თბილისის ივ. ჯავახიშვილის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

პაპუნა გენადის ძე ქარჩავა

აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალი და მისი ზოგიერთი გამოყენება

01.01.01 – მათემატიკური ანალიზი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:
ფიზ. მათ. მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფ. დ. გოგუაძე

თბილისი
2005

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის შესწავლის დიდმნიშვნელოვნობა არსებითად აღნიშნული იყო ლებეგის მიერ. თავის ცნობილ მონოგრაფიაში [16, გვ.239] ლებეგი წერს:

„ჩვენ არ უნდა გვაკვირვებდეს, რომ არის ფუნქციები ჩნდება ფიზიკაში და უფრო უშუალოდაცაა დაკავშირებული ფიზიკის მოთხოვნებთან, ვიდრე წერტილის ფუნქციები. წერტილი ეს უბრალოდ არის ზღვარითი კონცეფცია სხეულისა, რომელიც უსასრულოდ მცირდება. წერტილის ფუნქცია ფიზიკაში შეიძლება შევიდეს მხოლოდ, როგორც სხეულის ფუნქციის ზღვარი, არის ფუნქცია. თუკი მაინც ცოტას საუბრობენ ასეთ ფუნქციებზე ეს მხოლოდ იმიტომ, რომ მათემატიკოსებს ჯერ კიდევ არ შეუქმნიათ ალგებრა და ანალიზი არის ფუნქციებისა. პირიქით, არსებობს ძალზე მოხერხებული აღნიშვნები წერტილის ფუნქციებისათვის. ამიტომ სხვადასხვა ხელოვნური მეთოდების საშუალებით, – ყველა ეს მეთოდები დაიყვანება იმდენად სპეციალურ არეთა განხილვაზე, რომ ისინი დამოკიდებულნი არიან მხოლოდ სასრული რაოდენობის ცვლადებზე, – არის ფუნქციების გამოყენება ყოველთვის იცვლება წერტილის ფუნქციების გამოყენებით".

მათემატიკის შემდგომმა განვითარებამ გვიჩვენა ლებეგის ამ სიტყვების ჭეშმარიტება. სიმრავლის ფუნქციები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ თანამედროვე მათემატიკაში, სახელდობრ, ზომისა და ინტეგრალის თეორიაში, პოტენციალთა თეორიაში, ალბათობის თეორიაში, ფუნქციონალურ ანალიზში და ა.შ.

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება სწორედ სიმრავლეთა კლასებზე და მათ სასრულ ნამრავლებზე განსაზღვრული აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციების ზოგადი თეორიის განვითარებას და მასთან დაკავშირებულჲ მათემატიკური ანალიზის ამოცანების შესწავლას.

ნაშრომის ძირითადი მიზანია:

1. სასრული რაოდენობის არგუმენტზე დამოკიდებული აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალის თეორიის განვითარება და მისთვის ფუბინის თეორემის თავისებური ანალო-

გიების დადგენა.

2. პარამეტრზე დამოკიდებული აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალის თეორიის განვითარება და ინტეგრების რიგის გადასმის შესახებ თეორემების დამტკიცება.

3. იმის ჩვენება, რომ დისერტაციაში შესწავლილი ზოგადი ინტეგრალის თეორია მოიცავს აქამდე ცნობილი ზოგიერთი ინტეგრალის თეორიას.

4. მიღებული შედეგების გამოყენება ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთ საკითხში.

ნაშრომში გამოყენებულია ახალი მიდგომა აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ჯერადი ინტეგრალის თეორიის განვითარებისათვის. ეს მიდგომა გამოიხატება აბსტრაქტული სიმრავლის ნამდვილი მრავალსახა ფუნქციების ჯერად ზედა და ქვედა და განმეორებით ზედა და ქვედა ინტეგრალებს შორის ფუნდამენტური დამოკიდებულების დადგენაში.

დისერტაციაში ნაჩვენებია, რომ აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ინტეგრების თეორია წარმოადგენს ეფექტურ იარაღს ფუნქციონალური ანალიზისათვისაც. მართლაც, შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სხვადასხვა სივრცეებში წრფივი ფუნქციონალების აქამდე ცნობილ წარმოდგენებს აქვთ განცალკავებული ხასიათი, რომელიც გამოწვეულია ინტეგრალის განსაზღვრით, რომლის საშუალებითაც წარმოიდგინება წრფივი ფუნქციონალი მოცემულ სივრცეში. წინამდებარე დისერტაციაში წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $[M_k;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეში წარმოიდგინება

$$(\mathfrak{N})\int_{E} f(x)\mu(dE)$$

ზოგადი ინტეგრალის საშუალებით. თუ სათანადოდ დავაფიქსირებთ სიმრავლეთა ნორმალურ კლასს, რომლის მიმართაც ხორციელდება ინტეგრება, ინტეგრალის განსაზღვრისა და თვისებების შეუცვლელად, მივიღებთ შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სხვადასხვა სივრცეში წრფივი ფუნქციონალის ყველა დღემდე ცნობილ წარმოდგენებს.

წინასწარ ცნობებში მოყვანილია ნახევარრგოლის ახალი განსაზღვრა [5, გვ.362-368], რომელიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს დისერტაციის შედე-

გების გადმოცემაში.

შემოღებულია სიმრავლეთა ახალი ე.წ. ნორმალური კლასის ცნება, დამტკიცებულია კლასის ნორმალურობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომელსაც აქვს კონსტრუქციული ხასიათი. ნაჩვენებია, რომ ნორმალური კლასიდან აღებული ყოველი სიმრავლის ყველა დანაწილების კომპონენტების სიმრავლე წარმოადგენს ნახევარრგოლს.

პირველი თავის §1-ში შემოღებულია აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალის ცნება და შესწავლილია მისი ძირითადი თვისებები. დამტკიცებულია ინტეგრალური ჯამების თანაბარი კრებადობა ინტეგრალისაკენ $e \in \mathfrak{N}E$ სიმრავლის მიმართ, რის საფუძველზეც ნაჩვენებია, რომ განუსაზღვრელი ზოგადი ინტეგრალი სიმრავლის უწყვეტი ფუნქციიდან წარმოადგენს სიმრავლის უწყვეტ ფუნქციას.

§2-ში მოცემულია დიფერენციალურად ეკვივალენტურ ფუნქციათა განსაზღვრა, შემოღებულია ფუნქციათა მნიშვნელოვანი $[\mathbf{K}_{0k};E;\mathfrak{N}],[V_0\mathbf{B}_k;E;\mathfrak{A}]$ კლასები, მოყვანილია ზოგადი ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

§3-ში შემოღებულია ზოგადი ზედა და ქვედა ინტეგრალის ცნება, მოყვანილია მათი ძირითადი თვისებები. თუ μ არის სიმრავლის ნამდვილი მრავალსახა ფუნქცია და

$$\overline{\mu}(e) = \sup \mu(e), \qquad \underline{\mu}(e) = \inf \mu(e)$$

მაშინ მტკიცდება, ინტეგრების თეორიისათვის მნიშვნელოვანი,

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_E} \overline{\mu}(dE) = (\mathfrak{N})\overline{\int_E} \mu(dE), \qquad (\mathfrak{N})\underline{\int_E} \underline{\mu}(dE) = (\mathfrak{N})\underline{\int_E} \mu(dE)$$

დამოკიდებულებები.

§4-ში შემოღებულია სასრული ვარიაციის მქონე სიმრავლის ფუნქციის მნიშვნელოვანი $[\mathbf{VB}_k;E;\mathfrak{A}],[V_{(D)}\mathbf{B}_k;E;\mathfrak{A}],[V_{(0)}\mathbf{B}_k;E;\mathfrak{A}]$ კლასები, დამტკიცებულია აუცილებელი და საკმარისი პირობები იმისათვის, რომ სიმრავლის ფუნქცია მიეკუთვნებოდეს ზემოთ შემოღებულ კლასებს.

§5-ში დამტკიცებულია ზოგადი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის თეორემები.

§6-ში განსაზღვრულია სტილტიესის ტიპის ზოგადი ინტეგრალი, დამტკიცებულია სტილტიესის ტიპის ზოგადი ინტეგრალის არსებობის და წერტილის ფუნქციების ნამრავლებიდან სტილტიესის ტიპის ზოგადი ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. შემოღებულია წერტილის ფუნქციათა ეფექტური $[M_k;E;\mathfrak{A}]$ კლასი, რომელსაც გააჩნია პირველხარისხოვანი მნიშვნელობა შემდეგი გადმოცემისათვის. და ბოლოს ნაჩვენებია, რომ დისერტაციაში შემოღებული ინტეგრალი მოიცავს ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალს.

მეორე თავის §7-ში დამტკიცებულია, რომ სიმრავლეთა ნორმალური კლასების ნამრავლი ნორმალური კლასია.

§8-ში შემოღებულია ზოგადი n-ჯერადი და ზოგადი n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალის ცნებები და მათ შორის დადგენილია შემდეგი

$$(\mathfrak{M})\underline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\le(\mathfrak{M}_n)\underline{\int}_{A_n}\left(\cdots\left((\mathfrak{M}_1)\underline{\int}_{A_1}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\cdots\right)\le$$

$$\le(\mathfrak{M}_n)\overline{\int}_{A_n}\left(\cdots\left((\mathfrak{M}_1)\overline{\int}_{A_1}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\cdots\right)\le(\mathfrak{M})\overline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n}\mu(dA_1,\ldots,dA_n),$$

. . . .

$$(\mathfrak{M})\underline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\le(\mathfrak{M}_1)\underline{\int}_{A_1}\left(\cdots\left((\mathfrak{M}_n)\underline{\int}_{A_n}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\cdots\right)\le$$

$$\le(\mathfrak{M}_1)\overline{\int}_{A_1}\left(\cdots\left((\mathfrak{M}_n)\overline{\int}_{A_n}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\cdots\right)\le(\mathfrak{M})\overline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)$$

ფუნდამენტური დამოკიდებულებები, რომლებიდანაც გამომდინარეობს აუცილებელი და საკმარისი პირობები ზოგადი n-ჯერადი და ზოგადი n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალების ტოლობისათვის.

§9-ში განსაზღვრულია სტილტიესის ტიპის ზოგადი n-ჯერადი ინტეგრალი. მიღებულია ფუბინის თეორემის თავისებური ანალოგიები. ნაჩვენებია, რომ ამ პარაგრაფის შესაბამისი თეორემიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, მიიღება ფუბინის თეორემა თითქმის ყველგან შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციებისათვის. სტილტიესის ტიპის ზოგადი n-ჯერადი ინტეგრალისათვის დადგენილია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა, რომლიდანაც, როგორც

კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს $n=2$ და $n=3$ შემთხვევისათვის შესაბამისად [23]-ში (გვ.666) და [24]-ში (გვ.281) მოყვანილი ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა.

§10-ში შემოღებულია ე.წ. ზოგადი n-ჯერადი ბადური ინტეგრალის ცნება, რომელიც წარმოადგენს ჩვეულებრივი ზოგადი ინტეგრალის განზოგადებას. შემოღებულია ზოგადი q-ჯერადი $(0 \le q \le n)$ ბადური ინტეგრალის დიფერენციალურად თანაბრად არსებობის ცნება, რომელიც წარმოადგენს ზოგადი n-ჯერადი და ზოგადი განმეორებითი n-ჯერადი ინტეგრალების ტოლობის აუცილებელ და საკმარის პირობას.

§11-ში განსაზღვრულია პარამეტრის მიმართ ზოგადი q-ჯერადი $(1 \le q \le n)$ ინტეგრალის თანაბრად არსებობის ცნება, რომლის გამოყენებითაც მტკიცდება ინტეგრების რიგის გადასმის შესახებ თეორემები.

მეორე თავში მიღებული შედეგები გვიჩვენებენ, რომ ზოგადი n-ჯერადი და ზოგადი განმეორებითი n-ჯერადი ინტეგრალის ცნებები ნათელს ჰფენენ n-ჯერადი და განმეორებითი n-ჯერადი ინტეგრალების შინაგან თვისებებს და მივყევართ შემდგომ განზოგადებებამდე.

მესამე თავის §12-ში წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე $[\mathrm{M}_k;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეში წარმოდგინება ზოგადი ინტეგრალის საშუალებით. როგორც ზემოთ ვთქვით, ეს წარმოდგენა შეიცავს წრფივი ფუნქციონალის ყველა აქამდე ცნობილ წარმოდგენებს შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სივრცეში.

მაშასადამე, დისერტაციაში შესწავლილი აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ინტეგრალის თეორია წარმოადგენს საკმაოდ მოსახერხებელ სამუშაო ინსტრუმენტს მათემატიკური ანალიზისათვის მნიშვნელოვან ამოცანათა ამოხსნაში. სახელდობრ, ის დიდი უპირატესობით იძლევა სასურველ შედეგს მაშინაც კი, როდესაც ლებეგის ინტეგრალის გამოყენება შეუძლებელია.

წ ი ნ ა ს წ ა რ ი   ც ნ ო ბ ე ბ ი

1^0. სიმრავლეთა კლასები. სიმრავლეთა დანაწილებები.

ვთქვათ, X რაიმე ფიქსირებული არაცარიელი სიმრავლეა. შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ X სიმრავლის ქვესიმრავლეებს.

სიმრავლეს, რომლის ელემენტებსაც წარმოადგენს სიმრავლეები, ვუწოდოთ სიმრავლეთა კლასი და ის აღვნიშნოთ დიდი გოთური ან დიდი ლათინური ასოთი.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასია და $E\in\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ კლასიდან აღებულ თანაუკვეთ სიმრავლეთა სასრულ $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ კლასს, რომელთა გაერთიანებაც E სიმრავლის ტოლია, ეწოდება E სიმრავლის დანაწილება და აღინიშნება DE სიმბოლოთი. ამასთან, $E_1,\ldots,E_n$ სიმრავლეებს ეწოდებათ DE დანაწილების კომპონენტები. ზოგჯერ გაურკვევლობის თავიდან აცილების მიზნით ვიტყვით, რომ DE წარმოადგენს E სიმრავლის დანაწილებას $\mathfrak{A}$ კლასის ელემენტებად ან $\mathfrak{A}$ კლასში, როდესაც აუცილებელია იმის აღნიშვნა, თუ რომელ კლასს ეკუთვნის DE დანაწილების კომპონენტები.

$E\in\mathfrak{A}$ სიმრავლის ყველა დანაწილების სიმრავლე, $\mathfrak{A}$ კლასის ელემენტებად, აღვნიშნოთ $\Sigma(E)\mathfrak{A}$ სიმბოლოთი, ხოლო ყველა დანაწილების კომპონენტების კლასი კი – $\mathfrak{A}$E სიმბოლოთი.

ვთქვათ, მოცემულია $E\in\mathfrak{A}$ სიმრავლის ნებისმიერი ორი D_1E და D_2E დანაწილება. D_2E დანაწილებას ეწოდება D_1E დანაწილების გაგრძელება, რასაც აღვნიშნავთ $D_1E\prec D_2E$ ან $D_2E\succ D_1E$ სიმბოლოთი, თუ D_2E დანაწილების ყოველი კომპონენტი წარმოადგენს D_1E დანაწილების რომელიმე კომპონენტის ქვესიმრავლეს ანუ, რაც იგივეა, თუ D_2E დანაწილება შეიცავს D_1E დანაწილების ყოველი კომპონენტის დანაწილებას.

$E\in\mathfrak{A}$ სიმრავლის ნებისმიერი DE დანაწილების ყველა გაგრძელების კომპონენტების კლასი აღვნიშნოთ $\mathfrak{A}D$E სიმბოლოთი.

ახლა, განვსაზღვროთ დანაწილებათა გაერთიანება. ვთქვათ, $DE=\{E_k\}_{k=1}^{n}$, ხოლო თავის მხრივ, $DE_k=\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ არის $E_k\,(k=1,\ldots,n)$ სიმრავლის დანაწილება, მაშინ

$$D_1\mathrm{E} = \left\{E_k^{j_k}\right\}_{j_k=1}^{m_k} (k = 1,\dots,n)$$

დანაწილებას ეწოდება $DE_1,\dots,DE_n$ დანაწილებათა გაერთიანება და ის აღინიშნება

$$D_1\mathrm{E} = \bigcup_{k=1}^{n} DE_k$$

სიმბოლოთი. ამასთან, $DE_1,\dots,DE_n$ დანაწილებებს ეწოდებათ $D_1\mathrm{E}$ დანაწილების კომპონენტები.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $D\mathrm{E}$ დანაწილების ყოველი $D_1\mathrm{E}$ გაგრძელება შეიძლება წარმოვადგინოთ ამ სახით და ამასთან, ერთადერთი გზით. ასევე სამართლიანია ამ წინადადების შებრუნებული. მართლაც, დანაწილებათა ყოველი

$$\bigcup_{k=1}^{n} DE_k$$

გაერთიანება, სადაც $E_k\ (k = 1,\dots,n)$ არის $D\mathrm{E}$ დანაწილების კომპონენტები, წარმოადგენს $D\mathrm{E}$ დანაწილების გაგრძელებას.

სიმრავლეთა კლასს, რომელიც თავის ნებისმიერ ორ E და F სიმრავლესთან ერთად შეიცავს მათ $\mathrm{E}\cap\mathrm{F}$ თანაკვეთას, ეწოდება მულტიპლიკაციური [14, გვ.654-696] და აღინიშნება $\mathfrak{M}_0$ ასოთი.

სიმრავლეთა კლასს, რომელიც თავის ნებისმიერ ორ E და F სიმრავლესთან ერთად შეიცავს მათი $\mathrm{E}\cap\mathrm{F}$ თანაკვეთის დანაწილებას, ეწოდება განზოგადებულად მულტიპლიკაციური [5, გვ. 832-844] და აღინიშნება $\mathfrak{M}$ ასოთი.

ცხადია, რომ მულტიპლიკაციური კლასი წარმოადგენს განზოგადებულად მულტიპლიკაციურ კლასს. ახლა მოვიყვანოთ მაგალითი განზოგადებულად მულტიპლიკაციური კლასისა, რომელიც არ არის მულტიპლიკაციური. ვთქვათ, E რაიმე თვლადი სიმრავლეა და $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ არის მისი ყველა ქვესიმრავლის კლასი. განვიხილოთ E სიმრავლის რაიმე სასრული e ქვესიმრავლე და $\mathfrak{A}(\mathrm{E})$ კლასიდან ამოვაგდოთ e სიმრავლე და მისი ყველა ქვესიმრავლე გარდა ერთელემენტიანი სიმრავლეებისა. დარჩენილი კლასი აღვნიშნოთ $\mathfrak{M}$ ასოთი. ვაჩვენოთ, რომ $\mathfrak{M}$ კლასი არის განზოგადებულად მულტიპლიკაციური, მაგრამ არ არის მულტიპლიკაციური. მართლაც, განვიხილოთ

E $-e$ სიმრავლე და ის წარმოვადგინოთ $F_1 \bigcup F_2$ სახით, სადაც $F_1 \bigcap F_2 = \varnothing$ ($\varnothing$ – ცარიელი სიმრავლეა). შევადგინოთ $E_1 = F_1 \bigcup e$ და $E_2 = F_2 \bigcup e$ სიმრავლეები. ცხადია, რომ $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ და $E_1 \bigcap E_2 = (F_1 \bigcup e) \bigcap (F_2 \bigcup e) = e$. მაშასადამე, $E_1 \bigcap E_2 = e \notin \mathfrak{M}$, მაგრამ $\mathfrak{M}$ კლასი შეიცავს e სიმრავლის დანაწილებას.

ვთქვათ, $\mathrm{E} \in \mathfrak{M}$ და $D_1\mathrm{E} = \{E_i^1\}_{i=1}^{n_1}$, $D_2\mathrm{E} = \{E_j^2\}_{j=1}^{n_2}$ არის E სიმრავლის რაიმე ორი დანაწილება. $D_1\mathrm{E}$ და $D_2\mathrm{E}$ დანაწილებათა ნამრავლი ეწოდება

$$\{E_{k_{ij}}^{ij}\}_{k_{ij}=1}^{m_{ij}} \left(i = 1,\dots,n_1; j = 1,\dots,n_2\right)$$

დანაწილებას, სადაც $\{E_{k_{ij}}^{ij}\}_{k_{ij}=1}^{m_{ij}}$ წარმოადგენს $E_i^1 \bigcap E_j^2 (i = 1,\dots,n_1; j = 1,\dots,n_2)$ თანაკვეთის დანაწილებას, და ის აღინიშნება $(D_1 \cdot D_2)\mathrm{E}$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ ორი დანაწილების გაგრძელება წარმოადგენს თითოეული მათგანის გაგრძელებას. ანალოგიურად განისაზღვრება ნებისმიერი სასრული რაოდენობის დანაწილებათა ნამრავლი.

ვთქვათ, $\mathrm{E} \in \mathfrak{M}$ ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა და $D\mathrm{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ მისი რაიმე დანაწილებაა. მაშინ ყოველი $F \subset \mathrm{E}, F \in \mathfrak{M}$ სიმრავლისათვის $D\mathrm{E}$ დანაწილება ინდუცირებს ცალსახად განსაზღვრულ $\{F_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k} (k = 1,\dots,n)$ დანაწილებას, სადაც $\{F_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ არის $F \bigcap E_k \left(k = 1,\dots,n\right)$ თანაკვეთის დანაწილება, რომელსაც F სიმრავლის ინდუცირებული დანაწილება ეწოდება და ის აღინიშნება იგივე DF სიმბოლოთი.

მოვიყვანოთ ახლა ნახევარრგოლის „ძველი" და „ახალი" განსაზღვრა.

სიმრავლეთა არაცარიელ P_0 კლასს ეწოდება ნახევარრგოლი [15, გვ.43], თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. თუ $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{P}_0$, მაშინ $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} \in \mathrm{P}_0$;

2. თუ $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{P}_0$ და $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$, მაშინ P_0 კლასი შეიცავს A სიმრავლის ისეთ დანაწილებას, რომლის კომპონენტსაც წარმოაგენს B სიმრავლე.

სიმრავლეთა არაცარიელ P კლასს ეწოდება ნახევარრგოლი [5, გვ.362-368], თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. თუ $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{P}$, მაშინ P კლასი შეიცავს $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}$ თანაკვეთის დანაწილებას;

2. თუ $A, B \in P$ და $A \supset B$, მაშინ P კლასი შეიცავს A სიმრავლის ისეთ დანაწილებას, რომლის კომპონენტსაც წარმოაგენს B სიმრავლე.

მაშასადამე, ნახევარრგოლის „ახალ" განსაზღვრაში კლასის მულტიპლიკაციურობა შეცვლილია განზოგადებულად მულტიპლიკაციურობით.

ცხადია, რომ, თუ სიმრავლეთა არაცარიელი P კლასი არის ნახევარრგოლი „ძველი" განსაზღვრით, მაშინ ის არის ნახევარრგოლი „ახალი" განსაზღვრითაც. შებრუნებულ წინადადებას საზოგადოდ არ აქვს ადგილი.

მართლაც, განვიხილოთ სიმრავლეთა შემდეგი

$$P = \{\{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \varnothing\}$$

კლასი და ვაჩვენოთ, რომ ის არ არის სიმრავლეთა ნახევარრგოლი „ძველი" განსაზღვრით, მაგრამ „ახალი" განსაზღვრით კი – სიმრავლეთა ნახევარრგოლია. მართლაც, გვაქვს $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\} \notin P$. მაგრამ P კლასი შეიცავს $\{2,3\}$ სიმრავლის $\{\{2\}, \{3\}\}$ დანაწილებას.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ P კლასი აკმაყოფილებს ნახევარგოლის მეორე მოთხოვნას.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ქვემოთ ყველგან ვისარგებლებთ სიმრავლეთა ნახევარრგოლის „ახალ" განსაზღვრით.

შემდეგში ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ დებულებებს, რომელთა დამტკიცებაც მოყვანილია [5]-ში (გვ.362-368).

1^0.1. თუ $\mathfrak{M}$ განზოგადებულად მულტიპლიკაციური კლასია, $E \in \mathfrak{M}$ და $\mathfrak{M}E \neq \{E\}$, მაშინ $\mathfrak{M}E$ კლასი წარმოადგენს ნახევარრგოლს.

1^0.2. თუ $E_1,...,E_n$ არის P ნახევარრგოლიდან აღებული თანაუკვეთი სიმრავლეები და E კი – P ნახევარრგოლიდან აღებული ისეთი სიმრავლეა, რომ $E_k \subset E$ $(k = 1,...,n)$, მაშინ P ნახევარრგოლში მოიძებნება ისეთი თანაუკვეთი $F_1, ..., F_m$ სიმრავლეები, რომ

$$DE = \{E_1,...,E_n, F_1,...,F_m\}$$

წარმოადგენს E სიმრავლის დანაწილებას.

1^0.3. თუ $E_1,...,E_n$ არის P ნახევარრგოლიდან აღებული ნებისმიერი სიმრავლეები, მაშინ P ნახევარრგოლში მოიძებნება ისეთი თანაუკვეთი

$F_1, ..., F_m$ სიმრავლეები, რომ

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{m} F_k .$$

სიმრავლეთა არაცარიელ კლასს, რომელიც ჩაკეტილია ორი სიმრავლის გაერთიანებისა და სხვაობის ოპერაციების მიმართ, ეწოდება რგოლი და აღინიშნება $\mathfrak{R}$ ასოთი [15, გვ.44-45].

$1^0 4$. ვთქვათ, **P** სიმრავლეთა ნახევარრგოლია. მაშინ **P** ნახევარრგოლიდან აღებული ყველა თანაუკვეთ სიმრავლეთა სასრული გაერთიანებების სიმრავლე წარმოადგენს **P** ნახევარრგოლის შემცველ უმცირეს რგოლს, რომელიც აღინიშნება $\mathfrak{R}(\mathbf{P})$ სიმბოლოთი [5, გვ.362-368].

2^0. სიმრავლის ფუნქციები.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასია.

ამბობენ, რომ $\mathfrak{A}$ კლასზე განსაზღვრულია სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა μ ფუნქცია, თუ ყოველ $\mathrm{E} \in \mathfrak{A}$ სიმრავლეს შეესაბამება სასრულ კომპლექსურ რიცხვთა ცალსახად განსაზღვრული $\mu(\mathrm{E})$ სიმრავლე, ამასთან, $\mu(\varnothing) = 0$.

თუ სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა μ ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathfrak{A}D\mathrm{E}$ კლასზე, მაშინ ვიტყვით, რომ ის დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{A}\mathrm{E}$ კლასზე.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ ქვემოთ ყველგან კომპლექსური ფუნქციების კლასებს აღვნიშნავთ დიდი ლათინური ასოებით **k** ინდექსით, ხოლო ნამდვილი ფუნქციების კლასებს კი – დიდი ლათინური ასოებით ინდექსის გარეშე.

$\mathfrak{A}\mathrm{E}$ კლასზე დიფერენციალურად განსაზღვრული ყველა სიმრავლის სასრული კომპლექსური (ნამდვილი) მრავალსახა ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $[\mathrm{D}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{A}]([\mathrm{D}; \mathrm{E}; \mathfrak{A}])$ სიმბოლოთი.

$\mathfrak{A}D\mathrm{E}$ კლასზე განსაზღვრული ყველა სიმრავლის სასრული კომპლექსური (ნამდვილი) მრავალსახა ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $[\mathrm{D}_k; \mathfrak{A}D\mathrm{E}]$ $([\mathrm{D}; \mathfrak{A}D\mathrm{E}])$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, თუ $\mu \in [\mathrm{D}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{A}]$, მაშინ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $\mu \in [\mathrm{D}_k; \mathfrak{A}D\mathrm{E}]$.

ვთქვათ, $\mathrm{E}\in\mathfrak{A}$ და $D\mathrm{E}=\{E_1,\ldots,E_n\}$ არის E სიმრავლის რაიმე დანაწილება. $\mathfrak{A}$ კლასზე განსაზღვრული სიმრავლის სასრული კომპლექსური მრავალსახა μ ფუნქციის რიმანის ჯამი, $D\mathrm{E}$ დანაწილების მიმართ, ეწოდება

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$$

გამოსახულებას, სადაც $\mu(E_k)(k=1,\ldots,n)$ არის μ ფუნქციის ერთერთი მნიშვნელობა E_k სიმრავლეზე.

$\mathfrak{A}$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის ნამდვილ μ ფუნქციას, რომელიც ღებულობს სასრულ ან უსასრულო მნიშვნელობებს, ეწოდება სასრულოდ-ნახევრადადიტიური ზემოდან შესაბამისად ქვემოდან, თუ ნებისმიერი $\mathrm{E}\in\mathfrak{A}$ სიმრავლის ყოველი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილებისათვის ადგილი აქვს

$$\mu(\mathrm{E})\geq\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k),$$

შესაბამისად

$$\mu(\mathrm{E})\leq\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$$

უტოლობას.

$\mathfrak{A}$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის კომპლექსურ (ნამდვილ) μ ფუნქციას, რომელიც ღებულობს სასრულ ან უსასრულო მნიშვნელობებს, ეწოდება სასრულოდ-ადიტიური, თუ ნებისმიერი $\mathrm{E}\in\mathfrak{A}$ სიმრავლის ყოველი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილებისათვის ადგილი აქვს

$$\mu(\mathrm{E})=\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$$

ტოლობას.

ცხადია, რომ სიმრავლის ნამდვილი μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის სასრულოდ-ნახევრადადიტიურია როგორც ზემოდან ისე ქვემოდან.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ და $\mathfrak{B}$ სიმრავლეთა ორი არაცარიელი კლასია, $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\neq\mathfrak{B})$ და $\mathfrak{B}$ კლასზე განსაზღვრულია სიმრავლის μ ფუნქცია. $\mathfrak{A}$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის $\mu_{\mathfrak{A}}$ ფუნქციას, რომელიც $\mathfrak{A}$ კლასზე ღებულობს ყველა იმ

მნიშვნელობას რასაც μ ფუნქცია, ეწოდება μ ფუნქციის შევიწროება $\mathfrak{A}$ კლასზე.

3^0. მიმართული სიმრავლეები. სიმრავლეთა ნორმალური კლასები.

არაცარიელ E სიმრავლეზე განსაზღვრულ ბინარულ „$\succ$" დამოკიდებულებას ეწოდება მიმართულება E სიმრავლეზე [13, თ.II], თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. თუ $\alpha \in \mathrm{E}$, მაშინ $\alpha \succ \alpha$;
2. თუ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{E}$ და $\alpha \succ \beta, \beta \succ \gamma$, მაშინ $\alpha \succ \gamma$;
3. თუ $\alpha, \beta \in \mathrm{E}$, მაშინ E სიმრავლეში მოიძებნება ისეთი γ ელემენტი, რომ $\gamma \succ \alpha$, $\gamma \succ \beta$.

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ E სიმრავლე მიმართულია „ $\succ$" ბინარული დამოკიდებულებით.

მიმართული სიმრავლე ეწოდება $(\mathrm{E}, \succ)$ წყვილს, სადაც E სიმრავლე არის მიმართული „$\succ$" ბინარული დამოკიდებულებით.

განსაზღვრა. სიმრავლეთა კლასს ვუწოდოთ ნორმალური და ის აღვნიშნოთ $\mathfrak{N}$ ასოთი, თუ ყოველი $\mathrm{E} \in \mathfrak{N}$ სიმრავლისათვის E სიმრავლის ყველა დანაწილების $\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}$ სიმრავლე წარმოადგენს მიმართულ სიმრავლეს დანაწილებათა გაგრძელების დამოკიდებულების მიმართ.

3^0.1. იმისათვის, რომ $\mathfrak{N}$ კლასი იყოს ნორმალური, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\mathrm{E} \in \mathfrak{N}$ სიმრავლისათვის E სიმრავლის ყველა დანაწილების კომპონენტების $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასი იყოს განზოგადებულად მულტიპლიკაციური.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია და ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $\mathrm{E} \in \mathfrak{N}$ სიმრავლისათვის $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასი არის განზოგადებულად მულტიპლიკაციური.

მართლაც, ვთქვათ, $F_1, F_2 \in \mathfrak{N}\mathrm{E}$. მაშინ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_1\mathrm{E}$ და $D_2\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $D_1\mathrm{E} = \{F_1, E_{1k}\}_{k=1}^{n_1}, D_2\mathrm{E} = \{F_2, E_{2k}\}_{k=1}^{n_2}$. რადგანაც პირობის თანახმად $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D_1\mathrm{E}$ და $D_2\mathrm{E}$ დანაწილებათა $D\mathrm{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელება. დანაწილებათა გაგრძე-

ლების განსაზღვრის თანახმად $D\mathrm{E}$ დანაწილება შეიცავს როგორც $D_1\mathrm{E}$ ისე, $D_2\mathrm{E}$ დანაწილების ყოველი კომპონენტის დანაწილებას. კერძოდ, $D\mathrm{E}$ დანაწილება შეიცავს F_1 და F_2 სიმრავლეების დანაწილებებს,

$$F_1=\bigcup_{i=1}^{m}E_i,\ \ F_2=\bigcup_{j=1}^{m}E_j.$$

ამ წარმოდგენათა გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$F_1\cap F_2=\left(\bigcup_{i=1}^{m}E_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}E_j\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{m}\left(E_i\cap E_j\right).$$

რადგანაც $E_k\ (k=1,...,n)$ სიმრავლეები წარმოადგენენ $D\mathrm{E}$ დანაწილების კომპონენტებს, ამიტომ

$$E_i\cap E_j=\begin{cases}E_i, \text{ თუ } i=j,\\ \varnothing, \text{ თუ } i\neq j.\end{cases}$$

მაშასადამე,

$$F_1\cap F_2=\bigcup_{i=1}^{m}E_i.$$

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი $\mathrm{E}\in\mathfrak{N}$ სიმრავლისათვის $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასი არის განზოგადებულად მულტიპლიკაციური და ვაჩვენოთ, რომ $\mathfrak{N}$ არის სიმრავლეთა ნორმალური კლასი. ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\mathrm{E}\in\mathfrak{N}$ სიმრავლისათვის $\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}$ სიმრავლე არის მიმართული დანაწილებათა გაგრძელების დამოკიდებულებით.

მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ $\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}$ სიმრავლე აკმაყოფილებს მიმართულების აქსიომებს.

1. ვთქვათ, $D\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}$. მაშინ რადგანაც ყოველი სიმრავლე წარმოადგენს თავისი თავის ქვესიმრავლეს, ამიტომ $D\mathrm{E}\succ D\mathrm{E}$;

2. ვთქვათ, $D_1\mathrm{E},\ D_2\mathrm{E},\ D_3\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}$ და $D_1\mathrm{E}\succ D_2\mathrm{E},\ D_2\mathrm{E}\succ D_3\mathrm{E}$. დანაწილებათა გაგრძელების განსაზღვრის თანახმად $D_1\mathrm{E}$ დანაწილების ყოველი კომპონენტი წარმოადგენს $D_2\mathrm{E}$ დანაწილების რომელიმე კომპონენტის ქვესიმრავლეს, ხოლო თავის მხრივ, $D_2\mathrm{E}$ დანაწილების ყოველი კომპონენტი წარმოდგენს $D_3\mathrm{E}$ დანაწილების რომელიმე კომპონენტის ქვესიმრავლეს. მაშასადამე, $D_1\mathrm{E}$ დანაწილების ყოველი კომპონენტი წარმოადგენს $D_3\mathrm{E}$ დანა-

წილების რომელიმე კომპონენტის ქვესიმრავლეს, ე.ი. $D_1\mathrm{E} \succ D_3\mathrm{E}$.

3. ვთქვათ, $D_1\mathrm{E}, D_2\mathrm{E} \in \Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}$. რადგანაც პირობის თანახმად $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ განზოგადებულად მულტიპლიკაციური კლასია, ამიტომ ის $D_1\mathrm{E}$ და $D_2\mathrm{E}$ დანაწილების კომპონენტებთან ერთად შეიცავს მათი ყველა შესაძლო თანაკვეთის დანაწილებებსაც. რადგანაც ორი დანაწილების ნამრავლი წარმოადგენს ორივე დანაწილების გაგრძელებას, ამიტომ საძიებელი დანაწილება იქნება $(D_1 \cdot D_2)\mathrm{E}$ დანაწილება.

$1^0.1$ თეორემიდან, $3^0.1$ თეორემის გათვალისწინებით, უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი

$3^0.2$. თუ $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, $\mathrm{E} \in \mathfrak{N}$ და $\mathfrak{N}\mathrm{E} \neq \{\mathrm{E}\}$, მაშინ $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასი წარმოადგენს ნახევარრგოლს.

ვთქვათ, $(\mathrm{E}, \succ)$ მიმართული სიმრავლეა. E სიმრავლის F ქვესიმრავლეს ეწოდება E სიმრავლის კონფინალური ქვესიმრავლე, თუ ყოველი $\alpha \in \mathrm{E}$-სათვის მოიძებნება ისეთი $\beta \in \mathrm{F}$ ელემენტი, რომ $\beta \succ \alpha$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $(\mathrm{E}, \succ)$ მიმართული სიმრავლის ყოველი კონფინალური F ქვესიმრავლე მიმართულია „$\succ$" დამოკიდებულებით. მაშასადამე, $(\mathrm{F}, \succ)$ წყვილი წარმოადგენს მიმართულ სიმრავლეს.

ვთქვათ, $\alpha \in \mathrm{E}$. ყველა ისეთი $\beta \in \mathrm{E}$ ელემენტის E_α სიმრავლეს, რომ $\beta \succ \alpha$, ეწოდება E სიმრავლის ბოლო.

E სიმრავლის F ქვესიმრავლეს ეწოდება E სიმრავლის ძლიერად კონფინალური ქვესიმრავლე, თუ ის შეიცავს E სიმრავლის რაიმე ბოლოს.

G სიმრავლის ელემენტების განზოგადებული მიმდევრობა ეწოდება $(f, (\mathrm{E}, \succ))$ წყვილს, სადაც f წარმოადგენს $(\mathrm{E}, \succ)$ მიმართული სიმრავლის ცალსახა ასახვას G სიმრავლეში.

G სიმრავლის ელემენტების განზოგადებული მიმდევრობა ხშირად მოხერხებულია ჩავწეროთ $\{x_\alpha, \alpha \in (\mathrm{E};\succ)\}$ სახით ან, თუ აუცილებელი არ არის „$\succ$" დამოკიდებულების მითითება, მაშინ $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{E}}$ სახით.

G სიმრავლის ელემენტების $\{x_\beta, \beta \in (\mathrm{F};\succ)\}(\mathrm{F} \subset \mathrm{E})$ განზოგადებულ მიმდევრობას ეწოდება $\{x_\alpha, \alpha \in (\mathrm{E};\succ)\}$ განზოგადებული მიმდევრობის კონფინალური

(ძლიერად კონფინალური) ქვემიმდევრობა, თუ F არის E სიმრავლის კონფინალური (ძლიერად კონფინალური) ქვესიმრავლე.

შევნიშნოთ, რომ ჩვეულებრივი მიმდევრობებისათვის გამოთქმებს „მიმდევრობის უსასრულოდ ბევრი წევრისათვის", „თითქმის ყველა n-სათვის" აქ შესაბამისად შეესაბამება „კონფინალური განზოგადებული მიმდევრობისათვის", „ძლიერად კონფინალური განზოგადებული მიმდევრობისათვის" გამოთქმები.

თავი I.

აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალი

§1. ზოგადი ინტეგრალის განსაზღვრა და მისი თვისებები.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, $\mathrm{E}\in\mathfrak{N}$ და $\mu\in[\mathbf{D}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. რადგანაც $\mu\in[\mathbf{D}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, ამიტომ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_0\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $\mu\in[\mathbf{D}_k;\mathfrak{N}D_0\mathrm{E}]$. განვიხილოთ $D_0\mathrm{E}$ დანაწილების რაიმე $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელება და მის მიმართ, $\mu(E_k)\,(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის, შევადგინოთ μ ფუნქციის

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$$

რიმანის ჯამი.

კომპლექსურ I რიცხვს ვუწოდოთ μ ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალი E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და ის აღვნიშნოთ

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})$$

სიმბოლოთი, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)\,(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)-\mathrm{I}\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

თუ μ ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალი E სიმრავლზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ არსებობს და არის სასრული, მაშინ ვიტყვით, რომ μ ფუნქცია ეკუთვნის $[\mathbf{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს.

კომპლექსურ რიცხვთა განზოგადებული მიმდევრობის ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმიდან გამომდინარეობს შემდეგი:

1.1. $\mu\in[\mathbf{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ორი $\{E_k^1\}_{k=1}^{n_1}$ და $\{E_k^2\}_{k=1}^{n_2}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^1)\,(k=1,\dots,n_1)$,

$\mu\left(E_k^2\right)(k=1,\ldots,n_2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu\left(E_k^1\right)-\sum_{k=1}^{n_2}\mu\left(E_k^2\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

1.1 თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

1.2. $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}=\left\{E_k^1\right\}_{k=1}^{n_1}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{E_k^2\right\}_{k=1}^{n_2}$ გაგრძელებისათვის და $\mu\left(E_k^1\right)(k=1,\ldots,n_1)$, $\mu\left(E_k^2\right)$ $(k=1,\ldots,n_2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu\left(E_k^1\right)-\sum_{k=1}^{n_2}\mu\left(E_k^2\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

მოვიყვანოთ, ახლა, ზოგადი ინტეგრალის თვისებები.

1.3. თუ $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ ყოველი $e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის $\mu\in[\mathrm{K}_k;e;\mathfrak{N}]$.

1.4 თეორემის დამტკიცება შეიცავს 1.3 თეორემის დამტკიცებას.

