_0} < \delta$. მაშინ ყოველი $n \geq l_0$ნატურალური რიცხვისათვის

$$[p2^{-r}, p2^{-r} + 2^{-n}) = \Delta^{(n)}_{p2^{n-r}},$$

$$[q2^{-r}, q2^{-r} + 2^{-n+n_0+1}) = \Delta^{(n-n_0-1)}_{q2^{n-r-n_0-1}}.$$

(19)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\zeta 2^{-n} < \varphi(p2^{-r} + 2^{-n}) - q2^{-r} < \eta 2^{-n}, \ \ n = l_0, l_0 + 1,.. \tag{20}$$

ვთქვათ $\lambda = \zeta - 2^{n_0}$, $\xi = 2^{n_0+1} - \eta$ მაშინ (20) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$q2^{-r} + 2^{-n+n_0} + \lambda 2^{-n} < \varphi(p2^{-r} + 2^{-n}) < q2^{-r} + 2^{-n+n_0+1} - \xi 2^{-n},$$

$$n = l_0, l_0 + 1,... \backslash \tag{21}$$

ვთქვათ $\gamma \equiv \min\{\lambda; \xi\}$და $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობაა, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$n_1 \geq l_0, \ \ n_i \geq n_{i-1} + 2|n_0| + 3 - \log_2^{\zeta\gamma}, \ \ i = 2,3,... \tag{22}$$

(21)-დან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $i \in N$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან ისეთი u_i, v_i, y_i და z_i ნამდვილი რიცხვები, რომ

$$q2^{-r}+2^{-n_i+n_0}<u_i<v_i<\varphi(p2^{-r}+2^{-n_i})<y_i<z_i<q2^{-r}+2^{-n_i+n_0+1},$$
$$i=1,2,.. \qquad (23)$$

და

$$v_i-u_i=z_i-y_i>\gamma 2^{-n_i}, \quad i=1,2,...\backslash \qquad (24)$$

განვსაზღვროთ f ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f(t)=\begin{cases} 1, \text{ თუ } t\in(u_i,v_i),\ i=1,2,..., \\ -1, \text{ თუ } t\in(y_i,z_i),\ i=1,2,..., \\ 0, \text{ თუ } t\in R\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}((u_i,v_i)\cup(y_i,z_i)). \end{cases} \qquad (25)$$

(22)-დან გამომდინარეობს, რომ $z_{i+1}<u_i$, $i=1,2,...$. ამიტომ f ფუნქცია კორექტულადაა განსაზღვრული.

რადგან $\sum_{i=1}^{\infty}2^{-n_i}<\infty$, ამიტომ $f\in L^2(R)$.

ვაჩვენოთ, რომ $f\in A_h$.

ყოველი $x\in R$ წერტილისათვის

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}|a_{j,k}(f)h_{j,k}(x)|=\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{j,k}(f)h_{j,k}(x)|+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{j,k}(f)h_{j,k}(x)|\equiv A(x)+B(x) \qquad (26)$$

$(-\infty,q2^{-r})$ ინტერვალზე f ფუნქცია მუდმივია. $(q2^{-r},\infty)$ ინტერვალზე f ფუნქცია უბან-უბან მუდმივია და წყვეტას განიცდის ორად-რაციონალურ წერტილებში. აქედან გამომდინარე ნებისმიერი $x\in(-\infty,q2^{-r})\cup(q2^{-r},\infty)$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი $j_0>0$ ნატურალური რიცხვი, რომ ნებისმიერი ნატურალური $j>j_0$ რიცხვისათვის $a_{j,k}(f)=0,\ k\in Z$. რადგან ყოველი $j\in Z$ რიცხვისათვის ნებისმიერ $x\in R$ წერტილს მოიცავს არაუმეტეს ორი ერთმანეთის მომდევნო ჰაარის ვეივლეტის საყრდენი (ამ ფაქტს გამოვიყენებთ შემდეგშიც), ამიტომ ნებისმიერი წერტილისათვის $x\in(-\infty,q2^{-r})\cup(q2^{-r},\infty)$ (იხ. (26)) $B(x)$ არის სასრული ჯამი.

$q2^{-r}$ წერტილისათვის გვექნება, რომ

$$B(q2^{-r}) = \sum_{j=0}^{l_0-1}\left(\left|a_{j,k_j}(f)h_{j,k_j}(q2^{-r})\right| + \left|a_{j,k_j+1}(f)h_{j,k_j+1}(q2^{-r})\right|\right) +$$

$$+\sum_{j=l_0}^{\infty}\left|a_{j,q2^{j-r}}(f)h_{j,q2^{j-r}}(q2^{-r})\right|.$$

ნებისმიერი $j \geq l_0$ მთელი რიცხვისათვის ყოველი ოთხეული u_i, v_i, y_i, z_i $(i = 1,2,\ldots)$, რომლისთვისაც $u_i < q2^{-r} + 2^{-j}$, ეკუთვნის ან $\overset{+}{\Delta}{}^{(j)}_{q2^{j-r}}$ ან $\overset{-}{\Delta}{}^{(j)}_{q2^{j-r}}$ ინტერვალს (იხ. (23)). ამასთან (იხ. (24))

$$\int_{u_i}^{z_i} f(t)dt = 0, \quad i = 1,2,\ldots. \tag{27}$$

ამიტომ $a_{j,q2^{j-r}}(f) = 0, \quad j = l_0, l_0+1, \ldots$. მაშასადამე $B(q2^{-r})$-ც სასრული ჯამია.

ყოველი $x \in R$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი უარყოფითი მთელი j_0 რიცხვი, რომ ნებისმიერი $j < j$ მთელი რიცხვისათვის ყოველი ოთხეული u_i, v_i, y_i, z_i $(i = 1,2,\ldots)$ ეკუთვნის ან $\overset{+}{\Delta}{}^{(j)}_x$ ან $\overset{-}{\Delta}{}^{(j)}_x$ ინტერვალს. ამიტომ (იხ. (27)) ნებისმიერი $x \in R$ წერტილისათვის $A(x)$ არის სასრული ჯამი.

ამრიგად, ნებისმიერი $x \in R$ წერტილისათვის

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} |\, a_{j,k}(f)h_{j,k}(x)\,| < \infty.$$

მაშასადამე $f \in A_h$.

$f \circ \varphi$ სუპერპოზიციისათვის გვექნება, რომ (იხ. (25))

$$f(\varphi(t))=\begin{cases} 1, \text{ თუ } t\in\left(\varphi^{-1}(u_i),\varphi^{-1}(v_i)\right), i=1,2,\ldots \\ -1, \text{ თუ } t\in\left(\varphi^{-1}(y_i),\varphi^{-1}(z_i)\right), i=1,2,\ldots \\ 0, \text{ თუ } t\in R\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}\left[\left(\varphi^{-1}(u_i),\varphi^{-1}(v_i)\right)\cup\left(\varphi^{-1}(y_i),\varphi^{-1}(z_i)\right)\right] \end{cases} \tag{28}$$

(23)-დან ვღებულობთ, რომ

$$b=p2^{-r}<\varphi^{-1}(u_i)<\varphi^{-1}(v_i)<b+2^{-n_i}<\varphi^{-1}(y_i)<\varphi^{-1}(z_i),\ \ i=1,2,.. \tag{29}$$

(19)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{\eta}<(\varphi^{-1})'(x)<\frac{1}{\zeta},\ \ x\in(\varphi(b),\varphi(b+\delta)).$$

ამიტომ (იხ. (19), (24))

$$\varphi^{-1}(v_i)-\varphi^{-1}(u_i)=(\varphi^{-1})'(c_i)(v_i-u_i)>\frac{\gamma}{\eta}2^{-n_i}>\gamma 2^{-n_i-n_0-1} \tag{30}$$

სადაც $c_i\in\left(u_i,v_i\right)$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\varphi^{-1}(z_i)-\varphi^{-1}(y_i)<\frac{1}{\zeta}(z_i-y_i),\ \ i=1,2,... \tag{31}$$

ვთქვათ $l_i=p2^{n_i-r},\ \ i=1,2,...\setminus$ განვიხილოთ კოეფიციენტები

$$a_{n_i,l_i}(f\circ\varphi)=\sqrt{2^{n_i}}\left(\int_{\overset{+}{\Delta}{}_{l_i}^{(n_i)}}f(\varphi(t))dt-\int_{\overset{-}{\Delta}{}_{l_i}^{(n_i)}}f(\varphi(t))dt\right),\ \ i=1,2,...\setminus \tag{32}$$

(19)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$2^{-n_0-1}<\frac{1}{\eta}<\frac{x-b}{\varphi(x)-\varphi(b)}<\frac{1}{\zeta}<2^{-n_0},\ \ x\in(b,b+\delta). \tag{33}$$

ამიტომ $\varphi(b+2^{-n_i-1})<\varphi(b)+2^{-n_i+n_0}$ აქედან გამომდინარე ყოველი $i\in N$ რიცხვის-

თვის $\left(\varphi^{-1}(u_i),\varphi^{-1}(v_i)\right)\subset \overset{-}{\Delta}{}^{(n_i)}_{l_i}$. (22)-დან გამომდინარეობს, რომ $n_{i+1} > n_i + 2$, $i = 1,2,\dots$, ამიტომ

$$\varphi(b) + 2^{-n_{i+1}+n_0+1} < \varphi(b) + 2^{-n_i+n_0-1}, \quad i = 1,2,\dots\backslash \tag{34}$$

გარდა ამისა (იხ. (33))

$$\varphi(b + 2^{-n_i-1}) > \varphi(b) + 2^{-n_i+n_0-1}, \quad i = 1,2,\dots\backslash \tag{35}$$

(34) და (35) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(b) + 2^{-n_{i+1}+n_0+1} < \varphi(b + 2^{-n_i-1}),$$

ამიტომ (იხ. (23)) ყოველი $i \in N$ რიცხვისთვის $(\varphi^{-1}(u_s),\varphi^{-1}(z_s)$ ინტერვალი, $s=i+1, i+2,\dots,$ შედის $\overset{+}{\Delta}{}^{(n_i)}_{l_i}$-ში. (23)-დან გამომდინარეობს, რომ $(\varphi^{-1}(y_i),\varphi^{-1}(z_i))$ ინტერვალი და $(\varphi^{-1}(u_s),\varphi^{-1}(z_s))$, $s<i$, $s\in N$, ინტერვალები შედიან ინტერვალ $(p2^{-\Gamma}+2^{-n_i}, +\infty)$-ში. ყოველივე ამის გამო (იხ. (28), (31), (23), (22))

$$\left|\int\limits_{\overset{+}{\Delta}{}^{(n_i)}_{l_i}} f(\varphi(t))dt\right| = \left|\sum_{s=i+1}^{\infty}\left(\int\limits_{\varphi^{-1}(u_s)}^{\varphi^{-1}(v_s)} f(\varphi(t))dt + \int\limits_{\varphi^{-1}(y_s)}^{\varphi^{-1}(z_s)} f(\varphi(t))dt\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{s=i+1}^{\infty}\left(\varphi^{-1}(z_s) - \varphi^{-1}(u_s)\right) < \frac{1}{\zeta}\sum_{s=i+1}^{\infty}(z_s - u_s) < \frac{1}{\zeta}\sum_{s=i+1}^{\infty}2^{-n_s+n_0} < \frac{2^{n_0}}{\zeta}2^{-n_{i+1}+1} <$$

$$< \gamma 2^{-n_i+n_0-2|n_0|-2}, \quad i = 1,2,\dots\ . \tag{36}$$

(30)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|\int\limits_{\overset{-}{\Delta}{}^{(n_i)}_{l_i}} f(\varphi(t))dt\right| = \varphi^{-1}(v_i) - \varphi^{-1}(u_i) > \gamma 2^{-n_i-n_0-1}, \quad i = 1,2,\dots\ . \tag{37}$$

(36) და (37) შეფასებების ძალით (32) დან ვღებულობთ, რომ

$$\left|a_{n_i,l_i}(f\circ\varphi)h_{n_i,l_i}(p2^{-r})\right|\geq 2^{n_i}\gamma\left(2^{-n_i-n_0-1}-2^{-n_i+n_0-2|n_0|-2}\right)=$$

$$=\begin{cases}\gamma\left(2^{-n_0-1}-2^{-n_0-2}\right), & \text{თუ } n_0>0\\ \gamma\left(2^{|n_0|-1}-2^{-3|n_0|-2}\right), & \text{თუ } n_0<0\end{cases}\geq\gamma 2^{-|n_0|-2},\quad i=1,2,\ldots.$$

უკანასკნელი შეფასებებიდან გამომდინარეობს, რომ $f\circ\varphi$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი ჰაარის ვეივლეტის მიმართ განშლადია $b=p2^{-r}$ წერტილში. ე. ი. $f\circ\varphi\notin S_h$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.1.1 და თეორემა 1.2.1-დან გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია შემდეგი:

შედეგი 1.2.1. ყველა უწყვეტად დიფერენცირებად $\varphi: R\to R$ ჰომემორფიზმებს შორის მხოლოდ H კლასის ჰომემორფიზმები მოქმედებენ A_h კლასში.

შედეგი 1.2.2. ყველა უწყვეტად დიფერენცირებად $\varphi: R\to R$ ჰომემორფიზმებს შორის მხოლოდ H კლასის ჰომემორფიზმები მოქმედებენ S_h კლასში.

თავი II.
შემოსაზღვრული ფუნქციის ფურიე-ჰაარის ჯერადი მწკრივის ნული ზომის სიმრავლეზე განშლადობის შესახებ

§1. n-განზომილებიანი ორადი კუბების სისტემა

n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ინტეგრებადი f ფუნქციის ფურიე-ჰაარის n-ჯერად მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

$$f(t_1,t_2,\dots,t_n)\sim \sum_{p_1,p_2,\dots,p_n=0}^{\infty} a_{p_1,p_2,\dots,p_n}(f)\chi_{p_1}(t_1)\chi_{p_2}(t_2)\cdots\chi_{p_n}(t_n), \quad (38)$$

$$(t_1,t_2,\dots,t_n)\in[0,1]^n,$$

სადაც

$$a_{p_1,p_2,\dots,p_n}(f)=\int_{[0,1]^n} f(t_1,t_2,\dots,t_n)\chi_{p_1}(t_1)\chi_{p_2}(t_2)\cdots\chi_{p_n}(t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n,$$

f ფუნქციის ფურიე-ჰაარის კოეფიციენტებია, ხოლო $\{\chi_{p_1}\chi_{p_2}\cdots\chi_{p_n}\}$— ჰაარის n-ჯერადი სისტემაა, $p_1,p_2,\dots,p_n=1,2,\dots,$ $n\ge 2$, $n\in \mathbb{N}$.

ამ თავში ვგულისხმობთ, რომ $n\in\mathbb{N}$ და $n\ge 2$.

