ქუთაისის აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
მათემატიკის და ფიზიკის კათედრები

შალვა კირთაძე

ნიკო მუსხელიშვილის ადრეული უცნობი ნაშრომები მათემატიკურ და თეორიულ ფიზიკაში

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

07.00.10. მეცნიერებისა და ტექნიკის ისტორია

სამეცნიერო-ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი თორნიკე ეფრემიძე

2006

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი 3

I თავი. პედაგოგიური და სამეცნიერო მუშაობის დასაწყისი

§1.1. ნ. მუსხელიშვილის პედაგოგიური და სამეცნიერო მუშაობის პეტროგრადის პერიოდი (1915-1920 წ.წ.) 16

§1. 2. ნ. მუსხელიშვილი - ატომური კომისიის წევრი 25

§1.3. ნ. მუსხელიშვილის სადოქტორო-სადისერტაციო ნაშრომი 42

I თავის დასკვნები 66

თავი II. ნ. მუსხელიშვილი და ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანები

§ 2.1 მოკლედ ჰიდროდინამიკის ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მეთოდების შესახებ 68

§2.2. ნ. მუსხელიშვილის ერთი უცნობი ჰიდროდინამიკური ხელნაწერის მიმართება მის პირველ მონოგრაფიასთან: „კომშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის“ 79

§2.3. ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანები და პირველობის საკითხები 91

II თავის დასკვნები 98

თავი III. საშუალენგო ელექტრონის მოძრაობის ამოცანა, ბორი-ზომერფელდის კვანტურ თეორიაში

§ 3. 1. საშუალენგო ელექტრონის ელიფსური მოძრაობის დაკვანტვის ამოცანა წყალბადისმსგავს ატომში 99

§3.2. შტარკის მოვლენის შვარცშილდ-ეპშტეინის თეორია 108

§3.3. გარეშე ელექტრულ ველში მოძრავი საშუალენგო ელექტრონისათვის პამილტონ-იაკობის განტოლების ინტეგრების მუსხელიშვილისეული მეთოდის შესახებ 116

III თავის დასკვნები 123

თავი IV. ნ. მუსხელიშვილი და სითბური გამოსხივების კვანტური თეორიის მათემატიკური პრობლემები

§4.1. სითბური გამოსხივების სპექტრული განაწილების კელვინის ისტორიიდან 124

§4.2. პ. ერენფესტის და ა. პუანკარეს წვლილი პლანკის სპექტრული განაწილების ფუნქციის მათემატიკურ დასაბუთებაში 130

§ 4.3. ნიკო მუსხელიშვილი – შავი გამოსხივების თეორიის პირდაპირი ამოცანის შესახებ 135

§4.4. აკად. ნ. მუსხელიშვილი - შავი გამოსხივების თეორიის შებრუნებული ამოცანის შესახებ 141

IV თავის დასკვნები 146

I თავის დასკვნები 147

ციტირებული ლიტერატურა 151

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომი, რომელშიც გადმოცემულია აკადემიკოს ნიკო მუსხელიშვილის სანკტ-პეტერბურგში (1915-1920წწ) და შემდეგ თბილისის უნივერსიტეტში (1920-1923წწ) პედაგოგიური და სამეცნიერო მოღვაწეობის საკითხები, შედგება ოთხი თავისაგან.

I თავი. პედაგოგიური და სამეცნიერო მუშაობის დასაწყისი.

§1.1. „ნ. მუსხელიშვილის პედაგოგიური და სამეცნიერო მუშაობის პეტროგრადის პერიოდი“ მოიცავს პერიოდს 1915 წ. სექტემბრიდან 1920წლის სექტემბრამდე; ეს არის პერიოდი, რომლის განმავლობაში პეტროგრადის საიმპერატორო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის (მექანიკის) კათედრაზე საპროფესოროდ მოსამზადებლად დატოვებულმა უნივერსიტეტის კურსდამთავრებულმა ნიკო მუსხელიშვილმა, უნივერსიტეტის პროფესორების გ.ვ. კოლოსოვის (18-1936) და ს.ე. სავიჩის (1864-1936) რეკომენდაციით პედაგოგიური მუშაობა დაიწყო ს.-პეტერბურგის პოლიტექნიკური ინსტიტუტის მექანიკის კათედრაზე.

1915წ. დაწყებული, ვიდრე 1920წ. სექტემბრამდე, ნ. მუსხელიშვილი სხვადასხვა დროს ეწეოდა პედაგოგიურ მოღვაწეობას პეტროგრადის უნივერსიტეტში, რკინისგზათა მიმოსვლის საინჟინრო ინსტიტუტში, ქალთა უმაღლესი კურსების და პოლიტექნიკური ინსტიტუტში. იმავდროულად ამზადებდა და 5 ნაწილად ჩააბარა სამაგისტრო გამოცდები.

დისერტაციის წინამდებარე პარაგრაფში განხილულია პეტერბურგში ნ. მუსხელიშვილის მოღვაწეობასთან დაკავშირებული საკითხებიც, რომელიც ეხება 4 გამოქვეყნებულ ნაშრომს, რომელთაგან პირველი 1915წ ბეჭდური ვრცელი სტატიაა "О равновесии круглих дисков..." შესრულებული იყო პროფ. გ. კოლოსოვთან ერთად.

აქვე განიხილება კოშის ტიპის ინტეგრალის მეთოდით ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნასთან და გეოგრაფიული რუკების აგების მათემატიკასთან დაკავშირებული მოვლენებიც, რაც გამოწვეული იყო ნ. ე ჟუკოვსკისთან (1847-1921) ს. ჩაპლიგინთან (1869-1942) დ. ა. გრავესთან (1863-1939) ასევე მოსკოვის "ЦАГ" ის ლაბორატორიასთან და კიევის უნივერსიტეტის მათემატიკის კათედრასთან მისი ახლო ურთიერთობებით.

I თავის §1.2-ში, რომელიც დასათაურებულია - „ნ. მუსხელიშვილი ატომური კომისიის წევრი“

განხილულია 1920 წ. პეტროგრადში, სახელმწიფო ოპტიკურ ინსტიტუტში ("ГОИ") შექმნილი სამთავრობო „ატომურ კომისიაში“ ნ. მუსხელიშვილის 7-თვიანი მოღვაწეობის ისტორია. ატომური კომისია, ბორი-ზომერფელდის ატომის კვანტური თეორიის მიხედვით სწავლობდნენ რთული ატომების ყოფაქცევას ელექტრულ და მაგნიტურ ველებში. კომისიის შემადგენლობაში მიწვეულნი იყვნენ რუსეთის ისეთი თვალსაჩინო მათემატიკოსები, მექანიკოსები, ფიზიკოსები და ასტრონომები, როგორებიც იყვნენ: ვ. რ. ბურსიანი (1886-1945), ა.ფ. იოფე (1880-1960), ა.ნ. კრილოვი (1863-1945), ი. ა. კრუტკოვი (1890-1952), ნ.ი. მუსხელოვი (1991-1976), დ.ს. როჟდენსტვენტკი (1876-1940), ვ.მ. ჩულანოვსკი (1889-1919), ი.დ. ტამარკინი (1888-1945), ა ა. ფრიდმანი (1888-1925), ვ კ. ფრედერიკსი (1885-1942).

განხილულია „ატომური კომისიის მუშაობაში საერთოდ და კომისიის ე.წ ელემენტარული ამოცანის შესწავლაში ნ მუსხელიშვილის მონაწილეობა, რომელიც განსხვავდება გარე ელექტრულ ველში ატომური ელექტრონის მოძრაობის დაკვანტვის ცნობილი ამოცანისაგან

ნაჩვენებია, რომ ნ. მუსხელიშვილის მიერ ელექტრული ამოცანის ამოხსნის დროს მიღებული შედეგებით ისარგებლეს ატომური კომისიის წევრებმა: ა. კრილოვმა, ვ. ბურსიანმა, ვ ფრედერიკმა და ი. კრუტკოვმა წყალბადის, ჰელიუმის ატომის ენერგეტიკული სპექტრის, რენტგენული მახასიათებელი სპექტრების და რთული ატომების ორბიტის დაკვანტვის ამოცანის განხილვის დროს.

საერთოდ, კი ნ. მუსხელიშვილი ატომური კომისიის სხდომის ოქმებში 8-ჯერ არის მოხსენებული, ამათგან 3 მოხსენება ინახება კომისიის მასალებში.

I თავი-ის .1 3.-ში „ნ. მუსხელიშვილის სადოქტორო-სადისერტაციო ნაშრომი“ განიხილავს ნ. მუსხელიშვილის სადოქტორო დისერტაციად წარმოდგენილი ფრანგულენოვანი მონოგრაფიის „კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისათვის“ (1922).

ნაჩვენებია, რომ მანამ, სანამ „ატომურ კომისიაში“ ინტენსიურ სამეცნიერო საქმიანობაში ჩაებმებოდა ნ. მუსხელიშვილი 1919 წელს, მის მიერ

გამოქვეყნებულ ორ სტატიაში, რომლებიც დაიბეჭდა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მოამბესა და ჟ. პერმის ფიზიკა-მათემატიკის საზოგადოების ჟურნალში, ნაშრომში გადმოცემული იყო ჰიდროდინამიკის და დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანების ეფექტური ამონახსნის საპოვნელად კოშის ტიპის ინტეგრალის მეთოდი.

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ აღნიშნული მეთოდით მათემატიკური ფიზიკის ორგანზომილებიანი (ბრტყელი) ამოცანების ამოხსნა ხდებოდა პროფ. გ. კოლოსოვის მეთოდით, რომლის განვითარებაში ნ. მუსხელიშვილმა დიდი წვლილი შეიტანა 1915 და 1916 წლებში გამოქვეყნებულ ორ სტატიაში, დრეკადობის და თერმოდრეკადობის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნისას. ახალი მეთოდით ბრტყელი ამოცანების გადაწყვეტა კოშის ტიპის ინტეგრალის მეთოდით, ნ. მუსხელიშვილმა განავითარა ორ გამოქვეყნებულ ზემოთმითითებულ სტატიაში და ერთ ხელნაწერში, რომელიც დაიწერა 1919 წ. და გარკვეული მიზეზით არ დაბეჭდილა.

1922 წ. გამოქვეყნებული წიგნი წარდგენილი იყო სადოქტორო დისერტაციის მოსაპოვებლად თბილისის უნივერსიტეტში გამორკვეულია რომ ნ. მუსხელიშვილს ამ მონოგრაფისათვის მიენიჭა პროფესორის წოდება, ხოლო დანიშნული დაცვა არ შედგა, ოპონენტების პროფ. ა. რაზმაძის და დოც. ა. ხარაძის მოუმზადებლობით გამოყენებითი მათემატიკის ამ დარგში, მიუხედავად იმისა, რომ არაოფიციალური ოპონენტების ფრანგი მათემატიკოსის ჟ. ადამარის, რუსი მათემატიკოსების ვ სტეკლოვის და ი. ტამარკინის და გერმანელი ა კორნის რეცენზიები ფაკულტეტის სამდივნოში შემოსული იყო.

დისერტაციის ამ პარაგრაფში პირველად ქვეყნდება ჟ. ადამარის (1865-1963), ვ. სტეკლოვის და ი. ტამარკინის რეცენზიები, რომლებიც ინახება ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივში. აქვეა გადმოცემული მონოგრაფია-დისერტაციის დაწერასა, გამოქვეყნებასა და შეფასებასთან დაკავშირებული მოვლენები ნ. მუსხელიშვილისა და თ. ნიკოლაძე-მუსხელიშვილს შორის მიმოწერის მიხედვით, რომლებიც ქვეყნდება ქ-ნ მ. მუსხელიშვილის თავაზიანი ნებართვით.

თავი II. „ნ. მუსხელიშვილი და ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანები“

მეორე თავის §2.1.-ში - „მოკლედ ჰიდროდინამიკური ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მეთოდების შესახებ“.

გადმოცემულია, ჰიდროდინამიკის მათემატიკური თეორიის პირდაპირი და შებრუნებული სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის მეთოდები. ეს ამოცანებია: ა) წინასწარ მოცემულია სხეულზე მოქმედი გარე ძალები. უნდა განისაზღვროს სხეულისა და სითხის მოძრაობის კანონი და მათი ურთიერთმოქმედება: ბ) წინასწარ მოცემულია სხეულის მოძრაობის კანონი. უნდა შეისწავლოთ სითხის მოძრაობის კანონი და სხეული - სითხის ურთიერთმოქმედება.

მოცემული ორი სახის ამოცანიდან ჩვეულებრივ, მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანები განიხილება უსასრულო სიგრძის ცილინდრის იდეალური სითხით გარსდენა, ჩვენს მიერ გადმოცემულია პროფ. დ. დოლიძის სახელმძღვანელოს „დეფორმად სხეულთა მექანიკის შესავალი“ (1951) - და ლ.გ. ლოიციანსკის მონოგრაფიის - „Механика жидкости к газа" (1978) მიხედვით და მოტანილია ზოგიერთი მარტივი ნაკადის კომპლექსური პოტენციალები. კერძოდ,

1) წყაროსა და ჩასადენი (დადებითი და უარყოფითი წყაროს-მუხტის), 2) გრიგალური ანუ ცირკულირებადი წყაროს, 3) m მომენტის დიპოლური წყაროს, 4) წრიული ცილინდრის ერთგვაროვანი ნაკადით და სხვა შემთხვევების შესაბამისი კომპლექსური პოტენციალის (სკალარული სიჩქარის და დენის ფუნქციის) წარმოდგენა წინააღმდეგობის წნევის ძალის საშუალებით. ამასთან, განიხილება გარსდინებადი პროფილის მქონე სხეულების ამწევი ძალის ნ. ჟუკოვსკის (1910) ფორმულის გამოყვანის ორი მეთოდი, რომელთაგან მეორე მეთოდს თავად ნ. მუსხელიშვილი იყენებდა მის გამოკვლევებში.

ამავე თავის **§2.2-ში „ნ. მუსხელიშვილის ერთი უცნობი ჰიდროდინამიკური ხელნაწერის მიმართება მის პირველ მონოგრაფიასთან: „კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის“**, ჩატარებულია ანალიზი ნ. მუსხელიშვილის დღემდე უცნობ ჰიდროდინამიკური ხასიათის ნაშრომისა "О решении некоторых контурных задач математической физики" და მისივე ფრანგულენოვანი მონოგრაფიის

„კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის“ ჰიდროდინამიკურ ნაწილს შორის.

ნაჩვენებია, რომ ხელნაწერი სტატიისა და მონოგრაფია-დისერტაციის შესავალი ნაწილები თითქმის იდენტურია. მონოგრაფიის განყოფილება „ლოგარითმული პოტენციალისა და ჰიდროდინამიკაში მარტივი გამოყენებები“, თითქმის ემთხვევა ერთიმეორეს. შენახვის კანონის $\varphi_0 = 2\pi k$ გამოყვანა, რომელიც მიიღება ნეიმანის ამოცანიდან იდეალური სითხის სიჩქარის U პოტენციალისთვის $\frac{dU}{dn} = f(\theta)$, $\varepsilon = \psi - \theta$, γ -წირის წერტილებისთვის, იდენტურია. თითქმის იდენტურია სტატიისა და მონოგრაფიაში განხილული მტკიცება, უფრო ზოგადი სასაზღვრო ამოცანისათვის

$$l\frac{dU}{dn} + kU = f(\theta), \quad \gamma\text{-ზე},$$

რომელიც ნეიმანის $(l=1, k=0)$ და დირიხლეს $(k=1, l=0)$ ამოცანების განხილვისადმია მიძღვნილი.

მონოგრაფიაში ფართოდაა განხილული უფრო ზოგადი სახის დიფერენციალური განტოლების $a(s)\frac{\partial U}{\partial x} + b(s)\frac{\partial U}{\partial y} + c(s)U = f(s)$ ანალიზი, სადაც $2U = \varphi(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)}$ და $\zeta = \xi + i\eta$ კომპლექსური ცვლადზე დამოკიდებული სიჩქარის პოტენციალია, რომლისთვისაც დირიხლეს ამოცანის მარტივი შემთხვევისათვის ნ. მუსხელიშვილი იძლევა კოშის ტიპის ინტეგრალურ ამონახსნს·

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f\frac{\zeta' + \zeta}{\zeta' - \zeta}\frac{d\zeta'}{\zeta'},$$

სადაც f არის საზღვარზე სიჩქარის ნორმალური მდგენელი

მეორე თავის §2.3-ში: „ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანები და პირველობის საკითხი“, განხილულია კოშის ტიპის ინტეგრალის მეთოდით ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის საქმეში პრიორიტეტის საკითხი. გაანალიზებულია, ფრანგი მათემატიკოსის პ. კაპოდანოსა და რუსი მათემატიკოსის გ. მიხაილოვის მტკიცებულება იმის შესახებ, რომ ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების კოშის ტიპის ინტეგრალის მეთოდით

ამოხსნა გარსდინებადი სხეულებისა იდეალური სითხით, პირველად განიხილა ნ. მუსხელიშვილმა 1922 წ. ფრანგულენოვან დისერტაციაში და შემდგომ დააზუსტა 1928 წ. იტალიურ ჟურნალში "Rendiconti"-ში გამოქვეყნებულ ფრანგულენოვან სტატიაში „ორგანზომილებიანი ჰიდროდინამიკის ფუნდამენტური პრობლემის შესახებ“. როგორც ირკვევა, ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანები იმავე მეთოდით განუხილავს აკად. ს. ჩაპლიგინს (1869-1942) 1926წ., ხოლო აკად. ლ სედოვმა (1907-1991) ფართომასშტაბური გამოკვლევები ამ მიმართულებით დაიწყო 1935 წლიდან

დისერტაციაში მოტანილია მტკიცებულება, რომ ნ. მუსხელიშვილისა და ლ. სედოვის მიერ გამოყენებული მეთოდები თითქმის იდენტურია. ამასთან, ნ. მუსხელიშვილის უცნობი სტატიის **"О некоторых контурных задачах математической физики"** (1919) მიხედვით მტკიცდება, რომ რუს და უცხოელ ავტორთა (ე. კაინაფოლი (1928), ბ. კალდონაკო (1930), კ. კონსილიო (1932), კ. გოსტინელი (1935). .) გამოკვლევების დაწყებამდე ამ დარგში მნიშვნელოვანი შედეგები ჰქონდა მას მიღებული იდეალური და რეალური სითხეების კომპლექსური პოტენციალის კოშის მსგავსი ინტეგრებით წარმოდგენის დარგში; კერძოდ კი, - გლუვი მყარი საზღვრის გარსდინებადი ფორმის სხეულის მიმდებარე სითხის სიჩქარის მრუდწირული მდგენელების ფორმულები:

$$V_\rho = \frac{2\Omega ab\rho^3 \sin 2\theta}{\sqrt{\rho^4 - 2a\rho^2 \cos 2\theta + a^2}},\ V_\theta = \frac{2\Omega ab\rho^3 \cos 2\theta}{\sqrt{\rho^4 - 2a\rho^2 \cos 2\theta + a^2}},$$

$\omega(\zeta) = b\left(\zeta + \frac{a}{\zeta}\right)$, $a \geq 1, b > 0$ გადამსახავი ფუნქციაა, $\zeta = \rho e^{i\theta}$, Ω-სითხის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

დისერტაციის მე-3 თავი განიხილავს: „სავალენტო ელექტრონის მოძრაობის ამოცანას, ბორი-ზომერფელდის კვანტურ თეორიაში“, რომლის §3.1.-ში „სავალენტო ელექტრონის ელიფსური მოძრაობის დაკვანტურ ამოცანა წყალბადისმსგავს ატომში“ გადმოცემულია სქემატურად, ელიფსური ორბიტის შემთხვევაში წყალბადის მსგავსი ატომის დაკვანტვის ამოცანა, როცა ბრტყელი ელიფსური მოძრაობის შემთხვევაში ზომერფელდის დაკვანტვის პირობა მოცემულია სახით:

$$I_i = \oint P_i dq_i = n_i h, \quad i = r, \varphi,$$

სადაც P_r და P_φ ელექტრონის რადიალური და ორბიტული იმპულსებია. გადმოცემულია -

$$I_z = \oint \sqrt{A + 2\frac{B}{z} + \frac{C}{z^2}}\, dz, \quad z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z,$$

კომპლექსურ სიბრტყეში ზომერფელდის მეთოდით ინტეგრების წესი, რომელიც კოშის ინტეგრალით ნაშთების პოვნაზეა დაფუძნებული და რომლის საშუალებით მიიღება

$$I_z = -2\pi i\left(\sqrt{C} - \frac{B}{\sqrt{A}}\right),$$

საიდანაც მიიღება ბორის ფორმულა ატომური ელექტრონის ენერგიისათვის.

$$W_n = -\frac{Z^2 e^4}{2\hbar^2}\frac{m}{n^2}, \quad n = n_r + n_\varphi,$$

მისგან გამომდინარე შედეგებით

ამავე პარაგრაფში განიხილება ატომური ელექტრონის სივრცითი დაკვანტვის ამოცანა.

$$\oint P_i dq_i = n_i h, \quad i = r, \theta, \psi$$

და განზოგადებული იმპულსის შესაბამისი კომპლექსური ინტეგრალების გამოთვლით, ადიაბატური ინვარიანტების, ატომური ელექტრონების ენერგიის, იმპულსის და მომენტის, როგორც შესაბამისი კვანტური რიცხვებით განსაზღვრული სიდიდეების გამოსახვა.

როგორც დამატებითი მასალა, შემდეგ პარაგრაფში განსახილველი საკითხისათვის, მოტანილია პარაბოლური და ელიფსურ კოორდინატთა სისტემაში ჰამილტონ - იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალების მეთოდი, ლ. ლანდაუს და ე. ლიფშიცის "Механика" ს მიხედვით.

მესამე თავის §3.2.-ში „შატრკის მოვლენის შვარცშილდ-ეპშტეინის თეორია“, გადმოცემულია გარე ელექტრულ ველში მოთავსებული ატომური ელექტრონის სპექტრული ხაზის შტარკისეული გახლეჩის ბორი-ზომერფელდის კვანტური თეორია, რომელიც განვითარებული იყო 1916 წელს გერმანელი მეცნიერების კ. შვარცშილდისა და პ ეპშტეინის მიერ

ურთიერთ დამოუკიდებლად, თუმცა ამ თეორიის ძირითადი მონახაზი 1914წ. იყო მოცემული ნ. ბორის მიერ.

დისერტაციაში გადმოცემულია პარაბოლურ კოორდინატთა სისტემაში ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალების მეთოდი, რომელიც XIX საუკუნიდან გამოიყენებოდა ციურ მექანიკაში.

მოცემულია ჰამილტონის განცალებული განტოლებების ანალიზი განზოგადებული იმპულსების მიხედვით

$$P_\xi = \sqrt{f_1(\xi)}, \quad P_\eta = \sqrt{f_2(\eta)}, \quad P_\psi = const,$$

როგორც ξ და η ცვლადზე დამოკიდებული კუბური ფუნქციების ფესვთა გამოკვლევა, პარაბოლურ კოორდინატებში დაკვანტვის პირობებთან კავშირში.

განხილულია დაკვანტვის პირობა

$$\oint P_i dq_i = n_i h, \qquad q_i = \xi, \eta, \psi, \qquad n_i = n_\xi, n_\eta, n_\psi$$

და კომპლექსური ინტეგრების

$$\oint \sqrt{A_K + 2\frac{B_k}{z_k} + \frac{C_k}{z_k^2} + D_k z^2}\, dz_k = -2\pi i \left\{ \sqrt{C_k} - \frac{B_k}{\sqrt{A_k}} - \frac{3D_k B_k^2}{4A_k^{5/2}} t + \ldots \right\}$$

საშუალებით მიიღება ატომური ელექტრონის ენერგიის ფორმულა

$$W_n = -\frac{R}{n^2} - KEn(n_\eta - n_\xi), \qquad n = n_\xi + n_\eta + n_\psi,$$

სადაც R, K მუდმივი სიდიდეებია, E ელექტრული ველის დაძაბულობა, რომლის შესაბამისად ატომური ელექტრონის სპექტრული ხაზი განიცდის გახლეჩას, რაც შესატყვისობაშია ექსპერიმენტულ მონაცემებთან.

მესამე თავის §3.3-ში, რომელიც დასათაურებულია „გარეშე ელექტრულ ველში მოძრავი სავალენტო ელექტრონისათვის ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ინტეგრების მუსხელიშვილისეული მეთოდის შესახებ“, გადმოცემულია გარეშე და შიგა ელექტრულ ველში, პოტენციალით·

$$U = -\frac{Ze^2}{r} - eEx, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

ჰამილტონ-იაკობის განტოლების იაკობის განტოლებათა სისტემაზე -

$$\int_{q}^{\infty}\frac{dq}{2\sqrt{F_1(q)}}-\int_{p}^{\infty}\frac{dp}{2\sqrt{F_2(p)}}=\beta',$$

$$\int_{q}^{\infty}\frac{dq}{2q\sqrt{F_1(q)}}+\int_{p}^{\infty}\frac{dp}{2p\sqrt{F_2(p)}}=\frac{\varphi-\varphi_0}{2},$$

$$\int_{q}^{\infty}\frac{qdq}{2\sqrt{F_2(q)}}+\int\frac{pdp}{2\sqrt{F_2(p)}}=\frac{t-\tau}{2},$$

(სადაც (q,p,φ)) პარაბოლური კოორდინატებია მუსხელიშვილის აღნიშვნებით, ხოლო β',φ_0,τ ინტეგრების მუდმივები) დაყვანის მეთოდი, რომელსაც იყენებს ნ. მუსხელიშვილი და $F_1(q)$ და $F_2(q)$ მესამე ხარისხის პოლინომების გამოკვლევის შედეგები. ნაჩვენებია, რომ პოლინომების ფესვების გამოკვლევის და მათი $\rho(u)$ და $\rho(v)$ ვაიერშტრასის ელიფსურ ფუნქციებზე დაყვანის წესი, როცა კუბური განტოლების ფესვები e_1,e_2,e_3 აკმაყოფილებს სამი პირობიდან მინიმუმ ერთ $e_1+e_2+e_3=0$ პირობას, ნ. მუსხელიშვილის მიხედვით უზრუნველყოფს იაკობის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლების დაყვანას ფუნქციონალურ განტოლებებზე, რომლის ამონახსნი წარმოიდგინება სპეციალური ელიფსური ფუნქციების (ვაიერშტრასის და იაკობის) სახით; მოცემულია ნ. მუსხელიშვილის მეთოდის მიხედვით იაკობის განტოლებათა სისტემიდან მე-2 განტოლების ამონახსნის აგების წესი, საიდანაც განსაზღვრულია ელიფსური ორმაგპერიოდიანი ფუნქციების პერიოდები. მოტანილია არგუმენტები იმის საჩვენებლად, რომ ნ. მუსხელიშვილის მიერ გამოყენებული მეთოდი იაკობის დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრირებისა, ორიგინალურია და განსხვავდება ასეთი ტიპის განტოლებათა ელიფსურ ინტეგრალებით გამოსახვის და მათი რიცხვითი ამონახსნებით წარმოდგენის მეთოდისაგან, რომელსაც იყენებდა აკად ა. კრილოვი (1863-1945) იმავე ატომურ კომისიაში მუშაობის დროს.

დისერტაციის მე-4 თავი განიხილავს **„ნ. მუსხელიშვილი და სითბური გამოსხივების კვანტური თეორიის მათემატიკურ პრობლემებს“** მე-4 თავის **§4.1-ში „სითბური გამოსხივების სპექტრული განაწილების კვლევის ისტორიიდან.“**

განხილულია აბსოლუტურად შავი სხეულის სითბური გამოსხივების თეორიის (შგთ) ძირითადი პრობლემის გამოსხივების სპექტრული

განაწილების ფუნქციის, როგორც წონასწორული გამოსხივების ტემპერატურაზე და სიხშირეზე დამოკიდებულების საკითხის რეტროსპექტივა

გადმოცემულია საკითხის ისტორია, რაც უკავშირდება პრობლემის ემპირიულ-ინტუიციური (ვ. ვინი, 1894) ელექტრონული თეორიით (ჯ. რელეი, ჯ. ჯინსი 1998; ჰ. ლორენცი - 1900, და კვანტური თეორიით (მ. პლანკი - 1900, ა. აინშტაინი - 1905); აღწერას. ნაჩვენებია, რომ შგთ სპექტრული სიმკვრივის ფორმულის სისწორის კრიტერიუმს წარმოადგენს გამოსხივებული ენერგიის ინტეგრალური სიმკვრივის სტეფან-ბოლცმანის

$$U(T)=\int\rho(\omega,T)d\omega=\sigma T^4$$

და ვინის წანაცვლების $T\lambda_m=b$ ემპირიულ კანონებთან თავსებადობა, რითაც მტკიცდება, რომ პლანკის ფორმულა

$$\rho_p(\omega,T)=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}\frac{\varepsilon_0}{\exp\left(\frac{\varepsilon_0}{kT}\right)-1},\quad \varepsilon_0=\hbar\omega$$

სწორად აღწერს სიხშირეთა და ტემპერატურის მთელს უბანში $(0<\omega<\infty;\ \ 0<T<\infty)$ გამოსხივების სპექტრულ განაწილებას.

გადმოცემულია პლანკისეული სპექტრული ფუნქციის გამოყვანის თერმოდინამიკური (მ. პლანკი - 1900) და სტატისტიკური (მ. პლანკი, 1901; ა აინშტაინი - 1907...) მეთოდები და აღნიშნულია, რომ 1900-1920 წლებში შემოთავაზებული იყო კვანტების ჰიპოთეზაზე დაფუძნებული პლანკის ფუნქციის გამოყვანის ორ ათეულამდე წესი, რომლებიც მცირე ნიუანსებით განსხვავდებიან ერთმანეთისგან.

მე-4 თავის §4.2-ში „პ. ერენფესტის და პ. პუანკარეს წვლილი პლანკის სპექტრული განაწილების ფუნქციის მათემატიკურ დასაბუთებაში“.

გაანალიზებულია ის წვლილი, რომელიც მიუძღვით, ცნობილ ავსტრიელ-ჰოლანდიელ ფიზიკოს-თეორეტიკოს პაულ ერენფესტს (1880-1933) და გენიალურ ფრანგ მათემატიკოს-მექანიკოს-ფიზიკოს-ასტრონომ ანრი პუანკარეს (1854-1912) პლანკის ფუნქციის მათემატიკურ დასაბუთებაში. ამასთან, პ. ერენფესტი და ა. პუანკარე არიან სწორედ ის ავტორიტეტები ნ. მუსხელიშვილისათვის, რომელთა მიერ გამოყენებული მეთოდების

სრულყოფა-განვითარებით შეძლო მკაცრი მათემატიკური დამტკიცება მიეცა პლანკის ფუნქციისათვის.

დისერტაციის ამ ნაწილში სქემატურად გადმოცემულია, ა. პუანკარეს მიერ განვითარებული ორი (სტატისტიკურ-ალბათური და ფურიე-გარდაქმნის) მეთოდი და კვანტურ პოსტულატზე დაყრდნობით ღებულობს გამომსხივებელი და სითბური ენერგიისათვის ფორმულებს

$$Y = <\varepsilon> = \varepsilon\left[\exp\left(\frac{\varepsilon}{X}\right)-1\right]^{-1}, \quad X = \varepsilon\left[\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{X}\right)\right]^{-1}, \quad \varepsilon = h\nu, \quad X = kT.$$

პ. ერენფესტმა, განავითარა რა ა. აინშტაინის სტატისტიკური წონის (ზომის) მეთოდი განაწილების ფუნქციის დასაბუთებისა, მიიღო შემდეგ ინტეგრალურ-სასრულსხვაობიანი განტოლება

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda q_k} G_k + \int_0^{\infty} dq e^{-\lambda q} G(q), \quad \lambda = \frac{\hbar\omega}{kT},$$

სადაც G_k დისკრეტული, ხოლო $G(q)$ უწყვეტი წონითი ფუნქციებია, რომლებიც შეესაბამება წყვეტილი (კვანტური) და უწყვეტი (კლასიკური) წვლილის გათვალისწინებას განაწილების ფუნქციურ ყოფაქცევაში.

ამავე თავის §4.3.-ში „ნიკო მუსხელიშვილი შავი გამოსხივების თეორიის პირდაპირი ამოცანის შესახებ".

გადმოცემულია ნ. მუსხელიშვილის მიერ 1920 წ. აპრილის თვეში შესრულებული და 1924წ. **ЖРФХО**-ში დაბეჭდილ ნაშრომში დასმულ კითხვაზე პასუხი, რომელსაც შგთ პიდაპირ ამოცანას ვუწოდებთ: რამდენად უზრუნველყოფს კვანტური ჰიპოთეზა გამოსხივების სპექტრის მთელი უბნისათვის განაწილების პლანკის ფუნქციას, თუ ცნობილია, რომ $Q(\lambda)$ გამოსახულებაში უწყვეტი და დისკრეტული სპექტრის წონითი ფუნქციებია $G(q)$ და G_k.

სარგებლობს რა სტილტიესის ინტეგრალის თვისებით, ნ. მუსხელიშვილს $Q(\lambda)$ გამოსახულება დაჰყავს სახეზე

$$Q(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x)\psi(x)dx, \quad x \equiv q,$$

სადაც $\psi(x)$ წარმოგვიდგება, როგორც დირაკის $\delta(x)$ ფუნქციის მსგავსი, წყვეტილი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას.

$$\int_0^\infty \delta(x)dx = 1, \quad \int_0^\infty f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0), \quad \frac{d\psi}{dx} = \delta(x).$$

ასეთი ბუნების ფუნქციად ნ. მუსხელიშვილი განიხილავს ე.წ $\theta'(x) = \delta(x)$ სახის ფუნქციას

$$\theta(k,\lambda) \equiv M(k,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[k(\lambda+i\mu)]}{\lambda+i\mu}d\mu = \begin{cases} 1, k>0 \\ 0,1<0 \\ \frac{1}{2}, k=0 \end{cases},$$

რომელიც უზრუნველყოფს პლანკის განაწილების ფუნქციის მიღებას, როცა $Q(\lambda) \sim (e^{\lambda}-1)^{-1}$ $(0<\lambda<\infty)$, ხოლო $\lambda \to 0$ და $\lambda \to \infty$ ზღვრულ შემთხვევაში მიიღება $Q(\lambda) \sim \lambda^{-1}$ (რელეი-ჯინსის) და $Q(\lambda) \sim e^{-\lambda}$ (ვინის) განაწილების კანონი.

მე-4 თავის §4.4.-ში" აკად. ნ. მუსხელიშვილი შავი გამოსხივების თეორიის შებრუნებული ამოცანის შესახებ"

გადმოცემულია ნ. მუსხელიშვილის მიერ იმავე 1920წ. შესრულებულ ნაშრომში დასმული ამოცანა: როგორი სახის უნდა იყოს განაწილების $Q(\lambda)$ ფუნქცია, რომ

$$\int_0^\infty \exp[-(\lambda+i\mu)x]\psi(x)dx = \frac{Q(\lambda+i\mu)}{\lambda+i\mu}, \quad \lambda,\mu>0$$

ფურიე-გარდაქმნამ -

$$\psi(x) = \frac{e^{\lambda x}}{2\pi}\int \frac{Q(\lambda+i\mu)}{\lambda+i\mu}e^{i\mu x}dx$$

მოგვცეს შესაბამისი დისკრეტული G_k და უწყვეტი $G(x)$ განაწილების შესაბამისი წონითი ფუნქციები.

ნ. მუსხელიშვილი, $\delta(x) = \psi'(x)$ ფუნქციის და კოშის ნაშთების თეორემის გამოყენებით უჩვენებს რომ პლანკისა და ვინის განაწილების ფუნქციისათვის $\psi(x) \equiv$ $G_k \neq 0$, $G(x) = 0$, ხოლო რელეი-ჯინსის განაწილების შემთხვევაში $G_k = 0$, $G(x) = 1$.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო და მიღებული შედეგები სისტემატიურად ეცნობოდა ფიზიკის და მათემატიკის კათედრებთან (დეპარტამენტებან) არსებულ მუდმივმოქმედ სამეცნიერო სემინარებს დასრულებული სახით დისერტაცია განხილული და რეცენზირებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელობის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკისა და მათემატიკის დეპარტამენტების გაერთიანებულ სხდომაზე.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ შრომებში:

1. ნ. მუსხელიშვილის ერთი უცნობი ჰიდროდინამიკური ხელნაწერის მიმართება მის პირველ მონოგრაფიასთან ქ.ს.უ. „შრომები“ ტ. II(36) 2001.