1.4. თუ $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ და $D\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ არის E სიმრავლის რაიმე დანაწილება, მაშინ ყოველი k-სათვის $(k=1,\ldots,n)$ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)$$

ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)$$

ტოლობას.

დამტკიცება. პირობის თანახმად $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ორი $\left\{E_k^1\right\}_{k=1}^{n_1}$ და $\left\{E_k^2\right\}_{k=1}^{n_2}$ გაგრძელებისათვის და $\mu\left(E_k^1\right)(k=1,\ldots,n_1)$, $\mu\left(E_k^2\right)(k=1,\ldots,n_2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu\left(E_k^1\right)-\sum_{k=1}^{n_2}\mu\left(E_k^2\right)\right|<\varepsilon \tag{1.1.1}$$

უტოლობას.

ვაჩვენოთ, რომ ყოველი k-სათვის $(k=1,...,n)$ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)$$

ინტეგრალი.

რადგანაც, $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D\mathrm{E}$ და $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილებათა $D'\mathrm{E}=\{E'_j\}_{j=1}^{m}$ გაგრძელება.

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $D_\varepsilon E_k=\{E'_j : E'_j\subset E_k, E'_j\in D'\mathrm{E}\}=\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}\ (k=1,...,n)$.

დავაფიქსიროთ $k_0\,(1\le k_0\le n)$ რიცხვი და განვიხილოთ $D_\varepsilon E_{k_0}$ დანაწილების ნებისმიერი $\{E_{k_0}^{1j_{k_0}}\}_{j_{k_0}=1}^{l}$ გაგრძელება. მაშინ ცხადია, რომ შემდეგი ორი $\left\{\{E_{k_0}^{1j_{k_0}}\}_{j=1}^{l},\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}\,(k=1,...,n;k\ne k_0)\right\}$ და $\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}\,(k=1,...,n)$ დანაწილება წარმოადგენს $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილების გაგრძელებას. ამიტომ (I.1.1) უტოლობის თანახმად, $\mu(E_{k_0}^{1j_{k_0}})\,(j_{k_0}=1,...,l)$, $\mu(E_k^{j_k})\,(j_k=1,...,m_k;k=1,...,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, გვაქვს

$$\left|\sum_{j_{k_0}=1}^{l}\mu(E_{k_0}^{1j_{k_0}})+\sum_{\substack{k=1\\k\ne k_0}}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(E_k^{j_k})-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(E_k^{j_k})\right|<\varepsilon.$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\left|\sum_{j_{k_0}=1}^{l}\mu(E_{k_0}^{1j_{k_0}})-\sum_{j_{k_0}=1}^{m_{k_0}}\mu(E_{k_0}^{j_{k_0}})\right|<\varepsilon.$$

რაც 1.1 თეორემის თანახმად ნიშნავს

$$(\mathfrak{N})\int_{E_{k_0}}\mu(dE_{k_0})$$

ინტეგრალის არსებობას.

რადგანაც $k_0\,(1\le k_0\le n)$ რიცხვი ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი k სათვის $(k=1,...,n)$ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)$$

ინტეგრალი. რაც თავის მხრივ ნიშნავს, რომ აღებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $E_k\,(k=1,...,n)$ სიმრავლის ისეთი $D'_\varepsilon E_k\succ D_\varepsilon E_k$ დანაწილება, რომ

მისი ნებისმიერი $\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^{j_k})$ $(j_k = 1,\dots,m_k)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(E_k^{j_k})-(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)\right|<\frac{\varepsilon}{n}\ \ (k=1,\dots,n)$$

უტოლობას.

$D'_\varepsilon \mathrm{E}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $D'_\varepsilon E_1,\dots,D'_\varepsilon E_n$ დანაწილებათა $\bigcup_{k=1}^{n} D'_\varepsilon E_k$ გაერთიანება. მაშინ ცხადია, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}(k=1,\dots,n)$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^{j_k})(j_k=1,\dots,m_k;k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის გვექნება

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(E_k^{j_k})-\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)\right|<\varepsilon .$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობის სამართლიანობა.

1.5. ვთქვათ, $D\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ არის E სიმრავლის რაიმე დანაწილება და ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,n)$ $\mu\in[\mathrm{K}_k;E_k;\mathfrak{N}]$. მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)$$

ტოლობას.

დამტკიცება. რადგანაც პირობის თანახმად $\mu\in[\mathrm{K}_k;E_k;\mathfrak{N}](k=1,\dots,n)$, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $E_k\,(k=1,\dots,n)$ სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon E_k$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^{j_k})$ $(j_k=1,\dots,m_k)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(E_k^{j_k})-(\mathfrak{N})\int_{E_k}\mu(dE_k)\right|<\frac{\varepsilon}{n}\ \ (k=1,\dots,n)$$

უტოლობას.

$D_\varepsilon \mathrm{E}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $D_\varepsilon E_1,\dots,D_\varepsilon E_n$ დანაწილებათა $\bigcup_{k=1}^{n} D_\varepsilon E_k$

გაერთიანება. მაშინ მისი ნებისმიერი $\left\{E_k^{j_k}\right\}_{j_k=1}^{m_k}(k=1,\dots,n)$ გაგრძელებისათვის და $\mu\left(E_k^{j_k}\right)(j_k=1,\dots,m_k;k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu\left(E_k^{j_k}\right)-\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{R})\int_{E_k}\mu(dE_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu\left(E_k^{j_k}\right)-(\mathfrak{R})\int_{E_k}\mu(dE_k)\right|<\varepsilon .$$

რაც ნიშნავს

$$(\mathfrak{R})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალის არსებობას.

დასამტკიცებელი ტოლობა კი გამომდინარეობს 1.4 თეორემიდან.

თუ ყოველი $e\in\mathfrak{R}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის $\mu\in[\mathrm{K}_k;e;\mathfrak{R}]$, მაშინ

$$(\mathfrak{R})\int_{e}\mu(de)$$

ინტეგრალს, განხილულს როგორც $\mathfrak{R}\mathrm{E}$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის ფუნქციას, ეწოდება μ ფუნქციის ზოგადი განუსაზღვრელი ინტეგრალი e სიმრავლეზე $\mathfrak{R}$ კლასის მიმართ.

1.5 თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს

1.6. თუ $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{R}]$, მაშინ

$$(\mathfrak{R})\int_{e}\mu(de)$$

ინტეგრალი წარმოადგენს $\mathfrak{R}$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის სასრულ სასრულოდ-ადიტიურ ფუნქციას.

ვთქვათ, $\mathfrak{R}\mathrm{E}$ კლასზე განსაზღვრულია სიმრავლის ორი კომპლექსური მრავალსახა μ_1 და μ_2 ფუნქცია. $\mu=\mu_1+\mu_2$ ჯამის ქვეშ იგულისხმება $\mathfrak{R}$ კლასზე განსაზღვრული სიმრავლის ისეთი კომპლექსური მრავალსახა μ ფუნქცია, რომელიც ყოველ $\mathrm{E}\in\mathfrak{R}$ სიმრავლეზე ღებულობს ყველა p_1+p_2 მნიშვნელობას, სადაც $p_1\in\mu_1(\mathrm{E})$, $p_2\in\mu_2(\mathrm{E})$.

1.7. თუ $\mu_1,\mu_2\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{R}]$ და $\mu=\mu_1+\mu_2$, მაშინ $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{R}]$ და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{R})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=(\mathfrak{R})\int_{\mathrm{E}}\mu_1(d\mathrm{E})+(\mathfrak{R})\int_{\mathrm{E}}\mu_2(d\mathrm{E})$$

ტოლობას.

დამტკიცება. რადგანაც პირობის თანახმად $\mu_1, \mu_2 \in [\mathrm{K}_k, \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$ და $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu_1(E_k), \mu_2(E_k)(k = 1,...,n)$ მნიშვნელობათა ნების-მიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_1(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mu_1(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_2(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mu_2(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

უტოლობებს შესაბამისად.

მაშასადამე, $D_\varepsilon \mathrm{E}$ დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელები-სათვის და $\mu_1(E_k), \mu_2(E_k)(k = 1,...,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) - \left((\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mu_1(d\mathrm{E}) + (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mu_2(d\mathrm{E})\right)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_1(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mu_1(d\mathrm{E})\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_2(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mu_2(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობის სამართლიანობა.

1.8. თუ $\mu \in [\mathrm{K}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E}$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $\mathrm{E}_0 \in \mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლე, E_0 სიმრავლის $D_\varepsilon \mathrm{E}_0$ ინდუცირებული დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k^0\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^0)(k = 1,...,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k^0) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}_0} \mu(d\mathrm{E}_0)\right| < \varepsilon$$

უტოლობას.

დამტკიცება. პირობის თანახმად $\mu \in [\mathrm{K}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D'_\varepsilon \mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^1\}_{k=1}^{n_1}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^1)(k = 1,..,n_1)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu\left(E_k^1\right)-(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{I.1.2}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathrm{E}_0\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$, ამიტომ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D'\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $D'\mathrm{E}=\left\{E_0,E_k^2\right\}_{k=1}^{n_2}$. 1.3 თეორემის თანახმად $\mu\in\left[\mathrm{K}_k;E_k^2;\mathfrak{N}\right](k=1,..,n_2)$, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{n_2}$ რიცხვისათვის მოიძებნება $E_k^2(k=1,...,n_2)$ სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon''E_k^2$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{E_k^{2j}\right\}_{j=1}^{m_k}$ გაგრძელებისათვის და $\mu\left(E_k^{2j}\right)$ $(j=1,...,m_k)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის გვაქვს

$$\left|\sum_{j=1}^{m_k}\mu\left(E_k^{2j}\right)-(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}_k^2}\mu\left(d\mathrm{E}_k^2\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2n_2}\ (k=1,..,n_2). \tag{I.1.3}$$

განვიხილოთ $D_\varepsilon'E_k^2\ (k=1,...,n_2)$ ინდუცირებული დანაწილება. რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D_\varepsilon'E_k^2$ და $D_\varepsilon''E_k^2$ დანაწილებათა $D_\varepsilon E_k^2$ გაგრძელება. ცხადია, რომ E სიმრავლის $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომელიც $D_\varepsilon\mathrm{E}_0$ ინდუცირებული დანაწილების კომპონენტებთან ერთად შეიცავს $D_\varepsilon E_k^2\,(k=1,...,n_2)$ დანაწილებათა კომპონენტებს წარმოადგენს $D_\varepsilon'\mathrm{E}$ დანაწილების გაგრძელებას. ამიტომ მისი ნებისმიერი $\left\{E_i^0,E_k^j\right\}(i=1,...,n_1;$ $j=1,..m_k;k=1,...,n_2)$ გაგრძელებისათვის და $\mu\left(E_i^0\right)(i=1,...,n_1)$, $\mu\left(E_k^j\right)(j=1,...,m_k;$ $k=1,...,n_2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის (I.1.2) და (I.1.3) უტოლობებს ერთდროულად ექნება ადგილი. ამრიგად, $D_\varepsilon\mathrm{E}_0$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{E_i^0\right\}_{i=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu\left(E_i^0\right)(k=1,...,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu\left(E_k^0\right)-(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}_0}\mu(d\mathrm{E}_0)\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}\mu\left(E_k^0\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\mu\left(E_k^j\right)-(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}_0}\mu(d\mathrm{E}_0)-\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}_k^2}\mu\left(d\mathrm{E}_k^2\right)\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\mu\left(E_k^j\right)-\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}_k^2}\mu\left(d\mathrm{E}_k^2\right)\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}\mu\left(E_k^0\right)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}\mu\left(E_k^j\right)-(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{m_k}\mu\left(E_k^j\right)-(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}_k^2}\mu\left(d\mathrm{E}_k^2\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

1.9. თუ $\mu \in [\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E}$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $\mathrm{E}_0 \in \mathfrak{M}\mathrm{E}$ სიმრავლე, E_0 სიმრავლის $D_\varepsilon \mathrm{E}_0$ ინდუცირებული დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k^0\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^0)\,(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\mu(E_k^0)-(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}_0}\mu(d\mathrm{E}_0)\right|<\varepsilon \tag{I.1.4}$$

უტოლობას.

დამტკიცება. წინა თეორემის თანახმად, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E}$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $\mathrm{E}_0 \in \mathfrak{M}\mathrm{E}$ სიმრავლე, E_0 სიმრავლის $D_\varepsilon \mathrm{E}_0$ ინდუცირებული დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k^0\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^0)\,(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს (I.1.4) უტოლობას. საიდანაც ინტეგრალის სასრულოდ-ადიტიურობის თვისების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\mu(E_k^0)-(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}_k^0}\mu(d\mathrm{E}_k^0)\right)\right|<\varepsilon .$$

ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\mu(E_k^0)-(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}_k^0}\mu(d\mathrm{E}_k^0)\right|<4\varepsilon$$

უტოლობას.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს $D_\varepsilon \mathrm{E}_0$ ინდუცირებული დანაწილების ერთი მაინც ისეთი $\{E_k'\}_{k=1}^m$ გაგრძელება, რომ $\mu(E_k')\,(k=1,\dots,m)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\mu(E_k')-(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}_k'}\mu(d\mathrm{E}_k')\right|\geq 4\varepsilon$$

უტოლობას.

$E_1',\dots,E_m'$ სიმრავლეებიდან ავიღოთ ისეთი $E_1^1,\dots,E_{n_1}^1$ სიმრავლეები, რომ $\mu(E_k^1)\,(k=1,\dots,n_1)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი ჰქონდეს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\left(\mu\left(E_k^1\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_k^1}\mu\left(dE_k^1\right)\right)\right|\geq 2\varepsilon \tag{I.1.5}$$

უტოლობას. ვთქვათ, $E_1^2,...,E_{n_2}^2$ დარჩენილი სიმრავლეებია. რადგანაც $\mu\in\left[\mathbf{K}_k;E_j^2;\mathfrak{N}\right](j=1,...,n_2)$, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{n_2}$ რიცხვისათვის მოიძებნება $E_j^2(j=1,...,n_2)$ სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon' E_j^2$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{E_j^{2k}\right\}_{k=1}^{m_j}$ გაგრძელებისათვის და $\mu\left(E_j^{2k}\right)(k=1,...,m_j)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{m_j}\mu\left(E_j^{2k}\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_j^{2k}}\mu\left(dE_j^{2k}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{n_2}\ (j=1,...,n_2) \tag{I.1.6}$$

უტოლობას.

ცხადია, რომ $\left\{E_k^1\right\}_{k=1}^{n_1}$ და $D_\varepsilon' E_j^2(j=1,...,n_2)$ დანაწილებათა გაერთიანება წარმოადგენს $D_\varepsilon E_0$ დანაწილების გაგრძელებას. ამიტომ ერთის მხრივ, (I.1.4) უტოლობის თანახმად, μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, გვაქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\mu\left(E_k^1\right)+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{m_j}\mu\left(E_j^{2k}\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_0}\mu\left(dE_0\right)\right|<\varepsilon, \tag{I.1.7}$$

და მეორეს მხრივ, (I.1.5) და (I.1.6) უტოლობათა გათვალისწინებით, μ ფუნქციის მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\mu\left(E_k^1\right)+\sum_{j=1}^{n_2}\sum_{k=1}^{m_j}\mu\left(E_j^{2k}\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_0}\mu\left(dE_0\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\mu\left(E_k^1\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_k^1}\mu\left(dE_k^1\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n_2}\left(\sum_{j=1}^{m_k}\mu\left(E_j^{2k}\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_k^2}\mu\left(dE_k^2\right)\right)\right|\geq\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\mu\left(E_k^1\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_k^1}\mu\left(dE_k^1\right)\right)\right|-$$

$$-\sum_{k=1}^{n_2}\left|\sum_{j=1}^{m_k}\mu\left(E_j^{2k}\right)-(\mathfrak{N})\int\limits_{E_k^2}\mu\left(dE_k^2\right)\right|\geq\varepsilon.$$

რაც ეწინააღმდეგება (I.1.7) უტოლობას.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასია და $\mu\in[\mathbf{D}_k;E;\mathfrak{A}]$. ამბობენ, რომ μ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $\left\{E_k\right\}_{k=1}^{n}$ დანა-

წილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $e \in \mathfrak{A}E_k \; (k=1,\dots,n)$ სიმრავლე, $\mu(e)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$|\mu(e)| < \varepsilon$$

უტოლობას.

ვთქვათ, f არის $\mathrm{E} \in \mathfrak{A}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ელემენტის კომპლექსური ფუნქცია. სიმრავლის მრავალსახა $f(e)$ ფუნქციას, რომელიც ყოველ $e \subset \mathrm{E}$ სიმრავლეზე ღებულობს ყველა $f(x)$ მნიშვნელობას, როცა x გაირბენს e სიმრავლეს, ეწოდება f ფუნქციის შესაბამისი სიმრავლის ფუნქცია [14, გვ.654-696].

ვთქვათ, f არის $[0,1)$ ნახევარსეგმენტზე განსაზღვრული ელემენტის შემოსაზღვრული ფუნქცია და P არის ყველა $[\alpha,\beta)(0 \le \alpha < \beta < 1)$ სახის ნახევარსეგმენტისაგან შედგენილი ნახევარრგოლი. $\mu([\alpha,\beta))$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $[\alpha,\beta)$ ნახევარსეგმენტის მრავალსახა

$$\mu([\alpha,\beta)) = f([\alpha,\beta))(\beta-\alpha)$$

ფუნქცია, სადაც $f([\alpha,\beta))$ არის f ფუნქციის შესაბამისი სიმრავლის მრავალსახა ფუნქცია.

ცხადია, რომ სიმრავლის მრავალსახა $\mu([\alpha,\beta))$ ფუნქცია უწყვეტია $[0,1)$ ნახევარსეგმენტზე P ნახევარრგოლის მიმართ.

1.10. თუ $\mu \in [\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ და μ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ, მაშინ

$$(\mathfrak{N})\int_e \mu(de)\;(e \subset \mathrm{E})$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალი უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ.

დამტკიცება. რადგანაც $\mu \in [\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, ამიტომ 1.9 თეორემის ძალით ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D'_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E'_k\}_{k=1}^{n_1}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E'_k)(k=1,\dots,n_1)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n_1}\left|\mu(E'_k) - (\mathfrak{N})\int_{E'_k}\mu(dE'_k)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

უტოლობას.

მეორეს მხრივ, პირობის თანახმად μ ფუნქცია უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{2}$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D''_\varepsilon \mathrm{E} = \{E''_k\}_{k=1}^{n_2}$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $e \in \mathfrak{N}E''_k$ $(k = 1,...,n_2)$ სიმრავლე, $\mu(e)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$|\mu(e)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D'_\varepsilon \mathrm{E}$ და $D''_\varepsilon \mathrm{E}$ დანაწილებათა $D_\varepsilon \mathrm{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელება. მაშინ ყოველი $e \in \mathfrak{N}E_k$ $(k = 1,...,n)$ სიმრავლისათვის და $\mu(e)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის გვექნება

$$\left|\mu(e) - (\mathfrak{N})\int_e \mu(de)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\mu(e)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $e \in \mathfrak{N}E_k$ $(k = 1,...,n)$ სიმრავლისათვის

$$\left|(\mathfrak{N})\int_e \mu(de)\right| < \varepsilon.$$

1.11. $\mu \in [\mathrm{K}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathrm{Re}\,\mu \in [\mathrm{K}; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$, $\mathrm{Im}\,\mu \in [\mathrm{K}; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$ და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mu(d\mathrm{E}) = (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mathrm{Re}\,\mu(d\mathrm{E}) + i \cdot (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \mathrm{Im}\,\mu(d\mathrm{E})$$

ტოლობას.

დამტკიცება. აუცილებლობა მარტივად მტკიცდება 1.1 თეორემის გამოყენებით, საკმარისობა კი – ცხადია.

§2. დიფერენციალურად ეკვივალენტური ფუნქციები.

ვთქვათ, $\mu_1,\mu_2 \in [\mathrm{D_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. ამბობენ, რომ μ_1 და μ_2 ფუნქციები დიფერენციალურად ეკვივალენტურია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu_1(E_k),\mu_2(E_k)(k=1,...,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}|\mu_1(E_k)-\mu_2(E_k)|<\varepsilon$$

უტოლობას ანუ, რაც იგივეა

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}|\mu_1-\mu_2|(d\mathrm{E})=0\,.$$

შემდეგი ორი თეორემა ნამდვილი ფუნქციებისათვის, სიმრავლეთა მულტიპლიკაციური კლასის შემთხვევაში, დამტკიცებულია კოლმოგოროვის მიერ [14, გვ.654-696] (ასევე იხ.[2, გვ.200],[20, გვ.283]). სიმრავლეთა ნორმალური კლასის შემთხვევაში ანალოგიური თეორემების დამტკიცება მსგავსია.

2.1. ვთქვათ, $\mu_1,\mu_2 \in [\mathrm{D_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. იმისათვის, რომ μ_1,μ_2 ფუნქციები იყვნენ დიფერენციალურად ეკვივალენტური $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $e\subset\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის ადგილი ჰქონდეს

$$(\mathfrak{N})\int_{e}(\mu_1-\mu_2)(de)=0$$

ტოლობას.

თუ, $F\in[\mathrm{D_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ ფუნქცია დიფერენციალურად ეკვივალენტურია ნულის $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე, მაშინ ვიტყვით, რომ F ეკუთვნის $[\mathrm{K_{0k}};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს.

2.2. ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{D_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_0\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $\mu\in[\mathrm{D_k};\mathfrak{N}D_0\mathrm{E}]$. $\mu\in[\mathrm{K_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე განსაზღვრული ისეთი სასრული სასრულოდადიტიური A ფუნქცია, რომ $\mu-\mathrm{A}\in[\mathrm{D_k};\mathfrak{N}D_0\mathrm{E}],\mu-\mathrm{A}\in[\mathrm{K_{0k}};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. ამასთან, თუ ასეთი A ფუნქცია არსებობს, მაშინ

$$\mathrm{A}(e)=(\mathfrak{N})\int_{e}\mu(de)$$

ყოველი $e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის.

მოვიყვანოთ დიფერენციალურად ნულის ეკვივალენტურ ფუნქციათა მაგალითები.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ არის $(0,1)$ ინტერვალის ყველა ლებეგის აზრით ზომადი ქვესიმრავლის კლასი, $\mathrm{E}\in\mathfrak{A}$ და μ არის ლებეგის ზომა. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\mu^{1+\sigma}$ ფუნქცია, სადაც $\sigma>0$, დიფერენციალურად ეკვივალენტურია ნულის $\mathfrak{A}\mathrm{E}$ კლასზე.

ვთქვათ, ახლა, $\mathfrak{A}$ სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასია, $\mathrm{E}\in\mathfrak{A}$ და μ არის $\mathfrak{A}\mathrm{E}$ კლასზე დიფერენციალურად განსაზღვრული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქცია. ვიტყვით, რომ μ ეკუთვნის $[\mathbf{V}_0\mathbf{B}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$ კლასს, თუ არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი და E სიმრავლის ისეთი $D_M\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)$ $(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|\le M$$

უტოლობას.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f\cdot\mu$ ფუნქცია, სადაც f უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ და $\mu\in[\mathbf{V}_0\mathbf{B}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$, დიფერენციალურად ეკვივალენტურია ნულის $\mathfrak{A}\mathrm{E}$ კლასზე.

2.3. ვთქვათ, $\mu\in[\mathbf{D}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. იმისათვის, რომ $\mu\in[\mathbf{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, აუცილებელია და საკმარისი, არსებობდეს ისეთი ცალსახა $R\in[\mathbf{K}_{0k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ ფუნქცია, რომ ყოველი $e\in\mathfrak{N}D_0\mathrm{E}$ სიმრავლის ნებისმიერი $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილებისათვის და $\mu(e)$, $\mu(e_k)(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი ჰქონდეს

$$\left|\mu(e)-\sum_{k=1}^{n}\mu(e_k)\right|\le R(e)+\sum_{k=1}^{n}R(e_k)$$

უტოლობას.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\mu\in[\mathbf{D}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ 2.2 თეორემის თანახმად

$$R_1(e)=\mu(e)-(\mathfrak{N})\int_e\mu(de)$$

ფუნქცია ეკუთვნის $[\mathbf{K}_{0k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$R(e)=\sup\{|R_1(e)|\},$$

მაშინ დიფერენციალურად ეკვივალენტურობის და ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად $R \in [\mathrm{K}_0;\mathrm{E};\mathfrak{M}]$.

ვთქვათ, $e \in \mathfrak{M}D_0\mathrm{E}$ და $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ არის მისი რაიმე დანაწილება. $\mu(e)$ და $\mu(e_k)(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის გვაქვს

$$\left|\mu(e)-\sum_{k=1}^{n}\mu(e_k)\right| \le \left|\mu(e)-(\mathfrak{M})\int_{e}\mu(de)\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|\mu(e_k)-(\mathfrak{M})\int_{e_k}\mu(de_k)\right|=$$

$$=|R_1(e)|+\sum_{k=1}^{n}|R_1(e_k)| \le \sup\{|R_1(e)|\}+\sum_{k=1}^{n}\sup\{|R_1(e_k)|\}=R(e)+\sum_{k=1}^{n}R(e_k).$$

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. რადგანაც $R \in [\mathrm{K}_0;\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ $(k=1,\dots,n)$ გაგრძელებისათვის და R ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\left|R\left(E_k^{j_k}\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას. ამიტომ $\mu(E_k)(k=1,\dots,n)$ და $\mu\left(E_k^{j_k}\right)(j=1,\dots,m_k;\, k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu\left(E_k^{j_k}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\mu(E_k)-\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu\left(E_k^{j_k}\right)\right| \le \sum_{k=1}^{n}|R(E_k)|+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\left|R\left(E_k^{j_k}\right)\right|<\varepsilon,$$

საიდანაც 1.2 თეორემის თანახმად გამომდინარეობს, რომ $\mu \in [\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{M}]$.

2.4. იმისათვის, რომ $\mu \in [\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნებოდეს E ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ $(k=1,\dots,n)$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)$ $(k=1,\dots,n)$, $\mu\left(E_k^{j_k}\right)(j_k=1,\dots,m_k;\, k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი ჰქონდეს

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\mu(E_k)-\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu\left(E_k^{j_k}\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

დამტკიცება. აუცილებლობა უშუალოდ გამომდინარეობს 2.3 თეორემიდან, ხოლო საკმარისობა კი – 1.2 თეორემიდან.

§3. ზოგადი ზედა და ქვედა ინტეგრალები და მათი თვისებები.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, $E \in \mathfrak{N}$ და μ არის $\mathfrak{N}E$ კლასზე დიფერენციალურად განსაზღვრული სიმრავლის სასრული ნამდვილი მრავალსახა ფუნქცია. რადგანაც μ ფუნქცია დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}E$ კლასზე, ამიტომ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D_0E დანაწილება, რომ $\mu \in [D;\mathfrak{N}D_0E]$. განვიხილოთ D_0E დანაწილების რაიმე $D'E = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელება და მის მიმართ, $\mu(E_k)(k=1,...,n)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის, შევადგინოთ μ ფუნქციის

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$$

რიმანის ჯამი. μ ფუნქციის ყველა რიმანის ჯამის სიმრავლე, რომელიც შეესაბამება $\mu(E_k)(k=1,...,n)$ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო არჩევას აღვნიშნოთ $S(\mu;D'E)$ სიმბოლოთი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$T(\mu;DE) = \bigcup\{S(\mu;DE); DE \succ D'E, DE \in \Sigma(E)\mathfrak{N}\}.$$

რადგანაც $D_2E \succ D_1E$ დამოკიდებულებას მოსდევს $T(\mu;D_1E) \supset T(\mu;D_2E)$ დამოკიდებულება, ამიტომ $\sup\{T(\mu;DE)\}(DE \in \Sigma(E)\mathfrak{N})$ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა არაზრდად განზოგადებულ მიმდევრობას, ხოლო $\inf\{T(\mu;DE)\}$ $(DE \in \Sigma(E)\mathfrak{N})$ კი – ნამდვილ რიცხვთა არაკლებად განზოგადებულ მიმდევრობას, ამიტომ არსებობს, სასრული ან უსასრულო,

$$\lim_{DE}\sup\{T(\mu;DE)\}, \qquad \lim_{DE}\inf\{T(\mu;DE)\}$$

ზღვრები. ამ ზღვრებს ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად ზედა და ქვედა ინტეგრალს E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და მათ შესაბამისად აღვნიშნავთ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_E}\mu(dE), \; (\mathfrak{N})\underline{\int_E}\mu(dE)$$

სიმბოლოთი.

თუ ეს ინტეგრალები არსებობენ და ისინი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მათ საერთო, სასრულ ან უსასრულო, მნიშვნელობას ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად არასაკუთრივ ინტეგრალს E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და, ისევე როგორც §1-ში, მას აღვნიშნავთ

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E}) \tag{I.3.1}$$

სიმბოლოთი.

თუ μ ფუნქციის ზოგადი არასაკუთრივი ინტეგრალი E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ არსებობს, მაშინ ვიტყვით, რომ μ ფუნქცია ეკუთვნის $[\mathrm{K}_{\mathrm{N}};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს.

თუ (I.3.1) ზოგადი არასაკუთრივი ინტეგრალი არსებობს და არის სასრული, მაშინ ინტეგრალის ასეთი განსაზღვრა ემთხვევა ნამდვილი ფუნქციებისათვის §1-ში მოყვანილ ინტეგრალის განსაზღვრას.

განსაზღვრის თანახმად $\mu\in[\mathrm{K}_{\mathrm{N}};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ და

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=+\infty \text{ შესაბამისად } (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=-\infty,$$

თუ ყოველი $M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_M\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)(k=1,\ldots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)>M \text{ შესაბამისად } \sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)<-M$$

უტოლობას.

ზოგადი ზედა და ქვედა ინტეგრალების განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი:

3.1. $$(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})\le(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E});$$

3.2. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})>-\infty \text{ შესაბამისად } (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})<+\infty,$$

მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)$ $(k=1,\ldots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)<(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})+\varepsilon \quad \text{შესაბამისად} \quad \sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)+\varepsilon>(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})$$

უტოლობას.

3.3. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})<+\infty,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})>-\infty,$$

მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი და E სიმრავლის $D'\mathrm{E}$ დანაწილება, მოიძებნება $D'\mathrm{E}$ დანაწილების ისეთი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელება, რომ $\mu(E_k)\,(k=1,\ldots,n)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})<\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)+\varepsilon,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})+\varepsilon>\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)$$

უტოლობებს შესაბამისად.

3.4. თუ რომელიმე $\mathrm{E}_1\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}_1}}\mu(d\mathrm{E}_1)=+\infty,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}_1}}\mu(d\mathrm{E}_1)=-\infty,$$

მაშინ შესაბამისად

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=+\infty,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=-\infty.$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $D\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}$ დანაწილებისათვის

$$\sup T(\mu;D\mathrm{E})=+\infty.$$

ვთქვათ, $D\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^n$ არის E სიმრავლის რაიმე დანაწილება. რადგანაც $\mathrm{E}_1\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$, ამიტომ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D'\mathrm{E}$ დანაწილება, რომლის კომპონენტსაც წარმოადგენს E_1 სიმრავლე. რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D\mathrm{E}$ და $D'\mathrm{E}$ დანაწილებათა $D_1\mathrm{E}=\{E_k^1\}_{k=1}^m$ გაგრძელება. $D_1\mathrm{E}$ დანაწილებიდან ამოვაგდოთ $D_1\mathrm{E}_1$ ინდუცირებული დანაწილების კომპონენტები. ვთქვათ, დარჩენილი დანაწილებაა $\{E_k^{11}\}_{k=1}^{m_1}$ და $\mu(E_k^{11})\,(k=1,\ldots,m_1)$ მნიშვნელობები ნებისმიერადაა არჩეული. რადგანაც პირობის თანახმად

$$\sup T(\mu;D_1\mathrm{E}_1)=+\infty,$$

ამიტომ ნებისმიერი $M>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_M\mathrm{E}_1=\{E_k^{12}\}_{k=1}^{m_2}\succ$ $\succ D_1\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $\mu(E_k^{12})(k=1,\ldots,m_2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{m_1}\mu\left(E_k^{12}\right)>M-\sum_{k=1}^{m_1}\mu\left(E_k^{11}\right)$$

უტოლობას ან, რაც იგივეა

$$\sum_{k=1}^{m_1}\mu\left(E_k^{12}\right)+\sum_{k=1}^{m_1}\mu\left(E_k^{11}\right)>M .$$

საიდანაც $M>0$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო ვღებულობთ

$$\sup T(\mu;D_1\mathrm{E})=+\infty .$$

აქედან კი მით უფრო გვექნება

$$\sup T(\mu;D\mathrm{E})=+\infty .$$

მეორე ნაწილი მტკიცდება ანალოგიურად.

3.5. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})<+\infty,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})>-\infty ,$$

მაშინ შესაბამისად ყოველი $\mathrm{E}_1\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}_1}}\mu(d\mathrm{E}_1)<+\infty,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}_1}}\mu(d\mathrm{E}_1)>-\infty .$$

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 3.4 თეორემიდან.

ვთქვათ, $\mathrm{E}_0\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$. მაშინ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_0\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $D_0\mathrm{E}=\{\mathrm{E}_0,E_1,\dots,E_n\}$.

3.6. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}_0}}\mu(d\mathrm{E}_0)=-\infty,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}_0}}\mu(d\mathrm{E}_0)=+\infty$$

და

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k}}\mu(dE_k),\ (\mathfrak{N})\underline{\int_{E_k}}\mu(dE_k)\ (k=1,\dots,n)$$

ინტეგრალებიდან შესაბამისად არცერთი არ ღებულობს $+\infty,-\infty$-ის ტოლ მნიშვნელობებს, მაშინ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=-\infty,\quad (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=+\infty .$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემის პირველი ნაწილი. მეორე ნაწილი მტკიცდება ანალოგიურად. ვთქვათ,

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E}}\mu(dE)=-\infty$$

და $E_1,...,E_n$ სიმრავლეებიდან რამდენიმე სიმრავლეზე

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k}}\mu(dE_k) \tag{I.3.2}$$

ზედა ინტეგრალი ღებულობს $-\infty$-ის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო დანარჩენ სიმრავლეებზე კი ღებულობს სასრულ მნიშვნელობას. ვთქვათ, $E_k^1\ (k=1,...,n_1)$ ის სიმრავლეებია რომლებზეც (I.3.2) ინტეგრალი ღებულობს $-\infty$-ის ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო $E_k^2\ (k=1,...,n_1)$ კი – სხვა დანარჩენი სიმრავლეებია. მაშინ ერთის მხრივ, ყოველი $M_1>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $E_k^1(k=1,...,n_1)$ სიმრავლის ისეთი $D_{M_1}E_k^1$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^{1j_k}\}(j_k=1,...,m_k^1)$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^{1j_k})(j_k=1,...,m_k^1)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$\sum_{j_k=1}^{m_k^1}\mu(E_k^{1j_k})<\frac{M_1}{n_1}\ (k=1,...,n_1) \tag{I.3.3}$$

უტოლობას.

მეორეს მხრივ, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $E_k^2\ (k=1,...,n_2)$ სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon E_k^2$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^{2j_k}\}(j_k=1,...,m_k^2)$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^{2j_k})(j_k=1,...,m_k^2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$\sum_{j_k=1}^{m_k^2}\mu(E_k^{2j_k})<(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k^2}}\mu(dE_k^2)+\frac{\varepsilon}{n_2}\ (k=1,...,n_2) \tag{I.3.4}$$

უტოლობას.

რადგანაც პირობის თანამად

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E}}\mu(dE)=-\infty,$$

ამიტომ ყოველი $M_2>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E_0 სიმრავლის ისეთი $D_{M_2}E_0$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^0\}(k=1,...,m)$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^0)(k=1,...,m)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{m}\mu\left(E_k^0\right)<-M_2+M_1-\sum_{k=1}^{n_2}(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k^2}}\mu\left(dE_k^2\right)-\varepsilon \tag{I.3.5}$$

უტოლობას.

$D_{\varepsilon M_1 M_2}\mathrm{E}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $D_{M_2}\mathrm{E}_0, D_{M_1}E_k^1(k=1,\dots,n_1)$ და $D_\varepsilon E_k^2$ $(k=1,\dots,n_2)$ დანაწილებათა გაერთიანება. მაშინ (I.3.3), (I.3.4) და (I.3.5) უტოლობათა გათვალისწინებით, $D_{\varepsilon M_1 M_2}\mathrm{E}$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{E_k^0, E_{k_1}^{1 i_{k_1}}, E_{k_2}^{2 j_{k_2}}\right\}$ $\left(k=1,\dots,q; i_{k_1}=1,\dots,m_{k_1}^1;\ k_1=1,\dots,n_1; j_{k_2}=1,\dots,m_{k_2}^2; k_2=1,\dots,n_2\right)$ გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\sum_{k=1}^{m}\mu\left(E_k^0\right)+\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{i_{k_1}=1}^{m_{k_1}^1}\mu\left(E_{k_1}^{1 i_{k_1}}\right)+\sum_{k_2=1}^{n_2}\sum_{j_{k_2}=1}^{m_{k_2}^2}\mu\left(E_{k_2}^{2 j_{k_2}}\right)<-M_2.$$

საიდანაც $M_2>0$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო გვაქვს

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=-\infty.$$

როგორც ამას 3.4 თეორემა გვიჩვენებს მოთხოვნა იმისა, რომ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k}}\mu(dE_k),\ (\mathfrak{N})\underline{\int_{E_k}}\mu(dE_k)\ (k=1,\dots,n)$$

ინტეგრალები შესაბამისად არ ღებულობდეს $+\infty,-\infty$-ის ტოლ მნიშვნელობებს არის აუცილებელი.

ვაჩვენოთ, ახლა, რომ შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს შემთხვევას, როცა $\mathrm{E}=\mathrm{E}_1\cup\mathrm{E}_2$, $\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2=\varnothing$ და

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}_1}}\mu(d\mathrm{E}_1)=-\infty,\ (\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}_2}}\mu(d\mathrm{E}_2)=+\infty,$$

მაშინ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=+\infty.$$

ვთქვათ, $\mathrm{E}=\{\dots,-n,\dots,-1,0,1,\dots,n,\dots\}$, E_1 იყოს ყველა უარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო $\mathrm{E}_2=\{0,1,2,\dots\}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\overline{\mathrm{E}}_n=\{-n,-(n+1),\dots\}$ და $\mathrm{E}_n=\{n,n+1,\dots\}$. ვთქვათ, $\mu\left(\overline{\mathrm{E}}_n\right)=-n$, $\mu\left(\mathrm{E}_n\right)=n$ და $\mu=0$ სხვა შემთხვევაში. სიმრავლეთა ნორმალურ $\mathfrak{N}$ კლასად ავიღოთ კლასი, რომელიც შედგება ყველა სასრული სიმრავლისაგან და ყველა იმ უსასრულო სიმრავლისაგან, რომელსაც გააჩნია სასრული დამატება. ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_1}}\mu(dE_1)=-\infty,\ (\mathfrak{N})\overline{\int_{E_2}}\mu(dE_2)=+\infty,$$

და

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=+\infty.$$

3.7. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E}),\ \ (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალები სასრულია, მაშინ ისინი სასრულია ყოველი $e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 3.5 და 3.6 თეორემებიდან.

3.8. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de),\ \ (\mathfrak{N})\underline{\int_{e}}\mu(de) \tag{I.3.6}$$

ინტეგრალები $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე უსასრულო მნიშვნელობებიდან ღებულობენ მხოლოდ ერთს, მაშინ ისინი წარმოადგენენ $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის სასრულოდ-ადიტიურ ფუნქციებს. ამასთან, თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E}),\ \ (\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალები სასრულია, მაშინ (I.3.6) ინტეგრალები წარმოადგენენ $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის სასრულ სასრულოდ-ადიტიურ ფუნქციებს.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ ზედა ინტეგრალის ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურობა.

ვთქვათ, $e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ და $De=\{e_k\}_{k=1}^{n}$ მისი რაიმე დანაწილებაა. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de)=+\infty,$$

მაშინ დასამტკიცებელი არაფერია. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de)<+\infty,$$

მაშინ 3.5 თეორემის ძალით ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,n)$

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_k}}\mu(de_k)<+\infty. \tag{I.3.7}$$

ამასთან, თუ (I.3.7) ინტეგრალებიდან რომელიმე ღებულობს $-\infty$-ის ტოლ

მნიშვნელობას, მაშინ დასამტკიცებელი ტოლობა ცხადია. ამიტომ დავუშვათ, რომ (I.3.7) ინტეგრალი ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,n)$ ღებულობს მხოლოდ სასრულ მნიშვნელობას. განვიხილოთ e სიმრავლის ნებისმიერი $D_1 e$ დანაწილება. 3.3 თეორემის ძალით, როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon>0$ რიცხვი და $D_1 e_k$ $(k=1,\dots,n)$ ინდუცირებული დანაწილება, მოიძებნება $D_1 e_k$ დანაწილების ისეთი $D_\varepsilon e_k=\{e_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ გაგრძელება, რომ $\mu(e_k^{j_k})\,(j_k=1,\dots,m_k)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_k}}\mu(de_k)<\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(e_k^{j_k})+\frac{\varepsilon}{n}\ (k=1,\dots,n)$$

უტოლობას.