38) მწკრივის ზოგადი წევრი, როცა $p_1,p_2,\dots,p_n=1,2,\dots,$ ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$a_{p_1,p_2,\dots,p_n}(f)\chi_{p_1}(t_1)\chi_{p_2}(t_2)\cdots\chi_{p_n}(t_n)=$$

$$=a_{m_1,m_2,\cdots,m_n}^{(k_1,k_2,\cdots,k_n)}(f)\chi_{m_1}^{(k_1)}(t_1)\chi_{m_2}^{(k_2)}(t_2)\cdots\chi_{m_n}^{(k_n)}(t_n),$$

სადაც $p_j=2^{m_j}+k_j,\quad m_j\in Z_0,\quad k_j=0,1,\dots,2^{m_j}-1,\quad j=1,2,\dots,n$

შემოვიღოთ ნახევრად ღია, n-განზომილებიანი ორადი კუბების $\left\{\Gamma_k^{(i)}\right\}_{i,k=1}^{\infty}$ სისტემა ამისათვის განვიხილოთ ორადი ინტერვალების n ცალი ნებისმიერი სისტემა

$$\{[\alpha_{j,k}^{(i)},\beta_{j,k}^{(i)})\}_{i,k=1}^{\infty},\ \ j=1,2,\dots,n, \tag{39}$$

რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება:

ნატურალურ რიცხვთა ნებისმიერი i,k წყვილისათვის $[\alpha_{j,k}^{(i)},\beta_{j,k}^{(i)})$ ინტერვალების რანგები ერთმანეთის ტოლია. შევნიშნოთ, რომ ორადი $[\alpha_{j,k}^{(i)},\beta_{j,k}^{(i)})$ ინტერვალის რანგი

$$r_{j,k}^{(i)}=\log_2\left(\beta_{j,k}^{(i)}-\alpha_{j,k}^{(i)}\right)^{-1}\equiv r_k^{(i)},\ \ j=1,2,\dots,n.$$

დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $i,k\in N$ რიცხვები. ორადი ინტერვალის განსაზღვრის საფუძველზე გვექნება:

$$[\alpha_{j,k}^{(i)},\beta_{j,k}^{(i)})\equiv\Delta^{(r_k^{(i)})}_{2^{r_k^{(i)}}\cdot\alpha_{j,k}^{(i)}},\ \ j=1,2,\dots,n. \tag{40}$$

ცნობილია, რომ ნებისმიერი ორადი ინტერვალისათვის სამართლიანია წარმოდგენა:

$$\Delta_k^{(m)}=\bigcup_{u^{(s)}=0}^{2^s-1}\Delta^{(m+s)}_{2^s\cdot k+u^{(s)}},\ \ s=0,1,\dots\ .$$

უკანასკნელი ტოლობის საფუძველზე გვექნება, რომ

$$\Delta^{(r_k^{(i)})}_{2^{r_k^{(i)}}\cdot\alpha_{j,k}^{(i)}}=\bigcup_{u_j^{(s)}=0}^{2^s-1}\Delta^{(r_k^{(i)}+s)}_{2^{r_k^{(i)}+s}\cdot\alpha_{j,k}^{(i)}+u_j^{(s)}},\ s\in Z_0,\ \ j=1,2,\dots,n. \tag{41}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები[1)] (იხ. (40), (41)):

$$\Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}\equiv\prod_{j=1}^{n}\Delta^{(r_k^{(i)}+s)}_{2^{r_k^{(i)}+s}\cdot\alpha_{j,k}^{(i)}+u_j^{(s)}}, \tag{42}$$

$$s\in Z_0,\ \ u_j^{(s)}=0,1,,\dots,2^s-1,\ \ j=1,2,\dots,n;$$

$$\Gamma_k^{(i)}\equiv\Gamma^{(i)}_{k;0;0,\dots0}.$$

ცხადია, რომ (იხ. (41), (42))

[1)] სიმბოლო $\prod$ აღნიშნავს სიმრავლეთა დეკარტულ ნამრავლს.

$$\Gamma_k^{(i)} = \bigcup_{u_1^{(s)},u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}=0}^{2^s-1} \Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}},\ s\in Z_0, \tag{43}$$

და

$$\Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} = \bigcup_{i_1,i_2,\dots,i_n=0}^{1} \Gamma^{(i)}_{k;s+1;2u_1^{(s)}+i_1,u_2^{(s)}+i_2,\dots,u_n^{(s)}+i_n}, \tag{44}$$

$$s\in Z_0,\ u_j^{(s)}=0,1,\dots,2^s-1,\ j=1,2,\dots,n.$$

(42)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\mu\,\Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} = 2^{-nr_k^{(i)}-ns}, \tag{45}$$

ყოველი s-თვის ($s\in Z_0$) და $u_j^{(s}$-თვის ($u_j^{(s)}=0,1,\dots,2^s-1;\ j=1,2,\dots,$).

დამატებით შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნები:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\alpha_{j,k}^{(i)}+2^{-r_k^{(i)}-s}u_j^{(s)}-2^{-r_k^{(i)}-s-1}2,\alpha_{j,k}^{(i)}+2^{-r_k^{(i)}-s}u_j^{(s)}+2^{-r_k^{(i)}-s}\right),$$

$$s\in Z_0,\ u_j^{(s)}=0,1,\dots,2^s-1,\ j=1,2,\dots,n. \tag{46}$$

რაიმე A სიმრავლისათვის $(A)'$ აღნიშნავდეს A სიმრავლის საზღვრის იმ ნაწილს, რომელიც მასვე ეკუთვნის, ხოლო $\overset{\circ}{A}\equiv A\setminus(A)'$.

ჩანაწერი $2\mid n$ აღნიშნავდეს, რომ n არის ლუწი.

ჩანაწერი $2\overline{\mid} n$ აღნიშნავდეს, რომ n არის კენტი.

§2. ნული ზომის სიმრავლეზე განშლადობა

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 2.2.1. n-განზომილებიანი ერთეულოვანი $[0,1]^n$ კუბის ნული ზომის ყოველი ქვესიმრავლისათვის არსებობს $[0,1]^n$-ზე განსაზღვრული, შემოსაზღვ-

რული, ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიე-ჰაარის n-ჯერადი მწკრივი არ არის λ-კრებადი ამ სიმრავლეზე, თუ $\lambda>1$.

დამტკიცება. ვთქვათ $E\subset[0,1]^n$, $\mu E=0$. ინდუქციით ავაგოთ ღია სიმრავლეთა მიმდევრობა G_i, $i=2,3,\ldots$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) $G_{i+1}\subset G_i\subset G_1=[0,1)^n\equiv\Gamma_1^{(1)}$, $i=2,3,\ldots$;

ბ) თუ $i\geq 2$, $i\in N$, მაშინ G_i არის არაუმეტეს თვლადი გაერთიანება ნახევრად ღია, n-განზომილებიანი $\Gamma_k^{(i)}$ ორადი კუბებისა, რომელთაც წყვილ-წყვილად არ გააჩნიათ საერთო შიგა წერტილი;

გ) ყოველი $i\in N$ რიცხვისათვის $E\bigcap(G_i\setminus G_{i+1})$ სიმრავლის ყოველი წერტილი ეკუთვნის ერთ-ერთს $(\Gamma_k^{(i)})'$ სიმრავლეებიდან;

დ) ყოველი $i\in N$ რიცხვისათვის თითოეული $\Gamma_k^{(i+1)}$ კუბი მთლიანად შედის ერთ-ერთ $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{k_1}^{(i)}$ კუბში, $k_1\in N$;

ე) ყოველი i,k და s ნატურალური რიცხვებისა და $u_j^{(s)}$, $j=1,2,\ldots,n$, რიცხვებისათვის, სადაც $u_{j_1}^{(s)}=u_{j_2}^{(s)}=\cdots=u_{j_q}^{(s)}=0$, $j_1,j_2,\ldots,j_q=1,2,\ldots,n$, $j_1<j_2<\cdots<j_q$, $q=1,2,\ldots,n-1$ და $u_j^{(s)}=1,2,\ldots,2^s-1$, $j=1,2,\ldots,n$, $j\neq j_1,j_2,\ldots,j_q$,

$$\mu G_{i+1}\bigcap\Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}}<2^{-nr_k^{(i)}-ns-8n-1}\tag{47}$$

და ყოველი $s\in Z_0$ რიცხვისათვის

$$\mu G_{i+1}\bigcap\Gamma^{(i)}_{k;s;0,0,\ldots,0}<2^{-nr_k^{(i)}-ns-8n-1}.\tag{48}$$

შევნიშნოთ, რომ G_i, $i\in N$, სიმრავლეების ასაგებად ვიყენებთ ზემოთ შემოღებულ ნახევრად ღია, n-განზომილებიანი ორადი კუბების სისტემას, რომლისაგებაშიც გამოყენებული ორადი ინტერვალებისათვის ვუშვებთ, რომ $[\alpha_{j,1}^{(1)},\beta_{j,1}^{(1)})\equiv[0,1)$, $j=1,2,\ldots,n$ (იხ. (39)-(42)).

ვთქვათ აგებული გვაქვს სიმრავლეები $G_1,G_2,\ldots,G_m$, $m\geq 2$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ა), გ), დ) და ე) პირობებს, როცა $i=1,\ 2,\ldots,\ m-$ და ბ) პირობას, როცა

$i = 1,2,\ldots,m$. ავაგოთ G_{m+1} სიმრავლე.

ვთქვათ $k \in N$. წარმოვადგინოთ $\mathring{\Gamma}_k^{(m)}$ კუბი შემდეგნაირად (იხ. (43)):

$$\mathring{\Gamma}_k^{(m)} = \Gamma_{k;1;1,\ldots,1}^{(m)} \bigcup \bigcup_{s=2}^{\infty} \left(\bigcup_{u_2^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}=1}^{2^s-1} \Gamma_{k;s;1,u_2^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}}^{(m)} \right) \bigcup$$

$$\bigcup \bigcup_{u_1^{(s)}=2}^{2^s-1} \left(\bigcup_{u_3^{(s)},u_4^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}=1}^{2^s-1} \Gamma_{k;s;1,u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}}^{(m)} \right) \bigcup$$

$$\bigcup \bigcup_{u_1^{(s)},u_2^{(s)}=2}^{2^s-1} \left(\bigcup_{u_4^{(s)},u_5^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}=1}^{2^s-1} \Gamma_{k;s;1,u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}}^{(m)} \right) \bigcup \cdots$$

$$\cdots \bigcup \bigcup_{u_1^{(s)},\ldots,u_{n-1}^{(s)}=2}^{2^s-1} \Gamma_{k;s;1,u_1^{(s)},\ldots,u_{n-1}^{(s)},1}^{(m)}. \tag{49}$$

განვიხილოთ **n**-ეულები:

$s=1$ რიცხვისთვის $(1,\ldots,1)$, ხოლო ყოველი $s \geq 2$ ნატურალური რიცხვისთვის $\left(1,u_2^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}\right)$, სადაც $u_2^{(s)},\ldots,u_n^{(s)} = 1,\ldots,2^s-1$,

$\left(u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}\right)$, სადაც $u_1^{(s)} = 2,\ldots,2^s-1$; $u_3^{(s)},\ldots,u_n^{(s)} = 1,\ldots,2^s-1$,

$\left(u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}\right)$, სადაც $u_1^{(s)},u_2^{(s)} = 2,\ldots,2^s-1$; $u_4^{(s)},\ldots,u_n^{(s)} = 1,\ldots,2^s-1$,

....

$\left(u_1^{(s)},u_2^{(s)},\ldots,u_{n-1}^{(s)},1\right)$, სადაც $u_1^{(s)},\ldots,u_{n-1}^{(s)} = 2,\ldots,2^s-1$.

რადგან $\mu E = 0$, ამიტომ არსებობენ ღია სიმრავლეები, შესაბამისად,

$$F^{(m)}_{k;1;1,\dots,1},\ F^{(m)}_{k;s;u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}},\ F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}$$

$$F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}},\dots,\ F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_{n-1}^{(s)},1}$$

ისეთნი, რომ (იხ. (46))

$$E\cap\Gamma^{(m)}_{k;1;1,\dots,1}\subset F^{(m)}_{k;1;1,\dots,1}\subset\overset{*}{\Gamma}{}^{(m)}_{k;1;1,\dots,1},$$

$$E\cap\Gamma^{(m)}_{k;s;u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}\subset F^{(m)}_{k;s;u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}\subset\overset{*}{\Gamma}{}^{(m)}_{k;s;u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}},$$

$$E\cap\Gamma^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}\subset F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}\subset\overset{*}{\Gamma}{}^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\dots,u_n^{(s)}},$$

$$E\cap\Gamma^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}\subset F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}\subset\overset{*}{\Gamma}{}^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}},$$

....

$$E\cap\Gamma^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_{n-1}^{(s)},1}\subset F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_{n-1}^{(s)},1}\subset\overset{*}{\Gamma}{}^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_{n-1}^{(s)},1},\tag{50}$$

და

$$\mu F^{(m)}_{k;1;1,\dots,1}<2^{nr_k^{(m)}-11n},$$

$$\mu F^{(m)}_{k;s;u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}<2^{nr_k^{(m)}-ns-10n},$$

$$\mu F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}<2^{nr_k^{(m)}-ns-10n},$$

$$\mu F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}<2^{nr_k^{(m)}-ns-10n},$$

....

$$\mu F^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_{n-1}^{(s)},1}<2^{nr_k^{(m)}-ns-10n}.\tag{51}$$

ვთქვათ

$$G_{m+1}=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{k;1;1,\dots,1}^{(m)}\cup\bigcup_{s=2}^{\infty}\left(\bigcup_{u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}=1}^{2^s-1}F_{k;s;1,u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}^{(m)}\right)\cup$$

$$\cup\bigcup_{u_1^{(s)}=2}^{2^s-1}\left(\bigcup_{u_3^{(s)},u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}=1}^{2^s-1}F_{k;s;1,u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}^{(m)}\right)\cup$$

$$\cup\bigcup_{u_1^{(s)},u_2^{(s)}=2}^{2^s-1}\left(\bigcup_{u_4^{(s)},u_5^{(s)},\dots,u_n^{(s)}=1}^{2^s-1}F_{k;s;1,u_1^{(s)},u_2^{(s)},1,u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}^{(m)}\right)\cup\dots$$

$$\dots\cup\bigcup_{u_1^{(s)},\dots,u_{n-1}^{(s)}=2}^{2^s-1}F_{k;s;1,u_1^{(s)},\dots,u_{n-1}^{(s)},1}^{(m)}. \tag{52}$$

ცხადია G_{m+1} ღია სიმრავლეა, ამიტომ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც არაუმეტეს თვლადი გაერთიანება ნახევრადღია, n-განზომილებიანი ორადი კუბებისა. ვთქვათ

$$G_{m+1}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Gamma_k^{(m+1)}$$

ერთ-ერთი ასეთი წარმოდგენაა (იგულისხმება, რომ $\Gamma_k^{(m+1)}$ კუბები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთნი არიან).

ცხადია, რომ G_{m+1} აკმაყოფილებს ბ) პირობას $i=m+1$-თვის და ა) და დ) პირობებს $i=m$-თვის (იხ. (49), (50), (52)).

რადგან (იხ. (49), (50), (52))

$$E\cap(G_m\setminus G_{m+1})=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left[\left(\Gamma_k^{(m)}\setminus G_{m+1}\right)\cap E\right] \text{ და } E\cap\mathring{\Gamma}_k^{(m)}\subset G_{m+1},$$

ამიტომ

ამიტომ

$$E \bigcap (G_m \setminus G_{m+1}) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\Gamma_k^{(m)} \right)' \bigcup \left(\mathring{\Gamma}_k^{(m)} \setminus E \right) \right] \bigcap E \right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\Gamma_k^{(m)} \right)'.$$

ამრიგად, სრულდება გ) პირობა $i = m$-სთვის. შესამოწმებელი დარჩა ე) პირობა.