2 N. Muskhelishvili about one Method Integration Didt, WWW zmi, arnst. ge. DBM ph. 2001.

3. ნ. მუსხელიშვილის პედაგოგიური და სამეცნიერო მუშაობის დასაწყისი, საქართველოს მათემატიკოსთან III ყრილობა, 2001, გვ. 120.

4. N. Muskhelishvili about Zevesal problem of the BRT, საქართველოს მეცნიერებათა აკადმიის მოამბე, 2004 (აკადემიკოს ნ. მუსხელიშვილის ადრეული შრომები თეორიულ და მათემატიკურ ფიზიკაში გვ. 120-129).

5 აკად. ნ მუსხელიშვილი შავი გამოსხივების თეორიის შებრუნებული ამოცანის შესახებ, ქსუ შრომები ტ. IV(38) 2004 წ. საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სერია.

6. გარეშე ელექტრულ ველში მოძრავი სავალენტო ელექტრონისათვის ჰამილტონ-იაკობის განტოლების ინტეგრების მუსხელიშვილისეული მეთოდის შესახებ. ქსუ შრომები ტ. 3(37) 2003 საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სერია.

7. შ. კირთაძე, თ. ეფერმიძე ნიკო მუსხელიშვილის ადრეული უცნობი ნაშრომები მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, წიგნი (96 გვ.) ქუთაისის სახ უნივერს გამომც., 2005, ქუთაისი.

I თავი

პედაგოგიური და სამეცნიერო მუშაობის დასაწყისი

§1.1. ნ. მუსხელიშვილის პედაგოგიური და სამეცნიერო მუშაობის პეტროგრადის პერიოდი (1915-1920 წ.წ.)

ნ. მუსხელიშვილმა, პედაგოგიური მუშაობა პეტერბურგის უმაღლეს სასწავლებლებში დაიწყო 1915 წლიდანვე [1]. პირველი უმაღლესი სასწავლებელი, სადაც იგი დაინიშნა ასისტენტად, პეტროგრადის ელექტროტექნიკური ინსტიტუტი იყო. იქ მექანიკის კათედრას განაგებდა ამ ინსტიტუტის ორდინარული პროფესორი გ.ვ. კოლოსოვი (1867-1934) გ ვ კოლოსოვმა შეასრულა თავისი დაპირება; ელექტროტექნიკური ინსტიტუტისაკენ ააღებინა ნ. მუსხელიშვილს გეზი, მაგრამ მათი ურთიერთობა მაინც უნივერსიტეტის კედლებში ხდებოდა, ვინაიდან სიცოცხლის ბოლო წლებში დ.კ. ბობილევის (1842-1917) ავადმყოფობის გამო, უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის კათედრის ფაქტიური ხელმძღვანელი გ. კოლოსოვი იყო. ჩვენთვის უცნობია თვით ელექტროტექნიკის, ასევე პეტერბურგის რკინისგზის მიმოსვლის ინჟინერთა ინსტიტუტში და ბესტუჟევის ქალთა კურსებზე (დღევანდელი გერცენის სახ. პედინსტიტუტი) ნ. მუსხელიშვილის პედაგოგიური მოღვაწეობა საქ. სსრ მ/ა წევრ-კორესპონდენტი ს. ჯორბენაძე თვლის, რომ ნ. მუსხელიშვილი 1918 წელს არჩეული იყო პეტერბურგის ქალთა კურსების პროფესორად [9, გვ. 111]. პეტერბურგის სხვადასხვა უმაღლეს სასწავლებლებში პედაგოგიური მუშაობის პერიოდში ის გაეცნო და დაუახლოვდა ცნობილ მექანიკოსებსა და მათემატიკოსებს, ა.ნ კრილოვს (1863-1945), ნ.მ. კრილოვს (1879-1955) და სხვ., რომლებთანაც იგი განუწყვეტლივ ინარჩუნებდა სამეცნიერო კონტაქტებს. განსაკუთრებულ მხარდაჭერას პოულობს იგი პროფ. სერგი ევგენის ძე სავიჩის (1864-1936) მხრიდან. როგორც ნ. მუსხელიშვილის მატრიკულიდან ჩანს, ს სავიჩი მას ლექციებს უკითხავდა 1909წ „უმაღლეს გეომეტრიასა“ და „მხაზველობით გეომეტრიაში“, მონაწილეობდა, აგრეთვე, სამაგისტრო გამოცდების კომისიებში· „ალბათობის თეორიასა“ და „მექანიკაში“. ჩვენთვის გაურკვეველი მიზეზის გამო, გ. კოლოსოვის ნაცვლად

ს. სავიჩი აკეთებს 1916წ. 10 სექტემბერს ნ მუსხელიშვილის სახელზე წარდგინებას, რათა იგი დანიშნულიყო უნივერსიტეტის პრაქტიკული მექანიკის კაბინეტის გამგედ, რომელიც გამოყენებითი მათემატიკის კათედრის გამგებლობაში შედიოდა. 1917 წ. 5 მაისს ნ მუსხელიშვილი ინიშნება გამოყენებითი მათემატიკის კათედრის უმცროს ასისტენტად და პრაქტიკული მექანიკის კაბინეტის გამგედ, ამ თანამდებობაზე მანამდე მომუშავე კ.ვ. მელიქოვის ნაცვლად. მაგრამ, ოფიციალურად, უნივერსიტეტის ახალი წესდების მიხედვით, მასწავლებლის წოდება მას ენიჭება 1919 წ 21 ივნისს, რომელიც მანამდელი პრივატ-დოცენტის ეკვივალენტურია, თუმცა ზოგჯერ უფრო საპატიოდაც ჩანს

ახალგაზრდა ქართველ მათემატიკოსს, სამაგისტრო გამოცდებისათვის მომზადება-ჩაბარების და ინტენსიური სამეცნიერო მუშაობის პარალელურად, 1915-1920 წლებში უხდებოდა სალექციო კურსების მომზადება კერძოდ, რომელ სალექციო კურსებს კითხულობდა ის სხვადასხვა უმაღლეს სასწავლებელში, ჩვენთვის უცნობია, თუმცა ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტის მდივნის პროფ. ნ გიუნტერის მიერ 1920 წ. 29 სექტემბერს უნივერსიტეტის საბჭოსადმი წარდგენილი მიმართვიდან, ვგებულობთ: „იმის გამო, რომ მასწავლებელი ნ.ი. მუსხელოვი არ დაბრუნდა მივლინებიდან, მისი კურსების წაკითხვა ფაკულტეტის მიერ მიენდოთ:

კ.ვ. მელიქოვს - ანალიზის ზოგადი კურსი, ნაწ. I, I საათი კვირეული დატვირთვით.

ი.დ. ტამარკინს - ანალიზის ზოგადი კურსი, ნაწ. II, 3 საათი კვირეული დატვირთვით.

გამოყენებითი მათემატიკის ლაბორატორიის გამგეობა დაევალოს კ.ვ. მელიქოვს ა.წ 1 ოქტომბრიდან [1, 45] ცხადია, ერთი წლის მანძილზე ნ. მუსხელიშვილი „ანალიზის ზოგად კურსს" ვერ გამართავდა სასურველ დონეზე[1]. არაა ცნობილი, აგრეთვე, რა მასალა იკითხებოდა „ანალიზის ზოგად კურსში" ფიზიკოსებისათვის. სავარაუდოა, რომ იგი აღნიშნული კურსის მასალას ამუშავებდა ვალენ-პუსენის ცნობილი კურსიდან, რომლის თარგმნით

[1] „ანალიზის ზოგადი კურსის" წაკითხვა, ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტთათვის, როგორც ზემოთ ვნერდით, ნ მუსხელიშვილს მიენდო 1919 წ 21 ივნისს.

– ვ. სტეკლოვის დავალებით, ამ დროისთვის დაკავებული იყვნენ უნივერსიტეტის პროფესორები ვ. სმირნოვი, ი. ტამარკინი და სხვები ამ კურსის I ტომი სათაურით "Курс анализа бесконечно малых", T. I, გამოქვეყნდა 1922 წ., ხოლო მეორე ტომი 1932 წ [3]. სავარაუდოა, რომ ნ. მუსხელიშვილი, როგორც ფრანგული ენის მცოდნე, თავიდანვე მონაწილეობას ღებულობდა ამ საქმიანობაში, მაგრამ შემდეგ, მდგომარეობათა გამო ჩამოშორდა მათ.

კიდევ ერთ წიგნზე შეჩერდა ნ. მუსხელიშვილის ყურადღება პეტერბურგში მისი პედაგოგიური მოღვაწეობის დასაწყისში. ეს იყო ამერიკელი მეცნიერის, მასაჩუსეტის უნივერსიტეტის ფიზიკური ლაბორატორიის დირექტორის, ფიზიკის პროფესორის არტურ გორდონ ვებსტერის ლექციების კურსი მათემატიკურ ფიზიკაში, რომლის წიგნი „მატერიალური წერტილის, მყარი, დრეკადი და თხევადი სხეულების მექანიკის“ სახელწოდებით თარგმნა მან კ. მელიქოვთან ერთად 1918 წ. აკად. ვ. სტეკლოვის მითითებითა და თანადგომით. თარგმანი 1933 წ. გამოიცა, რომლის წინასიტყვაობაში კ. მელიქოვი წერს: „ვებსტერის მექანიკის კურსის რუსულ ენაზე თარგმნის აზრი ჯერ კიდევ 1918წ ჩაისახა. მაშინვე იყო შესრულებული ნ. მუსხელიშვილისა და ჩემს მიერ წიგნის მესამედის თარგმანი. ნაწილობრივ ეს თარგმანი გაშინჯული იყო აკად. ვ. სტეკლოვის მიერ, რომელმაც გააკეთა მთელი რიგი შენიშვნები და შესწორებები. გამოცემა მაშინ არ განხორციელდა და ვ. სტეკლოვის სიკვდილის შემდეგ ხელნაწერი დაკარგულად ითვლებოდა...“ წიგნის თარგმნის და მასთან დართული შენიშვნების შესახებ ჩვენ ქვემოთ გვექნება საუბარი აქ აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტთათვის შესაბამისი ლიტერატურის შერჩევა-თარგმანზე ზრუნვა ნ. მუსხელიშვილს ევალებოდა არა როგორც ამ სპეციალობის სტუდენტთა მასწავლებელს არამედ, როგორც სპეციალისტს, რომლის საკვლევო-სამეცნიერო ინტერესების არეალი მათემატიკური და თეორიული ფიზიკის მიჯნაზე გადიოდა, მისი მოღვაწეობის პირველ პერიოდში.

ვებსტერის წიგნის თარგმანზე მუშაობას, როგორც ჩანს, გავლენა მოუხდენია ნ. მუსხელიშვილის, როგორც მათემატიკური ფიზიკის

სპეციალისტის აზროვნების სტილზე, რომელიც უაღრესად პრაქტიკული გამოყენების ასპექტით განიხილავდა შემდგომში კონკრეტულ ფიზიკურ-მექანიკურ ამოცანებს, როგორც მათემატიკური ანალიზისათვის შესასწავლ ობიექტს. იგი, ამ პერიოდში, უსათუოდ იზიარებს წიგნის ავტორის შემდეგ შეგონებას: „მე ვეცადე, გადმომეცა ის, რაც არსებითია ფიზიკური მოვლენის გაგებისათვის და უყურადღებოდ ვტოვებდი ყველაფერს, რაც მხოლოდ მათემატიკურ ინტერესს წარმოადგენს. მაგალითად, კინემატიკა არ განიხილება დამოუკიდებლივ, მაგრამ მოტანილია დინამიკასთან კავშირში“ [20, გვ. 8 5].

ცხადია, ნ. მუსხელიშვილი, მთლიანად არ იზიარებს ა. ვებსტერის აზრს მექანიკის კურსის აგებისას, რაც გამომჟღავნდა კიდევაც მის მიერ „კინემატიკისა“ და „სტატისტიკის“ დამოუკიდებელი კურსების შექმნისას აქ შევნიშნავთ იმასაც, რომ ნ. მუსხელიშვილის „მექანიკის“ სრულიად ორიგინალური კურსები, თბილისის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკური და პოლიტექნიკური ფაკულტეტების საჭიროებისათვისაა შედგენილი და ცხადია, ვებსტერის წიგნის არავითარ თემატიკურ გავლენას არ განიცდის.

უნივერსიტეტის დამამთავრებელ კურსზე მყოფი ნ მუსხელიშვილის სამეცნიერო ინტერესების გამოკვეთაში, იმთავითვე გადამწყვეტი მნიშვნელობა ითამაშა გ. კოლოსოვთან მისმა კონტაქტმა, რაზედაც ზემოთაც ვწერდით, თუმცა არა ნაკლებ დავალებულია იგი ა. კრილოვისაგან, რაც შემდგომ არა ერთხელ აღუნიშნავს.

კოშის ანალოგიური ინტეგრალის მათემატიკური მეთოდი ნ მუსხელიშვილმა შეიმუშავა 1918-1919 წლებში 1918წ. იგი აქვეყნებს ამ მეთოდის შესახებ პირველ 5 გვერდიან შრომას, პერმის უნივერსიტეტის ფიზიკა-მათემატიკური საზოგადოების ჟურნალში, სათაურით "Об определении гармонической функции по заданиям на контуре".[3]

უნდა აღინიშნოს, რომ პერმის უნივერსიტეტი, რომლის ბაზაზეც მოქმედებდა ფიზიკა-მათემატიკური საზოგადოება, ითვლებოდა პეტერბურგის უნივერსიტეტის ფილიალად და პროფესორ-მასწავლებელთა პერსონალი, ოქტომბრის რევოლუციით შობილი უნივერსიტეტისა, პეტროგრადის უნივერსიტეტიდან იყვნენ მივლინებულნი. იმჟამინდელი პეტროგრადის

უნივერსიტეტის ისეთი თვალსაჩინო ახალგაზრდა მეცნიერები, როგორებიც იყვნენ ა.ა ფრიდმანი, ი.დ ტამარკინი, ი.მ. ვინოგრადოვი, ა. ბეზიკოვიჩი, გ. შაინი და სხვები, პერმის უნივერსიტეტში შეთავსებით მუშაობდნენ და ჟურნალში თანამშრომლობდნენ. ნ მუსხელიშვილის მცირე ფორმის სტატიის სქოლიოში აღნიშნული იყო, რომ ავტორის ვრცელი სტატია აღნიშნულ თემაზე დაიბეჭდება შემდეგ, - 1919წ. ნოემბერშიო. 1919 წ. გამოვიდა მხოლოდ ერთი ნომერი ჟურნალისა, სადაც ნ. მუსხელიშვილის მითითებული სტატია არ დაბეჭდილა, შემდეგ კი ჟურნალმა არსებობა შეწყვიტა. აღნიშნული თემატიკიდან, ნ მუსხელიშვილის ვრცელი სტატია ვ ა. სტეკლოვის წარდგინებით დაიბეჭდა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის „ცნობებში“ ფრანგულ ენაზე სათაურით - ბიჰარმონიული განტოლების ინტეგრირების შესახებ“ [6].

რაც შეეხება პერმის ჟურნალში გადაცემულ სტატიას, იგი არ დაბეჭდილა და დაკარგულად ითვლებოდა

აკად ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივში[2] ახლახან მიკვლეული იქნა დაკარგულად ჩათვლილი სტატიის ხელნაწერი სათაურით. "О решении некоторых контурных задач математической физики" [7], რომელსაც შემდეგი შინაარსის მინაწერი აქვს სქოლიოში: ეს ნაშრომი წარმოდგენილია ძალზე ნასწორები ხელნაწერის სახით 22 გვერდი თაბახის ფურცლისა და დამთავრების თარიღად აღნიშნულია 1919 წ. 20 დეკემბერი: როგორც ჩანს ავტორს ვერ მოუსწრია დროულად სტატის ჩასწორებული ვარიანტის მიწოდება ჟურნალისათვის. სტატიის შინაარსის ზერელე გაცნობა გვარწმუნებს, რომ იგი მასალად გამოუყენებია ავტორს მისი ფრანგული მონოგრაფიის“ Applic... Physique Matematique" (1922) [8] დაწერის დროს, თუმცა მას არ დაუკარგავს დამოუკიდებელი მეცნიერული და ისტორიული მნიშვნელობა დღესაც.

ნ. მუსხელიშვილის სამეცნიერო-პედაგოგიური მუშაობის პეტერბურგის პერიოდიდან ყურადღებას იქცევს პეტერბურგის უნივერსიტეტის დეკანის პროფ. ტიშჩენკოსა და მდივან პროფ. ნ. გიუნტერის მიერ 1919წ. 25 ივლისს

[2] ამ არქივის მრავალი მასალა, მათ შორის აღნიშნული სტატიის ხელნაწერი პროფ. თ. ეფრემოძეს მაწოდა მეუნარის შვილიშვილმა, ფიზ. მათ. მეც. კანდიდატმა მგ მეჭბელიშვილ-გომელაურისამ, რისთვისაც მას ულრმეს მადლობას მოვახსენებთ (შ.კ.)

გაკეთებული წარდგინება უნივერსიტეტის რექტორისადმი, რომელშიც ვკითხულობთ: „21 ივლისს ფაკულტეტის სხდომაზე დადგენილი იქნა, რომ მივლინებულ იქნან საკუთარი ხარჯით I-ელ სექტემბრამდე კიევისა და მოსკოვის უნივერსიტეტების ბიბლიოთეკებში სამუშაოდ, მათი მიმდინარე სამეცნიერო მუშაობის წესრიგში მოსაყვანად და რუსეთის სხვადასხვა ქალაქებში ლექციების წასაკითხავად პროფესორები ი.დ. ტამარკინი, ნ.მ. გიუნტერი და მასწავლებელი ნ.ი. მუსხელოვი“ [1, 38], რომლის საფუძველზე პირადად ნ. მუსხელიშვილის სახელზე იმა წლის 28 ივლისით შემდეგი შინაარსის მოწმობაა გაცემული: „პეტროგრადის I უნივერსიტეტი ამით ადასტურებს, რომ მისი წარმომადგენელი ნ ი. მუსხელოვი მივლინებულია სამეცნიერო მიზნით მოსკოვსა და კიევში, ამ ქალაქების ბიბლიოთეკებში სამუშაოდ, მისი მიმდინარე სამეცნიერო სამუშაოს წესრიგში მოსაყვანად და რუსეთის ქალაქებში ლექციების წასაკითხავად, ა წ. I სექტემბრამდე.

ეს მოწმობა გაცემულია მასწავლებელ ნ.ი. მუსხელოვზე, რათა მას აღმოუჩინონ ყოველგვარი დახმარება, როგორც ქალაქებში გასვლის, ასევე მივლინების შემდეგ პეტერბურგში უკან დაბრუნებისათვის უნივერსიტეტის რექტორი ე გრიმი“ [იქვე, 39].

რუსეთის გუბერნიების: მოგილევსკის, ვიტებსკის და ნიჟეგოროდსკის პროვინციულ ქალაქებში ლექციების წასაკითხად ნ მუსხელიშვილს მანამდეც უმოგზაურია და ისიც საკუთარი ხარჯით. ასეთი ხასიათის ღონისძიებების გატარებას მაშინ, უნივერსიტეტების ახალი წესდება აუცილებელ ვალდებულებათ თვლიდა; მით უფრო ახალგაზრდა სპეციალისტების მიმართ, რომელთა ლოიალობა რევოლუციური რუსეთისა და ახალი სასწავლო-სამეცნიერო ღონისძიებების მიმართ, გარკვეულ პრაქტიკულ ნაბიჯების გადადგმას მოითხოვდა.

ამას გარდა, ნ. მუსხელიშვილის დაინტერესება მოსკოვისა და კიევის უნივერსიტეტების ბიბლიოთეკებით, გამოწვეული იქნებოდა დასავლეთიდან შემოსული უახლესი მათემატიკური ლიტერატურის გაცნობის სურვილით. ჯერ, პირველი მსოფლიო ომის, ხოლო შემდეგ რევოლუციის გამო, რომელსაც თან მოჰყვა სამოქალაქო ომი და ინტერვენცია, რუსეთის უნივერსიტეტები თითქმის არავითარ უცხოურ სამეცნიერო ლიტერატურას არ ღებულობდა,

თუ არა გამონაკლისის სახით. ცხადია, ნ. მუსხელიშვილს გარკვეული სამეცნიერო ურთიერთობა უნდა დაემყარებინა მოსკოვში - ნ ჟუკოვსკისა და ს.ნ. ჩაპლიგინის და კიევში - დ.ა. გრავეს და ნ.მ კრილოვის სკოლებთან, რომლებიც წარმატებით მუშაობდნენ დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანებისა და საერთოდ კომპლექსური ანალიზის დარგში. ამ დროს იგი განსაკუთრებით დაინტერესებულია ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების გადაწყვეტით კონფორმული გადასახვისა და კოშის მსგავსი ინტეგრალის მეთოდის გამოყენებით. მის, ზემოთ მითითებულ გამოუქვეყნებელ ნაშრომში განხილულია წრიული და ელიფსური პროფილის მქონე სხეულის მოძრაობის ამოცანა იდეალურ არაუკუმშვად სითხეში და გამოყვანილი აქვს სხეულის სიჩქარის ტანგენციალური და ნორმალური მდგენელის განმსაზღვრელი ფორმულები, რომლის სისწორის შესამოწმებლად, უეჭველად დასჭირდებოდა მოსკოვის ჰიდრო-აეროდინამიკურ ლაბორატორიასთან კავშირი

სავარაუდოა, სწორედ ამ მიზნით იყო იგი მივლინებული 1920 წ. 9 იანვარს ქ მოსკოვში. ამასთან, მის სახელზე გაცემულ მოწმობაში ვკითხულობთ: „ამის წარმომდგენი, პეტროგრადის უნივერსიტეტის მასწავლებელი ნ.ი. მუსხელოვი მივლინებულია ქ. მოსკოვში ორი კვირით, მოსკოვის უნივერსიტეტის აეროდინამიკურ ლაბორატორიაში სამუშაოდ“ [იქვე, გვ. 42]. ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების დასმა და ამოხსნა მუსხელიშვილის მეთოდით, გადმოცემულია მის ზემოთ დასახელებულ გამოუქვეყნებელ ვრცელ სტატიასა (1919), მონოგრაფიაში“.. მათემატიკური ფიზიკა“ (1922) და 1927წ. იტალიურ ჟურნალში (Rend. Acad. Lince. 5, 769-773, 1927) გამოქვეყნებულ სტატიაში, რომელიც მოხსენდა სრულიად რუსეთის მათემატიკოსთა ყრილობას 1927წ. მაისის თვეში და რომლის თეზისები "О некоторых контурных задачах плоской гидродинамики" გამოქვეყნდა ამ ყრილობის მასალებში [9]. ზემოთქმული საკმაო საფუძველია იმისათვის, როგორც ამას დოკუმენტურად ამტკიცებს იტალიელი მეცნიერების ისტორიკოსი კაპოდანო სტატიაში „Об одной забитой работе Н.И. Мусхелишвили" [10, გვ. 239], რომ ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ერთერთ მამამთავრად მსოფლიოში და საბჭოთა კავშირში აკად ნ ი.

მუსხელიშვილი უნდა ჩაითვალოს. ცხადია, ნ. მუსხელიშვილის მეთოდი, შემდგომ, მისგან დამოუკიდებლად, განავითარეს და სრულყოფილი გახადეს ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების საბჭოთა სკოლის მეთაურებმა ლ.ი სედოვმა (1907-1991) და მ ვ. კელდიშმა (1911-1978), რომლებიც თავიანთ თავს ნ. მუსხელიშვილის მოწაფეებად თვლიდნენ.

ნ. მუსხელიშვილის კიევის უნივერსიტეტში მივლინებას რომ ობიექტური მიზეზი ჰქონდა, ამაში გვარწმუნებს შემდეგი ვითარება აკადემიკოსი დ.ა. გრავე (1863-1939), პეტერბურგის მათემატიკური სკოლის ერთ-ერთი ღირსეული წარმომადგენელი, დიდი ალგებრაისტი და კომპლექსური ანალიზის გამოყენების სპეციალისტი, თავის სადოქტორო დისერტაციაში, რომელიც დაიცვა პეტერბურგში 1896წ., განიხილავდა ე წ. დირიხლეს ამოცანას ლაპლასის ორგანზომილებიანი განტოლებისათვის კომპლექსური ცვლადის შემოტანით, რომელიც დაფუძნებული იყო ბრტყელი აგების განსაკუთრებული გარდაქმნის მეთოდზე, რომელსაც შემდგომ კონფორმული გარდასახვა ეწოდა. დისერტაციის მე-4 თავში დ ა. გრავე ამტკიცებდა ჩებიშევის თეორემას, რომელიც ამ უკანასკნელმა პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის სხდომაზე ჩამოაყალიბა 1856წ. 18 იანვარს დაუმტკიცებლად: „Наивигоднеишая проекция для изображения какой нибудь части земной поверхности на карте есть та в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину, легко определяемую по принятой нормальной величине масштаба" [11, 49].

აი, როგორ აღწერს ამ ვითარებას თვით გრავე· „შემთხვევა, როცა ორივე სისტემა, როგორც მერიდიანები, ასევე პარალელები რუკაზე უნდა ყოფილიყო სწორი ხაზები, მე ამოვხსენი ორ კვირაში სწორი ხაზებისა და წრეების შემთხვევა ამოვხსენი ზაფხულზე. მთავარ სიძნელეს წარმოადგენდა ის შემთხვევა, როცა ორივე ხაზები წრეწირებია. მე შევძელი ამ ამოცანის ამოხსნაც და ამოცანის სრული ამოხსნა დავამთავრე შემდეგი წლის თებერვალში. მარკოვმა (იგულისხმება აკადემიკოსი ა.ა. მარკოვი, რომელიც ერთ-ერთი ოპონენტი იყო დ.ა. გრავეს დისერტაციისა), რომელმაც შენიშნა, რომ ჩემი საქმე კარგად მიდიოდა, მირჩია მეცადა დამემტკიცებინა ჩებიშევის თეორემა, რომელიც დაუმტკიცებელი იყო 50 წლის მანძილზე, მიუხედავად

იმისა, რომ იყვნენ ავტორები, რომლებიც უეჭველად ფიქრობდნენ, მასზე, მაგრამ განიხილავდნენ მას გამარტივებული სახით. ." [17 გვ. 25].

დ. ა. გრავეს მიაჩნდა, რომ ჩებიშევის თეორემის დამტკიცებას მიაგნო რამდენიმე წუთში, მაგრამ თვით აკად. ა.ა. მარკოვს საეჭვოდ მიაჩნდა ეს და შესაძლოა, ამის შესახებ თავისი აზრი გაუზიარა ნ. მუსხელიშვილს, რომელთანაც მას კარგი ურთიერთობა ჰქონდა ამიტომ, სავარაუდოა ნ. მუსხელიშვილი კიევში აკად. დ.ა. გრავესთან მათემატიკური კარტოგრაფიის საუკუნოვანი, გადაუჭრელი პრობლემის შესახებ საკონსულტაციოდ მიდის ჩვენ არ ვიცით როგორ დამთავრდა მათ შორის დისკუსია, მაგრამ ამ პრობლემამ, რომ იგი, ერთხანს, საგონებელში ჩააგდო, ჩანს უკვე 1923 წ ამბებით. კერძოთ, 1923წ. 20 მაისს იგი სწერს თ. ნიკოლაძეს ლონდონში· „ხვალ საღამოს მე მოხსენებას ვკითხულობ მათემატიკურ საზოგადოებაში ჩებიშევის ერთი თეორემის შესახებ. ის გამოთქმული იყო დამტკიცების გარეშე (1856წ) შემდეგ, კერძო შემთხვევის სახით იგი დაამტკიცა გრავემ (1896წ.). მე ცოტა ხნის წინათ შევძელი მეპოვა ამ თეორემის დამტკიცება სავსებით შემთხვევით..." (ნ მუსხელიშვილის საოჯახო არქივი)

რა შემთხვევასთან იყო დაკავშირებული აღნიშნული თეორემის დამტკიცება ან შედგა თუ არა თბილისში 1923წ 21 მაისს მათემატიკური საზოგადოების[3] სხდომაზე აღნიშნული მოხსენების მოსმენა უცნობია. მაგრამ სტატიის ფრანგული ხელნაწერი აღნიშნულ საკითხზე, სათაურით: „მინიმუმის საკითხისათვის გეოგრაფიული რუკების მათემატიკურ თეორიაში" ინახება ნ მუსხელიშვილის არქივში, რომელიც გამზადებულია Comp. Rend. (პარიზის მეცნ. აკადემიის მოხსენებებში) დასაბეჭდად. ეს სტატია არ დაბეჭდილა და არც მისი არსებობის შესახებ აქამდე არაფერი იყო ცნობილი. იგი სპეციალისტების მიერ შესწავლილი და გამოქვეყნებული უნდა იქნას.

---

[3] საქართველოს მათემატიკური საზოგადოება ოფიციალური სახით არსებობს 1962 წლიდან, რომლის პირველი პრეზიდენტი არჩეული იყო საქ. სსრ მ/ა აკადემიკოსი ვ.დ. კუპრაძე 1975 წლიდან საზოგადოების პრეზიდენტია პროფ. ლ. მაღნარაძე როგორც ჩანს, ანდრია რაზმაძის ქ/ა ნამოღვაწარი აქამდე უცურადღებოდა დარჩენილი, ნ მუსხელიშვილს რომ შემთხვევით არ წამოეცდინა ფრაზა „მათემატიკური საზოგადოება", მეტყველებს შემდეგი ნაწყვეტი 1923წ 24 თებერვალს ნ მუსხელიშვილის მიერ თ. ნიკოლაძისადმი ლონდონში გაგზავნილი წერილიდან დღით ვიყავი სხდომაზე საქართველოს მათემატიკური საზოგადოების დაარსებასთან დაკავშირებით– ვმეშაობდი გ ნიკოლაძესთან, რომელმაც შემისწორა ხელნაწერი (ქართული ენის თვალსაზრისით). მე დავწუ

ნ. მუსხელიშვილის სამეცნიერო მოღვაწეობის პეტროგრადის პერიოდიდან, უნდა შევჩერდეთ ერთ მომენტზეც თ. ნიკოლაძისადმი 1923წ. 4 ივნისს ლონდონში გაგზავნილ წერილში იგი აღწერს რა პეტროგრადიდან მიღებულ ტამარკინის წერილით მიღებულ მეგობრული განწყობილების ურთიერთობას, აღნიშნავს: „... ყოველ შემთხვევაში აქ მხოლოდ გიორგის (ნიკოლაძე) შეუძლია გააკეთოს ისეთი საქმე, რაც იქ გააკეთეს ტამარკინმა, კრუტკოვმა და უსპენსკიმ. მგონი, კიდეც მოგიყევი ერთი შემთხვევის შესახებ: მე დავტოვე იქ ერთი ხელნაწერი, რომელიც დავწერე კრუტკოვისათვის - მისი კურსისათვის (მან მთხოვა გადამეწყვიტა ერთი მათემატიკური საკითხი). მათ გადათარგმნეს ის ჩემი შეტყობინების გარეშე გერმანულ ენაზე და გააგზავნეს გერმანიაში დასაბეჭდათ. ერთადერთი მინუსი აქედან ისაა, რომ ჩემი გვარი იქ დაბეჭდილი იქნება, როგორც Muschelov და არა Muschelisvili (ჩვენ, მათემატიკოსები ქართული და რუსული გვარების ტრანსკრიპციისათვის ვიყენებთ ჩეხურ ორთოგრაფიას) (ნ. მუსხელიშვილის საოჯ. არქივი). თუ, აქ ნ მუსხელიშვილი გულისხმობს ხელნაწერს, რომელით ა/კ მუშაობის დროს დაასრულა სახელწოდებით - „ერთი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნის შესახებ“, რომელსაც 1920წ. 22 მარტი უზის თარიღად, ხოლო ?ÐÔÔÎ-ში 1921წ. 21 ივნისს გადაეცა, მაშინ უნდა არსებობდეს ამ სტატიის გერმანულად დაბეჭდილი პირიც. მეორეს მხრივ, აღნიშნული ხელნაწერის მითითების კვალი არ ჩანს ი.ა. კრუტკოვის იმ დროს შექმნილ მონოგრაფიაშიც „ადიაბატიური ინვარიანტების გამოყენება თეორიულ ფიზიკაში“, რომელიც 1922წ. გამოქვეყნდა სახელმწიფო ოპტიკური ინსტიტუტის [13] შრომების ტომში.

ბოლოს აღვნიშნავთ ნ. მუსხელიშვილის სამეცნიერო მუშაობას პეტერბურგში 1920წ. იანვარ-ივლისში ატომურ კომისიაში, რომლის ნაყოფია ჯერ კიდევ გამოუქვეყნებელი სამი ნაშრომი ბორი-ზომერფელდის ატომის კვანტური თეორიიდან [14, 161-179; 30].

კონმატკის კურსის შედგენა. (ნ მუსხელიშვილის საოჯახო არქივი). ამრიგად, საქართველოს მათემატიკური საზოგადოება დაარსა

§1. 2. 6. მუსხელიშვილი - ატომური კომისიის წევრი

რუსეთში ატომური ფიზიკის პრობლემატიკით დაინტერესება იწყება მეოცე საუკუნის ათიანი წლებიდან, როცა ასპარეზზე გამოდის ფიზიკოსთა ის თაობა, რომელნიც თავს იყრიდნენ ცნობილი ავსტრიელი ფიზიკოსის პაულ ერენფესტის გარშემო. პ. ერენფესტი (1880-1933) და მისი მეუღლე ტატიანა აფანასიევა-ერენფესტი (1878-1976) პეტროგრადში ცხოვრობდნენ 1907-1912 წლებში და ინტენსიურ სამეცნიერო-ორგანიზაციულ მუშაობას აწარმოებდნენ, როგორც კერძო პირები, ქალაქის ახალგაზრდა ფიზიკოსთა შორის [15].

პ. ერენფესტის მიერ ორგანიზებულ სემინარში აქტიურ მონაწილეობას ღებულობდნენ ისეთი ფიზიკოსები, როგორებიც იყვნენ ა.ფ. იოფე (1880-1960), დ. ს როჟდესტვენსკი (1876-1940), ვ. მ. ჩულანოვსკი (1889-1919), ვ რ. ბურსიანი (1886-1945), ა. ა ფრიდმანი (1888-1925), ვ ფრედერიკსი (1885-1943) და სხვები

ლეიდენის უნივერსიტეტში, ლორენცის კათედრის გამგებლად პ ერენფესტის გადასვლის (1912 წ.) შემდეგ, ატომური თემატიკით სემინარის წევრების დაინტერესება გაგრძელდა, რასაც ხელს უწყობდა მისი უწყვეტი მიმოწერა ა. იოფესა, დ. როჟდესტვენსკსა და სხვა პეტროგრადელ ფიზიკოსებთან.

ამ მიმოწერით [15], პ. ერენფესტი თავისებურად ხელმძღვანელობდა და სტიმულს აძლევდა ახალგაზრდა ფიზიკოსებს დაინტერესებულიყვნენ გამოსხივების პლანკ-აინშტაინის და ატომის ბორ-ზემერფელდის კვანტური თეორიების პრობლემატიკით.

კვანტური თეორიის განვითარების მეორე ათწლეულის მანძილზე ს - პეტერბურგელი ფიზიკოსების მიერ გამოქვეყნებულ თეორიულ ნაშრომებს შორის, დ.ს როჟდესტვენსკისა და ა. ფ. იოფეს გამოკვლევებთან ერთად [16, გვ. 70], აღსანიშნავია მხოლოდ ერენფესტის მოსწავლის ი. კრუტკოვის ნაშრომები სინათლის კვანტური თეორიიდან (1914-1916 წ.წ.) და დაკვანტვის ადიაბატური ინვარიანტობის პრიციპის განვითარების სფეროდან (1918 წ.) [14].

პროფ. ა. რაზმაძემ და პროფ. ნ. მუსხელიშვილმა 1923წ 24 თებერვალს [1 გვ 30]

იშვიათი გამონაკლისი ამ მხრივ გვაქვს ხარკოველი პროფესორის ა. პ. გრუზინცევის მრავალრიცხოვანი გამოკვლევების სახით სითბოტევადობის კვანტურ თეორიაში (1912-1914 წ.წ.) [17, გვ 207-247] და სარატოველი ფიზიკოსის ს. ბოგუსლავსკის შრომები ატომის ბორი-ზომერფელდის კვანტურ თეორიაში (1918-1920 წ.წ.) [18, გვ. 181-188].