$D_\varepsilon e$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $D_\varepsilon e_1,\dots,D_\varepsilon e_p$ დანაწილებათა $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_\varepsilon e_k$ გაერთიანება. მაშინ მივიღებთ

$$\sup T(\mu;D_\varepsilon e)+\varepsilon>(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_1}}\mu(de_1)+\dots+(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_n}}\mu(de_n).$$

რადგანაც $D_\varepsilon e\succ De$, ამიტომ მით უფრო გვექნება

$$\sup T(\mu;De)+\varepsilon>(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_1}}\mu(de_1)+\dots+(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_n}}\mu(de_n). \qquad (I.3.8)$$

რადგანაც (I.3 8) უტოლობა სამართლიანია ყოველი $De\in\Sigma(e)\mathfrak{N}$ დანაწილებისათვის, ამიტომ ვღებულობთ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de)\geq(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_1}}\mu(de_1)+\dots+(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_n}}\mu(de_n).$$

ზედა ინტეგრალის ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_k}}\mu(de_k)$$

ინტეგრალი სასრულია ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,n)$. მაშინ, $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება e_k სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon e_k$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{e_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(e_k^{j_k})\,(j_k=1,\dots,m_k)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(e_k^{j_k})<(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_k}}\mu(de_k)+\frac{\varepsilon}{n}\ (k=1,\dots,n)$$

უტოლობას.

აღვნიშნოთ $D_\varepsilon e$ სიმბოლოთი $D_\varepsilon e_1,\dots,D_\varepsilon e_p$ დანაწილებათა $\bigcup_{k=1}^{n} D_\varepsilon e_k$ გაერთიანება. მაშინ, მისი ნებისმიერი $\{e_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{m_k}$ $(k=1,\dots,n)$ გაგრძელებისათვის და $\mu(e_k^{j_k})$ $(j_k=1,\dots,m_k;\, k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, გვექნება

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_k=1}^{m_k}\mu(e_k^{j_k})<\sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_k}}\mu(de_k)+\varepsilon .$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de)\le(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_1}}\mu(de_1)+\dots+(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_n}}\mu(de_n).$$

ახლა, თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_k}}\mu(de_k)\ (k=1,\dots,n)$$

ინტეგრალებიდან რამოდენიმე ღებულობს სასრულ მნიშვნელობას, ხოლო სხვა დანარჩენი კი $+\infty$-ის ტოლ მნიშვნელობას ან, ყველა $+\infty$-ის ტოლია, მაშინ, 3.4 თეორემის ძალით, გვექნება

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de)=+\infty .$$

რაც კვლავ გვაძლევს სასურველ დამოკიდებულებას.

თუკი

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e_k}}\mu(de_k)\ (k=1,\dots,n)$$

ინტეგრალებიდან რამოდენიმე ღებულობს სასრულ მნიშვნელობას, ხოლო სხვა დანარჩენი კი $-\ -\infty$-ის ტოლ მნიშვნელობას ან, ყველა $-\infty$-ის ტოლია, მაშინ, 3.6 თეორემის ძალით, გვექნება

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de)=-\infty .$$

რაც კვლავ გვაძლევს სასურველ დამოკიდებულებას.

მეორე ნაწილი მტკიცდება ანალოგიურად.

3.9. ყოველი $\mathrm{E}\in\mathfrak{N}$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu_1(d\mathrm{E})+(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu_2(d\mathrm{E})\ge(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}(\mu_1+\mu_2)(d\mathrm{E}),$$

$$(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu_1(d\mathrm{E})+(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu_2(d\mathrm{E})\le(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}(\mu_1+\mu_2)(d\mathrm{E})$$

უტოლობებს, ყოველთვის როცა აზრი აქვს მარცხენა მხარეებს.

დამტკიცება. განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$S((\mu_1+\mu_2);DE)=\{(R_1+R_2):R_1\in S(\mu_1;DE),R_2\in S(\mu_2;DE)\},$$
$$T(\mu_1;DE)=\bigcup\{S(\mu_1;D_1\mathrm{E}):DE\prec D_1\mathrm{E},D_1\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{M}\},$$
$$T(\mu_2;DE)=\bigcup\{S(\mu_2;D_2\mathrm{E}):DE\prec D_2\mathrm{E},D_2\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{M}\},$$
$$T((\mu_1+\mu_2);DE)=\bigcup\{S((\mu_1+\mu_2);D_1\mathrm{E}):DE\prec D'\mathrm{E},D'\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{M}\}.$$

ცხადია, ადგილი აქვს დამოკიდებულებას

$$T((\mu_1+\mu_2);DE)\subset\{(R_1+R_2):R_1\in T(\mu_1;DE),R_2\in T(\mu_2;DE)\},$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\sup T((\mu_1+\mu_2);DE)\subset\sup T(\mu_1;DE)+\sup T(\mu_2;DE),$$

სადაც დაშვების თანახმად უტოლობის მარჯვენა მხარეს აზრი აქვს. ამ უტოლობაში ზღვარზე გადასვლის შედეგად მივიღებთ სასურველ უტოლობას.

მეორე ნაწილი მტკიცდება ანალოგიურად.

ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{D};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. მაშინ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_0\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ $\mu\in[\mathrm{D};\mathfrak{N}D_0\mathrm{E}]$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\overline{\mu}(e)=\sup\mu(e),\ \underline{\mu}(e)=\inf\mu(e)(e\in\mathfrak{N}D_0\mathrm{E}),$$

სადაც $\sup\mu(e)$ და $\inf\mu(e)$ შესაბამისად აღნიშნავენ $\mu(e)$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვარს. ცხადია, რომ $\overline{\mu},\underline{\mu}\in[\mathrm{D};\mathfrak{N}D_0\mathrm{E}]$.

3.10. ყოველი $\mathrm{E}\in\mathfrak{N}$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\underline{\mu}(d\mathrm{E}),\quad(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})=(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}\overline{\mu}(d\mathrm{E})$$

ტოლობებს.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირველი ტოლობა. რადგანაც ყოველი $e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის $\underline{\mu}(e)\le\mu(e)$, ამიტომ

$$(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\underline{\mu}(d\mathrm{E})\le(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E}).$$

დავამტკიცოთ შებრუნებული უტოლობა. ერთის მხრივ, 3.2 თეორემის თანახმად ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D'_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^1\}_{k=1}^{n_1}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^1)(k=1,\ldots,n_1)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\underline{\int_{\mathrm{E}}}\mu(d\mathrm{E})<\sum_{k=1}^{n_1}\mu(E_k^1)+\frac{\varepsilon}{4}\tag{I.3.9}$$

უტოლობას.

მეორე მხრივ, 3.3 თეორემის თანახმად, როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი და E სიმრავლის $D''_\varepsilon E$ დანაწილება, მოიძებნება $D_0 E$ დანაწილების ისეთი $\{E_k^2\}_{k=1}^{n_2}$ გაგრძელება, რომ $\underline{\mu}(E_k^2)(k = 1,\dots,n_2)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n_2} \underline{\mu}(E_k^2) < (\mathfrak{N})\underline{\int_E} \underline{\mu}(dE) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{I.3.10}$$

უტოლობას.

სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად, როგორიც არ უნდა იყოს $e \in E$ სიმრავლე, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\mu(e)$ მნიშვნელობა, რომ ადგილი აქვს

$$\mu(e) < \underline{\mu}(e) + \frac{\varepsilon}{4} \tag{I.3.11}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D'_\varepsilon E$ და $D''_\varepsilon E$ დანაწილებათა $D_\varepsilon E$ გაგრძელება. მაშინ (I.3.9), (I.3.10) და (I.3.11) უტოლობათა გათვალისწინებით, $D_\varepsilon E$ დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)(k = 1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$(\mathfrak{N})\underline{\int_E} \mu(dE) < \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) + \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{k=1}^{n} \underline{\mu}(E_k) + \frac{\varepsilon}{2} < (\mathfrak{N})\underline{\int_E} \underline{\mu}(dE) + \varepsilon .$$

საიდანაც $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის გამო გვაქვს

$$(\mathfrak{N})\underline{\int_E} \mu(dE) \le (\mathfrak{N})\underline{\int_E} \underline{\mu}(dE)$$

მეორე ტოლობა მტკიცდება ანალოგიურად.

3.10 თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი

3.11. $\mu \in [K_N; E; \mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(\mathfrak{N})\underline{\int_E} \underline{\mu}(dE) = (\mathfrak{N})\overline{\int_E} \overline{\mu}(dE).$$

ამასთან,

$$(\mathfrak{N})\int_E \mu(dE) = (\mathfrak{N})\underline{\int_E} \underline{\mu}(dE) = (\mathfrak{N})\overline{\int_E} \overline{\mu}(dE).$$

3.12. $\mu\in[K_N;E;\mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(\mathfrak{N})\int_E \underline{\mu}(dE)=(\mathfrak{N})\int_E \overline{\mu}(dE).$$

ამასთან,

$$(\mathfrak{N})\int_E \mu(dE)=(\mathfrak{N})\int_E \underline{\mu}(dE)=(\mathfrak{N})\int_E \overline{\mu}(dE).$$

ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასია და $E\in\mathfrak{A}$.

ვიტყვით, რომ კომპლექსური μ ფუნქცია დიფერენციალურად ცალსახაა $\mathfrak{A}E$ კლასზე, თუ არსებობს E სიმრავლის ისეთი DE დანაწილება, რომ μ ფუნქცია ცალსახაა $\mathfrak{A}DE$ კლასზე.

ვიტყვით, რომ კომპლექსური μ ფუნქცია დიფერენციალურად სასრულია $\mathfrak{A}E$ კლასზე, თუ არსებობს E სიმრავლის ისეთი DE დანაწილება, რომ μ ფუნქცია სასრულია $\mathfrak{A}DE$ კლასზე.

ცხადია, იმისათვის, რომ $\mathfrak{A}E$ კლასზე დიფერენციალურად ცალსახა μ ფუნქცია ეკუთნოდეს $[K_N;E;\mathfrak{A}]$ კლასს აუცილებელია, რომ ის იყოს დიფერენციალურად სასრული $\mathfrak{A}E$ კლასზე.

3.13. ვთქვათ, $\mu\in[D;E;\mathfrak{N}]$. იმისათვის, რომ $\mu\in[K;E;\mathfrak{N}]$ აუცილებელია, რომ $\mathfrak{N}E$ კლასზე განსაზღვრული დიფერენციალურად ცალსახა $\overline{\mu}$ და $\underline{\mu}$ ფუნქციები იყვნენ დიფერენციალურად სასრული $\mathfrak{N}E$ კლასზე.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 3.12 თეორემიდან ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის გათვალისწინებით.

შევნიშნოთ იქიდან, რომ $\mu\in[K_N;E;\mathfrak{N}]$ საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ $\mu\in[K_N;e;\mathfrak{N}]$ ყოველი $e\in\mathfrak{N}E$ სიმრავლისათვის.

მართლაც, ვთქვათ, $E=\{\dots,-n,\dots,-1,0,1,\dots,n,\dots\}$. შემოვიღოთ აღნიშვნები $E_n=\{n,n+1,\dots\}$, $\overline{E}_n=\{-n,-(n+1),\dots\}$ და μ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\mu(\overline{E}_n)=\begin{cases}1, \text{ თუ } n=2k,\\ 0, \text{ თუ } n=2k+1,\end{cases}$$

$\mu(E_n)=n$ და $\mu=0$ სხვა შემთხვევაში. დავუშვათ, $\mathfrak{N}$ არის სიმრავლეთა ნორმალური კლასი, რომელიც შედგება E სიმრავლის ყველა სასრული ქვესიმრავლისაგან და ყველა იმ უსასრულო ქვესიმრავლისაგან რომელსაც გააჩნია სასრული დამატება. ვთქვათ, $E_1=\{-1,-2,\dots\}$. ცხადია, რომ

$$(\mathfrak{N})\int_{E}\mu(dE)=+\infty .$$

მაგრამ

$$(\mathfrak{N})\int_{E_1}\mu(dE_1)$$

ინტეგრალი არ არსებობს.

3.14. ვთქვათ, $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ არის $e\in\mathfrak{N}E$ სიმრავლის რაიმე დანაწილება და $\mu\in[K_N;e_k;\mathfrak{N}]\,(k=1,...,n)$.

I. თუ

$$(\mathfrak{N})\int_{e_1}\mu(de_1)+...+(\mathfrak{N})\int_{e_n}\mu(de_n) \tag{I.3.12}$$

ჯამს აზრი აქვს, მაშინ $\mu\in[K_N;e;\mathfrak{N}]$ და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{e}\mu(de)=(\mathfrak{N})\int_{e_1}\mu(de_1)+...+(\mathfrak{N})\int_{e_n}\mu(de_n) \tag{I.3.13}$$

ტოლობას.

II. პირიქით, თუ $\mu\in[K_N;e;\mathfrak{N}]$, მაშინ (I.3.12) ჯამს აზრი აქვს და ადგილი აქვს (I.3.13) ტოლობას.

III. თუ $\mu\in[K_N;e;\mathfrak{N}]$ ყოველი $e\in\mathfrak{N}E$ სიმრავლისათვის, მაშინ

$$(\mathfrak{N})\int_{e}\mu(de)$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს $\mathfrak{N}E$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის სასრულოდ-ადიტიურ ფუნქციას.

ეს თეორემა მტკიცდება 3.4 და 3.6 თეორემების გამოყენებით.

3.15. ვთქვათ, $\mu_1,\mu_2\in[K_N;E;\mathfrak{N}]$ და c_1,c_2 ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. თუ

$$c_1\cdot(\mathfrak{N})\int_{E}\mu_1(dE)+c_2\cdot(\mathfrak{N})\int_{E}\mu_2(dE)$$

ჯამს აქვს აზრი, მაშინ $c_1\cdot\mu_1+c_2\cdot\mu_2\in[K_N;E;\mathfrak{N}]$ და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{E}(c_1\cdot\mu_1+c_2\cdot\mu_2)(dE)=c_1\cdot(\mathfrak{N})\int_{E}\mu_1(dE)+c_2\cdot(\mathfrak{N})\int_{E}\mu_2(dE)$$

ტოლობას.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 3.9 თეორემიდან.

მოვიყვანოთ $\mu\in[K_N;E;\mathfrak{N}]$ ფუნქციათა მნიშვნელოვანი კლასი.

ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{D};\mathrm{E};\mathfrak{A}]$. ვიტყვით, რომ μ ფუნქცია დიფერენციალურად ზემოდან (ქვემოდან) სასრულოდ-ნახევრადადიტიურია $\mathfrak{A}\mathrm{E}$ კლასზე, თუ არსებობს E სიმრავლის ისეთი $D\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ μ ფუნქცია დიფერენციალურად სასრულოდ-ნახევრადადიტიურია $\mathfrak{A}D\mathrm{E}$ კლასზე ზემოდან (ქვემოდან).

3.16. თუ μ ფუნქცია დიფერენციალურად ზემოდან, შესაბამისად ქვემოდან, სასრულოდ-ნახევრადადიტიურია $\mathfrak{M}\mathrm{E}$ კლასზე, მაშინ $\mu\in[\mathrm{K}_{\mathrm{N}};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$ და შესაბამისად ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=\inf\left\{\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k):D\mathrm{E}\succ D_0\mathrm{E}\right\}\ (D\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{M}),$$

$$(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k):D\mathrm{E}\succ D_0\mathrm{E}\right\}\ (D\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{M})$$

ტოლობებს, სადაც $D_0\mathrm{E}$ არის μ ფუნქცია დიფერენციალურად ზემოდან, შესაბამისად ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურობის განსაზღვრაში შემავალი დანაწილება.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვრის, ზუსტი ქვედა საზღვრის და დიფერენციალურად ზემოდან, დიფერენციალურად ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურობის განსაზღვრებებიდან.

§4. სიმრავლის ფუნქციის ვარიაცია.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}$ სიმრავლეთა რაიმე არაცარიელი კლასია, $E \in \mathfrak{A}$ და μ არის $\mathfrak{A}E$ კლასზე განსაზღვრული სიმრავლის სასრული კომპლექსური მრავალსახა ფუნქცია. განვიხილოთ E სიმრავლის რაიმე $DE = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება და $\mu(E_k)\,(k = 1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის შევადგინოთ

$$\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|$$

ჯამი.

μ ფუნქციის ვარიაცია E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ ეწოდება

$$\sup\left\{\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|\right\}\right\}$$

რიცხვს, სადაც შიგა ზუსტი ზედა საზღვარი აღებულია $\mu(E_k)(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო არჩევის მიმართ, ხოლო გარე ზუსტი ზედა საზღვარი კი – E სიმრავლის ყველა $DE \in \Sigma(E)\mathfrak{A}$ დანაწილების მიმართ და მას აღნიშნავენ $V(\mu;E;\mathfrak{A})$ სიმბოლოთი.

თუ

$$V(\mu;E;\mathfrak{A}) < +\infty,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ μ ფუნქციას E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ გააჩნია სასრული ვარიაცია და დავწერთ $\mu \in [\mathbf{VB}_k;E;\mathfrak{A}]$.

ცხადია, რომ თუ $\mu \in [\mathbf{VB}_k;E;\mathfrak{A}]$, მაშინ ყოველი $e \in \mathfrak{A}E$ სიმრავლისათვის $\mu \in [\mathbf{VB}_k;e;\mathfrak{A}]$.

4.1. თუ $\mu \in [\mathbf{VB}_k;E;\mathfrak{A}]$, მაშინ $V(\mu;e;\mathfrak{A})$ წარმოადგენს $\mathfrak{A}E$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის არაუარყოფით სასრულ ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურ ფუნქციას.

დამტკიცება იხ. [3, გვ.71-72].

ვთქვათ, $E = [0,1]$, $\mathfrak{A}$ არის E სიმრავლის ყველა ლებეგის აზრით ზომადი ან არაზომადი ქვესიმრავლის კლასი და μ არის $\mathfrak{A}$ კლასზე განსაზღვრული ლებეგის შიგა ზომა. მაშინ ცხადია, რომ $V(\mu;e;\mathfrak{A}) = \mu(e)$ ყოველი $e \in \mathfrak{A}$ სიმრავლისათვის. მაშასადამე, $V(\mu;e;\mathfrak{A})$ საზოგადოდ არაა ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიური.

4.2. ვთქვათ, $\mu \in [VB_k;E;\mathfrak{N}]$. თუ $e \in \mathfrak{N}E$ სიმრავლის ყოველი $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილებისათვის ადგილი აქვს

$$|\mu(e)| \le |\mu(e_1)| + \ldots + |\mu(e_n)|$$

უტოლობას, მაშინ $V(\mu;e;\mathfrak{N})$ წარმოადგენს $\mathfrak{N}E$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრაველის არაუარყოფით სასრულ სასრულოდ-ადიტიურ ფუნქციას.

დამტკიცება. 4.1 თეორემის თანახმად $V(\mu;e;\mathfrak{N})$ წარმოადგენს $\mathfrak{N}E$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრაველის არაუარყოფით სასრულ ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურ ფუნქციას. ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ $V(\mu;e;\mathfrak{N})$ არის ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიური $\mathfrak{N}E$ კლასზე. ვთქვათ, $D_1 e = \{e_k^1\}_{k=1}^{n_1}$ არის $e \in \mathfrak{N}E$ სიმრაველის ნებისმიერი დანაწილება. სასრული ვარიაციის განსაზღვრის თანახმად ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება e სიმრაველის ისეთი $D_2 e = \{e_k^2\}_{k=1}^{n_2}$ დანაწილება, რომ ადგილი აქვს

$$V(\mu;e;\mathfrak{N}) < \sum_{k=1}^{n_2} |\mu(e_k^2)| + \varepsilon \tag{I.4.1}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D_1 e$ და $D_2 e$ დანაწილებათა De გაგრძელება. დანაწილებათა გაგრძელების განსაზღვრის თანახმად

$$e_i^1 = \bigcup_{k_i=1}^{m_i^1} e_{k_i} \left(e_{k_i} \subset e_i^1, e_{k_i} \in De\right)(i = 1,\ldots,n_1),$$

$$e_j^2 = \bigcup_{k_j=1}^{m_j^2} e_{k_j} \left(e_{k_j} \subset e_j^2, e_{k_j} \in De\right)(j = 1,\ldots,n_2)$$

პირობის თანახმად გვაქვს

$$\left|\mu(e_j^2)\right| \le \sum_{k_j=1}^{m_j^2} \left|\mu(e_{k_j}^2)\right|.$$

ამ უტოლობათა გათვალისწინებით (I.4.1) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$V(\mu;e;\mathfrak{N}) < \sum_{j=1}^{n} |\mu(e_j)| + \varepsilon \le \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k_j=1}^{m_j^2} |\mu(e_{k_j}^2)| + \varepsilon = |\mu(e_1)| + \ldots + |\mu(e_n)| +$$

$$+ \varepsilon = \sum_{j=1}^{n_1} \sum_{k_i=1}^{m_i^1} |\mu(e_{k_i}^1)| + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} V(\mu;e_i;\mathfrak{N}) + \varepsilon.$$

საიდანაც $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის გამო გვაქვს

$$V(\mu;e;\mathfrak{N})\leq\sum_{i=1}^{n}V(\mu;e_i;\mathfrak{N}).$$

ვიტყვით, რომ μ ფუნქციას E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ გააჩნია მაჟორანტი, თუ არსებობს $\mathfrak{A}$E კლასზე განსაზღვრული ისეთი სასრული, ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიური M(e) ფუნქცია, რომ ყოველი $e\in\mathfrak{A}$E სიმრავლისათვის ადგილი აქვს

$$\sup\{\mu(e)\}<\mathrm{M}(e)$$

უტოლობას.

4.3. $\mu\in[\mathrm{VB};\mathrm{E};\mathfrak{A}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა μ ფუნქციას E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ გააჩნია მაჟორანტი.

4.4. თუ μ ფუნქცია ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურია $\mathfrak{A}$E კლასზე და $\mu\in[\mathrm{VB};\mathrm{E};\mathfrak{A}]$, მაშინ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ $\mathfrak{A}$E კლასზე განსაზღვრული ორი არაუარყოფითი, ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიური ფუნქციის სხვაობის სახით.

4.3 და 4.4 თეორემების დამტკიცება იხ. [3, გვ.74-75].

4.5. თუ μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია $\mathfrak{N}$E კლასზე, მაშინ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ $\mathfrak{N}$E კლასზე განსაზღვრული ორი არაუარყოფითი სასრულოდ-ადიტიური ფუნქციის სხვაობის სახით.

ეს თეორემა მტკიცდება 4.4 თეორემის მსგავსად.

ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{D}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$. მაშინ განსაზღვრის თანახმად მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D_0E დანაწილება, რომ $\mu\in[\mathrm{D}_k;\mathfrak{A}D_0\mathrm{E}]$. განვიხილოთ D_0E დანაწილების რაიმე $D\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელება და $\mu(E_k)(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის შევადგინოთ

$$\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|$$

ჯამი.

μ ფუნქციის (D)-ვარიაცია E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ ეწოდება

$$\sup\left\{\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|\right\}\right\}$$

რიცხვს, სადაც შიგა ზუსტი ზედა საზღვარი აღებულია $\mu(E_k)(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო არჩევის მიმართ, ხოლო გარე ზუსტი ზედა საზღვარი კი – DE დანაწილების ყველა $D_1\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{A}$ გაგრძელების მიმართ

და მას აღნიშნავენ $V_{\mathrm{D}}(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{A})$ სიმბოლოთი.

თუ

$$V_{\mathrm{D}}(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{A})<+\infty,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ μ ფუნქციას E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ გააჩნია სასრული (D)-ვარიაცია და დავწერთ $\mu\in\left[\mathbf{V}_{(\mathrm{D})}\mathbf{B}_{\mathrm{k}};\mathrm{E};\mathfrak{A}\right]$.

თუ არსებობს E სიმრავლის ისეთი $D\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ

$$V_{\mathrm{D}}(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{A})<+\infty,$$

მაშინ ვიტყვით, რომ μ ფუნქციას E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ გააჩნია სასრული (0)-ვარიაცია და დავწერთ $\mu\in\left[\mathbf{V}_{(0)}\mathbf{B}_{\mathrm{k}};\mathrm{E};\mathfrak{A}\right]$.

მარტივად მტკიცდება შემდეგი

4.6. $\mu\in\left[\mathbf{V}_{(0)}\mathbf{B}_{\mathrm{k}};\mathrm{E};\mathfrak{A}\right]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა, არსებობს ისეთი $M>0$ რიცხვი და E სიმრავლის ისეთი $D_M\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის, ადგილი აქვს

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|\right\}<M$$

უტოლობას.

4.7. $\mu\in\left[\mathbf{V}_{(0)}\mathbf{B}_{\mathrm{k}};\mathrm{E};\mathfrak{N}\right]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}|\mu|(d\mathrm{E})<+\infty.$$

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\mu\in\left[\mathbf{V}_{(0)}\mathbf{B}_{\mathrm{k}};\mathrm{E};\mathfrak{N}\right]$. მაშინ, 4.6 თეორემის ძალით მოიძებნება $M>0$ რიცხვი და E სიმრავლის ისეთი $D_M\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის, ადგილი აქვს

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|\right\}<M$$

უტოლობას. საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}|\mu|(d\mathrm{E})<+\infty.$$

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. თუ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{\mathrm{E}}}|\mu|(d\mathrm{E})<+\infty,$$

მაშინ 3.2 თეორემის თანახმად რიცხვი 1-სათვის მოიძებნება E სიმრავლის

ისეთი D_1E დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის ადგილი აქვს

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|\right\} < (\mathfrak{N})\overline{\int_{E}}|\mu|(dE)+1$$

უტოლობას.

მაშასადამე, D_1E დანაწილება და

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E}}|\mu|(dE)+1$$

რიცხვი აკმაყოფილებს თეორემაში მოთხოვნილ პირობებს.

თუ $\mu \in [V_{(0)}B_k; E; \mathfrak{N}]$, მაშინ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{E}}|\mu|(dE)$$

ზედა ინტეგრალს ვუწოდოთ μ ფუნქციის (0)-ვარიაცია E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და ის აღვნიშნოთ $V_0(\mu; E; \mathfrak{N})$ სიმბოლოთი.

4.8. თუ $\mu \in [V_{(0)}B; E; \mathfrak{N}]$, მაშინ

$$(\mathfrak{N})\overline{\int_{e}}\mu(de),\ (\mathfrak{N})\underline{\int_{e}}\mu(de)$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალები მიეკუთვნებიან $[VB; E; \mathfrak{N}]$ კლასს.

დამტკიცება. E სიმრავლის ყოველი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k}}\mu(dE_k)\right| \le \sum_{k=1}^{n}(\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k}}|\mu|(dE_k) \le (\mathfrak{N})\overline{\int_{E_k}}|\mu|(dE) < +\infty .$$

მეორე ნაწილი მტკიცდება ანალოგიურად.

4.9. თუ $\mu \in [V_{(0)}B_k; E; \mathfrak{N}]$, მაშინ

$$(\mathfrak{N})\int_{e}\mu(de)$$

განუსაზღვრელი ინტეგრალი მიეკუთვნება $[VB_k; E; \mathfrak{N}]$ კლასს.

ეს თეორემა მტკიცდება 4.8. თეორემის მსგავსად.

4.10. თუ $\mu \in [K; E; \mathfrak{N}]$ და $\mu \in [V_{(0)}B; E; \mathfrak{N}]$, მაშინ μ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\mu = A_1 - A_2 + R$ სახით, სადაც A_1 და A_2 — $\mathfrak{N}$E კლასზე განსაზღვრული არაუარყოფითი სასრულოდ-ადიტიური ფუნქციებია, ხოლო $R \in [K_0; E; \mathfrak{N}]$.

ეს თეორემა მტკიცდება 2.2, 4.5 და 4.9 თეორემების გამოყენებით.

§5. ზღვარზე გადასვლა ზოგადი ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ.

5.1. ვთქვათ, $\mu, \mu_m \in [\mathrm{K}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]\,(m = 1,2,\ldots)$. იმისათვის, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E}) = \lim_{m\to\infty}(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E}) \tag{I.5.1}$$

ტოლობას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნებოდეს ისეთი $N_\varepsilon > 0$ რიცხვი და ყოველი $m > N_\varepsilon$-სათვის არსებობდეს E სიმრავლის ისეთი $D_m\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k), \mu_m(E_k)\,(k = 1,\ldots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი ჰქონდეს

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k) - \sum_{k=1}^{n}\mu_m(E_k)\right| < \varepsilon \tag{I.5.2}$$

უტოლობას.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, ადგილი აქვს (I.5.1) ტოლობას. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N_\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი $m > N_\varepsilon$-სათვის ადგილი აქვს

$$\left|(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E}) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{I.5.3}$$

უტოლობას.

დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $m > N_\varepsilon$ რიცხვი. მაშინ რადგანაც პირობის თანახმად $\mu, \mu_m \in [\mathrm{K}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]\,(m = 1,2,\ldots)$, ამიტომ აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_m\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k), \mu_m(E_k)\,(k = 1,\ldots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის შესაბამისად ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n}\mu_m(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{I.5.4}$$

უტოლობებს.

(I.5.3) და (I.5.4) უტოლობათა ძალით ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k) - \sum_{k=1}^{n}\mu_m(E_k)\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})\right| +$$

$$+\left|(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E}) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E})\right| + \left|(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E}) - \sum_{k=1}^{n}\mu_m(E_k)\right| < \varepsilon.$$

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. პირობის თანახმად ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N_\varepsilon > 0$ რიცხვი და ყოველი $m > N_\varepsilon$-სათვის არსებობს E სიმრავლის ისეთი D'_mE დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^1\}_{k=1}^{n_1}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^1)$, $\mu_m(E_k^1)$ $(k = 1,\ldots,n_1)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu(E_k^1) - \sum_{k=1}^{n_1}\mu_m(E_k^1)\right| < \varepsilon \tag{I.5.5}$$

უტოლობას.

დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $m > N_\varepsilon$ რიცხვი. მაშინ, რადგანაც პირობის თანახმად $\mu, \mu_m \in [\mathrm{K}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$ $(m = 1,2,\ldots)$, ამიტომ აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D''_mE დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k^2\}_{k=1}^{n_2}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k^2)$, $\mu_m(E_k^2)$ $(k = 1,\ldots,n_2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_2}\mu(E_k^2) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=1}^{n_2}\mu_m(E_k^2) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{I.5.6}$$

უტოლობებს შესაბამისად.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს D'_mE და D''_mE დანაწილებათა D_mE გაგრძელება. მაშინ (I.5.5) და (I.5.6) უტოლობათა გათვალისწინებით, მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)$, $\mu_n(E_k)$ $(k = 1,\ldots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\left|(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E}) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E})\right| \le \left|(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E}) - \sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)\right| +$$
$$+\left|\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k) - \sum_{k=1}^{n}\mu_m(E_k)\right| + \left|\sum_{k=1}^{n}\mu_m(E_k) - (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu_m(d\mathrm{E})\right| < \varepsilon.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემის ფორმულირებაში (I.5.2) უტოლობა არ შეიძლება შეიცვალოს

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\mu(E_k) - \mu_m(E_k)\right| < \varepsilon \tag{I.5.7}$$

უტოლობით. მართლაც, ვთქვათ, ყოველი m-სათვის $(m = 1,2,\ldots)$ f_m ფუნქცია

$E=[0,1]$ სეგმენტზე განსაზღვრულია ტოლობით: $f_m(0)=0$,

$$f_m(x)=\begin{cases} m, & \text{თუ } 0<x\le \frac{1}{2m}, \\ -m, & \text{თუ } \frac{1}{2m}<x\le \frac{1}{m}, \\ 0, & \text{თუ } \frac{1}{m}<x\le 1. \end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^1 f_m(x)dx=0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$A_m(E)=\int_E f_m(x)dx=\int_0^1 f_m(x)dx.$$

მაშინ $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m(E)=0$ და E სიმრავლის ყოველი $\{E_k\}$ დანაწილებისათვის და ყოველი m-სათვის

$$\left|\sum_k A_m(E_k)\right|=\left|\sum_k \int_{E_k} f_m(x)dx\right|=0,$$

მაგრამ E სიმრავლის იმ დანაწილებისათვის, რომლის კომპონენტებსაც წარმოადგენენ $\left(0,\frac{1}{2m}\right], \left(\frac{1}{2m},\frac{1}{m}\right] (m=1,2,...)$ ნახევარსეგმენტები გვაქვს

$$\sum_k |A_m(E_k)|=\sum_k\left|\int_{E_k} f_m(x)dx\right|=1.$$

მაშასადამე, (I.5.7) უტოლობა წარმოადგენს მხოლოდ საკმარის პირობას.

5.2. ვთქვათ, $\mu_m\in[K_k;E;\mathfrak{N}]$ $(m=1,2,...)$ და μ არის $\mathfrak{N}$ კლასზე განსაზღვრული სიმრავლის ნებისმიერი ფუნქცია. თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N_\varepsilon>0$ რიცხვი და ყოველი $m>N_\varepsilon$-სათვის არსებობს E სიმრავლის ისეთი $D_m E$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k), \mu_m(E_k)$ $(k=1,...,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^n \mu(E_k)-\sum_{k=1}^n \mu_m(E_k)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას, მაშინ $\mu\in[K_k;E;\mathfrak{N}]$.

დამტკიცება. პირობის თანახმად ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N_\varepsilon > 0$ რიცხვი და ყოველი $m > N_\varepsilon$-სათვის არსებობს E სიმრავლის ისეთი D'_mE დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_m^{1k}\}_{k=1}^{n_1}$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_m^{1k}), \mu_m(E_m^{1k})\,(k = 1,...,n_1)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu(E_m^{1k}) - \sum_{k=1}^{n_1}\mu_m(E_m^{1k})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{I.5.8}$$

უტოლობას.

დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $m > N_\varepsilon$ რიცხვი. რადგანაც პირობის თანახმად $\mu_m \in [\mathrm{K_k}; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D''_mE დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ორი $\{E_m^{2k}\}_{k=1}^{n_2}$, $\{E_m^{3k}\}_{k=1}^{n_3}$ გაგრძელებისათვის და $\mu_m(E_m^{2k})\,(k = 1,...,n_2), \mu_n(E_m^{3k})\,(k = 1,...,n_3)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{n_2}\mu_m(E_m^{2k}) - \sum_{k=1}^{n_3}\mu_m(E_m^{3k})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{I.5.9}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს D'_mE და D''_mE დანაწილებათა D_mE გაგრძელება. (I.5.8) და (I.5.9) უტოლობათა გათვალისწინებით, D_mE დანაწილების ნებისმიერი ორი $\{E_m^{1k}\}_{k=1}^{n_1}, \{E_m^{2k}\}_{k=1}^{n_2}$ გაგრძელებისათვის და $\mu_n(E_m^{1k})(k = 1,...,n_1), \mu_m(E_m^{2k})\,(k = 1,...,n_2)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu(E_m^{1k}) - \sum_{k=1}^{n_2}\mu(E_m^{2k})\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu(E_m^{1k}) - \sum_{k=1}^{n_1}\mu_m(E_m^{1k})\right| +$$
$$+\left|\sum_{k=1}^{n_1}\mu_m(E_m^{1k}) - \sum_{k=1}^{n_2}\mu_m(E_m^{2k})\right| + \left|\sum_{k=1}^{n_2}\mu_m(E_m^{2k}) - \sum_{k=1}^{n_2}\mu(E_m^{2k})\right| < \varepsilon$$

რაც 1.1 თეორემის თანახმად ნიშნავს, რომ $\mu \in [\mathrm{K_k}; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$.

§6. სტილტიესის ტიპის ზოგადი ინტეგრალები.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია და $E\in\mathfrak{N}$. დავუშვათ, რომ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ელემენტის f ფუნქცია და $\mu\in[D_k;E;\mathfrak{N}]$. ვთქვათ, $f(e)(e\subset E,e\in\mathfrak{N})$ არის f ფუნქციის შესაბამისი სიმრავლის ფუნქცია ე.ი. $f(e)$ არის სიმრავლის მრავალსახა ფუნქცია, რომელიც ყოველ $e\in E$ სიმრავლეზე ღებულობს ყველა $f(x)$ მნიშვნელობას, როცა x გაირბენს e სიმრავლეს.

შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა

$$(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)=(\mathfrak{N})\int_E f(dE)\mu(dE).$$

თუ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)$$

ინტეგრალი, მაშინ მას ვუწოდებთ f ფუნქციის სტილტიესის ტიპის ინტეგრალს E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და დავწერთ $f\in\left|C_\mu K_k;E;\mathfrak{N}\right|$.

აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ სტილტიესის ტიპის ინტეგრალს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

I. თუ $f\in\left|C_\mu K_k;E;\mathfrak{N}\right|$, მაშინ $f\in\left|C_\mu K_k;e;\mathfrak{N}\right|$ ყოველი $e\in\mathfrak{N}E$ სიმრავლისათვის და

$$(\mathfrak{N})\int_e f(x)\mu(de)$$

ინტეგრალი წარმოადგენს $\mathfrak{N}E$ კლასზე განსაზღვრულ სიმრავლის სასრულ სასრულოდ-ადიტურ ფუნქციას.

II. თუ $f_j\in\left|C_\mu K_k;E;\mathfrak{N}\right|(j=1,...,n)$, მაშინ ნებისმიერი $a_1,...,a_n$ ნამდვილი რიცხვებისათვის $a_1f_1+...+a_nf_n\in\left|C_\mu K_k;E;\mathfrak{N}\right|$ და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_E(a_1f_1+...+a_nf_n)(x)\mu(dE)=a_1\cdot(\mathfrak{N})\int_E f_1(x)\mu(dE)+...+a_n\cdot(\mathfrak{N})\int_E f_n(x)\mu(dE)$$

ტოლობას.

III. თუ $f\in\left|C_{\mu_j}K_k;E;\mathfrak{N}\right|(j=1,...,n)$, მაშინ ნებისმიერი $a_1,...,a_n$ ნამდვილი რიცხვებისათვის $f\in\left|C_{a_1\mu_1+...+a_n\mu_n}K_k;E;\mathfrak{N}\right|$ და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_E f(x)(a_1\mu_1+\ldots+a_n\mu_n)(dE)=a_1\cdot(\mathfrak{N})\int_E f_1(x)\mu(dE)+\ldots+a_n\cdot(\mathfrak{N})\int_E f_n(x)\mu(dE)$$

ტოლობას.

IV. თუ $\mu\in[\mathbf{V}_0\mathbf{B}_k;E;\mathfrak{N}]$ და E სიმრავლეზე განსაზღვრული ელემენტის შემოსაზღვრული f ფუნქცია ეკუთვნის $\lfloor \mathbf{C}_\mu\mathbf{K}_k;E;\mathfrak{N}\rfloor$ კლასს, მაშინ ადგილი აქვს

$$\left|(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)\right|\le M\cdot V_0(\mu;E;\mathfrak{N})$$

უტოლობას, სადაც $M=\sup_{x\in E}\{|f(x)|\}$.

თუ არსებობს $E\in\mathfrak{A}$ სიმრავლის ისეთი DE დანაწილება, რომ μ ფუნქცია არაუარყოფითია $\mathfrak{A}D$E კლასზე, მაშინ ვიტყვით, რომ μ ფუნქცია დიფერენციალურად არაუარყოფითია $\mathfrak{A}$E კლასზე და დავწერთ $\mu\in\lfloor \mathbf{D}^+;E;\mathfrak{A}\rfloor$.

V. თუ $\mu\in\lfloor \mathbf{D}^+;E;\mathfrak{N}\rfloor,\mu\in[\mathbf{K};E;\mathfrak{N}]$ და E სიმრავლეზე განსაზღვრული ელემენტის შემოსაზღვრული f ფუნქცია ეკუთვნის $\lfloor \mathbf{C}_\mu\mathbf{K}_k;E;\mathfrak{N}\rfloor$ კლასს, მაშინ სამართლიანია საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

$$(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)=L\cdot(\mathfrak{N})\int_E \mu(dE)$$

სადაც $m\le L\le M$, $m=\inf_{x\in E}\{|f(x)|\}$, $M=\sup_{x\in E}\{|f(x)|\}$.

6.1. თუ ელემენტის f ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე და $\mu\in\lfloor \mathbf{K}_{0k};E;\mathfrak{A}\rfloor$, მაშინ $f\cdot\mu\in\lfloor \mathbf{K}_{0k};E;\mathfrak{A}\rfloor$.

დამტკიცება. რადგანაც f ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ ყოველი $e\in\mathfrak{A}E$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს

$$|f(e)|\le M \tag{I.6.1}$$

უტოლობას.

პირობის თანახმად $\mu\in\lfloor \mathbf{K}_{0k};E;\mathfrak{A}\rfloor$, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{M}$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D_εE დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის და $\mu(E_k)(k=1,\ldots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|<\frac{\varepsilon}{M} \tag{I.6.2}$$

უტოლობას.

(I.6.1) და (I.6.2) უტოლობათა გათვალისწინებით, D_εE დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის და $f\cdot\mu$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\sum_{k=1}^{n}|f(E_k)\mu(E_k)|=\sum_{k=1}^{n}|f(E_k)|\,|\mu(E_k)|<\varepsilon,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $f\cdot\mu\in[\mathrm{K}_{0k};\mathrm{E};\mathfrak{A}]$.

2.2 თეორემიდან 6.1 თეორემის გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი

6.2. ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ და ელემენტის f ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე. თუ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E}),\quad(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mathrm{A}(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალებიდან ერთ-ერთი, სადაც

$$\mathrm{A}(e)=(\mathfrak{N})\int_{e}\mu(de)\;(e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}),$$

მაშინ არსებობს მეორეც და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mathrm{A}(d\mathrm{E})$$

ტოლობას.

6.3. ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{K}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, f არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ელემენტის კომპლექსური ფუნქცია და არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი. ვთქვათ, φ არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ელემენტის შემოსაზღვრული კომპლექსური ფუნქცია. თუ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\varphi(x)f(x)\mu(d\mathrm{E}),\quad(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\varphi(x)\mathrm{A}(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალებიდან ერთ-ერთი, სადაც

$$\mathrm{A}(e)=(\mathfrak{N})\int_{e}f(x)\mu(de)\;(e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}),$$

მაშინ არსებობს მეორეც და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_E \varphi(x)f(x)\mu(dE)=(\mathfrak{N})\int_E \varphi(x)\mathrm{A}(dE)$$

ტოლობას.