ყოველი $s \geq 2$ ნატურალური რიცხვისა და $u_j^{(s)}, j = 1,2,\dots,n,$ რიცხვებისათვის, სადაც

$u_{j_1}^{(s)} = u_{j_2}^{(s)} = \cdots = u_{j_q}^{(s)} = 0,\ j_1, j_2, \dots, j_q = 1,2,\dots, n,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_q,\ q = 1,2,\dots, n-1$

და $u_j^{(s)} = 1,2,\dots,2^s - 2,\ j = 1,2,\dots,n,\ j \neq j_1, j_2, \dots, j_q$, ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას

$$G_{m+1} \bigcap \Gamma^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} \subset$$

$$\subset \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \left[\bigcup_{\substack{d_j^{(\nu)}=0 \\ j=1,\dots,n;\, j\neq j_1,\dots,j_q}}^{2^\nu} \left(\bigcup_{\substack{d_{j2}^{(\nu)}, d_{j3}^{(\nu)},\dots,d_{jq}^{(\nu)}=1 \\ d_{j1}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}} \bigcup \right.\right.$$

$$\bigcup \bigcup_{\substack{d_{j1}^{(\nu)}, d_{j3}^{(\nu)},\dots,d_{jq}^{(\nu)}=1 \\ d_{j2}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}} \bigcup \dots \bigcup$$

$$\left.\left. \bigcup \bigcup_{\substack{d_{j1}^{(\nu)}, d_{j2}^{(\nu)},\dots,d_{jq-1}^{(\nu)}=1 \\ d_{jq}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}} \right) \right] \bigcup$$

ყოველი $s \geq 2$ ნატურალური რიცხვისა და $u_j^{(s)}$, $j=1,2,\dots,n$, რიცხვებისათვის, სადაც

$$u_{j_1}^{(s)} = u_{j_2}^{(s)} = \cdots = u_{j_q}^{(s)} = 0, \quad j_1, j_2, \dots, j_q = 1,2,\dots,n\,,\ j_1 < j_2 < \cdots < j_q, \quad q = 1,2,\dots,n-2\,;$$

$$u_{l_1}^{(s)} = u_{l_2}^{(s)} = \cdots = u_{l_p}^{(s)} = 2^s - 1\,,\ l_1, l_2, \dots, l_p = 1,2,\dots,n\,,\ l_1 < l_2 < \cdots < l_p\,,$$

$$l_1, l_2, \dots, l_p \neq j_1, j_2, \dots, j_q\,,\ p = 1,2,\dots, n-q-1\,;$$

$$u_j^{(s)} = 1,2,\dots,2^s - 2\,,\ j = 1,2,\dots, n\,,\ j \neq j_1, j_2, \dots, j_q, l_1, l_2, \dots, l_p\,,$$

(შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევას ადგილი ექნება მხოლოდ $n \geq 3$-თვის, $n \in N$) ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას

$$G_{m+1} \bigcap \Gamma^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} \subset$$

$$\subset \bigcup_{\nu=0}^{\infty} \left[\bigcup_{\substack{d_j^{(\nu)}=0 \\ j=1,\dots,n;\, j \neq j_1,\dots,j_q, l_1,\dots,l_p}}^{2^\nu} \ \bigcup_{d_{l_1}^{(\nu)}, d_{l_2}^{(\nu)}, \dots, d_{l_p}^{(\nu)} =}^{2^\nu - 1} \ \bigcup \right.$$

$$\bigcup \left(\bigcup_{\substack{d_{j_2}^{(\nu)}, d_{j_3}^{(\nu)}, \dots, d_{j_q}^{(\nu)} = 1 \\ d_{j_1}^{(\nu)} = 1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)} + d_1^{(\nu)}, \dots, 2^\nu u_n^{(s)} + d_n^{(\nu)}} \ \bigcup \right.$$

$$\bigcup \bigcup_{\substack{d_{j_1}^{(\nu)},d_{j_3}^{(\nu)},\dots,d_{j_q}^{(\nu)}=1\\ d_{j_2}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}} \bigcup \dots \bigcup$$

$$\left.\left.\bigcup \bigcup_{\substack{d_{j_1}^{(\nu)},\dots,d_{j_{q-1}}^{(\nu)}=1\\ d_{j_q}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}}\right]\right);$$

ყოველი $s \geq 1$ ნატურალური რიცხვისა და $u_j^{(s)}$, $j=1,2,\dots,n$, რიცხვებისათვის, სადაც $u_{j_1}^{(s)} = u_{j_2}^{(s)} = \cdots = u_{j_q}^{(s)} = 0$, $j_1, j_2, \dots, j_q = 1,2,\dots,n$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_q$, $q = 1,2,\dots,n-1$ და $u_j^{(s)} = 2^s - 1$, $j=1,2,\dots,n$, $j \neq j_1, j_2, \dots, j_q$, ადგილი აქვს შემდეგ ჩართვას

$$G_{m+1} \bigcap \Gamma^{(m)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} \subset$$

$$\subset \bigcup_{\nu=0}^{\infty}\left[\bigcup_{\substack{d_j^{(\nu)}=0\\ j=1,\dots,n;\, j\neq j_1,\dots,j_q}}^{2^\nu-1}\left(\bigcup_{\substack{d_{j_2}^{(\nu)},d_{j_3}^{(\nu)},\dots,d_{j_q}^{(\nu)}=1\\ d_{j_1}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}} \bigcup\right.\right.$$

$$\bigcup \bigcup_{\substack{d_{j_1}^{(\nu)},d_{j_3}^{(\nu)},\dots,d_{j_q}^{(\nu)}=1\\ d_{j_2}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}} \bigcup \dots \bigcup$$

$$\mathrm{Y} \mathop{\mathrm{Y}}_{\substack{d_{j_1}^{(\nu)},d_{j_2}^{(\nu)},\dots,d_{j_{q-1}}^{(\nu)}=1\\ d_{j_q}^{(\nu)}=1}}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;2^\nu u_1^{(s)}+d_1^{(\nu)},\dots,2^\nu u_n^{(s)}+d_n^{(\nu)}} \Bigg)\Bigg];$$

ყოველი $s \in Z_0$, $u_j^{(s)}=0$, $j=1,2,\dots,n$ რიცხვებისათვის

$$G_{m+1} \cap \Gamma^{(m)}_{k;s;0,\dots,0} \subset \mathop{\mathrm{Y}}_{\nu=0}^{\infty}\Bigg(\mathop{\mathrm{Y}}_{d_2^{(\nu)},d_3^{(\nu)},\dots,d_n^{(\nu)}=1}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;1,d_2^{(\nu)},\dots,d_n^{(\nu)}} \ \mathrm{Y}$$

$$\mathrm{Y} \mathop{\mathrm{Y}}_{d_1^{(\nu)},d_3^{(\nu)},\dots,d_n^{(\nu)}=1}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;d_1^{(\nu)},1,d_3^{(\nu)},\dots,d_n^{(\nu)}} \ \mathrm{Y}\dots\mathrm{Y} \mathop{\mathrm{Y}}_{d_1^{(\nu)},\dots,d_{n-1}^{(\nu)}=1}^{2^\nu} F^{(m)}_{k;s+\nu;d_1^{(\nu)},\dots,d_{n-1}^{(\nu)},1} \Bigg),$$

ამიტომ (51)-ის ძალით სრულდება ე) პირობა.

ამგვარად, ავაგეთ G_i, $i=1,2,\dots,$ მიმდევრობა, რომელიც აკმაყოფილებს ა) - ე) პირობებს.

განვსაზღვროთ f_i, $i=1,2,\dots,$ ფუნქციები. ამისათვის დამატებით შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნები (იხ. (43)):

$$B_i \equiv \mathop{\mathrm{Y}}_{k=1}^{\infty}\Bigg[\mathop{\mathrm{Y}}_{s=2}^{\infty}\Bigg(\mathop{\mathrm{Y}}_{\substack{u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}=1\\ 2\nmid u_2^{(s)}+\dots+u_n^{(s)}}}^{2^s-1} \Gamma^{(i)}_{k;s;1,u_2^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} \ \mathrm{Y}$$

$$\mathrm{Y} \mathop{\mathrm{Y}}_{u_1^{(s)}=2}^{2^s-1} \mathop{\mathrm{Y}}_{\substack{u_3^{(s)},u_4^{(s)},\dots,u_n^{(s)}=1\\ 2\nmid u_1^{(s)}+u_3^{(s)}+u_4^{(s)}+\dots+u_n^{(s)}}}^{2^s-1} \Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},1,u_3^{(s)},\dots,u_n^{(s)}} \ \mathrm{Y}$$

$$\bigcup \bigcup_{u_1^{(s)},u_2^{(s)}=2}^{2^s-1} \bigcup_{\substack{u_4^{(s)},u_5^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}=1 \\ 2\mid u_1^{(s)}+u_2^{(s)}+u_4^{(s)}+u_5^{(s)}+\ldots+u_n^{(s)}}}^{2^s-1} \Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},u_2^{(s)}1,u_4^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}} \bigcup \cdots \bigcup$$

$$\bigcup \bigcup_{\substack{u_1^{(s)},\ldots,u_{n-1}^{(s)}=1 \\ 2\mid u_1^{(s)}+\ldots+u_{n-1}^{(s)}}}^{2^s-1} \Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},\ldots,u_{n-1}^{(s)},1} \Bigg)\Bigg], \quad i=1,2,\ldots; \tag{53}$$

$$A_i \equiv \begin{cases} B_i, & \text{თუ } (t_1,t_2,\ldots,t_n) \in A_i, \\ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma^{(i)}_{k;1;1,\ldots,1} \bigcup B_i, & \text{თუ } (t_1,t_2,\ldots,t_n) \in [0,1]^n \setminus A_i,\ i=1,2,\ldots. \end{cases} \tag{54}$$

$$f_i(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{cases} 1, \text{ თუ } (t_1,t_2,\ldots,t_n) \in A_i, \\ 0, \text{ თუ } (t_1,t_2,\ldots,t_n) \in [0,1]^n \setminus A_i,\ i=1,2,\ldots. \end{cases} \tag{55}$$

ახლა განვსაზღვროთ f ფუნქცია. ვთქვათ

$$f(t_1,t_2,\dots,t_n)=\begin{cases} f_i(t_1,t_2,\dots,t_n), \text{ თუ } (t_1,t_2,\dots,t_n)\in G_i\setminus G_{i+1},\ i\in N, \\ 0, \qquad\qquad \text{თუ} (t_1,t_2,\dots,t_n)\in \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i. \end{cases} \tag{56}$$

ა) და ბ) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციათა განსაზღვრება კორექტულია.

შევნიშნოთ, რომ $\mu \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = 0$ (იხ. (48), ა) და ბ)). ამასთან , f ფუნქცია წარმოადგენს $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus G_{i+1})$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას.

(44-45), (53-55)-დან გამომდინარეობს, რომ ყოველი i,k და s ნატურალური რიცხვებისა და $u_j^{(s)}$, $j=1,2,\dots,n$, რიცხვებისათვის, სადაც $u_{j_1}^{(s)}=u_{j_2}^{(s)}=\cdots=u_{j_q}^{(s)}=0$, $j_1,j_2,\dots,j_q=1,2,\dots,n,\ j_1<j_2<\cdots<j_q,\ q=1,2,\dots,n-1$ და $u_j^{(s)}=1,2,\dots,2^s-1$, $j=1,2,\dots,n,\ j\neq j_1,j_2,\dots,j_q$,

$$\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s;u_1^{(s)},\dots,u_n^{(s)}}} f_i(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n = 2^{-nr_k^{(i)}-ns-1} \tag{57}$$

და ყოველი $s\in Z_0$ რიცხვისათვის

$$\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s;0,\dots,0}} f_i(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots dt_n = \begin{cases} 2^{-nr_k^{(i)}-ns-1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2^n-1}\right), \text{ როცა } 2\mid n \\ 2^{-nr_k^{(i)}-ns-1}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2^n-1}\right), \text{ როცა } 2\nmid n. \end{cases} \tag{58}$$

ვთქვათ $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E$. გ) პირობის ძალით ადგილი აქვს შემდეგი შემთხვევებიდან ერთ-ერთს:

I. ნატურალურ რიცხვთა რომელიღაც (i,k) წყვილისათვის

$$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\left(\Gamma_k^{(i)}\right)'.$$

II. $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\prod_{i=1}^{\infty}G_i$.

I შემთხვევაში $x_{j_0}=\alpha_{j_0,k}^{(i)}$ რომელიღაც j_0 რიცხვისათვის, $1\le j_0\le n$, და ა(

I_1. რომელიღაც $s_{j_0}\in Z_0$ რიცხვისათვის

$$x_j=\alpha_{j,k}^{(i)}+2^{-r_k^{(i)}-s_{j_0}}\cdot u_{j,0}^{(s_{j_0})},$$

სადაც $0\le u_{j,0}^{(s_{j_0})}\le 2^{s_{j_0}}-1$, $j=1,2,\dots,n;j\ne j_0$;

ან

I_2. რომელიღაც $s'_{j_0}\in Z_0$ რიცხვისათვის

$$x_j=\alpha_{j,k}^{(i)}+2^{-r_k^{(i)}-s'_{j_0}}\cdot u_{j,0}^{(s'_{j_0})},$$

სადაც $0\le u_{j,0}^{(s'_{j_0})}\le 2^{s'_{j_0}}-1$, $j=1,2,\dots,n$, $j\ne j_0,l_{j_0;1},l_{j_0;2},\dots,l_{j_0;q_{j_0}}$,

$q_{j_0}=1,\dots,n-2$, $l_{j_0;m}=1,2,\dots,n$, $l_{j_0;m}\ne j_0$, $m=1,\dots,q_{j_0}$, $l_{j_0;1}<l_{j_0;2}<\dots<l_{j_0;q_{j_0}}$

და ყოველი $s\in Z_0$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან რიცხვები $0\le u_{l_{j_0,m},s}^{(s'_{j_0}+s)}\le 2^{s'_{j_0}+s}-$,

$m=1,\dots,q_{j_0}$, ისეთნი, რომ

$$x_{l_{j_0,m}}\in\left[\alpha_{l_{j_0;m},k}^{(i)}+2^{-r_k^{(i)}-s'_{j_0}-s}\cdot u_{l_{j_0;m},s}^{(s'_{j_0}+s)},\alpha_{l_{j_0;m},k}^{(i)}+2^{-r_k^{(i)}-s'_{j_0}-s}\cdot u_{l_{j_0,m},s}^{(s'_{j_0}+s)}+2^{-r_k^{(i)}-s'_{j_0}-s}\right)$$

$$m=1,2,\dots,q$$

ან

I_3. ყოველი $s\in Z_0$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან რიცხვები $0\le u_{j,s}^{(s)}\le 2^s-1$

$j=1,2,\dots,n,\quad j\ne j_0$, ისეთნი, რომ

$$x_j \in \left[\alpha_{j,k}^{(i)} + 2^{-r_k^{(i)}-s} \cdot u_{j,s}^{(s)}, \alpha_{j,k}^{(i)} + 2^{-r_k^{(i)}-s} \cdot u_{j,s}^{(s)} + 2^{-r_k^{(i)}-s}\right), \; j=1,2,\ldots,n; j \neq j_0.$$

II შემთხვევაში ყოველი $i \in N$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $m_i \in N$, რომ

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overset{\circ}{\Gamma}{}_{m_i}^{(i)}, \; i = 1,2,\ldots. \tag{59}$$

შევნიშნოთ, რომ I_2 შემთხვევას ადგილი აქვს მხოლოდ $n \geq 3$ $(n \in N)$ რიცხვებისათვის და II შემთხვევაში თითოეული x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ ორად-ირაციონალურია (იხ. დ), (59)).

ჯერ განვიხილოთ I შემთხვევა.

I_1. განვიხილოთ კოეფიციენტები

$$a_{p_1^{(j_0)}(s), p_2^{(j_0)}(s), \ldots, p_n^{(j_0)}(s)}^{(q_1^{(j_0)}(s), q_2^{(j_0)}(s), \ldots, q_n^{(j_0)}(s))}(f) =$$

$$= \sqrt{2^{\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)}} \left[\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n=0 \\ 2|i_1+\ldots+i_n}}^{1} \int_{\Gamma^{(i)}_{k; s_{j_0}+s+1; 2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1, \ldots, 2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)\, dt_1 \cdots dt_n - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n=0 \\ 2|i_1+\ldots+i_n}}^{1} \int_{\Gamma^{(i)}_{k; s_{j_0}+s+1; 2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1, \ldots, 2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)\, dt_1 \cdots dt_n \right], \tag{60}$$

სადაც $p_j^{(j_0)}(s) = r_k^{(i)} + s_{j_0} + s$, $q_j^{(j_0)}(s) = x_j \cdot 2^{p_j^{(j_0)}(s)}$, $j = 1,2,\ldots,n$, $s = 0,1,\ldots$, ხოლო $u_j^{(s_{j_0}+s)} = 2^s u_{j,0}^{(s_{j_0})}$, $j = 1,2,\ldots,n$, $j \neq j_0$ და $u_{j_0}^{(s_{j_0}+s)} = 0$, $s = 0,1,\ldots$.