1914 წელს რუსეთში დაწყებულმა პერმანენტულმა არეულობამ: მსოფლიო ომმა, რევოლუციამ, სამოქალაქო ომმა და ინტერვენციამ (1917-1921 წ.წ.) მთლიანად მოშალა ევროპასთან სამეცნიერო კონტაქტები და რუსი ფიზიკოსები კვანტურ თეორიაში უახლესი გამოკვლევების შესახებ ინფორმაციული ბლოკადის მდგომარეობაში მოექცნენ. ამიტომ უაღრესად დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა ცნობილი რუსი ფიზიკოსის პროფესორ (1929 წლიდან აკადემიკოსის) დ. როჟდესტვენსკის მიერ 1920 წელს ს. - პეტერბურგის სახელმწიფო ოპტიკურ ინსტიტუტში ორგანიზებულ ატომურ კომისიას, რომელსაც მიზნად ჰქონდა დასახული რთული ატომების აღნაგობის შესწავლა-ანალიზი ბორი-ზომერფელდის კვანტური თეორიის განვითარებით.

ატომური კომისიის შექმნას, წინ უსწრებდა დ. როჟდესტვენსკის მნიშვნელოვანი გამოკვლევები მრავალელექტრონიანი ატომების (He, Li, K, Ca) სპექტროსკოპიაში. წყალბადის მსგავსი ატომის სპექტრის შესწავლამ როჟდესტვენსკი მიიყვანა რთული ატომების აგებულების ზოგიერთი თვისების ახსნამდე [18, გვ. 91-97].

ამ საკითხებით დ. როჟდესტვენსკი 1916 წლიდან იყო დაინტერესებული, როცა ბორის თეორია საფუძვლიანად განავითარა ა. ზომერფელდმა, როგორც ელიფსური ორბტებისა და სივრცითი მოძრაობის არარელატივისტური და რელატივისტური, ასევე მაგნიტური (ზომერფელდი-დებაი) და ცნობილი ფაქტების (ზეემანისა და შტარკის ეფექტი) ახსნისათვის [19].

თავის მოხსენებაში - „სპექტრული ანალიზი და ატომის აგებულება“ [19], რომელიც დ. როჟდესტვენსკიმ გააკეთა 1919 წლის 15 დეკემბერს ს. - პეტერბურგის ფიზიკურ ინსტიტუტში, სადაც მაშინ თავშეფარებული იყო სახელმწიფო ოპტიკური ინსტიტუტი, დასვა ზოგიერთი ახალი იდეა, რომლებიც საშუალებას იძლეოდა ბორი-ზომერფელდის თეორია გავრცე-

ლებულიყო უფრო რთულ ატომებზე, ვიდრე წყალბადის მსგავსი ატომია. როგორც ჭეშმარიტმა მეცნიერმა, მან იცოდა, რომ იდეები უნდა ხორცშესხმულიყო დეტალური გაანგარიშებით რთული ატომების სპექტრულ კანონზომიერებათა ახსნისათვის და რომ ეს ამოცანა შეუძლებელი იყო გადაეწყვიტა ერთ ადამიანს

დ როჟდესტვენსკის მოსხენებამ გამოიწვია დიდი ინტერესი ს. - პეტერბურგის სამეცნიერო წრეებში, მათ შორის უნივერსიტეტში, სადაც ამ დროს მეორე-მესამე კურსის ფიზიკის სპეციალობის სტუდენტებს უმაღლეს მათემატიკას უკითხავდა ნ. მუსხელიშვილი.

ს. - პეტერბურგის გაზეთ „Красная газета"-ში 1920 წლის 21 დეკემბრის ნომერში გამოქვეყნებულ ა. ბოლოტინის სტატიას - „მსოფლიო მნიშვნელობის სამეცნიერო აღმოჩენა"-ს აქვს მინაწერი· - „პროფესორ როჟდესტვენსკის, საბჭოთა პეტროგრადის ოპტიკური ინსტიტუტის დირექტორის მიერ აღმოჩენილია ატომის აგებულება". სენსაციურ ქვესათაურს მოსდევს პროპაგანდისტული ქვეტექსტი „მეცნიერება საბჭოთა რუსეთში", რომლის შემდეგ, სტატიაში - „ატომის დაშლა", ვკითხულობთ:

„აქამდე მეცნიერებაში ითვლებოდა, რომ ატომი არის ნივთიერების შემადგენელი უმცირესი ნაწილაკი, რომელიც არ განიცდის შემდგომ დაშლას. პროფ როჟდესტვენსკის მიერ ეს შეხედულება უარყოფილია მან შესძლო აღმოეჩინა, რომ ატომები კიდევ შეიძლება დაიშალოს".

როჟდესტვენსკის წერილი: თავისი სამეცნიერო აღმოჩენის შესახებ პროფ როჟდესტვენსკიმ პეტროგრადის სახალხო განათლების განყოფილებაში ამხ. ზ. გ. გრინბერგის სახელზე გაგზავნა შემდეგი წერილი.

„გაცნობებთ, რომ ოპტიკურ ინსტიტუტში, რომელსაც ზედამხედველობს განათლების კომისარიატი, უკანასკნელი თვეების განმავლობაში შესრულებულია სამეცნიერო აღმოჩენა, რომელმაც გავლენა უნდა მოახდინოს ერთის მხრივ, არა მარტო ოპტიკური ინსტიტუტის მდგომარეობასა და შემდგომ განვითარებაზე, არამედ მომავალში სპეაქტრული ანალიზისა და ატომის აგებულების შესახებ მეცნიერების განვითარებაზეც" [16, გვ 99].

შემდეგ, წერილში მითითებულია, რომ აღმოჩენიდან გამომდინარეობს ის შედეგი, რომ ცხადი ხდება ყველა ატომის აგებულება. ამ აღმოჩენის მნიშვნე-

ლობა გრანგდიოზულია: „ეს ხომ, - წერს პროფ. როჟდესტვენსკი - საბოლოო შედეგია, რომლისკენაც მიისწრაფვის თანამედროვე ფიზიკა. უფრო რთული ატომების აგებულების ასახსნელად შესრულებული უნდა იქნას რთული მათემატიკური და გამოთვლითი სამუშაო. რუსეთში ეს სამუშაო ჩვენ უნდა შევასრულოთ, რაც შეიძლება სწრაფად, რომ ეს აღმოჩენა არ გამოგვტაცონ საზღვარს იქეთა მრავალრიცხოვანმა კოლეგებმა და რომ რუსი მეცნიერები, რომლებიც ამჟამად ჩაყენებულია მძიმე პირობებში, არ დარჩნენ დამსახურებული დიდების გარეშე“.

ამიტომ, პროფ. როჟდესტვენსკი გვთავაზობს, ოპტიკურ ინსტიტუტში დავაარსოთ განსაკუთრებული კომისია მათემატიკოსების, ასტრონომებისა და ფიზიკოსების შემადგენლობით.

რადიო: ვინაიდან აღმოჩენას, რომელიც გააკეთა პროფ. როჟდესტვენსკიმ აქვს მსოფლიო მნიშვნელობა, განათლების პეტროგრადის განყოფილებამ გადაწყვიტა მიმართოს ჰოლანდიის მეცნიერებათა აკადემიის სახელგანთქმულ მსოფლიო მეცნიერს ლორენცს და ცნობილ ფიზიკოსს ერენფესტს მნიშვნელოვანი სამეცნიერო აღმოჩენის შესახებ.

კომისიის შექმნა: პროფ როჟდესტვენსკის წინადადება მეცნიერთა განსაკუთრებული კომისიის შექმნის შესახებ რეალიზებული იქნება განათლების განყოფილების მიერ უახლოეს ხანში“ [20, გვ 21].

იმავე გაზეთში 24 დეკემბერს მოთავსებული იყო ინფორმაცია· „პროფ. როჟდესტვენსკის აღმოჩენისათვის“, რომელიც იტყობინებოდა, რომ შექმნილია „ატომური კომისია“ 19 კაცის შემადგენლობით, გამოყოფილია მისი დაფინანსებისათვის მილიონ ას ოთხი ათასი მანეთი (ავანსი) და დაწესებულია მათთვის სპეციალური ულუფა“.

იმავე ხანებში მომზადდა და რადიოთი გადაიცა შემდეგი შინაარსის ტექსტი: „პროფესორებს გ. ა ლორენცსა და პ. ერენფესტს, ლეიდენი, უნივერსიტეტი

პროფესორმა როჟდესტვენსკიმ შეძლო დაემტკიცებინა, რომ ზომერფელდის ელიფსებს შეესაბამება ყველა ელემენტის სპექტრული სერიები. დადგენილია ლითიუმის ატომის ნორმალური აღნაგობა. სერიებში დუბლეტები განპირობებულია შინაგანი ელექტრონული რგოლების მაგნიტური ველით.

კრუტკოვი ამუშავებს ზეემანის რთულ მოვლენას და ძლიერ ველში მარტივი ტრიპლეტების თეორიას ბურსიანი ამუშავებს შინაგანი რგოლების ელექტრულ მოვლენებს. ჩვიდმეტი წლიდან დაწყებული არ გვაქვს ლიტერატურა ოპტიკური ინსტიტუტის კოლეგია ძალიან გთხოვთ, რადიოთი გვაცნობოთ, თუ რა გაკეთდა ამ საკითხებში რუსეთს გარეთ.

მისამართი: პეტროგრადი, უნივერსიტეტი, როჟდესტვენსკი

ამსტერდამის მეცნიერებათა აკადემიას მივმართავთ თხოვნით, დახმარება გაგვიწიოს ფიზიკური ლიტერატურის გამოგზავნაში. სალამი პეტროგრადელი ფიზიკოსებისაგან. ოპტიკური ინსტიტუტის კოლეგია· როჟდესტვენსკი, კრუტკოვი, ფრედერიკსი“ [20, გვ. 311]

როგორც ირკვევა, რადიოტელეგრამა ადრესატებს არ მიუღიათ, მაგრამ ინგლისურ ჟურნალ „Nation“-ის 1920 წლის 20 ნოემბრის ნომერში დაიბეჭდა· „რადიოტელეოგრაფმა ჩვენამდე მოიტანა ცნობა იმის შესახებ, რომ ერთ-ერთი რუსი მეცნიერი მთლიანად დაეუფლა ატომური ენერგიის საიდუმლოებას. თუ ეს ასეა, მაშინ ადამიანი, რომელიც ფლობს ამ საიდუმლოს შეიძლება გახდეს პლანეტის მბრძანებელი“ [20, გვ. 92]

ცხადია,. რეზერფორდის სამშობლოში ატომური ენერგიის საიდუმლო არ უნდა აღრეოდათ ატომის აღნაგობის თეორიულ გამოკვლევებში, მაგრამ ამ პრობლემით საყოველთაო დაინტერესებამ დიდად შეუწყო ხელი ატომური კომისიის შექმნას და მის შემადგენლობაში ს. - პეტერბურგის გამოჩენილი მეცნიერების მოწვევას.

ატომური კომისიის შემადგენლობაში თავდაპირველად 8 სრულუფლებიანი წევრი მონაწილეობდა. ესენია: ვ. ბუნსიანი, ა. იოფე, ი. კრუტკოვი, ა კრილოვი, ნ. მუსხელიშვილი (მუსხელოვი), დ. როჟდესტვენსკი, ა. ტუდოროვსკი, ვ. ფრედერიკსი

1920 წლის მაისის თვიდან კომისიის შემადგენლობაში შევიდნენ ა. ფრიდმანი და ი. ტამარკინი. გარდა ამისა, იმ 19 კაცს შორის, რომლებიც მოსხენებულია ა. ბოლოტინის სტატიაში [20, გვ. 21], არასრულუფლებიან წევრებად ითვლებოდნენ. ვ. ჩულანოვსკი, ვ. იახოტნოვი, ა. არხანგელსკი, გ. სლიუსარევა, ა. ილინი და იმჟამად უნივერსიტეტის უფროსკურსელი სტუდენტები: ვ. ფოკი, ი. ტერენინი, გ. გრინბერგი, ს. ფრიში და სხვები.

ცხადია, ატომური კომისიის შემადგენლობაში ფიზიკოს-ექსპერიმენტატორების დ. როჟდესტვენსკის, ა. იოფესა და ა. ტუდოროვსკის, აგრეთვე ფიზიკოს-თეოროტეიკოსების ი. კრუტკოვის, ვ. ბურსიანისა და ვ ფრედერიკსის მონაწილეობა თავისთავად გასაგებია. მაგრამ ასტრონომ-მექანიკოსების ა კრილოვისა, ნ. მუსხელიშვილის და იმ დროს მათემატიკოს-მექანიკოსებად აღიარებული ა ფრიდმანისა და ი. ტამარკინის მონაწილეობა კომისიაში ითვალისწინებდა ატომის ბორ-ზომერფელდის მოდელის მექანიკური და მათემატიკური ამოცანების ამოსხნის სირთულეს და მათ კავშირს ციურ მექანიკაში დამუშავებულ საკითხებთან.

საკითხი, ნ. მუსხელიშვილის ატომურ კომისიაში მიწვევის შესახებ, არ უნდა განვიხილოთ მხოლოდ მექანიკური და მათემატიკური კუთხით. როგორც ნ. მუსხელიშვილის მიერ ატომურ კომისიაში შესრულებული სამუშაოს ხასიათიდან ჩანს, იგი ახლოს უნდა ყოფილიყო ატომის ბორი-ზომერფელდის მოდელის და კვანტური თეორიის პრობლემატიკასთან, რაშიც გარკვეული როლი უნდა ეთამაშა სტუდენტობიდან მის მეგობრობას, შემდეგში უნივერსიტეტის პროფესორ და ოპტიკური ინსტიტუტის კოლეგიის წევრი - ი კრუტკოვს.

აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ პროფ. ი. კრუტკოვი - პ ერენფესტის უპირველესი მოწაფე და მიმდევარი, 1917 წლიდან მუშაობდა მონოგრაფიაზე - „ადიაბატური ინვარიანტები და მისი გამოყენება თეორიულ ფიზიკაში“, რომელიც 1922 წელს გამოქვეყნდა ოპტიკური ინსტიტუტის შრომებში [13].

როგორც ჩანს, ამ მონოგრაფიის ზოგერთი მათემატიკური საკითხის დამუშავებაში მონაწილეობას ღებულობდა ნ. მუსხელიშვილიც. ამ ფაქტზე მეტყველებს პროფ. ნ. მუსხელიშვილის ერთი წერილი, რომელიც 1923 წლის 4 აპრილს არის გაგზავნილი თამარ ნიკოს ასულ ნიკოლაძესთან ლონდონში, რომელშიც სხვათა შორის იგი წერდა: - „.. მე დავტოვე იქ (იგულისხმება ს - პეტერბურგის უნივერსიტეტი, შ.კ.) ერთი ხელნაწერი, რომელიც დაწერილი იყო ჩემს მიერ კრუტკოვისთვის. (მე მან მთხოვა ამომეხსნა ერთი მათემატიკური ამოცანა)...“ [1].

აქედან გამომდინარე, კომისიის შემადგენლობის შერჩევის დროს ს. - პეტერბურგელ მათემატიკოს-მექანიკოს-ასტრონომთა წმინდა მათემატიკურ, თუ მექანიკურ ინტერესებთან ერთად, არსებითი ყურადღება ექცეოდა ატომურ

ფიზიკაში კვანტური თეორიის გამოყენებასთან დაკავშირებულ პრობლემატიკაზე მომუშავე მეცნიერებს

აღნიშნული დასტურდება, დიდი რუსი ებრაელი ფიზიკოსისა და მექანიკოსის ა.ა. ფრიდმანის მიერ პ. ერენფესტისადმი 1920 წლის 6 აგვისტოს მიწერილი წერილით, რომლიდანაც ვგებულობთ: „ვმუშაობ ატომურ კომისიაში (ტამარკინთან ერთად) ატომის აგებულების საკითხზე“... „ჩვენ (ტამარკინთან ერთად, შ.კ.) გავაკეთეთ ერთობლივი მოხსენება განზომილებათა პირობის შესახებ, რომელიც აწესებს შეზღუდვებს ადიაბატური ინვარიანტების დაკვანტვაზე...“, ამასთან „ძირითადად, ატომურ კომისიაში ჩვენ ვსწავლობთ (განსაკუთრებით მე), ბუნდოვანი და ნაკლებად გამოთვლილი სიდიდეები, რომლებიც დაკვანტვის საკითხში ბევრია, ჩამოვაყალიბოთ მკაცრ მათემატიკურ ფორმაში ეს როლი მათემატიკური ჟანდარმისა არც თუ ისე მიმზიდველია, მაგრამ სასარგებლოცაა. ციური მექანიკის (რაც ატომის შესწავლის დროს ხშირად გამოიყენება) და მდგრადობის საკითხებითაც კი ვართ დაინტერესებული ჩვენ მცირე ხანია ვმუშაობთ, ვიმეორებ, უფრო მეტად ვსწავლობთ“ [16, გვ. 129]

თუ რა სახის ამოცანებთან და როგორი ორგანიზაციით უხდებოდა ატომური კომისიის წევრებს მუშაობა, ვგებულობთ ამ კომისიის I სხდომის ვრცელი ოქმიდან, რომელიც პირველად არასრული სახით გამოქვეყნდა 1980 წელს. ამ დოკუმენტის დიდი მნიშვნელობის გამო მოვიტანთ მის სრულ თარგმანს·

„სახელმწიფო ოპტიკურ ინსტიტუტთან არსებული ატომური კომისიის (ა/კ) I სხდომა. ოთხშაბათი 1920 წლის იანვარი.

ესწრებოდნენ ატომური კომისიის წევრები: ბურსიანი, იოფე, კრუტკოვი, კრილოვი, მუსხელოვი, როჟდესტვენსკი, ტუდოროვსკი, ფრედერიკსი.

გამოთვლითი ბიუროს წევრები: ჩულანოვსკი, იახონტოვი

ატომური კომისიის თავმჯდომარემ მუშაობის შემდეგი გეგმა დასახა:

ატომის აგებულების ამოცანა არის მრავალი სხეულის ამოცანა, სადაც ნაწილაკები ურთიერთქმედებენ ელექტრული და მაგნიტური ძალებით. ამ ამოცანის ამოხსნისადმი მიდგომის დროს საჭიროა მისი თანმიმდევრობით დანაწევრება რიგ მარტივ ამოცანად, თითოეული ცალკე ამოცანის ამოხსნა გამარტივებული სქემების გამოყენებით, დაშვებული გამარტივების შეფასება, მი-

ღებული შედეგების ექსპერიმენტთან შედარება და შემდეგ უფრო რთულ შემთხვევაზე გადასვლა, ანუ ამოცანის უფრო მკაცრი დასმა.

თქმულის შესატყვისად ატომური კომიის წინაშე დგას ოთხი ამოცანა: I. ელექტრული ამოცანა, II. მაგნიტური ამოცანა, III რენტგენული ამოცანა, IV ცდების დაყენება და უკვე არსებული ექსპერიმენტული მასალის კოორდინირება.

I. ელექტრული ამოცანა: ატომში ვალენტური ელექტრონის მოძრაობა დამოკიდებულია, ძირითადად ბირთვის ელექტრულ ველზე. ეს ველი, რომელიც განისაზღვრება კულონის კანონით, უმარტივეს შემთხვევაში (წყალბადი, იონიზებული ჰელიუმი) ძლიერ მახინჯდება უფრო მძიმე ატომებზე გადასვლისას, როცა დადებითად დამუხტული ბირთვი გარშემორტყმულია ელექტრონებით.

1 აუცილებელია დავსახოთ გზა, რომლისაკენაც უნდა ვიაროთ ამ ამოცანის ამოხსნისათვის. გავარკვიოთ, სადაა მოთავსებული მისი სიძნელეები და რომელი მიახლოებებით შეიძლება ვისარგებლოთ. საჭიროა ამოცანის ფორმულირება უნდა ვთხოვოთ ვ რ ბურსიანს, გააკეთოს ეს, ატომური კომისიის უახლოეს სხდომაზე.

2. ელექტრული ამოცანის ამოხსნისათვის საჭიროა დავიწყოთ მისი უმარტივესი შემთხვევის შესწავლით. მოცემულ შემთხვევაში ესაა ელექტრონის მოძრაობა შორეულ ორბიტაზე, როცა ელექტრული ველი თითქმის ისეთივეა, როგორიც ერთი დადებითი მუხტის მქონე ბირთვის შემთხვევაში. ეს არის შეშფოთებული მოძრაობა. ასეთი შეშფოთებული მოძრაობის მაგალითს განიხილავს მის მოხსენებაში დღეს ა. კრილოვი.

3. შემდეგი ეტაპი იქნება ვალენტური ელექტრონის მოძრაობა ძლიერ ელექტრულ ველში.

4. როცა ბირთვის გარშემო არსებობს ელექტრონული რგოლები, მაშინ ვალენტური ელექტრონის მოძრაობა მახინჯდება. თავის მხრივ, ვალენტური ელექტრონიც თავისებურად მოქმედებს შინაგან რგოლებზე, ამახინჯებს მათ ფორმას და მათზე ელექტრონების მოძრაობას, მნიშვნელოვანია ამ უკნასკნელის დამახინჯება. ამოცანა რთულდება იმით, რომ ვალენტური ელექტრონი მოძრაობს ნელა შიგა ელექტრონებთან შედარებით. პირველი მიახლოებაა,

როცა იგი არ მოძრაობს. საჭიროა მოწვეული იქნან ატომური კომისიის გამოთოვლით ბუიროში ნუმეროვი და მელიქოვი და ვთხოვოთ მათ დაინტერესდნენ ამ საიკთხით და გაარკივონ:

5. შეიძლება თუ არა გარეშე ელექტრონის მოქმედება დაყვანილ იქნას ნელად მოძრავი ელექტრული ველის შემთხვევაზე.

6. უნდა გაირკვეს აგრეთვე, შესაძლებელია თუ არა ასეთი ამოცანის დასმა:

ორი ელექტრონი მოძრაობს წრეწირზე Li-ის დადებითი ბირთვის მიმართ. მთლიანად სისტემა იმყოფება გარეშე ელექტრულ ველში, როგორი იქნება მისი მოძრაობა.

7 გარეშე ელექტრული ველის გავლენა ვალენტური ელექტრონის მოძრაობაზე ცდებში აისახება სპექტრული ხაზის გახლეჩაში (შტარკის მოვლენა).

იმისათვის, რომ შევამოწმოთ თეორია, უნდა გავიგოთ რა მოსდის ელექრულ ველში გამოსხივებელი ელექტრონის ტალღურ რიცხვს. ამისათვის საჭიროა მოძრაობა სწორად დავკვანტოთ. ეს ამოცანა ამოხსნილია წყალბადისათვის ეპშტეინის მიერ არადამაკმაყოფილებლად. ამიტომ საჭიროა ამ საკითხშიც გარკვევა. ვთხოვთ ვ. კ ფრედერიკს დაინტერესდეს ამ საკითხით.

8. როცა ატომში იმყოფება შინაგანი ელექტონებიც, მაშინ კვანტურ პირობას უნდა აკმაყოფილებდეს მათი მოძრაობაც

9. ელექტრული ამოცანა სრულად იქნება ამოსხნილი, როცა შეგვეძლება კვანტურ პირობებს დავუქვემდებაროთ შიგა ელექტრონული რგოლების და გარეშე ელექტრული ველის მოქმედება ვალენტურ ელექტრონზე.

II მაგნიტური ამოცანა:

1. ელექტრონებს შორის მაგნიტური ურთიერთქმედება ძალზე სუსტია ელექტრონულთან შედარებით. ის აღმოჩნდება, როგორც პირველის შესწორება, მაგრამ მისი შესწავლა ძალზე მნიშვნელოვანია, რადგანც იგი ადვილად დაიკვირვება ცდებში, როგორც სერიის გარკვეულ წევრთა სტრუქტურაზე (შინაგარი მაგნიტური ველი), ასევე ზეემანის მოვლენის დროსაც (გარეშე მაგნიტური ველი). როგორც I შემთხვევაში, ეს ამოცანაც უპირველეს ყოვლისა უნდა ჩამოყალიბდეს, რასაც უახლოეს სხდომაზე გააკეთებენ ი. ა კრუტკოვი და დ ს როჟდესტვენსკი.

2. საჭიროა გაირკვეს, რა სახის ცვლილებებს იწვევს შინაგანი და გარეშე მაგნიტური ველი. შეიძლება თუ არა მეორე მიახლოების წევრები გავლენას ახდენდეს დაკვანტებაზე. აგრეთვე, როგორია H^2-ზე დამოკიდებული მაგნტური ველის გავლენა

3. საჭიროა გავარკვითო წყალბადის ატომში ელექტრონსა და ბირთვს შორის მაგნიტური ურთიერთქმედების გავლენა მის მოძრაობაზე რადგან ამ უმარტივესი ამოცანის ამოხნა საჭიროა უფრო რთულ შემთხვევებში ორიენტირებისათვის (ვ.მ. ჩულანოვსკი).

III. რეტგენული ამოცანა: იგულისხმება, რომ ორივე წინა ამოცანის სწორი ამოხნა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ საკმარისად ცნობილია, როგორაა აგებული შინაგანი რგოლები. რამდენი ელექრონია მათზე და რომელ ორბიტებზე იმყოფებიან. ამ ამოცანის ამოსხნა მოითხოვს განსხვავებულ მიდგომას და მოწმდება რენტგენული სპექტრების გამოკვლევით უნდა ვთხოვოთ ა. იოფეს და ვ ბურსიანს დაინტერსდნენ ამით

IV. ექსპერიმენტული მასალა: ბოლო ათწლეულში დაგროვდა დიდი ექსპერიმენტული მასალა, რომელსაც შეუძლია სამსახური გაუწიოს თეორიის შემოწმებას და საფუძველი შეუქმნას მის შემდგომ განვითარებას ეს მასალა ძალზე ცუდად და უსისტემოდაა დამუშავებული. აუცილებელია, მოვახდინოთ მათი შეჯამება და მნიშვნელოვანი გადამუშავება.

ამასთან დაკავშირებით უნდა ვთხოვოთ·

1. ე.რ. იახონტოვს, დაინტერესდეს და დაამუშაოს K_1-ს მიმართ სიცარიელეში დაკვირვებადობის მიღმა სპექტრული ხაზების შესახებ შედეგები და შეიტანოს მათში შესაბამისი შესწორებანი...

2. ა. ი. ტუდოროვსკის, შეასრულოს მასალების შედარება შტარკის მოვლენის შესახებ.

3. ვ.მ. ჩულანოვსკის, გააკეთოს იგივე ზეემანის რთული მოვლენის შესახებ.

4. საჭიროა დამზადებულ იქნას წყალბადის ატომში ელექტრონის ელიფსური ორბიტების ნახაზები.

5. გაკეთდეს იგივე შეშფოთებული ორბიტებისათვის.

6. შეგროვდეს მასალები მუდმივების შესახებ და ნორმალური ერთეულების შესახებ.

გამოთვლითი ბიუროსა და ატომური კომისიის სამუშაოთა უფრო მეტად შეთანხმების მიზნით, სასურველი იქნებოდა სხდომის დაწყების წინ მოვისმინოთ ა. ი. ტუდოროვსკის მოკლე ანგარიში გამოთვლითი ბიუროს მუშაობის შესახებ" [14, ფ 45-46].

მუშაობის გეგმას, რომელიც წარმოდგენილი იყო დ.ს. როჟდესტვენსკის მიერ, არ გამოუწვევია უთანხმოება და დამტკიცდა ატომური კომისიის მიერ

კომისიის თავმჯდომარის, პროფ. დ. როჟდესტვენსკის საპროგრამო მოხსენებაში, რომელიც საფუძვლად დაედო ატომური კომისიის I ოქმის პრეამბულას, მოცემულია დასამუშავებელ პრობლემათა ერთობლიობა, როგორც თეორიული, ასევე, ექსპერიმენტული ატომური ფიზიკის დარგიდან ამათგან, ექსპერიმენტულ ანუ სპექტროსკოპულ (ოპტიკური და რენტგენული) ნაწილს პროგრამისას არ განვიხილავთ.

სამი, ზემოთ ჩამთოვლილი ამოცანიდან (ელექტრული, მაგნიუტრი და რენტგენული) ცენტრალურ ამოცანაზე - „ვალენტური ელექტრონის მოძრაობა ძლიერ ელექტრულ ველში", მუშაობა მოუხდა ს - პეტერბურგისათვის შედარებით უცნობ პიროვნებას, უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის კათედრის წევრს ნ. მუსხელიშვილს.

დავალების სერიოზულობა შეიძლება შემდეგი სტუაციით შევაფასოთ. ჯერ კიდევ 1919 წლის 15 დეკემბერს, სახელმწიფო ოპტიკური ინსტიტუტის პირველ წლიურ შეკრებაზე, პროფ. დ. როჟდესტვენსკიმ თავისი მოხსენების - „სპექტრული ანალიზი და ატომის აგებულება" დასკვნით ნაწილში აღნიშნა ვალენტური ელექტრონის გარეშე ელექტრულ ველში მოძრაობის ამოცანა (შტარკის ეფექტი) დაიყვანება ელექტრულ ველში სპექტრული ხაზის გახლეჩაზე. ეპშტეინმა მოგვცა ამ მოვლენის თითქმის დასრულებული თეორია, რომელიც წყალბადის ატომისათვის ცდების შედეგებთან რაოდენობრივ, რიცხოვბრივ შესატყვისობაშია" [19, გვ. 52].

ამავე დროს დ. როჟდესტვენსკი ამტკიცებდა, პ ეპშტეინის 1916 წლის კლასიკურ შრომაზე დაყრდნობით, რომ „ეპშტეინის ელიფსების შეუთავსებლობა ზომერფელდის ელიფსებთან ძალზედ აფერხებს სპექტროსკოპიის

კვანტური თეორიის განვითარებას. მაგრამ, რადგანაც თვით ეპშტეინი თვლის ზომერფელდის ელიფსების სისტემას ერთადერთ შესაძლებლად, ამიტომ ამჟამად არ ჩანს სხვა კონკურენტუნარიანი თეორია და სწორი იქნებოდა დავყრდნობოდით იმ აზრს, რომელიც უკვე არსებობს და უკეთეს შემთხვევაში დადასტურებულია ცდებით“ [19, გვ. 71].

პროფ. დ. როჟდესტვენსკის ეს ორივე გამონათქვამი განეკუთვნება იმ პერიოდს, როცა იქმნებოდა ატომური კომისია და ნ. მუსხელიშვილს დაწყებული ჰქონდა შტარკის მოვლენის თეორიაზე მუშაობა, რათა ეპშტეინისაგან განსხვავებული გზით ამოეხსნა „ელექტრული ამოცანის“ ცენტრალური საკითხი.

საკითხი, თუ რამდენად იყო ინფორმირებული ნ. მუსხელიშვილი შტარკის მოვლენის, ანუ „ელექტრული ამოცანის“ შესახებ, შეიძლება გაირკვეს იმით, რომ ატომური კომისიის პირველი სხდომიდან (1920 წლის 21 იანვარი) მის მიერ კომისიის სხდომაზე ვრცელი მოსხენების წარმოდგენამდე გავიდა მხოლოდ ორი კვირა (1920 წლის 5 თებერვალი) ცხადია, ორი კვირის შუალედში მას არ შეეძლო პრობლემის სიღრმისეული შესწავლა, პ. ეპშტეინისა და კ შვარცშილდის შრომების გარჩევა, ახალი მეთოდის შემუშავება, მისი დასაბუთება და რთული მათემატიკური გაანგარიშების შესრულება.

აქედან ლოგიკურია დასკვნა, რომ ნ. მუსხელიშვილი ამ პრობლემაზე დიდი ხნის (1916 წლიდან) განმავლობაში მუშაობდა.

ჩვენს მოსაზრებას ადასტურებს ატომურ კომისიაში მოწვეული წევრების, ნუმეროვისა და მელიქოვის ისტორია. კ. ს. მელიქოვი, ს. - პეტერბურგის უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემტიკის კათედრაზე შეცვალა ნ. მუსხელიშვილმა და იგი მექანიკის დარგში საკმაოდ ცნობილი სპეციალისტი იყო. მელიქოვსა და ნუმეროვს პროფ დ. როჟდესტვენსკიმ შესთავაზა დაემუშავებინათ, თუ რა გავლენას ახდენს ვალენტური ელექტრონი შიგა ელექტრონული რგოლის (ჩაკეტილი ანუ ელექტრონებით შევსებული ორბიტის) დინამიკაზე.

ამოცანის სირთულის და სიახლის გამო, როგორც ჩანს, მათ უარი განაცხადეს ჩართულიყვნენ კომისიის მუშაობაში პროფ როჟდესტვენსკიმ მიმართა აკად. ვ. სტეკლოვის თვალსაჩინო ახალგაზრდა მოსწავლეებს - ა. ა. ფრიდმანსა და ი. დ. ტამარკინს. ეს უკანასკნელნი ატომური კომისიის შემადგენლობაში

1920 წლის იანვარში მოიწვიეს, მაგრამ მათ მხოლოდ აპრილის დასაწყისში შეძლეს ჩართულიყვნენ საქმიანობაში, ნემიროვისა და მელიქოვის ნაცვლად.

ატომურ კომისიაში დავალებულ საკითხზე პირველი მოხსენებ ი. ტამარკინმა სათაურით - „შენიშვნა დროში ცვალებად ელექტრულ ველში უძრავი ბირთვის მოქმედებით ელექტრონის მოძრაობის შესახებ“, წარადგინა 7 ივლისს, ხოლო ა. ა ფრიდმანმა -„ ელექტრონის მოძრაობა მიმზიდველი ბირთვისა და მოცემული სახით მოძრავი გარეშე ელექტრონის მოქმედებით“ [14, გვ. 84-99] 8 ივნისს.

როგორც ჩანს, ა. ფრიდმანი და ი. ტამარკინი არა ნაკლებ სამი თვის მანძილზე მუშაობდნენ დასმული ამოცანის ამოხსნაზე, თუმცა კომისიის სხდომაზე ეს მოხსენებები მაინც არ ყოფილა წაკითხული ან გამოყენებული, ნ. მუსხელიშვილის ნაშრომის მსგავსად. რაც კიდევ ერთხელ მიუთითებს ნ მუსხელიშვილის მოხსენების დიდ მეცნიერულ მნიშვნელობაზე.

ატომური კომისიის სხდომებზე მოსმენილი და ოქმში შეტანილი მოხსენებები, რომელთა ტექსტები დაცულია მასალებში, აგრეთვე იმ მოხსენებათა ჩამონათვალი, რომლებიც არაა ფიქსირებული ოქმებში, ან შემონახული არაა ტექსტები, ავტორების მიხედვით ასე გამოიყურება·

	ავტორი	ოქმისეული და ა/კ-ში დაცული მოხსენებები	ოქმისეული და ა/კ-ში დაუცველი მოხსენებები	მოხსენებები ა/კ ოქმების მასალებით
1.	ვ. ბურსიანი	3	0	0
2.	ა. იოფე	1	2	0
3.	ი. კრუტკოვი	2	3	1
4.	ა. კრილოვი	4	3	0
5.	ნ. მუსხელი,შვილი	3	0	0
6.	დ. როჟდესტვენსკი	2	1	1
7.	ი. ტამარკინი	0	0	2
8.	ა. ტუდოროვსკი	0	1	0
9.	ვ. ფრედერიკსი	1	0	0
10	ა. ფრიდმანი	0	0	2

		16	10	6

აღრიცხულ 32 მოხსენებას, რომლებიც ფიქსირებულია სხდომებზე ოქმებში ან შემონახულია მოხსენებების ტექსტი, უნდა დაემატოს ის მოხსენებები თუ წინასწარი განცხადებანი ჩაფიქრებული სამუშაოს შესახებ, რომელიც სრულდებოდა ატომურ კომისიაში.

ამ მხრივ საინტერესოა ა. იოფეს წერილები პ ერენფესტისადმი ერთი წერილის ნაწყვეტში, რომელიც პეტროგრადიდანაა გაგზავნილი 1920 წ. 18 ივნისს, ვკითხულობთ: „... ჩვენ აქ, შთანთქმულნი ვართ ატომისა და მოლეკულის აგებულებით. ვცდილობთ, თქვენი და Debye-ს მიერ შემოთავაზებული მეთოდით მოვახდინოთ მონოქრომატული რენტგენული სხივებით ფოტოგრაფირება. ვზომავთ მეორადი ელექტრონების იონიზაციის პოტენციალსა და სიჩქარეს. ვზომავთ და ვითვლით რენტგენულსა და ოპტიკურ სპექტრებს. ამ საქმიანობაში მონაწილეობს ყველა ფიზიკოსი, რომელთაც შენ იცნობდი: მე, როჟდესტვენსკი, კრუტკოვი. ბურსიანი, კრილოვი, ფრიდმანი, ტამარკინი, ვულფი, ფრედერიკსი, ჩერნიშოვი, გორევი.