ეს თეორემა წარმოადგენს 6.2 თეორემის კერძო შემთხვევას.

ამ თეორემის კერძო შემთხვევები, ნამდვილი ფუნქციებისათვის და ლებეგ-სტილტიესის აბსტრაქტული ინტეგრალისათვის, მოყვანილია [9]-ში (გვ.341-356).

ვიტყვით, რომ სიმრავლის კომპლექსური f ფუნქცია ეკუთვნის $[\mathbf{P}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$ კლასს, თუ მოიძებნება $\mathrm{E}\in\mathfrak{A}$ სიმრავლის ისეთი $D\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ სიმრავლეთა ყოველი $E_k'\subset E_k''$ $(E_k',E_k''\in\mathfrak{A}E_k(k=1,\dots,n))$ წყვილისათვის ადგილი აქვს $f(E_k')\subset f(E_k'')$ დამოკიდებულებას.

ცხადია, რომ თუ ელემენტის f ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathrm{E}\in\mathfrak{A}$ სიმრავლეზე, მაშინ მისი შესაბამისი სიმრავლის $f(e)$ ფუნქცია მიეკუთვნება $[\mathbf{P}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$ კლასს.

6.4. თუ ელემენტის f ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathrm{E}\in\mathfrak{N}$ სიმრავლეზე და სიმრავლის ცალსახა μ ფუნქცია ეკუთვნის $[\mathbf{D}^+;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს, მაშინ იმისათვის, რომ არსებობდეს

$$(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE) \tag{I.6.3}$$

ინტეგრალი აუცილებელია ადგილი ჰქონდეს

$$\lim_{DE}\sum_{k=1}^{p}\left(\overline{f}(E_k)-\underline{f}(E_k)\right)\mu(E_k)=0 \tag{I.6.4}$$

ტოლობას, ხოლო თუ

$$\lim_{DE}\sum_{k=1}^{p}\overline{f}(E_k)\mu(E_k),\qquad \lim_{DE}\sum_{k=1}^{p}\underline{f}(E_k)\mu(E_k) \tag{I.6.5}$$

ზღვრებიდან არსებობს ერთ-ერთი, მაშინ (I.6.4) ტოლობა საკმარისია, იმისათვის, რომ არსებობდეს (I.6.3) ინტეგრალი. კერძოდ, თუ ელემენტის f ფუნქცია შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე და მიეკუთვნება $[\mathrm{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს, ხოლო μ დიფერენციალურად ზემოდან ან ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრად-ადიტიურია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე და $\mu\in[\mathbf{V}_0\mathbf{B};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ (I.6.5) ზღვრებიდან არსებობს შესაბამისი და (I.6.4) ტოლობა აუცილებელია და საკმარისი იმისათვის, რომ არსებობდეს (I.6.3) ინტეგრალი.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს (I.6.3) ინტეგრალი, მაშინ 3.12 თეორემის ძალით გვაქვს

$$\lim_{DE}\sum_{k=1}^{n}\overline{f\cdot\mu}(E_k)=\lim_{DE}\sum_{k=1}^{n}\underline{f\cdot\mu}(E_k).$$

საიდანაც

$$\lim_{DE}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f\cdot\mu}(E_k)-\underline{f\cdot\mu}(E_k)\right)=0.$$

რაც ნიშნავს, რომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D_1E დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის, ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f\cdot\mu}(E_k)-\underline{f\cdot\mu}(E_k)\right)<\varepsilon \tag{I.6.6}$$

უტოლობას.

მეორეს მხრივ, პირობის თანახმად $\mu\in\left|\mathbf{D}^{+};\mathrm{E};\mathfrak{N}\right|$, ამიტომ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D_2E დანაწილება, რომ μ ფუნქცია არაუარყოფითია $\mathfrak{N}D_2$E კლასზე და ყოველი $e\in\mathfrak{N}D_2$E სიმრავლისათვის, გვაქვს

$$\overline{f\cdot\mu}(e)=\overline{f}(e)\mu(e),\qquad \underline{f\cdot\mu}(e)=\underline{f}(e)\mu(e). \tag{I.6.7}$$

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს D_1E და D_2E დანაწილებათა DE გაგრძელება. მაშინ, (I.6.6) და (I.6.7) უტოლობათა გათვალისწინებით, DE დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის, ვღებულობთ

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f}(E_k)-\underline{f}(E_k)\right)\mu(E_k)<\varepsilon.$$

პირობის საკმარისობა ცხადია. მართლაც, თუ f შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე და მიეკუთვნება $[\mathbf{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს, ხოლო μ დიფერენციალურად ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურია $\mathfrak{N}$E კლასზე და $\mu\in[\mathbf{V_0B};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ $\overline{f}\cdot\mu\in[\mathbf{V_0B};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, $\overline{f}\cdot\mu$ ფუნქცია დიფერენციალურად ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურია $\mathfrak{N}$E კლასზე და ამიტომ

$$\lim_{DE}\sum_{k=1}^{n}\overline{f\cdot\mu}(E_k)=\lim_{DE}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(E_k)\mu(E_k)=\inf_{D'E\succ DE}\left\{\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(E_k')\mu(E_k')\right\},$$

სადაც $D'\mathrm{E}$ არის $f\in[\mathrm{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}], \mu\in\left|\mathrm{D}^+;\mathrm{E};\mathfrak{N}\right|$ და μ ფუნქციის დიფერენციალურად ზემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურობის განსაზღვრაში შემავალი დანაწილებათა გაგრძელება.

მეორე ნაწილი მტკიცდება ანალოგიურად.

შევნიშნოთ, რომ 6.4 თეორემის საკმარის პირობაში

$$\lim_{DE}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(E_k)\mu(E_k), \qquad \lim_{DE}\sum_{k=1}^{n}\underline{f}(E_k)\mu(E_k)$$

ზღვრებიდან ერთ-ერთის არსებობის მოთხოვნა, როგორც ამას გვიჩვენებს შემდეგი მაგალითი, არსებითია. ვთქვათ, $\mu\notin[\mathrm{K};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ და $f(x)\equiv 1$ $(x\in\mathrm{E})$, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f}(E_k)-\underline{f}(E_k)\right)\mu(E_k)=0,$$

მაგრამ

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი არ არსებობს.

6.5. ვთქვათ, $\mu\in\left|\mathrm{D}^+;\mathrm{E};\mathfrak{N}\right|, \mu\in[\mathrm{K};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ და შემოსაზღვრული f ფუნქცია მიეკუთვნება $[\mathrm{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს. იმისათვის, რომ არსებობდეს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$\lim_{DE}\sum_{k=1}^{p}\left(\overline{f}(E_k)-\underline{f}(E_k)\right)\mathrm{A}(E_k)=0,$$

ტოლობას, სადაც

$$\mathrm{A}(e)=(\mathfrak{N})\int_{e}\mu(de).$$

ეს თეორემა მტკიცდება 2.2, 6.2 და 6.4 თეორემების გამოყენებით.

მოვიყანოთ მაგალითი ისეთი f და μ ფუნქციებისა, რომელთათვისაც

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი არსებობს, მაგრამ $\mu\notin[\mathrm{K};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. ვთქვათ, $f(x)=x$ $(x\in[0,1))$ და

$$\mu(e)=\begin{cases}1, & \text{თუ } e=\left[0,\dfrac{1}{n}\right),\\ |e|, & \text{თუ } e\neq\left[0,\dfrac{1}{n}\right).\end{cases}$$

ვთქვათ, $\mathfrak{N}$ არის $[0,1)$ ნახევარსეგმენტიდან აღებული ყველა ნახევარსეგმენტისაგან შედგენილი ნორმალური კლასი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\mu \notin [\mathrm{K};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაგრამ

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(x)\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი არსებობს და

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(x)\mu(d\mathrm{E}) = \int_0^1 x\,dx .$$

ვიტყვით, რომ სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა f ფუნქცია განზოგადებულად უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ ან მიეკუთვნება $[\mathrm{CG}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$ კლასს, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $e'_k, e''_k \in \mathfrak{A}E_k (k = 1,\dots,n)$ სიმრავლეები, $f(e'_k)$ და $f(e''_k)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$|f(e''_k) - f(e'_k)| < \varepsilon$$

უტოლობას.

ვიტყვით, რომ ელემენტის კომპლექსური f ფუნქცია განზოგადებულად უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{A}$ კლასის მიმართ ან მიეკუთვნება $[\mathrm{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$ კლასს, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $x'_k, x''_k \in E_k$ $(k = 1,\dots,n)$ წერტილები, ადგილი აქვს

$$|f(x''_k) - f(x'_k)| < \varepsilon$$

უტოლობას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $f \in [\mathrm{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$, მაშინ ის შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე. შებრუნებული წინადადება საზოგადოდ არაა სამართლიანი.

ცხადია, რომ თუ $f \in [\mathrm{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$, მაშინ მისი შესაბამისი სიმრავლის ფუნქცია ეკუთვნის $[\mathrm{CG}_k;\mathrm{E};\mathfrak{A}]$ კლასს.

6.6. $f \in [\mathrm{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathrm{Re} f \in [\mathrm{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, $\mathrm{Im} f \in [\mathrm{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$.

6.7. თუ $f\in[\mathrm{CG_k};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$ და $\mu\in[\mathrm{K_k};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, $\mu\in[\mathrm{V_0B_k};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი.

დამტკიცება. 4.9 და 6.2 თეორემათა ძალით შეგვიძლია დავუშვათ, რომ μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია $\mathfrak{M}\mathrm{E}$ კლასზე და $\mu\in[\mathrm{VB_k};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$. რადგანაც პირობის თანახმად $f\in[\mathrm{CG_k};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^n$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $e'_k, e''_k\in\mathfrak{M}E_k\,(k=1,...,n)$ სიმრავლეები, $f(e'_k)$ და $f(e''_k)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, ადგილი აქვს

$$|f(e'_k)-f(e''_k)|<\frac{\varepsilon}{V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{M})}$$

უტოლობას.

განვიხილოთ $D_\varepsilon\mathrm{E}$ დანაწილების რაიმე $\{E_k^j(j)\}_{k=1}^n$ გაგრძელება. მაშინ f ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის გვექნება

$$\left|\sum_{k=1}^n f(E_k)\mu(E_k)-\sum_{k=1}^n\sum_j f(E_k^j)\,\mu(E_k^j)\right|\le\sum_{k=1}^n\sum_j\left|f(E_k)-f(E_k^j)\right|\cdot\left|\mu(E_k^j)\right|<\varepsilon .$$

საიდანაც 1.2 თეორემის ძალით გამომდინარეობს

$$(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალის არსებობა.

დამტკიცებული თეორემა, როგორც კერძო შემთხვევა, შეიცავს ანალოგიურ თეორემას $f\in[\mathrm{M_k};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$ ფუნქციისათვის.

6.8. ვთქვათ, არსებობს

$$(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) \tag{I.6.8}$$

ინტეგრალი, სადაც f არის $\mathfrak{M}\mathrm{E}$ კლასზე შემოსაზღვრული ფუნქცია და $f\in[\mathrm{P};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, ხოლო $\mu\in[\mathrm{K};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, $\mu\in[\mathrm{D^+};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$. თუ ცალსახა φ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $\mathfrak{M}\mathrm{E}$ კლასზე, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი.

დამტკიცება. პირობის თანახმად არსებობს (I.6.8) ინტეგრალი, ამიტომ 6.5 თეორემის ძალით ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D_εE დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f}(E_k)-\underline{f}(E_k)\right)\mathrm{A}(E_k)<\varepsilon$$

უტოლობა, სადაც

$$\mathrm{A}(e)=(\mathfrak{N})\int_e \mu(de)\,(e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}).$$

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ φ ფუნქცია დიფერენციალურად არაუარყოფითია $\mathfrak{N}$E კლასზე. მაშინ ერთის მხრივ, მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი D_1E დანაწილება, რომ φ ფუნქცია არაუარყოფითია $\mathfrak{N}D_1$E კლასზე, ხოლო მეორეს მხრივ, რადგანაც φ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $\mathfrak{N}$E კლასზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $M > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი $e\in\mathfrak{N}D_1$E სიმრავლისათვის, ადგილი აქვს

$$|\varphi(e)|\le M$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს D_εE და D_1E დანაწილებათა DE გაგრძელება. ცხადია, რომ $f\cdot\varphi\in[\mathrm{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$.

DE დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^n$ გაგრძელებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f\cdot\varphi}(E_k)-\underline{f\cdot\varphi}(E_k)\right)\mathrm{A}(E_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f}(E_k)-\underline{f}(E_k)\right)\mathrm{A}(E_k)\varphi(E_k)<M\varepsilon.$$

რაც 6.5 თეორემის ძალით ნიშნავს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალის არსებობას.

ვთქვათ, ახლა, φ ნებისმიერი ნიშნის ფუნქციაა. მაშინ $\Phi(e)=\varphi(e)+M$ $\mathfrak{N}$E კლასზე დიფერენციალურად არაუარყოფითი შემოსაზღვრული ფუნქციაა.

ზემოდამტკიცებულის თანახმად არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\Phi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი. მაგრამ მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) = (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\Phi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) - M\cdot(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი.

6.9. ვთქვათ, f და φ – $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე შემოსაზღვრული ფუნქციებია, $f,\varphi\in[\mathbf{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, ხოლო $\mu\in[\mathbf{K};\mathrm{E};\mathfrak{N}], \mu\in\left[\mathbf{D}^{+};\mathrm{E};\mathfrak{N}\right]$. თუ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}),\ \ (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალები, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალი.

დამტკიცება. რადგანაც პირობის თანახმად არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}),\ \ (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალები და $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ 6.5 თეორემის ძალით ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_{\varepsilon}\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის ადგილი აქვს

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f}(E_k)-\underline{f}(E_k)\right)\mathrm{A}(E_k)<\frac{\varepsilon}{2},\\ \sum_{k=1}^{n}\left(\overline{\varphi}(E_k)-\underline{\varphi}(E_k)\right)\mathrm{A}(E_k)<\frac{\varepsilon}{2}\end{gathered}\tag{I.6.9}$$

უტოლობებს.

მეორეს მხრივ, რადგანაც f და φ ფუნქციები შემოსაზღვრულია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ ყოველი $e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს

$$|f(e)|\le M,\quad |\varphi(e)|\le M\tag{I.6.10}$$

უტოლობებს.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ყოველი $e\in\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის

$$\overline{f\cdot\varphi}(e)-\underline{f\cdot\varphi}(e)=M\left(\left(\overline{f}(e)-\underline{f}(e)\right)+\left(\overline{\varphi}(e)-\underline{\varphi}(e)\right)\right).\tag{I.6.11}$$

ცხადია, რომ $f\cdot\varphi$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე და $f\cdot\varphi\in[\mathbf{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. (I.6.9) და (I.6.10) უტოლობათა გათვალისწინებით, $D_{\varepsilon}\mathrm{E}$ დანაწილების ნებისმიერი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელებისათვის, ვღებულობთ

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{f\cdot\varphi}(E_k)-\underline{f\cdot\varphi}(E_k)\right)\mathrm{A}(E_k)<M\varepsilon .$$

რაც 6.5 თეორემის თანახმად ნიშნავს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალის არსებობას.

6.10. ვთქვათ, f და φ – $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე შემოსაზღვრული ფუნქციებია, $f,\varphi\in[\mathrm{P};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, ხოლო $\mu\in[\mathrm{K};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$, $\mu\in[\mathrm{D}^{+};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. თუ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}),\ (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ინტეგრალები, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} u(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) \tag{I.6.12}$$

ინტეგრალი, სადაც

$$u(\mathrm{E})=\frac{1}{(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})}(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} u(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) \tag{I.6.13}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. 6.9 თეორემის ძალით არსებობს (I.6.12) ინტეგრალი. (I.6.13) ტოლობის დასამტკიცებლად თავდაპირველად დავუშვათ, რომ φ ფუნქცია დიფერენციალურად არაუარყოფითია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე.

რადგანაც φ და μ ფუნქციები დიფერენციალურად არაუარყოფითია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე და $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D\mathrm{E}$ დანაწილება, რომ φ და μ ფუნქციები არაუარყოფითია $\mathfrak{N}D\mathrm{E}$ კლასზე. სტილტიესის ინტეგრალისათვის საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით გვაქვს

$$\underline{f}(E_k)\le u(E_k)\le \overline{f}(E_k)\ (k=1,\dots,n).$$

საიდანაც, $\varphi(E_k)(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი ფიქსირებული არჩევისათვის, ვღებულობთ

$$\underline{f}(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k)\le u(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k)\le \overline{f}(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k)\ (k=1,\dots,n).$$

ამ უტოლობათა შეკრებით მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{n} \underline{f}(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} u(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k) \le \sum_{k=1}^{n} \overline{f}(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k).$$

საიდანაც, $\varphi(E_k)(k=1,\dots,n)$ მნიშვნელობათა ნებისმიერი ფიქსირებული არჩევისათვის, გვაქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) = \lim_{DE} \sum_{k=1}^{n} \underline{f}(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k) = \lim_{DE} \sum_{k=1}^{n} \overline{f}(E_k)\varphi(E_k)\mu(E_k).$$

მაშასადამე,

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) = (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} u(d\mathrm{E})\varphi(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}).$$

ვთქვათ, ახლა, φ ნებისმიერი ნიშნის ფუნქციაა. რადგანაც φ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომ ყოველი $e \in \mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს

$$|f(e)| \le M$$

უტოლობას.

ცხადია, რომ $\Phi(e) = \varphi(e) + M$ ფუნქცია დიფერენციალურად არაუარყოფითია $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ კლასზე, ამიტომ ზემოდამტკიცებულის თანახმად გვაქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \Phi(d\mathrm{E})u(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) = (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \Phi(d\mathrm{E})f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}), \tag{I.6.14}$$

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} M \ u(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) = (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} M \cdot f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}). \tag{I.6.15}$$

თუ (I.6.14)-ს გამოვაკლებთ (I.6.15)-ს მივიღებთ

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} (\Phi(d\mathrm{E}) - M)u(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) = (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} (\Phi(d\mathrm{E}) - M)f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ან, რაც იგივეა

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \varphi(d\mathrm{E})u(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}) = (\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \varphi(d\mathrm{E})f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E}).$$

ახლა ვაჩვენოთ რომ აბსტრაქტული სიმრავლის მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი ინტეგრალი მოიცავს ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალს. ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ ზომადი არაუარყოფითი ფუნქციის მაგალითი.

ვთქვათ, (X,S,μ) ზომიანი სივრცეა და f არის ზომად $\mathrm{E} \in S$ სიმრავლეზე განსაზღვრული არაუარყოფითი ზომადი ფუნქცია. განვიხილოთ E

სიმრავლის რაიმე $DE=\{E_k\}_{k=1}^n$ დანაწილება და შევადგინოთ

$$\sum_{k=1}^{n} m(E_k)\mu(E_k) \tag{I.6.16}$$

ჯამი, სადაც $m(E_k)=\inf\{f(x): x\in E_k\}\,(k=1,...,n)$.

როგორც ცნობილია (იხ. [19, გვ.116],[22]), (I.6.16) ჯამის ზუსტ ზედა საზღვარს, E სიმრავლის ყველა დანაწილების მიმართ, ეწოდება f ფუნქციის ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალი და მას აღნიშნავენ

$$(SL)\int_{\mathrm{E}} f(x)d\mu(x) \tag{I.6.17}$$

სიმბოლოთი. მაშასადამე,

$$(SL)\int_{\mathrm{E}} f(x)d\mu(x)=\sup_{D\mathrm{E}}\left\{\sum_{k=1}^{n} m(E_k)\mu(E_k)\right\}.$$

6.11. თუ არსებობს (I.6.17) ლებეგ-სტილტიესის ინტეგრალი, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})$$

ზოგადი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})=(SL)\int_{\mathrm{E}} f(x)d\mu(x)$$

ტოლობას.

დამტკიცება. დავუშვათ არსებობს (I.6.17) ინტეგრალი. 3.9 თეორემის თანახმად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\nu(e)=m(e)\cdot\mu(e)\,(e\subset \mathrm{E})$ ფუნქცია წარმოადგენს სიმრავლის ქვემოდან სასრულოდ-ნახევრადადიტიურ ფუნქციას.

მართლაც, ვთქვათ, $e=e_1\cup e_2$. სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$\nu(e_1)+\nu(e_2)=m(e_1)\mu(e_1)+m(e_2)\mu(e_2)\ge m(e)\mu(e_1)+m(e)\mu(e_2)=m(e)\mu(e)=\nu(e).$$

მაშინ გვექნება

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} \nu(d\mathrm{E})=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}} f(d\mathrm{E})\mu(d\mathrm{E})=(SL)\int_{\mathrm{E}} f(x)d\mu(x).$$

თავი II.

აბსტრაქტული სიმრავლის კომპლექსური მრავალსახა ფუნქციის ზოგადი n-ჯერადი და n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები

§7. მართკუთხედის ფუნქციის წარმოდგენა სიმრავლეთა კლასების ნამრავლებზე.

ვთქვათ, $X_1,\dots,X_n$ რაიმე ფიქსირებული არაცარიელი სიმრავლეებია. როგორც ცნობილია (იხ. [22, გვ.148]), ყველა შესაძლო $(x_1,\dots,x_n)$ დალაგებული n-ეულის სიმრავლეს, სადაც $x_k \in X_k$ $(k=1,\dots,n)$, ეწოდება $X_1,\dots,X_n$ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი და აღინიშნება $X_1\times\cdots\times X_n$ სიმბოლოთი. თუ $A_k \subset X_k$ $(k=1,\dots,n)$, მაშინ $A_1\times\cdots\times A_n$ სიმრავლეს ეწოდება მართკუთხედი, ხოლო $A_1,\dots,A_n$ სიმრავლეებს კი – $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის გვერდები.

ვთქვათ, $\mathfrak{A}_k$ $(k=1,\dots,n)$ არის X_k სიმრავლის ქვესიმრავლეებისაგან შედგენილი რაიმე არაცარიელი კლასი. ყველა $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის სიმრავლეს, სადაც $A_k \subset \mathfrak{A}_k$ $(k=1,\dots,n)$ ეწოდება $\mathfrak{A}_1,\dots,\mathfrak{A}_n$ კლასების ნამრავლი და აღინიშნება $\mathfrak{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{A}_n$ სიმბოლოთი.

7.1. $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედი წარმოადგენს ცარიელ სიმრავლეს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი რომელიმე გვერდი ცარიელი სიმრავლეა.

7.2. თუ $A_1\times\cdots\times A_n$ და $B_1\times\cdots\times B_n$ ორი არაცარიელი მართკუთხედია და $A_1\times\cdots\times A_n \subset B_1\times\cdots\times B_n$, მაშინ ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,n)$ $A_k \subset B_k$.

7.3. თუ $A_1\times\cdots\times A_n$ და $B_1\times\cdots\times B_n$ ორი არაცარიელი მართკუთხედია და $A_1\times\cdots\times A_n = B_1\times\cdots\times B_n$, მაშინ ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,n)$ $A_k = B_k$.

ამ თეორემათა დამტკიცება $n=2$ შემთხვევისათვის მოყვანილია [22, გვ.137]-ში. დამტკიცება ნებისმიერი n-სათვის ანლოგიურია.

7.4. ვთქვათ, $A_1\times\cdots\times A_n$ და $A_1^\alpha\times\cdots\times A_n^\alpha$, სადაც α გაირბენს ინდექსთა რაიმე არაცარიელ I სიმრავლეს არაცარიელი მართკუთხედებია. იმისათვის, რომ $A_1^\alpha\times\cdots\times A_n^\alpha$ $(\alpha\in I)$ მართკუთხედები იყოს თანაუკვეთი და მათი გაერთიანება იყოს $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის ტოლი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

1. $A_k = \bigcup_{\alpha \in I} A_k^{\alpha}$ $(k = 1,...,n)$;

2. როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,...,x_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ წერტილი მოიძებნება ისეთი $\alpha_0 \in I$ ნიშნაკი, რომ $(x_1,...,x_n) \in A_1^{\alpha_0} \times \cdots \times A_n^{\alpha_0}$;

3. ნებისმიერი ორი $A_1^{\alpha_1} \times \cdots \times A_n^{\alpha_1}$ და $A_1^{\alpha_2} \times \cdots \times A_n^{\alpha_2}$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in I, \alpha_1 \neq \alpha_2)$ მართკუთხედის შესაბამისი ერთი მაინც $A_k^{\alpha_1}, A_k^{\alpha_2}$ $(1 \leq k \leq n)$ გვერდები იყოს თანაუკვეთი.

ამ თეორემის დამტკიცება $n = 2$ შემთხვევისათვის მოყვანილია [3]-ში (გვ.149-151). დამტკიცება ნებისმიერი n-სათვის ანალოგიურია.

7.5. თუ $P_1,...,P_n$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლებია, მაშინ მათი $P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ ნამრავლი სიმრავლეთა ნახევარრგოლია.

ამ თეორემის დამტკიცება $n = 2$ შემთხვევისათვის მოყვანილია [5]-ში (გვ.362-368). დამტკიცება ნებისმიერი n-სათვის ანალოგიურია.

რადგანაც $3^0.2$ თეორემის თანახმად $\mathfrak{N}$ ნორმალური კლასიდან აღებული ყოველი E სიმრავლის ყველა დანაწილების კომპონენტების $\mathfrak{N}E$ სიმრავლე წარმოადგენს ნახევარრგოლს, ამიტომ 7.5 თეორემიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი

7.6. თუ $\mathfrak{N}_1,...,\mathfrak{N}_n$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, მაშინ მათი $\mathfrak{N}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{N}_n$ ნამრავლი სიმრავლეთა ნორმალური კლასია.

$A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის დანაწილებას, რომელსაც აქვს

$$\left\{A_1^{j_1} \times \cdots \times A_n^{j_n}\right\}_{j_k=1}^{N_k} \quad (k = 1,...,n)$$

სახე, სადაც $\left\{A_1^{j_k}\right\}_{j_k=1}^{N_k}$ არის A_k $(k = 1,...,n)$ სიმრავლის დანაწილება, ეწოდება $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის ბადური დანაწილება და ის აღვნიშნოთ $\overset{\square}{D}(A_1 \times \cdots \times A_n)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის ყოველი ბადური $\overset{\square}{D}(A_1 \times \cdots \times A_n)$ დანაწილება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი $\overset{\square}{D}(A_1 \times \cdots \times A_n) = D_1(A_1) \times \cdots \times D_n(A_n)$ სახით, სადაც $D_k A_k$ არის $A_k \in \mathfrak{N}_k$ $(k = 1,...,n)$ სიმრავლის დანაწილება.

შევნიშნოთ, რომ ბადური დანაწილების ცნება, ევკლიდეს n-განზომილებიანი R^n სივრციდან აღებული მართკუთხედისათვის მოყვანილია [1]-ში (გვ. 105-106).

7.7. ვთქვათ, $P_1,...,P_n$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლებია და $P=P_1\otimes\cdots\otimes P_n$. მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის $\{A_1^k\times\cdots\times A_n^k\}_{k=1}^p$ დანაწილება, ყოველთვის არსებობს მისი ბადური გაგრძელება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $A_1\times\cdots\times A_n\in P$ და $\{A_1^k\times\cdots\times A_n^k\}_{k=1}^p$ არის მისი რაიმე დანაწილება. მაშინ 7.4 თეორემის თანახმად $A_i=\bigcup_{k=1}^p A_i^k$ $(i=1,...,n)$.

რადგანაც პირობის თანახმად P_i $(i=1,...,n)$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლია, ამიტომ 1.3 თეორემის თანახმად P_i ნახევარრგოლში მოიძებნება ისეთი თანაუკვეთი $B_i^1,...,B_i^{N_i}$ სიმრავლეები, რომ ადგილი აქვს

$$\bigcup_{k=1}^p A_i^k=\bigcup_{k_i=1}^p B_i^{k_i}\ (i=1,...,n).$$

წარმოდგენას. ამ წარმოდგენათა გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$A_1\times\cdots\times A_n=\bigcup_{k=1}^p\left(A_1^k\times\cdots\times A_n^k\right)=\left(\bigcup_{k=1}^p A_1^k\right)\times\cdots\times\left(\bigcup_{k=1}^p A_n^k\right)=$$

$$=\left(\bigcup_{k_1=1}^{N_1} B_1^{k_1}\right)\times\cdots\times\left(\bigcup_{k_n=1}^{N_n} B_n^{k_n}\right)=\bigcup_{k_1=1}^{N_1}\cdots\bigcup_{k_n=1}^{N_n}\left(B_1^{k_1}\times\cdots\times B_n^{k_n}\right).$$

რადგანაც $B_i^1,...,B_i^{N_i}$ $(i=1,...,n)$ სიმრავლეები არ თანაიკვეთებიან და მიეკუთვნებიან P_i ნახევარრგოლს, ამიტომ 7.4 თეორემის თანახმად არ თანაიკვეთება $B_1^{k_1}\times\cdots\times B_n^{k_n}$ $(j_k=1,...,N_k;k=1,...,n)$ მართკუთხედები და ისინი მიეკუთვნებიან P ნახევარრგოლს. გარდა ამისა ცხადია, რომ ეს მართკუთხედები ქმნიან $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის ბადურ დანაწილებას, რომელიც წარმოადგენს მოცემული დანაწილების გაგრძელებას.

7.7 თეორემიდან როგორც კერძო შემთხვევა გამომდინარეობს შემდეგი

7.8. ვთქვათ, $\mathfrak{N}_1,...,\mathfrak{N}_n$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია და $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_n$. მაშინ, როგორიც არ უნდა იყოს $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის $\{A_1^k\times\cdots\times A_n^k\}_{k=1}^p$ დანაწილება, ყოველთვის არსებობს მისი ბადური გაგრძელება.

7.9. ვთქვათ, $P_1,...,P_n$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლებია, $P=P_1\otimes\cdots\otimes P_n$ და P ნახევარრგოლზე განსაზღვრულია სიმრავლის კომპლექსური μ ფუნქცია. μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია P ნახევარრგოლზე, მაშინ და მხოლოდ

მაშინ, როცა ის ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,n)$ სასრულოდ-ადიტიურია A_k სიმრავლის მიმართ P_k ნახევარრგოლზე ყოველი ფიქსირებული $A_i \in P_i$ $(i=1,\dots,n;\ i \neq k)$ სიმრავლისათვის.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $A_1 \times \cdots \times A_n \in P$ და განვიხილოთ $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის ისეთი

$$\left\{A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_i^k \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n\right\}_{k=1}^{p}$$

დანაწილება, რომელშიც დანაწილებულია $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის i-ური $(1 \leq i \leq n)$ გვერდი.

რადგანაც μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია P ნახევარრგოლზე, ამიტომ გვაქვს

$$\mu(A_1,\dots,A_n)=\sum_{k=1}^{p}\mu\left(A_1,\dots,A_{i-1},A_i^k,A_{i+1},\dots,A_n\right).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია $A_i\ (1 \leq i \leq n)$ სიმრავლის მიმართ P_i ნახევარრგოლზე ყოველი ფიქსირებული $A_j \in P_j$ $(j=1,\dots,n; i \neq j)$ სიმრავლისათვის.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $A_1 \times \cdots \times A_n \in P$. თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის დანაწილებას აქვს

$$\left\{A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_i^k \times A_{i+1} \times \cdots \times A_n\right\}_{k=1}^{p}$$

სახე, სადაც დანაწილებულია $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის i-ური $(1 \leq i \leq n)$ გვერდი.

რადგანაც პირობის თანახმად μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია $A_i\ (1 \leq i \leq n)$ სიმრავლის მიმართ P_i ნახევარრგოლზე ყოველი ფიქსირებული $A_j \in P_j\ (j=1,\dots,n; i \neq j)$ სიმრავლისათვის, ამიტომ ვღებულობთ

$$\mu(A_1,\dots,A_n)=\sum_{k=1}^{p}\mu\left(A_1,\dots,A_{i-1},A_i^k,A_{i+1},\dots,A_n\right).$$

ვთქვათ, ახლა, მოცემულია $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის ბადური $\left\{A_1^{j_1} \times \cdots \times A_n^{j_n}\right\}_{j_k=1}^{N_k}(k=1,\dots,n)$ დანაწილება. მაშინ ზემოდამტკიცებულის n-ჯერ

გამოყენების შედეგად მივიღებთ

$$\mu(\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n)=\mu\left(\bigcup_{k_1=1}^{N_1}A_1^{k_1},\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n\right)=\sum_{k_1=1}^{N_1}\mu\left(A_1^{k_1},\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{N_1}\mu\left(A_1^{k_1},\bigcup_{k_2=1}^{N_2}A_2^{k_2},\mathrm{A}_3,\dots,\mathrm{A}_n\right)=\dots=\sum_{k_1=1}^{N_1}\dots\sum_{k_n=1}^{N_n}\mu\left(A_1^{k_1},\dots,A_n^{k_n}\right).$$

დავუშვათ, ახლა, მოცემულია $\mathrm{A}_1\times\dots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედის ნებისმიერი $\{A_1^k\times\dots\times A_n^k\}_{k=1}^p$ დანაწილება. მაშინ 7.7 თეორემის თანახმად არსებობს ამ დანაწილების ბადური $\{B_1^{i_1}\times\dots\times B_n^{i_n}\}_{i_k=1}^{N_k}(k=1,\dots,n)$ გაგრძელება. დანაწილებათა გაგრძელების განსაზღვრის თანახმად $\{B_1^{i_1}\times\dots\times B_n^{i_n}\}_{i_k=1}^{N_k}(k=1,\dots,n)$ დანაწილება შეიცავს $\{A_1^k\times\dots\times A_n^k\}_{k=1}^p$ დანაწილების ყოველი კომპონენტის დანაწილებას. $A_1^k\times\dots\times A_n^k$ $(k=1,\dots,p)$ კომპონენტის დანაწილება აღვნიშნოთ $\{B_1^{k\,j_1}\times\dots\times B_n^{k\,j_n}\}_{j_l=1}^{N_l^k}$ $(l=1,\dots,n)$ სიმბოლოთი. მაშინ გვექნება

$$\sum_{k=1}^{p}\mu\left(A_1^k,\dots,A_n^k\right)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j_1=1}^{N_1^k}\dots\sum_{j_n=1}^{N_n^k}\mu\left(B_1^{k\,j_1},\dots,B_n^{k\,j_n}\right)=$$

$$=\sum_{j_1=1}^{N_1}\dots\sum_{j_n=1}^{N_n}\mu\left(B_1^{j_1},\dots,B_n^{j_n}\right)=\mu(\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n).$$

7.10. ვთქვათ, $\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_n$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლებია, $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\otimes\dots\otimes\mathrm{P}_n$ და P ნახევარრგოლზე განსაზღვრულია სიმრავლის კომპლექსური μ ფუნქცია. მაშინ μ ფუნქცია შეიძლება გაგრძელებულ იქნას P ნახევარრგოლიდან უმცირეს $\mathfrak{R}(\mathrm{P})$ რგოლზე ერთადერთი გზით

$$\mu(\mathrm{E})=\sum_{k=1}^{p}\mu\left(A_1^k,\dots,A_n^k\right)$$

ტოლობის საშუალებით, სადაც $A_1^k\times\dots\times A_n^k\in\mathrm{P}(k=1,\dots,p)$, $\mathrm{E}\in\mathfrak{R}(\mathrm{P})$ და

$$\mathrm{E}=\bigcup_{k=1}^{p}\left(A_1^k\times\dots\times A_n^k\right).$$

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ აღნიშნული გაგრძელების ერთადერთობა. ვთქვათ, მოცემულია E სიმრავლის რაიმე ორი

$$\bigcup_{i=1}^{p}\left(A_1^i\times\dots\times A_n^i\right),\ \bigcup_{j=1}^{q}\left(B_1^j\times\dots\times B_n^j\right)$$

წარმოდგენა. ერთადერთობის დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს

$$\sum_{i=1}^{p}\mu\left(A_1^i,\dots,A_n^i\right)=\sum_{j=1}^{q}\mu\left(B_1^j,\dots,B_n^j\right)$$

ტოლობას.

გვაქვს

$$\left(\bigcup_{i=1}^{p}\left(A_1^i\times\cdots\times A_n^i\right)\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{q}\left(B_1^j\times\cdots\times B_n^j\right)\right)=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q}\left(\left(A_1^i\cap B_1^j\right)\times\cdots\times\left(A_n^i\cap B_n^j\right)\right). \qquad \text{(II.7.1)}$$

რადგანაც პირობის თანახმად $\mathrm{P}_i\ (i=1,\dots,n)$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლია, ამიტომ ადგილი აქვს

$$A_k^i\cap B_k^j=\bigcup_{l_k=1}^{N_k^{ij}}C_{kl_k}^{ij}\ \left(i=1,\dots,p;\ j=1,\dots,q\right).$$

წარმოდგენას. ამ წარმოდგენათა გათვალისწინებით (II.7.1) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\mathrm{E}=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q}\bigcup_{l_1=1}^{N_1^{ij}}\cdots\bigcup_{l_n=1}^{N_n^{ij}}\left(C_{1l_1}^{ij}\times\cdots\times C_{nl_n}^{ij}\right).$$

რადგანაც $C_{kl_k}^{ij}\ \left(l_k=1,\dots,N_k^{ij}\right)$ სიმრავლეები თანაუკვეთია და ეკუთვნის P_k $(k=1,\dots,n)$ ნახევარრგოლს, ამიტომ 7.4 თეორემის თანახმად თანაუკვეთია

$$C_{1l_1}^{ij}\times\cdots\times C_{nl_n}^{ij}\left(l_k=1,\dots,N_k^{ij};i=1,\dots,p;\ j=1,\dots,q\right)$$

მართკუთხედებიც და ეკუთვნიან P ნახევარრგოლს. მაგრამ

$$A_1^i\times\cdots\times A_n^i=\bigcup_{j=1}^{q}\bigcup_{l_1=1}^{N_1^{ij}}\cdots\bigcup_{l_n=1}^{N_n^{ij}}\left(C_{1l_1}^{ij}\times\cdots\times C_{nl_n}^{ij}\right),$$

$$B_1^j\times\cdots\times B_n^j=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{l_1=1}^{N_1^{ij}}\cdots\bigcup_{l_n=1}^{N_n^{ij}}\left(C_{1l_1}^{ij}\times\cdots\times C_{nl_n}^{ij}\right).$$

7.9 თეორემის თანაkმად გვაქვს

$$\sum_{i=1}^{p}\mu\left(A_1^i,\dots,A_n^i\right)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{l_1=1}^{N_1^{ij}}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^{ij}}\mu\left(C_{1l_1}^{ij},\dots,C_{nl_n}^{ij}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}\sum_{l_1=1}^{N_1^{ij}}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^{ij}}\mu\left(C_{1l_1}^{ij},\dots,C_{nl_n}^{ij}\right)=\sum_{j=1}^{q}\mu\left(B_1^j,\dots,B_n^j\right).$$

ვაჩვენოთ, ახლა, რომ μ ფუნქცია სასრულოდ-ადიტიურია $\mathfrak{R}(\mathrm{P})$

რგოლზე. ვთქვათ, $\{E_k\}_{k=1}^{p}$ $(E_k \in \Re(\mathrm{P})\,(k=1,\dots,p))$ არის $\mathrm{E}\in\Re(\mathrm{P})$ სიმრავლის რაიმე დანაწილება.

რადგანაც $\mathrm{E}, E_i \in \Re(\mathrm{P})(i=1,\dots,p)$, ამიტომ

$$\mathrm{E}=\bigcup_{j=1}^{q}\left(A_1^{1j}\times\cdots\times A_n^{1j}\right),$$

$$E_i=\bigcup_{k_i=1}^{N_i}\left(A_1^{2k_i}\times\cdots\times A_n^{2k_i}\right)(i=1,\dots,p)$$

სადაც $A_1^{1j}\times\cdots\times A_n^{1j},\ A_1^{2k_i}\times\cdots\times A_n^{2k_i}\in\mathrm{P}\ (j=1,\dots,q;\ k_i=1,\dots,N_i;\ i=1,\dots,p)$ შესაბამისად თანაუკვეთი მართკუთხედებია.