განვიხილოთ ქვეშემთხვევები:

$\text{I}_{1.1}.\ u_{j,0}^{(s_{j_0})} \neq 0,\ \ j=1,2,\ldots,n,\ \ j \neq j_0.$

აქედან გამომდინარე $s_{j_0} \neq 0$. ამიტომ (იხ. (60))

$$a_{p_1^{(j_0)}(s),p_2^{(j_0)}(s),\ldots,p_n^{(j_0)}(s)}^{(q_1^{(j_0)}(s),q_2^{(j_0)}(s),\ldots,q_n^{(j_0)}(s))}(f)=$$

$$=\sqrt{2^{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)}}\left[\sum_{\substack{i_j=0\\ j=1,\ldots,n;\, j\neq j_0;\, i_{j_0}=0\\ 2\left|\sum\limits_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j\right.}}^{1}\ \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k:s_{j_0}+s+1;\,2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\ldots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n\right.$$

$$+\sum_{\substack{i_j=0\\ j=1,\ldots,n;\, j\neq j_0;\, i_{j_0}=1\\ 2\left|\sum\limits_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j\right.}}^{1}\ \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k:s_{j_0}+s+1;\,2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\ldots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n-$$

$$-\left(\sum_{\substack{i_j=0\\ j=1,\ldots,n;\, j\neq j_0;\, i_{j_0}=0\\ 2\not\left|\sum\limits_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j\right.}}^{1}\ \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k:s_{j_0}+s+1;\,2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\ldots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n+\right.$$

$$+\sum_{\substack{i_j=0\\ j=1,\dots,n;\, j\neq j_0;\, i_{j_0}=1\\ 2\,|\,\sum_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j}}^{1}\ \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n \Bigg)\Bigg] \equiv$$

$$\equiv \sqrt{2^{\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)}}\,[S_1+S_2-(S_3+S_4)],\ s\in Z_0. \tag{61}$$

(47) და (53)-(56)-ის ძალით i_j რიცხვებისათვის, სადაც $i_{j_0}=0$, $i_j=0$ ან 1, $j=1,\dots,n$, $j\neq j_0$ და $\sum_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j$ ლუწია,

$$\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n \geq \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} f_i(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n -$$

$$-\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} \left|f(t_1,\dots,t_n)-f_i(t_1,\dots,t_n)\right|dt_1\cdots dt_n \geq 2^{-nr_k^{(i)}-ns_{j0}-ns-n-1} -$$

$$-\mu G_{i+1}\bigcap\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n} \geq$$

$$\geq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-n-1} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-9n-1},\ s=0,1,\dots.$$

ამიტომ

$$S_1 \geq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-3} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-3}, \quad s=0,1,\dots . \qquad (62)$$

(47) და (53)-(56)-ის ძალით i_j რიცხვებისათვის, სადაც $i_{j_0}=0$, $i_j=0$ ან 1, $j=1,\dots,n$, $j\neq j_0$ და $\sum_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j$ კენტია (იხ. (61)),

$$\int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n \geq \int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} f_i(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n -$$

$$-\int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} \left|f(t_1,\dots,t_n)-f_i(t_1,\dots,t_n)\right|dt_1\cdots dt_n \geq 2^{-nr_k^{(i)}-ns_{j0}-ns-n} -$$

$$-\mu G_{i+1}\bigcap\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s;u_1^{(s_{j0}+s)},\dots,u_n^{(s_{j0}+s)}} \geq$$

$$\geq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-n} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-1}, \quad s=0,1,\dots .$$

ამიტომ

$$S_2 \geq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-2} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-7n-2}, \quad s=0,1,\dots . \qquad (63)$$

(47) და (53)-(56)-ის ძალით i_j რიცხვებისათვის, სადაც $i_{j_0}=0$, $i_j=0$ ან 1,

$j = 1,\dots, n,\quad j \neq j_0$ და $\sum\limits_{j=1, j\neq j_0}^{n} i_j$ ჯენტია (იხ. (61))

$$\left|\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n\right|$$

$$\leq \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f_i(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} \left|f(t_1,\dots,t_n) - f_i(t_1,\dots,t_n)\right| dt_1\cdots dt_n \leq$$

$$\leq 2^{-nr_k^{(i)}-ns_{j_0}-ns-n-1} +$$

$$\mu G_{i+1}\bigcap \Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s;u_1^{(s_{j_0}+s)},\dots,u_n^{(s_{j_0}+s)}} \leq$$

$$\leq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-n-1} - 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-9n-1},\quad s = 0,1,\dots. \tag{64}$$

ამიტომ

$$|S_3| \leq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-3} - 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-8n-3},\quad s = 0,1,\dots.$$

(47) და (53)-(56)-ის ძალით i_j რიცხვებისათვის, სადაც $i_{j_0}=0$, $i_j=0$ ან 1, $j=1,\dots,n$, $j\neq j_0$ და $\sum_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j$ ლუწია (იხ. (61))

$$\left|\int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n\right|\leq$$

$$\leq \int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} f_i(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n+$$

$$+\int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}} \left|f(t_1,\dots,t_n)-f_i(t_1,\dots,t_n)\right|dt_1\cdots dt_n\leq$$

$$\leq \mu G_{i+1}\bigcap \Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s;u_1^{(s_{j0}+s)},\dots,u_n^{(s_{j0}+s)}}\leq 2^{-\sum_{j=1}^{n}p_j^{(j0)}(s)-8n-1},\ s=0,1,\dots$$

ამიტომ

$$\left|S_4\right|\leq 2^{-\sum_{j=1}^{n}p_j^{(j0)}(s)-7n-3},\ s=0,1,\dots. \tag{65}$$

(61)-(65) შეფასებების ძალით ვღებულობთ, რომ

$$\left|a^{(q_1^{(j0)}(s),q_2^{(j0)}(s),\dots,q_n^{(j0)}(s))}_{p_1^{(j0)}(s),p_2^{(j0)}(s),\dots,p_n^{(j0)}(s)}(f)\chi^{(q_1^{(j0)}(s))}_{p_1^{(j0)}(s)}(x_1)\cdots\chi^{(q_n^{(j0)}(s))}_{p_n^{(j0)}(s)}(x_n)\right|>2^{-n-2},\ s=0,1,\dots \tag{66}$$

$\mathrm{I}_{1.2}$. $u_{j_1,0}^{(s_{j_0})}=u_{j_2,0}^{(s_{j_0})}=\cdots=u_{j_q,0}^{(s_{j_0})}=0$, $j_1,\ldots,j_q=1,\ldots,n$, $j_1,\ldots,j_q\neq j_0$,

$j_1<j_2<\cdots<j_q$, $q=1,\ldots,n-2$ და $u_{j\ ,0}^{(s_{j_0})}\neq 0$, $j=1,\ldots,n$, $j\neq j_0,j_1,\ldots,j_q$.

აქედან გამომდინარე $s_{j_0}\neq 0$.

შევნიშნოთ, რომ ამ ქვეშემთხვევას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $n\geq 3$, $n\in N$.

ამ შემთხვევაში გვექნება, რომ (იხ. (60))

$$a_{p_1^{(j0)}(s),p_2^{(j0)}(s),\ldots,p_n^{(j0)}(s)}^{(q_1^{(j0)}(s),q_2^{(j0)}(s),\ldots,q_n^{(j0)}(s))}(f)=$$

$$=\sqrt{2^{\sum_{j=1}^{n}p_j^{(j0)}(s)}}\left[\sum_{\substack{i_j=0;j=1,\ldots,n;\\ j\neq j_0,j_1,\ldots,j_q;i_{j_0}=i_{j_1}=\cdots=i_{j_q}=1\\ 2\left|\sum_{j=1,j\neq j_0,j_1,\ldots,j_q}^{n}i_j+q+1\right.}}^{1}\int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\ldots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}}f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n+\right.$$

$$+\sum_{\substack{i_j=0\\ j=1,\ldots,n;i_{j0}+\cdots+i_{jq}\neq q+1\\ 2\left|\sum_{j=1}^{n}i_j\right.}}^{1}\int_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;2u_1^{(s_{j0}+s)}+i_1,\ldots,2u_n^{(s_{j0}+s)}+i_n}}f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n-$$

$$-\left.\sum_{\substack{i_j=0;\,j=1,\dots,n;\\ j\neq j_0,j_1,\dots,j_q;\,i_{j_0}=i_{j_1}=\dots=i_{j_q}=1\\ 2\,\bar{|}\sum\limits_{j=1,j\neq j_0,j_1,\dots,j_q}^{n} i_j+q+1}}^{1} \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{i_j=0\\ j=1,\dots,n;\,i_{j_0}+\dots+i_{j_q}\neq q+1\\ 2\,\bar{|}\sum\limits_{j=1}^{n} i_j}}^{1} \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s_{j_0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n\right)\Bigg]\equiv$$

$$\sqrt{2^{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)}}\,[S_1+S_2-(S_3+S_4)],\ s\in Z_0 \qquad (67)$$

$I_{1.1}$ ქვეშემთხვევაში ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$S_1\geq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-q-2}-2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-7n-q-3},\ s=0,1,\dots\ ;$$

$$S_2\geq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-2}-2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-8n-2}-$$

$$-2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-q-3}+2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-8n-q-3},\ s=0,1,\dots\ ;$$

$$\left|S_3\right| \le 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-7n-q-3}, \ s=0,1,\dots ;$$

$$\left|S_4\right| \le 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-2} + 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-2} -$$

$$-2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-q-3} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-q-3}, \ s=0,1,\dots ;$$

(47) ტოლობისა და უკანასკნელი შეფასებების ძალით მივიღებთ, რომ $\mathrm{I}_{1.2}$ ქვეშემთხვევაში სამართლიანია (46) შეფასება.

$\mathrm{I}_{1.3}$. $u_{j,0}^{(s_{j_0})}=0,\ j=1,2,\dots,n,\ j\neq j_0$. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია s_{j_0} ნულიც კი გახდეს.

მაშინ (იხ. (60))

$$a_{p_1^{(j0)}(s),p_2^{(j0)}(s),\dots,p_n^{(j0)}(s)}^{(q_1^{(j0)}(s),q_2^{(j0)}(s),\dots,q_n^{(j0)}(s))}(f)=$$

$$=\sqrt{2^{\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)}}\left[\sum_{\substack{i_j=0;j=1,\dots,n \\ 2\left|\sum_{j=1}^{n} i_j\right.}}^{1} \int_{\Gamma_{k;s_{j_0}+s+1;i_1,\dots i_n}^{(i)}} f(t_1,\dots t_n)dt_1\cdots dt_n -\right.$$

$$- \sum_{\substack{i_j=0;\, j=1,\dots,n \\ 2 \,|\, \sum\limits_{j=1, j\neq j_0}^{n} i_j}}^{1} \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;i_1,\dots,i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n \Bigg] \equiv$$

$$\equiv \sqrt{2^{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)}}\,[S_1 - S_2], \quad s\in Z_0. \tag{68}$$

შესაძლებელია ორი ქვეშემთხვევა:

$I_{1.3.1}$. n ლუწი ნატურალური რიცხვია;

$I_{1.3.2}$. n კენტი ნატურალური რიცხვია;

განვიხილოთ თითოეული მათგანი.

$I_{1.3.1}$. ამ შემთხვევაში (იხ. (68))

$$S_1 = \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;1,\dots,1}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n + \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;0,\dots,0}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n +$$

$$\sum_{\substack{i_j=0;\, j=1,\dots,n \\ \sum\limits_{j=1}^{n} i_j\neq 0,n;\ \ 2 \,|\, \sum\limits_{j=1}^{n} i_j}}^{1} \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;i_1,\dots,i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n \equiv S_1^1 + S_1^2 + S_1^3,\ s\in Z_0. \tag{69}$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ (იხ. (47), (48), (53)-(58), (68), (69)):

$$S_1^1 \geq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-n} - 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j_0)}(s)-8n-1},\ \ s=0,1,\dots;$$

$$S_1^2 \geq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-n-1} - 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-9n-1}, \quad s=0,1,\dots ;$$

$$S_1^3 \geq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-2} - 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-2} -$$

$$-2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-n} + 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-9n}, \quad s=0,1,\dots ;$$

$$|S_2| \leq 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-2} + 2^{-\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-2}, \quad s=0,1,\dots .$$

(68), (69) ტოლობებისა და უკანასკნელი შეფასებების ძალით ვღებულობთ, რომ $I_{1.3.1}$ ქვეშემთხვევაში სამართლიანია (66) შეფასება.

$I_{1.3.2}$. ამ შემთხვევაში (იხ. (68))

$$S_1 = \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;0,\dots,0}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n +$$

$$+ \sum_{\substack{i_j=0;\, j=1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} i_j \neq 0;\ \ 2 \left| \sum_{j=1}^{n} i_j \right.}}^{1} \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;i_1,\dots,i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n \equiv S_1^1 + S_1^2, \ s \in Z_0. \tag{70}$$

$$S_2 = \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;1,\dots,1}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n +$$

$$+ \sum_{\substack{i_j=0;\, j=1,\dots,n \\ \sum_{j=1}^{n} i_j \neq n;\;\; 2 \bar{|} \sum_{j=1}^{n} i_j}}^{1} \;\; \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j0}+s+1;i_1,\dots,i_n}} f(t_1,\dots,t_n)\,dt_1\cdots dt_n \equiv S_2^1 + S_2^2\,, \quad s\in Z \tag{71}$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ (იხ. (47), (48), (53)-(58), (70), (71)):

$$S_1^1 \geq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-n-1}\left(1-\frac{1}{2^n-1}\right) - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-9n-1}, \quad s=0,1,\dots\,;$$

$$S_1^2 \geq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-2} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-2} -$$

$$-2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-n-1} + 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-9n-1}, \quad s=0,1,\dots\,;$$

$$\left|S_2^1\right| \leq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-1}, \quad s=0,1,\dots\,;$$

$$\left|S_2^2\right| \leq 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-2} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-n-1} +$$

$$+2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-8n-2} - 2^{-\sum_{j=1}^{n} p_j^{(j0)}(s)-9n-1}, \quad s=0,1,\dots\,;$$

(68), (70), (71) ტოლობებისა და უკანასკნელი შეფასებების ძალით ვღებულობთ, რომ $I_{1.3.2}$ ქვეშემთხვევაშიც სამართლიანია (66) შეფასება.

ამრიგად, I_1 შემთხვევაში სამართლიანია (66).

I_2. განვიხილოთ კოეფიციენტი

$$a^{(v_1^{(j_0)}(s),v_2^{(j_0)}(s),\dots,v_n^{(j_0)}(s))}_{h_1^{(j_0)}(s),h_2^{(j_0)}(s),\dots,h_n^{(j_0)}(s)}(f)=$$

$$=\sqrt{2^{\sum\limits_{j=1}^{n}h_j^{(j_0)}(s)}}\left[\sum_{\substack{i_j=0;\,j=1,\dots,n\\ 2\mid\sum\limits_{j=1}^{n}i_j}}^{1}\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s'_{j_0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s'_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n-\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{i_j=0;\,j=1,\dots,n\\ 2\nmid\sum\limits_{j=1,j\neq j_0}^{n}i_j}}^{1}\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s_{j_0}+s+1;2u_1^{(s'_{j_0}+s)}+i_1,\dots,2u_n^{(s'_{j_0}+s)}+i_n}} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\cdots dt_n\right],\qquad(72)$$

სადაც

$$h_j^{(j_0)}(s)=r_k^{(i)}+s'_{j_0}+s;\ \ j=1,\dots,n;\ \ s=0,1,\dots;$$

$$v_j^{(j_0)}(s)=x_j\cdot 2^{h_j^{(j_0)}(s)},\ \ j=1,\dots,n\ \ (j\neq l_{j_0;1},l_{j_0;2},\dots,l_{j_0;q_{j_0}}),\ \ s=0,1,\dots;$$

$$v^{(j_0)}_{l_{j_0;m}}(s)=\left(\alpha^{(i)}_{l_{j_0;m},k}+2^{-r_k^{(i)}-s'_{j_0}-s}\cdot u^{(s'_{j_0}+s)}_{l_{j_0;m},s}\right)\cdot 2^{h^{(j_0)}_{l_{j_0;m}}(s)},\ \ m=1,\dots,q_{j_0},\ s=1,2,\dots,$$

ხოლო

$$u_j^{(s'_{j0}+s)}=2^s u_{j,0}^{(s'_{j0})},\ \ j=1,\dots,n,\ \ j\neq j_0, l_{j_0;1}, l_{j_0;2},\dots, l_{j_0;q_{j0}}$$

და

$$u_{l_{j0;m}}^{(s'_{j0}+s)}=u_{l_{j0;m},s}^{(s'_{j0}+s)},\ \ u_{j_0}^{(s'_{j0}+s)}=0,\ \ m=1,\dots,q_{j_0},\ \ s=0,1,\dots .$$

განვიხილოთ ქვეშემთხვევები:

$\mathrm{I}_{2.1}$. $u_{j,0}^{(s'_{j0})}\neq 0$, $j=1,\dots,n$, $j\neq j_0, l_{j_0;1}, l_{j_0;2},\dots, l_{j_0;q_{j0}}$ და ყოველი $s\in Z_0$ რიცხვისათვის $u_{l_{j0;m},s}^{(s'_{j0}+s)}\neq 0$, $m=1,\dots,q_{j_0}$. აქედან გამომდინარე $s'_{j_0}\neq 0$.