როჟდესტვენსკიმ ააგო სპექტრულ სერიათა სქემა (თითოეული სერია - თერმი) - ეს არის ორბიტათა ერთობლიობა ერთი და იგივე n (კუთხით) და სხვადასხვა r (რადიუსით) Sommerfeld-ის თეორიაში და შეამოწმა ის ჯერ მხოლოდ თვისობრივად, მრავალრიცხოვან ექსპერიმენტულ მასალაზე

კრუტკოვმა დეტალურად განავითარა ადიაბატურ ინვარიანტთა თეორია და გამალებით ახდენს ატომის დაკვანტებას.

ბურსიანმა ჩაატარა გამოთვლები სითხის ორიენტირებული მოლეკულების რენტგენოგრაფიაში და დაადგინა ბრტყელ ელექტროდებს შორის ელექტრული დენი, რომელთა ელექტრონებს აქვთ სითბური სიჩქარე.

კრილოვმა გამოთვალა He-ის ატომის ორბიტები

ამას გარდა, ჩვენ ყველანი ერთად ვცდილობთ შევამოწმოთ ბორის ატომი, შევასწოროთ ის და გამოვიტანოთ მისგან ყველა შედეგი“ [21, გვ 277]

აკად. ა. იოფეს მიერ ჩამოთვლილ მეცნიერთა სიაში, რომელშიც იგი რატომღაც ყველას ფიზიკოსად მოიხსენებს, რვა ატომური კომისიის წევრია. აღსანიშნავია, რომ ა. იოფე ამ სიაში არ ასახელებს მხოლოდ ნ. მუსხელიშვილსა

და ა. ტუდოროვსკის, რადგანაც მათ, როგორც ჩანს, პირადად არ იცნობდა პ. ერენფესტი.

რაც შეეხება ვულფის, ჩერნიშოვისა და გორევის მონაწილეობას ატომური კომიისი მუშაობაში, იგი ოფიციალურად არ დასტურდება. გარდა იმისა, რომ ისინი, ალბათ, თვით ა. იოფეს დავალებას ასრულებდნენ ატომურ კომისიაში დაგეგმილი სამუშაოს შესრულების დროს (18 ივნისის წერილში მოყვანილ გეგმიურ სამუშაოს).

1920 წლის 6 აგვისტოს წერილში ჩამოთვლილ იმ პრობლემათა შორის, რომლითაც დაინტერესებული იყო ა. იოფეს რენტგენოლოგიის (შემდეგ ფიზიკა-ტექნიკის) ინსტიტუტი, მოტანილია ატომურ კომისიაში იოფეს ჯგუფის მიერ დამუშავებული საკითხები, რომელთა შესახებ იგი წერს:

„...3. დიდი შრომა გავწიეთ ბორის მოდელზე და რენტგენულ სპექტრებზე. გამოვთვალე მბრუნავი ბირთვის ელექტრომაგნიტური მასა იმ დაშვებით, რომ მისი მაგნიტური ველი იქმნება ელექტრონულით. იმისათვის, რომ აიხსნას H-ის მასა და მისი დიამაგნეტიზმი უნდა ჩავთვლოთ, რომ დადებითი ბირთვის რადიუსი $r = 2 \times 10^{-13}$ სმ და $\omega = 10^{21}$ წმ$^{-1}$.

რენტგენული სპექტრების შესახებ შედეგები ჯერჯერობით უარყოფითია. მე შემიძლია დავამტკიცო, რომ **Debye**-ის, **Sommerfeld**-ისა და **Vegard**-ის მიხედვით მიიღება აშკარა წინააღმდეგობა - სისტემური ხასიათის გადახრა. ვცდილობდით გამოგვეთვალა ელექტრული რგოლების ჭეშმარიტი ურთიერთქმედება, თუ მას ფიქსირებულად არ ჩავთვლიდით ბირთვში, მაგრამ საქმე უკეთ არ წავიდა

გამოვთვალეთ ყველა მაგნიტური შესწორება. ამჟამად ვითვლით პარალელურ ორბიტებს, როგორც უფრო მდგრადს, რომლებიც არ მდებარეობენ ერთ სიბრტყეში.

ძალიან ბევრი ვიშრომეთ კრისტალურ მესერში ელექტრონული ორბიტების განლაგების დასადგენად, მაგრამ ნათელი სურათი ვერ მივიღეთ. ამ მიმართულებით ვმუშაობდი ვულფთან ერთად...“ [21, გვ. 277].

უნდა შევნიშნოთ, რომ ა. იოფეს 6 აგვისტოს წერილის ნაწყვეტში აღნიშნული პრობლემა - პარალელურ ორბიტებიანი ატომის მოდელის მათემატიკუ-

რი გათვლა, შესრულებული იყო 1921 წ. ი ტამარკინისა და ა. ფრიდმანის მიერ, რომელიც გამოქვეყნდა 1924 წ. სოი -ის შრომების IV ტომში [16].

ზემოთ მოტანილი არასრული მასალა ატომური კომისიის მუშაობის შესახებ გვარწმუნებს იმაში, რომ კომისიის თითოეული წევრისა და მათ შორის ნ. მუსხელიშვილის მიერ შესრულებული იყო ძალზედ მნიშვნელოვანი სამუშაო, რაც დაკავშირებული იყო ატომის ბორი-ზომერფელდის მოდელის შემდგომი განვითარებისა და მისი შემოწმების კრიტიკულ თვალსაზრისთან.

კერძოდ, ნ. მუსხელიშვილის მიერ შესრულებული სამუშაო, რომელზეც წაკითხული იყო მოხსენებები, ან გამოთქმული იყო წინადადების სახით ატომური კომისიის სხდომაზე, ერთობლიობაში გვაძლევს შემდეგ სურათს.

1. უძრავი ცენტრის (ბირთვის) მიზიდულობით ელექტრონის ელექტრულ ველში მოძრაობის ამოცანა (III სხდომა, 5 თებერვალი, 1920 წ გვ 87-79[1]).

2. მუდმივ ელექტრულ ველში და უძრავი ბირთვის მიზიდულობით მოძრავი ელექტრონის პერიოდული ორბიტების შესახებ, (IX სხდომა, 1 აპრილი, 1920 წ. გვ. 169-169).

3. სამი სხეულის ამოცანისათვის ლაგრანჟის ამონახსნის ანალოგიური პერიოდული ამონახსნების შესახებ, დამუხტული მრავალნაწილაკიანი ამოცანის შემთხვევაში (XIII სხდომა, 27 მაისი, 1920 წ. გვ 203-204).

4. გარე ელექტრულ ველში მოძრავი ატომური ელექტრონის ორბიტის სახეზე ფარდობითობის პრინციპის გავლენა (III სხდომა, 3 თებერვალი, 1920 წ. ფ. 85)

5. ჰელიუმის ატომში ელექტრონის პერიოდული მოძრაობის შესახებ, როცა ერთ-ერთი მიმზიდველი ცენტრი იმყოფება უსასრულობაში (VII სხდომა, 4 მარტი, 1920 წ. ფ. 146).

6. Whittaker-ის თეორემის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის შესახებ (X სხდომა, 8 აპრილი, 1920 წ. ფ. 172)

7 ატომური სისტემის სრული ენერგიის ინტეგრალის უსასრულო მნიშვნელობის შესახებ, როცა E>0 (XVI სხდომა, 17 ივნისი, 1920 წ. ფ. 213).

8. ურთიერთპერპენდიკალარულ სიბრტყეში ელექტრონის ამოცანა წინასწარ მოცემული ტრაექტორიითა და უცნობი მოქმედი ძალით (XVIII სხდომა, 1 ივნისი, 1920 წ. ფ. 216).

ზემოთ ჩამოთვლილ პირველ სამ მოხსენებასა და ხუთ ამოცანას თუ თეორემას, რომელთაგან ზოგიერთის დამტკიცებას ნ. მუსხელიშვილი შემდეგ მიუბრუნდა, უნდა დაემატოს ატომური სისტემის (სივრცითი საქანის ანუ როტატორის) შეშფოთებული მოძრაობის გაანგარიშების შტაერმან-კრილოვის მეთოდის განვითარება, რომელიც დაკავშირებულია მის მუშაობასთან ატომურ კომისიაში [14].

როგორც ჩანს მეცხრამეტე სხდომაზე, რომელიც გაიმართა 1920 წლის 8 ივლისს, ნ. მუსხელიშვილი არ ესწრებოდა (მისი ხელმოწერა ოქმზე არ ჩანს!) იგი ამ დროს ემზადებოდა საქართველოში გამოსამგზავრებლად.

ალბათ, ატომურ კომისიაში მუშაობამ მისცა მას საშუალება, დაკავშირებოდა ექსპედიციას, რომელსაც უნდა შეესწავლა ვლადიკავკაზის მიდამოების მიწისქვეშა წყლებისა და წყარეობის რადიაქტივობა. შესაბამისი დოკუმენტი მისი, ექსპედიციაში მოვლინების შესახებ, დათარიღებულია 1920 წლის აგვისტოთი აქედან გამოდინარე ა/კ-ს ბოლო (ივლისის) სხდომების მუშაობში იგი არ მონაწილეობდა.

§1. 3. ნ. მუსხელიშვილის სადოქტორო-სადისერტაციო ნაშრომი

სამაგისტრო გამოცდების ჩაბარება პეტროგრადის უნივერსიტეტში, ტრადიციისამებრ რთული იყო, მით უფრო მაშინ, როცა ქვეყანა გადატრიალდა და თებერვლის ბურჟუაზიულმა რევოლუციამ გაიმარჯვა ახალგაზრდა მათემატიკოსი ნ. მუსხელიშვილი, 1917 წლის 24 მარტს იწყებს და 1919 წ 2 ივნისს ამთავრებს სამაგისტრო გამოცდების ჩაბარებას, მაგრამ იგი იმავდროულად სამაგისტრო დისერტაციაზეც მუშაობს. მართალია, 1914 წ. გ. კოლოსოვთან ერთად შესრულებული და 1915 წ პეტროგრადის ელექტროტექნიკური ინსტიტუტის შრომებში გამოქვეყნებული ნაშრომი· „დრეკადი წრიული დისკების წონასწორობა დაძაბულობით, რომელიც მოდებულია იმავე სიბრტყის წერტილებში“ [21] და 1916 წელს გამოქვეყნებული სტატია „სითბური დაძაბულობის შესახებ დრეკადობის თეორიის ბრტყელ ამოცანებში“ [22], საკმარისი იყო სამაგისტრო დისერტაციის დასაცავად, მაგრამ იგი ასე არ იქცევა. 1918 წლიდან იგი იწყებს კომპლექსური ანალიზის საკითხების

შემდგომ დამუშავებას, რომლებიც მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნას ამარტივებს და დაჰყავს იგი კოშის ტიპის ინტეგრალზე.

1918 წ. იგი აქვეყნებს ამ ციკლის პირველ 5 გვერდიან ნაშრომს პერმის ფიზიკა-მათემატიკური საზოგადოების ჟურნალში (Ж.Ф.М.О. при Пермском университете) [5].

აქ უნდა აღვნიშნოთ, რომ პერმის უნივერსიტეტი ითვლებოდა პეტროგრადის უნივერსიტეტის ფილიალად და პროფესორ-მასწავლებელთა პერსონალი რევოლუციით შობილი, ახლად დაარსებული უნივერსიტეტისა, ძირითადად პეტროგრადიდან იყვნენ მივლინებული ამ ქალაქში, ფიზიკა-მათემატიკური ფაკულტეტის ისეთი გამოჩენილი მოღვაწეები, რომლებთანაც მანამდეც და შემდგომ ნ მუსხელიშვილი მეგობრობდა, როგორებიც იყვნენ ა.ა ფრიდმანი, ი დ. ტამარკინი, ი. გ. ვინოგრადოვი, ბეზიკოვიჩი და სხვები პერმის უნივერსიტეტის და ჟურნალის ძირითადი ბირთვი იყო.

ჟურნალში დაბეჭდილი სტატიის „ჰარმონიული ფუნქციის განსაზღვრის შესახებ კონტურზე მისი მოცემის დროს“ სქოლიოში ავტორი აღნიშნავდა, რომ ვრცელი სტატია აღნიშნული პრობლემის შესახებ უნდა დაბეჭდილიყო ჟურნალის შემდგომ ნომერში ჟურნალის მეორე და ბოლო ნომერი გამოვიდა 1919 წელს შემცირებული ფორმატით, რომელშიც ნ მუსხელიშვილის სტატია არ დაბეჭდილა აღნიშნული თემატიკიდან ნ. მუსხელიშვილის ვრცელი სტატია დაიბეჭდა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიის მოამბეში აკად ვ. სტეკლოვის წარდგინებით სათაურით "Sur Integration de lequation biharmomque" [6] მაგრამ ძირითადი ნაშრომი ამ ციკლის სტატიებიდან, რომელიც უნდა გამოქვეყნებულიყო პერმის ფიზიკა-მათემატიკური საზოგადოების ჟურნალში, საერთოდ არ დაბეჭდილა, როგორც ამის შესახებ ზემოთ ვწერდით.

ბიჰარმონიული განტოლების ამოხსნის კომპლექსურ წარმოდგენას და კოშის ტიპის ინტეგრალს, ნ. მუსხელიშვილი, უპირველეს ყოვლისა, იყენებს მის ზემოთ მითითებულ გამოუქვეყნებულ შრომაში, ჰიდროდინამიკის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისათვის, რომელიც შემდგომ შევიდა მის დისერტაციაში. კერძოდ, ის თავისი მეთოდით განიხილავს წრიული და ელიფსური პროფილის მქონე სხეულების მოძრაობას იდეალურ სითხეში და გამოჰყავს სიჩქარის გამოსათვლელი ფორმულები, რომლის სისწორის შესამოწმებლად მას სჭირ-

დება მოსკოვის უნივერსიტეტის ცენტრალურ აეროდინამიკურ ლაბორატორიაში მუშაობა. ამას გარდა, როგორც ჩანს, ნ. მუსხელიშვილი დიდი ხანია ფიქრობს პ. ჩებიშევის მიერ 1856 წ. დასმული საკითხის - გეოგრაფიული რუკების შედგენისას „მინიმუმის პრობლემის“ შესახებ, რომელიც კერძო შემთხვევისათვის ამოხსნა დ. გრავემ 1896 წ. თავის სადოქტორო დისერტაციაში.

ჩვენთვის უცნობია იმოგზაურა თუ არა ნ მუსხელიშვილმა ქ. კიევსა და ქ. მოსკოვში ივლის - აგვისტოს თვეში. მანამ, 1920 წ. 9 იანვარს მის სახელზე, პეტროგრადის უნივერსიტეტის რექტორის მიერ გაცემული მოწმობით ვგებულობთ: „ამის წარმომდგენი პეტროგრადის უნივერსიტეტის მასწავლებელი ნ.ი. მუსხელოვი მივლინებულა ქ. მოსკოვში 2 კვირით, მოსკოვის უნივერსიტეტის აეროდინამიკურ ლაბორატორიაში სამუშაოდ“ რაც უეჭველად ამტკიცებს ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ექსპერიმენტული შემოწმებით მის დაინტერესებას. ცხადია, ეს ვითარება უნდა ასახულიყო მის პირველ მონოგრაფია - დისერტაციაში, რომელშიც შესულია ძირითადი შედეგები სწორედ ზემოთ მითითებული გამოუქვეყნებელი შრომის ხელნაწერისა. როგორც ირკვევა, იმ ძნელბედობის დროს ნ. მუსხელიშვილმა ვერ მოახერხა დასახული ამოცანის შესრულება.

შევნიშნავთ, რომ ნ. მუსხელიშვილი ამ დროს მიწვეული იყო პეტროგრადის სახელმწიფო ოპტიკური ინსტიტუტის დირექტორის პროფ. დ ს. როჟდესტვენსკის თავმჯდომარეობით შექმნილ „ატომური კომისიის“ შემადგენლობაში, რომელშიც თავიდან შედიოდა 8 ძირითადი წევრი: ვ. ბურსიანი, ა. იოფე, ა. კრილოვი, ი. კრუტკოვი, ნ. მუსხელიშვილი, დ. როჟდესტვენსკი, ა. ტუდოროვსკი, კ. ფრედერიკსი (მაისის თვიდან მათ დაემატათ ი. ტამარკინი და ა. ფრიდმანი). ატომურმა კომისიამ ოფიციალურად მუშაობა დაიწყო 1920 წ. 21 იანვარს და დაამთავრა 6 აგვისტოს, რომლის მიმდინარეობის დროს ნ. მუსხელიშვილი სამჯერ წარსდგა კოლეგების წინაშე საინტერესო მოხსენებებით ატომის ბორი-ზომერფელდის მოდელის გათვლის ორიგინალური მეთოდების დამუშავებასთან დაკავშირებული საკითხებით, რასაც პირდაპირი კავშირი ნ. მუსხელიშვილის ძირითად თემატიკასთან ჰიდრო-აერო დინამიკისა და დრეკადობის თეორიის ბრტყელ ამოცანებთან არ ჰქონია.

ცხადია, ნ. მუსხელიშვილს სადოქტორო დისერტაციის მთელი მასალა ამ დროისათვის ხელთ ჰქონდა. საჭირო იყო მისი მთლიანობაში მოყვანა, რაც დროსა და მშვიდ ატმოსფეროს მოითხოვდა.

იგი გარკვეული არჩევანის წინაშე იდგა 1920 წ. აგვისტოს არდადეგების დროს: ან პეტროგრადის უნივერსიტეტში დარჩენა, ბრწყინვალე სამეცნიერო კარიერა, აკადემიკოსების ა.ა. მარკოვის, ვ. სტეკლოვის და მათი მოსწავლეების გარემოცვაში მათემატიკური მეცნიერების მწვერვალებისაკენ უმოკლესი გზა, ან ახლად გახსნილი თბილისის უნივერსიტეტში ნულიდან დაწყება ყველაფრისა. და მაინც, პატრიოტულმა გრძნობამ, საყვარელი სამშობლოს გასაჭირის გათავისებამ განსაზღვრა მისი შემდგომი ნაბიჯი. იგი 1920 წ. სექტემბრის 20-დან თბილისის უნივერსიტეტშია, ხოლო პროფესორთა საბჭოს 1920 წ 15 ოქტომბრის №19 ოქმის ჩანაწერიდან ვგებულობთ: „ესწრებოდნენ რექტორი ი. ჯავახიშვილი: პროფესორები კ. კეკელიძე, ა. ბენაშვილი, ა ალადაშვილი, ე - თაყაიშვილი, გ. ახვლედიანი, შ. ნუცუბიძე, დ. უზნაძე, გ. ჩუბინიშვილი, ა შანიძე, ა. რაზმაძე, ნ. სალტიკოვი, ი. მოსეშვილი, ი. ბერიტაშვილი, ა. ჯავახიშვილი, ა დიდებულიძე, ს. ქურდიანი, ა. ნათიშვილი, გ. მუხაძე, ი თიკანაძე, ს. ამირეჯიბი, დოც. ა. ხარაძე.

განიხილეს: სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის შუამდგომლობა, არჩეულ იქნას თეორიული მექანიკის კათედრაზე პროფესორის მოადგილედ ბ-ნ ნიკო მუსხელიშვილი.

შენიშვნა: რადგანაც უნივერსიტეტის წესდების ძალით არ შეიძლება ვისიმეს პროფესორად არჩევა, თუ ხარისხი არა აქვს, ამიტომ კენჭი ეყარა დოცენტობაზე.

დაადგინეს: არჩეულ იქნას ბ-ნ ნიკო მუსხელიშვილი დოცენტად (17 თეთრი, 1 შავი, ერთმა თავი შეიკავა), პირველი სექტემბრიდან. წინადადება მიეცა ფაკულტეტს აღძრას შუამდგომლობა საბჭოს წინაშე, რათა დოც. ნიკო მუსხელიშვილს, როგორც კათედრის გამგეს, დაენიშნოს პროფესორის ჯამაგირი [24].

სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის განყოფილების დეკანის ა ბენაშვილის და მდივნის ა. ხარაძის განმეორებით შუამდგომლობაზე, რათა დოცენტ ნ. მუსხელიშვილს, როგორც კათედრის გამგეს, მიეცეს პროფე-

სორის ჯამაგირი, 1921 წ. 24 ნოემბერის საბჭოს სხდომაზე, თავისი გადაწყვეტილების საპირისპიროდ, ამჯერად ადგენს: „ყველა დოცენტებს გამოეწეროთ დოცენტის ჯამაგირები“ [24, 1-65. ოქ. №97].

ჩვენ ამჟამად არ გვაინტერესებს მიზეზი, თუ რატომ შეიცვალა შეხედულება საბჭომ ნ. მუსხელიშვილის მიმართ, მაგრამ ერთის მხრივ ამ გადაწყვეტილებამ გაანაწყენა და მეორე მხრივ დააჩქარა ნ. მუსხელიშვილი, დროულად გაეფორმებინა სადისერტაციო ნაშრომი.

1920/21 სასწავლო წელი ნ. მუსხელიშვილისათვის ყველაზე მძიმე იყო ახალი ვითარებისა და ახალი კოლეგების მიმართ ადაპტირების თვალსაზრისით. მიუხედავად ამისა, 1921 წ. 19 სექტემბრისთვის ფრანგულ ენაზე დაწერილი დისერტაციის „კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი პრობლემის გადასაწყვეტად“ მზად იყო. მონოგრაფიის ხელნაწერზე ნ. მუსხელიშვილი 1921 წლის ზაფხულის არდადეგებზე მუშაობდა სოფ. ბოგვში (თეთრი წყაროს რაიონი) ნათესავების ოჯახში, რადგან ამ დროს დედულეთი - მაწევანი (წალკის რაიონი) და ბრეთი (ქარელის რაიონი) როგორც მემამულე გენერლების მამულები იავარქმნილი იყო [1, გვ. 15-17].

მონოგრაფიის დაწერის ჩანაფიქრი ნ. მუსხელიშვილს პეტროგრადშიც ექნებოდა, მაგრამ ძნელმა და დრამატული მოვლენებით გადატვირთულმა დრომ ამის საშუალება არ მისცა.

როგორც ჩანს, ფრანგულ ენაზე მონოგრაფიის დაწერის იდეა საბოლოოდ ჩამოუყალიბდა მას საქართველოში ჩამოსვლის შემდეგ, როცა ევროპასთან და საფრანგეთთან კულტურულ-მეცნიერული ურთიერთობა იმდროინდელი საქართველოსი თავიდანვე მოწესრიგებულად ითვლებოდა. წინასიტყვაობაში, რომელიც წიგნს ქართულ და ფრანგულ ენაზე ახლავს, ჩვენ ვგებულობთ მისი შექმნის ისტორიას, რომელიც საინტერესოა მრავალმხრივ. ჩვენ მას მოვიყვანთ მცირეოდენი შემოკლებით:

„ჩემი მიზანი იყო, რომ ეს წიგნი პირველად ქართულად გამომეცა, და შემდეგ იგი მემუარის სახით ერთ-ერთ უცხოეთის ჟურნალში დამებეჭდა.

მაგრამ, გარეშე მიზეზებმა, რომლებმაც ერთბაშად შეგვაწყვეტინეს წესიერი ურთიერთობა ევროპასთან და თითქმის შეუძლებელი გახდა დაბეჭდი-

ლიყო ამოდენა მემუარი უცხოეთში, მაიძულა აქვე გამომეცა ეს შრომა ისეთ ენაზე, რომელიც ყველა მათემატიკოსისათვის გასაგებია .

ჩემი კვლევა-ძიების შედეგები ნაწილობრივ უკვე გამოქვეყნებულია სხვადასხვა ჟურნალებში: კერძოდ, არსებითი ნაწილი ორი უკანასკნელი თავისა მოთხრობილი იყო ჩემს შენიშვნაში "Sur l'integration de l'equation biharmonique", რომელიც აკადემიკოსმა სტეკლოვმა რუსეთის სამეცნიერო აკადემიას წარუდგინა დასაბეჭდად; წინამდებარე შრომაში მოყვანილი გამოკვლევა გვარიანად არის დამატებული, რადგანაც აქ შემოტანილია სპეციალური სახის მრუდხაზიანი კოორდინატები, რომლებიც გვიადვილებენ გამოთვლას გამოყენების მიზნით.

ორიოდე სიტყვა კიდევ იმის შესახებ, თუ რა პირობებში მიხდებოდა ამ წიგნის დაწერა და დაბეჭდვა.

1914 წლიდან მოყოლებული არც ერთ გერმანულსა, ხოლო 1917 წლიდან არც ერთ ევროპულ გამოცემას, საზოგადოდ ჩვენამდე არ მოუღწევია (გარდა თითო-ოროლა ცალკე წიგნაკისა) და ამიტომ მე საშუალება არ მქონდა ანგარიში გამეწია სპეციალური ლიტერატურისათვის აღნიშნული წლებიდან, თანაც წიგნი იწყობოდა და იბეჭდებოდა მეტის-მეტად ძნელ პირობებში. მხოლოდ პროფესორ ანდრია რაზმაძის თაოსნობით არის, თუ რომ დღეს ჩვენში რთული ფორმულებიანი მათემატიკური თხზულების დაბეჭდვა ხერხდება. ამიტომ მოხარული ვარ გადავუხადო მას ჩემი მადლობა ტექნიკურ დაბრკოლებათა დაძლევისთვის.

ჩემს მოვალეობად ვთვლი უღრმესი მადლობა გამოვუცხადო ამ წიგნის დაბეჭდვისათვის უნივერსიტეტის პროფესორთა საბჭოს, განსაკუთრებით ბატონ რექტორს, პროფესორს ი. ჯავახიშვილს იმ ცხოველი ყურადღების გამო, რომელსაც იგი იჩენდა ამ წიგნისადმი.

ფრანგული ენის ლექტორმა, ქალბატონმა ელისაბედ ორბელიანმა ვალი დამდო ფრანგული ტექსტის გადათვალიერებით. ქალბატონმა ნინო დიასამიძემ, ჩვენი უნივერსიტეტის სტუდენტმა, დიდი დახმარება გამიწია ხელთნაწერის სასტამბოდ დამზადებაში. ჩემმა მეგობარმა, დოცენტმა არჩილ ხარაძემ გადაიკითხა უკვე დაბეჭდილი თაბახები და აღნუსხა კორექტული შეცდომები... ყველას ჩემი გულწრფელი მადლობა.

ტექსტში ქართული და რუსული გვარების ტრანსკრიფციის დროს მე ვხელმძღვანელობდი ჩეხური წესით, რომელიც მიღებულია მათემატიკურ მეცნიერებათა ენციკლოპედიის ფრანგულ გამოცემაში...

ტფილისი, 3 აპრილი, 1922 წ. ნიკო მუსხელიშვილი". [8, გვ. 3]

ამჟამად, რომ არაფერი ვთქვათ დიდი ივანე ჯავახიშვილის შესახებ, უპ. ყოვლისა პროფ. ან. რაზმაძის დამსახურებაზე ორიოდე სიტყვაა სათქმელი. 1920 და 1922 წლებში იგი აქვეყნებს ორ წიგნს „მათემატიკური ანალიზის შესავალს" და „ინტეგრალურ აღრიცხვას". პროფესორთა საბჭოს მისამართით 1922 წ. 18 მაისს იგი წერს: „სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამგეობას! პროფესორ ან. რაზმაძის თხოვნა. ჩემი წიგნის „ინტეგრალური აღრიცხვის კურსის" დაბეჭდვის საქმისთვის საჭიროა.

მუშებისთვის ფულის გაცემა საჩუქრის სახით.

მასალის დაბეჭდვა საწერ მანქანაზე.

ზოგიერთი ნიშნის გაკეთება და ასოების ჩამოსხმა. ამ მიზნისთვის დამჭირდება ორი მილიონი მანეთი გთხოვთ გასცეთ განკარგულება, მომცენ ეს ფული. ან. რაზმაძე" [24. 471, 1, 80, ფ. 43].

მანამ [29.3.1921 წ.] კი სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამგეობას მიმართავდა თხოვნით: „ჩემი წიგნის „ინტეგრალური აღრიცხვის სახელმძღვანელოს დასამთავრებლად მესაჭიროება ერთი მილიონი მანეთი" (იქვე ფ, 36). როგორც ჩანს ან. რაზმაძემ თავისი წიგნების ბეჭდვისას შექმნა ის აუცილებელი მინიმუმი, რაც რთული მათემატიკური ფორმულების დასაბეჭდად იყო საჭირო და ამისთვის მაშინდელ ბონებზე მილიონები გამოეყო უნივერსიტეტში მას.

ანალოგიურად, უნივერსიტეტის გამგეობის 1921 წ. 8 დეკემბრის გადაწყვეტილებით დოც. ნ. მუსხელიშვილის განცხადების საპასუხოდ „გადაცემულ იქნა 450 ათასი მანეთი მისი წიგნის კლიშეების გამოსახსნელად და მიეცა კარგი ღირსების 4 ფუთი ქაღალდი საზღვარგარეთ გასაგზავნი ეგზემპლარების დასაბეჭდად.

1922 წ. 7/VI-ს კი დოც. ნ. მუსხელიშვილი სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამგეობას მიმართავს შემდეგი შინაარსის განცხადებით: „გიდგენთ რა ანგარიშს ჩემი მონოგრაფიის დაბეჭდვის შესახებ, გთხოვთ აღნიშნული ჯამის გარდა მომცეთ სათანადო თანხა კორექტორის (ქ-ნ ე. ორბელიანის) და ასო-

თამწყობების დასაჯილდოებლად. მე წარმოდგენილი მაქვს, რომ პირველს უნდა მიეცეს 1,5 მლნ, მეორეს 1 ან 1,5 მილიონი.

ვალდებული ვარ აღვნიშნო, რომ ასოთამწყობებმა მშვენივრად აასრულეს თავისი მოვალეობა და წიგნს ისეთი სახე მიცეს, რომ იგი არ ჩამოუვარდება ევროპულ წიგნებს გარეგნულად [24. 471,1,80, ფ, 89]. წიგნის შინაარსზე და მის მოცულობაზე წარმოდგენას მოგვცემს სარჩევის ნაწილი, რომელიც ეძღვნება ჰიდროდინამიკას. თარგმანს მთლიანად ვათავსებთ აქ.

„კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი პრობლემისათვის“.

სარჩევი

წინასიტყვაობა V-VIII

შესავალი

თავი II

ლოგარითმული პოტენციალთა თეორიის მარტივი გამოყენება ჰიდროდინამიკაში

1. ჰარმონიული ფუნქციების გამოსახვა კოპლექსური ცვლადის ფუნქციათა საშუალებით
2. გაგრძელება
3. განზოგადოება უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მიდამოში
4. აღნიშვნები

II. წრიული არეს ფუნდამენტური პრობლემები

5. წრიული არეს ფუნდამენტური პრობლემების შესახებ
6. სასაზღვრო პირობის გარდაქმნა
7. $\varphi(\xi)$-ს-თვის დიფერენციალური განტოლება
8. მუდმივების განსაზღვრა
9. გაგრძელება
10. შენიშვნა

11. მაგალითი: ლოგარითმულ პოტენციალთა თეორიის შერეული ამოცანა წრიული არესთვის

12. ნეიმანის ამოცანა წრისათვის

13. დირიხლეს ამოცანა წრისთვის

14. შენიშვნები ინტეგრალის გამოთვლაზე, რომელიც ფიგურირებს მიღებულ ფორმულებში

15. მაგალითები

16. გრინის ფუნქცია შერეული ამოცანისთვის

III ფუნდამენტური (ძირითადი) ამოცანა ნებისმიერი არესთვის

17. ლოგარითმულ პოტენციალთა თეორიის ფუნდამენტური ძირითადი ამოცანა

18. მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევები

IV. გამოყენებითი ჰიდროდინამიკის ფუნდამენტური ამოცანა

19. ამოცანის დასმა

20. კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის შემოტანა

21. სასაზღვრო პირობის გარდაქმნა

22. ამონახსნი სასრულო არესათვის

23. ამონახსნი უსასრულო არესთვის

24. მრუდწირული კოორდინატები

25. მაგალითი I. მოძრაობა სითხისა, რომელიც გარს უვლის მყარ ცილინდრულ სხეულს ან მოთავსებულია მასში

26. მაგალითი II. სითხის მოძრაობა გრიგალური წირის (ძაფის) არსებობისას

27. ელიფსური კონტური

28. ზოგიერთი სხვა მარტივი კონტური (საზღვარი) [8]

ავტორის შენიშვნები

1) ჩვენ აქ ვიძლევით ფრანგული ტექსტიდან თავებისა და პარაგრაფების გვერდების ციტირებას, რომელიც არ ემთხვევა პროფ. ხ. ინასარიძის მიერ ამ მონოგრაფიის თარგმანის (1992 წ) შესაბამის გვერდებს, როგორც მონოგრაფიის სარჩევიდან ჩანს, ნ. მუსხელიშვილის მიერ შემუშავებული მეთოდები იძლეოდა ჰიდრო-აერო დინამიკისა და დრეკადობის ბრტყელი ამოცანების ეფექტური ამოხსნის საშუალებას. მონოგრაფიაში, ამ საკითხებზე კომპაქტურად, ეკონომიურად და მეცნიერების მსოფლიო სტანდარტების დონეზე იყო გადმოცებული საკითხები 160 მცირე ფორმატის გვერდებზე

მონოგრაფია 1922 წ. აპრილის ბოლოს დაიბეჭდა უნივერსიტეტის ტიპოგრაფიაში და მაშინვე დაეგზავნა რუსეთის და ევროპის უნივერსიტეტებსა და შესაბამის სპეციალისტებს. 1922 წ. 7 ივნისს ნ. მუსხელიშვილი ანგარიშს აბარებს წიგნის გამოცემის შესახებ უნივერსიტეტის გამგეობას, ხოლო იმავე წლის 16 ივნისს პროფესორთა საბჭოს სხდომის №7 ოქმში წერია": განიხილეს „სამათემატიკო-საბუნებისმეტყველო განყოფილების მოხსენებანი. დამტკიცებულ იქნას პროფესორის მოვალეობის აღმსრულებლად ა/წ 25 მაისიდან დოც. ნ. მუსხელიშვილი.

შენიშვნა: დოცენტი ნ. მუსხელიშვილის მიერ წარმოდგენილი იქნა ფაკულტეტში სადოქტორო დისერტაცია, რომელიც ფაკულტეტის მიერ მიღებული იქნა თანახმად ა. რაზმაძის მოხსენებისა საჯარო დაცვა დისერტაციისა გადადებულ იქნა, ვინაიდან უნივერსიტეტში არ აღმოჩნდა გამოყენებითი მათემატიკის სპეციალისტი.

დაადგინეს: ნიკო მუსხელიშვილი არჩეულ იქნა პროფესორის მოვალეობის აღმსრულებლად 16 ხმით, 5 ხმის წინააღმდეგ", უნივერსიტეტის პროფესორთა საბჭოს წევრი ამ დროს 31 იყო) [1, ფ. 168].

ცხადია, მონოგრაფიის წარდგენას სადოქტოროდ, ამ შემთხვევაში წმინდა ფორმალური ხასიათი ჰქონდა, ვინაიდან უნივერსიტეტში იმჟამად მართლაც არ იყვნენ გამოყენებითი მათემატიკის ისეთი სპეციალისტები, როგორებიც იყვნენ ერთ დროს (1920/21 ს.წ) თბილისის უნივერსიტეტის პროფესორები: ნ.ნ. სალტიკოვი და ლ.ს ლეიბენზონი.

ამასთან, წიგნზე რეცენზიები, ასე სასწრაფოდ, არ შეიძლებოდა ფაკულტეტზე შემოსულიყო. ნ. მუსხელიშვილიც, ამჯერად მეტს არც მოითხოვს, მას

კათედრის პროფესორად ირჩევენ და მთელი არსებით განაგრძობს სამეცნიერო-პედაგოგიურ მოღვაწეობას. 1922 წლის ბოლოს, რექტორისადმი, პროფ. ნ მუსხელიშვილის მოღვაწეობის შესახებ წარდგენილ ანგარიშში ვკითხულობთ:

„1. კითხულობდა ლექციებს თეორიული მექანიკიდან, დიფერენციალურ შეთანასწორებათა თეორიიდან და ანალიზური გეომეტრიიდან

2. დაბეჭდა მონოგრაფია: "Applications des... Physique Mathematique".

3. დაამზადა დასაბეჭდად შრომა: Sur l'equilibre des cops elastiques multiplement connexes" (იბეჭდება „ჩვენი მეცნიერება"-ში).

4. დაბეჭდა (ხელნაწერის მაგივრად) „ანალიზური გეომეტრიის კურსი (I ნაწ.) რუსულად.