განსაზღვრის თანახმად

$$\mu(\mathrm{E})=\sum_{j=1}^{q}\mu\left(A_1^{1j},\dots,A_n^{1j}\right).$$

გვაქვს ;

$$A_1^{1j}\times\cdots\times A_1^{1j}=\left(A_1^{1j}\times\cdots\times A_1^{1j}\right)\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{p}E_i\right)=\left(A_1^{1j}\times\cdots\times A_1^{1j}\right)\bigcap=$$
$$\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{k_i=1}^{N_i}\left(A_1^{2k_i}\times\cdots\times A_1^{2k_i}\right)\right)=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{k_i=1}^{N_i}\left(\left(A_1^{1j}\cap A_1^{2k_i}\right)\times\cdots\times\left(A_n^{1j}\cap A_n^{2k_i}\right)\right)\ (j=1,\dots,q) \tag{II.7.2}$$

რადგანაც $\mathrm{P}_s(s=1,\dots,n)$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლია და $A_s^{1j},A_s^{2k_i}\in\mathrm{P}_s$, ამიტომ

$$A_k^{1j}\bigcap A_k^{2k_i}=\bigcup_{l_s=1}^{N_s^{jk_i}}B_{sl_s}^{jk_i}\ \ (s=1,\dots,n).$$

ამ წარმოდგენათა გათვალისწინებით (II.7.2) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$;\qquad A_1^{1j}\times\cdots\times A_1^{1j}=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{k_i=1}^{N_i}\bigcup_{l_1=1}^{N_1^{jk_i}}\cdots\bigcup_{l_n=1}^{N_n^{jk_i}}\left(B_{1l_1}^{jk_i}\times\cdots\times B_{nl_n}^{jk_i}\right).$$

ზემოდამტკიცებულის ძალით

$$\mu(\mathrm{E})=\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k_i=1}^{N_i}\sum_{l_1=1}^{N_1^{jk_i}}\cdots\sum_{l_{n=1}}^{N_n^{jk_i}}\mu\left(B_{1l_1}^{jk_i},\dots,B_{nl_n}^{jk_i}\right). \tag{II.7.3}$$

რადგანაც

$$E_i=E_i\bigcap\left(\bigcup_{j=1}^{q}\left(A_1^{1j}\times\cdots\times A_1^{1j}\right)\right)=\bigcup_{j=1}^{q}\bigcup_{k_i=1}^{N_i}\bigcup_{l_1=1}^{N_1^{jk_i}}\cdots\bigcup_{l_n=1}^{N_n^{jk_i}}\left(B_{1l_1}^{jk_i}\times\cdots\times B_{nl_n}^{jk_i}\right)(i=1,\dots,p),$$

ამიტომ განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$\mu(E_i)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k_1=1}^{N_j}\sum_{l_1=1}^{N_1^{jk_1}}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^{jk_n}}\mu\left(B_{1l_1}^{jk_1},\dots,B_{nl_n}^{jk_n}\right)(i=1,\dots,p)$$

რის გათვალისწინებითაც (II.7.3) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\mu(\mathrm{E})=\sum_{i=1}^{p}\mu(E_i).$$

7.9 თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი

7.11. ვთქვათ, $\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_n$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლებია, $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\otimes\cdots\otimes\mathrm{P}_n$ და $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n\in\mathrm{P}(\mathrm{A}_k\in\mathrm{P}_k(k=1,\dots,n))$. თუ μ_k არის $\mathrm{P}_k(k=1,\dots,n)$ ნახევარრგოლზე განსაზღვრული სიმრავლის კომპლექსური სასრულოდ-ადიტიური სასრული ვარიაციის ფუნქცია, მაშინ $\mu(\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n)=\mu_1(\mathrm{A}_1)\times\cdots\times\mu_n(\mathrm{A}_n)$ ფუნქცია წარმოადგენს P ნახევარრგოლზე განსაზღვრულ სიმრავლის კომპლექსურ სასრულოდ-ადიტიური სასრული ვარიაციის ფუნქციას.

§8. ზოგადი n-ჯერადი და ზოგადი n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები.

რადგანაც 7.6 თეორემის თანახმად ნებისმიერი სასრული რაოდენობის სიმრავლეთა ნორმალური კლასების ნამრავლი სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ ნორმალური კლასების ნამრავლის მიმართ შესაძლებელია განვსაზღვროთ ზოგადი ჯერადი და განმეორებითი ინტეგრალები.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}_1,\ldots,\mathfrak{N}_n$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_n$, $\mathrm{E}\in\mathfrak{N}$ $(\mathrm{E}=\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n,\ \mathrm{A}_k\in\mathfrak{N}_k\ (k=1,\ldots,n))$ და $\mu\in[\mathrm{D};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. განვიხილოთ E მართკუთხედის რაიმე $D_0\mathrm{E}=\{A_1^i\times\cdots\times A_n^i\}_{i=1}^p$ დანაწილება და $\mu(A_1^i,\ldots,A_n^i)\,(i=1,\ldots,p)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის შევადგინოთ

$$\sum_{i=1}^{p}\mu\left(A_1^i,\ldots,A_n^i\right)$$

ჯამი. ყველა ასეთი ჯამის სიმრავლე, რომელიც შეესაბამება $\mu(A_1^i,\ldots,A_n^i)$ $(i=1,\ldots,p)$ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო არჩევას აღვნიშნოთ $S(\mu;D_0\mathrm{E})$ სიმბოლოთი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$T(\mu;D_0\mathrm{E})=\bigcup\{S(\mu;D\mathrm{E}):D\mathrm{E}\succ D_0\mathrm{E},D\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N}\}.$$

ცხადია, რომ $D_1\mathrm{E}\prec D_2\mathrm{E}$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $T(\mu;D_1\mathrm{E})\supset T(\mu;D_2\mathrm{E})$ დამოკიდებულება. მაშასადამე, $\sup\{T(\mu;D\mathrm{E})\}(D\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N})$ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა არაზრდად განზოგადებულ მიმდევრობას, ხოლო $\inf\{T(\mu;D\mathrm{E})\}(D\mathrm{E}\in\Sigma(\mathrm{E})\mathfrak{N})$ კი – ნამდვილ რიცხვთა არაკლებად განზოგადებულ მიმდევრობას, ამიტომ არსებობს, სასრული ან უსასრულო,

$$\lim_{D\mathrm{E}}\sup\{T(\mu;D\mathrm{E})\},\qquad \lim_{D\mathrm{E}}\inf\{T(\mu;D\mathrm{E})\}$$

ზღვრები. ამ ზღვრებს ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად n-ჯერად ზედა და ქვედა ინტეგრალს $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და მათ შესაბამისად აღვნიშნავთ

$$(\mathfrak{N})\ \overline{\int\!\!\ldots\!\!\int_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\ldots,d\mathrm{A}_n),\qquad (\mathfrak{N})\ \underline{\int\!\!\ldots\!\!\int_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\ldots,d\mathrm{A}_n) \qquad \text{(II.8.1)}$$

სიმბოლოთი.

თუ (II.8.1) ინტეგრალები არსებობს და ისინი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მათ საერთო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ

$$(\mathfrak{N}) \int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

სიმბოლოთი და ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად n-ჯერად ინტეგრალს $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ.

ზოგად n-ჯერად ინტეგრალს და ზოგად n-ჯერად ზედა და ქვედა ინტეგრალებს გააჩნია იგივე თვისებები, რაც შესაბამის ერთჯერად ინტეგრალებს, რომლებიც მტკიცდებიან ერთჯერადი ინტეგრალების შესაბამისი თვისებების მსგავსად. ამიტომ შემდეგში ჩვენ ვისარგებლებთ ამ თვისებებით ყოველგვარი დამტკიცების გარეშე.

განვსაზღვროთ, ახლა, ზოგადი n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები. ვთქვათ, $\mathfrak{N}_1,\dots,\mathfrak{N}_n$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_n$, $E\in\mathfrak{N}$ $(E=A_1\times\cdots\times A_n,\ A_k\in\mathfrak{N}_k\ (k=1,\dots,n))$ და $\mu\in[D;E;\mathfrak{N}]$. განვიხილოთ $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის ისეთი $D_0^1E=\{A_1^i\times A_2\times\cdots\times A_n\}_{i=1}^p$ დანაწილება, რომელშიც დანაწილებულია $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის A_1 გვერდი და $\mu(A_1^i,A_2,\dots,A_n)(i=1,\dots,p)$ მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის შევადგინოთ

$$\sum_{i=1}^{p}\mu(A_1^i,A_2,\dots,A_n) \tag{II.8.2}$$

ჯამი. ყველა ასეთი ჯამის სიმრავლე, რომელიც შეესაბამება $\mu(A_1^i,A_2,\dots,A_n)$ $(i=1,\dots,p)$ მნიშვნელობათა ყველა შესაძლო არჩევას აღვნიშნოთ $S(\mu;A_2,\dots,A_n;D_0^1E)$ სიმბოლოთი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$T(\mu;A_2,\dots,A_n;D_0^1E)=\bigcup\{S(\mu;A_2,\dots,A_n;D^1E):D^1E\succ D_0^1E,D^1E\in\Sigma(E)\mathfrak{N}\}.$$

ცხადია, რომ $D_1^1E\prec D_2^1E$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $T(\mu;A_2,\dots,A_n;D_1^1E)\supset T(\mu;A_2,\dots,A_n;D_2^1E)$ დამოკიდებულება. მაშასადამე, $\sup\{T(\mu;A_2,\dots,A_n;D^1E)\}\ (D^1E\in\Sigma(E)\mathfrak{N})$ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა არაზრდად განზოგადებულ მიმდევრობას, ხოლო $\inf\{T(\mu;A_2,\dots,A_n;D^1E)\}\ (D^1E\in\Sigma(E)\mathfrak{N})$ კი – ნამდვილ რიცხვთა არაკლებად განზოგადებულ მიმდევრობას, ამიტომ

არსებობს, სასრული ან უსასრული,

$$\lim_{D'\mathrm{E}}\sup\left\{T\left(\mu;\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n;D'\mathrm{E}\right)\right\},\quad \lim_{D'\mathrm{E}}\inf\left\{T\left(\mu;\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n;D'\mathrm{E}\right)\right\}$$

ზღვრები. ამ ზღვრებს ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად ერთჯერად ზედა და ქვედა ინტეგრალს A_1 სიმრავლეზე $\mathfrak{N}_1$ კლასის მიმართ ფიქსირებული $\mathrm{A}_k\in\mathfrak{N}_k\ (k=2,\dots,n)$ სიმრავლეებისათვის და მათ შესაბამისად აღვნიშნავთ

$$(\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n),\quad (\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n) \tag{II.8.3}$$

სიმბოლოთი.

თუ (II.8.3) ინტეგრალები არსებობს და ისინი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მათ საერთო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ

$$(\mathfrak{N}_1)\int_{\mathrm{A}_1}\mu(d\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n)$$

სიმბოლოთი და ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად ერთჯერად ინტეგრალს A_1 სიმრავლეზე $\mathfrak{N}_1$ კლასის მიმართ ფიქსირებული $\mathrm{A}_k\in\mathfrak{N}_k\ (k=2,\dots,n)$ სიმრავლეებისათვის.

შევნიშნოთ, რომ ქვემოთ ზოგად n-ჯერად განმეორებითი ინტეგრალების განსაზღვრას მოვიყვანთ მხოლოდ ზედა ინტეგრალებისათვის. ქვედა ინტეგრალებისათვის განსაზღვრა ანლოგიურია.

განვიხილოთ $D_0^1\mathrm{E}$ დანაწილების ისეთი $D_0^2\mathrm{E}$ გაგრძელება, რომელშიც დანაწილებულია მხოლოდ A_2 გვერდი და

$$\nu(\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n)=(\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n)$$

ფუნქციის მნიშვნელობათა რაიმე არჩევისათვის შევადგინოთ (II.8.2) ჯამის ანალოგიური ჯამი. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ

$$(\mathfrak{N}_2)\overline{\int_{\mathrm{A}_2}}\nu(d\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n)=(\mathfrak{N}_2)\overline{\int_{\mathrm{A}_2}}\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,d\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3,\dots,\mathrm{A}_n)\right)$$

ინტეგრალს, რომელსაც ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად ორჯერად ინტეგრალს $\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_2$ სიმრავლეზე $\mathfrak{N}_1\otimes\mathfrak{N}_2$ კლასის მიმართ ფიქსირებული $\mathrm{A}_k\in\mathfrak{N}_k\ (k=3,\dots,n)$ სიმრავლეებისათვის.

ამ პროცესის გაგრძელებით, თანმიმდევრობით $A_1,\dots,A_n$ გვერდების მიმართ, საბოლოოდ მივიღებთ

$$(\mathfrak{N}_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\right) \tag{II.8.4}$$

ინტეგრალს, რომელსაც ვუწოდებთ μ ფუნქციის ზოგად n-ჯერად ზედა განმეორებით ინტეგრალს $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ.

ანალოგიურად განისაზღვრებიან, სხვა დანარჩენი, ზოგადი n-ჯერადი ზედა განმეორებითი ინტეგრალები, რომლებიც (II.8.4) ინტეგრალიდან მიიღებიან $A_1,\dots,A_n$ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებით. ანალოგიურად განისზღვრება ზოგადი n-ჯერადი განმეორებითი ქვედა ინტეგრალები.

8.1. ვთქვათ, $P_1,\dots,P_n$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლებია, $P=P_1\otimes\cdots\otimes P_n$, $A_1\times\cdots\times A_n\in P\left(A_k\in P_k\ (k=1,\dots,n)\right)$ და $\mu\in[D;A_1\times\cdots\times A_n;P]$. მაშინ ყოველი $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედისათვის ადგილი აქვს, შემდეგ $n!$

$$(P)\underline{\int\dots\int_{A_1\times\cdots\times A_n}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\le(P_n)\underline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((P_1)\underline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right)\le$$

$$\le(P_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((P_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right)\le(P)\overline{\int\dots\int_{A_1\times\cdots\times A_n}}\mu(dA_1,\dots,dA_n), \tag{II.8.5}$$

$$\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{II.8.6}$$

$$(P)\underline{\int\dots\int_{A_1\times\cdots\times A_n}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\le(P_1)\underline{\int_{A_1}}\left(\dots\left((P_n)\underline{\int_{A_n}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right)\le$$

$$\le(P_1)\overline{\int_{A_1}}\left(\dots\left((P_n)\overline{\int_{A_n}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right)\le(P)\overline{\int\dots\int_{A_1\times\cdots\times A_n}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

უტოლობას, რომლებიც (II.8.5) უტოლობიდან მიიღებიან $A_1,\dots,A_n$ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებით.

დამტკიცება. თეორემას დავამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. დავამტკიცოთ (II.8.5) უტოლობის სამართლიანობა.

სანამ თეორემის უშუალო დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ შევნიშნოთ, რომ ამ; თეორემის დამტკიცება $n=2$ შემთხვევისათვის, „ძველი" განსაზღვრით მოყვანილი ნახევარრგოლისათვის, მოყვანილია [3]-ში (გვ.162-170).

დამტკიცება „ახალი" განსაზღვრით მოყვანილი ნახევარრგოლის შემთხვე-ვაში მსგავსია. მაშასადმე, თეორემა სამართლიანია $n=2$ შემთხვევისათვის.

დავუშვათ, ახლა, თეორემის სამართლიანობა n-სათვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$-სათვის. დაშვების თანახმად ადგილი აქვს (II.8.5) უტოლობას.

ვთქვათ, $P = P_1 \otimes \cdots \otimes P_{n+1}$ და $A_1 \times \cdots \times A_{n+1} \in P \left(A_k \in P_k \left(k = 1,\dots,n+1\right)\right)$.

რადგანაც თეორემა სამართლიანია $n=2$-სათვის, ამიტომ გვაქვს

$$(P) \underline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_{n+1}} \mu(dA_1,\dots,dA_{n+1}) = ((P_1\otimes\cdots\otimes P_n)\otimes P_{n+1}) \underline{\int\cdots\int\int}_{(A_1\times\cdots\times A_n)\times A_{n+1}} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \le$$

$$\le (P_{n+1}) \underline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_1\otimes\cdots\otimes P_n) \underline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \le$$

$\le$(აქედან ინდუქციის თანახმად ვღებულობთ) $\le$

$$\le (P_{n+1}) \underline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_n) \underline{\int}_{A_n} \left(\cdots \left((P_1) \underline{\int}_{A_1} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \cdots \right) \right) \le$$

$$\le (P_{n+1}) \underline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_n) \overline{\int}_{A_n} \left(\cdots \left((P_1) \overline{\int}_{A_1} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \cdots \right) \right) \le$$

$$\le (P_{n+1}) \underline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_1\otimes\cdots\otimes P_n) \overline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \le$$

$$\le (P_{n+1}) \overline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_1\otimes\cdots\otimes P_n) \underline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \le$$

$$\le (P_{n+1}) \overline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_n) \underline{\int}_{A_n} \left(\cdots \left((P_1) \underline{\int}_{A_1} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \cdots \right) \right) \le$$

$$\le (P_{n+1}) \overline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_n) \overline{\int}_{A_n} \left(\cdots \left((P_1) \overline{\int}_{A_1} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \cdots \right) \right) \le$$

$$\le (P_{n+1}) \overline{\int}_{A_{n+1}} \left((P_1\otimes\cdots\otimes P_n) \overline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \right) \le$$

$$\le ((P_1\otimes\cdots\otimes P_n)\otimes P_{n+1}) \overline{\int\cdots\int\int}_{(A_1\times\cdots\times A_n)\times A_{n+1}} \mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1}) \le (P) \overline{\int\cdots\int}_{A_1\times\cdots\times A_{n+1}} \mu(dA_1,\dots,dA_{n+1}) .$$

რადგანაც $3^0.2$ თეორემის თანახმად სიმრავლეთა $\mathfrak{R}$ ნორმალური კლა-

სიდან აღებული ყოველი E სიმრავლისათვის $\mathfrak{N}\mathrm{E}$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლია და

$$(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E})=(\mathfrak{N}\mathrm{E})\int_{\mathrm{E}}\mu(d\mathrm{E}),$$

ამიტომ 8.1 თეორემიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა:

8.2. ვთქვათ, $\mathfrak{N}_1,\dots,\mathfrak{N}_n$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_n$, $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n\in\mathfrak{N}$ $(\mathrm{A}_k\in\mathfrak{N}_k\ (k=1,\dots,n))$ და $\mu\in[\mathrm{D};\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathfrak{N}]$. მაშინ ყოველი $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედისათვის ადგილი აქვს, შემდეგ $n!$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{N})\underline{\int\cdots\int_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)&\le(\mathfrak{N}_n)\underline{\int_{\mathrm{A}_n}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\le\\&\le(\mathfrak{N}_n)\overline{\int_{\mathrm{A}_n}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\le(\mathfrak{N})\overline{\int\cdots\int_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n),\end{aligned}\tag{II.8.7}$$

. . . .

$$\begin{aligned}(\mathfrak{N})\underline{\int\cdots\int_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)&\le(\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{\mathrm{A}_1}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_n)\underline{\int_{\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\le\\&\le(\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{\mathrm{A}_1}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_n)\overline{\int_{\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\le(\mathfrak{N})\overline{\int\cdots\int_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\end{aligned}$$

უტოლობებს, რომლებიც (II.8.7) უტოლობიდან მიიღებიან $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n$ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებით.

შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ $(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი

$$(\mathfrak{N}_{n-1})\int_{\mathrm{A}_{n-1}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\int_{\mathrm{A}_1}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_{n-1},\mathrm{A}'_n)\right)\cdots\right)$$

ინტეგრალი არ არსებობს არცერთი $\mathrm{A}'_n\in\mathfrak{N}_n\mathrm{A}_n$ სიმრავლისათვის, მაშინ როცა n-ჯერადი განმეორებითი

$$(\mathfrak{N}_n)\int_{\mathrm{A}_n}\left((\mathfrak{N}_{n-1})\overline{\int_{\mathrm{A}_{n-1}}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_{n-1},d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\right),$$

$$(\mathfrak{N}_n)\int_{\mathrm{A}_n}\left((\mathfrak{N}_{n-1})\underline{\int_{\mathrm{A}_{n-1}}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{\mathrm{A}_1}}\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_{n-1},d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\right)$$

ინტეგრალები არსებობენ და ისინი ერთმანეთის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში ამ ინტეგრალების საერთო მნიშვნელობას ვუწოდებთ ზოგად n-ჯერად განზოგადებულ განმეორებით ინტეგრალს და მას აღვნიშნავთ

$$(\mathfrak{N}_n)\int_{A_n}\left((\mathfrak{N}_{n-1})\int_{A_{n-1}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},dA_n)\right)\dots\right)\right) \tag{II 8.8}$$

სიმბოლოთი.

მაგალითად, ვთქვათ, $P_1=\dots=P_n$ არის $(a,b]\subset(0,1]$ სახის ყველა ნახევრადღია ინტერვალისაგან შედგენილი ნახევარრგოლი და $P=P_1\otimes\cdots\otimes P_n$. P_1 ნახევარრგოლზე განვსაზღვროთ $\mu_k\,(k=1,\dots,n)$ ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$\mu_1((a,b])=l^2((a,b]),\ \mu_k((a,b])=f((a,b])\,(k=2,\dots,n),$$

სადაც f არის დირიხლეს ფუნქციის შესაბამისი სიმრავლის ფუნქცია, ხოლო l კი – $(a,b]$ ნახევრადღია ინტერვალის სიგრძე. ვთქვათ,

$$\mu((a_1,b_1],\dots,(a_n,b_n])=\mu_1((a_1,b_1])\times\cdots\times\mu((a_n,b_n])\,(0\le a_k<b_k<1\,(k=1,\dots,n)).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $A_1=\dots=A_n=(0,1]$, $A'_n=(a'_n,b'_n]$, $A_1\times\cdots\times A_n\in P$.

ცხადია, რომ

$$(P_{n-1})\int_{A_{n-1}}\left(\dots\left((P_1)\int_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},A'_n)\right)\dots\right)$$

ინტეგრალი არ არსებობს არცერთი $A'_n\in P_nA_n$ სიმრავლისათვის, მაგრამ

$$(P)\int\dots\int_{A_1\times\dots\times A_n}\mu(dA_1,\dots,dA_n)=(P_n)\int_{A_n}\left(\dots\left((P_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right)=0.$$

(II.8.8) ინტეგრალების ანალოგიურად განისაზღვრებიან, $A_1,\dots,A_n$ სიმრავლეთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებით მიღებული, დანარჩენი ზოგადი n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალები.

8.3. n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი

$$(\mathfrak{N}_n)\int_{A_n}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right) \tag{II.8.9}$$

ინტეგრალი არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(\mathfrak{N}_n)\underline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right)=(\mathfrak{N}_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\dots\right). \tag{II.8.10}$$

დამტკიცება. თეორემას დავამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. სანამ თეორემის უშუალო დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ შევნიშნოთ, რომ ამ თეორემის შესაბამისი თეორემის დამტკიცება მულტიპლიკაციური კლასის შემთხვევაში მოყვანილია [3]-ში (გვ.171-174). ნორმალური კლასების შემთხვევაში დამტკიცება მსგავსია. მაშასადამე, თეორემა სამართლიანია $n=2$ შემთხვევისათვის.

დავუშვათ თეორემის სამართლიანობა n-სათვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა $(n+1)$-სათვის. დაშვების თანახმად (II.8.9) ინტეგრალი არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს (II.8.10) ტოლობას.

დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს

$$(\mathfrak{N}_{n+1})\int_{A_{n+1}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_{n+1})\right)\dots\right)$$

$(n+1)$-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი.

განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$(\mathfrak{N}_{n+1})\int_{A_{n+1}}\left((\mathfrak{N}_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1})\right)\dots\right)\right)=$$
$$=(\mathfrak{N}_{n+1})\int_{A_{n+1}}\left((\mathfrak{N}_n)\underline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1})\right)\dots\right)\right).$$

საიდანაც დაშვების თანახმად ვღებულობთ

$$(\mathfrak{N}_{n+1})\underline{\int_{A_{n+1}}}\left((\mathfrak{N}_n)\underline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1})\right)\dots\right)\right)=$$
$$=(\mathfrak{N}_{n+1})\underline{\int_{A_{n+1}}}\left((\mathfrak{N}_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1})\right)\dots\right)\right)=$$
$$=(\mathfrak{N}_{n+1})\overline{\int_{A_{n+1}}}\left((\mathfrak{N}_n)\underline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\underline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1})\right)\dots\right)\right)=$$
$$=(\mathfrak{N}_{n+1})\overline{\int_{A_{n+1}}}\left((\mathfrak{N}_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\dots\left((\mathfrak{N}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_n,dA_{n+1})\right)\dots\right)\right).$$

პირობის საკმარისობა ცხადია.

8.4. n-ჯერადი განმეორებითი

$$(\mathfrak{N}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\cdots\right) \tag{II.8.11}$$

ინტეგრალი არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს (II.8.10) ტოლობას და

$$(\mathfrak{N}_{n-1})\int\limits_{A_{n-1}}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\ldots,dA_{n-1},A_n)\right)\cdots\right)$$

$(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}_n A_n$ კლასზე.

ვთქვათ, $A_1\times\cdots\times A_n \in P\left(A_k \in P_k\left(k=1,\ldots,n\right), P=P_1\otimes\cdots\otimes P_n\right)$ და $\mu\in[D;E;P]$.

8.5. თუ არსებობს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)$$

n-ჯერადი ინტეგრალი, მაშინ არსებობს

$$(P_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int\limits_{A_1}}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)=(P_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int\limits_{A_1}}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 8.1 და 8.3 თეორემებიდან.

8.6. თუ არსებობს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)$$

n-ჯერადი ინტეგრალი და

$$(P_{n-1})\int\limits_{A_{n-1}}\left(\cdots\left((P_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\ldots,dA_{n-1},A_n)\right)\cdots\right)$$

$(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $P_n A_n$ კლასზე, მაშინ არსებობს

$$(\mathrm{P}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(\mathrm{P})\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)=(\mathrm{P}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 8.1 და 8.4 თეორემებიდან.

ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{D}_k;A_1\times\cdots A_n;\mathrm{P}]$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$(\mathrm{P}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\underline{\int}}_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)=(\mathrm{P}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\underline{\int}}_{A_1}\mathrm{Re}\,\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)+$$

$$+i(\mathrm{P}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\underline{\int}}_{A_1}\mathrm{Im}\,\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right).$$

8.7. n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი

$$(\mathrm{P}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\underline{\int}}_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},dA_n)\right)\cdots\right)$$

ინტეგრალი არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}_n)\underline{\int}_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\underline{\int}_{A_1}\mathrm{Re}\,\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)&=(\mathrm{P}_n)\overline{\int}_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int}_{A_1}\mathrm{Re}\,\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right),\\(\mathrm{P}_n)\underline{\int}_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\underline{\int}_{A_1}\mathrm{Im}\,\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)&=(\mathrm{P}_n)\overline{\int}_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int}_{A_1}\mathrm{Im}\,\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right).\end{aligned}\qquad\text{(II.8.11)}$$

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 8.3 და 1.11 თეორემებიდან.

8.8. n-ჯერადი განმეორებითი

$$(\mathrm{P}_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

ინტეგრალი არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვს (II.8.11) ტოლობებს და

$$\begin{aligned}&(\mathrm{P}_{n-1})\int\limits_{A_{n-1}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{A_1}\mathrm{Re}\,\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},A_n)\right)\cdots\right),\\&(\mathrm{P}_{n-1})\int\limits_{A_{n-1}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{A_1}\mathrm{Im}\,\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},A_n)\right)\cdots\right)\end{aligned}\qquad\text{(II.8.12)}$$

$(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები დიფერენციალურად განსაზ-

ღვრულია $P_n A_n$ კლასზე,

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 8.4 და 1.11 თეორემებიდან.

8.9. თუ არსებობს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

n-ჯერადი ინტეგრალი, მაშინ არსებობს

$$(P_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int\limits_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},dA_n)\right)\cdots\right)$$

n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)=(P_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int\limits_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},dA_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 8.1 და 8.6 თეორემებიდან.

8.10. თუ არსებობს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

n-ჯერადი ინტეგრალი და (II.8.12) $(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები დიფერენციალურად განსაზღვრულია $P_n A_n$ კლასზე, მაშინ არსებობს

$$(P_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)=(P_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\int\limits_{A_1}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 8.1 და 8.7 თეორემებიდან.

8.11. ვთქვათ, არსებობს

$$(P_n)\int\limits_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int\limits_{A_1}}\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},dA_n)\right)\cdots\right)$$

n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი. იმისათვის, რომ არსებობდეს

$$(P)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

n-ჯერადი ინტეგრალი და ადგილი ჰქონდეს

$$(\mathrm{P})\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)=(\mathrm{P}_n)\int_{A_n}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\ldots,dA_{n-1},dA_n)\right)\ldots\right)$$

ტოლობას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$(\mathrm{P}_n)\underline{\int_{A_n}}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\underline{\int_{A_1}}\operatorname{Re}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\ldots\right)\le(\mathrm{P})\underline{\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int}\operatorname{Re}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\le$$

$$\le(\mathrm{P})\overline{\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int}\operatorname{Re}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\le(\mathrm{P}_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int_{A_1}}\operatorname{Re}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\ldots\right),$$

$$(\mathrm{P}_n)\underline{\int_{A_n}}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\underline{\int_{A_1}}\operatorname{Im}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\ldots\right)\le(\mathrm{P})\underline{\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int}\operatorname{Im}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\le \tag{II.8.13}$$

$$\le(\mathrm{P})\overline{\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int}\operatorname{Im}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\le(\mathrm{P}_n)\overline{\int_{A_n}}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int_{A_1}}\operatorname{Im}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\ldots\right)$$

უტოლობებს.

ეს თეორემა მტკიცდება 8.1 და 8.5 თეორემების გამოყენებით.

8.12. ვთქვათ, არსებობს

$$(\mathrm{P}_n)\int_{A_n}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int_{A_1}}\mu(dA_1,\ldots,dA_{n-1},dA_n)\right)\ldots\right)$$

n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი. იმისათვის, რომ არსებობდეს

$$(\mathrm{P})\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n),\quad (\mathrm{P}_n)\int_{A_n}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\int_{A_1}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\ldots\right)$$

ინტეგრალები და ადგილი ჰქონდეს

$$(\mathrm{P})\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)=(\mathrm{P}_n)\int_{A_n}\left(\ldots\left((\mathrm{P}_1)\int_{A_1}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)\ldots\right)$$

ტოლობას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს (II.8.13) უტოლობებს და (II.8.12) $(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები იყვნენ დიფერენციალურად განსაზღვრული $\mathrm{P}_n A_n$ კლასზე.

ეს თეორემა მტკიცდება 8.1 და 8.6 თეორემების გამოყენებით.

§9. სტილტიესის ტიპის ზოგადი n-ჯერადი და ზოგადი n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}_1,...,\mathfrak{N}_n$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_n$ და $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n\in\mathfrak{N}(\mathrm{A}_k\in\mathfrak{N}_k(k=1,...,n))$ მართკუთხედზე განსაზღვრულია ელემენტის კომპლექსური f ფუნქცია. $f(\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_n)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ f ფუნქციის შესაბამისი სიმრავლის ფუნქცია, ე.ი. სიმრავლის მრავალსახა ფუნქცია, რომელიც ყოველ $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედზე ღებულობს ყველა $f(x_1,...,x_n)$ მნიშვნელობას, როცა $(x_1,...,x_n)$ წერტილი გაირბენს $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედს. ვთქვათ, $\mu\in[\mathrm{D}_k;\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathfrak{N}]$.

შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა:

$$(\mathfrak{N})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,...,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n)=(\mathfrak{N})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\!\!\cdots\!\int f(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n)\mu(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n),$$

$$(\mathfrak{N}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1}f(x_1,...,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)= \tag{II.9.1}$$

$$=(\mathfrak{N}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1}f(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n)\mu(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right),$$

თუ არსებობს

$$(\mathfrak{N})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,...,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n),$$

;

$$(\mathfrak{N}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\cdots\left((\mathfrak{N}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1}f(x_1,...,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)$$

ინტეგრალები, მაშინ მათ შესაბამისად ვუწოდებთ f ფუნქციის სტილტიესის ტიპის ზოგად n-ჯერად და ზოგად n-ჯერად განმეორებით ინტეგრალს μ ფუნქციით $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ.

ვთქვათ, $\mathrm{P}_1,...,\mathrm{P}_n$ სიმრავლეთა ნახევარრგოლებია, $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\otimes\cdots\otimes\mathrm{P}_n$ და $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n\in\mathrm{P}\ (\mathrm{A}_k\in\mathbb{P}_k(k=1,...,n))$ მართკუთხედზე განსაზღვრულია ელემენტის კომპლექსური f ფუნქცია.

9.1. თუ არსებობს

;

$$(\mathrm{P})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,...,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,...,d\mathrm{A}_n)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი ინტეგრალი, მაშინ არსებობს

$$(P_n)\int_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int_{A_1}}f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(P)\int\cdots\int_{A_1\times\cdots\times A_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)=(P_n)\int_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int_{A_1}}f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას.

ეს თეორემა მიიღება წინა პარაგრაფის 8.5 თეორემიდან.

9.2. თუ არსებობს

$$(P)\int\cdots\int_{A_1\times\cdots\times A_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი ინტეგრალი და

$$(P_{n-1})\int_{A_{n-1}}\left(\cdots\left((P_1)\int_{A_1}f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_{n-1},A_n)\right)\cdots\right)$$

სტილტიესის ტიპის $(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია P_nA_n კლასზე, მაშინ არსებობს

$$(P_n)\int_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\int_{A_1}f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(P)\int\cdots\int_{A_1\times\cdots\times A_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)=(P_n)\int_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\int_{A_1}f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას.

ეს თეორემა მიიღება წინა პარაგრაფის 8.6 თეორემიდან.

9.3. ვთქვათ, არსებობს

$$(P_n)\int_{A_n}\left(\cdots\left((P_1)\overline{\int_{A_1}}f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)\cdots\right)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი. იმისათვის, რომ არსებობდეს

$$(P)\int\cdots\int_{A_1\times\cdots\times A_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი ინტეგრალი და ადგილი ჰქონდეს

$$(\mathrm{P})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)=(\mathrm{P}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_1}} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს

$$\begin{gathered}
(\mathrm{P}_n)\underline{\int\limits_{\mathrm{A}_n}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\underline{\int\limits_{\mathrm{A}_1}}\mathrm{Re}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\le(\mathrm{P})\underline{\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n}}\mathrm{Re}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\le \\
\le(\mathrm{P})\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n}}\mathrm{Re}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\le(\mathrm{P}_n)\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_n}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_1}}\mathrm{Re}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right), \\
(\mathrm{P}_n)\underline{\int\limits_{\mathrm{A}_n}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\underline{\int\limits_{\mathrm{A}_1}}\mathrm{Im}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)\le(\mathrm{P})\underline{\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n}}\mathrm{Im}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\le \\
\le(\mathrm{P})\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n}}\mathrm{Im}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\le(\mathrm{P}_n)\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_n}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_1}}\mathrm{Im}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)
\end{gathered}\tag{II.9.2}$$

უტოლობებს.

ეს თეორემა მიიღება წინა პარაგრაფის 8.11 თეორემიდან.

9.4. ვთქვათ, არსებობს

$$(\mathrm{P}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\overline{\int\limits_{\mathrm{A}_1}} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი განზოგადებული განმეორებითი ინტეგრალი. იმისათვის, რომ არსებობდეს

$$(\mathrm{P})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n),$$

$$(\mathrm{P}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი ინტეგრალები და ადგილი ჰქონდეს

$$(\mathrm{P})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)=(\mathrm{P}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)$$

ტოლობას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს (II.9.2) უტოლობებს და

$$(\mathrm{P}_{n-1})\int\limits_{\mathrm{A}_{n-1}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1}\mathrm{Re}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_{n-1},\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right),$$

$$(\mathrm{P}_{n-1})\int\limits_{\mathrm{A}_{n-1}}\left(\cdots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1}\mathrm{Im}(f\cdot\mu)(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_{n-1},\mathrm{A}_n)\right)\cdots\right)$$

სტილტიესის ტიპის $(n-1)$-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები იყვნენ დიფერენციალურად განსაზღვრული $\mathrm{P}_n\mathrm{A}_n$ კლასზე.

ეს; თეორემა მიიღება წინა პარაგრაფის 8.12 თეორემიდან.

თუ μ არის $\mathfrak{A}$E კლასზე განსაზღვრული კომპლექსური სასრულოდ-ადიტიური სასრული ვარიაციის ფუნქცია, მაშინ ვიტყვით, რომ μ ფუნქცია ეკუთვნის $[\mathrm{A}_k;\mathrm{VB}_k;\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathfrak{A}]$ კლასს. 7.9 თეორემის თანახმად, თუ $\mu_j\in[\mathrm{A}_k;\mathrm{VB}_k;\mathrm{A}_j;\mathfrak{A}_j](j=1,...,n)$, მაშინ $\mu=\mu_1\times\cdots\times\mu_n\in[\mathrm{A}_k;\mathrm{VB}_k;\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathfrak{A}]$.

9.5. $f\in[\mathrm{M}_k;\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathrm{P}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f_j\in[\mathrm{M}_k;\mathrm{A}_j;\mathrm{P}_j]$ $(j=1,...,n)$ თანაბრად ყოველი $x_i\in\mathrm{A}_i(i=1,...,n;i\neq j)$ წერტილის მიმართ.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $f\in[\mathrm{M}_k;\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathrm{P}]$. მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)=\{\mathrm{A}_1^k\times\cdots\times\mathrm{A}_n^k\}_{k=1}^p$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1^{1k},...,x_n^{1k});(x_1^{2k},...,x_n^{2k})\in\mathrm{A}_1^k\times\cdots\times\mathrm{A}_n^k(k=1,...,p)$ წერტილები, ადგილი აქვს

$$\left|f(x_1^{1k},...,x_n^{1k})-f(x_1^{2k},...,x_n^{2k})\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

7.5 თეორემის თანახმად არსებობს $\{\mathrm{A}_1^k\times\cdots\times\mathrm{A}_n^k\}_{k=1}^p$ დანაწილების $\{B_1^{k_1}\times\cdots\times B_n^{k_n}\}_{k_i=1}^{N_i}$ $(i=1,...,n)$ ბადური გაგრძელება. ავიღოთ ნებისმიერი $x_i^0\in\mathrm{A}_i$ $(i=1,...,n;i\neq j)$ წერტილი. მაშინ რადგანაც $\{B_i^{k_i}\}_{k_i=1}^{N_i}$ არის $\mathrm{A}_i(i=1,...,n)$ სიმრავლის დანაწილება, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $k_i^0(1\le k_i^0\le N_i)$ ნიშნაკი, რომ $x_i^0\in B_i^{k_i^0}(i=1,...,n;i\neq j)$. ცხადია, რომ ყოველი $x_i^{1k_i},x_i^{2k_i}\in B_i^{k_i}$ $(k_i=1,...,N_i)$ წერტილებისათვის ადგილი აქვს

$$\left|f(x_1^0,...,x_{i-1}^0,x_i^{1k_i},x_{i+1}^0,...,x_n^0)-f(x_1^0,...,x_{i-1}^0,x_i^{2k_i},x_{i+1}^0,...,x_n^0)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

რადგანაც $\{B_j^{k_j}\}_{k_j=1}^{N_j}$ დანაწილება არაა დამოკიდებული $x_i^0\in B_i^{k_i^0}(i=1,...,n;$ $i\neq j)$ წერტილის არჩევაზე, ამიტომ ვღებულობთ, რომ $f_j\in[\mathrm{M}_k;\mathrm{A}_j;\mathrm{P}_j](j=1,...,n)$ თანაბრად ყოველი $x_i\in\mathrm{A}_i$ $(i=1,...,n;i\neq j)$ წერტილის მიმართ.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $f_j\in[\mathrm{M}_k;\mathrm{A}_j;\mathrm{P}_j]$ $(j=1,...,n)$ თანაბრად ყოველი $x_i\in\mathrm{A}_i(i=1,...,n;i\neq j)$ წერტილის მიმართ. მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\mathrm{A}_i(i=1,...,n)$ სიმრავლის ისეთი $\{B_i^{k_i}\}_{k_i=1}^{N_i}$

დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $x_i^{1k_i}, x_i^{2k_i} \in A_i^{k_i} (k_i = 1,\dots,N_i)$ წერტილები, ადგილი აქვს

$$\left|f\left(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^{1k_i},x_{i+1},\dots,x_n\right)-f\left(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^{2k_i},x_{i+1},\dots,x_n\right)\right|<\frac{\varepsilon}{n}\ (1\le i\le n)$$

უტოლობას.

განვიხილოთ $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედის $\left\{A_1^{k_1}\times\cdots\times A_n^{k_n}\right\}_{k_i=1}^{N_i}(i=1,\dots,n)$ ბადური დანაწილება. მაშინ, ყოველი $\left(x_1^{1k},\dots,x_n^{1k}\right),\left(x_1^{2k},\dots,x_n^{2k}\right)\in A_1^{k_1}\times\cdots\times A_n^{k_n}\ (k_i=1,\dots,N_i)$ წერტილებისათვის, გვექნება

$$\left|f\left(x_1^{1k_1},\dots,x_n^{1k_n}\right)-f\left(x_1^{2k_1},\dots,x_n^{2k_n}\right)\right|\le\left|f\left(x_1^{1k_1},x_1^{1k_2},\dots,x_n^{1k_n}\right)-f\left(x_1^{2k_1},x_2^{1k_2},\dots,x_n^{1k_n}\right)\right|+$$
$$+\dots+\left|f\left(x_1^{2k_1},\dots,x_{n-1}^{2k_{n-1}},x_n^{1k_n}\right)-f\left(x_1^{2k_1},\dots,x_{n-1}^{2k_{n-1}},x_n^{2k_n}\right)\right|<\varepsilon.$$

9.6 (ფუბინი). ვთქვათ, $f\in\left[\mathrm{M_k};\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathrm{P}\right]$ და $\mu=\mu_1\times\cdots\times\mu_n$ $\left(\mu_j\in\left[\mathrm{A_k};\mathrm{VB_k};\mathrm{A}_j;\mathrm{P}_j\right]\left(j=1,\dots,n\right)\right)$. თუ არსებობს

$$(\mathrm{P})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times}\cdots\int\limits_{\times\mathrm{A}_n} f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი ინტეგრალი, მაშინ არსებობს

$$(\mathrm{P}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\dots\left((\mathrm{P}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1}f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\dots\right)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

ეს თეორემა მტკიცდება 6.10, 9.2 და 9.5 თეორემების გამოყენებით.

9.7 (ფუბინი). ვთქვათ, $f\in\left[\mathrm{M_k};\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathfrak{M}\right]$ და $\mu=\mu_1\times\cdots\times\mu_n$ $\left(\mu_j\in\left[\mathrm{A_k};\mathrm{VB_k};\mathrm{A}_j;\mathfrak{M}_j\right]\left(j=1,\dots,n\right)\right)$. მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{M})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\cdots\int f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n),$$

$$(\mathfrak{M}_n)\int\limits_{\mathrm{A}_n}\left(\dots\left((\mathfrak{M}_1)\int\limits_{\mathrm{A}_1}f(x_1,\dots,x_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\dots\right)$$

სტილტიესის ტიპის n-ჯერადი ინტეგრალები და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

ეს თეორემა მტკიცდება 6.9, 9.2 და 9.5 თეორემების გამოყენებით.