თუ ჩავატარებთ მსჯელობას ზუსტად ისე, როგორც $\mathrm{I}_{1.1}$ შემთხვევაში, მივიღებთ, რომ (იხ. (72))

$$\left|a_{h_1^{(j0)}(s),h_2^{(j0)}(s),\dots,h_n^{(j0)}(s)}^{(v_1^{(j0)}(s),v_2^{(j0)}(s),\dots,v_n^{(j0)}(s))}(f)\chi_{h_1^{(j0)}(s)}^{(v_1^{(j0)}(s))}(x_1)\cdots\chi_{h_n^{(j0)}(s)}^{(v_n^{(j0)}(s))}(x_n)\right|>2^{-n-2},\ s=0,1,\dots . \tag{73}$$

$\mathrm{I}_{2.2}$.

$$u_{j_1,0}^{(s'_{j0})}=u_{j_2,0}^{(s'_{j0})}=\dots=u_{j_q,0}^{(s'_{j0})}=0,$$

$$u_{l_{j0;k_1^{(s)}},s}^{(s'_{j0}+s)}=u_{l_{j0;k_2^{(s)}},s}^{(s'_{j0}+s)}=\dots=u_{l_{j0;k_q^{(s)}},s}^{(s'_{j0}+s)}=0,$$

სადაც

$j_1, j_2,\dots, j_q=1,\dots,n$, $j_1, j_2,\dots, j_q\neq j_0, l_{j_0;1}, l_{j_0;2},\dots, l_{j_0;q_{j0}}$, $j_1<j_2<\dots<j_q$,

$q=1,2,\dots,n-q_{j_0}-1$, $k_1^{(s)},k_2^{(s)},\dots,k_{q^{(s)}}^{(s)}=1,\dots,q_{j_0}$, $k_1^{(s)}<k_2^{(s)}<\dots<k_{q^{(s)}}^{(s)}$,

$q^{(s)}=1,2,\dots,q_{j_0}$, $q+q^{(s)}\neq n-1$,

და

$$u_{j,0}^{(s'_{j0})} \neq 0\,,\;\; j=1,\ldots,n,\;\; j \neq j_0, j_1,\ldots, j_q, l_{j_0;1}, l_{j_0;2},\ldots, l_{j_0;q_{j0}}\,,$$

$$u_{l_{j0;m},s}^{(s'_{j0}+s)} \neq 0\,,\;\; m=1,\ldots,q_{j_0}\,;\;\; m \neq k_1^{(s)}, k_2^{(s)},\ldots, k_{q^{(s)}}^{(s)}\,,\; s=0,1,\ldots.$$

აქედან გამომდინარე $s'_{j_0} \neq 0$.

თუ ჩავატარებთ მსჯელობას ზუსტად ისე, როგორც $\mathrm{I}_{1.2}$ შემთხვევაში, მივიღებთ, რომ სამართლიანია (66) შეფასება.

$\mathrm{I}_{2.3}$.

$$u_{j,0}^{(s'_{j0})} = 0\,,\;\; j=1,\ldots,n,\;\; j \neq j_0, l_{j_0;1}, l_{j_0;2},\ldots, l_{j_0;q_{j0}}\,,$$

$$u_{l_{j0;m},s}^{(s'_{j0}+s)} = 0\,,\; m=1,\ldots,q_{j_0}\,,\; s=0,1,\ldots.$$

აქედან გამომდინარე შესაძლებელია, რომ s'_{j_0} ნულის ტოლი გახდეს.

თუ ჩავატარებთ მსჯელობას ზუსტად ისე, როგორც $\mathrm{I}_{1.3}$ შემთხვევაში, მივიღებთ, რომ სამართლიანია (73) შეფასება.

I_3. ამ შემთხვევაში ყოველი $s \in Z_0$ რიცხვისათვის მოიძებნებიან $u_{j,s}^{(s)}$ რიცხვები, $0 \leq u_{j,s}^{(s)} \leq 2^s - 1$, $j = 1,2,\ldots, n; j \neq j_0$, ისეთნი რომ

$$x_j \in \left[\alpha_{j,k}^{(i)} + 2^{-r_k^{(i)}-s} \cdot u_{j,s}^{(s)}, \alpha_{j,k}^{(i)} + 2^{-r_k^{(i)}-s} \cdot u_{j,s}^{(s)} + 2^{-r_k^{(i)}-s}\right),\;\; j=1,2,\ldots,n; j \neq j_0$$

განვიხილოთ კოეფიციენტები

$$a_{\theta_1^{(j0)}(s),\theta_2^{(j0)}(s),\ldots,\vartheta_n^{(j0)}(s)}^{(\sigma_1^{(j0)}(s),\sigma_2^{(j0)}(s),\ldots,\sigma_n^{(j0)}(s))}(f) =$$

$$= \sqrt{2^{\sum_{j=1}^{n}\theta_j^{(j_0)}(s)}} \left[\sum_{\substack{i_j=0;\, j=1,\ldots,n \\ 2 \mid \sum_{j=1}^{n} i_j}}^{1} \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s+1;2u_1^{(s)}+i_1,\ldots,2u_n^{(s)}+i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n - \right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{i_j=0;\, j=1,\ldots,n \\ 2 \nmid \sum_{j=1,\, j\neq j_0}^{n} i_j}}^{1} \int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;s+1;2u_1^{(s)}+i_1,\ldots,2u_n^{(s)}+i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n \right], \qquad (74)$$

სადაც

$$\theta_j^{(j_0)}(s) = r_k^{(i)} + s, \;\; j = 1,\ldots,n\,,\; s = 0,1,\ldots,$$

$$\sigma_j^{(j_0)}(s) = \left(\alpha_{j,k}^{(i)} + 2^{-r_k^{(i)}-s} u_{j,s}^{(s)}\right)\cdot 2^{\theta_j^{(j_0)}(s)}, \;\; j = 1,\ldots,n\,,\; j \neq j_0,\; s = 0,1,\ldots,$$

$$\sigma_{j_0}^{(j_0)}(s) = x_{j_0} \cdot 2^{\theta_{j_0}^{(j_0)}(s)}, \;\; s = 0,1,\ldots,$$

ხოლო

$$u_j^{(s)} = u_{j,s}^{(s)}, \;\; j = 1,\ldots,n, \;\; j \neq j_0$$

და

$$u_{j_0}^{(s)} = 0, \;\; s = 0,1,\ldots.$$

განვიხილოთ ქვეშემთხვევები.

I$_{3.1}$. ყოველი $s \in N$ რიცხვისათვის $u_{j,s}^{(s)} \neq 0,\ j=1,\dots,n,\ j \neq j_0$.

თუ ჩავატარებთ მსჯელობას I$_{1.1}$ შემთხვევის ანალოგიურად, მივიღებთ რომ (იხ. (74))

$$\left| a_{\theta_1^{(j0)}(s),\theta_2^{(j0)}(s),\dots\theta_n^{(j0)}(s)}^{(\sigma_1^{(j0)}(s),\sigma_2^{(j0)}(s),\dots\sigma_n^{(j0)}(s))}(f)\chi_{\theta_1^{(j0)}(s)}^{(\sigma_1^{(j0)}(s))}(x_1)\cdots\chi_{\theta_n^{(j0)}(s)}^{(\sigma_n^{(j0)}(s))}(x_n)\right| > 2^{-n-2},\ s=0,1,\dots. \tag{75}$$

I$_{3.2}$. არსებობენ ისეთი ნატურალური რიცხვები $q^{(s)},\ k_1^{(s)}, k_2^{(s)},\dots, k_{q^{(s)}}^{(s)}$, რომ

$$1 \leq q^{(s)} \leq n-2,$$

$$1 \leq k_1^{(s)}, k_2^{(s)},\dots, k_{q^{(s)}}^{(s)} \leq n,\ k_1^{(s)}, k_2^{(s)},\dots, k_{q^{(s)}}^{(s)} \neq j_0,\ k_1^{(s)} < k_2^{(s)} < \cdots < k_{q^{(s)}}^{(s)}$$

და

$$u_{k_1^{(s)},s}^{(s)} = \cdots = u_{k_{q^{(s)}}^{(s)},s}^{(s)} = 0,$$

$$u_{j,s}^{(s)} \neq 0, \text{ თუ } j \neq j_0,\ 1 \leq j \leq n,\ j \neq k_1^{(s)}, k_2^{(s)},\dots, k_{q^{(s)}}^{(s)},\ s \in N.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $n \geq 3$, $n \in N$.

თუ ჩავატარებთ მსჯელობას I$_{1.2}$ შემთხვევის ანალოგიურად, მივიღებთ რო სამართლიანია (75) შეფასება.

I$_{3.3}$. $u_{j,s}^{(s)} = 0,\ j=1,\dots,n;\ j \neq j_0,\ s=0,1,\dots$.

თუ ჩავატარებთ მსჯელობას I$_{1.3}$ შემთხვევის ანალოგიურად, მივიღებთ რომ ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია (75) შეფასება.

ამრიგად, I$_3$ შემთხვევაში სამართლიანია (75).

II. ამ შემთხვევაში ყოველი $i \in N$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $m_i \in N$, რომ (იხ. (59))

$$x = (x_1, x_2,\dots, x_n) \in \mathring{\Gamma}_{m_i}^{(i)},\ i=1,2,\dots.$$

განვიხილოთ კოეფიციენტები

$$a_{w_1(i),w_2(i),\ldots,w_n(i)}^{(\lambda_1(i),\lambda_2(i),\ldots,\lambda_n(i))}(f)=$$

$$=\sqrt{2^{\sum\limits_{j=1}^{n} w_j(i)}}\left[\sum_{\substack{i_j=0;\,j=1,\ldots,n\\ 2\mid\sum\limits_{j=1}^{n} i_j}}^{1}\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{m_i;1;i_1,\ldots,i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n-\right.$$

$$\left.-\sum_{\substack{i_j=0;\,j=1,\ldots,n\\ 2\bar{\mid}\sum\limits_{j=1,j\neq j_0}^{n} i_j}}^{1}\int\limits_{\Gamma^{(i)}_{k;1;i_1,\ldots,i_n}} f(t_1,\ldots,t_n)dt_1\cdots dt_n\right] \qquad (76)$$

სადაც

$$w_j(i)=r_{m_i}^{(i)},\quad \lambda_j(i)=\alpha_{j,m_i}^{(i)}\cdot 2^{w_j^{(i)}},\quad j=1,\ldots,n;\ i=1,2,\ldots.$$

თუ ჩავატარებთ იმის ანალოგიურ გამოთვლებს, რაც გვქონდა I_{13} შემთხვევაში, მივიღებთ რომ (იხ. (76))

$$\left| a_{w_1(i),w_2(i),\ldots,w_n(i)}^{(\lambda_1(i),\lambda_2(i),\ldots,\lambda_n(i))}(f)\chi_{w_1(i)}^{(\lambda_1(i))}(x_1)\cdots\chi_{w_n(i)}^{(\lambda_n(i))}(x_n)\right| > 2^{-n-2},\ i=1,2,\ldots. \tag{77}$$

(66), (73), (75) და (77) შეფასებებიდან გამომდინარეობს, რომ f ფუნქციის ფურიე-ჰაარის n-ჯერადი მწკრივი ($n \geq 2,\ n \in N$) არ არის λ-კრებადი E სიმრავლეზე, თუ $\lambda=1$.

თეორემა დამტკიცებულია.

თავი III.
ფურიე-ჰაარის ჯერადი მწკრივების განშლადობის სიმრავლეების შესახებ

§1. ფურიე-ჰაარის ჯერადი მწკრივის კერძო ჯამების შესახებ

ამ თავში ვგულისხმობთ, რომ $n \in N$ და $n \geq 2$.

მეორე თავში განსაზღვრული ფურიე-ჰაარის n-ჯერადი მწკრივის (იხ. (38)) კერძო ჯამები განისაზღვრება ტოლობით:

$$S_{k_1 k_2 \dots k_n}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n = 0}^{k_1 k_2 \dots k_n} a_{p_1 p_2 \dots p_n}(f) \chi_{p_1}(x_1) \chi_{p_2}(x_2) \cdots \chi_{p_n}(x_n),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n, \; k_1, k_2, \dots, k_n \in N. \tag{78}$$

ნებისმიერი $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ წერტილისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

1) $$S_{2^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, 2^{m_n}}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|B|} \int_B f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n, \tag{79}$$

სადაც $B = B(m_1, \dots, m_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\Delta_{x_i,1}^{(m_i)} \bigcup \Delta_{x_i,2}^{(m_i)} \right)$, $m_1, m_2, \dots, m_n \in Z_0$;

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, როცა x ორად-რაციონალურია, ის შეიძლება ეკუთვნოდეს m რანგის ($m \in N$) ორ მეზობელ ორად ინტერვალს, რომლებსაც აღვნიშნავთ $\Delta_{x,1}^{(m)}$ და $\Delta_{x,2}^{(m)}$-ით.