5 ამზადებდა დასაბეჭდად „თეორიული მექანიკის კურსს" (ქართულად)

6. ღებულობდა მონაწილეობას სატერმინოლოგიო კომისიაში.

6. მუსხელიშვილი [1, ფ 49].

უნდა შევნიშნოთ, რომ მე-3 პუნქტში მოყვანილი შრომა დაიბეჭდა „ტფილისის უნივერსიტეტის მოამბის" ტ. 3. 1923 გვ. 17-26-ში შეცვლილი სათაურით: „Sur lequilibre des corps elastiques soumis a' l'action de la chaleur", ხოლო მითითებული ანალიზური გეომეტრიის კურსი დაიბეჭდა 1922 წ. სახელწოდებით „Лекций по Аналитической Геометрии"

რაც შეეხება „თეორიულ მექანიკას", მის შესახებ, ნ. მუსხელიშვილის მიერ 1923 წ. 3 მაისს თბილისიდან ლონდონში, თ. ნიკოლაძისადმი გაგზავნილ წერილში ვკითხულობთ· „კინემატიკა ჯერ-ჯერობით გადავდევი, დავწერე რა ნახევარი, ახლა მე დაკავებული ვარ დიდი სამეცნიერო ნაშრომით, რომელზედაც ამას წინათ ვწერდი, რომელიც მოძღვნილი იქნება შენდამი ვფიქრობ, რომ ძირითადი საკითხები ამოვხსნა ჯერ კიდევ უცხოეთში წასვლამდე. იქ შეიძლება დავბეჭდო ამ შრომის ზოგიერთი ნაწყვეტი

ამჟამად, მიუხედავად გადაღლილობისა, მე ძლიერ ამაღლებული განწყობილება მაქვს და ვფიქრობ კარგი რამ უნდა გამოვიდეს

ამას გარდა მელიქიშვილის კრებულში იბეჭდება ჩემი ერთი სტატია: "Sur l'equilibre des corps multiplements connexes et?", აგრეთვე საკმაოდ

საყურადღებო, მაგრამ მცირე ფორმის - სულ 10 გვერდი. მე ამ ღამით უნდა გავასწორო მისი კორექტურა".

როგორც ამ წერილიდან ჩანს, პ. მელიქიშვილის დაბადებიდან 70 წლისთავისადმი მიძღვნილ კრებულში დასაბეჭდად წარდგენილი სტატიის სათაურში შესწორება ნ. მუსხელიშვილს კორექტურის გასწორების დროს შეუტანია და ამ დროიდან დაწყებული მის შემოქმედებაში ახალი მნიშვნელოვანი ეტაპი იწყება დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანების გადაწყვეტის გზაზე

1922 წლის მეორე ნახევრიდან პედაგოგიური ფაკულტეტის (დეკანი პროფ. კ. კეკელიძე) და ნ. მუსხელიშვილის სახელზე შემოდის გამოხმაურებანი და რეცენზიები მონოგრაფია-დისერტაციაზე, რაც ერთგვარ გაოცებას და აღფრთოვანებას იწვევს წიგნის ავტორის ხალასი მათემატიკური ნიჭის შესახებ, ფაკულტეტის ზოგიერთი მუშაკის შეგნებაში და ცვლის მისდამი ინდიფერენტულ დამოკიდებულებას. ნ. მუსხელიშვილი გულისტკივილით წერს მისი გულის მესაიდუმლე თ. ნიკოლაძეს ლონდონში, რომ რეცენზიების მოსვლამდე „ტფილისის უნივერსიტეტის მოამბის" რედაქტორი პროფ ა შანიძე საეჭვოდ ეკითხება მას, იმის შესახებ არის თუ არა დასაბეჭდად წარდგენილ მის სტატიაში ახალი შედეგები და ფაკულტეტის დეკანი პროფ. კ. კეკელიძე უწუნებდა სადისერტაციო ნაშრომს იმ მხრივ, რომ მისი მოცულობა არ მიაჩნია საკმარისად, საძიებელი ხარისხისადმი.

მაგრამ განყოფილების, საპედაგოგიო ფაკულტეტის და პროფესორთა საბჭოს აზრი მკვეთრად იცვლება ცნობილი მეცნიერების რეცენზიების მიღების შემდეგ. ერთ-ერთი წერილი თ ნიკოლაძისადმი, რომელიც გაგზავნილია ლონდონში, 1923 წ. 4 აპრილს, მიძღვნილია ამ თემისადმი და ჩვენ მთლიანად მოვიტანთ მის ქართულ თარგმანს: „... სამი დღის წინათ, მე მივიღე ერთი წერილი პარიზიდან, რომელსაც ჩემთვის უდიდესი მნიშვნელობა აქვს. ეს არის საფრანგეთის უთვალსაჩინოესი მათემატიკოსის ჟ. ადამარის წერილი .. ის უთვალსაჩინოესი სპეციალისტია სწორედ იმ დარგში, რომელშიდაც ვმუშაობ მე და მის შეხედულება ჩემს წიგნზე (ფრანგულ ენაზე) ჩემთვის ძალზე ფასეული იყო. მე უკვე დიდი ხანია გავუგზავნე მას ჩემი წიგნი, მაგრამ პასუხი არ მიმიღია. მე ამით ძალზე შეწუხებული ვიყავი. ჩემთვის აუცილებელი იყო ობიექ-

ტური მონაცემები, რათა დავრწმუნებულიყავი, რომ მე და ჩემი წიგნი რაღაცა ვღირვართ.

ეს საჭირო იყო სრულიად უცხო ადამიანისაგან, რომელსაც მე არასდროს შევხვედრივარ. ადამარი ბოდიშს იხდის, რომ წერილის მოწერა დააგვიანდა, რადგანაც „Votre travail e'tait de nature a'hecessiter necessiter unexamia asset approtndie" და მას აქამდე არ ჰქონდა საკმარისი თავისუფალი დრო. სააღდგომო არდადეგების დროს მას წაუკითხავს ჩემი წიგნი "et jen aiune impression tris javrable. Ie resultat obteinyet". შემდეგ მოდის უფრო დეტალური განხილვა. ის იმდენად თავაზიანია, რომ ჩემი საკითხისადმი უახლოესი ლიტერატურაც კი შეაგროვა.

... უპირველეს ყოვლისა მე მახარებს, რომ ჩემი მეთოდი არავის აქამდე არ მიუკვლევია (ლენინგრადში მე ხომ, მხოლოდ 1917 წლამდე გამოსული ლიტერატურის გაცნობა შემეძლო). მეორეც ის, რომ ადამარი, რომელმაც ამ დარგში თვითონ დიდი წვლილი შეიტანა, თვლის ჩემს შედეგებს მნიშვნელოვანს და საინტერესოს. ამას გარდა ადამარის წერილიდან ჩანს, რომ ერთი საკითხი, რომელსაც მე ვაყენებ, მაგრამ არ ვიძლევი ამოხსნას, ძალიან მნიშვნელოვანს წარმოადგენს და საჭიროა მისი შესწავლა. ეს საკითხი, ჩანს არავის არ წამოუყენებია და ადამარი მას თვლის ძალიან ძნელად და საინტერესოს, მაგრამ მე თითქმის ყველაფერი მქონდა გაკეთებული მისი ამოხსნისათვის და მხოლოდ „ტერმინოლოგიურმა მეცადინეობებმა" დროებით შეწყვიტეს ჩემი იდეის განვითარება, მაგრამ ახლა, განახლებული ძალით მოვკიდებ მას ხელს".

ადამარის აღნიშნული წერილი, დიდი ხნის ძებნის შემდეგ ნ. მუსხელიშვილის პირად არქივში იყო ნაპოვნი და აქვე მოგვყავს მისი ქართული თარგმანი: „პარიზი, 1923 წ. 6 იანვარი.

მოწყალეო ბატონო![4]

გთხოვთ მომრტეოთ იმისთვის, რომ ასე დიდხანს გალოდინეთ ჩემი პასუხისთვის. თქვენი შრომა მოითხოვდა ღრმად შესწავლას, მე კი არ მქონდა არც ერთი წუთი თავისუფალი დროის (თუ შეიძლება ასე გამოვთქვათ) იმ მომენტიდან, რაც მე თქვენი გზავნილება მივიღე.

[4] წერილების და ზოგიერთი დოკუმენტების მიკვლევაში ფასდაუდებელი დახმარება გაგვიწია ბატონი ნიკოს შვილიშვილმა ფიზიკა-ქათემატიკურ მ/კ ქალბატონმა მ გ მუსხელიშვილმა-გომელაურმა, რისთვისაც მას უღრმეს მადლობას მოვახსენებ

ახლა მე შემიძლია გადავხედო თქვენს ნაშრომს და შთაბეჭდილება ძალზედ კეთილსასურველია. შედეგები და მეთოდი, რომლითაც ისინი არიან მიღებული, მე მიმაჩნია ერთობ საინტერესოდ.

საკითხი, რომელიც თქვენ აღძარით მონოგრაფიის 42-ე პუნქტში, ასევე ძალზე საინტერესოდ მიმაჩნია, მით უფრო, რომ როგორც ვფიქრობ, ეს უბრალო საკითხი არ არის; რამდენადაც მე ვიცი, ის აქამდე ამოხსნილი არ არის. მაგრამ, იმისათვის, რომ საბოლოოდ დარწმუნებული ვიყოთ, სასურველი იქნებოდა გადაგეთვალიერებინათ ზოგიერთი შრომა ამ თემაზე, მათ შორის რომლებიც 1907 წ. შემდეგ დაიწერა.

მე გადავხედე თქვენთვის Revue Semestvielle des Publications mathematiques და შევამჩნიე, რომ გარდა იმ შრომებისა, რომლის ციტირებაც თქვენ მოგყავს, არსებობს ზოგიერთი სხვაც, რომლებმაც თქვენ უნდა დაგაინტერესოთ. ესენია:

Lauricella, Lincei, 5^{0}se'rie, t. XVIII, 1e. 1909 p. 5-15.

Zaremba, Ann. Ec. Norm. Sup. 3, Serie; t. 26, 1908, p. 337-404.

Plemel, Jur. Mathem. und Rhys., t.18 (1907) p. 180.

Richardson, Transact of the Amer. Math. Society, t. 18, 1917, p. 489-518.

Couraut. Gott. Nachr. 1919, p. 255-264 (ძალიან ნიჭიერი ავტორია)

Bouligond, Comptes Ren., AC. Sei. T. 168 (1919).

Plancherel, Reunion de la Societi, Mathemat. Suisse, dsns l'Ensignement, Mathematique, t. XX, 1918-19. P. 443. (რიტცის მეთოდის გამოყენება).

სამწუხაროდ, მე შემეძლო მხოლოდ მომეძებნა აღნიშნული შრომების სათაურები და დრო არ მქონდა მათი შესწავლისათვის. თუ მე მომავალში მექნება თავისუფალი წუთები, რაც საეჭვოდ მიმაჩნია, მე მოვძებნიდი უფრო საჭირო ინფორმაციასაც, ხოლო მანამ გთხოვთ მიიღოთ ჩემგან თქვენდამი საუკეთესო და წრფელი სურვილები.

ჟ. ადამარი."(ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივი) [1].

რა თქმა უნდა, ჟ. ადამარის წერილი, რომელიც მას გამოუგზავნია 1923 წ. 6 იანვარს და თბილისში მოსულა 1 აპრილს, ძირეულად ცვლიდა საქმის ვითარებას. მით უფრო, ამ დროისათვის ნ მუსხელიშვილის უკვე მიღებული

ჰქონდა მისი პეტერბურგელი უფროსი კოლეგის პროფ. ი დ. ტამარკინის აღ-ფრთოვანებული პირადი ბარათი და აკად. ვ. სტეკლოვის და პროფ. ი.დ. ტა-მარკინის ერთობლივი რეცენზია მონოგრაფია-დისერტაციაზე. ეს უცნობი დო-კუმენტი, რომელიც აგრეთვე საოჯახო არქივიდანაა ამოღებული, მრავალმხრივ საინტერესოა და ჩვენ აქ მის თარგმანს მოვიტანთ მცირეოდენი შემცირებით: „გამოხმაურება ნ.ი. მუსხელოვის ნაშრომზე "Applications des integrales analogous a celles de Cauchy a quelques problems de la physique Mathematique"

$U=f$ (Dirichbet-ს ამოცანა)

ნ. ი. მუსხელოვის ნაშრომი მიძღვნილია მათემატიკური ფიზიკის ორი ძი-რითადი ამოცანისადმი, სახელდობრ Laplace-ის განტოლების $\Delta u = 0$ და ბიჰარ-მონიული განტოლების $\Delta\Delta u = 0$ ამონახსნის მოძებნის საკითხისადმი მოცემულ არეში, როცა მოცემულია აგრეთვე შესაბამის კონტურზე სასაზღვრო პი-რობები.

ორივე ამ საკითხისადმი არსებობს უამრავი ლიტერატურა. პირველი ამოცანა, რომლის დროს მოცემულია დამატებითი პირობა კონტურზე, გამოკ-ვლეული და ამოხსნილი იყო მთელ რიგ შრომებში მე-19 საუკუნის შუა წლებიდან დაწყებული, თანდათან ნაკლებ შევიწროებული და შეზღუდული დაშვებებისას. მათი ამოხსნის დროს, ფაქტიურად დამუშავებულ იქნა მათემა-ტიკური ფიზიკის მთავარი აპარატი, რომელიც შემდგომ გამოყენებულ იქნა სხვა ამოცანებისათვისაც და სხვათა შრომებში.

მაგრამ ზემოთ მითითებულ ზოგიერთ ნაშრომთა კაპიტალური ხასიათი-სა და მათში გამოყენებული მეთოდების ზოგადობის, სიღრმის და მრავალ-სახეობის მიუხედავად, არ შეიძლება არ აღვნიშნოთ, რომ უმეტესობა იმათგანი ყურადღებას იქცევს ძირითადად ჩვენ მიერ ზემოთ დასახელებულ 1-ლ ამოცანაზე, არსებობის თეორემებზე და ამონახსნის პოვნის ზოგად ხასიათზე, ზოგჯერ ძალიან კერძო შემთხვევაშიც კი, რომელიც გამოთვლების ჩატარებას პრაქტიკულად შეუძლებელს ხდის.

ამასთან, თუ პირველი საკითხი განტოლების $\Delta u = 0$ შესახებ შეიძლება ჩა-ითვალოს სრულიად გადაწყვეტილად, თუნდაც არსებობის თეორემის თვალ-საზრისით, მეორეს მიმართ, ესეც არ შეიძლება ითქვას. მიუხედავად მნიშვნე-ლოვანი რაოდენობის ლიტერატურისა (Zarembo, Korn, Hadamard, Almansi,

Boggio, Lauricella, Fredholm, Колосов, Коялович) თუ არ ჩავთვლით ზოგიერთ კერძო შემთხვევას, ამოცანა შეიძლება ჩაითვალოს სრულიად ამოხსნილად მხოლოდ სასრულო არესათვის, ხოლო უსასრულო არეებისთვის სასურველი სახით არაა გაანალიზებული ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის პირობებიც კი; ნამდვილი გამოთვლებისთვის აქ გაცილებით მცირეა გაკეთებული, ვიდრე პირველი კითხვისათვის. მიღებული ამონახსნები, ძალიან მარტივი შემთხვევების დროსაც კი დაიყვანება ძალიან რთულ გამოსახულებებზე და რაც მთავარია მათ არ აქვთ ცხადი სახე და სიმარტივე, რაც ეგზომ აუცილებელია კონკრეტული გამოკვლევების დროს.

ნ.ი. მუსხელიშვილის ნაშრომი დგას, როგორც განსაკუთრებული, ზემოთ ჩამოთვლილ გამოკვლევებს შორის. მას არ აქვს პრეტენზია ზოგადობის, უნივერსალობის შესახებ და არსებობის ზოგადი თეორემის მიხედვით ახალს ცოტას გვაძლევს.

მაგრამ, მით უფრო ფასეულად შეიძლება ჩავთვალოთ ის ნამდვილი გამოთვლების შესრულების თვალსაზრისით. ის გვაძლევს ფაქტიურად მარტივ ამოხსნას ყველა იმ შემთხვევისთვის, როცა განხილული არე კონფორმულად გარდაიქმნება წრეზე, რაციონალური ფუნქციების საშუალებით- შემთხვევა, რომელიც ძალზედ კერძოა არსებობის ზოგადი თეორემის თვალსაზრისით, მაგრამ საკმარისად ზოგადია პრაქტიკული გამოყენებისათვის.

სხვა შრომათა შორის, რომლებიც ასევე განეკუთვნება კერძო ამოცანებს, ნ.ი. მუსხელოვის ნაშრომი გამოირჩევა ერთი ძირითადი იდეის სისტემატური გამოყენებით, რომლითაც აქამდე არვის უსარგებლებია. კერძოდ Couchy (კოში) ინტეგრალის გამოყენებით. ნ.ი. მუსხელოვის მიერ გამოყენებული მეთოდი ძალზე მარტივია და თვალსაჩინო და ემყარება Couchy-ს ინტეგრალის თვისებებს, ამიტომაც მის მიერ მიღებული ამონახსნი (უმეტეს შემთხვევაში საბოლოო ფორმით) აგრეთვე მარტივი და თვალსაჩინოა გაანგარიშებისთვის და უშუალო გამოყენებისთვის.

ნ. მუსხელოვის ნაშრომი იყოფა ოთხ თავად: პირველი თავი ეძღვნება Couchy-ის ინტეგრალსა და კონფორმული გადასახვის ძირითადი თვისებების ახსნას, რომლებსაც ავტორი იყენებს შემდგომ თავებში.

მეორე თავში, მარტივი მაგალითის სახით, მითითებულია ზოგადი მეთოდის გამოყენება Dirichlet-ს, Neumana -ის და შერეული კლასიკური ამოცანებისთვის, როცა ზღვრულ პირობას აქვს სახე:

$$a(s)\frac{\partial u}{\partial x}+b(s)\frac{\partial u}{\partial y}+C(s)u=f(s)$$

კონტურზე, ამასთან ფუნქციები a,b,c, მათი წრეზე კონფორმული გადასახვისას წარმოგვიდგებიან, როგორც კოორდინატის რაციონალური ფუნქციები, - აგრეთე ჰიდროდინამიკის უფრო რთული ამოცანებისთვისაც. მის მიერ მიღებული ამონახსნები იმდენად მარტივია (განსაკუთრებით აღვნიშნავთ მუდმივი კოეფიციენტების შემთხვევას შერეული ამოცანისთვის გრინის ფუნქციის პოვნისას), რომ წარმატებით შეიძლება გადმოცემული იქნას კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ელემენტურ საუნივერსიტეტო კურსში; აქ უნდა მივუთითოთ, რომ ამოცანის ამონახსნი, რომელიც გადმოცემულია 82-84 გვ-ზე, სითხის მოძრაობის შესახებ ცილინდრში ან ცილინდრის გარსდინება სითხით, ძალწირების გრიგალების შემთხვევაში წარმოადგენს მხოლოდ მათემატიკურ ინტერესს, რადგან გააზრებული არ არის ამ წირის უძრაობის თუ გადაადგილების მახასიათებელი.

მესამე თავში მითითებულია ზოგადი მეთოდის გამოყენება ბიჰარმონიული განტოლების ინტეგრირებისათვის. განსაკუთრებით საინტერესოდ წარმოგვიდგება აქ ამონახსნი, რომელიც მიღებულია უსასრულო არესთვის ელიფსური ხვრელის მქონე სიბრტყის ან წრის რკალის ჭრილისთვის. გზადაგზა დგინდება ზოგიერთი უზუსტობანი, რომლებიც აქვს ამ დარგში Lauricella-ს მიერ შესრულებულ ერთადერთ ზოგად გამოკვლევას უსასრულო არეების შემთხვევაში.

ბოლოს, მეოთხე თავში მითითებულია ზოგადი მეთოდის - ბიჰარმონიული განტოლების ინტეგრებით მიღებული შედეგების გამოყენება დრეკადობის თეორიის ზოგადი ბრტყელი ამოცანებისთვის, როცა კონტურზე მოცემულია დეფორმაცია ან ძაბვა. ამასთან ამონახსნები უმარტივესი ფორმითაა მიღებული ახალი შემთხვევებისთვის, რომლებიც აქამდე არ ყოფილან გამოკვლეული.

გადავდივართ რა ნ. მუსხელოვის გადმოცემის დახასიათებაზე, უნდა ვაღიაროთ, რომ ის გამოირჩევა მნიშვნელოვანი სიცხადით და სიმარტივით, რაც ამსუბუქებს შრომის კითხვას და ნებას გვაძლევს რეკომენდაცია გავუწიოთ მას, როგორც მონოგრაფიას, დამწყები მათემატიკოსებისთვის.

მხოლოდ ზოგიერთ ადგილასაა გადმოცემა საერთოდ ძალზე შეკუმშული და სასურველი იქნებოდა მიღებული ამონახსნების უფრო დეტალური გამოკვლევა გეომეტრიული და მექანიკური თვალსაზრისით

ყველა ზემოთ ნათქვამის საფუძველზე არ შეიძლება არ ვაღიაროთ, რომ ნ. მუსხელოვის შრომა წარმოადგენს სასარგებლო წვლილს მეცნიერებაში და იგი სავსებით ღირსია იმ სამეცნიერო ხარისხისა, რომლის მოსაპოვებლად არის ის წარდგენილი.

აკადემიკოსი ვ. სტეკლოვი, პეტროგრადის უნივერსიტეტის პროფესორი, ი. ტამარკინი". [საოჯ. არქივი] [1]

მოტანილი ორი რეცენზია-რეკომენდაციის საფუძველზე პროფ. ნ. მუსხელიშვილს შეაქვს შემდეგი შინაარსის განცხადება „პედაგოგიური ფაკულტეტის სახელზე":

„ვადგენ რა ჩემს შრომას „Applications des integrales analogues a celles de Couchy a quelques problems de la Physique Mathematique" გთხოვთ მიიღოთ იგი, როგორც დისერტაცია მათემატიკის დოქტორის ხარისხის მოპოვებისთვის. ნ. მუსხელიშვილი, 17/IV 1923".

როგორც ვხედავთ, საპაექროდ თავისი მონოგრაფიის წარდგენა პროფ. ნ. მუსხელიშვილმა გადაწყვიტა ჟ. ადამარის წერილის მიღების შემდეგ. ამ ვითარებას დეტალურად აღწერს იგი თ. ნიკოლაძისადმი ლონდონში 16 მაისს გაგზავნილ წერილში: „შემოდგომაზე შედგება ჩემი დისპუტი, ოპონენტად დანიშნულია რაზმაძე და ხარაძე. მე არას გზით არ მინდოდა ამ „ბუფონადის" მოწყობა, მაგრამ უნივერსიტეტს ძალიან უნდა მისი ჩატარება. საქმე იმაშია, რომ ჩემი ოპონენტები სრულიად მოუმზადებლები არიან ამისთვის, ვინაიდან არც ერთი არ მუშაობს ჩემს მიერ განხილულ საკითხებზე. ამას გარდა სულერთი არ არის, ვიქნები მე დოქტორი (თბილისის უნივერსიტეტისა) თუ არა. ჩემი პატივმოყვარეობა ასე შორს არ მიდის. ჩემთვის საკმარისი იყო პეტროგრადის უნივერსიტეტის ფიზიკა- მათემატიკის ფაკულტეტის და ორი-სამი უცხოელი

ავტორიტეტების გამოხმაურება. ადამარის (Hadamand) გარდა მე მაქვს სტეკლოვის და ტამარკინის და ერთი ცნობილი გერმანელი მათემატიკოსის კორნის (Korn) გამოხმაურებები, მაგრამ უკანასკნელი ძალზედ მოკლეა კორნი მწერს უბრალოდ, რომ ჩემი წიგნი მას ძალიან აინტერესებს. ეს წერილი მე მივიღე 1/2 წლის წინათ.

ამასთან არის კიდევ ზეპირი გამოხმაურება ჩვენი პატივცემული კორნელი კეკელიძისა; როცა (გასულ წელს) მე მივართვი მას ჩემი წიგნი, მას იგი სრულებით არ მოეწონა - ძალზედ მცირე ფორმატისაა და სისქითაც თხელია. რა თქმა უნდა, მე მისთვის არ დამიწყია მტკიცება, რომ შემეძლო დამეწერა რამდენიმეჯერ სქელი წიგნი, მაგრამ მე მინდოდა მხოლოდ საკუთარი გამოკვლევები გადმომეცა მასში, რაც შეიძლება შეკუმშული ფორმით. მე ყოველთვის მიხაროდა (როგორც ყველა მათემატიკოსს). როცა ვახერხებდი ზოგჯერ 20 გვერდიანი მსჯელობა დამყავდა 5-ზე" [საოჯახო არქივი] [25].

სამეცნიერო-პედაგოგიური დატვირთვის და სატერმინოლოგიო მუშაობის პარალელურად, ნ. მუსხელიშვილი ამ პერიოდში უჩვეულო აქტივობას იჩენს, საქართველოში სრულიად ორიგინალური, პირველი სახელმძღვანელოების შესაქმნელად მექანიკასა და ანალიზურ გეომეტრიაში. მაგრამ მისთვის მთავარია, ამ შემთხვევაში ევროპაში სამეცნიერო მივლენებით წასვლა, მცირე ხნით მაინც. 12 აპრილს თ. ნიკოლაძისადმი გაგზავნილ წერილში იგი წერს: „პარიზში სამეცნიერო მუშაობისთვის ჩემთვის საკმარისი იქნება თვენახევარი, მაგრამ მე შემიძლია ეს გავაკეთო ლონდონშიც - მხოლოდ ბიბლიოთეკა იყოს და კემბრიჯში აუცილებლად უნდა შევიარო, თუმცა ამ წელში ეს არაა აუცილებელი". მას იქ უპირველესად აინტერესებს ჟ. ადამარის წერილში მოტანილი ზოგიერთი ლიტერატურის შესწავლა, რათა აბსოლუტურად დარწმუნებული იყოს მისი მეთოდის ორიგინალურობაში.

ევროპაში სამეცნიერო მივლინების აუცილებლობის და თ. ნიკოლაძის ზოგიერთი საყვედურებისაგან თავის მართლებისადმია მიძღვნილი უაღრესად საინტერესო წერილი, რომელიც გაგზავნილია ლონდონში 22 ივნისს 1923 წლისა, რომელსაც ჩვენ მოვიტანთ მცირეოდენი შემოკლებით: „ცხადია მე შენს გამო წელს არ წამოვიდოდი ევროპაში, მაგრამ ამით უდიდეს შეცდომას ჩავიდენდი , - სწორედ წელსაა აუცილებელი ჩემი ევროპაში ყოფნა, რათა დავე-

წიო წინ წასულ მეცნიერებას. მე საგრძნობლად ჩამოვრჩი ლიტერატურას მეცნიერებთან კონტაქტების უქონლობის გამო. ხედავენ რა ჩემს წარმატებას აქ, სხვაც ბევრი ემზადება ევროპაში წასასვლელად· მაგალითად, რაზმაძე და ხარაძე.

შენ მე მსაყვედურობ თსუ-ს მიმართ გულგრილობაში. ნუთუ შენ ეს ისე გაიგე, რომ მე არ ვუფრთხილდები უნივერსიტეტს, რომ ჩემთვის ძვირფასად არ ფასობს მისი აყვავება? შენ ხომ იცი, რა შრომა მაქვს დახარჯული მისთვის. მე ძალზე შრომისმოყვარე ადამიანი ვარ და მუშაობა ჩემთვის დიდად სახალისოა, მაგრამ არა ყოველგვარი, თუ მე მიხდება უაზრო (ჩემი თვალსაზრისით) შრომის გაწევა მას შეუძლია მე გამომაცალოს ნერვები და გადამღალოს.

ხოლო ლექციების კითხვა მე მიმაჩნია ერთ-ერთ ასეთ უაზრო შრომად. მე წინააღმდეგი ვარ <სწავლების> ლექციური სისტემის და მიუხედავად ამისა, მარტო უნივერსიტეტში კვირაში მე ვკითხულობ 16 ლექციას ციფრი, რომელიც თითქმის გაუგონარია ნორმალურ დროში. ეს ვითარება კლავს ჩემში მეცნიერული მუშაობის ყოველგვარ შესაძლებლობას და თუ ასე გაგრძელდა, მე მალე გამოვიფიტები. ამას ემატება გამოცდები. ყველა ისინი იმდენ სისხლს მართმევს მე, რომ თითოეული გამოცდა ერთი თვის სიცოცხლედ მიღირს. მე შემეძლო ძალზედ შემეკვეცა გამოცდები თუ გავხდებოდი „კეთილი“, როცა სიმშვიდეა თანაც სწრაფადაც თავისუფლდები, მაგრამ გამოცდები ძალზე მნიშვნელოვანი საქმეა (უფრო მნიშვნელოვანი, ვიდრე ლექცია) და კეთილსინდისიერი გამოცდა ძალზე ამაღლებს ცოდნის დონეს.

აი, ასეთი უსიამოვნო და სანერვიულო სამუშაოთი ვარ დაკავებული ყოველდღიურად, - მე არ შემიძლია ისიც კი (დროის უქონლობის გამო), რომ ჩემი დარგიდან წავიკითხო სპეციალური კურსი - ერთადერთი, რასაც შეეძლო ჩემთვის სიამოვნების მონიჭება. ტამარკინი მწერს, რომ პეტროგრადის უნივერსიტეტში ის გადმოსცემს ზოგიერთ საკითხს ჩემი მონოგრაფიიდან, ხოლო მე არ მაქვს შესაძლებლობა ჩემს მშობლიურ უნივერსიტეტში <სტუდენტებს> გავაცნო ჩემი მეთოდი - მე ვკითხულობ სტატიკას და სხვა მისთანა ძველმანებს.

როცა ვწერდი, რომ დიდად არ ვაფასებ აქაურ სადოქტორო ხარისხს - თქო, მე შენ გწერდი სუფთა „სამეცნიერო“ თვალსაზრისით, მე სხვა არაფერი მქონდა მხედველობაში.

ცხადია, ჩემთვის ძალზე სასიამოვნოა, რომ საქართველოში პირველად მე დავწერე სადოქტორო დისერტაცია მათემატიკაში, რომ მე პირველი ქართველი ვარ, რომელმაც დაბეჭდა მათემატიკური დისერტაცია, მაგრამ მე ვფიქრობ აქ შეიძლება შევჩერებულიყავი და რომ დისპუტი და იარლიყი ზედმეტია, მით უფრო, რომ დისპუტი არსებითად იქნება ბუტაფორია. ეს არ იქნება ჩემი წიგნის შეფასება; მე მინდა ვთქვა, რომ როგორც მათემატიკოსს, არაფერი საამაყო მექნება იმით, თუ მივიღებდი თბილისის უნივერსიტეტისგან დოქტორის ხარისხს, რომ მე ამით ისეთი კმაყოფილებასაც კი ვერ მივიღებ, როგორც მათემატიკოსი, რაც მივიღე თუნდაც ადამარის წერილისაგან.. მე ძალზე ეჭვიანად ვუყურებ მეცნიერებას და ვერ შევურიგდები იმ ვითარებას, როცა იგი ბუტაფორიის საგნად არის გადაქცეული.. მე ძალიან მტკივნეულად განვიცადე, რომ აუცილებელი გახდა გარედან (თუნდაც რუსეთიდან) მითითება, რომ უნივერსიტეტის ყველა წევრს ჩემთვის მოეწონებინა ის უპირატესობანი, რომელიც ჯერ კიდევ პეტერბურგის უნივერსიტეტში, გაცილებით უფრო ახალგაზრდას მეჭირა ჩემს კოლეგებს შორის (მე დავიწყე დაწვრილებით იმის თხრობა, თუ როგორ მიყურებდნენ პეტროგრადის უნივერსიტეტში, მაგრამ ძალზე საქებარი გამოვიდა, ამოვხიე ფურცელი და ხელახლა ვწერ), აქ კი, თავიდან მე მომექცნენ არა ისე, როგორც ვიმსახურებდი და მხოლოდ ბოლო ხანებში, როცა ვლებულობ გამოხმაურებებს და მიწვევენ პეტროგრადის სხვადასხვა უმაღლეს სასწავლებლებში სამუშაოდ - მექცევიან ისე, როგორც მეპყრობოდა პეტროგრადის უნივერსიტეტის ფაკულტეტი. ძალზე მტკივნეული იყო ეს არა პირადად ჩემთვის, არამედ იმის გამო, რომ ჩვენი უნივერსიტეტი ასე უნდობლად ეკიდება ყველაფერ ახალსა და ცოცხალს. შენ თავად გამოცადე ეს და იგივე განიცადა რუსიამ...

როცა მე 23 წლის ვიყავი და პირველად გადავეცი ნაშრომი დასაბეჭდად პეტროგრადში, არავის უკითხავს ის, რაც აქ მკითხა შანიძემ: „არის კი მასში რაიმე ახალი? ახლა თავად მთხოვს მივაწოდო ახალი სტატია, - ცხადია დარწმუნდა, რომ მე არ ვარ კომპილიატორი...

ანალოგიური ვითარებაა დისერტაციის მიმართაც. საბჭოს ზოგიერთ წევრამდე მიაღწია ხმებმა, რომ ასეთი თხელი დისერტაცია (160 გვ.) შეიძლება სადოქტოროდ გამოდგეს მხოლოდ იმიტომ, რომ მე „ჩვენი კაცი“ ვარ - ანდა უფრო იმიტომ, რომ ჩვენი უნივერსიტეტი დამწყებია. ცხადია, ყველა ასე არ ფიქრობდა, მაგრამ მე გავბრაზდი და ვფიქრობდი იგი აქ არ დამეცვა (ჯერ-ჯერობით ან სავსებით). ამჟამად, მათი შეხედულება არსებითად შეიცვალა და მე დავეთანხმე დაცვაზე, მაგრამ მხოლოდ იმ მიზნით და იმის გამო, რომ დისერტაცია მე დავბეჭდე აქ და არა რომელიღაც უცხოურ ჟურნალში. როცა მე ვწერდი, რომ სულერთია ვიქნება თუ არა აქაური დოქტორი, ჩემში ლაპარაკობდა გარკვეული გაღიზიანება ჩვენი უნივერსიტეტის ავტორიტეტული ფილოლოგების წინააღმდეგ, რომლებიც ფიქრობენ, რომ მაძლევენ „შეღავათს“ დოქტორი გავხდე (ე.ი. ფიქრობდნენ წინათ).

ახლა, როცა ფიქრობენ საპირისპიროს, თანახმა ვარ დისპუტის და მე ცოტათი გული მტკივა, რომ საჭირო გახდა ამის შესახებ გარედან მითითება. ცხადია, მე მთლიანად მართალი არ ვარ, ხომ არ მეწერა მე სახეზე, რომ რაღაც ვიცი, როცა მოვედი აქ ახალგაზრდა, უბრალო და მხიარული“. [ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივიდან] [25].

გულწრფელობის და გულახდილობის გამომხატველი ეს წერილი, რომელიც გვაძლევს თბილისის უნივერსიტეტში არსებული ვითარების თავისებურ შეფასებას, მრავალმხრივ იქცევს ჩვენს ყურადღებას, მაგრამ ამჟამად ჩვენ მხოლოდ სადოქტორო დისერტაციის წარდგენა- დაცვის ამბები გვაინტერესებს.

უპირველეს ყოვლისა, ნ. მუსხელიშვილს მიაჩნია, რომ იგი მეცნიერების განვითარებას ჩამორჩა. დიდი პედაგოგიური დატვირთვის, უახლესი ლიტერატურის და მეცნიერებთან კონტაქტის უქონლობის გამო განსაკუთრებით ეს გრძნობა გაუჩნდა მას ჟ. ადამარის ზემოთ მოყვანილი წერილის მიღების შემდეგ. მეორე კი, იგი სადოქტორო დისერტაციის დაცვას თბილისის უნივერსიტეტში ფორმალურ ხასიათს ანიჭებს და არ აქტიურობს. ეკონომიური მდგომარეობა მან უკვე გაიუმჯობესა, პროფესორის ხელფასი დაინიშნა 1922 წ 16 ივნისიდან. უეჭველად გასათვალისწინებელია ის გაუგებრობა, რომელიც წარმოიშვა საპედაგოგო ფაკულტეტის შემადგენლობაში სამათემატიკო-

საბუნებისმეტყველო და სიბრძნისმეტყველების ფაკულტეტების გაერთიანებამ და დეკანატში ორი ფილოლოგის (დეკანად პროფ. კ. კეკელიძის) (ქართული ფილოლოგია) და მდივნად დოც. გ. ნათაძის (დასავლეთ ევროპის ფილოლოგია) დანიშვნამ, რომლებსაც არ შეიძლება სცოდნოდათ საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა დარგების და მათ შორის მათემატიკის მეცნიერების ის ნიუანსები, რაზედაც წერილშია საუბარი.