ამ თეორემიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს ფუბინის თეორემა თითქმის ყველგან შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციებისათვის.

ვთქვათ, ახლა, ევკლიდეს n-განზომილებიან R^n სივრცის $R_0^n=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ მართკუთხედზე განსაზღვრულია წერტილის ორი f და g ფუნქცია.

როგორც ცნობილია [10, გვ.66-70], f ფუნქციის ნაზრდი R_0^n მართკუთხედზე ეწოდება შემდეგი

$$\sum_{c_1,\ldots,c_n}(-1)^{\nu(c)}f(c) \tag{II.9.3}$$

გამოსახულებას, სადაც $c=(c_1,\ldots,c_n)$ გაირბენს R_0^n მართკუთხედის წვეროების წერტილთა სიმრავლეს (ანუ, ყველა იმ $c=(c_1,\ldots,c_n)$ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $c_k=a_k$ ან $c_k=b_k$ $(k=1,\ldots,n)$), ხოლო $\nu(c)$ კი არის $(c_1,\ldots,c_n)$-ში შემავალი a_k-ების რაოდენობა და აღინიშნება $\Delta(f;R_0^n)$ სიმბოლოთი.

(II.9.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი [10, გვ.66-70]

$$\Delta(f;[a_1,b_1],\ldots,[a_n,b_n])=\sum_{c_1,\ldots,c_{n-1}}(-1)^{\nu(c_1,\ldots,c_{n-1})}\left(f(c_1,\ldots,c_{n-1},b_n)-f(c_1,\ldots,c_{n-1},a_n)\right)$$

რეკურენტულ დამოკიდებულება, სადაც $(c_1,\ldots,c_{n-1})$ გაირბენს ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელშიც $c_k=a_k$ ან $c_k=b_k$ $(1\le k<n-1)$, ხოლო $\nu(c_1,\ldots,c_{n-1})$ კი არის $(c_1,\ldots,c_{n-1})$-ში შემავალი a_k-ების რაოდენობა.

იქვე ნაჩვენებია, რომ $\Delta(f;R_0^n)$ წარმოადგენს სიმრავლის სასრულოდ-ადიტიურ ფუნქციას.

(II.9.1) განსაზღვრის თანახმად g ფუნქციით f ფუნქციის სტილტიესის ტიპის ინტეგრალურ ჯამს ექნება შემდეგი

$$\sigma=\sum_{i=0}^{N-1}f(\xi_1^i,\ldots,\xi_n^i)\Delta\left(g;[\alpha_{i_1}^1,\alpha_{i_1+1}^1]\times\cdots\times[\alpha_{i_n}^n,\alpha_{i_n+1}^n]\right)$$

სახე, სადაც $\left\{[\alpha_{i_1}^1,\alpha_{i_1+1}^1]\times\cdots\times[\alpha_{i_n}^n,\alpha_{i_n+1}^n]\right\}(i_k=1,\ldots,N_k;k=1,\ldots,n)$ და $(\xi_1^i,\ldots,\xi_n^i)\in\in[\alpha_{i_1}^1,\alpha_{i_1+1}^1]\times\cdots\times[\alpha_{i_n}^n,\alpha_{i_n+1}^n]$ $(i=0,1,\ldots,N-1)$ ნებისმიერი წერტილია.

სამართლიანის შემდეგი

9.8 (ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა). თუ g ფუნქცია ინტეგრებადია f ფუნქციით R_0^n მართკუთხედზე და არსებობს

$$\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{n-s}}}^{b_{l_{n-s}}}g(z_1,\ldots,c_{j_1},\ldots,c_{j_s},\ldots,z_n)\,d^{n-s}f(z_1,\ldots,c_{j_1},\ldots,c_{j_s},\ldots,z_n)$$

ინტეგრალები, სადაც $s=1,\dots,n-1$, $a_{l_r}\in\{a_k\}_{k=1}^n, b_{l_r}\in\{b_k\}_{k=1}^n$,

; $c_{j_m}\neq a_{l_r}, c_{j_m}\in\{a_k\}_{k=1}^n$ ან $c_{j_m}\neq b_{l_r}, c_{j_m}\in\{b_k\}_{k=1}^n$

$r=1,\dots,n-1,\ m=1,\dots,s,\ 1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n,\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n,$

მაშინ f ფუნქციაც ინტეგრებადია g ფუნქციით R_0^n მართკუთხედზე და ადგილი აქვს

$$\begin{aligned}\int\limits_{R_0^n}\!\cdots\!\int f(z_1,\dots,z_n)\,d^n g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{s=0}^{n-1}\ \sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\ \sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times\\ \times\int\limits_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\!\cdots\!\int\limits_{a_{i_{n-s}}}^{b_{i_{n-s}}} g(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_n)\,d^{n-s}f(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_n)+\Delta(f\cdot g;R_0^n)\end{aligned}\tag{II.9.4}$$

ტოლობას, სადაც $\nu(c)$ არის $(a_{l_1},\dots,a_{l_{n-s}},c_{j_1},\dots,c_{j_s})$-ში შემავალი a_k-ების რაოდენობა.

დამტკიცება. თეორემას დავამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. სანამ თეორემის უშუალო დამტკიცებაზე გადავიდოდეთ შევნიშნოთ, რომ სტილტიესის ინტეგრალისათვის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა $n=2$ და $n=3$ შემთხვევისათვის შესაბამისად მოყვანილია [23]-ში (გვ.666-668) და [24]-ში (გვ.273-293). მაშასადამე, თეორემა სამართლიანია $n=2$ და $n=3$ შემთხვევისათვის.

დავუშვათ, ახლა, თეორემა სამართლიანია $(n-1)$-სათვის და ვაჩვენოთ მისი სამართლიანობა n-სათვის.

რადგანაც ევკლიდეს n-განზომილებიან R^n სივრციდან აღებული ყოველი მართკუთხედის ნებისმიერ სასრულ დანაწილებას გააჩნია ბადური გაგრძელება, ამიტომ თეორემისა დასამტკიცებლად საკმარისია განვიხილოთ R_0^n მართკუთხედის $\{R_{i_1\dots i_n}=[\alpha^1_{i_1},\alpha^1_{i_1+1}]\times\cdots\times[\alpha^n_{i_n},\alpha^n_{i_n+1}]\}\,(i_k=0,1,\dots,N_k-1;k=1,\dots,n)$ ბადური დანაწილება. ამ ბადური დანაწილების მიმართ შევადგინოთ (II.9.4) ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი ინტეგრალის სტილტიესის ტიპის ინტეგრალური ჯამი და გარდავქმნათ ის.

$$\sigma=\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{N_n-1}f(\xi^1_{i_1},\dots,\xi^n_{i_n})\Delta\left(g;[\alpha^1_{i_1},\alpha^1_{i_1+1}]\times\cdots\times[\alpha^n_{i_n},\alpha^n_{i_n+1}]\right)=$$

$$=\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{N_n-1}f(\xi^1_{i_1},\dots,\xi^n_{i_n})\sum_{c_1,\dots,c_{n-1}}(-1)^{\nu(c_1,\dots,c_{n-1})}\left(g(c_1,\dots,c_{n-1},\alpha^n_{i_n+1})-g(c_1,\dots,c_{n-1},\alpha^n_{i_n})\right)=$$

$$=\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{N_n-1} f\left(\xi^1_{i_1},\dots,\xi^n_{i_n}\right)\Delta\left(g;R_{i_1,\dots,i_{n-1}}\left(\alpha^n_{i_n+1}\right)\right)-$$

$$-\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{N_n-1} f\left(\xi^1_{i_1},\dots,\xi^n_{i_n}\right)\Delta\left(g;R_{i_1,\dots,i_{n-1}}\left(\alpha^n_{i_n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\left\{\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_{n-1}=0}^{N_{n-1}-1} f\left(\xi^1_{i_1},\dots,\xi^n_{i_n}\right)\Delta\left(g;R_{i_1,\dots,i_{n-1}}\left(\alpha^n_{i_n+1}\right)\right)\right\}-$$

$$-\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\left\{\sum_{i_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_{n-1}=0}^{N_{n-1}-1} f\left(\xi^1_{i_1},\dots,\xi^n_{i_n}\right)\Delta\left(g;R_{i_1,\dots,i_{n-1}}\left(\alpha^n_{i_n}\right)\right)\right\}=$$

$$=\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\int\cdots\int_{R_0^{n-1}} f\left(z_1,\dots,z_{n-1},\xi^n_{i_n}\right)d^{n-1}g\left(z_1,\dots,z_{n-1},\alpha^n_{i_n+1}\right)-$$

$$-\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\int\cdots\int_{R_0^{n-1}} f\left(z_1,\dots,z_{n-1},\xi^n_{i_n}\right)d^{n-1}g\left(z_1,\dots,z_{n-1},\alpha^n_{i_n}\right)+\theta\varepsilon=$$

(დაშვების თანახმად გვაქვს)

$$=\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\Bigg\{\Delta\left(f\cdot g;R_0^n\right)+\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le l_1<\dots<l_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{(n-1)-s}}}^{b_{l_{(n-1)-s}}} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\alpha^n_{i_n+1}\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi^n_{i_n}\right)\Bigg\}$$

$$-\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\Bigg\{\Delta\left(f\cdot g;R_0^n\right)+\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le l_1<\dots<l_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{(n-1)-s}}}^{b_{l_{(n-1)-s}}} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\alpha^n_{i_n}\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi^n_{i_n}\right)\Bigg\}+\theta\varepsilon=$$

$$=\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le l_1<\dots<l_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{(n-1)-s}}}^{b_{l_{(n-1)-s}}}\left\{\sum_{i_n=0}^{N_n-1} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\alpha^n_{i_n+1}\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi^n_{i_n}\right)\right\}-$$

$$-\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le l_1<\dots<l_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{(n-1)-s}}}^{b_{l_{(n-1)-s}}}\left\{\sum_{i_n=0}^{N_n-1} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\alpha^n_{i_n}\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi^n_{i_n}\right)\right\}+$$

$$+\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\left(\Delta\left(f\cdot g;R_0^{n-1}\left(\alpha_{i_n+1}^n\right)\right)-\Delta\left(f\cdot g;R_0^{n-1}\left(\alpha_{i_n}^n\right)\right)\right)+\theta\varepsilon=\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\dots\int_{a_{i_{(n-1)-s}}}^{b_{i_{(n-1)-s}}}\left\{\sum_{i_n=0}^{N_n-1}g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\alpha_{i_n}^n\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_{i_n-1}^n\right)+\right.$$

$$+g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},b_n\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_{N_n-1}^n\right)-$$

$$\left.-g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},a_n\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_0^n\right)\right\}-$$

$$-\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\dots\int_{a_{i_{(n-1)-s}}}^{b_{i_{(n-1)-s}}}\left\{\sum_{i_n=0}^{N_n-1}g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\alpha_{i_n}^n\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_{i_n}^n\right)\right\}$$

$$+\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\Delta\left(f\cdot g;R_0^n\right)+\theta\varepsilon=\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\dots\int_{a_{i_{(n-1)-s}}}^{b_{i_{(n-1)-s}}}\left\{-\sum_{i_n=0}^{N_n-1}g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\alpha_{i_n}^n\right)\left[d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_{i_n}^n\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_{i_n-1}^n\right)\right]\right\}+\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\dots\int_{a_{i_{(n-1)-s}}}^{b_{i_{(n-1)-s}}}g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},b_n\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},b_n\right)-$$

$$-\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\dots\int_{a_{i_{(n-1)-s}}}^{b_{i_{(n-1)-s}}}g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},a_n\right)d^{(n-1)-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},a_n\right)+$$

$$+\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\Delta\left(f\cdot g;R_0^n\right)+\theta\varepsilon+\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\dots\int_{a_{i_{(n-1)-s}}}^{b_{i_{(n-1)-s}}}g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},b_n\right)d^{(n-1)-s}\left[f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_{N_n-1}^n\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},b_n\right)\right]-\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le i_1<\dots<i_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{(n-1)-s}}}^{b_{l_{(n-1)-s}}} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},a_n\right)d^{(n-1)-s}\Big[f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_0^n\right)-$$

$$-f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},a_n\right)\Big]=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{\substack{1\le l_1<\dots<l_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{n-s}}}^{b_{l_{n-s}}} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_n\right)d^{n-s}f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_n\right)+\sum_{i_n=0}^{N_n-1}\Delta\left(f\cdot g;R_0^n\right)+$$

$$+\theta\varepsilon+\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le l_1<\dots<l_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{(n-1)-s}}}^{b_{l_{(n-1)-s}}} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},b_n\right)d^{(n-1)-s}\Big[f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_{N_n-1}^n\right)-$$

$$-f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},b_n\right)\Big]-\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{\substack{1\le l_1<\dots<l_{n-s}\le n\\ 1\le j_1<\dots<j_s\le n}}\sum_{c_{j_1},\dots,c_{j_s}}(-1)^{\nu(c)}\times$$

$$\times\int_{a_{l_1}}^{b_{l_1}}\cdots\int_{a_{l_{(n-1)-s}}}^{b_{l_{(n-1)-s}}} g\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},a_n\right)d^{(n-1)-s}\Big[f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},\xi_0^n\right)-$$

$$-f\left(z_1,\dots,c_{j_1},\dots,c_{j_s},\dots,z_{n-1},a_n\right)\Big].$$

თუ მიღებულ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე მივიღებთ დასამტკიცებელ (II.9.2) ტოლობას.

§10. ზოგადი n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}_1,...,\mathfrak{N}_n$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}^p\otimes\mathfrak{N}^q=$ $=\mathfrak{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_n$, სადაც $\mathfrak{N}^p=\mathfrak{N}_1\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{N}^q=\mathfrak{N}_{p+1}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_n$ $(p,q>0,p+q=n)$, და $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n\in\mathfrak{N}(\mathrm{A}_k\in\mathfrak{N}_k(k=1,...,n))$.

განვიხილოთ $\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$ დეკარტული ნამრავლი. ცხადია, რომ ამ დეკარტული ნამრავლის ელემენტები წარმოადგენენ $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედის ბადურ დანაწილებებს. $\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$ სიმრავლის ელემენტებისათვის გაგრძელების დამოკიდებულება განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: ვთქვათ,

$$\overset{\square}{D}_1(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n),\overset{\square}{D}_2(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\in\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$$

$$\left(\overset{\square}{D}_j(\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_n)=D_1^j\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n^j\mathrm{A}_n\,(j=1,2.)\right).$$

ვიტყვით, რომ $\overset{\square}{D}_2(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ დანაწილება წარმოადგენს $\overset{\square}{D}_1(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ დანაწილების გაგრძელებას, რასაც აღვნიშნავთ $\overset{\square}{D}_1(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\prec_1\cdots\prec_n$ $\prec_1\cdots\prec_n\overset{\square}{D}_2(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ ან $\overset{\square}{D}_2(\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_n)\succ_1\cdots\succ_n\overset{\square}{D}_1(\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_n)$ სიმბოლოთი, თუ ყოველი k-სათვის $(k=1,...,n)$

$$D_k^2\mathrm{A}_k\succ_k D_k^1\mathrm{A}_k.$$

ასეთნაირად განსაზღვრული გაგრძელების დამოკიდებულების მიმართ $\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$ სიმრავლე წარმოადგენს მიმართულ სიმრავლეს.

მართლაც, ვაჩვენოთ, რომ $\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$ სიმრავლე აკმაყოფილებს მიმართული სიმრავლის მოთხოვნებს. პირველი ორი მოთხოვნის შემოწმება მარტივია, შევამოწმოთ მესამე.

ვთქვათ, $D_1^1\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n^1\mathrm{A}_n, D_1^2\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n^2\mathrm{A}_n\in\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$.

რადგანაც დეკარტული ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად $D_k^1\mathrm{A}_k$, $D_k^2\mathrm{A}_k\in\Sigma(\mathrm{A}_k)\mathfrak{M}_k\,(k=1,...,n)$ და $\Sigma(\mathrm{A}_k)\mathfrak{M}_k$ მიმართული სიმრავლეა, ამიტომ არსებობს $D_k^1\mathrm{A}_k,D_k^2\mathrm{A}_k$ დანაწილებათა $D_k\mathrm{A}_k$ გაგრძელება.

განვიხილოთ $D_1\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n\mathrm{A}_n$ დანაწილება. ცხადია, რომ ეს დანაწილება წარმოადგენს $D_1^1\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n^1\mathrm{A}_n$, $D_1^2\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n^2\mathrm{A}_n$ დანაწილებათა გაგრძელებას. ამასთან, რადგანაც $D_k\mathrm{A}_k\in\Sigma(\mathrm{A}_k)\mathfrak{M}_k\ (k=1,\ldots,n)$, ამიტომ დეკარტული ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად $D_1\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n\mathrm{A}_n\in\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$.

$\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n\in\mathfrak{N}$ მართკუთხედის ყველა ბადური დანაწილების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\overset{\square}{\Sigma}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}$ სიმბოლოთი, ხოლო ყველა ბადური დანაწილების კომპონენტების სიმრავლე და $\overset{\square}{D}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ ბადური დანაწილების ყველა ბადური გაგრძელების კომპონენტების სიმრავლე კი – შესაბამისად $\mathfrak{N}\overset{\square}{D}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ და $\mathfrak{N}\overset{\square}{D}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ სიმბოლოთი.

ყოველი $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n\in\mathfrak{N}$ მართკუთხედისათვის $\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$ და $\overset{\square}{\Sigma}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}$ სიმრავლეებს შორის დავამყაროთ ურთიერთცალსახა თანადობა შემდეგნაირად: $\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$ სიმრავლის ყოველ $D_1\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n\mathrm{A}_n$ ელემენტს შევუსაბამოთ $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედის ისეთი ბადური დანაწილება $\overset{\square}{\Sigma}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}$ სიმრავლიდან, რომ $D_k\mathrm{A}_k$ იყოს $\mathrm{A}_k\ (k=1,\ldots,n)$ გვერდის დანაწილება და პირიქით, $\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n$ მართკუთხედის ყოველ ბადურ დანაწილებას $\overset{\square}{\Sigma}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}$ სიმრავლიდან შევუსაბამოთ $\Sigma(\mathrm{A}_1)\mathfrak{M}_1\otimes\cdots\otimes\Sigma(\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}_n$ სიმრავლის ისეთი $D_1\mathrm{A}_1\times\cdots\times D_n\mathrm{A}_n$ ელემენტი, რომ $D_k\mathrm{A}_k$ იყოს $\mathrm{A}_k\ (k=1,\ldots,n)$ გვერდის დანაწილება.

ასეთნაირად დამყარებული თანადობა არის ურთიერთცალსახა თანადობა, რომელიც ინარჩუნებს დალაგების რიგს.

ვიტყვით, რომ მართკუთხედის მრავალსახა კომპლექსური μ ფუნქცია დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ კლასზე ან $\mu\in\left[\mathbf{D}_k;\overset{\square}{\mathfrak{N}}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\right]$, თუ მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ ბადური დანაწილება, რომ μ ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathfrak{N}\overset{\square}{D}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ კლასზე.

ვთქვათ, $\mu \in \left[D_k ; \overset{\cup}{\mathfrak{N}}(A_1 \times \cdots \times A_n) \right]$. კომპლექსურ I რიცხვს ვუწოდოთ μ ფუნქციის n-ჯერადი ზოგადი ბადური ინტეგრალი $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და ის აღვნიშნოთ

$$\left(\overset{\cup}{\mathfrak{N}}\right) \int_{A_1 \times \cdots \times A_n} \!\!\cdots\! \int \mu(dA_1, \ldots, dA_n)$$

სიმბოლოთი, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $A_1 \times \cdots \times A_n$ მართკუთხედის ისეთი $\overset{\supset}{D}_\varepsilon(A_1 \times \cdots \times A_n)$ ბადური დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ბადური $\{A_1^{i_1} \times \cdots \times A_n^{i_n}\}_{i_k=1}^{N_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left| \sum_{i_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{i_n=1}^{N_n} \mu\left(A_1^{i_1}, \ldots, A_n^{i_n}\right) - I \right| < \varepsilon$$

უტოლობას.

რადგანაც 7.9 თეორემის თანახმად $A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathfrak{N}$ მართკუთხედის ყოველ დანაწილებას გააჩნია ბადური გაგრძელება, ამიტომ ადვილი დასანახია, რომ თუ არსებობს μ ფუნქციის ზოგადი n-ჯერადი ინტეგრალი ნორმალური კლასის მიმართ, მაშინ არსებობს μ ფუნქციის ზოგადი n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი ნორმალური კლასის მიმართ და ეს ინტეგრალები ერთმანეთის ტოლია. შებრუნებულ წინადადებას საზოგადოდ არა აქვს ადგილი.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ $n = 2$ შემთხვევა. ვთქვათ, $P_1 = P_2$ არის $A = B = [0,1)$ ნახევარსეგმენტის ყველა $[a,b)(0 \le a < b < 1)$ სახის ნახევარსეგმენტისაგან შედგენილი ნახევარრგოლი და $A \times B \in P = P_1 \otimes P_2$. P ნახევარრგოლზე μ ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\mu\left(\left[0, \frac{1}{m}\right), [0,a)\right) = m, \; \mu\left(\left[0, \frac{1}{m}\right), [b,1)\right) = -m$$

$(0 \le a < b < 1, m = 1,2,\ldots)$ და $\mu = 0$ სხვა შემთხვევაში.

ვაჩვენოთ, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული μ ფუნქციისათვის ორჯერადი ზოგადი ინტეგრალი არ არსებობს, მაგრამ არსებობს ორჯერადი ზოგადი ბადური ინტეგრალი.

მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $m>0$ რიცხვი და განვიხილოთ $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ მართკუთხედის შემდეგი

$$\left\{\left[0,\frac{1}{m}\right)\times[0,c),\left[0,\frac{1}{m}\right)\times[c,1),\left\{\left[\frac{1}{m},1\right)\times B_k\right\}_{k=1}^{p}\right\} \tag{II.10.1}$$

დანაწილება, სადაც $(0\le c<1)$ და $\{B_k\}_{k=1}^{p}$ არის B სიმრავლის რაიმე დანაწილება. თუ (II.10.1) დანაწილების მიმართ შევადგენთ μ ფუნქციის რიმანის ჯამს მივიღებთ

$$\begin{aligned}\mu(\mathrm{A},\mathrm{B})=\mu\left(\left[0,\frac{1}{m}\right),[0,c)\right)+\mu\left(\left[0,\frac{1}{m}\right),[c,1)\right)+\\ +\sum_{k=1}^{p}\mu\left(\left[\frac{1}{m},1\right),B_k\right)=\begin{cases} m, & \text{თუ } c=a=1,\\ -m, & \text{თუ } c=b=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{II.10.2}$$

(II.10.2) ჯამის ზედა ზღვარი ტოლია $+\infty$-ის, ხოლო ქვედა ზღვარი კი $-\infty$-ის, რაც ნიშნავს, რომ

$$(\mathrm{P})\iint\limits_{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}\mu(d\mathrm{A},d\mathrm{B})$$

ზოგადი ორჯერადი ინტეგრალი არ არსებობს, მაგრამ (II.10.1) დანაწილების ნებისმიერი ბადური გაგრძელების მიმართ შედგენილი μ ფუნქციის რიმანის ჯამი კი არის ნული ტოლი. მაშასადამე, არსებობს ორჯერადი ზოგადი ბადური ინტეგრალი და

$$\left(\overset{\square}{\mathrm{P}}\right)\iint\limits_{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}\mu(d\mathrm{A},d\mathrm{B})=0.$$

ნამდვილ ცალსახა μ ფუნქციას ვუწოდოთ არაკლებადი (არაზრდადი) $\Sigma(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}$ სიმრავლეზე, თუ

$$\left\{\sum_{k=1}^{m}\mu\left(A_1^k,\dots,A_n^k\right):D(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\in\Sigma(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}\right\}$$

განზოგადებული მიმდევრობა არაკლებადია (არაზრდადია).

10.1. თუ μ ფუნქცია არაკლებადია (არაზრდადია) $\Sigma(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\mathfrak{M}$ სიმრავლეზე, მაშინ

$$(\mathfrak{M})\int\limits_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\!\!\cdots\!\int\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n)=\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}\right)\int\limits_{\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\!\!\cdots\!\int\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_n).$$

დამტკიცება. რადგანაც μ არაკლებადი ფუნქციაა, ამიტომ 3.16 თეორემის ძალით

$$(\mathfrak{N}) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{m}\mu\left(A_1^k,\dots,A_n^k\right): D(A_1\times\cdots\times A_n)\in\Sigma(A_1\times\cdots\times A_n)\mathfrak{N}\right\}.$$

თავდაპირველად დავუშვათ, რომ

$$(\mathfrak{N}) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n) < +\infty .$$

მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის ისეთი $\left\{A_1^k\times\cdots\times A_n^k\right\}_{k=1}^m$ დანაწილება, რომ

$$(\mathfrak{N}) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n) < \sum_{k=1}^{m}\mu\left(A_1^k,\dots,A_n^k\right)+\varepsilon .$$

7.9 თეორემის თანახმად არსებობს $\left\{A_1^k\times\cdots\times A_n^k\right\}_{k=1}^m$ დანაწილების $\left\{B_1^{i_1}\times\cdots\times B_n^{i_n}\right\}$ $\left(i_k=1,\dots,N_k; k=1,\dots,n\right)$ ბადური გაგრძელება. ამ უტოლობიდან μ ფუნქციის არაკლებადობის ძალით გვაქვს

$$(\mathfrak{N}) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n) < \sum_{k=1}^{m}\mu\left(A_1^k,\dots,A_n^k\right)+\varepsilon \le$$

$$\le \sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\mu\left(B_1^{i_1},\dots,B_n^{i_n}\right)+\varepsilon \le \left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n)+\varepsilon$$

საიდანაც $\varepsilon>0$-ის ნებისმიერობის გამო ვღებულობთ

$$(\mathfrak{N}) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n) \le \left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right) \int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n).$$

შებრუნებული უტოლობა ცხადია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ

$$(\mathfrak{N}) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n) = +\infty ,$$

მაშინ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right) \int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n} \mu(dA_1,\dots,dA_n) = +\infty .$$

კომპლექსურ რიცხვთა განზოგადებული მიმდევრობის ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი

10.2. n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი

$$\left(\ddot{\mathfrak{N}}\right)\int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

არსებობს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის ისეთი $\dot{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_n)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ორი $\left\{A_1^{1i_1}\times\cdots\times A_n^{1i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=1,\dots,n),\left\{A_1^{2i_1}\times\cdots\times A_n^{2i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^2}(k=1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_n^{1i_n}\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^2}\mu\left(A_1^{2i_1},\dots,A_n^{2i_n}\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

ვიტყვით, რომ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu\left(A_1,\dots,A_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)$$

q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\breve{D}(A_1\times\cdots\times A_p)\in\overset{\square}{\Sigma}(A_1\times\cdots\times A_p)\mathfrak{N}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$, $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{i_1}\times\cdots\times A_p^{i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k}$ $(k=1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^{i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k}(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_n^{i_n}\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

10.3. q-ჯერადი

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu\left(A_1,\dots,A_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)\qquad\text{(II.10.3)}$$

ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\overset{\square}{D}(A_1\times\cdots\times A_p)\in$

$\in \overset{\square}{\Sigma}(A_1 \times \cdots \times A_p)\mathfrak{M}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{M}^p}(A_1 \times \cdots \times A_p)$ კლასზე და ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D_\varepsilon}(A_1 \times \cdots \times A_p), \overset{\square}{D_\varepsilon}(A_{p+1} \times \cdots \times A_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $\overset{\square}{D_\varepsilon}(A_1 \times \cdots \times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{1i_1} \times \cdots \times A_p^{1i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1} (k = 1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $D_\varepsilon(A_{p+1} \times \cdots \times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი ორი $\left\{A_{p+1}^{1i_{p+1}} \times \cdots \times A_n^{1i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1} (k = p+1,\dots,n), \left\{A_{p+1}^{2i_{p+1}} \times \cdots \times A_n^{2i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^2}$ $(k = p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_n^{1i_n}\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^1}\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^2}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_p^{1i_p},A_{p+1}^{2i_{p+1}},\dots,A_n^{2i_n}\right)\right|<\varepsilon \qquad \text{(II.10.4)}$$

უტოლობას.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, (II.10.3) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\overset{\square}{D}(A_1 \times \cdots \times A_p) \in \overset{\square}{\Sigma}(A_1 \times \cdots \times A_p)\mathfrak{M}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ და ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს (II.10.4) უტოლობას.

რადგანაც (II.10.3) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\overset{\square}{D}(A_1 \times \cdots \times A_p) \in \overset{\square}{\Sigma}(A_1 \times \cdots \times A_p)\mathfrak{M}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D_\varepsilon}(A_1 \times \cdots \times A_p), \overset{\square}{D_\varepsilon}(A_{p+1} \times \cdots \times A_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $\overset{\square}{D_\varepsilon}(A_1 \times \cdots \times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{i_1} \times \cdots \times A_p^{i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k} (k = 1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\square}{D_\varepsilon}(A_{p+1} \times \cdots \times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^{i_{p+1}} \times \cdots \times A_n^{i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k} (k = p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}^q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\cdots\int \mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_n^{i_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(II.10.5)}$$

უტოლობას.

(II.10.5) უტოლობის გათვალისწინებით, $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{l_1}\times\cdots\times A_p^{l_p}\right\}_{l_k=1}^{N_k}(k=1,\ldots,p)$ ბადური გაგრძელების და $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი ორი $\left\{A_{p+1}^{l_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{l_n}\right\}_{l_k=1}^{N_k}(k=p+1,\ldots,n)$, $\left\{A_{p+1}^{1l_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{1l_n}\right\}_{l_k=1}^{N_k^1}$ $(k=p+1,\ldots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{l_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n}\mu\left(A_1^{l_1},\ldots,A_n^{l_n}\right)-\sum_{l_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{l_p=1}^{N_p}\sum_{l_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{l_1},\ldots,A_p^{l_p},A_{p+1}^{1l_{p+1}},\ldots,A_n^{1l_n}\right)\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{l_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n}\mu\left(A_1^{1l_1},\ldots,A_n^{1l_n}\right)-\sum_{l_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{l_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu\left(A_1^{l_1},\ldots,A_p^{l_p},dA_{p+1},\ldots,dA_n\right)\right|+$$

$$+\left|\sum_{l_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{l_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu\left(A_1^{l_1},\ldots,A_p^{l_p},dA_{p+1},\ldots,dA_n\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{l_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{l_p=1}^{N_p}\sum_{l_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{l_1},\ldots,A_p^{l_p},A_{p+1}^{1l_{p+1}},\ldots,A_n^{1l_n}\right)\right|<\varepsilon$$

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, შესრულებულია თეორემის პირობები. პირობის თანახმად (II.10.3) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^p(A_1\times\cdots\times A_p)$ კლასზე და ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$, $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{1l_1}\times\cdots\times A_p^{1l_p}\right\}_{l_k=1}^{N_k^1}(k=1,\ldots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი ორი $\left\{A_{p+1}^{1l_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{1l_n}\right\}_{l_k=1}^{N_k^1}(k=p+1,\ldots,n)$, $\left\{A_{p+1}^{2l_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{2l_n}\right\}_{l_k=1}^{N_k^2}$ $(k=p+1,\ldots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{l_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{1l_1},\ldots,A_n^{1l_n}\right)-\sum_{l_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{l_p=1}^{N_p^1}\sum_{l_{p+1}=1}^{N_{p+1}^2}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^2}\mu\left(A_1^{1l_1},\ldots,A_p^{1l_p},A_{p+1}^{2l_{p+1}},\ldots,A_n^{2l_n}\right)\right|<\varepsilon \qquad \text{(II.10.6)}$$

უტოლობას.

ვაჩვენოთ, რომ $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ და $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნების-

მიერი $\left\{A_1^{i_1}\times\cdots\times A_p^{i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k}(k=1,\dots,p)$ და $\left\{A_{p+1}^{i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k}(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის შესაბამისად ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_n^{i_n}\right)\right|<2\varepsilon$$

უტოლობას.

მართლაც, რადგანაც (II.10.3) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{R}}^p\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)=\left\{A_1^{i_1}\times\cdots\times A_p^{i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k}(k=1,\dots,p)$ ბადური დანაწილება, რომ (II.10.3) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი განსაზღვრულია $\mathfrak{R}^p\overset{\sqcap}{D}_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასზე ანუ, რაც იგივეა, $\mathfrak{R}^p\overset{\square}{D}_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასიდან აღებული ყოველი მართკუთხედისათვის არსებობს (II.10.3) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი.

რადგანაც (II.10.3) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს $\overset{\square}{D}_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ ბადური დანაწილების ყოველ კომპონენტზე, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_0\left(A_{p+1}\times\cdots\times A_n\right)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^{1i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{1i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n\right)-\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},A_{p+1}^{1i_{p+1}},\dots,A_n^{1i_n}\right)\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას, საიდანაც (II.10.6) უტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\mu\left(A_1^{i_1},\dots,A_n^{i_n}\right)\right|<2\varepsilon.$$

10.4. ვთქვათ, არსბობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int \mu\left(dA_1,\dots,dA_n\right)$$

n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი. თუ q-ჯერადი ბადური

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\!\int \mu\left(A_1,\dots,A_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right) \tag{II.10.7}$$

ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^p\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასზე, მაშინ არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^{p}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\!\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\!\int \mu\left(dA_1,\dots,dA_n\right)\right)$$

(p,q)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\!\int \mu\left(dA_1,\dots,dA_n\right)=\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^{p}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\!\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\!\int \mu\left(dA_1,\dots,dA_n\right)\right). \tag{II.10.8}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. რადგანაც პირობის თანახმად არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\!\int \mu\left(dA_1,\dots,dA_n\right)$$

n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის ისეთი ბადური $\overset{\square}{D}_\varepsilon\left(A_1\times\cdots\times A_n\right)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ორი $\left\{A_1^{1i_1}\times\cdots\times A_n^{1i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=1,\dots,n),\left\{A_1^{2i_1}\times\cdots\times A_n^{2i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^2}(k=1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_n^{1i_n}\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^2}\mu\left(A_1^{2i_1},\dots,A_n^{2i_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

უტოლობას. საიდანაც, კერძოდ, გვაქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_n^{1i_n}\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^1}\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^2}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_p^{1i_p},A_{p+1}^{2i_{p+1}},\dots,A_n^{2i_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{II.10.9}$$

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_n^{1i_n}\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^2}\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{2i_1},\dots,A_p^{2i_p},A_{p+1}^{1i_{p+1}},\dots,A_n^{1i_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{II.10.10}$$

მეორეს მხრივ, რადგანაც (II.10.7) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^p\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასზე და ადგილი აქვს (II.10.9) უტოლობას, ამიტომ 10.3 თეორემის თანახმად ის არსებობს დიფერენ-

ციალურად თანაბრად $\overset{\sqcap}{D}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p)\in\overset{\sqcap}{\Sigma}(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p)\mathfrak{N}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ. მაშასადამე, აღებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p)$, $\overset{\shortmid}{D}_\varepsilon(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $D_\varepsilon(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\{\mathrm{A}_1^{i_1}\times\cdots\times\mathrm{A}_p^{i_p}\}_{i_k=1}^{N_k}\,(k=1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\sqcup}{D}_\varepsilon(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\{\mathrm{A}_{p+1}^{i_{p+1}}\times\cdots\times\mathrm{A}_n^{i_n}\}_{i_k=1}^{N_k}\,(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\overset{\sqcap}{\mathfrak{N}^q}\right)\int\cdots\int_{\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\mu(\mathrm{A}_1^{i_1},\dots,\mathrm{A}_p^{i_p},d\mathrm{A}_{p+1},\dots,d\mathrm{A}_n)-\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\mu(\mathrm{A}_1^{1i_1},\dots,\mathrm{A}_n^{1i_n})\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{(II.10.11)}$$

უტოლობას.

(II.10.10) და (II.10.11) უტოლობათა გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\sqcap}{D}_0(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p)$ $\left(\succ_1\cdots\succ_n \overset{\sqcap}{D}_\varepsilon(\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p)\times\overset{\sqcap}{D}_\varepsilon(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)\right)$ ბადური დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ორი $\{\mathrm{A}_1^{1i_1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n^{1i_n}\}_{i_k=1}^{N_k^1}\,(k=1,\dots,n)$, $\{\mathrm{A}_1^{2i_1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n^{2i_n}\}_{i_k=1}^{N_k^2}\,(k=1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის ადგილი აქვს

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^1}\left(\overset{\sqcap}{\mathfrak{N}^q}\right)\int\cdots\int_{\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\mu(\mathrm{A}_1^{1i_1},\dots,\mathrm{A}_p^{1i_p},d\mathrm{A}_{p+1},\dots,d\mathrm{A}_n)-\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^2}\left(\overset{\sqcap}{\mathfrak{N}^q}\right)\int\cdots\int_{\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\mu(\mathrm{A}_1^{2i_1},\dots,\mathrm{A}_p^{2i_p},d\mathrm{A}_{p+1},\dots,d\mathrm{A}_n)\right|\le\\
&\le\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^1}\left(\overset{\sqcap}{\mathfrak{N}^q}\right)\int\cdots\int_{\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\mu(\mathrm{A}_1^{1i_1},\dots,\mathrm{A}_p^{1i_p},d\mathrm{A}_{p+1},\dots,d\mathrm{A}_n)-\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu(\mathrm{A}_1^{1i_1},\dots,\mathrm{A}_n^{1i_n})\right|+\\
&\quad+\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu(\mathrm{A}_1^{1i_1},\dots,\mathrm{A}_n^{1i_n})-\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^2}\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu(\mathrm{A}_1^{2i_1},\dots,\mathrm{A}_p^{2i_p},\mathrm{A}_{p+1}^{1i_{p+1}},\dots,\mathrm{A}_n^{1i_n})\right|+\\
&+\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^2}\left(\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu(\mathrm{A}_1^{2i_1},\dots,\mathrm{A}_p^{2i_p},\mathrm{A}_{p+1}^{1i_{p+1}},\dots,\mathrm{A}_n^{1i_n})-\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\left(\overset{\sqcap}{\mathfrak{N}^q}\right)\int\cdots\int_{\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n}\mu(\mathrm{A}_1^{2i_1},\dots,\mathrm{A}_p^{2i_p},d\mathrm{A}_{p+1},\dots,d\mathrm{A}_n)\right)\right|<\varepsilon
\end{aligned}$$

უტოლობას. რაც ნიშნავს, რომ არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)$$

(p,q)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალი.

ახლა, ვაჩვენოთ (II.10.8) ტოლობის სამართლიანობა. რადგანაც არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\ldots,dA_n)$$

n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედის ისეთი $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_n)$ ბადური დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{A_1^{1i_1}\times\cdots\times A_n^{1i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=1,\ldots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\ldots,dA_n)-\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(A_1^{1i_1},\ldots,A_n^{1i_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\text{(II.10.12)}$$

უტოლობას.

მეორეს მხრივ, რადგანაც არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)$$

(p,q)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალი, ამიტომ აღებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ ბადური დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{A_1^{2i_1}\times\cdots\times A_p^{2i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k^2}(k=1,\ldots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^2}\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\mu\left(A_1^{2i_1},\ldots,A_p^{2i_p},dA_{p+1},\ldots,dA_n\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad\text{(II.10.13)}$$

უტოლობას.

პირობის თანახმად, (II.10.7) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)=\left\{A_1^{3i_1}\times\cdots\times A_p^{3i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k^3}(k=1,\dots,p)$ ბადური დანაწილება, რომ (II.10.7) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p D_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასზე ანუ, რაც იგივეა, $\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p D_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ კლასიდან აღებული ყოველი მართკუთხედისათვის არსებობს (II.10.7) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი.

რადგანაც (II.10.7) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს $\overset{\square}{D}_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)$ ბადური დანაწილების ყოველ კომპონენტზე, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_0\left(A_{p+1}\times\cdots\times A_n\right)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^{3i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{3i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^3}(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^3}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^3}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q\right)\int\cdots\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\mu\left(A_1^{3i_1},\dots,A_p^{3i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n\right)-\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^3}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^3}\mu\left(A_1^{3i_1},\dots,A_n^{3i_n}\right)\right)\right|<\varepsilon \quad \text{(II.10.14)}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $\overset{\square}{D}_\varepsilon\left(A_1\times\cdots\times A_n\right)$, $\overset{\square}{D}_\varepsilon\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)\times\overset{\square}{D}_0\left(A_{p+1}\times\cdots\times A_n\right)$, $\overset{\square}{D}_0\left(A_1\times\cdots\times A_p\right)\times\overset{\square}{D}_0\left(A_{p+1}\times\cdots\times A_n\right)$ დანაწილებათა $\overset{\square}{D}_1\left(A_1\times\cdots\times A_n\right)$ ბადური გაგრძელება. მაშინ მისი ნებისმიერი $\left\{A_1^{i_1}\times\cdots\times A_n^{i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k}(k=1,\dots,n)$ გაგრძელებისათვის (II.10.12), (II.10.13) და (II.10.14) უტოლობებს ერთდროულად ექნებათ ადგილი. ამიტომ გვაქვს

$$\left|\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p\right)\int\cdots\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q\right)\int\cdots\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\mu\left(dA_1,\dots,dA_n\right)\right)-\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right)\int\cdots\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\mu\left(dA_1,\dots,dA_n\right)\right|<\varepsilon.$$

საიდანაც $\varepsilon>0$-ის ნებისმიერობის გამო გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობის სამართლიანობა.