2)
$$S_{2^{m_1}+k_1, 2^{m_2}+k_2, \dots, 2^{m_n}+k_n}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|B|} \int_B f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \cdots dt_n, \tag{80}$$

სადაც

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n, \; x_i \neq \frac{k_i}{2^{m_i}} \; (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$B = B(\theta_1, \dots, \theta_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\Delta_{x_i,1}^{(\theta_i)} \bigcup \Delta_{x_i,2}^{(\theta_i)} \right),$$

$$\Delta_{x_i,j}^{(\theta_i)} = \begin{cases} \Delta_{x_i,j}^{(m_i+1)}, \text{ თუ } x_i \in \left[0, \dfrac{k_i}{2^{m_i}}\right], \\ \\ \Delta_{x_i,j}^{(m_i)}, \text{ თუ } x_i \in \left[\dfrac{k_i}{2^{m_i}}, 1\right], \end{cases}$$

$j = 1,2;\ i = 1,2,\dots,n;\ \ 1 \le k_i \le 2^{m_i}$ – $(i = 1,2,\dots,n)$ $m_1, m_2, \dots, m_n \in Z_0$;

3)
$$S_{2^{m_1}+k_1, 2^{m_2}+k_2, \dots, 2^{m_n}+k_n}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{u_1, u_2, \dots, u_q = 0}^{1} \frac{1}{2^q \left| B_{u_1, u_2, \dots, u_q} \right|} \int_{B_{u_1, u_2, \dots, u_q}} f(t_1, \dots, t_n) \, dt_1 \cdots dt_n \tag{81}$$

სადაც

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1]^n, \ x_{i_\nu} = \frac{k_{i_\nu}}{2^{m_{i_\nu}}} \ (i_\nu = 1,2,\dots,n, \ \ \nu = 1,2,\dots,q,$$

$$i_1 < i_2 < \dots < i_q, \ 1 \le q \le n \ \ (q \in N),$$

$$B_{u_1, u_2, \dots, u_q} = \prod_{\nu=1}^{q} \Delta_{2k_{i_\nu}}^{(m_{i_\nu}+u_\nu)} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \ne i_\nu, \nu = 1,2,\dots,q}}^{n} \left(\Delta_{x_i,1}^{(\theta_i)} \bigcup \Delta_{x_i,2}^{(\theta_i)} \right),$$

$$\Delta_{x_i,j}^{(\theta_i)} = \begin{cases} \Delta_{x_i,j}^{(m_i+1)}, \text{ თუ } x_i \in \left[0, \dfrac{k_i}{2^{m_i}}\right] \\ \\ \Delta_{x_i,j}^{(m_i)}, \text{ თუ } x_i \in \left[\dfrac{k_i}{2^{m_i}}, 1\right], \end{cases}$$

$j = 1,2;\ i = 1,2,\dots,n\ (i \neq i_\nu,\ \nu = 1,2,\dots,q,\ i_1 < i_2 < \dots < i_q,\ 1 \le q \le n,\ (q \in N)),$

$u_1, u_2, \dots, u_q = 0,1\ (1 \le q \le n,\ q \in N),\ 1 \le k_i \le 2^{m_i} - 1\ (i = 1,2,\dots,n),$

$m_1, m_2, \dots, m_n \in Z_{\,)}.$

განვიხილოთ ტოლი რანგების მქონე ნებისმიერი ორადი ინტერვალები

$$\Delta_{k_i}^{(m)} = \left[\frac{k_i - 1}{2^m}, \frac{k_i}{2^m}\right],\ 1 \le k_i \le 2^m - 1,\ m \in Z_0,\ i = 1,2,\dots,n.$$

თითოეული მათგანი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta_{k_i}^{(m)} = \bigcup_{u_i^{(s)}=1}^{2^s} \Delta_{2^s(k_i-1)+u_i^{(s)}}^{(m+s)},\ s = 0,1,\dots;\ i = 1,2,\dots,n.$$

ამ თავის მომდევნო პარაგრაფებში ვისარგებლებთ შემდეგი აღნიშვნებით:

$$\Gamma_{\bar{k},\overline{u^{(s)}}}^{(m,s)} = \prod_{i=1}^{n} \Delta_{2^s(k_i-1)+u_i^{(s)}}^{(m+s)}, \tag{82}$$

$\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n),\ \overline{u^{(s)}} = (u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \dots, u_n^{(s)}),\ u_i^{(s)} = 1,2,\dots,2^s\ (i = 1,2,\dots,n),\ s = 0,1,\dots\ .$

$[0,1]^n$-ის ორად-რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე აღვნიშნოთ G-თი, ხოლო ორად-ირაციონალურ წერტილთა სიმრავლე აღვნიშნოთ K-თი.

§2. განშლადობა წერტილში

სამართლიანია შემდეგი

ლემა 3.2.1. $[0,1]^n$ n-განზომილებიანი კუბის ყოველი x_0 წერტილისათვის არსებობს $[0,1]^n$-ზე განსაზღვრული, შემოსაზღვრული, ზომადი ფუნქცია $f_{x_0}(t)$ ($t \in [0,1]^n$), რომლის ფურიე-ჰაარის n-ჯერადი მწკრივი პრინგსჰეიმის აზრით კრებადია $[0,1]^n \setminus \{x_0\}$ სიმრავლეზე და არ არის λ-კრებადი x_0 წერტილში, თუ $\lambda=1$. გარდა ამისა:

1) არსებობენ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობები $h_s \uparrow \infty$ და $l_s \uparrow \infty$ ($h_s > l_s$) $h_s = h_s(x_0)$, $l_s = l_s(x_0)$, ისეთნი რომ

$$\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\dots 2^{h_s}}(f_{x_0},x_0) - S_{2^{l_s}2^{l_s}\dots 2^{l_s}}(f_{x_0},x_0)\right| > 2^{-4n}, \ s = 0,1,\dots. \tag{83}$$

2)

$$0 \le S_{k_1,k_2,\dots,k_n}(f_{x_0},x) \le 1, \ k_1,k_2,\dots,k_n = 1,2,\dots, \ x \in [0,1]^n. \tag{84}$$

3) ნებისმიერი $x \in [0,1]^n$, $x \ne x_0$, წერტილისათვის არსებობს $n_0 \in N$ ($n_0 = n_0(x_0)$) რიცხვი, ისეთი რომ

$$S_{k_1 k_2 \dots k_n}(f_{x_0},x) = S_{2^{n_0}2^{n_0}\dots 2^{n_0}}(f_{x_0},x), \ k_1,k_2,\dots,k_n = 2^{n_0}+1, 2^{n_0}+2,\dots. \tag{85}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $x_0 = (x_1,x_2,\dots,x_n) \in [0,1]^n$. შემდეგი შემთხვევებიდან შესაძლებელია ერთ-ერთი:

I. $$x_i \in G, \ i = 1,2,\dots,n.$$

II. $$x_{i_\nu} \in K,$$

$$i_\nu = 1,2,\dots,n, \ \nu = 1,2,\dots,q, \ i_1,i_2,\dots,i_q, \ 1 \le q \le n-1, \ q \in N;$$

$$x_i \in G,$$

$$i = 1,2,\ldots,n,\ i \neq i_{\mathrm{v}}\ (\mathrm{v} = 1,2,\ldots,q, 1 \leq q \leq n-1, q \in N);$$

III. $x_i \in K,\ i = 1,2,\ldots,n.$

განვიხილოთ თითოეული მათგანი.

I. ამ შემთხვევაში თავის მხრივ შესაძლებელია შემდეგი ქვეშემთხვევებიდან ერთ-ერთი:

I$_1$. $x_i \neq 1,\ \ i = 1,2,\ldots,n;$

I$_2$. $x_{i_\nu} = 1,\ \ i_\nu = 1,2,\ldots,n,\ \nu = 1,2,\ldots,\ p,\ \ i_1 < i_2 < \cdots < i_p,$

$$1 \leq p \leq n-1,\ p \in N;$$

$$x_i \neq 1,\ \ i = 1,2,\ldots,n,\ i \neq i_\nu\ (\nu = 1,2,\ldots,\ p,\ 1 \leq p \leq n-1,\ p \in N);$$

I$_3$. $x_i = 1,\ \ i = 1,2,\ldots,n.$

განვიხილოთ I$_1$ შემთხვევა.

თითოეული $x_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x_i = \frac{\wp_i - 1}{2^{\aleph}},$$

სადაც $1 \leq \wp_i \leq 2^{\aleph},\ i = 1,2,\ldots,n,\ \aleph \in N.$

განვსაზღვროთ f_{x_0} ფუნქცია $[0,1]^n$-ზე შემდეგნაირად:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1,\ t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} \Gamma_{\bar{\wp},\bar{u}}^{(\aleph,2s)},\ \bar{\wp} = (\wp_1, \wp_2, \ldots, \wp_n),\ \bar{u} = (2,2,\ldots,2), \\ \\ 0,\ t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{86}$$

ვთქვათ $h_s = \aleph + 2s + 1,\ \ l_s = \aleph + 2s\ \ (s = 0,1,2,\ldots),\ \ \bar{\wp} = (\wp_1, \ldots, \wp_n),$ $\bar{u} = (2,2,\ldots,2)$ და $\bar{u}_0 = (1,1,\ldots,1)$. მაშინ (79), (82) და (86)-ის ძალით გვექნება რომ:

$$\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\dots2^{h_s}}(f_{x_0},x_0)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\dots2^{l_s}}(f_{x_0},x_0)\right|\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^n\left|\Gamma^{(\aleph,2s+1)}_{\bar{\wp},\bar{u}_0}\right|}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s+1)}_{\bar{\wp},\bar{u}_0}}f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n-$$

$$-\frac{1}{2^n\left|\Gamma^{(\aleph,2s)}_{\bar{\wp},\bar{u}_0}\right|}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s)}_{\bar{\wp},\bar{u}_0}}f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n=$$

$$=(2^n-1)2^{(\aleph+2s-1)n}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s+1)}_{\bar{\wp},\bar{u}_0}}f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n>$$

$$>2^{(\aleph+2s-1)n}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s+2)}_{\bar{\wp},\bar{u}}}f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n>$$

$$>2^{-4n},\quad s=0,1,\dots\ .$$

მაშასადამე სამართლიანია (83) უტოლობა.

(86) განსაზღვრების თანახმად გვექნება, რომ $0\leq f_{x_0}(t)\leq 1,\ t\in[0,1]^n$.

ამიტომ (79)-(81) ტოლობების ძალით სამართლიანია (84) შეფასება.

ნებისმიერი $x\in[0,1]^n$, $x\neq x_0$, წერტილისათვის არსებობს $n_0\in N$ $(n_0=n_0(x_0))$ რიცხვი, ისეთი რომ f_{x_0} ფუნქცია მუდმივი იქნება x წერტილის

შემცველ თითოეულ n-განზომილებიან კუბზე, რომელიც თავის მხრივ წარმოადგენს n_0 რანგის ორადი ინტერვალების ნამრავლს (იხ. (86)). ამიტომ (79)-(81) ტოლობების ძალით სამართლიანია (85) ტოლობა.

ამრიგად I_1 შემთხვევაში ლემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ I_2 შემთხვევა ე.ი.

$$x_{i_\nu} = 1, \quad i_\nu = 1,2,\dots, n\,,\ \nu = 1,2,\dots,\ p\,,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_p\,,$$
$$1 \le p \le n-1,\ p \in N;$$

$$x_i \ne 1,\ i = 1,2,\dots,n\,,\ i \ne i_\nu\ (\nu = 1,2,\dots,\ p,\ 1 \le p \le n-1,$$
$$p \in N).$$

x_0 წერტილის კოორდინატები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x_{i_\nu} = \frac{2^{\aleph}}{2^{\aleph}} \equiv \frac{\wp_{i_\nu}}{2^{\aleph}}\,,$$

სადაც $i_\nu = 1,2,\dots,n,\ \nu = 1,2,\dots,p,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_p,\ 1 \le p \le n-1,\ (p \in N)$;

$$x_i = \frac{\wp_i - 1}{2^{\aleph}},$$

სადაც $i = 1,2,\dots,n\,,\ i \ne i_\nu\ (\nu = 1,2,\dots,p,\ 1 \le p \le n-1,\ p \in N)$ და $\aleph \in N$.

ვთქვათ $\overline{u^{(s)}} = (u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \dots, u_n^{(s)})$, სადაც

$$u_i^{(s)} = 2,\ i = 1,2,\dots,n\,,\ i \ne i_\nu\ (\nu = 1,2,\dots,p,$$
$$1 \le p \le n-1,\ p \in N),\ s = 0,1,\dots;$$

$$u_{i_\nu}^{(s)} = 2^s - 1,\ i_\nu = 1,2,\dots,n,\ \nu = 1,2,\dots,p,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_p,$$
$$1 \le p \le n-1,\ (p \in N),\ s = 0,1,\dots\,.$$

განვსაზღვროთ f_{x_0} ფუნქცია $[0,1]^n$-ზე:

$$f_{x_0}(t)=\begin{cases}1, \; t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in\Gamma\equiv\bigcup_{s=1}^{\infty}\Gamma^{(\aleph,2s)}_{\overline{\wp},\overline{u^{2s}}}, \quad \wp=(\wp_1,\ldots,\wp_n),\\ \\ 0, \; t\in[0,1]^n\setminus\Gamma.\end{cases} \tag{88}$$

ვთქვათ

$$h_s=\aleph+2s+1 \text{ და } l_s=\aleph+2s \; (s=0,1,2,\ldots),$$

$$\overline{\wp}=(\wp_1,\wp_2,\ldots,\wp_n),$$

$$\overline{u_0^{(s)}}=(u_{1,0}^{(s)},u_{2,0}^{(s)},\ldots,u_{n,0}^{(s)}),$$

სადაც

$$u_{i,0}^{(s)}=1,$$

$$i=1,2,\ldots,n,\; i\neq i_\nu \;(\nu=1,2,\ldots,p,\; 1\le p\le n-1,\; p\in N),\; s=0,1,\ldots$$

და

$$u_{i_\nu,0}^{(s)}=2^s,$$

$$i_\nu=1,\ldots,n,\; \nu=1,\ldots,p,\; i_1<i_2<\cdots<i_p,\; 1\le p\le n-1,\; (p\in N),\; s=0,1,\ldots.$$

(79), (82) და (88)-ის ძალით გვექნება რომ:

$$\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\ldots 2^{h_s}}(f_{x_0},x_0)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\ldots 2^{l_s}}(f_{x_0},x_0)\right|\ge$$

$$\geq \frac{1}{2^{n-p}\left|\Gamma^{(\aleph,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s+1)}}}\right|}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s+1)}}}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n -$$

$$-\frac{1}{2^{n-p}\left|\Gamma^{(\aleph,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s)}}}\right|}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s)}}}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n =$$

$$=(2^n-1)2^{(\aleph+2s-1)n+p}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s+1)}}}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n >$$

$$>2^{(\aleph+2s-1)n}\int\limits_{\Gamma^{(\aleph,2s+2)}_{\overline{\wp},\overline{u}}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n > 2^{-4n},$$

$$s=0,1,\ldots \quad (89)$$

(89) ნიშნავს, რომ სამართლიანია (83) შეფასება და ამრიგად, ლემა ამ შემთხვევაშიც დამტკიცებულია.

განვიხილოთ I_3 შემთხვევა ე.ი.

$$x_i=1,\ i=1,2,\ldots,n.$$

ვთქვათ

$$\overline{u^{(s)}}=(u_1^{(s)},u_2^{(s)},\ldots,u_n^{(s)}),$$

სადაც $u_i^{(s)}=2^s-1,\ i=1,2,\ldots,n,\ s=0,1,\ldots$.

განვსაზღვროთ f_{x_0} ფუნქცია $[0,1]^n$-ზე შემდეგნაირად:

$$f_{x_0}(t)=\begin{cases}1,\ t=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\Gamma\equiv\bigcup_{s=1}^{\infty}\Gamma^{(0,2s)}_{\overline{\wp},\overline{u^{2s}}},\ \overline{\wp}=(1,1,\dots,1),\\ 0,\ t\in[0,1]^n\setminus\Gamma.\end{cases} \tag{90}$$

ვთქვათ

$$h_s=2s+1 \text{ და } l_s=2s\ (s=0,1,2,\dots);$$

$$\overline{\wp}=(1,1,\dots,1);$$

$$\overline{u_0^{(s)}}=(u_{1,0}^{(s)},u_{2,0}^{(s)},\dots,u_{n,0}^{(s)}),$$

სადაც

$$u_{i,0}^{(s)}=2^s,$$

$$i=1,2,\dots,n,\ s=0,1,\dots .$$

(79), (82) და (90)-ის ძალით გვექნება:

$$\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\dots2^{h_s}}(f_{x_0},x_0)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\dots2^{l_s}}(f_{x_0},x_0)\right|\geq$$

$$\geq\frac{1}{\left|\Gamma^{(0,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s+1)}}}\right|}\int_{\Gamma^{(0,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s+1)}}}}f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n-$$

$$-\frac{1}{\left|\Gamma^{(0,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s)}}}\right|}\int_{\Gamma^{(0,2s+1)}_{\overline{\wp},\overline{u_0^{(2s)}}}}f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n=$$

$$= (2^n - 1)2^{2ns} \int\limits_{\Gamma^{(0,2s+1)}_{\bar{\wp},u_0^{(2s+1)}}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n >$$

$$> 2^{2ns} \int\limits_{\Gamma^{(0,2s+2)}_{\bar{\wp},u^{(2s+2)}}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1dt_2\cdots t_n > 2^{-4n},$$

$$s = 0,1,\ldots. \quad (91)$$

(91)-დან გამომდინარე სამართლიანია (83) შეფასება. მაშასადამე, ლემა ამ შემთხვევაშიც, და მთლიანად I შემთხვევაში, სამართლიანია.