ზემოთ მოტანილ წერილებს თ. ნიკოლაძისადმი, წინ უძღოდა აგრეთვე სრულიად შეუთანხმებული მოქმედება სამათემატიკო განყოფილების სამი ძირითადი მასწავლებლისა 1923/24 ს. წ. პირველ სემესტრში პროფ ა. რაზმაძე, პროფ ნ. მუსხელიშვილი და დოც. ა ხარაძე ერთდროულად ითხოვენ უცხოეთში მივლინებას, მათგან ა რაზმაძე და ა. ხარაძე პედაგოგიკური ფაკულტეტიდან. ამჯერად ჩვენ მოვიტანთ პოლიტექნიკური ფაკულტეტის დეკანის პროფ. ა. დიდებულიძის მიერ პროფ. ნ. მუსხელიშვილის სახელზე აღძრულ შუამდგომლობას; „უნივერსიტეტის გამგეობას! პოლიტექნიკურმა ფაკულტეტმა 15 მაისის სხდომაზედ დაადგინა: „აღძრას შუამდგომლობა გამგეობის წინაშე, რათა პროფ ნ მუსხელიშვილი გაგზავნილ იქნეს საფრანგეთში (პარიზში) სამეცნიერო მიზნით პროფ. ნ. მუსხელიშვილის საზღვარგარეთ გამგზავრება აუცილებლად საჭიროა იმ სამეცნიერო მუშაობის დასამთავრებლად, რომელმაც მიიქცია საფრანგეთის ცნობილი მათემატიკოსის აკადემიკოსის Hadamard-ის ყურადღება.

ფაკულტეტის აზრით, პროფ. ნ. მუსხელიშვილი დიდად ნიჭიერი ახალგაზრდა მეცნიერია, მომავალში იგი დაიჭერს ქართულ უნივერსიტეტში საპატიო ადგილს

ამიტომ საჭიროა აღიძრას სახალხო განათლების კომისარიატის წინაშე შუამდგომლობა, რათა გადადებულ იქნეს პროფ. ნ მუსხელიშვილის საზღვარგარეთ გასაგზავნად საჭირო თანხა. დაახლოებით დასჭირდება 100 -200 გირვანქა-სტერლინგი

პოლიტ. ფაკულტეტის დეკანი ა. დიდებულიძე“ [24, ფ 269]

ფაკულტეტის შუამდგომლობის და უნივერსიტეტის გადაწყვეტილების საფუძველზე, განათლების კომისარიატმა ნება დართო პროფ. ნ მუსხელიშვილს გერმანიის გავლით საფრანგეთში გამგზავრების. 1923 წ. 19 ივლისს რუ-

სუდან ნიკოლაძე ტელეგრამით ატყობინებს ლონდონში თ. ნიკოლაძეს· „ნ. მუსხელიშვილი თბილისიდან გაემგზავრება საზღვარგარეთ ბაქოს გავლით-მოსკოვში. მოსკოვიდან ბერლინში, ბერლინამდე ხარაძესთან ერთად". საფრანგეთში თ. ნიკოლაძე და ნ. მუსხელიშვილი დაქორწინდნენ. ამ მოგზაურობის დროს, საფრანგეთში ნ. მუსხელიშვილის სამეცნიერო მოღვაწეობის შესახებ თითქმის არაფერია ცნობილი. შემორჩენილია ნ. მუსხელიშვილის წერილი, რომელიც დათარიღებულია 1923 წ. 18 სექტემბრით, რომელსაც იგი უგზავნის პარიზიდან ბერლინში მყოფ. ა. ხარაძეს. როგორც ი. ქარცივაძე და ბ ხვედელიძე თავიანთ წიგნში - „არჩილ ხარაძე ცხოვრება და მოღვაწეობა (თბილისი: თსუ გამომცემლობა, 1985, გვ. 29) შენიშნავენ, ეს წერილი და ქ-ნ თამარის სალაღობო ლექსი გამოუწვევია ბატონი არჩილის ბერლინში გადაღებულ, ცხენზე ამხედრებულ სურათს. ამ ბარათში ნ მუსხელიშვილი წერს:

„ძმაო არჩილ! გიგზავნი 3 გირვანქა სტერლინგს. ბოდიშს ვიხდი, რომ ამდენად დაგიგვიანე. მაგრამ, შესაძლოა, ეს შენთვის ხელსაყრელიც არის; აქამდის დახარჯავდი ცხენებისა და ქალების გულისთვის შენს დიდ წერილს ველი (თუნდაც არა გჯერავს რომ მოვა). დიდი სალამი. შენი ნიკო".

ცნობილი არ არის პარიზში ნ. მუსხელიშვილის ხანმოკლე მივლინების სამეცნიერო-პრაქტიკული შედეგები. როგორც ჩანს, მან მოახერხა ახალ ლიტერატურას გაცნობოდა, გარკვეული კონტაქტები დაემყარებინა საფრანგეთის ზოგიერთ მეცნიერთან, მაგრამ გარკვევით შეიძლება ითქვას, რომ ამჯერად ადამარს ვერ გაეცნო, ალბათ ადამარი იმ დროს არ იმყოფებოდა პარიზში.

მიუხედავად იმისა, რომ სადოქტორო დისერტაციის დაცვა 1923 წ. შემოდგომისთვის დანიშნული იყო, იგი მაინც არ შედგა. ოფიციალური დოკუმენტური მასალა დაცვის ჩაშლის შესახებ არ არსებობს. უნდა ვივარაუდოთ რომ მთავარი მიზეზია ოპონენტის - პროფ. ა. რაზმაძის ხანგრძლივი (თავიდანვე 1 წლამდე) მივლინება ევროპაში, რომელიც ოფიციალურად 1923 წ ივლისიდან უნდა დაწყებულიყო, მაგრამ ფაქტიურად 1923 წლის დეკემბრიდან შევიდა ძალაში. დისერტაციის დაცვის ჩაშალას ნ. მუსხელიშვილიც კმაყოფილებით შეხვდა. როგორც თ. ნიკოლაძისადმი 1923 წ. 22 ივნისის წერილიდან ვიცით, ტფილისის უნივერსიტეტში მათემატიკის დარგში სადოქტორო დისერატაციის დაცვა ამ პერიოდში, მას „ბუფონადად" და „ბუტაფორიად" ეჩვე-

ნებოდა და საჯაროდაც გამოთქვამდა კიდეც, რაც ან. რაზმაძემდეც აღწევდა ალბათ. ცხადია, პროფ. ან. რაზმაძეს შეეძლო დაყრდნობოდა ჟ ადამარის, ვ. სტეკლოვის, ი. ტამარკინის, კორნის და სხვათა რეცენზიებს, მაგრამ როგორც სოლიდურ მეცნიერს, მას თავად არ შეეძლო შეფასება მიეცა პროფ. ნ. მუსხელიშვილის ფუნდამენტური სამეცნიერო ნაშრომისათვის გამოყენებითი მათემატიკის დარგში, რასაც თავადაც აღიარებდა 1922 წ. გამგეობის საბჭოზე მის წარდგინებაში.

აზრი იმის შესახებ, თითქოს ჟ. ადამარმა უარყოფითი შეფასება მისცა ნ. მუსხელიშვილის სადოქტორო ნაშრომს და ამიტომაც პარიზში მისი 2 თვით (ფაქტიურად საქორწილო გასეირნების) მივლინების დროს ვერ დაიცვა დისერტაციაო, შეთხზულია დოკუმენტური მასალის უცოდინრობის საფუძველზე და მეორეც, კიდევაც რომ მომხდარიყო ასეთი რამ, იგი ნ. მუსხელიშვილს, როგორც მეცნიერს, მეტ პატივს დადებდა ვიდრე ჟ. ადამარს.

I თავის დასკვნები

ნაჩვენებია, რომ აკადემიკოს ნიკო (ნიკოლოზ) ივანეს-ძე მუსხელიშვილი (1891-1976), 1915 წ. პეტროგრადის უნივერსიტეტის დამთავრების შემდეგ, 1915-1920 წლებში, ეწეოდა პედაგოგიურ საქმიანობას ქალაქის 4 უმაღლეს სასწავლებელში: უნივერსიტეტში, პოლიტექნიკურ ინსტიტუტში, რკინისგზათა მიმოსვლის საინჟინრო ინსტიტუტში და ქალთა უმაღლეს კურსებზე, სადაც იგი ასწავლიდა მათემატიკას და მექანიკას. იმავდროულად, ნ. მუსხელიშვილმა 1917-1919 წლებში 5 ნაწილად ჩააბარა სამაგისტრო გამოცდები გამოყენებით მათემატიკის (მექანიკის) სპეციალობით პეტროგრადის უნივერსიტეტში.

პეტროგრადში ნ. მუსხელიშვილი მოღვაწეობის პერიოდი აღსანიშნავია იმით, რომ მან გამოაქვეყნა 4 სამეცნიერო ნაშრომი დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანების (ამათგან, ერთი პროფ. გ. კოლოსოვის თანაავტორობით 1915 წ.) სპეციალობითდა შეიმუშავა ასეთი ამოცანების ამოხსნის ახალი – კოშის ანალოგიური ინტეგრალის მეთოდი, რომლითაც ეფექტურად ამოხსნა

მათემატიკური ფიზიკის ის ბრტყელი ამოცანები, რომლებიც დაიყვანება ჰარმონიულ ($\Delta\varphi = 0$) და ბიჰარმონიულ ($\Delta^2\varphi = 0$) განტოლებებზე.

ნაჩვენებია, რომ 1920 წ. იანვრიდან აგვისტომდე, ნ. მუსხელიშვილი მონაწილეობდა პეტროგრადის „ატომური კომისიის" მუშაობაში, რუსეთის თვალსაჩინო მათემატიკოს-მექანიკოს-ფიზიკოს-ასტრონომებთან (მათგან 10 იყო კომისიის ნამდვილი წევრი) ერთად, რომლებიც ატომის ბორი-ზომერფელდის კვანტური თეორიის ფარგლებში ამუშავებდნენ რთული ატომების ელექტრულ, მაგნიტურ და რენტგენულ ამოცანებს· ატომური კომისიის მასალები 8-ჯერ მოიხსენიებს ნ. მუსხელოვს (მუსხელიშვილის), როგორც ამა თუ იმ ამოცანის ამოხსნაში მონაწილეს; ამათგან 3 მოხსენების ტექსტი დაცულია კომისიის მასალებში.

ნ. მუსხელიშვილის გამოუქყვენებელი ნაშრომები მისი სამეცნიერო მოღვაწეობის პეტროგრადის პერიოდიდან, რომელთაგან ერთია **"О некоторых контурных задачах математической физики"** (1919) ეხება ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნისათვის კოშის მსგავსი ინტეგრალის მეთოდის გამოყენებას, ხოლო სამი-ატომური მექანიკისა და ფიზიკის, იმ დროისთვის აქტუალურ საკითხებს, ახლაც იმსახურებს სპეციალისტთა ყურადღებას, რომლის დასამტკიცებლად პროფ. თ. ეფრემიძესთან ერთად ვიძლევით ნ. მუსხელიშვილის აღნიშნული და 1920 წ. დაწერილი სტატიების ხელნაწერთა (სულ ხუთი სტატია) გამოცემას.

განხილულია თბილისის უნივერსიტეტში (1920 წ სექტემბრიდან - 1923 წლის ჩათვლით) ნ. მუსხელიშვილის სამეცნიერო და პედაგოგიური მოღვაწეობის ძირითადი მომენტები, რომლებიც დაკავშირებულია ფრანგულენოვანი მონოგრაფიის „კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისთვის" დაწერის, 1922 წ. თბილისის უნივერსიტეტში მისი გამოქვეყნების და 1923წ. მისი სადოქტორო დისერტაციად წარდგენასთან

თავი II. ნ. მუსხელიშვილი და ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანები

§ 2.1 მოკლედ ჰიდროდინამიკის ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მეთოდების შესახებ

კოშის ტიპის ინტეგრალის ჰიდროდინამიკის ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნისათვის გამოყენება, რომლის შესახებ ნ. მუსხელიშვილის 1919 წ. დაწერილ ზემოთ დასახელებულ სტატიაში იყო დასმული, მოითხოვს ზოგიერთი წინასწარი ცნობების გადმოცემას იდეალური სითხეების ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შესახებ. ასეთი ტიპის ამოცანებიდან პრაქტიკული და თეორიული თვალსაზრისით ყველაზე საინტერესოა ე.წ. გარსდენის ამოცანები. აქ განიხილება სითხის უსასრულო გარემოში ჩაძირული მყარი სხეული, რომელიც მოძრაობს სითხეში ან პირიქით, სხეული უძრავია და მას გარსედინება სითხე, რომლის სიჩქარე განსხვავებულია ნულისაგან უსასრულობაში.

გარსდენის სასაზღვრო ამოცანა ორგვარად შეიძლება დაისვას:

ა) წინასწარ მოცემულია სხეულზე მოქმედი გარე ძალები უნდა განისაზღვროს სხეულისა და სითხის მოძრაობის კანონი და მათი ურთიერთქმედება.

ბ) წინასწარ მოცემულია სხეულის მოძრაობის კანონი უნდა შევისწავლოთ სითხის მოძრაობის კანონი და სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედება, რის შედეგად განისაზღვრება ის გარე ძალები, რომლებიც უნდა მოქმედებდეს სხეულზე [27, გვ. 158].

პრაქტიკულად უფრო მიზანშეწონილია მეორე გვარის სასაზღვრო ამოცანის დასმა, რაც განიხილება გარსდენის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნისას, როცა უსასრულო სიგრძის ცილინდრს გარსედინება იდეალური არაკუმშვადი სითხე ცილინდრის ღერძის პერპენდიკულარული მიმართულებით. რადგან ცილინდრის ღერძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეში მოძრაობის სურათი ერთი და იგივე იქნება, ამიტომ საკმარისი იქნება შევისწავლოთ ცილინდრის განივკვეთის C კონტურის გარსდენა. ამ შემთხვევაში სასაზღვრო ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება: კონტურზე სითხის ნაწილაკის სიჩქარის ნორმალური კომპონენტი ნულია, ხოლო უსასრულობაში სითხის სიჩქარის ვექტორი მოცემულია.

თუ C წირის გარშემო სითხის მოძრაობის სიბრტყეს xoy-ით აღვნიშნავთ, მაშინ სტაციონარული დინებისას უწყვეტობის განტოლება ღებულობს სახეს: ანუ $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$ (2.1.1)

ხოლო დენის წირის დიფერენციალური განტოლება კი ჩაიწერება:

$$\frac{dx}{v_x}-\frac{dy}{v_y}=0 \text{ ან } v_x dy - v_y dx = 0. \quad (2.1.2)$$

თუ შემოვიტანთ დენის ფუნქციას $\psi=\psi(x,y)$,

მაშინ $v_x=\frac{\partial \psi}{\partial y}, v_y=-\frac{\partial \psi}{\partial x}$. (2.1.3)

ამასთან, სიჩქარის ნორმალური მდგენელი

$$v_n = v_x\cos(n,x)+v_y\cos(n,y)=-\frac{\partial \psi}{\partial y}\cos(s,x)+\frac{\partial \psi}{\partial x}\cos(s,y)=-\frac{d\psi}{ds} \quad (2.1.4)$$

სადაც s კონტურის ელემენტია.

მე-(2.1.4) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$-\frac{d\psi}{ds}=u\cos(n,x), \quad (2.1.5)$$

სადაც u არის სითხის სიჩქარე გარსდინებადი სხეულიდან უსასრულოდ დაშორებულ წერტილში.

$$\text{ცხადია, } \psi(x,y)=-\int u\cos(n,x)ds = u\int\cos(s,y)ds = u\int dy = uy+const. \quad (2.1.6)$$

ხოლო უსასრულობაში

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial y}=0. \quad (2.1.7)$$

წრიული a რადიუსიანი ცილინდის შემთხვევაში პოტენციალური გარსდენისას, როცა იგი u სიჩქარით მოძრაობს უძრავ იდეალურ სითხეში დენის ψ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას:

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0, \quad (2.1.8)$$

რომელიც პოლარ კოორდინატებში $(x=r\cos\theta \; y=r\sin\theta)$ ჩაიწერება სახით:

$$\Delta\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0. \quad (2.1.9)$$

მე-(2.1.9) განტოლების ამონახსნის მოძებნა უნდა იქნას შეთანხმებული ψ ფუნქციაზე დადებულ სასაზღვრო პირობებთან პოლარ კოორდინატებში, რომელიც ასე ჩაიწერება:

$$\left.\begin{array}{l} r = a,\ \psi = ua\sin\theta \\ r \to \infty, \dfrac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \end{array}\right\}. \qquad (2.1.10)$$

მე-(2.1.9) განტოლების ამონახსნი წარმოდგენილი ფურიეს მეთოდის [27, გვ. 162] გამოყენებით მოცემულია სახით:

$$\psi = \sum \frac{1}{r^m}(A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \qquad (2.1.11)$$

მე-(2.1.10) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით კოეფიციენტები ღებულობენ მნიშვნელობებს:

$$A_m = 0,\ B_0 = 0,\ B_1 = ua^2,\ B_m = 0\ (m > 1), \qquad (2.1.12)$$

საიდანაც $\psi = \dfrac{ua^2}{r}\sin\theta$. (2.1 13)

როგორც მტკიცდება [27, გვ. 163], განხილული ამოცანისათვის დენის ფუნქცია აკმაყოფილებს ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის პირობას. ამასთან, დენის წირების მისაღებათ საჭიროა დაცული იქნას პირობა:

$$\psi = const \quad \text{ან} \quad \frac{\sin\theta}{r} = const. \qquad (2\ 1.14)$$

რაც იძლევა დენის წირების სიმეტრიულ განაწილებას კოორდინატთა ღერძების მიმართ.

დენის ფუნქციასთან ერთად მნიშვნელოვან დამხმარე სიდიდეს წარმოადგენს სიჩქარის პოტენციალი, რომელიც წარმოადგენს დენის ფუნქციის შეუღლებულ ჰარმონიულ ფუნქციით გამოსახულ სიდიდეს და ჩაიწერება სახით:

$$\varphi = -\frac{ua}{r}\cos\theta. \qquad (2.1.15)$$

კომპლექსური პოტენციალი, რომელიც შემდგომში მრავალმხრივად საინტერესო ფუნქციას წარმოადგენს, შემოტანილი იყო [27, გვ 163] შემდეგი ფორმულის სახით:

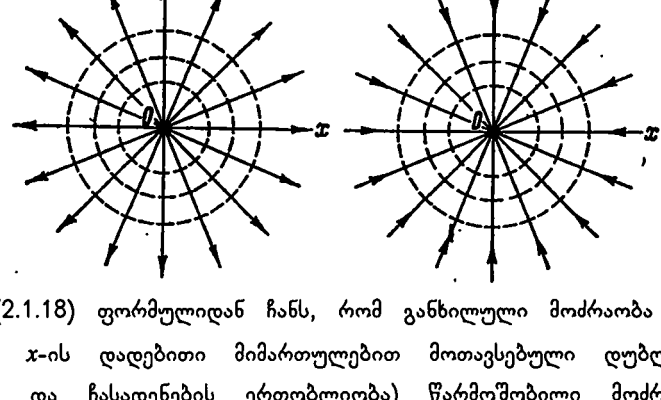
$$w=\varphi+i\psi=-\frac{ua^2}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)=-\frac{ua^2}{r}e^{-i\theta}=-\frac{ua^2}{r(\cos\theta+i\sin\theta)} \qquad (2.1\ 16)$$

კომპლექსური ცვლადის

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta} \qquad (2.1.17)$$

შემოტანით, კომპლექსური პოტენციალი ჩაიწერება სახით:

$$w=-\frac{ua^2}{z} \qquad (2.1.17)$$



მე-(2.1.18) ფორმულიდან ჩანს, რომ განხილული მოძრაობა წრის ცენტრში x-ის დადებითი მიმართულებით მოთავსებული დუბლეტით (წყაროსა და ჩასადენების ერთობლიობა) წარმოშობილი მოძრაობის ტოლფასია.

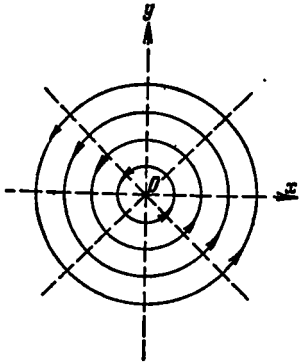
ზოგიერთი მარტივი ნაკადების კომპლექსურ პოტენციალებს ასეთი სახე აქვს [28, გვ.171-172].

1. ერთგვაროვანი ნაკადი სიჩქარის ვექტორით $u=(u_\infty,v_\infty)$, რომელიც ox ღერძის მიმართ დახრილია $\theta\infty$ კუთხით:

$$\begin{cases} w(z)=\overline{uz}, & \bar{u}=u_\infty-iv_\infty=|u|e^{-i\theta_\infty}=|u|(\cos\theta_\infty-i\sin\theta_\infty) \\ \varphi=u_\infty x+v_\infty y, & \psi=-v_\infty x+u_\infty y, \quad u=u_\infty+iv_\infty \end{cases} \qquad (2.1.19)$$

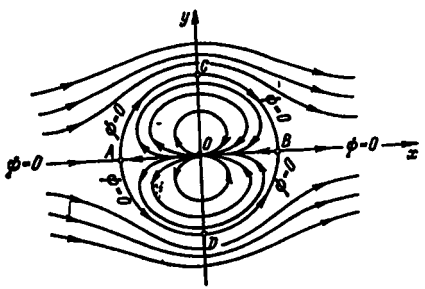
2. წყაროს (ჩადინების) პოტენციალი კოორდინატთა სათავის მიმართ, დადებითი მოცულობითი წამიერი Q ხარჯით

$$\left.\begin{aligned} w(z) &= \frac{Q}{2\pi}\ln z,\ \varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r,\ \psi = \frac{Q}{2\pi}\theta \\ \overline{U} &= \frac{Q}{2\pi z},\quad |\overline{U}| = \frac{Q}{2\pi r}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.20)$$



3. კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული m მომენტის მქონე დიპოლი (დადებითი და ნამდვილი სიდიდის), რომლის მიმართულება ემთხვევა ox ღერძის დადებით მიმართულებას [29, გვ. 123-136]:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{mx}{x^2+y^2} = \frac{mx}{r^2},\ \psi = -\frac{my}{x^2+y^2} = -\frac{my}{r^2} \\ \overline{U} &= -\frac{m}{2\pi r^2},\ |U| = -\frac{|m|}{2\pi r^2} \end{aligned}\right\} \qquad (2.1.21)$$



გარსდენად კონტურზე სითხის მოქმედების გამოსათვლელად ჯერ გავიანგარიშოთ ჰიდროდინამიკური წნევა. რადგანაც სითხის მოძრაობა

სტაციონარული და პოტენციალურია, ამიტომ სამართლიანი იქნება ბერნულ-კოშის ფორმულა:

$$p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = const\,. \qquad (2.1.22)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ჰიდროსტატიკური $p_h = \rho gh$ მცირე სიდიდეა ატმოსფერულ p და დინამიკურ $p_\rho = \frac{\rho v^2}{2}$ წნევებთან შედარებით, მაშინ

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = const. \qquad (2.1.23)$$

თუ v^2-ს გამოვთვლით ფორმულიდან

$$v^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^2. \qquad (2.1.24)$$

სადაც $\psi = \frac{ua^2}{r}\sin\theta$-დან, მაშინ

$$v^2 = \frac{u^2a^4}{r^4}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \frac{u^2a^2}{r^4}. \qquad (2.1.25)$$

(2 1.25)-ე გამოსახულების (2 1 23)-ეში შეტანით და $z = a$-ზე (კონტურის ზედაპირზე) გადასვლით მივიღებთ·

$$p + \frac{\rho u^2}{2} = const, \quad p = -\frac{\rho u^2}{2} + const. \qquad (2.1.26)$$

როგორც ჩანს, კონტურზე ჰიდროდინამიკური წნევა მუდმივია, რადგანაც კონტური ამ შემთხვევაში წრეწირია და მის სიმეტრიულ წერტილებში წნევა სიდიდით ტოლია და ნიშნით საწინააღმდეგო, ამიტომ კონტურზე მოქმედი ჰიდროდინამიკური წნევის ძალები ერთიმეორეს გააწონასწორებს. ამიტომ შეიძლება დავასკვნათ, რომ იდეალურ უკუმშვად სითხეში თანაბრად მოძრავი წრიული ცილინდრი ან უძრავი ცილინდრის მიმართ თანაბრად და სწორხაზოვნად მოძრავი იდეალური სითხე, არავითარ წინააღმდეგობას არ განიცდის. ეს შედეგი, რომელიც სითხის შინაგანი ხახუნის, სითხისა და სხეულის ხახუნის და ჰიდროსტატიკური ძალების უგულველყოფის შემთხვევაშია სამართლიანი, დალამბერის პარადოქსის სახელითაა ცნობილი და იგი სამართლიანია ნებისმიერი ფორმის გარსდინებადი სხეულისათვის.

ლ. ლოციანსკი, თავის მონოგრაფიაში "Механика Жидкости и Газа" (1978), [28 გვ. 173-174] განიხილავს რა უფრო დეტალურად a რადიუსის მქონე ცილინდრის მიმართ სითხის არაცირკულირებად მოძრაობას ამტკიცებს, რომ შესაბამისი კომპლექსური პოტენციალია

$$w(z)=uz+\frac{2\pi a^2 u}{2\pi}\frac{1}{z}=u\left(z+\frac{a^2}{z}\right), \qquad (2\ 1.27)$$

ხოლო კონტურის მიმართ სითხის მიერ წარმოებული წნევის კოეფიციენტი

$$C_p=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u^2}=1-4\sin^2\theta\,. \qquad (2.1.28)$$

როგორც გარსდენადი $r=a$ რადიუსის ცილინდრის A, B (X ღერძის გასწვრივ) და C,D (Y ღერძის გასწვრივ) განლაგებული წერტილების შესაბამისი θ კუთხეების მნიშვნელობის ($\theta_B=0$, $\theta_A=\pi$, $A_C=\pi/2$, $\theta_D=\frac{3}{2}\pi$) ჩასმით ჩანს, სითხის სიჩქარის გამოსათვლელი ფორმულიდან,

$$V=2u|\sin\theta|$$

წინა და უკანა კრიტიკულ წერტილებში $A(\theta=\pi)$ და $B(\theta=0)$ ტოლია ნულის, ხოლო $C(\theta=\frac{\pi}{2})$ და $D(\theta=-\frac{\pi}{2})$ წერტილებში $V_{max}=2u$ (სადაც $u=u_\infty$ სითხის სიჩქარეა უსასრულოდ დაშორებულ წერტილებში).

წრიული ცილინდრის ცირკულაციური გარსდენის შესაბამისად კომპლექსური პოტენციალი წარმოიდგინება სახით [28 გვ. 165-167; გვ. 174-175]

$$w(z)=u\left(z+\frac{a^2}{z}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \qquad (2.1.29)$$

სადაც Γ- ცირკულაციის სიდიდეა; თუ $\Gamma>0$ ცირკულაცია შეესაბამება საათის ისრის საწინააღმდეგო სვლას.

სითხის შეუღლებული სიჩქარე z სიბრტყის ნებისმიერ წერტილში

$$\overline{V}=\frac{dw}{dz}=u\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi i z}=0 \qquad (2.1.30)$$

საიდანაც კრიტიკული წერტილების მდებარეობა შეიძლება ნაპოვნი იქნას განტოლებიდან:

$$\overline{V}=0,\ u\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi iz}=0. \tag{2.1.31}$$

(2.1.31)-დან მიღებული კვადრატული განტოლების

$$z^2+\frac{\Gamma}{4\pi iu}z-a^2=0 \tag{2.1.32}$$

ამონახსნი

$$z=\frac{i\Gamma}{4\pi u}\pm\sqrt{a^2-\frac{\Gamma^2}{16\pi^2u^2}}. \tag{2.1.33}$$

ყველა იმ შესაძლო შემთხვევათა შორის, რომელსაც განიხილავს ლ. ლიციანსკი თავისი მონოგრაფიის 175-176-ე გვერდებზე, ჩვენ განვიხილავთ მცირე სიდიდის ცირკულაციის $\Gamma<4\pi au$ შემთხვევას, როცა

$$z=\pm\sqrt{a^2-\frac{\Gamma^2}{16\pi^2u^2}}+i\frac{\Gamma}{4\pi u}=\pm a+i\frac{\Gamma}{4\pi u}. \tag{2.1.34}$$

მოცემულ მიახლოებაში ამწევი ძალის სიდიდე გამოითვლება ფორმულით

$$\vec{R}=-\oint p\vec{n}ds \tag{2.1.35}$$

რომელიც x და y ღერძის მიმართულებით ღებულობს მნიშვნელობას

$$\left.\begin{aligned}R_x&=-\oint pn_xds=-a\int_0^{2\pi}p\cos\theta d\theta=0\\R_y&=-\oint pn_yds=-a\int_0^{2\pi}p\cos\theta d\theta\neq0\end{aligned}\right\}. \tag{2.1.36}$$

კერძოდ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\overline{V}=u\left(1-e^{-2i\theta}\right)+\frac{\Gamma}{2\pi ia}e^{-i\theta}=2|u|ie^{-i\theta}\left(2|u|\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi a}\right) \tag{2.1.37}$$

ან $\bar{v}=ie^{-i\theta}\left(\sin\theta+\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)$, (2.1.37')

მაშინ

$$|v|=|u|\left|2\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi u\pi a}\right| \tag{2.1.38}$$

$$C_p=1-\left(2\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi|u|a}\right)^2$$

თუ ბერნულის განტოლებიდან $p=-\frac{\rho|V|^2}{2}+const$ განსაზღვრულ სიდიდეს ჩავსვამთ (2.1.36)-ეს მეორე განტოლებაში, მიიღება:

$$R_y=\frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}\left(2|U|\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2\sin\theta d\theta-\rho|u|\Gamma\neq 0 \qquad (2.1.39)$$

ცირკულაციის არ არსებობის შემთხვევაში, როცა Γ=0 (2.1.39)-ე გადაიწერება:

$$R_y=\frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}4|U|\sin^3\theta d\theta=0, \qquad (2.1.40)$$

აქ მოტანილი (2.1.39)-ე ფორმულა R_y-ისათვის საყოველთაოდ ცნობილია და რომელსაც განივ ამწევ ძალას უწოდებენ, არის კერძო შეთხვევა ჟუკოვსკის ზოგადი თეორემისა; ეს ფორმულა მის მიერ დამტკიცებული იყო 1910 წელს და სამართლიანია ნებისმიერი გარსდენად კონტურის მქონე სხეულისათვის.

ამ ძალის სიდიდეს, პროფ. დ. დოლიძე თავის წიგნში „დეფორმად სხეულთა მექანიკის შესავალი" (1951 წ.), ასე ადგენს [გვ. 167-168]

განსაზღვრავს რა წრიული ცილინდრის დენის წირს $z=a$ დროს ფორმულით

$$\psi(z)=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln a=const \qquad (2.1.41)$$

და შეაქვს ბერნულის განტოლების

$$P=const-\frac{\rho v^2}{2} \qquad (2.1.42)$$

გამოსახულებაში, მაშინ

$$v^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2=\left(2u\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi a}\right)^2=4u^2\sin^2\theta-\frac{2u\Gamma}{\pi a}\sin\theta+\frac{\Gamma^2}{4\pi^2a^2}, \qquad (2\ 1.43)$$

გარდაქმნების შემდეგ ღებულობს:

$$\left.\begin{aligned}R_x&=-\int_c p\cos(n_x,x)ds=\frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}v^2\cos\theta d\theta\\ R_y&=-\int_c p\sin(n_x,x)ds=\frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi}v^2\sin\theta d\theta\end{aligned}\right\}, \qquad (2.1.44)$$

საიდანაც ინტეგრირების შემდეგ, მიიღება ნ. ჟუკოვსკის ცნობილი ფორმულები

$$R_x = 0,$$
$$R_y = -\rho u\Gamma, \tag{2.1.45}$$

მისგან გამომდინარე ყველა შედეგებით.

ჰიდრო და აეროდინამიკის ერთ-ერთ ძირითადი ამოცანა, რომლითაც 20-იან წლებში დაინტერესდა ნ. მუსხელიშვილი, იყო წრიული ცილინდრის გარსდენა. გარსდენა სითხის სიჩქარის გრიგალური მოძრაობის შემთხვევაში, დ. დოლიძის მიხედვით, რომელიც ემყარება ნ. ჟუკოვსკის და ს. ჩაპლიგინს მე-20 ს. 10-იანი წლების შრომებს, განიხილავს სიჩქარის პოტენციალს, როგორც მრავალსახა კომპლექსური ცვლადის ფუნქციას. თავად სითხის სიჩქარე ცალსახა უნდა იყოს, ე.ი. ცალსახა უნდა იყოს $\frac{dw}{dz}$ ანალიზური ფუნქცია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ იგი სითხის მოძრაობის არეში უნდა გაიშალოს ლორანის მწკრივად, სახით

$$\frac{dw}{dz} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots, \quad c_k = a_k + ib_k. \tag{2.1.46}$$

ცხადია მე-(2.1.46) განტოლების ინტეგრებით მიიღება:

$$w = c_1 \lg z - \frac{c_2}{z} + \ldots. \tag{2.1.47}$$

თუ ამ გამოსახულებაში გავითვალისწინებთ, რომ $w = \varphi + i\psi$ მაშინ

$$\varphi + i\psi = (a_1 + ib_1)\lg\left(re^{i\theta}\right) - (a_2 + ib_2)\frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r} - \ldots =$$
$$= a_1 \lg r - b_1\theta - \frac{a_2}{r}\cos\theta - \frac{b_2}{r}\sin\theta + \ldots + \tag{2.1.48}$$
$$+ i\left(a_1\theta + b_1 \ln r + \frac{a_2}{r}\sin\theta - \frac{b_2}{r}\cos\theta + \ldots\right)$$

სადაც მიღებულია, რომ $z = re^{i\theta}$, $\ln z = \ln r + i\theta$.

წინა ფორმულიდან მიიღება

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= a_1 \ln r - b_1\theta - \frac{a_2}{r}\cos\theta - \frac{b_2}{r}\sin\theta + \ldots\\ \psi &= a_1\theta + b_1 \ln r + \frac{a_2}{r}\sin\theta - \frac{b_2}{r}\sin\theta + \ldots\end{aligned}\right\}. \tag{2.1.49}$$

თუ ამონახსნის შესაბამისი სიჩქარის პოტენციალი აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$r=a, \quad \psi=ua\sin\theta$, და როცა

$r\to\infty \quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$, მაშინ შესაბამისად: (2.1.50)

$a_1=0, \quad a_2=ua^2, \quad a_k=o(k=2), \quad b_k=0.(k=2)$.

ე.ი. მივიღებთ:

$$\psi=b_1\ln r+\frac{ua^2}{r}\sin\theta \tag{2.1.51}$$

სიჩქარის კომპლექსური პოტენციალი,

$$w=\varphi+i\psi=ib\ln z-\frac{ua^2}{z}+..., \tag{2.1.52}$$

რასაც ნ. მუსხელიშვილი ჩაწერს სახით

$$w=-\frac{ua^2}{z}+\frac{ki}{2\pi}\ln z, \tag{2.1.53}$$

სადაც $k=\Gamma=-2\pi b$-ს ეწოდება სიჩქარის ცირკულაცია.

კომპლექსური პოტენციალის ამ ფორმულის განზოგადება, როცა სითხეში ჩაძირულ წრიულ ცილინდრს გარსედინება უსასრულობაში ნულოვანი სიჩქარის მქონე სითხე, ჩაიწერება სახით:

$$w=\frac{k}{2\pi i}\ln z+u\left(z+\frac{a^2}{z}\right), \tag{2.1.54}$$

რომლის შესაბამისად

$$\psi=u\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta-\frac{k}{2\pi}\ln r. \tag{2.1.55}$$

მოცემული ფორმულის მიხედვით, თუ C კონტური არის წრე და $z=a$, მაშინ

$$\psi=-\frac{k}{2\pi}\ln a=const \tag{2.1.56}$$

და ბერნულის ფორმულის მიხედვით, როცა

$p+\rho gh+\frac{\rho v^2}{2}=const$ ან

$p=const-\frac{\rho v^2}{2}, \qquad$ როცა $\qquad p>>\rho gh$.