10.5. ვთქვათ, არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი. იმისათვის, რომ არსებობდეს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)\right),$$

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)$$

(p,q)-ჯერადი და (q,p)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალები და ადგილი ჰქონდეს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)=\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)=$$

$$=\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)$$

ტოლობას, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_p,A_{p+1},\dots,A_n),$$

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(A_1,\dots,A_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)$$

p-ჯერადი და q-ჯერადი ბადური ინტეგრალები იყვნენ დიფერენციალურად განსაზღვრული $\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}(A_{p+1}\times\ldots\times A_n)$ და $\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}(A_1\times\ldots\times A_p)$ კლასებზე შესაბამისად.

დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს 10.4 თეორემიდან.

10.6. თუ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)\right),$$

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{q}\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}}{}^{p}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\int \mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)$$

(p,q)-ჯერადი და (q,p)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალებიდან

არსებობს ერთ-ერთი და შესაბამისი შიგა, q ან p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად, მაშინ არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}\right)\int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

n-ჯერადი ბადური ინტეგრალი და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. განსაზღვრულობისათვის დავუშვათ, რომ არსებობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{p}\right)\int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_p}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu(dA_1,\dots,dA_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\right)$$

(p,q)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალი და

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu(A_1,\dots,A_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)$$

q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\overset{\square}{D}(A_1\times\cdots\times A_p)\in\overset{\square}{\Sigma}(A_1\times\cdots\times A_p)\mathfrak{R}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ. მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$, $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\{A_1^{i_1}\times\cdots\times A_p^{i_p}\}_{i_k=1}^{N_k}$ ($k=1,\dots,p$) ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\{A_{p+1}^{i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{i_n}\}_{i_k=1}^{N_k}$ $(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{p}\right)\int\limits_{A_1\times}\cdots\int\limits_{\times A_p}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n)\right|<\frac{\varepsilon}{4},\quad (II.10.15)$$

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p}\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\cdots\int\limits_{\times A_n}\mu(A_1^{i_1},\dots,A_p^{i_p},dA_{p+1},\dots,dA_n)-\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n}\mu(A_1^{i_1},\dots,A_n^{i_n})\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

უტოლობებს.

(II.10.15) უტოლობათა გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ ყოველი

$\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)\times\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი ორი $\{A_1^{1i_1}\times\cdots\times A_n^{1i_n}\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=1,\dots,n)$, $\{A_1^{2i_1}\times\cdots\times A_n^{2i_n}\}_{i_k=1}^{N_k^2}(k=1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu(A_1^{1i_1},\dots,A_n^{1i_n})-\sum_{i_1=1}^{N_1^2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^2}\mu(A_1^{2i_1},\dots,A_n^{2i_n})\right|<\varepsilon$$

უტოლობას. საიდანაც 10.2 თეორემის თანახმად გამომდინარეობს

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

n-ჯერადი ბადური ინტეგრალის არსებობა, ხოლო რაც შეეხება დასამტკიცებელი ტოლობის სამართლიანობას ის გამომდინარეობს 10.4 თეორემიდან.

10.7. თუ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\int\mu(A_1,\dots,A_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\qquad(\text{II}.10.16)$$

q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\overset{\square}{D}(A_1\times\cdots\times A_p)\in\overset{\square}{\Sigma}(A_1\times\cdots\times A_p)\mathfrak{N}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ, ხოლო

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^p\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\dots,dA_p,A_{p+1},\dots,A_n)\qquad(\text{II}.10.17)$$

p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q(A_{p+1}\times\dots\times A_n)$ კლასზე ან, პირიქით, მაშინ არსებობენ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^p\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right),$$

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^q\right)\int_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}{}^p\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)$$

(p,q)-ჯერადი და (q,p)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალები და მაშასადამე,

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}\right)\int_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\int\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

n-ჯერადი ბადური ინტეგრალიც და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. განსაზღვრულობისათვის დავუშვათ, რომ (II.10.16) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $D(A_1 \times \cdots \times A_p) \in \Sigma(A_1 \times \cdots \times A_p)\mathfrak{N}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ და (II.10.17) p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^q(A_{p+1} \times \ldots \times A_n)$ კლასზე.

ვაჩვენოთ, რომ არსებობს

$$\left(\overset{\sqcap}{\mathfrak{N}^p}\right)\int_{A_1\times}\cdots\int_{\times A_p}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}^q}\right)\int_{A_{p+1}\times}\cdots\int_{\times A_n}\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right) \qquad (II.10.18)$$

(p,q)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალი.

რადგანაც (II.10.16) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\overset{\square}{D}(A_1 \times \cdots \times A_p) \in \overset{\square}{\Sigma}(A_1 \times \cdots \times A_p)\mathfrak{N}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D_\varepsilon}(A_1 \times \cdots \times A_p), \overset{\square}{D_\varepsilon}(A_{p+1} \times \cdots \times A_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $D_\varepsilon(A_1 \times \cdots \times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\{A_1^{1i_1} \times \cdots \times A_p^{1i_p}\}_{i_k=1}^{N_k^1} (k = 1,\ldots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\square}{D_\varepsilon}(A_{p+1} \times \cdots \times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი ორი $\{A_{p+1}^{1i_{p+1}} \times \cdots \times A_n^{1i_n}\}_{i_k=1}^{N_k^1}$ $(k = p+1,\ldots,n), \{A_{p+1}^{2i_{p+1}} \times \cdots \times A_n^{2i_n}\}_{i_k=1}^{N_k^2} (k = p+1,\ldots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu(A_1^{1i_1},\ldots,A_n^{1i_n}) - \sum_{i_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^1}\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^2}\mu(A_1^{1i_1},\ldots,A_p^{1i_p},A_{p+1}^{2i_{p+1}},\ldots,A_n^{2i_n})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (II.10.19)$$

უტოლობას.

პირობის თანახმად, (II.10.17) p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}^q}(A_{p+1} \times \cdots \times A_n)$ კლასზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D_0}(A_{p+1} \times \cdots \times A_n) = \{A_{p+1}^{3i_{p+1}} \times \cdots \times A_n^{3i_n}\}_{i_k=1}^{N_k^3} (k = p+1,\ldots,n)$ ბადური დანაწილება, რომ (II.10.17) p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი განსაზღვრულია

$\overset{\sqcup}{\mathfrak{M}}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასზე ანუ, რაც იგივეა, $\mathfrak{M}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასიდან აღებული ყოველი მართკუთხედისათვის არსებობს (II.10.17) p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი.

რადგანაც (II.10.17) p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს $\overset{\square}{D}_0(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური დანაწილების ყოველ კომპონენტზე, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_0(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{A_1^{3i_1}\times\cdots\times A_p^{3i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k^3}(k=1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^3}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^3}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}^p}\right)\int_{A_1\times}\cdots\int_{\times A_p}\mu\left(dA_1,\dots,dA_p,A_{p+1}^{3i_{p+1}},\dots,A_n^{3i_n}\right)-\sum_{i_1=1}^{N_1^3}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p^3}\mu\left(A_1^{3i_1},\dots,A_n^{3i_n}\right)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{(II.10.20)}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{M}^p$ და $\mathfrak{M}^q$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, ამიტომ არსებობს $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p),\overset{\square}{D}_0(A_1\times\cdots\times A_p)$ და $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n),\overset{\square}{D}_0(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილებათა $\overset{\square}{D}_1(A_1\times\cdots\times A_p)$ და $\overset{\square}{D}_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური გაგრძელება შესაბამისად. (II.10.19) და (II.10.20) უტოლობათა გათვალისწინებით, $\overset{\square}{D}_1(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{1i_1}\times\cdots\times A_p^{1i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\square}{D}_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი ორი $\left\{A_{p+1}^{1i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{1i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}$ $(k=p+1,\dots,n)$, $\left\{A_{p+1}^{2i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{2i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^2}(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ვღებულობთ

$$\left|\left(\overset{\square}{\mathfrak{M}^p}\right)\int_{A_1\times}\cdots\int_{\times A_p}\left(\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\mu\left(dA_1,\dots,dA_p,A_{p+1}^{1i_{p+1}},\dots,A_n^{1i_n}\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^2}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^2}\mu\left(dA_1,\dots,dA_p,A_{p+1}^{2i_{p+1}},\dots,A_n^{2i_n}\right)\right)\right|<\varepsilon.$$

რაც თავის მხრივ ნიშნავს (II.10.18) (p,q)-ჯერადი განმეორებითი ბადური

ინტეგრალის არსებობას.

ზემოდამტკიცებულის თანახმად არსებობს (II.10.18) (p,q)-ჯერადი განმეორებითი ბადური ინტეგრალი და (II.10.16) q-ჯერადი ბადური ინტეგრალი არსებობს დიფერენციალურად თანაბრად $\overset{\square}{D}(A_1\times\cdots\times A_p)\in\overset{\sqcup}{\Sigma}(A_1\times\cdots\times A_p)\mathfrak{N}^p$ ბადური დანაწილების მიმართ, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p), \overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{1i_1}\times\cdots\times A_p^{1i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის, $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^{1i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{1i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^1}(k=p+1,\dots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}^q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times}\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\times A_n}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}^p}\right)\int\limits_{A_1\times}\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\times A_p}\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}^p}\right)\int\limits_{A_1\times}\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\times A_p}\mu\left(dA_1,\dots,dA_p,A_{p+1}^{1i_{p+1}},\dots,A_n^{1i_n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \text{(II.10.21)}$$

$$\left|\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{p+1}^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_n^1}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}^p}\right)\int\limits_{A_1\times}\!\!\cdots\!\!\int\limits_{\times A_p}\mu\left(dA_1,\dots,dA_p,A_{p+1}^{1i_{p+1}},\dots,A_n^{1i_n}\right)-\sum_{i_{p+1}=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{i_n=1}^{N_p^1}\mu\left(A_1^{1i_1},\dots,A_n^{1i_n}\right)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

უტოლობებს.

რადგანაც, (II.10.17) p-ჯერადი ბადური ინტეგრალი დიფერენცილურად განსაზღვრულია $\overset{\square}{\mathfrak{N}^p}(A_1\times\cdots\times A_p)$ კლასზე, ამიტომ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ აღებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $\overset{\square}{D}_0(A_1\times\cdots\times A_p), \overset{\square}{D}_0(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)=\left\{A_{p+1}^{2i_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{2i_n}\right\}_{i_k=1}^{N_k^2}$ $(k=p+1,\dots,n)$ ბადური დანაწილებები, რომ $\overset{\square}{D}_0(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{2i_1}\times\cdots\times A_p^{2i_p}\right\}_{i_k=1}^{N_k^2}(k=1,\dots,p)$ ბადური გაგრძელებისათვის და μ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{l_{p+1}=1}^{N_{p+1}^2}\cdots\sum_{l_n=1}^{N_n^2}\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\!\int \mu\left(dA_1,\ldots,dA_p,A_{p+1}^{2l_{p+1}},\ldots,A_n^{2l_n}\right)-\sum_{l_1=1}^{N_1^1}\cdots\sum_{l_p=1}^{N_p^1}\mu\left(A_1^{2l_1},\ldots,A_n^{2l_n}\right)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{(II.10.22)}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{N}^p$ და $\mathfrak{N}^q$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასებია, ამიტომ შესაბამისად არსებობს $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$, $\overset{\square}{D}_0(A_1\times\cdots\times A_p)$ და $\overset{\square}{D}_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$, $\overset{\square}{D}_0(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილებათა $\overset{\square}{D}_1(A_1\times\cdots\times A_p)$ და $\overset{\square}{D}_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ ბადური გაგრძელება. (II.10.21) და (II.10.22) უტოლობათა გათვალისწინებით, $\overset{\square}{D}_1(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_1^{l_1}\times\cdots\times A_p^{l_p}\right\}_{l_k=1}^{N_k}(k=1,\ldots,p)$ ბადური გაგრძელებისა და $\overset{\square}{D}_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^{l_{p+1}}\times\cdots\times A_n^{l_n}\right\}_{l_k=1}^{N_k}$ $(k=p+1,\ldots,n)$ ბადური გაგრძელებისათვის, ვღებულობთ

$$\left|\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)-\sum_{l_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{l_p=1}^{N_p}\mu\left(A_1^{l_1},\ldots,A_p^{l_p},dA_{p+1},\ldots,dA_n\right)\right)\right|<\varepsilon .$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\!\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right)=$$

$$=\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int\left(\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\!\int \mu(dA_1,\ldots,dA_n)\right).$$

დასამტკიცებელი ტოლობა გამომდინარეობს 10.6. თეორემიდან.

10.8. ვთქვათ,

$$\begin{gathered}\left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int \mu\left(A_1,\ldots,A_p,dA_{p+1},\ldots,dA_n\right),\\ \left(\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\!\int \mu\left(dA_1,\ldots,dA_p,A_{p+1},\ldots,A_n\right)\end{gathered} \quad \text{(II.10.23)}$$

q-ჯერადი და p-ჯერადი ბადური ინტეგრალები არიან დიფერენციალურად განსაზღვრულნი $\overset{\square}{\mathfrak{N}}^p(A_1\times\ldots\times A_p)$ და $\overset{\square}{\mathfrak{N}}^q(A_{p+1}\times\ldots\times A_n)$ კლასებზე შესაბამისად. იმისათვის, რომ არსებობდნენ

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{p}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int\left[\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right],$$

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{q}\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int\left[\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}{}^{p}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int\mu(dA_1,\dots,dA_n)\right],$$

$$\left(\overset{\square}{\mathfrak{R}}\right)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int\mu(dA_1,\dots,dA_n)$$

(p,q)-ჯერადი, (q,p)-ჯერადი და n-ჯერადი ბადური ინტეგრალები და ისინი იყვნენ ერთმანეთის ტოლი აუცილებელია და საკმარისი, რომ (II.10.23) q-ჯერადი და p-ჯერადი ბადური ინტეგრალებიდან ერთ-ერთი არსებობდეს დიფერენციალურად თანაბრად.

დამტკიცება. აუცილებლობა გამომდინარეობს 10.4 თეორემიდან, ხოლო საკმარისობა კი – 10.7 თეორემიდან.

§11. პარამეტრზე დამოკიდებული სიმრავლის ფუნქციის ინტეგრალი.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}_1,\dots,\mathfrak{N}_n$ სიმრაველეთა ნორმალური კლასებია, $A_i \in \mathfrak{N}_i$ $(i=1,\dots,n)$ და $A_1\times\cdots\times A_p\times\mathfrak{N}_{p+1}A_{p+1}\otimes\cdots\otimes\mathfrak{N}_nA_n$ დეკარტულ ნამრაველზე განსაზღვრულია მრავალსახა კომპლექსური $K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1},\dots,A_n)$ ფუნქცია.

ვიტყვით, რომ K ფუნქცია ინტეგრებადია $A_{p+1}\times\cdots\times A_n$ სიმრავლეზე $\mathfrak{N}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასის მიმართ თანაბრად $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ ან $K\in\left[K_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right]$ თანაბრად $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{A^k_{p+1}\times\cdots\times A^k_n\}_{k=1}^N$ გაგრძელებისათვის და K ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\left|(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\dots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)-\sum_{k=1}^N K(x_1,\dots,x_p,A^k_{p+1},\dots,A^k_n)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

11.1. ვთქვათ,

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\dots\!\int K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1},\dots,A_n)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\qquad\text{(II.11.1)}$$

p-ჯერადი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასზე, სადაც $\mu\in\left[V_0B_k;A_1\times\cdots\times A_p;\mathfrak{N}^p\right]$. თუ $K\in\left[K_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right]$ თანაბრად $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\dots\!\int\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\dots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\,\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right),$$

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\dots\!\int\left((\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\dots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p)$$

(q,p)-ჯერადი და (p,q)-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. დავუშვათ შესრულებულია თეორემის პირობები და ვაჩვენოთ, რომ არსებობს

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\,\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right) \tag{II.11.2}$$

(q,p)-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი.

პირობის თანახმად (II.11.1) p-ჯერადი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასზე, ამიტომ მოიძებნება ისეთი $D_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)=\{A_{p+1}^{1k}\times\cdots\times A_n^{1k}\}_{k=1}^{N_1}$ დანაწილება, რომ (II.11.1) p-ჯერადი ინტეგრალი განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^q D_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასზე ანუ, რაც იგივეა (II.11.1) p-ჯერადი ინტეგრალი არსებობს $\mathfrak{N}^q D_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასიდან აღებული ყოველი მართკუთხედისათვის.

რადაგანაც (II.11.1) p-ჯერადი ინტეგრალი არსებობს $D_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ყოველ კომპონენტზე, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოძებნება ისეთი $D_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{A_1^j\times\cdots\times A_p^j\}_{j=1}^{M}$ გაგრძელებისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\dots,x_p)\in$ $\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{N_1}(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^{1k},\dots,A_n^{1k})\,\mu(dA_1,\dots,dA_p)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{M}K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^{1k},\dots,A_n^{1k})\,\mu(A_1^j,\dots,A_p^j)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{II.11.3}$$

უტოლობას.

რადგანაც $K\in[K_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q]$ თანაბრად $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ, ამიტომ აღებული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_2(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{A_{p+1}^{2k}\times\cdots\times A_n^{2k}\}_{k=1}^{N_2}$ გაგრძელებისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\left|(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{N_2}K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^{k},\dots,A_n^{k})\right|<\frac{\varepsilon}{4V(\mu;A_1\times\cdots\times A_p;\mathfrak{N}^p)} \tag{II.11.4}$$

უტოლობას.

რადგანაც $\mathfrak{M}^q$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D_1(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ და $D_2(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილებათა $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ გაგრძელება. (II.11.3) და (II.11.4) უტოლობათა გათვალისწინებით, $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი ორი $\{A^{1k}_{p+1}\times\cdots\times A^{1k}_n\}_{k=1}^{N_1}, \{A^{2k}_{p+1}\times\cdots\times A^{2k}_n\}_{k=1}^{N_2}$ გაგრძელებისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილი, ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^{N_1}(\mathfrak{M}^p)\int\limits_{A_1\times\ldots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K\left(x_1,\dots,x_p,A^{1k}_{p+1},\dots,A^{1k}_n\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p)-\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{k=1}^{N_2}(\mathfrak{M}^p)\int\limits_{A_1\times\ldots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K\left(x_1,\dots,x_p,A^{2k}_{p+1},\dots,A^{2k}_n\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right|\le\\
&\le\left|\sum_{k=1}^{N_1}(\mathfrak{M}^p)\int\limits_{A_1\times\ldots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K\left(x_1,\dots,x_p,A^{1k}_{p+1},\dots,A^{1k}_n\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p)-\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{M}K\left(x_1,\dots,x_p,A^{1k}_{p+1},\dots,A^{1k}_n\right)\mu\left(A^j_1,\dots,A^j_p\right)\right|+\\
&+\left|\sum_{j=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_1}K\left(x_1,\dots,x_p,A^{1k}_{p+1},\dots,A^{1k}_n\right)\mu\left(A^j_1,\dots,A^j_p\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{j=1}^{M}(\mathfrak{M}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\ldots\times A_n}\!\!\cdots\!\int K\left(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)\mu\left(A^j_1,\dots,A^j_p\right)\right|+\\
&+\left|\sum_{j=1}^{M}(\mathfrak{M}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\ldots\times A_n}\!\!\cdots\!\int K\left(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)\mu\left(A^j_1,\dots,A^j_p\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{k=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{M}K\left(x_1,\dots,x_p,A^{1k}_{p+1},\dots,A^{1k}_n\right)\mu\left(A^j_1,\dots,A^j_p\right)\right|+\\
&+\left|\sum_{k=1}^{N_2}\sum_{j=1}^{M}K\left(x_1,\dots,x_p,A^{1k}_{p+1},\dots,A^{1k}_n\right)\mu\left(A^j_1,\dots,A^j_p\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{k=1}^{N_2}(\mathfrak{M}^p)\int\limits_{A_1\times\ldots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K\left(x_1,\dots,x_p,A^{2k}_{p+1},\dots,A^{2k}_n\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right|<\varepsilon.
\end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს (II.11.2) (q,p)-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალის არსებობა.

რადგანაც არსებობს (II.11.2) (q,p)-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი

და $K \in \left[\mathrm{K}_k ; \mathrm{A}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{A}_n ; \mathfrak{N}^q\right]$ თანაბრად $(x_1,\dots,x_p) \in \mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_p$ წერტილის მიმართ, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon^1(\mathrm{A}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{A}_n)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{\mathrm{A}_{p+1}^{1k} \times \cdots \times \mathrm{A}_n^{1k}\right\}_{k=1}^{N_1}$ გაგრძელებისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\dots,x_p) \in \mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\left|(\mathfrak{N}^q) \int_{\mathrm{A}_{p+1}\times\dots\times\mathrm{A}_n} \!\!\!\cdots\!\int \left((\mathfrak{N}^p) \int_{\mathrm{A}_1\times\dots\times\mathrm{A}_p} \!\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,d\mathrm{A}_{p+1},\dots,d\mathrm{A}_n)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_p)\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{N_1} (\mathfrak{N}^p) \int_{\mathrm{A}_1\times\dots\times\mathrm{A}_p} \!\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{1k},\dots,\mathrm{A}_n^{1k})\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_p)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{II.11.5}$$

$$\left|(\mathfrak{N}^q) \int_{\mathrm{A}_{p+1}\times\dots\times\mathrm{A}_n} \!\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,d\mathrm{A}_{p+1},\dots,d\mathrm{A}_n) - \sum_{k=1}^{N_1} K(x_1,\dots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{1k},\dots,\mathrm{A}_n^{1k})\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3V(\mu;\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_p;\mathfrak{N}^p)}$$

უტოლობებს.

მეორეს მხრივ, რადგანაც (II.11.1) p-ჯერადი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^q(\mathrm{A}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{A}_n)$ კლასზე, ამიტომ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ, რომ აღებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon(\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_p)$, $D_\varepsilon(\mathrm{A}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{A}_n) = \left\{\mathrm{A}_{p+1}^{2k} \times \cdots \times \mathrm{A}_n^{2k}\right\}_{k=1}^{N_2}$ დანაწილებები, რომ $D_\varepsilon(\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_p)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{\mathrm{A}_1^j \times \cdots \times \mathrm{A}_p^j\right\}_{j=1}^{M}$ გაგრძელებისათვის ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{N_2} (\mathfrak{N}^q) \int_{\mathrm{A}_1\times\dots\times\mathrm{A}_p} \!\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^k,\dots,\mathrm{A}_n^k)\mu(d\mathrm{A}_1,\dots,d\mathrm{A}_p) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{N_2} K(x_1^j,\dots,x_p^j,\mathrm{A}_{p+1}^k,\dots,\mathrm{A}_n^k)\mu(\mathrm{A}_1^j,\dots,\mathrm{A}_p^j)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{II.11.6}$$

უტოლობას, სადაც $(x_1^j,\dots,x_p^j) \in \mathrm{A}_1^j,\dots,\mathrm{A}_p^j (j = 1,\dots,M)$.

რადგანაც $\mathfrak{N}^q$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D_\varepsilon^1(\mathrm{A}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{A}_n)$ და $D_\varepsilon^2(\mathrm{A}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{A}_n)$ დანაწილებათა $D_\varepsilon(\mathrm{A}_{p+1} \times \cdots \times \mathrm{A}_n)$ გაგრძელება. (II.11.5) და (II.11.6) უტოლობათა გათვალისწინებით, $D_\varepsilon(\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_p)$

დანაწილების ნებისმიერი $\{A_1^j\times\cdots\times A_p^j\}_{k=1}^{M}$ გაგრძელებისათვის და $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\{A_{p+1}^k\times\cdots\times A_n^k\}_{k=1}^{N}$ გაგრძელებისათვის, ვღებულობთ

$$\left|(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{M}(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int K(x_1^j,\dots,x_p^j,dA_{p+1},\dots,dA_n)\mu(A_1^j,\dots,A_p^j)\right|\le$$

$$\le\left|(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{N}(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^k,\dots,A_n^k)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{N}(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^k,\dots,A_n^k)\mu(dA_1,\dots,dA_p)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}K(x_1^j,\dots,x_p^j,A_{p+1}^k,\dots,A_n^k)\mu(A_1^j,\dots,A_p^j)\right|+$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}K(x_1^j,\dots,x_p^j,A_{p+1}^k,\dots,A_n^k)\mu(A_1^j,\dots,A_p^j)-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{M}(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int K(x_1^j,\dots,x_p^j,dA_{p+1},\dots,dA_n)\mu(A_1^j,\dots,A_p^j)\right|<\varepsilon$$

რაც ნიშნავს, რომ არსებობს

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p)$$

(p,q)-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალი და ადგილი აქვს

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\,\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right)=$$

$$=(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p)$$

ტოლობას.

შევნიშნოთ, რომ თუ ამ თეორემაში K ფუნქციის თანაბრად ინტეგრებადობას არ მოვითხოვთ, მაშინ ის არ იქნება სამართლიანი.

მართლაც, ვთქვათ, $A_1^0=(0,1), A_2^0=\ldots=A_n^0=[1,2)$, $\mathfrak{M}_1$ იყოს $(0,1)$ ინტერვალში შემავალი ლებეგის აზრით ზომადი ყველა სიმრავლის კლასი და $\mathfrak{M}_2=\ldots=\mathfrak{M}_n$ იყოს ყველა $[a,b)\subset[1,2)$ სახის ნახევარსეგმენტის კლასი.

განვიხილოთ

$$K(x,A_2,\ldots,A_n)=\frac{(b_2-a_2)^{3/2}\ldots(b_n-a_n)^{3/2}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+a_2+a_n\right)\left(\sqrt{x}+b_2+b_n\right)}$$

ფუნქცია , სადაც $x\in A_1^0, A_i=[a_i,b_i)\in\mathfrak{M}_i\ (i=2,\ldots,n)$.

რადგანაც ყოველი ფიქსირებული $x\in(0,1)$-სათვის

$$K(x,A_2,\ldots,A_n)=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+a_2+a_n\right)\left(\sqrt{x}+b_2+b_n\right)}$$

ფუნქცია შემოსაზღვრულია, როგორც $A_2\times\cdots\times A_n$ სიმრავლის ფუნქცია, ამიტომ ყოველი $x\in(0,1)$ წერტილისათვის

$$\left(\mathfrak{M}^p\right)\int\limits_{A_2^0\times\ldots\times A_n^0}\!\!\ldots\!\int K(x,dA_2,\ldots,dA_n)=0\quad(p=n-1)$$

მაგრამ არა თანაბრად $x\in(0,1)$ წერტილის მიმართ, ვინაიდან

$$\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+a_2+a_n\right)\left(\sqrt{x}+b_2+b_n\right)}$$

ფუნქცია, როგორც x-ის ფუნქცია არაა შემოსაზღვრული $(0,1)$ ინტერვალზე.

ამრიგად,

$$\left(\mathfrak{M}^q\right)\int_0^1\left(\left(\mathfrak{M}^p\right)\int\limits_{A_2^0\times\ldots\times A_n^0}\!\!\ldots\!\int K(x,dA_2,\ldots,dA_n)\right)dx=0\ (p=n-1,q=1).$$

მეორეს მხრივ, გვაქვს

$$\left(\mathfrak{M}^q\right)\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+a_2+a_n\right)\left(\sqrt{x}+b_2+b_n\right)}=$$

$$=\frac{2}{(a_2+\ldots+a_n)(b_2+\ldots+b_n)}\ln\frac{(b_2+\ldots+b_n)(1+a_2+\ldots+a_n)}{(a_2+\ldots+a_n)(1+b_2+\ldots+b_n)}.$$

როცა $a_i<b_i\ (i=2,\ldots,n)$, მაშინ

$$\ln\frac{(b_2+\ldots+b_n)(1+a_2+\ldots+a_n)}{(a_2+\ldots+a_n)(1+b_2+\ldots+b_n)}$$

ფუნქცია $A_2^0\times\cdots\times A_n^0$ სიმრავლეზე ქვემოდან შემოსაზღვრულია $\ln\frac{1}{(n-1)(2n-1)}$ რიცხვით. ამიტომ

$$\left(\mathfrak{M}^p\right)\int\limits_{A_2^0\times\ldots\times A_n^0}\!\!\!\ldots\!\int\left(\left(\mathfrak{M}^q\right)\int\limits_0^1 K\left(x,dA_2^0,\ldots,dA_n^0\right)dx\right)=+\infty.$$

ვთქვათ, f არის $A_{p+1}\times\cdots\times A_n$ სიმრავლეზე განსაზღვრული მრავალსახა კომპლექსური ფუნქცია.

ვიტყვით, რომ

$$\left(\mathfrak{M}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\ldots\!\int f\left(x_{p+1},\ldots,x_n\right)K\left(x_1,\ldots,x_p,dA_{p+1},\ldots,dA_n\right)$$

q-ჯერადი ინტეგრალი არსებობს თანაბრად $\left(x_1,\ldots,x_p\right)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon\left(A_{p+1}\times\cdots\times A_n\right)$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^k\times\cdots\times A_n^k\right\}_{k=1}^N$ გაგრძელებისათვის და $f\cdot K$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $\left(x_1,\ldots,x_p\right)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\left|\left(\mathfrak{M}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\!\ldots\!\int f\left(x_{p+1},\ldots,x_n\right)K\left(x_1,\ldots,x_p,dA_{p+1},\ldots,dA_n\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^N f\left(x_{p+1}^k,\ldots,x_n^k\right)K\left(x_1,\ldots,x_p,A_{p+1}^k,\ldots,A_n^k\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას, სადაც $\left(x_{p+1}^k,\ldots,x_n^k\right)\in A_{p+1}^k\times\cdots\times A_n^k\ (k=1,\ldots,N)$.

შემოვიღოთ აღვნიშვნა:

$$V\left(K;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{M}^q\right)=\sup_{(x_1,\ldots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p}V\left(K;x_1,\ldots,x_p;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{M}^q\right).$$

11.2. თუ $f\in\left[M_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{M}^q\right]$, ყოველი ფიქსირებული $\left(x_1,\ldots,x_p\right)\in$ $\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილისათვის K არის სასრულოდ-ადიტიური სასრული ვარიაციის ფუნქცია $\mathfrak{M}^q\left(A_{p+1}\times\cdots\times A_n\right)$ კლასზე და

$$V\left(K;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{M}^q\right)<+\infty,$$

მაშინ

$$\left(\mathfrak{M}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\ldots\times A_n}\!\!\!\ldots\!\int f\left(x_{p+1},\ldots,x_n\right)K\left(x_1,\ldots,x_p,dA_{p+1},\ldots,dA_n\right)$$

q-ჯერადი ინტეგრალი არსებობს თანაბრად $(x_1,\ldots,x_p)\in A_1\times\ldots\times A_p$ წერტილის მიმართ.

დამტკიცება. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)=\{A^k_{p+1}\cdots\times A^k_n\}_{k=1}^N$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{A^{kj_k}_{p+1}\times\cdots\times A^{kj_k}_{p+1}(j_k)\}_{k=1}^N$ გაგრძელებისათვის და $f\cdot K$ ფუნქციის მნიშვნელობათა ნებისმიერი არჩევისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\ldots,x_p)\in A_1\times\ldots\times A_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^N f(x^k_{p+1},\ldots,x^k_n)K(x_1,\ldots,x_p,A^k_{p+1},\ldots,A^k_n)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^N\sum_{j_k} f(x^{kj_k}_{p+1},\ldots,x^{kj_k}_{p+1})K(x_1,\ldots,x_p,A^{kj_k}_{p+1},\ldots,A^{kj_k}_{p+1})\right|<\varepsilon$$

უტოლობას, სადაც $(x^k_{p+1},\ldots,x^k_n)\in A^k_{p+1}\times\cdots\times A^k_n\ (k=1,\ldots,N)$, $(x^{kj_k}_{p+1},\ldots,x^{kj_k}_n)\in A^{kj_k}_{p+1}\times\cdots\times A^{kj_k}_n$ $(k=1,\ldots,N)$.

რადგანაც $f\in[M_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q]$, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)=\{A^k_{p+1}\cdots\times A^k_n\}_{k=1}^N$ დანაწილება, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $(x^{1k}_{p+1},\ldots,x^{1k}_n),(x^{2k}_{p+1},\ldots,x^{2k}_n)\in A^k_{p+1}\times\cdots\times A^k_n$ წერტილები, ადგილი აქვს

$$\left|f(x^{1k}_{p+1},\ldots,x^{1k}_n)-f(x^{2k}_{p+1},\ldots,x^{2k}_{p+1})\right|<\frac{\varepsilon}{V(K;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q)}$$

უტოლობას.

განვიხილოთ $D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\{A^{kj_k}_{p+1}\times\cdots\times A^{kj_k}_n(j_k)\}$ $(k=1,\ldots,N)$ გაგრძელება. რადგანაც ყოველი ფიქსირებული $(x_1,\ldots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილისათვის K არის სასრულოდ-ადიტიური სასრული ვარიაციის ფუნქცია $\mathfrak{N}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასზე, ამიტომ, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\ldots,x_p)\in$ $\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილი, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^N f(x^k_{p+1},\ldots,x^k_n)K(x_1,\ldots,x_p,A^k_{p+1},\ldots,A^k_{p+1})-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^N\sum_{j_k} f(x^{kj_k}_{p+1},\ldots,x^{kj_k}_n)K(x_1,\ldots,x_p,A^{kj_k}_{p+1},\ldots,A^{kj_k}_n)\right|\le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{j_k}\left|f\left(x_{p+1}^{k},\dots,x_{n}^{k}\right)-f\left(x_{p+1}^{kj_k},\dots,x_{p+1}^{kj_k}\right)\right|\cdot\left|K\left(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^{kj_k},\dots,A_n^{kj_k}\right)\right|<\varepsilon .$$

11.3. თუ $f\in\left[M_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right], K\in\left[M_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right]$ თანაბრად $\left(x_1,\dots,x_p\right)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ და

$$V_0\left(K;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right)=\sup_{\left(x_1,\dots,x_p\right)\in E^p} V_0\left(K;x_1,\dots,x_p;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right)<+\infty ,$$

მაშინ

$$\left(\mathfrak{N}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int f\left(x_{p+1},\dots,x_n\right)K\left(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)$$

q-ჯერადი ინტეგრალი არსებობს თანაბრად $\left(x_1,\dots,x_p\right)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$K_1\left(x_1,\dots,x_p,A_{p+1},\dots,A_n\right)=\left(\mathfrak{N}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int K\left(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right).$$

რადგანაც ყოველი $\left(x_1,\dots,x_p\right)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილისათვის

$$\left(\mathfrak{N}^q\right)\overline{\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int}\left|K_1\right|\left(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)=\left(\mathfrak{N}^q\right)\overline{\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int}\left|K\right|\left(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)$$

ამიტომ

$$V\left(K_1;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right)=V_0\left(K;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right)<+\infty .$$

11.2 თეორემის თანახმად

$$\left(\mathfrak{N}^q\right)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\!\int f\left(x_{p+1},\dots,x_n\right)K_1\left(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n\right)$$

ინტეგრალი არსებობს თანაბრად $\left(x_1,\dots,x_p\right)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_1\left(A_{p+1}\times\cdots\times A_n\right)=$ $=\left\{A_{p+1}^{1k}\times\cdots\times A_n^{1k}\right\}_{k=1}^{N_1}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{A_{p+1}^{1kj_k}\times\cdots\times A_n^{1kj_k}\left(j_k\right)\right\}_{k=1}^{N_1}$ გაგრძელებისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $\left(x_1,\dots,x_p\right)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\left|\sum_{k=1}^{N_1} f\left(x_{p+1}^{1k},\dots,x_n^{1k}\right)K_1\left(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^{1k},\dots,A_n^{1k}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j_k} f\left(x_{p+1}^{1kj_k},\dots,x_n^{1kj_k}\right)K_1\left(x_1,\dots,x_p,A_{p+1}^{1kj_k},\dots,A_n^{1kj_k}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(II.11.7)}$$

უტოლობას.

მეორეს მხრივ, რადგანაც $K\in\left[\mathrm{K}_k;\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n;\mathfrak{N}^q\right]$ თანაბრად $(x_1,\ldots,x_p)\in$ $\in\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p$ წერტილის მიმართ, ამიტომ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_2(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)=\left\{\mathrm{A}_{p+1}^{2k}\times\cdots\times\mathrm{A}_n^{2k}\right\}_{k=1}^{N_2}$ დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\left\{\mathrm{A}_{p+1}^{2kj_k}\times\ldots\times\mathrm{A}_n^{2kj_k}(j_k)\right\}_{k=1}^{N_2}$ გაგრძელებისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\ldots,x_p)\in\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p$ წერტილი, ადგილი აქვს

$$\sum_{k=1}^{N_2}\sum_{j_k}\left|f\left(x_{p+1}^{2kj_k},\ldots,x_n^{2kj_k}\right)\right|\times$$
$$\times\left|K\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{2kj_k},\ldots,\mathrm{A}_n^{2kj_k}\right)-K_1\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{2kj_k},\ldots,\mathrm{A}_n^{2kj_k}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{II.11.8}$$

უტოლობას.

რადაგანაც $\mathfrak{N}^q$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D_1(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ და $D_2(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ დანაწილებათა $D(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)=$ $=\left\{\mathrm{A}_{p+1}^{k}\times\cdots\times\mathrm{A}_n^{k}\right\}_{k=1}^{N}$ გაგრძელება. (II.11.7) და (II.11.8) უტოლობათა გათვალისწინებით $D(\mathrm{A}_{p+1}\times\cdots\times\mathrm{A}_n)$ დანაწილების ნებისმიერი $\left\{\mathrm{A}_{p+1}^{kj_k}\times\cdots\times\mathrm{A}_n^{kj_k}(j_k)\right\}_{k=1}^{N}$ გაგრძელებისათვის, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_1,\ldots,x_p)\in\mathrm{A}_1\times\cdots\times\mathrm{A}_p$ წერტილი, ვღებულობთ

$$\left|\sum_{k=1}^{N}f\left(x_{p+1}^{k},\ldots,x_n^{k}\right)K\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{k},\ldots,\mathrm{A}_n^{k}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_k}f\left(x_{p+1}^{kj_k},\ldots,x_n^{kj_k}\right)K\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{kj_k},\ldots,\mathrm{A}_n^{kj_k}\right)\right|\le$$
$$\le\left|\sum_{k=1}^{N}f\left(x_{p+1}^{k},\ldots,x_n^{k}\right)K_1\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{k},\ldots,\mathrm{A}_n^{k}\right)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_k}f\left(x_{p+1}^{kj_k},\ldots,x_n^{kj_k}\right)K_1\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{kj_k},\ldots,\mathrm{A}_n^{kj_k}\right)\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\left|f\left(x_{p+1}^{k},\ldots,x_n^{k}\right)\right|\cdot\left|K\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{k},\ldots,\mathrm{A}_n^{k}\right)-K_1\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{k},\ldots,\mathrm{A}_n^{k}\right)\right|+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sum_{j_k}\left|f\left(x_{p+1}^{kj_k},\ldots,x_n^{kj_k}\right)\right|\cdot\left|K\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{kj_k},\ldots,\mathrm{A}_n^{kj_k}\right)-K_1\left(x_1,\ldots,x_p,\mathrm{A}_{p+1}^{kj_k},\ldots,\mathrm{A}_n^{kj_k}\right)\right|<\varepsilon$$

უტოლობას, რაც ნიშნავს, რომ

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_{p+1},\dots,x_n)K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)$$

q-ჯერადი ინტეგრალი არსებობს თანაბრად $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ.

11.4. ვთქვათ,

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,A_{p+1},\dots,A_n)\mu(dA_1,\dots,dA_p)$$

p-ჯერადი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასზე, სადაც $\mu\in\left[\mathbf{V}_0\mathbf{B}_k;A_1\times\cdots\times A_p;\mathfrak{N}^p\right]$. თუ

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_{p+1},\dots,x_n)K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)$$

q-ჯერადი ინტეგრალი არსებობს თანაბრად $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_{p+1},\dots,x_n)K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p),$$

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_{p+1},\dots,x_n)\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right)$$

(p,q)-ჯერადი და (q,p)-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

ეს თეორემა მტკიცდება 11.1 თეორემის მსგავსად.

11.5. ვთქვათ,

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\mu(dA_1,\dots,dA_p)$$

p-ჯერადი ინტეგრალი დიფერენციალურად განსაზღვრულია $\mathfrak{N}^q(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$ კლასზე, სადაც $\mu\in\left[\mathbf{V}_0\mathbf{B}_k;A_1\times\cdots\times A_p;\mathfrak{N}^p\right]$. თუ $f\in\left[\mathbf{M}_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right]$, $K\in\left[\mathbf{K}_k;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q\right]$ თანაბრად $(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ და

$$V_0(K;A_{p+1}\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}^q)<+\infty,$$

მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_{p+1},\dots,x_n)K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\right)\mu(dA_1,\dots,dA_p),$$

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_{p+1},\dots,x_n)\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\cdots\!\int K(x_1,\dots,x_p,dA_{p+1},\dots,dA_n)\mu(dA_1,\dots,dA_p)\right)$$

(p,q)-ჯერადი და (q,p)-ჯერადი განმეორებითი ინტეგრალები და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

ეს თეორემა მტკიცდება 11.3 და 11.4 თეორემათა გამოყენებით.

ვთქვათ, $A_i\in\mathfrak{N}_i(i=1,\dots,n)$, $\mu_i\in[V_0B_k;A_i;\mathfrak{N}_i]$, $\mu^p=\mu_1\times\cdots\times\mu_p$, $\mu^q=\mu_{p+1}\times\cdots\times\mu_n$ და f არის $A_1\times\cdots\times A_n$ მართკუთხედზე განსაზღვრული მრავალსახა კომპლექსური ფუნქცია.