ვთქვათ ადგილი აქვს II შემთხვევას ე.ი. მოცემული $x_0 = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in [0,1]^n$ წერტილის კოორდინატებისათვის გვექნება:

$$x_{i_v} \in K,$$

$$i_v = 1,\ldots,n,\ v = 1,\ldots,q,\ i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N;$$

$$x_i \in G_i,$$

$$i = 1,2,\ldots,n,\ i \ne i_v\ (v = 1,2,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N)$$

x_{i_1} კოორდინატი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x_{i_1} = \sum_{\theta=1}^{\infty} b_\theta 2^{-\theta},$$

სადაც $b_\theta = 0$ ან 1 ($\theta = 1,2,\ldots$).

ვთქვათ $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\theta_{j+1} > \theta_j + 1,\ b_{\theta_j} = 0,\ b_{\theta_j+1} = 1,\ j = 1,2,\ldots. \quad (100)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$[\alpha_j^{(\text{v})}, \beta_j^{(\text{v})}] \equiv \Delta_{x_{i_\text{v}}}^{(\theta_{2j}-1)} = \Delta_{\alpha_j^{(\text{v})}\cdot 2^{\theta_{2j}-1}+1}^{(\theta_{2j}-1)}, \qquad (101)$$

$\text{v} = 1,2,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1\ (q \in N),\ j = 1,2,\ldots$.

შემდეგი შემთხვევებიდან შესაძლებელია ერთ-ერთი:

II₁. $x_i \ne 1,\ i = 1,2,\ldots,n,\ i \ne i_\text{v}\ (\text{v} = 1,2,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N)$;

II₂. $x_{i'_\nu} = 1,\ i'_\nu = 1,2,\ldots,n,\ i'_\nu \ne i_\text{v}\ (\text{v}=1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1, q \in N)$,

$$\nu = 1,2,\ldots,p,\ i'_1 < i'_2 < \cdots < i'_n,\ 1 \le p \le n-q-1,\ p \in N;$$

II₃. $x_i = 1,\ i = 1,2,\ldots,n,\ i \ne i_\text{v},\ (\text{v} = 1,2,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N)$.

განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

II₁. ვთქვათ ყოველი $i = 1,\ldots,n,\ i \ne i_\text{v}\ (\text{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N)$

რიცხვისათვის $x_i = \dfrac{\wp_i - 1}{2^{\aleph}},\ 1 \le \wp_i \le 2^{\aleph},\ \aleph \in N$.

დავუშვათ $j_0 \in N$ ისეთი რიცხვია, რომ

$$x_i + 2^{-\theta_{2j_0}+1} < 1 \text{ და } \theta_{2j_0} - 1 > \aleph$$

ყოველი $i = 1,\ldots,n,\ i \ne i_\text{v}\ (\text{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N)$.

ყოველი $j \ge j_0\ (j \in N)$ რიცხვისათვის თითოეული x_i კოორდინატი

$(i=1,\ldots,n\ i \ne i_\text{v}\ (\text{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N))$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x_i = \frac{\wp_j^{(i)} - 1}{2^{\theta_{2j}-1}},\ 1 \le \wp_j^{(i)} \le 2^{\theta_{2j}-1},\ j = j_0, j_0+1,\ldots .$$

ვთქვათ

ა) $\overline{\eta^{(j)}}=(\eta_1^{(j)},\eta_2^{(j)},\dots,\eta_n^{(j)})$,

სადაც

$$\eta_i^{(j)} = \wp_j^{(i)},\ i=1,2,\dots,n,\ i\neq i_v,\ v=1,\dots,q,\ q=1,2,\dots,n-1,$$

$$\eta_{i_v}^{(j)} = \alpha_j^{(v)}\cdot 2^{\theta_{2j}-1}+1,\ v=1,\dots,q,\ q=1,2,\dots,n-1,\ j=j_0,j_0+1,\dots;$$

ბ) $\overline{u^{(j)}}=(u_1^{(j)},u_2^{(j)},\dots,u_n^{(j)})$,

სადაც

$$u_i^{(j)}=2,\ i=1,2,\dots,n,\ i\neq i_v,\ v=1,\dots,q,\ q=1,2,\dots,n-1,$$

$$u_{i_v}^{(j)}=u_{i_v}^{(j)}(x_{i_v})=\begin{cases}2, & x_{i_v}\in\left(\alpha_j^{(v)},\dfrac{\alpha_j^{(v)}+\beta_j^{(v)}}{2}\right],\\[2ex] 1, & x_{i_v}\in\left(\dfrac{\alpha_j^{(v)}+\beta_j^{(v)}}{2},\beta_j^{(v)}\right],\end{cases}$$

$$v=1,\dots,q,\ 1\le q\le n-1,\ (q\in N),\ j=j_0,j_0+1,\dots .$$

განვსაზღვროთ f_{x_0} ფუნქცია $[0,1]^n$-ზე შემდეგნაირად:

$$f_{x_0}(t)=\begin{cases}1, & t=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\Gamma\equiv\bigcup\limits_{j=j_0}^{\infty}\Gamma^{(\theta_{4j}-1,1)}_{\overline{\eta^{(2j)}},\overline{u^{2j}}},\\[2ex] 0, & t\in[0,1]^n\setminus\Gamma.\end{cases}\tag{94}$$

ვთქვათ

$$h_j = \theta_{4(j_0+j)} - 1 \text{ და } l_j = \theta_{4(j_0+j)-2} - 1,\ j = 0,1,2,\ldots;$$

$$\overline{u_0^{(j)}} = (1,1,\ldots,1),\ j = j_0, j_0+1,\ldots .$$

(79), (82), (92) და (96)-ის ძალით გვექნება რომ:

$$\left| S_{2^{h_j}2^{h_j}\ldots 2^{h_j}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_j}2^{l_j}\ldots 2^{l_j}}(f_{x_0}, x_0) \right| \geq$$

$$\frac{2^{-n+q}}{\left|\Gamma^{(\theta_{4(j_0+j)}-1,0)}_{\overline{\eta^{(2(j_0+j))}},\overline{u_0^{(2(j_0+j))}}}\right|} \int_{\Gamma^{(\theta_{4(j_0+j)}-1,0)}_{\overline{\eta^{(2(j_0+j))}},\overline{u_0^{(2(j_0+j))}}}} f(t_1,t_2,\ldots,t_n)dt_1 dt_2 \cdots t_n -$$

$$-\frac{2^{-n+q}}{\left|\Gamma^{(\theta_{4(j_0+j)-2}-1,0)}_{\overline{\eta^{(2(j_0+j)-1)}},\overline{u_0^{(2(j_0+j)-1)}}}\right|} \int_{\Gamma^{(\theta_{4(j_0+j)-2}-1,0)}_{\overline{\eta^{(2(j_0+j)-1)}},\overline{u_0^{(2(j_0+j)-1)}}}} f(t_1,t_2,\ldots t_n)dt_1 dt_2 \cdots t_n >$$

$$> 2^{-2n+q}\left(2^{n\theta_{4(j_0+j)}} - 2^{n\theta_{4(j_0+j)-2}}\right) \int_{\Gamma^{(\theta_{4(j_0+j)}-1,1)}_{\overline{\eta^{(2(j_0+j))}},\overline{u_0^{(2(j_0+j))}}}} f(t_1,t_2,\ldots t_n)dt_1 dt_2 \cdots t_n =$$

$$= 2^{-2n+q}\left(2^{n\theta_{4(j_0+j)}} - 2^{n\theta_{4(j_0+j)-2}}\right)2^{-n\theta_{4(j_0+j)}} > 2^{-4n},\ j = 0,1,2,\ldots . \tag{95}$$

(95) ნიშნავს, რომ სამართლიანია (83) შეფასება და ე.ი. ლემა II_1 შემთხვევაში დამტკიცებულია.

განვიხილოთ II_2 შემთხვევა.

ვთქვათ ყოველი $i=1,2,\ldots,n,\ i\neq i_{\mathrm{v}}\ (\mathrm{v}=1,\ldots,q,\ 1\leq q\leq n-1,\ q\in N)$, $i\neq i_{\nu'}\ (\nu=1,2,\ldots,p,\ 1\leq p\leq n-q-1,\ p\in N)$ რიცხვისათვის

$$x_i=\frac{\wp_i-1}{2^{\aleph}},\ 1\leq\wp_i\leq 2^{\aleph},\ \aleph\in N.$$

დავუშვათ $j_0\in N$ ისეთი რიცხვია, რომ

$$x_i+2^{-\theta_{2j_0}+1}<1 \text{ და } \theta_{2j_0}-1>\lambda$$

ყოველი $i=1,\ldots,n,\ i\neq i_{\mathrm{v}}\ (\mathrm{v}=1,\ldots,q,\ 1\leq q\leq n-1,\ q\in N),\ i\neq i_{\nu}$ $(\nu=1,2,\ldots,p,\ 1\leq p\leq n-q-1,\ p\in N)$.

ყოველი $j\geq j_0\ (j\in N)$ რიცხვისათვის თითოეული x_i კოორდინატი $(i=1,\ldots n\ \ i\neq i_{\mathrm{v}}\ (\mathrm{v}=1,\ldots,q,\ 1\leq q\leq n-1,\ q\in N))$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x_i=\frac{\wp_j^{(i)}-1}{2^{\theta_{2j}-1}},$$

$$1\leq\wp_j^{(i)}\leq 2^{\theta_{2j}-1},\ \ j=j_0,j_0+1,\ldots,\ \ i\neq i'_{\nu}\ \ (\nu=1,\ldots,p,\ 1\leq p\leq n-q-1,\ p\in N);$$

$$x_{i'_\nu}=\frac{2^{\theta_{2j}-1}}{2^{\theta_{2j}-1}}\equiv\frac{\wp_j^{(i'_\nu)}}{2^{\theta_{2j}-1}},$$

$$\nu=1,\ldots,p,\ \ 1\leq p\leq n-q-1,\ \ p\in N,\ \ j=j_0,j_0+1,\ldots.$$

ვთქვათ

ა) $\overline{\eta^{(j)}} = (\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \ldots, \eta_n^{(j)}),$

სადაც

$$\eta_i^{(j)} = \wp_j^{(i)}, \quad i = 1,2,\ldots,n\,,\ i \neq i_{\text{v}}\ (\text{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N),$$

$$\eta_{i_{\text{v}}}^{(j)} = \alpha_j^{(\text{v})} \cdot 2^{\theta_{2j}-1} + 1, \quad \text{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ (q \in N)$$

$$j = j_0, j_0 + 1, \ldots;$$

ბ) $\overline{u^{(j)}} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \ldots, u_n^{(j)}),$

სადაც

$$u_i^{(j)} = 2,\ i = 1,2,\ldots,n\,,\ i \neq i_{\text{v}}\,,\ \text{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N,$$

$$i \neq i'_{\nu}\,,\ \nu = 1,\ldots,p,\ 1 \le p \le n-q-1,\ p \in N;$$

$$u_{i'_{\nu}}^{(j)} = 1,\ \nu = 1,\ldots,p,\ 1 \le p \le n-q-1,\ p \in N;$$

$$u_{i_{\text{v}}}^{(j)} = u_{i_{\text{v}}}^{(j)}(x_{i_{\text{v}}}) = \begin{cases} 2, & x_{i_{\text{v}}} \in \left(\alpha_j^{(\text{v})}, \dfrac{\alpha_j^{(\text{v})} + \beta_j^{(\text{v})}}{2}\right), \\ 1, & x_{i_{\text{v}}} \in \left(\dfrac{\alpha_j^{(\text{v})} + \beta_j^{(\text{v})}}{2}, \beta_j^{(\text{v})}\right), \end{cases}$$

$$\text{v} = 1,\ldots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N,\ j = j_0, j_0 + 1, \ldots .$$

განვსაზღვროთ f_{x_0} ფუნქცია $[0,1]^n$-ზე შემდეგნაირად:

$$f_{x_0}(t)=\begin{cases}1,\ t=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\Gamma\equiv\bigcup\limits_{j=j_0}^{\infty}\Gamma^{(\theta_{4j}-1,1)}_{\overline{\eta^{(2j)}},\overline{u^{2j}}},\\[2ex] 0,\ \mathrm{t}\in[0,1]^{\mathrm{n}}\setminus\Gamma.\end{cases} \tag{96}$$

ვთქვათ

$$h_j=\theta_{4(j_0+j)}-1 \text{ და } l_j=\theta_{4(j_0+j)-2}-1,\ j=0,1,2,\dots;$$

$$\overline{u_0^{(j)}}=(1,1,\dots,1),\ j=j_0,j_0+1,\dots .$$

(79), (82), და (96)-ის ძალით გვექნება რომ:

$$\left|S_{2^{h_j}2^{h_j}\dots 2^{h_j}}(f_{x_0},x_0)-S_{2^{l_j}2^{l_j}\dots 2^{l_j}}(f_{x_0},x_0)\right|>2^{-4n},$$

$$j=0,1,\dots. \tag{97}$$

ამ უკანასკნელიდან კი გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია (83) შეფასება და ე.ი ლემა ამ შემთხვევაშიც დამტკიცებულია.

განვიხილოთ II_3 შემთხვევა ე.ი. $x_i=1,\ i=1,2,\dots,n,\ i\neq i_{\mathrm{v}},\ (\mathrm{v}=1,2,\dots,q,$ $\leq q\leq n-1,\ q\in N)$.

ვთქვათ

ა) $\overline{\eta^{(j)}}=(\eta_1^{(j)},\eta_2^{(j)},\dots,\eta_n^{(j)}),$

სადაც

$$\eta_i^{(j)}=2^{\theta_{2j}-1},$$

$$i=1,2,\dots,n,\ i\neq i_{\mathrm{v}}\ (\mathrm{v}=1,\dots,q,\ 1\leq q\leq n-1,\ q\in N),\ j=1,2,\dots;$$

$$\eta_{i_\nu}^{(j)} = \alpha_j^{(\nu)} \cdot 2^{\theta_{2j}-1} + 1,$$

$$\nu = 1,\dots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N,\ j = 1,2,\dots .$$

ბ) $\overline{u^{(j)}} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_n^{(j)}),$

სადაც

$$u_i^{(j)} = 1,\ i = 1,2,\dots,n,\ i \ne i_\nu\ (\nu = 1,\dots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N),$$

$$u_{i_\nu}^{(j)} = u_{i_\nu}^{(j)}(x_{i_\nu}) = \begin{cases} 2, & x_{i_\nu} \in \left(\alpha_j^{(\nu)}, \dfrac{\alpha_j^{(\nu)} + \beta_j^{(\nu)}}{2} \right), \\[2ex] 1, & x_{i_\nu} \in \left(\dfrac{\alpha_j^{(\nu)} + \beta_j^{(\nu)}}{2}, \beta_j^{(\nu)} \right), \end{cases}$$

$$\nu = 1,\dots,q,\ 1 \le q \le n-1,\ q \in N,\ j = 1,2,\dots,n.$$

განვსაზღვროთ f_{x_0} ფუნქცია $[0,1]^n$-ზე შემდეგნაირად:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup\limits_{j=j_0}^{\infty} \Gamma_{\eta^{(2j)}, u^{(2j)}}^{(\theta_{4j}-1,1)}, \\[2ex] 0, & t \in [0,1]^n \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{98}$$

ვთქვათ

$$h_j = \theta_{4(j_0+j)} - 1 \text{ და } l_j = \theta_{4(j_0+j)-2} - 1,\ j = 0,1,2,\dots ;$$

$$\overline{u_0^{(j)}} = (1,1,\dots,1),\ j = 0,1,2,\dots .$$

(79), (82), და (98)-ის ძალით გვექნება რომ:

$$\left|S_{2^{h_j}2^{h_j}\ldots 2^{h_j}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_j}2^{l_j}\ldots 2^{l_j}}(f_{x_0}, x_0)\right| \geq 2^{-4n},$$

$$j = 0,1,\ldots \quad (99)$$

რაც ნიშნავს, რომ სამართლიანია (83) შეფასება. ამრიგად II_3 შემთხვევაშიც, და მაშასადამე მთლიანად II შემთხვევაში, ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ ადგილი აქვს III შემთხვევას.