ამ ვითარების შესაბამისად, წინააღმდეგობის ძალის კომპონენტები, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, გამოითვლება ინტეგრალებით:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= -\int_c p\cos(n,x)ds \\ R_y &= -\int_c p\cos(n,y)ds \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1.57)$$

რადგანაც n კონტურის გარე ნორმალია, ამიტომ

$\cos(n,x) = -\cos\theta, \qquad ds = ad\theta$ და

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi} v^2\cos\theta d\theta \\ R_y &= \frac{\rho a}{2}\int_0^{2\pi} v^2\sin\theta\, d\theta \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1.58)$$

სიჩქარის v^2-ის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ ფორმულით:

$$v^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 = \left(2u\sin\theta - \frac{k}{2\pi a}\right)^2 = \\ = 4u^2\sin^2\theta - \frac{2uk}{\pi a}\sin\theta + \frac{k^2}{4\pi a^2}. \qquad (2.1.59)$$

ამ გამოსახულების შეტანა R_x და R_y-ის ფორმულებში გვაძლევს

$R_x = 0, \quad R_y = -\rho uk$,

რაც წარმოადგენ ჟუკოვსკის სახელგანთქმულ ფორმულას, წინაღმდეგოების ძალის ვერტიკალური კომპონენტის ანუ ამწევი ძალის შესახებ ეს ფორმულა უჩვენებს რომ ამწევი ძალა გარემოს (გაზი, სითხე) ρ სიმკვრივის, გარემოს u სიჩქარის და მისი k-ცირკულაციის პროპორციულად იზრდება.

§2. 2. ნ. მუსხელიშვილის ერთი უცნობი პიდროდინამიკური ხელნაწერის მიმართება მის პირველ მონოგრაფიასთან: „კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის“

აკად ნ. მუსხელიშვილის პირველი მონოგრაფია - „კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის“ დაიწყო 1921 წ. ზაფხულზე და ხელნაწერი დაასრულა 1921 წ. 19 სექტემბერს სოფ. ბოგვში (ნ. მუსხელიშვილის დეიდის სოფელი?), სადაც

მან ზაფხული გაატარა ვინაიდან სოფ. მაწევანში დედულეთის მამული დარბეული იყო. ფრანგულად დაწერილი ეს ხელნაწერი წიგნად გამოიცა 1922 წ. წიგნის შესავალში ავტორი წერს: „ჩემი მიზანი იყო, რომ ეს წიგნი პირველად ქართულად გამომეცა, და შემდეგ იგი მემუარის სახით ერთ-ერთ უცხოურ ჟურნალში დამებეჭდა.

მაგრამ გარეშე მიზეზებმა, რომლებმაც ერთბაშად შეგვაწყვეტინა წესიერი, ურთიერთობა ევროპასთან (ხაზგასმა ჩვენია, შ კ) და თითქმის შეუძლებელი გახადა დაბეჭდილიყო ამოდენა მემუარი უცხოეთში, მაიძულა აქვე გამომეცა ეს წიგნი [30, გვ. 7]. შემდეგ ავტორი წერს: „ჩემი კვლევა-ძიების შედეგები ნაწილობრივ უკვე გამოქვეყნებულია სხვადასხვა ჟურნალებში; კერძოდ, არსებითი ნაწილი ორი უკანასკნელი თავისა მოთხრობილია ჩემს სტატიაში „Sur l'integration de l'equation biharmonique", რომელიც აკადემიკოსმა ვ. სტეკლოვმა რუსეთის მეცნიერებათა აკადემიას წარუდგინა დასაბეჭდათ" [30, გვ. 7].

უნდა აღინიშნოს, რომ ეს ნაშრომი, რომელიც დაიბეჭდა ფრანგულ ენაზე, ჟურნალ "Bull. de l'Acad. des Sc. de Russie", 1919, '12, 663-686, უკვე იყენებს კოშის ტიპის ინტეგრალს ბიჰარმონიულ განტოლებაზე დასაყვანად,. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოხსნისათვის და ეს უპირველეს ყოვლისა დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანებია, რომელთა შესახებ მანამ, 1915 და 1916 წლებში (პირველი პროფ. გ. კოლოსოვთან ერთად) მას გამოქვეყნებული ჰქონდა ორი ვრცელი ნაშრომი რუსულ ენაზე, რომლებშიც კოლოსოვის მეთოდით ამოხსნილი ჰქონდა ბრტყელი დრეკადობის და თერმოდრეკადობის მრავალი კონკრეტული სახის ამოცანა. მაგრამ, წიგნის შესავალში არაფერია მათზე თქმული. ამჟამად „მათემატიკური ფიზიკის..." II თავის - „მარტივი გამოყენებები, ლოგარითმული პოტენციალის თეორიასა და ჰიდროდინამიკაში"-ის ნაწილი - „გამოყენებანი ჰიდროდინამიკის ძირითად ამოცანაში" გვაინტერესებს ნ. მუსხელიშვილის პირველი მონოგრაფიის ეს ნაწილი მოიცავს წიგნის 62-76 გვერდებს და ჩვენს განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს, ვინაიდან ეს მასალა სტატიის სახით წინათ არ იყო გამოქვეყნებული. აღსანიშნავია ის გარემოება, რომ კოშის ტიპის ინტეგრალის ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნისადმი მიძღვნილი

სპეციალური სტატია, რომელიც „პერმის ფიზიკა-მათემატიკური საზოგადოების ჟურნალში“ გამოსაქვეყნებლად 1919 წ. დაიწერა და 1920 წ გაიგზავნა, არ დაბეჭდილა სამოქალაქო ომთან დაკავშირებით ჟურნალის დახურვის გამო, ხოლო სტატიის ხელნაწერი ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივში იქნა აღმოჩენილი.

ცხადია, ისმის საკითხი თუ რა მიმართებაშია ნ. მუსხელიშვილის ხელნაწერი სტატია "О решение некоторых контурных задач математической физики" მისივე წიგნთან „კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება...“ - სთან. სტატიის და წიგნის შესაბამისი ნაწილების შედარება უჩვენებს, რომ წიგნის წერის დროს სტატიის შესაბამისი ნაწილი პირდაპირ გადმოჰქონდა ავტორს ან გარემოების მიხედვით აფართოებდა და დებულებათა ფორმულირებას აზუსტებდა. შესავალ მათემატიკურ ნაწილს, რომელშიც განხილულია „კოშის ტიპის ინტეგრალები“ (გვ. 13-22) და „კონფორმული ასახვის შესახებ“ (გვ. 22-28), მოსდევს II თავის - „მარტივი გამოყენებები ლოგარითმულ პოტენციალის თეორიასა და ჰიდროდინამიკაში“ სამი „შესავალი მათემატიკური ნაწილი“ ამავე თავის IV ნაწილი მთლიანად ჰიდროდინამიკის ძირითადი ამოცანისადმი ამ მეთოდის გამოყენებას ეძღვნება. ამ ნაწილის შესახებ ჩვენ ზემოთაც ვწერდით, მაგრამ ამჯერად უფრო დაწვრილებით.

ხელნაწერი სტატიის (გვ.) და ფრანგული მონოგრაფიის 54-ე გვერდზე, ნ. მუსხელიშვილი აყალიბებს ჰიდროდინამიკის შემდეგ ბრტყელ ამოცანას:

„ვიპოვოთ უკუმშვადი სითხის ბრტყელი მოძრაობის სიჩქარეების U პოტენციალი, როცა წრეწირის შიგნით მოთავსებულ სითხეს a' წერტილში აქვს უსასრულოდ მცირე ხვრელი (ჩასადინარი), ხოლო γ-ს შიგნით a წერტილში არსებობს $2\pi k$ სიმძლავრის წყარო [30, გვ. 54].

მათემატიკური ფიზიკის ენაზე ეს ამოცანა ასეთი სახით აქვს განხილული ნ. მუსხელიშვილს:

„ვიპოვოთ ფუნქცია, ჰარმონიული γ წრეწირის შიგნით, გარდა a წერტილისა, სადაც ის იქცევა როგორც $K\ln|\varsigma - a|$; C საზღვარზე მოიცემა $\frac{\partial U}{\partial n}$-ის მნიშვნელობა:

$$\frac{dU}{dn} = f(\theta),\ \gamma\text{-ზე},$$

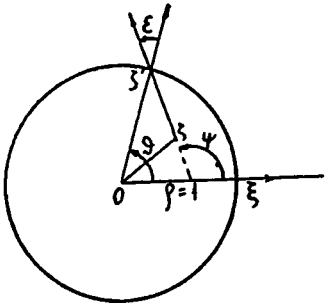
სადაც f არის რკალის ფუნქცია, განსაზღვრული შემდეგნაირად

$$f = f_0 = const,\ \text{როცა}\ \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + \varepsilon,$$

და $f = 0$, $\overline{\theta}$-ს დანარჩენი მნიშვნელობისათვის" [30, გვ. 52].

კომპლექსური $\zeta = \xi + i\eta$ ცვლადის წარმოდგენის $\zeta = re^{i\theta}$ და შესაბამისი ცვლადების გეომეტრიული სურათი ჩანს ნახაზიდან, რომელიც მოთავსებულია სტატიის მე და წიგნი მე-15 გვერდებზე და ასე გამოიყურება: ნახაზზე $\zeta = \rho e^{i\theta}$, (როცა $\rho = 1$, γ წირის წერტილებისათვის $\zeta' = e^{i\theta}$). r-ით აღინიშნება მანძილი ζ-სა და ζ'-ს შორის, ψ-თი აღინიშნება $\zeta'-\zeta$ სიდიდის არგუმენტი, რომელიც გამოისახება ფორმულით

$$\zeta' - \zeta = re^{i\psi} \qquad \text{(2.2.1) ნახაზი}$$



ხოლო $\varepsilon = \psi - \theta$ აღნიშნავს კუთხეს, რომელსაც ადგენს $\zeta'-\zeta$ ვექტორი γ-ს გარე n ნორმალთან ζ' წერტილში. ამასთან, ეს კუთხე აითვლება ნორმალიდან დადებითი მიმართულებით.

ამოცანის შესაბამისად დავუშვათ, რომ $r = |\zeta - a|$ და კომპლექსური პოტენციალი ანუ U ფუნქცია წარმოგვიდგება სახით:

$$U = U_1 + k \ln r. \qquad (2.2.2)$$

U_1 ფუნქცია უნდა იყოს ჰარმონიული ყველგან r-ის შიგნით და უნდა აკმაყოფილებდეს პირობებს:

$\Delta U_1 = 0$, γ-ას შიგნით

და $\dfrac{dU_1}{dn} = -k\dfrac{d\ln r}{dn} + f$, γ-ზე. (2.2.3)

ამ პირობით განსაზღვრული ამოცანის ამონახსნის არსებობისათვის, ნ. მუსხელიშვილი ამტკიცებს, რომ აუცილებელია შესრულდეს პირობა:

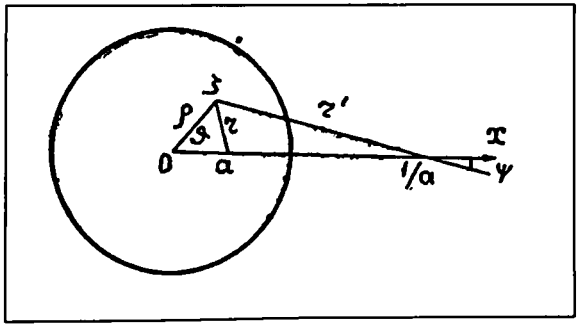
$$\int_0^{2\pi}\frac{dU_1}{dn}d\vartheta = -k\int_0^{2\pi}\frac{d\ln r}{dn}d\vartheta + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\varepsilon} f_0 d\vartheta = -2\pi k + \varepsilon f_0 = 0, \qquad (2\ 2.4)$$

ანუ

$$\varepsilon f_0 = 2\pi k\ , \qquad (2.2.4')$$

რომელსაც უწყვეტობის პირობას უწოდებს და აღნიშნავს: "$\varepsilon f_0 = 2\pi k$ ტოლობა ნიშნავს, რომ a წერტილში წყაროს მიერ წარმოქმნილ სითხის რაოდენობა ტოლია სითხის იმ რაოდენობისა, რომელიც გამოედინება a' ხვრელიდან [30, გვ. 54].

a და a' წერტილების განლაგება γ კონტურის მიმართ, მოცემულია მე-2 ნახაზზე.



ე.ი. $r = a$ და $a' = \dfrac{1}{a}$ წერტილები სიმეტრიულად არის განლაგებულნი γ კონტურის მიმართ, როცა γ ნამდვილია.

(2.2.4') უწყვეტობის პირობის დასამტკიცებლად ნ. მუსხელიშვილი ახდენს მე-(2.2.3) ფორმულაში იგივურ გარდაქმნას -

$$\lg r = \lg(\zeta - a) = \operatorname{Re}\lg(\zeta - a) = \frac{1}{2}\left[\lg(\zeta - a) + \lg(\bar{\zeta} - \bar{a})\right] \qquad (2.2.5)$$

სადაც $\bar{\zeta} = \xi - i\eta = re^{-i\theta}$, შეაქვს ის მე-(2.2.3) ფორმულის სახით მე-(2 2.2) განტოლებაში და ითვალისწინებს შემდეგ ფორმულებს (წიგნის §17-ის (25)-ე და (27*)-ე ფორმულები).

$$U = \frac{1}{2}\left[\varphi(\zeta) + \overline{\varphi(\zeta)}\right],$$

$$\frac{dU}{dn} = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta}\varphi'(\zeta') + e^{-i\theta}\overline{\varphi'(\zeta')}\right], \varphi'(\zeta) = \frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta}, \quad \overline{\varphi'(\zeta)} = \frac{d\overline{\varphi(\zeta)}}{d\zeta}$$

მაშინ სამართლიანია თანაფარდობა

$$\frac{d\lg r}{dn} = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i\theta}}{\zeta' - a} + \frac{e^{-i\theta}}{\bar{\zeta}' - a}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\zeta'}{\zeta' - a} + \frac{1}{1 - a\zeta'}\right] \qquad (2\,2.\,8)$$

და $U_1 = \operatorname{Re}\varphi_1$-ით მოცემული პოტენციალი $c = 0$-ის შემთხვევაში განისაზღვრება კოშის ტიპის ინტეგრალის საშუალებით: .

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_{\gamma} f\frac{\zeta' + \zeta_1}{\zeta' - \zeta_1}\frac{d\zeta'}{\zeta'} =$$

$$= \int^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_0}^{\theta_0 + \varepsilon} f_0\frac{\zeta' + \zeta_1}{\zeta' - \zeta_1}d\theta - \frac{k}{4\pi i}\int_{\gamma}\left(\frac{\zeta'}{\zeta' - a} + \frac{1}{1 - \overline{a\zeta'}}\right)\frac{\zeta' + \zeta_1}{\zeta' - \zeta_1}\frac{d\zeta'}{\zeta'}\right]. \qquad (2.2.9)$$

შემდეგ, ნ. მუსხელიშვილი აღნიშნავს, რომ $\frac{1}{a}$ წერტილი, როგორც მე-2 ნახაზიდან ჩანს არის γ - კონტურის გარეთ და კოშის ნაშთების თეორემის გამოყენებით ითვლის ინტეგრალს:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\left[\frac{\zeta'}{\zeta' - a} + \frac{1}{1 - a\zeta'}\right]\frac{\zeta' + \zeta}{\zeta' - \zeta}\frac{d\zeta'}{\zeta'} = \frac{2}{1 - a\zeta}, \qquad (2.2.10)$$

ხოლო $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_0 + \varepsilon} f_0\frac{\zeta' + \zeta}{\zeta' - \zeta}d\vartheta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\frac{\varepsilon f_0}{2\pi}\frac{a' + \zeta}{a' - \zeta} = k\frac{a' + \zeta}{a' - \zeta}$, (2.2.11)

სადაც ჩათვლილია, რომ $a' = e^{i\theta_0}$.

მე-(2.2.10) და მე-(2.2.11) სიდიდეების შეტანა მე-(2.2.9) გამოსახულებაში, გვაძლევს:

$$\varphi_1(\varsigma)=\int^{\varsigma}\left[-\frac{k}{1-a\varsigma_1}+k\frac{a'+\varsigma_1}{a'-\varsigma_1}\right]\frac{d\varsigma_1}{\varsigma_1}=k\lg\left(\varsigma-\frac{1}{a}\right)-2k\lg(\varsigma-a') \qquad (2.2.12)$$

სრული პოტენციალი

$$\varphi(\varsigma)=\varphi_1(\varsigma)+k\lg(\varsigma-a) \qquad (2.2.13)$$

ამიტომ

$$\varphi(\varsigma)=k\left[\lg(\varsigma-a)+\lg\left(\varsigma-\frac{1}{a}\right)-2\lg(\varsigma-a')\right]. \qquad (2.2.14)$$

მე-(2.2.7) ფორმულის გამოყენებით კი, ნ. მუსხელიშვილი ღებულობს საბოლოო ფორმულას:

$$U=k\lg\frac{rr_1}{r_2^2}, \qquad (2.2.15)$$

სადაც r,r_1,r_2 აღნიშნავს მანძილებს ς წერტილიდან შესაბამისად a წერტილამდე, γ-ს მიმართ a-ს შეუღლებულ წერტილამდე და a' წერტილამდე [30, გვ. 54]

როგორც მე-(2.2.15) ფორმულიდან ჩანს იგი თანხვედრაშია ლ. გ ლოციანსკის მონოგრაფიის „Механика жидкости газа"-ს, შედეგთან რომელიც წყაროს ჩადინების პოტენციალს წარმოადგენს ფორმულით [28, გვ. 172]:

$$|\overline{\varphi}|=\frac{Q}{2\pi}\ln r\,,\ \text{როცა}\ k=\frac{Q}{2\pi} \qquad (2.2.16)$$

საზოგადოთ, ნ. მუსხელიშვილის მონოგრაფიის II თავი, როგორც აღვნიშნეთ ლოგრითმული პოტენციალის თეორიაში (მარტივი და ორმაგი ფენის) და ჰიდროდინამიკაში კოშის ტიპის ინტეგრალის მარტივი გამოყენებისადმია მიძღვნილი. მაგრამ, ამ თავის IV ნაწილი, რომელიც წოდებულია „გამოყენებები ჰიდროდინამიკის ძირითად ამოცანაში," მთლიანად ეძღვნება გამოყენებთი მათემატიკის ამ დარგს, რაშიც აკად ნ. მუსხელიშვილის მიერ შეტანილი წვლილი, როგორც შემდეგ პარაგრაფში იქნება ამაზე თქმული, პრიორიტეტულ საკითხს წარმოადგენს.

ჰიდროდინამიკის ძირითადი ამოცანა, როგორც ნ. მუსხელიშვილი წერს მონოგარფიის 62-ე გვერდზე, „უშუალოდ დაიყვანება ნეიმანის ამოცანაზე,

რომელიც თავის მხრივ ძალიან კერძო შემთხვევაა §23-ის ამოცანისა“ [30, გვ. 62]. და იქვე მიუთითებს: „სხვათა შორის, შეიძლებოდა ამ ამოცანის ამონახსნის მიღება წრისათვის ნეიმანის ამოცანის ამოხსნისაგან, რომელიც გამოკვლეულია §18-ში“ [იქვე, გვ. 62].

მონოგრაფიის §25-ში მოცემულია ამოცანის ჩამოყალიბება, რომელსაც წინ უძღვის ამოცანის დასმა: „ვთქვათ, S არის (x,y) წერტილთა სიბრტყის არე, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული მარტივი წირით. განსახილველი ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს:

ვიპოვოთ უკუმშვადი სითხის უგრიგალო მოძრაობის სიჩქარეების განაწილება, როდესაც სითხეს S არე უკავია, თუ მოცემულია სიჩქარის ნორმალური f მდგენელის მნიშვნელობა S-ის C საზღვარზე; თუ S არე უსასრულოა, მაშინ ვუშვებთ რომ სიჩქარეები უსასრულობაში ნულია [30, გვ. 63].

ამ ამოცანის კონკრეტული, მუსხელიშვილისეული (1919 წ) და სედოვისეული (1935 წ.) ამოხსნისა და მათი შეჯერებისადმი შემდეგ პარაგრაფში იქნება განსჯა. ამჯერად კი ზოგადი შენიშვნებით შემოვიფარგლებით.

უპირველეს ყოვლისა, სითხის ბრტყელი მოძრაობის მოდელური წარმოდგენის შესახებ. ნ. მუსხელიშვილი წერს: „ცხადია, რომ სინამდვილეში აქ საკითხი ეხება (x,y) წერტილთა სიბრტყის პარალელურ მოძრაობას სივრცულ არეში, რომელიც შემოსაზღვრულია ამ სიბრტყის მართობული ცილინდრული ზედაპირით, ხოლო C არის ამ ზედაპირის პროექცია (x,y) წერტილთა სიბრტყეზე, რომელსაც შეიძლება შევუსაბამოთ მე-8 ნახაზი [იქვე, გვ. 69]. ახლა, „ძირითადი ამოცანის შესახებ ნებისმიერი არესათვის“. მონოგრაფიის §23-ში „ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის ძირითადი ამოცანა“:

„ვთქვა, S არის სასრული ან უსასრულო არე, შემოსაზღვრული შეკრული მარტივი C წირით. უნდა ვიპოვოთ ჰარმონიული ფუნქცია S-ში, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$a(s)\frac{\partial U}{\partial x}+b(s)\frac{\partial U}{\partial y}+c(s)U=f(s)\ \ C\text{-ზე} \qquad (2.2.17)$$

სადაც $a(s),b(s),c(s),f(s)$ აღნიშნავენ C წირის S რკალის მოცემულ ფუნქციებს [30, გვ. 58].

როგორც ვწერდით, ამ ზოგადი ამოცანის დაყვანას კონკრეტულ ამოცანებზე, დირიხლეს და ნეიმანის ამოცანების სახით ნ. მუსხელიშვილი განიხილავს §17-ში, რომელიც დასათაურებულია: „ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის შერეული ამოცანა წრიული არესათვის", სადაც მოტანილია ეს ამოცანა:

„ვიპოვოთ (ერთეულრადიუსიანი) γ წრეწირის შიგნით ჰარმონიული $U(x,y)$ ფუნქცია, თუ მოცემულია, რომ

$$l\frac{dU}{dn}+kU=f(\vartheta)\ -\ \gamma\text{-ზე}, \qquad (2\ 2.18)$$

სადაც k და l აღნიშნავენ მოცემულ მუდმივებს და n აღნიშნავს γ გარე ნორმალის მიმართულებას

ცხადია, როცა $k=1$ და $l=0$ მივიღებთ დირიხლეს ამოცანას:

$$U=f(\vartheta),\ \ U=\frac{1}{2}\left(\varphi(\zeta)+\overline{\varphi(\zeta)}\right),\ \ \gamma\text{-ზე}, \qquad (2.2\ 19)$$

ხოლო როცა $k=0,l=1$ ნეიმანის ამოცანას

$$\frac{dU}{dn}=f(\vartheta),\ \ \int_0^{2\pi}f(\vartheta)d\vartheta=0\ . \qquad (2.2.20)$$

(2.2.17)-ე გამოსახულების დაყვანა მუდმივი კოეფიციენტებიან (k,l) მე-18 პირობაზე არაა ტრივიალური ამოცანა, მაგრამ იგი ცხადია უფრო ზოგადია, რომელსაც მრავალი თაობის მათემატიკოსთა გამოკვლევები მიეძღვნა არა მარტო ჰიდროდინამიკაში და დრეკადობის თეორიაში, როგორც ამის შესახებ აკადემიკოსი სტეკლოვი და პროფესორი ტამარკინი სწერდნენ თავიანთი ზემოთ განხილულ რეცენზიაში, ნ. მუსხელიშვილის ამ წიგნის შესახებ.

ხელნაწერ სტატიასა და წიგნში, თითქმის უცვლელადაა მოტანალი წიგნის §13-ის დიფერენციალური განტოლება $\varphi(\zeta)$-სათვის; მასალა, რომელიც დეტალიზებულია „ლოგარითმული პოტენციალის თეორიის შერეული

ამოცანით წრიული არესათვის". აქვეა განხილული დირიხლეს და ნეიმანის ამოცანებისათვის $\varphi(\zeta)$-სათვის ამონახსნის აგების წესი. მაგრამ უფრო ზოგადი პირობისათვის, რომელიც წიგნში მოცემულია მე-(2.2.16)-ს სახით ხელნაწერ სტატიაში არ გვხვდება, ამიტომ აქ ვიძლევით მისი ძირითადი შინაარსის გადმოცემას:

ნ. მუსხელიშვილი წერს: „თუ დავუშვებთ (შდრ. 10), რომ

$$2U = \varphi_1(z) + \overline{\varphi_1}(z) \qquad (2.2\ 21)$$

მაშინ (60) პირობა (ანუ ჩვენ შემთხვევაში მე-(2.2 17) ფორმულით მოცემული პირობა შ.კ.) ასე ჩაიწერება:

$$(a+ib)\varphi'_1(z) + (a-ib)\overline{\varphi'_1(z)} + c[\varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)}] = 2f. \qquad (2\ 2.22)$$

მართლაც, თუ ვიგულისხმებთ, რომ კომპლექსური პოტენციალი

$$\varphi_1(z) = U + iV \quad \text{და} \quad \overline{\varphi}_1(z) = U - iV, \qquad (2.2.23)$$

მაშინ ადვილად მიღება თანაფარდობა

$$2U = \varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)} \qquad (2\ 2.24)$$

სადაც $\overline{\varphi_1(z)} = \overline{\varphi_1}(\overline{z})$, $\overline{z} = x - iy$

ასევე, წიგნის I თავის II განყოფილებაში (ძირითადი ამოცანა წრიული არესათვის) აღწერილი მტკიცების ანალოგიურად, მიიღება (2.2.22)-ე განტოლება.

შემდეგ, ნ. მუსხელიშვილი წერს: „ამ ამოცანის დასაყვანად წინა თავში (ანუ სტატიაში, შ.კ) განხილულ ამოცანაზე, დავუშვათ, რომ S არე კონფორმულად ავსახეთ ζ სიბრტყის ერთეულრადიუსიან σ წრეზე, რომლის ცენტრი $\zeta = 0$ სათავეშია.

ვთქვათ, $\omega(\zeta)$ არის ფუნქცია, რომელიც S არეს უთანადებს σ წრეს, ისე რომ $z = \omega(\zeta)$ წერტილი ერთხელ (და მხოლოდ ერთხელ) აღწერს S არეს, როცა ζ აღწერს σ-ს

ვიგულისხმოთ, რომ $\omega(\zeta)$ ჰოლიმორფულია ყველგან σ-ში გარდა იმ შემთხვევისა, როცა S არის უსასრულო; ამ შემთხვევაში $\omega(\zeta)$-ს გაჩნია σ-ში ერთი მარტივი პოლუსი, რომელიც შეესაბამება S-ის $z = \infty$ წერტილს ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ეს პოლუსი $\zeta = 0$

სათაველშია. ვიცით რომ $\omega'(\zeta)\neq 0$ σ-ში; ამას გარდა, ჩვენ დავუშვებთ, რომ $\omega'(\zeta)$ თანაბრად მიისწრაფის ნულისაგან განსხვავებული $\omega'(\zeta')$ ზღვრისაკენ, როცა ζ მისწრაფვის γ საზღვრის რაიმე ζ' წერტილისაკენ (შდრ. §6)" [30,გვ. 59]

S არის σ ერთეულოვანი რადიუსის არეზე კონფორმული გადასახვის აუცილებელი და საკმარისი პირობების ჩამოყალიბების და თანაფარდობათა

$$\varphi_1(\omega(\zeta))=\varphi(\zeta),\quad \varphi_1'(\omega(\zeta))=\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \tag{2.2.25}$$

გათვალისწინებით, ნ. მუსხელიშვილს (2.2.22)-ე განტოლება დაჰყავს

$$(a+ib)\frac{\varphi'(\zeta')}{\omega'(\zeta')}+(a-ib)\overline{\frac{\varphi'(\zeta')}{\omega'(\zeta')}}+c\left[\varphi(\zeta')+\overline{\varphi(\zeta')}\right]=2f \tag{2.2.26}$$

განტოლებაზე, რომელიც $\overline{\varphi(\zeta')}=\overline{\varphi\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}$

$\overline{\varphi(\zeta')}=\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$, $\overline{\omega(\zeta')}=\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)$ თანაფარდობათა გათვალისწინებით დაჰყავს·

$$(a+ib)\frac{\varphi'(\zeta')}{\omega'(\zeta')}+(a-ib)\frac{\overline{\varphi'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}}{\overline{\omega'\left(\frac{1}{\zeta'}\right)}}+c\left[\varphi(\zeta')+\varphi\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\right]=2f\,. \tag{2.2.27}$$

(2.2.27)-ე განტოლების ორივე მხარეს ამრავლებს $(2\pi i)^{-1}$ $(\zeta'-\zeta)^{-1}d\zeta$ გამოსახულებაზე და γ წირის მიხედვით ითვლის კოშის ტიპის ინტეგრალებს, რომლის შედეგად მიიღება განტოლება:

$$(a+ib)\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+(a-ib)\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\overline{\omega'(0)}}+c\varphi(\zeta)+c\overline{\varphi(0)}=\frac{1}{\pi i}\int\frac{fd\zeta}{\zeta'-\zeta}, \tag{2.2.28}$$

სადაც გათვალისწინებულია თანაფარდობანი

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta')d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta')}{\zeta'-\zeta}d\zeta'=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[a_n\zeta'^n+\ldots+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{\zeta'^k}\right]\frac{d\zeta'}{\zeta'-\zeta}=a_n\zeta^n+a_{n-1}\zeta^{n-1}+\ldots+a_0$$

და $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{b_k d\zeta'}{\zeta'^k(\zeta'-\zeta)}=0,\quad k=1,2,\ldots$ (2.2.29)

როცა $f(\zeta)$ ჰოლომორფულია C და γ-ს შორის მოთავსებულ არეში.

შემდეგ (2.2.28)-ე ნ მუსხელიშვილის დაჰყავს არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებაზე:

$$\varphi'(\zeta)+\frac{c}{a+ib}\omega'(\zeta)\varphi(\zeta)+K\omega'(\zeta)-F(\zeta)\omega'(\zeta)=0\,, \tag{2.2.30}$$

სადაც $K=\frac{a-ib}{a+ib}\frac{\overline{\varphi'(0)}}{\omega'(0)}+\frac{c\overline{(\varphi(0))}}{a+ib}$; $F(\xi)=\frac{1}{\pi i(a+ib)}\int\frac{fd\varsigma'}{\varsigma'-\varsigma}$ როცა $c\neq 0$,

რომლის ზოგად ამონახსნს წარმოადგენს შემდეგი სახით:

$$\varphi(\varsigma)=Ce^{\frac{c\omega(\varsigma)}{a+ib}}-\frac{a+ib}{c}K+e^{\frac{c\omega(\varsigma)}{a+ib}}\int_{\varsigma_0}^{\varsigma}F(\varsigma_1)\omega'(\varsigma_1)e^{\frac{c\omega(\varsigma_1)}{a+ib}}d\varsigma_1 \qquad c\neq 0 \qquad (2.2.31)$$

ჩვენ აქ არ მოვიტანთ (2.2.28) ამონახსნის სხვადასხვა კერძო შემთხვევებს და მხოლოდ $a=b=0$ და $c=1$ (დირიხლეს ამოცანა)-ის განხილვაზე შევჩერდებით. როგორც ნ. მუსხელიშვილი აღნიშნავს და (2.2.31)-ე გამოსახულებიდანაც ჩანს, ამ სახით წარმოდგენილი ამონახსნი ჰკარგავს აზრს. მაგრამ, ეს ამონახსნი შეიძლება მიღებული იქნას უფრო ზოგადი (2.2;28)-ე განტოლებიდან, რომელიც დაიყვანება სახეზე

$$\varphi(\varsigma)+\overline{\varphi(0)}=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{fd\varsigma'}{\varsigma'-\varsigma}, \qquad (2.2.32)$$

რომელშიც თუ შევიტანდით $\overline{\varphi(0)}$-ის მნიშვნელობას, რომელიც მოცემულია წიგნის (45)-ე გვერდზე ფორმულის სახით:

$$2\alpha=2\overline{\varphi(0)}=\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}f(\vartheta)\frac{d\varsigma'}{\varsigma'}, \qquad (2.2.33)$$

მაშინ, მიიღება დირიხლეს ამოცანის ცნობილი ამონახსნი

$$\varphi(\varsigma)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f\frac{\varsigma'+\varsigma}{\varsigma'-\varsigma}\frac{d\varsigma'}{\varsigma'}, \qquad (2.2.34)$$

მისგან გამომდინარე ყველა შედეგებით.

§2.3. ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანები და პირველობის საკითხები

დიდი ქართველი მათემატიკოსის ნიკო მუსხელიშვილის (1891-1976) ადრეული სამეცნიერო ნაშრომების შესწავლა და შეჯერება მისი ფუნდამენტური მონოგრფიების: 1) „კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის“ (1922) [30] 2) „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანა“, (1933, წ.) [31], 3) „სინგულარული ინტეგრალური განტოლებანი“ (1946) [32], თემატიკასთან, ძალზე საინტერესო საკვლევ საგანს წარმოადგენს; მით უფრო, რომ 1992 წ. გამოქვეყნდა ქართული თარგმანი მისი ფრანგულენოვანი პირველი მონოგრფიისა, რომელიც 1922 წელს გამოსცა თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტმა. მისი სამი მონოგრაფიის მასალის ზერელე შედარება ცხადყოფს, რომ თემატურად პირველი მონოგრაფია უფრო მდიდარია, ვიდრე მისი შემდეგდროინდელი მონოგრაფიები. კერძოდ, მათში არ არის შეტანილი კოშის ტიპის ინტეგრალით ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის თეორია და შესაბამისი მაგალითები.

ბეზანსონის (საფრანგეთი) უნივერსიტეტის პროფესორმა პ. კაპოდანომ, 1986 წ. გამოქვეყნებულ ნაშრომში „ნ ი. მუსხელიშვილის ერთი დავიწყებული ნაშრომის შესახებ“ [10], ყურადღება მიაქცია აკად. ნ. მუსხელიშვილის მიერ 1928 წ. იტალიის მეცნიერებათა აკადემიის ჟურნალში „Rendiconti“ -ში უ. ჩიზოტის წარდგინებით უზადო ფრანგულით დაწერილ სტატიას - „ორგანზომილებიანი ჰიდროდინამიკის ფუნდამენტური პრობლემის შესახებ“ [33], რომელშიც მოცემული იყო კუთხური წერტილების არმქონე, ნებისმიერი გლუვი პროფილის, მოძრავი უკუმშვადი იდეალური სითხით უგრიგალო გარსდენის ბრტყელი ამოცანის ამოსხნა“ [10, გვ. 239] შემდეგ, პ. კაპოდანო არასწორად გადმოსცემს იმ სიტუაციას, რამაც გამოიწვია ნ. მუსხელიშვილის პირველი მონოგრაფიის გამოქვეყნება თბილისის უნივერსიტეტში 1922 წ და არა, რომელიმე ევროპულ სამეცნიერო ჟურნალში, თუ გამომცემლობაში, რაც განპირობებული იყო, არა სამოქალაქო ომით და მასთან დაკავშირებული სიძნელეებით (როგორც კაპოდანო წერდა) არამედ დემოკრატიული საქართველოს „წითელი აგრესიით“, რომელმაც „... ერთბაშად შეაწყვეტინა საქართველოს წესიერი ურთიერთობა

ევროპასთან და თითქმის შეუძლებელი გახადა დაბეჭდილიყო ამოდენა მემუარი უცხოეთში...“ [30. გვ. 7].

ამ მონოგრაფიაში კოდირებულადაა გადმოცემული მასალა· ძირითადი ბიჭ არმონიული ამოცანისა, ლოგარითმულ პოტენციალთა თეორიისა და დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანების შესახებ. ეს საკითხები გაშლილ-გავრცობილ იქნა მისი მეორე მონოგრფიის - „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანის“, ხუთ რუსულ და 4 უცხოურ გამოცემაში, ხოლო კოშის ტიპის ინტეგრალის და მასზე დაფუძნებულ სინგულარულ ინტეგრალთა თვისებები ისე, როგორც მათ საფუძველზე - ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანები, დამუშავებულია მესამე მონოგარფიის - „სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა“ რვაჯერად (3 რუსულ, 2 ინგლისურ, 2 გერმანულ, 1 ქართულ) გამოცემებში. ცხადია, ნ მუსხელიშვილის I მონოგრაფიის ერთი მნიშვნელოვანი თავი - „გამოყენებანი ჰიდროდინამიკის ძირი-. თად ამოცანაში“, სადაც კოშის ტიპის ინტეგრალის საშუალებითაა ამოხსნილი ბრტყელი ჰიდროდინამიკის ძირითადი ამოცანა, შემდგომ, მონოგრფიული სახით არ დამუშავებულა და თითქმის დავიწყებას მიეცა.