ვიტყვით, რომ

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\dots,x_n)\mu^p(dA_1,\dots,dA_p)$$

$$\left((\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\dots,x_n)\mu^q(dA_{p+1},\dots,dA_n)\right)$$

p-ჯერადი (q-ჯერადი) ინტეგრალი არსებობს თანაბრად $(x_{p+1},\dots,x_n)\in$ $\in A_{p+1}\times\cdots\times A_n$ ($(x_1,\dots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$) წერტილის მიმართ, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon(A_1\times\cdots\times A_p)$ ($D_\varepsilon(A_{p+1}\times\cdots\times A_n)$) დანაწილება, რომ მისი ნებისმიერი $\{A_1^j\times\cdots\times A_p^j\}_{j=1}^M$ ($\{A_{p+1}^k\times\cdots\times A_n^k\}_{k=1}^N$) გაგრძელებისათვის ადგილი აქვს

$$\left|(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\dots\times A_p}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\dots,x_n)\mu^p(dA_1,\dots,dA_p)-\sum_{j=1}^M f(x_1^j,\dots,x_p^j,x_{p+1},\dots,x_n)\mu^p(A_1^j,\dots,A_p^j)\right|<\varepsilon$$

$$\left(\left|(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\dots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\dots,x_n)\mu^q(dA_{p+1},\dots,dA_n)-\sum_{k=1}^N f(x_1,\dots,x_p,x_{p+1}^k,\dots,x_n^k)\mu^q(A_{p+1}^k,\dots,A_n^k)\right|<\varepsilon\right)$$

უტოლობას, როგორიც არ უნდა იყოს $(x_{p+1},\dots,x_n)\in A_{p+1}\times\cdots\times A_n$ ($(x_1,\dots,x_p)\in$ $\in A_1\times\cdots\times A_p$) წერტილი, სადაც $(x_1^j,\dots,x_p^j)\in(A_1^j,\dots,A_p^j)(j=1,\dots,M)$ ($(x_{p+1}^k,\dots,x_n^k)\in$ $\in(A_{p+1}^k,\dots,A_n^k)(k=1,\dots,N)$).

11.6. ვთქვათ, არსებობს

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\mu^p(dA_1,\ldots,dA_p),$$

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\mu^q(dA_{p+1},\ldots,dA_n)$$

p-ჯერადი და q-ჯერადი ინტეგრალები. თუ ამ ინტეგრალებიდან ერთ-ერთი არსებობს თანაბრად $(x_{p+1},\ldots,x_n)\in A_{p+1}\times\cdots\times A_n$ ან $(x_1,\ldots,x_p)\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ, მაშინ არსებობს

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\mu^q(dA_{p+1},\ldots,dA_n)\right)\mu^p(dA_1,\ldots,dA_p),$$

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int\left((\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\mu^p(dA_1,\ldots,dA_p)\right)\mu^q(dA_{p+1},\ldots,dA_n),$$

$$(\mathfrak{N})\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\mu(dA_1,\ldots,dA_n)\ \left(\mu=\mu^p\cdot\mu^q\right)$$

(p,q)-ჯერადი, (q,p)-ჯერადი და n-ჯერადი ინტეგრალები და ისინი ერთმანეთის ტოლია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $f\in[M_k;A_1\times\cdots\times A_n;\mathfrak{N}]$ ფუნქციისათვის n-ჯერადი ზოგადი ინტეგრალი და n-ჯერადი ზოგადი ბადური ინტეგრალი არსებობს და ისინი ერთმანეთის ტოლია, თუ $\mu_i\ (i=1,\ldots,n)$ არის სასრულოდ-ადიტიური სასრული ვარიაციის ფუნქცია $\mathfrak{N}_i A_i\ (i=1,\ldots,n)$ კლასზე და $\mu=\mu_1\times\ldots\times\mu_n$. გარდა ამისა, 8.5 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$(\mathfrak{N}^p)\int\limits_{A_1\times\cdots\times A_p}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\mu^p(dA_1,\ldots,dA_p),$$

$$(\mathfrak{N}^q)\int\limits_{A_{p+1}\times\cdots\times A_n}\!\!\cdots\!\int f(x_1,\ldots,x_n)\mu^q(dA_{p+1},\ldots,dA_n)$$

ინტეგრალები არსებობს თანაბრად $(x_{p+1},\ldots,x_n)\in A_{p+1}\times\cdots\times A_n$ და $(x_1,\ldots,x_p)\in\in A_1\times\cdots\times A_p$ წერტილის მიმართ შესაბამისად. ამრიგად, 8.7 თეორემა და მაშასადამე, ფუბინის თეორემა თითქმის ყველგან შემოსაზღვრული ზომადი ფუნქციებისათვის წარმოადგენს 11.6 თეორემის კერძო შემთხვევას.

თავი III

წრფივი ფუნქციონალი $[M_k;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეში

§12. წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე ფუნქციათა $[M_k;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეში და მისი ზოგიერთი გამოყენება.

ვთქვათ, $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია და $E\in\mathfrak{N}$.

ვიტყვით, რომ f ფუნქცია განზოგადებულად უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ ან $f\in[M_k;E;\mathfrak{N}]$, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $x_k', x_k''\in E_k\,(k=1,\dots,n)$ წერტილები, ადგილი აქვს

$$\left|f(x_k')-f(x_k'')\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $f\in[M_k;E;\mathfrak{N}]$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა f არის მარტივ ფუნქციათა $[P_k;E;\mathfrak{N}]$ კლასიდან აღებული ფუნქციების თანაბრად კრებადი მიმდევრობის ზღვარი.

$[M_k;E;\mathfrak{N}]$ კლასში შემოვიღოთ ნორმა

$$\|f\|=\sup_{x\in E}\{|f(x)|\}$$

ტოლობის საშუალებით.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული ნორმის მიმართ $[M_k;E;\mathfrak{N}]$ კლასი წარმოადგენს ბანახის ალგებრას [15, გვ.513] კომპლექსურ რიცხვთა ველზე.

ვთქვათ, $\mathfrak{F}\subset[M_k;E;\mathfrak{N}]$. $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციებს ვუწოდოთ განზოგადებულად თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ ნებისმიერი $x_k', x_k''\in E_k\,(k=1,\dots,n)$ წერტილებისათვის და ნებისმიერი $f\in\mathfrak{F}$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს

$$\left|f(x_k')-f(x_k'')\right|<\varepsilon$$

უტოლობას.

12.1. იმისათვის, რომ $\mathfrak{F}\subset[M_k;E;\mathfrak{N}]$ ოჯახი იყოს კომპაქტური სიმრავლე, აუცილებელია და საკმარისი, $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციები იყვნენ თანაბრად შემო-

საზღვრული და განზოგადებულად თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, $\mathfrak{F}$ არის კომპაქტი. $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციების თანაბრად შემოსაზღვრულობა E სიმრავლეზე გამომდინარეობს იქიდან, რომ მეტრიკული სივრცის კომპაქტური სიმრავლე შემოსაზღვრულია. ვაჩვენოთ $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციების განზოგადებულად თანაბრად უწყვეტობა. ვთქვათ, მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის $\{f_1(x),\dots,f_s(x)\}$ არის $\mathfrak{F}$ სიმრავლის სასრული $\frac{\varepsilon}{3}$-ბადე. რადგანაც $f_k(k=1,\dots,s)$ ფუნქცია განზოგადებულად თანაბრად უწყვეტია E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ, ამიტომ $\frac{\varepsilon}{3}$ რიცხვისათვის მოიძებნება k-ზე დამოკიდებული ისეთი $D_k\mathrm{E}=\{E_k^{j_k}\}_{j_k=1}^{N_k}$ დანაწილება, რომ ყოველი k-სათვის $(k=1,\dots,s)$ ადგილი აქვს

$$\left|f_k(x'_{j_k})-f_k(x''_{j_k})\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

უტოლობას, როგორიც არ უნდა იყოს $x'_k,x''_k\in E_k^{j_k}\left(j_k=1,\dots,N_k\right)$ წერტილები.

რადგანაც $\mathfrak{N}$ სიმრავლეთა ნორმალური კლასია, ამიტომ არსებობს $D_1\mathrm{E},\dots,D_s\mathrm{E}$ დანაწილებათა $D\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ გაგრძელება. მაშინ ნებისმიერი $x'_k,x''_k\in E_k(k=1,\dots,n)$ წერტილებისათვის და ნებისმიერი $f\in\mathfrak{F}$ ფუნქციისათვის გვექნება

$$\left|f(x'_k)-f(x''_k)\right|\le\left|f(x'_k)-f_i(x'_k)\right|+\left|f_i(x'_k)-f_i(x''_k)\right|+\left|f_i(x''_k)-f(x''_k)\right|\le$$

$$\le\sup_{x\in\mathrm{E}}\left|f(x)-f_i(x)\right|+\sup_{x\in\mathrm{E}}\left|f_i(x)-f_i(x)\right|+\sup_{x\in\mathrm{E}}\left|f_i(x)-f(x)\right|<2\rho(f,f_i)+\frac{\varepsilon}{3}$$

თუ f_i ფუნქციას შევარჩევთ ისე, რომ

$$\rho(f,f_i)<\frac{\varepsilon}{3},$$

მივიღებთ

$$\left|f(x'_k)-f(x''_k)\right|<\varepsilon.$$

რადაგანაც $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია და მიღებული შეფასება არ არის დამოკიდებული, როგორც $x'_k,x''_k\in E_k(k=1,\dots,n)$ წერტილებზე ისე, $f\in\mathfrak{F}$ ფუნქციის არჩევაზე, ამიტომ ამით $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციების განზოგადებულად

თანაბრად უწყვეტობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ამისათვის უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\mathfrak{F}$ ოჯახიდან შესაძლებელია გამოვყოთ ფუნქციათა თანაბრად კრებადი მიმდევრობა.

თეორემის პირობის თანახმად ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ ადგილი აქვს

$$|f_i(x_k') - f_i(x_k'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

უტოლობას, როგორიც არ უნდა იყოს $x_k', x_k'' \in E_k \, (k = 1,\dots,n)$ წერტილი და $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქცია.

$E_i \, (i = 1,\dots,n)$ სიმრავლიდან ავიღოთ ნებისმიერი x_i წერტილი. რადგანაც $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციები თანაბრად შემოსაზღვრულია, ამიტომ $\mathfrak{F}$ ოჯახიდან შესაძლებელია გამოვყოთ ფუნქციათა $\{f_s\}$ მიმდევრობა, რომელიც თანაბრად კრებადი იქნება $\{x_1,\dots,x_n\}$ სიმრავლეზე. ვაჩვენოთ, რომ $\{f_s\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე.

რადგანაც $\{f_s\}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $\{x_1,\dots,x_n\}$ სიმრავლეზე, ამიტომ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $N > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $s, l > N$, ადგილი აქვს

$$|f_s(x) - f_l(x)| < \varepsilon$$

უტოლობას, როგორიც არ უნდა იყოს $x \in \{x_1,\dots,x_n\}$ წერტილი.

ვთქვათ, ახლა, $x \in \mathrm{E}$ ნებისმიერი წერტილია. მაშინ მოიძებნება ისეთი $k_0 \, (1 \le k_0 \le n)$ ნიშნაკი, რომ $x \in E_{k_0}$ და, ამიტომ, როცა $s, l > N$, გვაქვს

$$|f_s(x) - f_l(x)| \le |f_s(x) - f_s(x_{k_0})| + |f_s(x_{k_0}) - f_l(x_{k_0})| + |f_l(x_{k_0}) - f_l(x)| < \varepsilon .$$

რადაგანაც $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია და მიღებული შეფასება არ არის დამოკიდებული $x \in \mathrm{E}$ წერტილებზე, ამიტომ ამით $\{f_s\}$ მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, (E, τ) ტოპოლოგიური სივრცეა და $\mathfrak{N}$ არის სიმრავლეთა ნორმალური კლასი, რომელიც შედგება E სიმრავლის ყველა ღია და ერთელემენტიანი ქვესიმრავლისაგან. მაშინ $\mathbf{C}_k(\mathrm{E}) \subset [\mathbf{M}_k; \mathrm{E}; \mathfrak{N}]$, სადაც $\mathbf{C}_k(\mathrm{E})$ აღნიშნავს

E სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა შემოსაზღვრული კომპლექსური უწყვეტი ფუნქციების ოჯახს. ვთქვათ, $\mathfrak{F} \subset C_k(E)$.

12.2. იმისათვის, რომ $\mathfrak{F}$ ოჯახი იყოს კომპაქტური სიმრავლე $C_k(E)$ კლასის მიმართ, აუცილებელია, რომ $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციები იყვნენ თანაბრად შემოსაზღვრული და განზოგადებულად თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე $\mathfrak{N}$ კლასის მიმართ და საკმარისია, რომ $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციები იყვნენ თანაბრად შემოსაზღვრული და განზოგადებულად თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე $\mathfrak{P}(E)$ კლასის მიმართ (იხ. [8], გვ.289).

აუცილებლობა გამომდინარეობს წინა თეორემიდან, საკმარისობა კი – მტკიცდება წინა თეორემის მსგავსად.

ვთქვათ, $\mathfrak{F} \subset C_k(E)$. $\mathfrak{F}$ კლასის ფუნქციებს ეწოდებათ თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი (იხ. [8], გვ.289), თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის და ყოველი $x \in E$ წერტილისათვის მოიძებნება x წერტილის ისეთი U მიდამო, რომ ყოველი $y \in U$-სათვის და ყოველი $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

უტოლობას.

12.3 (არცელა-ასკოლი). ვთქვათ, (E, τ) ბიკომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა. იმისათვის, რომ $\mathfrak{F} \subset C_k(E)$ ოჯახი იყოს კომპაქტერი სიმრავლე, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციები იყვნენ თანაბრად შემოსაზღვრული და თანაბარხარისხოვნად უწყვეტი (იხ. [8], გვ.289).

დამტკიცება. პირობის აუცილებლობა მტკიცდება 12.1 თეორემის მსგავსად. დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, $\mathfrak{F}$ ოჯახის ფუნქციები თანაბარხარისხოვნად უწყვეტია და $\varepsilon > 0$ ნებისმიერი რიცხვია. (E, τ) სივრცის ბიკომპაქტურობის ძალით შესაძლებელია მიდამოთა სისტემიდან, რომელიც არსებობს თანაბარხარისხოვნად უწყვეტობის განსაზღვრის ძალით, გამოვყოთ მიდამოთა სასრული $\{U_1, \dots, U_n\}$ კლასი. დავუშვათ,

$$E_1 = U_1,\ E_k = U_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} U_j \ (k = 2, \dots, n),$$

$$e_k = E_k - (E_k - E)\,(k = 1, \dots, n).$$

ცხადია, რომ $\{e_1, \dots, e_n\}$ კლასი წარმოადგენს E სიმრავლის დანაწილე-

ბას $\mathfrak{P}(E)$ კლასის მიმართ. ნებისმიერი $x_k', x_k'' \in e_k \,(k=1,...,n)$ წერტილებისათვის და ნებისმიერი $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს

$$|f(x_k') - f(x_k'')| < \varepsilon$$

უტოლობას, რაც 12.2 თეორემის ძალით ნიშნავს, რომ $\mathfrak{F}$ ოჯახი არის კომპაქტური სიმრავლე.

ვთქვათ, E რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა და $\mathfrak{F}$ არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული სასრული ნამდვილი ფუნქციების ოჯახი.

$\mathfrak{F}$ ოჯახს ვუწოდოთ საკმარისი, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. $\mathfrak{F}$ წრფივი ნორმირებული სივრცეა;

2. ყოველ f ფუნქციასთან ერთად $\mathfrak{F}$ ოჯახი შეიცავს მის $|f|$ მოდულსაც და მათ გააჩნიათ ტოლი ნორმები;

3. თუ $0 \le g \le f$, მაშინ $\|g\| \le \|f\|$.

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $\mathfrak{F}$ ოჯახი f ფუნქციასთან ერთად შეიცავს მის დადებით $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ და უარყოფით $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$ ნაწილებს, ვინაიდან

$$f^+(x) = \frac{1}{2}\left[|f(x)| + f(x)\right], \quad f^-(x) = \frac{1}{2}\left[|f(x)| - f(x)\right].$$

შემდეგ, $\mathfrak{F}$ ოჯახი ნებისმიერ ორ f და g ფუნქციასთან ერთად შეიცავს $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$ ფუნქციებს, ვინაიდან

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left[(f(x) + g(x)) + |f(x) - g(x)|\right],$$

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\left[(f(x) + g(x)) - |f(x) - g(x)|\right].$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $[M_k; E; \mathfrak{M}]$ საკმარისი სივრცეა.

12.4. საკმარის $\mathfrak{F}$ ოჯახზე განსაზღვრული ყოველი წრფივი Φ ფუნქციონალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი არაუარყოფითი წრფივი ფუნქციონალის სხვაობის სახით.

დამტკიცება. ყოველი არაუარყოფითი $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქციისათვის დავუშვათ,

$$\Phi^+(f) = \sup \Phi(g),$$

სადაც ზუსტი ზედა საზღვარი აიღება ყველა იმ $g \in \mathfrak{F}$ ფუნქციის მიმართ,

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $0 \le g \le f$.

ცხადია, რომ

$$\Phi^+(f) \ge 0,\ \Phi^+(f) \ge \Phi(f),$$

ვინაიდან შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $g = 0,\ g = f$.

რადგანაც

$$|\Phi(g)| \le \|\Phi\| \cdot \|g\| \le \|\Phi\| \cdot \|f\|,\quad 0 \le g \le f,$$

ამიტომ

$$|\Phi^+(f)| \le \|\Phi\| \cdot \|f\|.$$

მაშასადამე, $\Phi^+(f)$ ფუნქციონალი ღებულობს მხოლოდ სასრულ მნიშვნელობებს.

ვაჩვენოთ, რომ $\Phi^+(f)$ ფუნქციონალი ადიტიურია არაუარყოფით $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქციათა კლასზე. ამისათვის უპირველეს ყოვლისა ვაჩვენოთ, რომ

$$\Phi^+(f_1 + f_2) \le \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2),\ f_1, f_2 \ge 0.$$

ვთქვათ, $0 \le g \le f_1 + f_2$. g ფუნქცია ყოველთვის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $g_1 + g_2$ სახით, სადაც $0 \le g_1 \le f_1, 0 \le g_2 \le f_2$. ამისათვის საკმარისია დავუშვათ,

$$g_1 = \min\{f_1, g\},\ g_2 = g - g_1.$$

ცხადია, რომ

$$0 \le g_1 \le f_1, 0 \le g_2 = g - g_1 = g - \min\{f_1, g\} = \max\{g - f_1, 0\} \le f_2.$$

გვაქვს

$$\Phi(g) = \Phi(g_1) + \Phi(g_2) \le \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\Phi^+(f_1 + f_2) \le \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

ვაჩვენოთ, ახლა, შებრუნებული უტოლობა. ვთქვათ, $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$ არაუარყოფითი ფუნქციებია და $g_1, g_2 \in \mathfrak{F}$ ფუნქციები შევარჩიოთ ისე, რომ

$$0 \le g_1 \le f_1, 0 \le g_2 \le f_2.$$

მაშინ

$$\Phi^+(f_1 + f_2) \ge \sup \Phi(g_1 + g_2) = \sup \Phi(g_1) + \sup \Phi(g_2) = \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

მაშასადამე, $\Phi^+(f)$ ფუნქციონალი ადიტიურია არაუარყოფით $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქციათა კლასზე.

გარდა ამისა, ცხადია, რომ ის დადებითად ერთგვაროვანია, ე.ი. ყოველი ნამდვილი $a \geq 0$ რიცხვისათვის

$$\Phi^+(af) = a\Phi^+(f).$$

ყოველი $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქციისათვის დავუშვათ, რომ

$$\Phi^+(f) = \Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-),$$

სადაც f^+, f^- – f ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ნაწილებია შესაბამისად. ეს განსაზღვრა ცალსახაა. მართლაც, თუ ასევე გვაქვს

$$f = f_1^+ - f_1^-, \quad f_1^+, f_1^- \geq 0,$$

მაშინ

$$f^+ + f_1^- = f_1^+ + f^-.$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\Phi^+(f^+) + \Phi^+(f_1^-) = \Phi^+(f^+ + f_1^-) = \Phi^+(f_1^+ + f^-) = \Phi^+(f_1^+) + \Phi^+(f^-).$$

ვაჩვენოთ, ახლა, რომ $\Phi^+(f)$ ფუნქციონალი ადიტიურია $\mathfrak{L}$ კლასზე. ვთქვათ, $f_1 = g_1 - h_1$, $f_2 = g_2 - h_2$, $g_1, g_2 \geq 0$, $h_1, h_2 \geq 0$. მაშინ

$$f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$$

და

$$\Phi^+(f_1 + f_2) = \Phi^+(g_1 + g_2) - \Phi^+(h_1 + h_2) = \Phi^+(g_1) + \Phi^+(g_2) -$$
$$- \Phi^+(h_1) - \Phi^+(h_2) = \Phi^+(f_1) + \Phi^+(f_2).$$

ვაჩვენოთ, რომ Φ^+ ფუნქციონალი ერთგვაროვანია. თუ $a \geq 0$, მაშინ ცხადია

$$\Phi^+(af) = a\Phi^+(f).$$

ამიტომ საკმარისია განვიხილოთ $a = -1$ შემთხვევა. მაგრამ, თუ

$$f = g - h, \quad g \geq 0,\ h \geq 0,$$

მაშინ

$$-f = h - g$$

და

$$\Phi^+(-f) = \Phi^+(h) - \Phi^+(g) = -[\Phi^+(g) - \Phi^+(h)] = -\Phi^+(f).$$

ვაჩვენოთ, რომ Φ^+ ფუნქციონალი შემოსაზღვრულია $\mathfrak{F}$ კლასზე. მართლაც, ყოველი $f \in \mathfrak{F}$ ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\left|\Phi^+(f)\right| = \left|\Phi^+(f^+) - \Phi^+(f^-)\right| \le \Phi^+(f^+) + \Phi^+(f^-) = \Phi^+(|f|) \le \Phi^+(g_1) + \Phi^+(g_2),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\|\Phi^+\| \le \|\Phi\|.$$

განვიხილოთ $\mathfrak{F}$ კლასზე განსაზღვრული

$$\Phi^-(f) = \Phi^+(f) - \Phi(f)$$

ფუნქციონალი. ცხადია, რომ $\Phi^-(f)$ ფუნქციონალი წრფივია $\Phi^+(f)$ და $\Phi(f)$ ფუნქციონალებთან ერთად. გარდა ამისა, ის არაუარყოფითია, ვინაიდან ყოველი არაუარყოფითი f ფუნქციისათვის

$$\Phi^+(f) \ge \Phi(f).$$

მაშასადამე,

$$\Phi(f) = \Phi^+(f) - \Phi^-(f)$$

წარმოდგენა არის სასურველი.

და ბოლოს, შევნიშნოთ, მიღებული წარმოდგენა არის მინიმალური იმ აზრით, რომ, თუ

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$$

არის Φ ფუნქციონალის რაიმე სხვა წარმოდგენა არაუარყოფითი წრფივი Φ_1 და Φ_2 ფუნქციონალების საშუალებით, მაშინ

$$\Phi^+ \le \Phi_1, \quad \Phi^- \le \Phi_2.$$

მართლაც, თუ $f \in \mathfrak{F}$ არაუარყოფითი ფუნქციაა და $g \in \mathfrak{F}$ ისეთი ფუნქციაა, რომ $0 \le g \le f$, მაშინ

$$\Phi(g) = \Phi_1(g) - \Phi_2(g) \le \Phi_1(g) \le \Phi_1(f),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\Phi^+(f) \le \Phi_1(f).$$

მეორეს მხრივ,

$$\Phi_2 - \Phi^- = \Phi_1 - \Phi^+$$

ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\Phi^-(f)\le\Phi_2(f).$$

$\mathfrak{N}$E კლასზე განსაზღვრული ყველა სასრულოდ-ადიტიური სასრული ვარიაციის კომპლექსური ფუნქციის კლასი აღვნიშნოთ $[A_k;VB_k;E;\mathfrak{N}]$ სიმბოლოთი.

12.5. $[M;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი წრფივი ფუნქციონალი წარმოიდგინება

$$\Phi(f)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)$$

სახით, სადაც $\mu\in[A;VB;E;\mathfrak{N}]$.

დამტკიცება. თავდაპირველად დავუშვათ, რომ Φ არაუარყოფითი ფუნქციონალია. დავუშვათ, ყოველი $e\in\mathfrak{N}E$ სიმრავლისათვის

$$\mu(e)=\Phi(\chi_e(x)).$$

ვთქვათ, $De=\{e_k\}_{k=1}^n$ არის $e\in\mathfrak{N}E$ სიმრავლის რაიმე დანაწილება. მაშინ

$$\chi_e(x)=\chi_{e_1}(x)+\ldots+\chi_{e_n}(x)$$

ტოლობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს μ ფუნქციის სასრულოდ-ადიტიურობა.

ყოველი მარტივი

$$f(x)=\sum_{k=1}^n a_k\chi_{E_k}(x)\in[M;E;\mathfrak{N}]$$

ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\Phi(f)=\Phi\left(\sum_{k=1}^n a_k\,\chi_{E_k}(x)\right)=\sum_{k=1}^n a_k\,\Phi(\chi_{E_k}(x))=\sum_{k=1}^n a_k\,\mu(E_k)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE).$$

ვთქვათ, ახლა, $f\in[M;E;\mathfrak{N}]$ ნებისმიერი ფუნქციაა. მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D_\varepsilon E=\{E_k\}_{k=1}^n$ დანაწილება, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $x_k',x_k''\in E_k(k=1,\ldots,n)$ წერტილები, ადგილი აქვს

$$|f(x_k')-f(x_k'')|<\varepsilon$$

უტოლობას.

განვიხილოთ

$$f_1(x)=\sum_{k=1}^n m_k\chi_{E_k}(x),\quad m_k=\inf_{x_k\in E_k}\{f(x)\},$$

$$f_2(x)=\sum_{k=1}^{n}M_k\chi_{E_k}(x),\quad M_k=\sup_{x_k\in E_k}\{f(x)\}$$

ფუნქციები. გვაქვს

$$\Phi(f_1)=\sum_{k=1}^{n}m_k\Phi(\chi_{E_k}(x))=\sum_{k=1}^{n}m_k\,\mu(E_k)=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f_1(x)\mu(d\mathrm{E}),$$

$$\Phi(f_2)=\sum_{k=1}^{n}M_k\Phi(\chi_{E_k}(x))=\sum_{k=1}^{n}M_k\,\mu(E_k)=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f_2(x)\mu(d\mathrm{E}).$$

ცხადია, რომ ყოველი $x\in\mathrm{E}$ წერტილისათვის ადგილი აქვს

$$f_1(x)\le f(x)\le f_2(x)$$

უტოლობას. საიდანაც Φ ფუნქციონალის არაუარყოფითობის ძალით ვღებულობთ

$$\Phi(f_1)\le\Phi(f)\le\Phi(f_2).$$

გარდა ამისა,

$$\Phi(f_1)=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f_1(x)\mu(d\mathrm{E})\le(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})\le(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f_2(x)\mu(d\mathrm{E})=\Phi(f_2).$$

ამ უტოლობებიდან გვაქვს

$$\left|\Phi(f)-(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})\right|\le\Phi(f_2)-\Phi(f_1)<\varepsilon\,\mu(\mathrm{E}),$$

საიდანაც $\varepsilon>0$-ის ნებისმიერობის გამო ვღებულობთ

$$\Phi(f)=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E}).$$

ეს წარმოდგენა ერთადერთია ვინაიდან μ ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება Φ ფუნქციონალის საშუალებით.

ვთქვათ, Φ – $[\mathrm{M};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ სივრცეში განსაზღვრული ნებისმიერი წრფივი ფუნქციონალია. მაშინ 12.4 თეორემის თანახმად ის შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი

$$\Phi=\Phi^{+}-\Phi^{-}$$

სახით, სადაც Φ^{+} და Φ^{-} – $[\mathrm{M};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ სივრცეში განსაზღვრული არაუარყოფითი წრფივი ფუნქციონალებია.

ზემოდამტკიცებულის თანახმად

$$\Phi^+(f)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu_1(dE),\quad \Phi^-(f)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu_2(dE),$$

სადაც

$$\mu_1(e)=\Phi^+(\chi_e(x)),\ \mu_2(e)=\Phi^-(\chi_e(x)).$$

თუ დავუშვებთ

$$\mu=\mu_1-\mu_2,$$

მაშინ ცხადია $\mu\in[A;VB;E;\mathfrak{N}]$ და

$$\Phi(f)=\Phi^+(f)-\Phi^-(f)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu_1(dE)-(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu_2(dE)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE).$$

μ ფუნქციის ერთადერთობის დასამტკიცებლად ვაჩვენოთ, რომ

$$\mu(e)=\Phi(\chi_e(x)).$$

მართლაც,

$$\Phi^+(\chi_e(x))=\Phi^+(\chi_e(x))-\Phi^-(\chi_e(x))=\mu_1(e)-\mu_2(e)=\mu(e).$$

12.6. $[M;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი Φ ფუნქციონალის ზოგადი სახე მოიცემა

$$\Phi(f)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)$$

ფორმულით, სადაც $\mu\in[A;VB;E;\mathfrak{N}]$. ამასთან,

$$\|\Phi\|=V(\mu;E;\mathfrak{N}).$$

დამტკიცება. 12.5 თეორემის თანახმად $[M;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი წრფივი ფუნქციონალი წარმოიდგინება

$$\Phi(f)=(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)$$

სახით, სადაც $\mu(e)=\Phi(\chi_e(x))\in[A;VB;E;\mathfrak{N}]$.

მართებულია შებრუნებულიც. თუ $\mu\in[A;VB;E;\mathfrak{N}]$, მაშინ

$$(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)$$

განსაზღვრავს $[M;E;\mathfrak{N}]$ სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ Φ ფუნქციონალს.

Φ ფუნქციონალის შემოსაზღვრულობა გამომდინარეობს

$$|\Phi(f)|=\left|(\mathfrak{N})\int_E f(x)\mu(dE)\right|\le\sup_{x\in E}\{|f(x)|\}\cdot V(\mu;E;\mathfrak{N})=\|f\|\cdot V(\mu;E;\mathfrak{N})$$

უტოლობიდან, საიდანაც ვღებულობთ

$$\|\Phi\| \le V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{R}).$$

ვაჩვენოთ შებრუნებული უტოლობა. სასრული ვარიაციის განსაზღვრის თანახმად ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი $D_\varepsilon \mathrm{E} = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ ადგილი აქვს

$$V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{R}) < \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) + \varepsilon$$

უტოლობას.

განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} \Phi(\chi_{E_k}(x)) \cdot \chi_{E_k}(x).$$

ცხადია, რომ f ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ $-1,0,1$ მნიშვნელობებს და მაშასადამე, $\|f\| = 1$. ამიტომ

$$|\Phi(f)| \le \|\Phi\| \cdot \|f\| = \|\Phi\|.$$

მაგრამ

$$\Phi(f) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} \Phi(\chi_{E_k}(x)) \cdot \chi_{E_k}(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} \Phi(\chi_{E_k}(x)) \cdot \Phi(\chi_{E_k}(x)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} \mu(E_k) \cdot \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{n} |\mu(E_k)|.$$

მაშასადამე,

$$V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{R}) < \|\Phi\| + \varepsilon,$$

საიდანაც $\varepsilon > 0$-ის ნებისმიერობის გამო ვღებულობთ

$$V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{R}) \le \|\Phi\|.$$

12.7. $[\mathrm{M_k};\mathrm{E};\mathfrak{R}]$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი Φ ფუნქციონალის ზოგადი სახე მოიცემა

$$\Phi(f) = (\mathfrak{R})\int_{\mathrm{E}} f(x)\mu(d\mathrm{E})$$

ფორმულით, სადაც $\mu \in [\mathrm{A_k};\mathrm{VB_k};\mathrm{E};\mathfrak{R}]$. ამასთან,

$$\|\Phi\| = V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{R}).$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\Phi(f)$ $[\mathrm{M_k};\mathrm{E};\mathfrak{R}]$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი

ფუნქციონალია. მაშინ

$$\Phi(f)=\Phi_r(f)+i\cdot\Phi_{im}(f),$$

სადაც $\Phi_r(f)$ და $\Phi_{im}(f)$ – $[\mathbf{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალებია. სახელდობრ, $\Phi_r(f)$ და $\Phi_{im}(f)$ წარმოადგენენ ნამდვილ ფუნქციონალებს $[\mathbf{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ სივრცეში ნამდვილ რიცხვთა ველზე. ამიტომ 12.5 თეორემის თანახმად

$$\Phi_r(f)=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu_1(d\mathrm{E}),\qquad \Phi_{im}(f)=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu_2(d\mathrm{E}),$$

სადაც $\mu_1,\mu_2\in[\mathbf{A}_k;\mathbf{VB}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$.

$\mu\in[\mathbf{A}_k;\mathbf{VB}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ ფუნქცია განვსაზღვროთ $\mu=\mu_1+i\cdot\mu_2$ ტოლობით. მაშინ 6.6 თეორემის თანამად ყოველ $f\in[\mathbf{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ ფუნქციას აქვს

$$f=g+i\cdot h$$

სახე, სადაც $g,h\in[\mathbf{M};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. მაშასადამე,

$$\Phi(f)=\Phi(g)+i\cdot\Phi(h)=\Phi_r(g)+i\cdot\Phi_{im}(g)+i\cdot[\Phi_r(h)+i\cdot\Phi_{im}(h)]=$$

$$=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}g(x)\mu_1(d\mathrm{E})+i\cdot(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}g(x)\mu_2(d\mathrm{E})+i\cdot\left\{(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}h(x)\mu_1(d\mathrm{E})+i\cdot(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}h(x)\mu_2(d\mathrm{E})\right\}=$$

$$=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu_1(d\mathrm{E})+i\cdot(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu_2(d\mathrm{E})=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E}).$$

μ ფუნქცია ერთადერთია, რადგანაც ერთადერთია μ_1 და μ_2 ფუნქციები. საჩვენებელია, რომ

$$\|\Phi\|=V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{N}).$$

$\|\Phi\|\le V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{N})$ უტოლობა ცხადია. ვაჩვენოთ შებრუნებული უტოლობა. სასრული ვარიაციის განსაზღვრის თანახმად ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება E სიმრავლის ისეთი $D\mathrm{E}=\{E_k\}_{k=1}^{n}$ დანაწილება, რომ ადგილი აქვს

$$V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{N})<\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k)+\varepsilon$$

უტოლობას.

ვთქვათ, $\mu(E_k)=|\mu(E_k)|\cdot e^{i\varphi_k}\,(k=1,\dots,n)$. განვიხილოთ

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}e^{-i\varphi_k}\chi_{E_k}(x)$$

ფუნქცია.

ცხადია, რომ $f\in[\mathrm{M}_k;\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, $\|f\|=1$ და

$$(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}} f(x)\mu(d\mathrm{E})=\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|.$$

ამიტომ

$$|\Phi(f)|\le\|\Phi\|\cdot\|f\|=\|\Phi\|.$$

მაშასადამე,

$$\|\Phi\|\ge\left|(\mathfrak{M})\int_{\mathrm{E}} f(x)\mu(d\mathrm{E})\right|=\sum_{k=1}^{n}|\mu(E_k)|>V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{M})-\varepsilon.$$

საიდანაც $\varepsilon>0$-ის ნებისმიერობის გამო ვღებულობთ

$$\|\Phi\|\ge V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{M}).$$

12.7 თეორემიდან, როგორც კერძო შემთხვევა, ვღებულობთ შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სხვადასხვა სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ფუნქციონალის წარმოდგენებს.

ვთქვათ, მაგალითად, $\mathrm{E}=[a,b]$ და $\mathfrak{M}$ არის სიმრავლეთა ნორმალური კლასი, რომელიც შედგება $[a,b]$ სეგმენტის ყველა ქვესეგმენტისაგან, (a,b) ინტერვალის ყველა ერთელემენტიანი სიმრავლისაგან და ცარიელი სიმრავლისაგან. $[a,b]$ სეგმენტის დანაწილებად მივიღოთ $[a,b]$ სეგმენტის ურთიერთარაგადამფარავ ქვესეგმენტთა ყოველი სასრული კლასი, რომელთა გაერთიანებაც $[a,b]$ სეგმენტის ტოლია. მაშინ ცხადია, $\mathrm{C}[a,b]\subset[\mathrm{M};\mathrm{E};\mathfrak{M}]$, სადაც $\mathrm{C}[a,b]$ აღნიშნავს $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული ყველა ნამდვილი უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლეს, და ვღებულობთ რისის თეორემას [18].

ანალოგიურად, თუ $\mathrm{E}\subset R^n$ კომპაქტური სიმრავლეა და $\mathfrak{M}$ არის E სიმრავლის ყველა ბორელის ქვესიმრავლისაგან შემდგარი სიმრავლეთა ნორმალური კლასი, მაშინ ვღებულობთ რადონის თეორემას [17].

ვთქვათ, E ნებისმიერი სიმრავლეა და $\mathfrak{M}$ არის E სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლისაგან შემდგარი სიმრავლეთა ნორმალური კლასი. მაშინ E სიმრავლეზე განსაზღვრული ყოველი შემოსაზღვრული კომპლექსური

ფუნქცია მიეკუთვნება $[\mathrm{M_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ კლასს და ვღებულობთ ფიხტენგოლც-კანტოროვიჩის თეორემას [21].

ვთქვათ, $(\mathrm{E},\mathcal{J})$ – ტოპოლოგიური სივრცეა [8, გვ.284] და $\mathfrak{N}$ არის სიმრავლეთა ნორმალური კლასი, რომელიც შედგება E სიმრავლის ყველა ღია და ერთელემენტიანი ქვესიმრავლისაგან, $\mathrm{C_k}(\mathrm{E})$ არის E სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა შემოსაზღვრული უწყვეტი კომპლექსური ფუნქციის კლასი. მაშინ $\mathrm{C_k}(\mathrm{E})\subset[\mathrm{M_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$ და მაშასადამე, წრფივი ფუნქციონალის ზოგადი სახე სივრცეში მოიცემა

$$\Phi(f)=(\mathfrak{N})\int_{\mathrm{E}}f(x)\mu(d\mathrm{E})$$

ფორმულით, სადაც $\mu\in[\mathrm{A_k};\mathrm{VB_k};\mathrm{E};\mathfrak{N}]$. ამასთან,

$$\|\Phi\|=V(\mu;\mathrm{E};\mathfrak{N}).$$

ლიტერატურა

1. Вулих Б.З., Краткий курс теории функций вещественной переменной, М., Наука, 1973.
2. Гливенко В.И., Интеграл Стильтьеса, М.-Л., ОНТИ, 1936.
3. Гогуадзе Д.Ф., Об интегралах Колмогорова и их некоторих приложениах. Из. Мецниереба, 1979.
4. Гогуадзе Д. Ф., К взаимо отношению между интегралами Колмогорова и Хенстока // Мат. заметки, 1996, т.60, вып. 6, 832-844.
5. Гогуадзе Д.Ф., О понятии полуколца множеств // Мат. заметки, 2003, т.74 вып. 3, 362-368.
6. Goguadze D. Ф., Karchava П.Г., Kolmogoroff's Exstended Integral of the Abstract Set Mani-Valued Complex-Value Function // Bull. Georgian Acad Sci, 170 (1), 2004, 20-22.
7. Гогуадзе Д.Ф., Карчава П.Г., Линейный функционал в одном новом пространстве функций и некоторые его приминения // Труды Тбилиского университета. Математика. Механика. Астрономия, т. 354, 2005, 185-203.
8. Данфорд Н. и Шварц Дж., Линеиние операторы, Обшая теория М., ИНЛ, 1962.
9. Дубровский В.М., О равностепенно суммируемых функциях и о своиствах равномерно аддитивности и равностепенной непреривности семейства вполне аддитивных функций множества // Изв. АН СССР, 1949, т.13 № 4, 341-356.
10. Камке Е., Интеграл Лебега-Стильтьеса, Москва, 1959.
11. Karchava П.Г., On the n-multiple Riemann-stieltjes integral // Bull. Georgian Acad Sci,168 (1), 2003, 14-15.
12. Karchava П.Г., On Kolmogoroff's Exstended Netting Integral of the Abstract Set Mani-Valued Complex-Value Function // Bull. Georgian Acad Sci, 171(2), 2005, 228-230.
13. Келли Дж., Общая топология.: Наука, 1981.
14. Kolmogoroff A., Untersuchungen uber den integralbegriff // Math. Ann., 1930, v. 103, p.654-696.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1981.

16. Лебег А., интегрирование и отыскание примитивных функций. М.-Л: ГНТИ. 1934.
17. Radon J., Uber lineare Functionaltransformationen und Functionalgleichungen // Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss, Wien, Math.-naturwiss. Kl.,1919, v.128. Abt. 11 a, 1083-1121.
18. Riesz F., Sur operations fonctionnelles lineares // C. R. Acad. Sci., Paris, 149 (1909), 974-977.
19. Сакс С., Теория интеграла, ИЛ, 1949.
20. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т.V., М.-Л., Гостехиздат, 1947.
21. Фихтенголц Г.М., Л.В. Канторович, Sur les operations lineares dans l'espace des functions bornees // Studia Math., 1935, 5, 69-98.
22. Халмош П., Теория меры, М., ИЛ, 1953.
23. Hobson E.W., The theory of functions of a real variable and theory of Furier's series, Cambridge, 1927.
24. Young W.H., On integration by parts and the second theorem of the mean, Proc. Lond. Math. Soc., v.16 (2) (1916), 273-293.

ს ა რ ჩ ე ვ ი