მოცემული $x_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ წერტილის კოორდინატებისათვის გვექნება რომ:

$$x_i \in K,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

x_1 კოორდინატი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$x_1 = \sum_{\theta=1}^{\infty} b_\theta 2^{-\theta},$$

სადაც $b_\theta = 0$ ან 1 ($\theta = 1,2,\ldots$).

ვთქვათ $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\theta_{j+1} > \theta_j + 1,\ b_{\theta_j} = 0,\ b_{\theta_j + 1} = 1,\ j = 1,2,\ldots . \quad (100)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$[\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}] \equiv \Delta_{x_i}^{(\theta_{2j}-1)} = \Delta_{\alpha_j^{(i)}\cdot 2^{\theta_{2j-1}}+1}^{(\theta_{2j}-1)}, \quad (101$$

$i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots$.

ვთქვათ

ა) $\overline{\eta^{(j)}} = (\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \ldots, \eta_n^{(j)}),$

სადაც

$$\eta_i^{(j)} = \alpha_j^{(i)} \cdot 2^{\theta_{2j}-1} + 1,\ i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots .$$

ბ) $\overline{u^{(j)}} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_n^{(j)}),$

სადაც

$$u_i^{(j)} = u_i^{(j)}(x_i) = \begin{cases} 2,\ x_i \in \left(\alpha_j^{(i)}, \dfrac{\alpha_j^{(i)} + \beta_j^{(i)}}{2}\right), \\ 1,\ \ x_i \in \left(\dfrac{\alpha_j^{(i)} + \beta_j^{(i)}}{2}, \beta_j^{(i)}\right), \end{cases}$$

$$i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots .$$

განვსაზღვროთ f_{x_0} ფუნქცია $[0,1]^n$-ზე შემდეგნაირად:

$$f_{x_0}(t) = \begin{cases} 1,\ t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \Gamma \equiv \bigcup\limits_{j=j_0}^{\infty} \Gamma^{(\theta_{4j}-1,1)}_{\overline{\eta^{(2j)}}, \overline{u^{2j}}}, \\ 0,\ \mathrm{t} \in [0,1]^{\mathrm{n}} \setminus \Gamma. \end{cases} \qquad (102)$$

ვთქვათ

$$h_j = \theta_{4(j_0+j)} - 1 \text{ და } l_j = \theta_{4(j_0+j)-2} - 1,\ j = 0,1,2,\dots ;$$

$$\overline{u_0^{(j)}} = (1,1,\dots,1),\ j = 0,1,2,\dots .$$

(79), (82), და (102)-ის ძალით გვექნება რომ:

$$\left| S_{2^{h_j}2^{h_j}\dots 2^{h_j}}(f_{x_0}, x_0) - S_{2^{l_j}2^{l_j}\dots 2^{l_j}}(f_{x_0}, x_0) \right| \geq$$

$$\geq 2^{-4n}, \quad j=0,1,\ldots. \quad (103$$

რაც ნიშნავს, რომ სამართლიანია (83) შეფასება.

ამრიგად ლემა მთლიანად დამტკიცებულია (იხ. (87), (89), (91), (95), (97), (99), (103)).

§3. განშლადობა თვლად სიმრავლეზე

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3.3.1. **n**-განზომილებიანი $[0,1]^n$ კუბის ყოველი თვლადი F ქვესიმრავლისათვის არსებობს $[0,1]^n$-ზე განსაზღვრული, შემოსაზღვრული, ზომადი ფუნქცია, რომლის ფურიე-ჰაარის **n**-ჯერადი მწკრივი პრინგსჰეიმის აზრით კრებადია $[0,1]^n \setminus F$ სიმრავლეზე და არ არის λ კრებადი F სიმრავლეზე, თუ λ=1.

დამტკიცება. ვთქვათ $F=\{x_\nu : x_\nu \in [0,1]^n, \nu=1,2,\ldots\}$. ლემა 3.2.1-ის თანახმად ყოველი x_k $(k=1,2,\ldots)$ წერტილისათვის შეგვიძლია ავაგოთ $f_\nu(t)$ ფუნქცია ($t\in[0,1]^n$), რომელიც აკმაყოფილებს ლემა 3.2.1-ის (1), (2) და (3) პირობებს. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n} f_\nu(t), \; t\in[0,1]^n. \quad (104)$$

ცხადია, რომ $f(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია. გარდა ამისა ლევის თეორემის ძალით გვექნება რომ (იხ. (78), (104))

$$S_{k_1k_2\ldots k_n}(f,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n} S_{k_1k_2\ldots k_n}(f_\nu,t), \; t\in[0,1]^n. \quad (105)$$

ვთქვათ $x\in[0,1]^n$, $x\neq x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$.

ვაჩვენოთ რომ $\{S_{k_1k_2\dots k_n}(f,t)\}_{k_1k_2\dots k_n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა კრებადია.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ნებისმიერი $k_1,k_2,\dots,k_n \in N,\ j_1,j_2,\dots,j_n \in N$ რიცხვებისათვის განვიხილოთ სხვაობა (იხ. (105)):

$$\left|S_{k_1k_2\dots k_n}(f,x) - S_{j_1j_2\dots j_n}(f,x)\right| \le$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1k_2\dots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1j_2\dots j_n}(f_\nu,x)\right| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{c} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1k_2\dots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1j_2\dots j_n}(f_\nu,x)\right| +$$

$$+ \sum_{\nu=c+1}^{\infty} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1k_2\dots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1j_2\dots j_n}(f_\nu,x)\right|, \qquad (106)$$

სადაც **c** რაიმე ნატურალური რიცხვია.

დავუშვათ $c > \frac{1}{10n}\log_2^{4\varepsilon^{-1}}$. მაშინ (84) შეფასების თანახმად გვექნება, რომ

$$\sum_{\nu=c+1}^{\infty} 2^{-10\nu n}\left|S_{k_1k_2\dots k_n}(f_\nu,x) - S_{j_1j_2\dots j_n}(f_\nu,x)\right| <$$

$$< \sum_{\nu=c+1}^{\infty} 2^{-10\nu n+1} = \frac{2^{-10nc+1}}{2^{10c}-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{107}$$

ლემა 3.2.1-ის თანახმად მოიძებნება ისეთი $m_0 \in N$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $k_1, k_2, \ldots, k_n, j_1, j_2, \ldots, j_n > m_0,\ k_i, j_i \in N,\ k_i > j_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$ რიცხვებისათვის

$$\left| S_{k_1 k_2 \ldots k_n}(f_\nu, x) - S_{j_1 j_2 \ldots j_n}(f_\nu, x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \nu = 1,2,\ldots,c. \tag{108}$$

რადგან

$$\sum_{\nu=1}^{c} 2^{-10\nu n} < 1,$$

ამიტომ (108) -ის ძალით

$$\sum_{\nu=1}^{c} 2^{-10\nu n} \left| S_{k_1 k_2 \ldots k_n}(f_\nu, x) - S_{j_1 j_2 \ldots j_n}(f_\nu, x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{109}$$

ამრიგად, მოიძებნება ისეთი $m_0 \in N$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $k_1, k_2, \ldots, k_n, j_1, j_2, \ldots, j_n > m_0,\ k_i, j_i \in N,\ k_i > j_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$ რიცხვებისათვის (107), (108) და (109) -ის თანახმად გვექნება, რომ

$$\left| S_{k_1 k_2 \ldots k_n}(f, x) - S_{j_1 j_2 \ldots j_n}(f, x) \right| < \varepsilon,$$

რაც იმას ნიშნავს რომ f ფუნქციის ფურიე-ჰაარის n-ჯერადი მწკრივი პრინგსჰეიმის აზრით კრებადია $[0,1]^n \setminus F$ სიმრავლეზე.

ვაჩვენოთ, რომ $\{S_{k_1k_2\dots k_n}(f)\}_{k_1k_2\dots k_n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა განშლადია F სიმრავლის ყოველ წერტილში.

განვიხილოთ F სიმრავლის ნებისმიერი $x_k(k=1,2,..)$ წერტილი. ლემა 3.2.1-ის თანახმად (იხ. (83)) არსებობენ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობები

$$h_s \uparrow \infty \text{ და } l_s \uparrow \infty \ (h_s > l_s)\ h_s = h_s(x_0),\ l_s = l_s(x_0),$$

ისეთნი რომ

$$\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\dots 2^{h_s}}(f_k, x_k) - S_{2^{l_s}2^{l_s}\dots 2^{l_s}}(f_k, x_k)\right| > 2^{-4n},\ s = 0,1,\dots \quad (110)$$

განვიხილოთ სხვაობა (იხ. (105))

$$\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\dots 2^{h_s}}(f, x_k) - S_{2^{l_s}2^{l_s}\dots 2^{l_s}}(f, x_k)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{-10\nu n}\left(S_{2^{h_s}2^{h_s}\dots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s}2^{l_s}\dots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=1}^{k} 2^{-10\nu n}\left(S_{2^{h_s}2^{h_s}\dots 2^{h_s}}(f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s}2^{l_s}\dots 2^{l_s}}(f_\nu, x_k)\right) + \right.$$

$$+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}2^{-10\nu n}\left(S_{2^{h_s}2^{h_s}\ldots2^{h_s}}(f_\nu,x_k)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\ldots2^{l_s}}(f_\nu,x_k)\right)\Bigg|\geq$$

$$\geq\left|2^{-10kn}\right|S_{2^{h_s}2^{h_s}\ldots2^{h_s}}(f_k,x_k)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\ldots2^{l_s}}(f_k,x_k)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}2^{-10\nu n}\left(S_{2^{h_s}2^{h_s}\ldots2^{h_s}}(f_\nu,x_k)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\ldots2^{l_s}}(f_\nu,x_k)\right)\Bigg|-$$

$$-\sum_{\nu=k+1}^{\infty}2^{-10\nu n}\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\ldots2^{h_s}}(f_\nu,x_k)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\ldots2^{l_s}}(f_\nu,x_k)\right|\Bigg|. \qquad (111)$$

$$s=0,1,2,\ldots.$$

ლემა 3.2.1-ის თანახმად (იხ. (85)) მოიძებნება ისეთი $\theta\in N$ რიცხვი, რომ ყოველი $s=\theta,\theta+1,\theta+2,\ldots$ რიცხვისათვის

$$\sum_{\nu=1}^{k-1}2^{-10\nu n}\left(S_{2^{h_s}2^{h_s}\ldots2^{h_s}}(f_\nu,x_k)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\ldots2^{l_s}}(f_\nu,x_k)\right)\Bigg|=0,$$

ამიტომ (იხ. (84), (110), (111))

$$\left|S_{2^{h_s}2^{h_s}\ldots2^{h_s}}(f,x_k)-S_{2^{l_s}2^{l_s}\ldots2^{l_s}}(f,x_k)\right|\geq$$

$$\geq \left| 2^{-10kn} \left| S_{2^{h_s} 2^{h_s} \dots 2^{h_s}} (f_k, x_k) - S_{2^{l_s} 2^{l_s} \dots 2^{l_s}} (f_k, x_k) \right| - \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=k+1}^{\infty} 2^{-10\nu n} \left| S_{2^{h_s} 2^{h_s} \dots 2^{h_s}} (f_\nu, x_k) - S_{2^{l_s} 2^{l_s} \dots 2^{l_s}} (f_\nu, x_k) \right| \right| >$$

$$> 2^{-4n-10kn} - \sum_{\nu=k+1}^{\infty} 2^{-4\nu n+1} > 2^{-15kn}, \; s = \theta, \theta+1, \theta+2, \dots,$$

რაც იმას ნიშნავს რომ f ფუნქციის ფურიე-ჰაარის n-ჯერადი მწკრივი არ არის λ-კრებადი F სიმრავლეზე, თუ $\lambda=1$. თეორემა დამტკიცებულია.

ლიტერატურა

1 Б. И..Голубов. О рядах по системе Хаара. Итоги науки. Сер. Мат. Матем. анализ. М. 1970.

2. Б. С. Кашин, А. А. Саакян. Ортогональные ряды. М. 1984.

3. E. Hernandes, G. Weiss. A first course on wavelets. CRC Press, Boca Raton, 1996.

4. В. М. Бугадзе. О рядах Фурье-Хаара суперпозиций функций. Матем. сб. 1991, т.182, №2, с.185-187.

5. P. Du Bois Reimond. Untersuchungen uber die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformen. Abh. Akad., Wiss., Munchen. 1876, s.1-103.

6. N. Lusin. Uber eine Potenzreie. Rend. Circ. Vat. Palermo. 1911, №32, s.386-390.

7. С. Б. Стечкин. О сходимости и расходимости тригонометрических рядов. УМН. 1951, т.6, вып.2(42), с.148-149.

8. С. Б. Стечкин. О тригонометрических рядах, расходящихся в каждой точке. Изв. АН СССР, сер. матем. 1957, т.21, №5, с.711-728.

9. A. Kolmogoroff. Une serie Fourier-Lebesgue divergente presque partout. Fm. 1923, №4, pp.324-328.

10. A. Kolmogoroff. Une serie Fourier-Lebesgue divergente partout. C.R. Akad. Sci. Paris. 1926, №183, pp.1327-1328.

11. А. В. Тайков. О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе. УМН. 1963, т.18, №5(113), с.192-193.

12. J. P. Kahane, Y. Katznelson. Sur les onsembles de divergence des series trigonometriques. Studia math. 1966, №26, pp.305-306.

13. В. В. Буздалин. О неограниченно расходошихся тригонометрических рядах Фурье от непреривных функций. Мат. заметки. 1970, т.7, №1, с.7-18.

14. L. Karleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. Acta math. 1966, v.116, №1, pp.135-157.

15. R. Hunt. On the convergence of fourier series. Proc. Confer. „Orthog. Expan. and Their Canfig Anal“, Illinois press, Carbondale, IL. 1968. pp.235-255.

16. B. I. Golubov. О рядах по системе Хаара. Итоги науки. Сер. Мат. Мат. анализ. М. 1970.

17. P. l. Uljanov. Haar series and related questions. Colloq. Math. Societatis Janos Boliai, 49. Alfred Haar Memorial Conterence, Budapest, 1958.

18. W. Wade. Recent developments in the theory of Haar series. Colloq. Math. 1987, v.52, №2.

19. A. Haar. Zur Theorie der orthogonalen Functionensysteme. Math. Anal. 1910, №69.

20. В. И. Прохоренко. О расходящихся рядах по системе Хаара. Изв. Вузов. Мат. 1971, №1, с.62-68.

21. В. М. Бугадзе. О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль. Мат. заметки. 1992, т.51, №5, с.20-25.

22. Дзагнидзе О. П. Представление измеримых функций двух переменных двойными рядами. Сообшения АН Грузии, 1964, т.34, №2, с.277-282.

23. М. А. Лунина. О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара. Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат.Мех. 1976, №4, с.13-20.

24. K. Bitsadze. On Changes of Variable that Preserve Convergence and Absolute Convergence of Fourier Series respect Haar Wavelets system. BULLETIN OF THE GEORGIAN ACADEMY OF SCIENCES. 2001, v. 164, №3, pp. 431-432.

25. K. Bitsadze. On Divergence of Multiple Fourier-Haar Series of Bounded Func-

tion of Several Variables on Zero Measure Set. BULLETIN OF THE GEORGIAN ACADEMY OF SCIENCES. 1996, v. 154, №2, pp. 181-182.

26. K. Bitsadze. On set of divergence of Multiple Fourier-Haar series. BULLETIN OF THE GEORGIAN ACADEMY OF SCIENCES. 2000, v. 162, №3, pp. 421-422.

27. И. П. Натансонь. Теория функций вещественной переменной. М. Наука, 1974.

28. Г. Алексич. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М. ИЛ, 1963.