შემდეგ, პ. კაპოდანო წერს· - „ისარგებლა რა, პროფილის გარე არის ერთეულოვან წრეზე კონფორმული გადასახვისათვის დამხმარე კომპლექსური სიბრტყით, ის ღებულობს კომპლექსური პოტენციალის წარმოებულს კოშის ტიპის ინტეგრალის სახით, ხოლო ინტეგრირების შემდეგ- თვით კომპლექსურ პოტენციალს.

მუსხელიშვილი აღნიშნავს, რომ კომპლექსური პოტენციალი პროფილის წინსვლითი მოძრაობის შემთვევაში გამოითვლება სიძნელეთა გარეშე და განიხილავს რამდენიმე მარტივ მაგალითს. მაგრამ 1928 წ. „დეი ლინჩეის“ აკადემიის წინაშე წარდგენილ ნაშრომში იგი წავიდა კიდევ უფრო შორს. მართლაც მან უჩვენა, რომ თვით კომლექსური პოტენციალი შეიძლება, ასევე, წარმოდგენილი იქნას კოშის ტიპის ინტეგრალის სახით. ე.ი სახით, რომელსაც აძლევს მას ჰიდროდინამიკის ბრტყელ ამოცანებში ლ.ი. სედოვის [6] და ჟ. კუშეს კლასიკური ნაშრომებში“ [10. გვ. 240].

ზემოთქმულის საილუსტრაციოდ მოვიტანთ ნ. მუსხელიშვილის პირველი მონოგარფიიდან - „გამოყენებები ჰიდროდინამიკის ძირითად ამოცანაში“. „25, ამოცანის ჩამოყალიბება“-დან საკითხის დასმას· „ვიპოვოთ უკუმშვადი სითხის

უგრიგალო მოძრაობის სიჩქარის განაწილება, როდესაც სითხეს უკავია S არე, თუ მოცემულია სიჩქარის ნორმალური მდგენელის მნიშვნელობა S-ის C საზღვარზე“ [30 გვ. 63].

ნ. მუსხელიშვილს შემოაქვს სიჩქარის U(x,y) პოტენციალი, ხოლო მისი x და y მდგენელები აკმაყოფილებენ პირობებს

$$u = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2\,3\,1)$$

U(x,y) ფუნქცია აკმაყოფილებს, აგრეთვე ჰარმონიულობისა და სასაზღვრო პირობებს

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{S-ზე, ხოლო} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = f \ , \ \text{C-ზე (2).} \qquad (2.3\,2)$$

შემდეგ, ნ. მუსხელიშვილს შემოაქვს კომპლექსური პოტენციალი $w(z)$ რომლისთვისაც $U = \mathrm{Re}\varphi_1(z)$, $z = x + iy$ და გადამსახავი ფუნქცია $z = \omega(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$ რომელთა შესაბამისად, $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta))$ ფუნქციის საშალებით $\frac{\partial U}{\partial n}$ -ს გამოსახავს w - კომპლექსური პოტენციალის საშუალებით. $\zeta \le 1$ წრეწირის შემომსაზღვრელ კონტურისათვის ამტკიცებს თანაფარდობას:

$$\zeta'\varphi'(\zeta') + \frac{1}{\zeta'}\overline{\varphi'}\left(\frac{1}{\zeta'}\right) = 2f(\theta)|\omega'(\zeta')| \qquad (2.3.3)$$

(სადაც $\varphi'(\zeta') = \frac{d\varphi}{d\zeta'}$ $\overline{\varphi'} = \frac{d\overline{\varphi}}{d\zeta'}$ $\zeta = \rho \cdot e^{i\theta}$),

რომლის გამრავლებით $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\zeta'}{\zeta' - \zeta}$ მამრავლზე და კომპლექსურ სიბრტყეში ინტეგრებით, ღებულობს კომპლექსურ პოტენციალს:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\zeta}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\int_\gamma f|\omega'(\zeta')|\frac{\zeta' + \zeta}{\zeta' - \zeta}\cdot\frac{d\zeta'}{\zeta'} + \frac{Ki}{2\pi}\ln\zeta \qquad (2.3.4)$$

ჩვენ, აქ არ დავაკონკრეტებთ (2 3.4.) ფორმულის ჰიდროდინამიკური გამოყენების სხვადასხვა მაგალითებს, რომლებიც განხილულია ნ მუსხელიშვილის 1922 წ. გამოქვეყნებულ მონოგარფიაში, ამჯერად, ჩვენ გვაინტერესებს

---

[1] ხელნაწერი „О решение некоторых контурных задач математической физики“, რომელიც იახება აკად ნ მუსხელიშვილის საოჯახო არქივში, მოგვაწოდა ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატმა ქალ-ხმა მარიხა მუსხელიშვილმა, რისთვისაც მადლობას მოვახსენებთ მას

უნიკალური ხელნაწერი, რომელიც დაიწერა 1919 20/XII და გაიგზავნა "პერმის ფიზიკა-მათემატიკური საზოგადოების მოამბის" მე-2 გამოშ. 1920 წ. ამ ხელნაწერიდან განვიხილავთ, მხოლოდ მყარი საზღვრის მქონე სხეულის გარსდენადი სითხის მოძრაობას, რომლისთვისაც სიჩქარის მრუდწირული მდგენელები საზღვრის მიმდებარე წერტილებში გამოისახება ფორმულით [30, გვ. 70]

$$v'_\rho - iv'_\theta = -\frac{i\Omega}{|\omega'(\zeta')|}\overline{\omega(\zeta')}\cdot\omega'(\zeta')\zeta' \ , \qquad (2\,3.5.)$$

Ω სხეულის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა

რომლის შესაბამისად კომპლექსური პოტენციალის ინტეგრების შედეგი ელიფსური საზღვრის შემთხვევაში, როცა გადამსახავი ფუნქცია .

$$z = \omega(\zeta) = b\left(\zeta + \frac{a}{\zeta}\right), \quad a \geq 1, \quad b > 0,$$
$$x = b\left(\rho + \frac{a}{\rho}\right)\cos\theta. \quad y = b\left(\rho - \frac{a}{\rho}\right)\sin\theta, \qquad (2.3.6.)$$

განისაზღვრება ფორმულით:

$$\varphi(\zeta) = -i\Omega ab^2\zeta^2 \text{ როცა } \overline{K} = 0 \quad . \qquad (2.3.7.)$$

მოცემული $\varphi(\zeta)$ -სთვის მყარი საზღვრის მიმდებარე სითხის სიჩქარის მდგენელებისათვის ნ. მუსხელიშვილი ღებულობს ფორმულებს:

$$v_\rho = \frac{2\Omega ab\rho^3\sin 2\theta}{\sqrt{\rho^4 - 2a\rho^2\cos 2\theta + a^2}},$$
$$v_\theta = \frac{2\Omega ab\rho^3\cos 2\theta}{\sqrt{\rho^4 - 2a\rho^2\cos 2\theta + a^2}}, \qquad (2.3.8.)$$

რომლებიც მოცემულია ნ. მუსხელიშვილის I მონოგრაფიაში [30, გვ. 74].

აქვე, მოკლედ განვიხილავთ ლ. სედოვის მიერ 15 წლის შემდეგ ამოსხნილ ამოცანას. აკადემიკოსი ლ. სედოვი, თავის ფუნდამენტურ მონოგრაფიაში (1966), რომლის პირველი გამოცემა (1950) დაიწერა, მისი ფუძემდებლური გამოკვლევის (1935) საფუძველზე, იგი მანიპულირებას ახდენს მახასიათებელ ფუნქციაზე, რომელიც განიხილება, როგორც კომპლექსური პოტენციალი

$$\omega_{k_\tau}(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_k \varphi_0(\zeta')\frac{\zeta' + \zeta}{\zeta' - \zeta}\cdot\frac{d\zeta'}{\zeta'} \ , \qquad (2.3.9.)$$

სადაც $\varphi_0 = U_0 y - V_0 x - \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2)$ (2.3.10.)

და U_0, V_0 არის სითხის გადატანითი მოძაორობის სიჩქარის მდგენელები ან $q = U_0 + iV_0$ და Ω მოძრავი სითხის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

$\omega_0(z)$ ფუნქციას იგი წარმოადგენს სახით:

$$\omega_0(z) = U_0\omega_1(z) + V_0\omega_2(z) + \Omega\omega_3(z), \qquad (2.3.11)$$

სადაც $\omega_k(z) = \varphi_k(z) + i\psi_k(z), \quad k = 1,2,3$ (2.3.12)

ხოლო $\psi_1 = y, \quad \psi_2 = -x, \quad \psi_3 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2).$ (2 3.13.)

აკად. ლ. სედოვის თანახმად $\omega_1(\zeta)$ და $\omega_2(\zeta)$ ან კომბინაცია $U_0\omega_1(\zeta) + V_0\omega_2(\zeta)$ ადვილად გამოისახება $f(\zeta)$ -ის საშუალებით, როცა გადამსახვი ფუნქცია

$$z = f(\zeta) \equiv \omega(\zeta) = \frac{k}{\zeta} + k_0 + k_1\zeta + k_2\zeta^2 + \ldots \qquad (2.3.14)$$

მართლაც, იგი განიხილავს გამოსახულებას

$$U_0\omega_1(\zeta) + V_0\omega_2(\zeta) = \bar{q}_0 f(\zeta) - \frac{q_0 k}{\zeta} - q_0\bar{k}\zeta = \qquad (2.3.16.)$$

$$= (k_1\bar{q}_0 - \bar{k}q_2)\zeta + q_0 k_2\zeta^2 + \ldots$$

კომპლექსური შეუღლების შემოტანით

$$\bar{z} = \overline{f(\zeta)} = \overline{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \bar{k}\zeta + \bar{k}_0 + \bar{k}_1\frac{1}{\zeta} + \bar{k}_2\frac{1}{\zeta^2} + \ldots \qquad (2.3\ 17.)$$

და მე-13 აღნიშვნების გათვლისწინებით, ადგენს თანაფარდობას:

$$\operatorname{Im}\omega_3(\zeta) = -\frac{i}{2} f(\zeta)\overline{f}\left(\frac{1}{\zeta}\right), \qquad (2.3.18.)$$

საიდანაც მიიღება გამოსახულება

$$\omega_3(\zeta) = \frac{-1}{4\pi}\int_\zeta f(\zeta')\overline{f}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{\zeta' + \zeta}{\zeta' - \zeta}\cdot\frac{d\zeta'}{\zeta'}. \qquad (2.3.19.)$$

მახასიათებელი ფუნქციის ზოგადი გამოსახულება კი ლ. სედოვის მიხედვით ჩაიწერება სახით [34, გვ. 17]:

$$\omega(\zeta) = \bar{q}f(\zeta) - \frac{\bar{q}_0 k}{\zeta} - q_0\bar{k}\zeta - \frac{\Omega}{4\pi}\int_K f(\zeta')\overline{f}\left(\frac{1}{\zeta'}\right)\frac{\zeta' + \zeta}{\zeta' - \zeta}\frac{d\zeta'}{\zeta'} - \frac{1}{2\pi i}\ln\zeta. \qquad (2.3.20.)$$

ცხადია, მუსხელიშვილისეული მე-(2.3.4.) და სედოვისეული მე-(2.3.20.) გამოსახულებანი კოშის ტიპის ინტეგრალიდან ინტეგრების ოპერაციის კორექტულ შესრულებაზე დადის, შემდგომი დეტალიზაციის გარეშე.

როგორც პროფ. პ. კაპოდანო აღნიშნავს, აკადემიკოს ს.ა. ჩაპლიგინის შრომები ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების შესახებ, რომლებიც ანზოგადებს აკად. ნ.ე. ჟუკოვსკის და ვ. კუტას აეროდინამიკურ ნაშრომებს, განეკუთვნება 1926 წ. რომელიც შემდეგ ჰიდროდინამიკაში განაზოგადა აკად. ლ სედოვმა 1935 წელს. ამავე წლებს განეკუთვნება იტალიელი მექანიკოსების: ე კაინაფოლის (1928)., ბ. კალდონაცოს (1930), კ კონსილიოს (1932), კ. გოსტინელის (1935) და სხვა იტალიელი, რუსი და ფრანგი მეცნიერის შრომები ჰიდროდინამიკიდან [10, გვ. 240]. ზემოთქმულის საფუძველზე, პ. კაპოდანო წერს: „იდეალური უკუმშვადი სითხის არასტაციონარული და უგრიგალო მოძრაობა, მოძრავი პროფილის ირგვლივ, მუდმივი ცირკულაციით, დაფუძნებულია კომპლექსური პოტენციალის განსაზღვრაზე: **იქმნება შთაბეჭდილება, რომ ავტორები, რომლებიც მუშაობდნენ აღნიშნულ თემატიკაში, არ იცნობდნენ ნ.ი. მუსხელიშვილის საუცხოო სტატიას, რომელშიც განხილული ძირითადი ამოცანა ამოსხნილი იყო პირველად** (ხაზგასმა ჩვენია შ.კ.) [10. გვ. 241].

პ. კაპოდანოს, ჩვენს მიერ ხაზგასმული მტკიცება კიდევ უფრო საყურადღებოა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ 1927 წ. მათემატიკოსთა სრულიად რუსეთის ყრილობაზე ნ. მუსხელიშვილი, წაკითხული მოსხენების-„**О некоторых котурных задачах плоской гидродинамики**“ [35, ст 262] თეზისებში ამტკიცებდა:

„**ამ ნაშრომში ავტორი ამტკიცებს, რომ იგივე თეორემა შეიძლება გავრცელებულ იქნას ბლანტ სითხეზე** (ხაზგასმა ჩვენია ,შ.კ.), თუ მხოლოდ ჩვეულებრივი მისაღები მიახლოებით შემოვიფარგლებით, რომელიც საშუალებას გვაძლევს განსახილველი ამოცანა დაყვანილ იქნას ბიჰარმონიული განტოლების ინტეგრირებაზე. დამტკიცებისათვის ავტორი სარგებლობს ბიჰარმონიული განტოლების ამოხსნის თავისივე მეთოდით, რომელიც გადმოცემულია მის სტატიაში „Sur lintegration de lequation biharmonique“ (Изв. Росс. FY 1919) და წიგნში „Applications... phisique matehematique“ (Tiflis 1922) [35, გვ. 262].

ცხადია, ეს ნაშრომი, რომელშიც ამოხსნილია ბლანტ (არაიდეალურ) სითხეში მოძრავი პროფილის ძირითადი ბრტყელი ამოცანა, შემდეგ არ დაბეჭდილა და იგი ხელნაწერის სახით უნდა ინახებოდეს დიდი მეცნიერის არქივში. ამ ნაშრო-

მის განხილვაში ყრილობაზე მონაწილეობდნენ პროფესორები გ.ვ. კოლოსოვი და ვ.ნ. ვენიამინოვი.

შემდეგ, ნ. მუსხელიშვილი წერს: „კერძოდ, მიიღება ძალზე მარტივი ფორმულები ბლანტ სითხეში მოძრავი ელიფსური კონტურისათვის" [იქვე. 262]

სამწუხაროდ, აკად. ნ. მუსხელიშვილის მეთოდით ჰიდროდინამიკური ამოცანების ამოხსნას არ აღმოუჩნდა გამგრძელებელი, მის ქართველ და რუს მოწაფეთა შორის, რამაც გამოიწვია ამ თემატიკის განუსაზღვრელი დროით გადავადება და მივიწყება იმდენად, რომ 60-იან წლებში მის ავტორს აღარ ახსოვდა, რომ 20-30-იან წლებში მან პირველმა ამოხსნა იდეალური და რეალური სითხეებისათვის ბრტყელი კონტურული ამოცანები.

ბლანტ სითხეში მოძრავი ელიფსური კონტურის გარსდენის შესახებ მუსხელიშვილის მიერ დასმული საკითხის შესახებ არაფერია თქმული პიერ კაპოდანოს ვრცელ მოხსენებაშიც, რომლითაც იგი გამოვიდა ნ მუსხელიშვილის დაბადებიდან 100 წლისთავისადმი მიძღვნილ „უწყვეტ ტანთა მექანიკისა და ანალიზის მონათესავე საკითხებისადმი" მიძღვნილ საერთაშორისო სიმპოზიუმზე 1991 წ. თბილისში და რომელიც 1993 წ. დაიბეჭდა სტატიის სახით, სადაც იგი შესავალში წერს: „არაციირკულირებად და უკუმშვად მოძრავ სითხეში ნებისმიერი პროფილის მოძრაობის საკითხები შესწავლილი იყო მრავალი ავტორის მიერ, განსაკუთრებით ე. ბელტრამის, ს.ა. ჩაპლიგინის, ჭ. კარაფოლის, ბ. კალდონაცის, ჯ. პერესის, კ იაკობის, ა. კონსილიოს, კ. გოსტინელის, სპეციალურად ჰ იდროდინამიკის მოსკოვური სკოლის წარმომადგენლების ლ. ი. სედოვის, მ. ვ კელდიშის, ა.ი. ნეკრასოვის და გ. კუშეს მიერ, მაგრამ კოშის ანალოგიური ინტეგრალის საშუალებით ეს საკითხი პირველად მოცემულია ნ მუსხელიშვილის არც თუ კარგად ცნობილ სტატიაში, რომელიც დაწერილი იყო საუცხოო ფრანგულით და გამოქვეყნებული - „Rendiconti dell Accademie dei Lincei"-ში 1928 წ. უ. ჩიზოტის წარდგინებით" [36. გვ. 108].

ჯერ კიდვ გაურკვეველი მიზეზებს გამო, აკად ნ. მუსხელიშვილის ინტერესი ბრტყელი ჰიდროდინამიკის ამოცანებისადმი თანდათან მინელდა, ხოლო 60-იან წლებში საყოველთაო დავიწყებას მიეცა [1].

II თავის დასკვნები

განხილულია ნ. მუსხელიშვილის სადოქტორო დისერტაციის დაცვის ჩაშლის გამომწვევი მიზეზები. პირველადი პუბლიკაციის სახით ქვეყნდება ნ. მუსხელიშვილის საოჯახო არქივში დაცული ფრანგულენოვანი მონოგრაფის, დიდი ფრანგი მათემატიკოსის ჟ. ადამარის, აკად. ვ. სტეკლოვის და პროფ. ი. ტამარკინის, რეცენზიები, რომლებშიც მაღალი შეფასება ეძლევა სარეცენზიო დისერტაცია-მონოგრაფიას.

ჩატარებულია ნ. მუსხელიშვილის უცნობი ჰიდრონიდამიკური ნაშრომის (1919წ.) და „კოშის ტიპის ინტეგრალის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის... ჰიდროდინამიკური ნაწილების შედარებითი ანალიზი, დადგენილია, რომ აღნიშნული ვრცელი ჰიდროდინამიკური ნაშრომის ნაწილები ან მთლიანად იქნა შეტანილი წიგნში, ან გაფართოებული სახით (მაგ. III ნ. ძირითადი ამოცანა ნებისმიერი არისათვის).

თავი III. საშალენტო ელექტრონის მოძრაობის ამოცანა, ბორი-ზომერფელდის კვანტურ თეორიაში

§ 3. 1. საშალენტო ელექტრონის ელიფსური მოძრაობის დაკვანტვის ამოცანა წყალბადისმსგავს ატომში

წრიული ორბიტებისათვის ელექტრონის მოძრაობის და დაკვანტვის ამოცანა, რომელიც მოცემული იყო ნილს ბორის 1913 წ. გამოქვეყნებულ სამ ნაშრომში [37, გვ. 84-148], 1915 წ. განზოგადებულ იქნა ა ზომერფელდის [38, 102-111] მიერ. როგორც თავად ა. ზომერფელდი წერს· ელიფსური დაკვანტვის პირობა განაზოგადეს ვ. ვილსონმა და დ. ჰოვარამ იმავე 1915 წ [38, გვ. 70].

ამ თეორიის მიხედვით, ელექტრონის კეპლერულ ანუ ელიფსურ ორბიტაზე მოძრაობა უნდა აღიწეროს პოლარ კოორდინატებში.

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 < r < \infty,\ 0 < \varphi < 2\pi, \qquad (3\ 1\ 1)$$

რომლისთვისაც ელიფსური ორბიტის ds ელემენტი

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi = dx^2 + dy^2 \qquad (3.1.2)$$

ხოლო კინეტიკური და პოტენციური ენერგია

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(r^2 + r^2\varphi^2\right), \qquad U = -\frac{Ze^2}{r} \qquad (3.2.3)$$

თანახმად ჰამილტონ-იაკობის განტოლების მრუდწირულ კოორდინტთა სისტემაში გამოსახვის წესისა [38, გვ. 92] განზოგადებული იმპულსი

$$P_i = \frac{\partial T_k}{\partial q_i},\ q_i = (q_r, q_\varphi). \qquad (3.2.4)$$

ამიტომ იმპულსის მდგენელები

$$p_r = mr,\ p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}. \qquad (3.1.5)$$

რომელთა გათვალისწინებით, ატომური ელექტრონის სრული ენერგია

$$W = T_r + U_g = \frac{m}{2}\left(r^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{Ze^2}{r} \qquad (3.1.6)$$

იგივე სრული ენერგია. $W \equiv H$ ჰამილტონის ფუნქციაა, საიდანაც მიიღებულ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას აქვს სახე:

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_k};q_k\right)=W,\ \frac{\partial S}{\partial q_k}=p_k \qquad (3.1.7)$$

რომელშიც ქმედების ფუნქციის $S_0=+Wt+S$, გათვალისწინება (3.1.7)-ში ჰამილტონ-იაკობის განტოლება გვაძლევს

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right]-\frac{Ze^2}{r}=W, \qquad (3.1.8)$$

ხოლო იმპულსის პოლარ-მდგენელები

$$P_r=\frac{\partial S}{\partial r},\ P_\varphi=\frac{\partial S}{\partial \varphi} \qquad (3.1.9)$$

და ქმედების ფუნქციების ანუ მომენტის მდგენელები

$$I_z=\oint\frac{\partial S}{\partial r}dr,\ I_\varphi=\oint\frac{\partial S}{\partial \varphi}d\varphi. \qquad (3.1\ 10)$$

ელიფსური დაკვანტვის ბორი-ზომერფელდის პირობას ამ შემთხვევაში აქვს სახე:

$$I_i=\oint\frac{\partial S}{\partial q_i}dq_i=n_ih\ \ (i=r,\varphi), \qquad (3.1.11)$$

რომლებიც მდგენელებში ასე გადაიწერება:

$$\left.\begin{aligned}I_r&=\oint\frac{\partial S}{\partial r}dr=n_rh\\ I_\varphi&=\oint\frac{\partial S}{\partial \varphi}d\varphi=n_\varphi h\end{aligned}\right\}. \qquad (3.1.12)$$

(3.1.8) -დან $\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2=2mW+\frac{2mZe^2}{r}-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2$ (3.1.13)

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\sqrt{A+2\frac{B}{r}+\frac{C}{r^2}}, \qquad (3.1.14)$$

სადაც $A=2mw,\ B=mZe^2,\ C=-\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ელიფსური მოძრაობის შემთხვევაში

$$P_\varphi=\frac{\partial S}{\partial \varphi}=mr^2\dot{\varphi}=mrv=const,$$

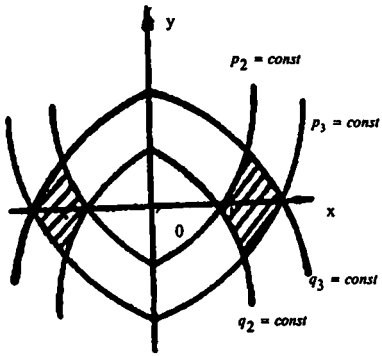
მაშინ $I_\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{\partial S}{\partial \varphi}d\varphi=P_\varphi\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi P_\varphi=n_\varphi h$ (3.1.15)

და $C=-\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2=-\frac{n_\varphi^2 h^2}{4\pi^2}=-P_\varphi^2.$

რომელთა გათვალისწინებით, რადიალური დაკვანტვის პირობაა:

$$I_r=\oint\sqrt{A+2\frac{B}{r}+\frac{C}{r^2}}dr=n_r h \qquad (3.1\ 16)$$

n_φ და n_r რიცხვებს (3.1.15) და (3.1.16) ფორმულებში უწოდებენ აზიმუტალურ და რადიალურ კვანტურ რიცხვებს ამასთან, (3 1.16) გამოსახულებაში ინტეგრების საზღვრები მოიცავს z_{min} და z_{max}-ის ყველა წერტილს. ინტეგრალი გამოითვლება $z=\mathrm{Re}\,z+i\,\mathrm{Im}\,z$ კომპლექსურ სიბრტყეში [38, გვ. 529]



z_{min} და z_{max} წერტილების რიცხვითი მნიშვნელობის პოვნა შეიძლება

$$I=\oint\sqrt{A+2\frac{B}{z}+\frac{C}{z^2}}dz \qquad (3.1.17)$$

ფესქვეშა გამოსახულებიდან მიღებული კვადრატული განტოლების

$$Az^2+2Bz+C=0$$

ამოხსნით. ფესვების $z_{min}\Rightarrow 0$ და $z_{max}\Rightarrow\infty$ შესაბამისად (3.1.17) ინტეგრალის პოლუსები იმყოფება $z=0$ და $z=\infty$ შუალედურ წერტილებში, ამიტომ $z=0$ წერტილში ინტეგრალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ლორანის მწკრივად გაშლის სახით და $z=0$ პოლუსის მიმართ ჩავწეროთ:

$$I_z = \sqrt{C}\int_0^{\infty}\frac{dz}{z}\left(1+\frac{B}{C}z+\ldots\right). \qquad (3.1.18)$$

მაშინ, კოშის ფორმულის თანახმად,

$$I_{z1} = -2\pi\sqrt{C}\,. \qquad (3.1.18)'$$

ასევე, $S = 1/z$, $dz = -\frac{ds}{s^2}$ გარდაქმნით (3.1.17) დაიყვანება გამოსახულებაზე

$$I_{z2} = -\int_0^{\infty}\sqrt{A+2Bs+Cs^2}\,ds = -\int\sqrt{A}\left(1+\frac{B}{\sqrt{A}}s+\ldots\right)\frac{ds}{s^2}, \qquad (3\ 1\ 18)''$$

რომლისათვის ინტეგრალის ნაშთი $s=0$ წერტილში არსებობს, განისაზღვრება s^{-1}-ის შესაბამისი წევრით და ტოლია:

$$I_{z2} = +2\pi i\frac{B}{\sqrt{A}}. \qquad (3.1.19)$$

ამრიგად $J = I_{z1} + I_{z2} = -2\pi i\left(\sqrt{C}-\frac{B}{\sqrt{A}}\right)$, (3.1.20)

რომლის შეტანა (3.1.16) დაკვანტვის პირობაში მოგვცემს:

$$-2\pi i\left(-i\frac{n_\varphi h}{2\pi}-\frac{mZe^2}{\sqrt{2mW}}\right) = n_r h\,, \qquad (3.1.21)$$

საიდანაც მიიღება გამოსახულება:

$$\frac{2\pi i mZe^2}{\sqrt{2mW_n}} = (n_\varphi + n_r)h\,, \qquad (3.1.22)$$

ანუ $W_n = -\frac{Z^2e^4}{2\hbar^2}\frac{m}{n^2}$, $n = n_r + n_\varphi$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, (3.2.23)

სადაც n არის ბორის ელემენტარული კვანტური თეორიის შესაბამისი მთავარი კვანტური რიცხვი, რომელიც რადიალური n_r და ორბიტული (აზიმუტური) n_φ კვანტური რიცხვების ჯამის ტოლია.

ელექტრონის ელიფსური მოძრაობის ფორმის და ზომის შესახებ, პერიჰელიუმის - r_{min} და აფელიუმის - r_{max} შესაბამისად მანძილებს ვიპოვით $p_r = 0$-ის პირობიდან, რომელიც გვაძლევს r-ის მიმართ განტოლებას

$$2mwr^2 + 2mZe^2r - n_\varphi\hbar^2 = 0 \qquad (3.1.24)$$

ელიფსის დიდი ნახევარღერძის გაორმაგებული სიდიდე

$$a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{\hbar^2 n^2}{mZe^2}. \qquad (3.1.25)$$

რადგანაც

$$b^2 = a^2 - c^2, \qquad (3.1.26)$$

სადაც c^2 არის ფოკუსური მანძილი, ამიტომ

$$b^2 = (a-c)(a+c) = r_{min} r_{max}. \qquad (3.1.27)$$

$$b = \frac{\hbar^2 n n_\varphi}{Zme^2} = a\frac{n_\varphi}{n}. \qquad (3.1.28)$$

ამგვარად, ელიფსურ ორბიტაზე ელექტრონის მოძრაობის დროს, ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძების სიდიდე განისაზღვრება ფორმულებით:

$$a = a_1 \frac{(n_r + n_\varphi)^2}{Z},\ b = a_1 \frac{(n_r + n_\varphi)n_\varphi}{Z},\ a_1 = \frac{\hbar^2}{me^4}. \qquad (3.1.24)$$

კეპლერის მეორე კანონის შესაბამისად, ფართითი სიჩქარე ანუ $P_\varphi / m = \nu_\varphi$ მუდმივი სიდიდეა; მართლაც

$$V_\varphi = \frac{P_\varphi}{m} = r^2 \varphi = \frac{1}{m}\hbar \quad n_\varphi = const \qquad (3.1.25)$$

ხოლო მესამე კანონის მიხედვით, პერიოდის კვადრატის დიდ ნახევარღერძის კუბთან ფარდობა მუდმივი უნდა იყოს. მართლაც, რადგანაც $\frac{P_\varphi}{m} = r^2\dot{\varphi}$ არის რადიუსვექტორის მიერ აღწერილი ელიფსის ფართობის გაორკეცებული სიდიდე და იგი ტოლია $2S = 4\pi ab$, ამიტომ გარშემოვლის პერიოდი

$$T = \frac{2mS}{P_\varphi} = \frac{4\pi^2 m}{n_\varphi n} ab = \frac{n^3\hbar^3}{4\pi^2 mZ^2 e^4}, \qquad (3.1.26)$$

ხოლო

$$\frac{T^3}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{Ze^2} = const \qquad (3.1.27)$$

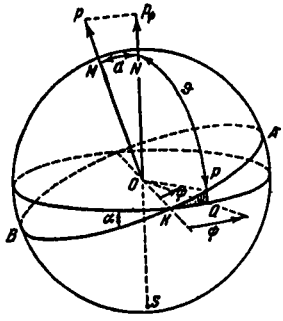
ა. ზომერფელდის მიერ მიუნხენის აკადემიის გამოცემაში 1915 წ. გამოქვეყნებულმა შრომამ, რომელმაც საფუძველი დაუდო რა ატომური ელექტრონის ელიფსური ბრტყელი მოძრაობის კვანტურ თეორიას

ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალებისა და დაკვანტვის ბორის პირობის განზოგადებით, რომელსაც აქვს სახე:

$$I_i = \oint p_i dq_i = n_i h \ (i = r, \varphi), \qquad (3\ 1.28)$$

შემდეგ გახდა ელექტრონის სივრცითი და რელატივისტური მოძრაობის განხილვის საგანი, რომელშიც მონაწილეობდნენ ფიზიკოს-თეორეტიკოსთა მთელი თაობა (ნ. ბორი, ა. ზომერფელდი, ვ. ვილსონი, დ. იშივარი, პ. დებაი და სხვები).

უპირველეს ყოვლისა, ბორი-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობა განზოგადოებული უნდა ყოფილიყო ატომური სავალენტო ელექტრონის სივრცითი მოძრაობის შემთხვევაში. ასეთი მოძრაობის დაკვანტვა შეიძლება იმ შემთხვევაში, თუ მოცემულია რომელიღაც უპირატესი მიმართულება, რომლის მიმართ შეიძლება განსაზღვრული იქნეს ორბიტის ორიენტაცია. გრაფიკულად ეს ორიენტაცია გამოისახება ნახაზზე, რომელსაც ძალზე ეფექტურად იყენებდა ნ. მუსხელიშვილი თავის ქვემოდ განსახილველ სტატიაში, ზოგიერთი აღნიშვნების ცვლილებით.



ამ ნახაზზე ცხადია, ასეთი ორიენტირებული მიმართულება სივრცეში დაკავშირებულია გარე მაგნიტური ველის მიმართულებასთან. მაგნიტური ველის მიმართულება თუ ემთხვევა სფერულ კოორდინატთა სისტემის (r,ϑ,ψ) პოლარული ψ ღერძის მიმართულებას (SN ღერძი), მაშინ უნდა ჩავთვალოთ,

რომ უძრავი ატომბირთვი მოთავსებულია O წერტილში. OP ვექტორი მიუთითებს ელექტრონის მყის მდგომარეობას. OK წირი კვანძის ხაზია, რომელიც წარმოგვიდგება, როგორც ეკვატორული OKQ და OKP ორბიტების სიბრტყეების გადაკვეთის ხაზი. დიდი წრე $KPAB$ არის მაგნიტურ ველში ელექტრონის მოძრაობის ტრაექტორიის „სიგანე" (განედი) ψ,lKQ რკალით. α კუთხე არის ველის მიმართულება ON-სა და ნორმალ OM -ს შორის

სივრცითი დაკვანტვის პირობა ზომფერფელდის მიხედვით ჩაიწერება სახით:

$$\left.\begin{aligned} \oint p_r dr &= n_r h \\ \oint p_\vartheta d\vartheta &= n_\vartheta h \\ \oint p_\psi d\psi &= n_\psi h \end{aligned}\right\}, \qquad (3.1.28)$$

სადაც განზოგადოებული იმპულსები p_r, p_ϑ, p_ψ განისაზღვრებიან პირობიდან

$$p_r = \frac{\partial H}{\partial r},\quad p_\vartheta = \frac{\partial H}{\partial \dot{\vartheta}},\quad p_\psi = \frac{\partial H}{\partial \psi} \qquad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left[r^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\psi}^2 \right] - \frac{Ze^2}{r} + \frac{e}{mc}M\cdot(xp_y - yp_x) = \\ &= \frac{1}{2m}\left[p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}p_\psi^2 \right] - \frac{Ze^2}{r} + \frac{eM}{mcr^3}P_\varphi \end{aligned} \qquad (3.1.30)$$

სადაც $P_\varphi = (xp_y - yp_x) = P_z$ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის z მდგენელია, ხოლო $\bar{M}$ -მაგნიტური მომენტის ვექტორი.

ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში (სფერულ კოორდინატებში) მახასიათებელი ფუნქციისათვის:

$$\frac{1}{2m}\left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 \right\} - \frac{Ze^2}{r} + \frac{eM}{mcr^3}\frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \qquad (3.1.31)$$

ცვლადთა განცალებით

$$V = R(r) + \theta(\vartheta) + C_3\psi \qquad (3.1.32)$$

მიიღება განტოლებანი [38, გვ. 38-39], C_1, C_2, C_3 მუდმივებით

$$\frac{1}{2m}\left\{ R'^2 + \frac{1}{r^2}\theta'^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}C_3^2 \right\} - \frac{Ze^2}{r} + \frac{eM}{cmr^3}C_3 = C_1, \qquad (3.1.33)$$

$$\left.\begin{aligned} R'^2 &= 2mC_1 + \frac{2mZe^2}{r} - \frac{C_2^2}{r^2} - \frac{2eM}{cr^3}C_3 \\ \theta'^2 &= C_2^2 - \frac{C_3^2}{\sin^2\vartheta},\ p_\varphi = C_3 \end{aligned}\right\},$$

საიდანაც (3 1.34)

$$\left.\begin{aligned} P_r &= \sqrt{2mc_1 + \frac{2mZe^2}{r} - \frac{C_2^2}{r^2} - \frac{2eM}{cr^3}C_3} \\ P_\vartheta &= \sqrt{C_2^2 - \frac{C_3^2}{\sin^2\vartheta}} \\ P_\varphi &= C_3 = const. \end{aligned}\right\}. \qquad (3\ 1.35)$$

მონოგრაფიულ სტატიაში· **"Адиабатические инварианты и их применение в теоретической физике"** [39,გვ. 39]. ი. კრუტკოვი, 1917-1919 წწ. წაკითხულ მოხსენებებში, რომელთა ტექსტს ნ. მუსხელიშვილიც იცნობდა, წერდა: „$\nu_1 = \oint p_r dr$-ის გამოსახულების გამოთვლისათვის ყველაზე მოსახერხებელია ვისარგებლოთ წესით, რომელიც მიუთითა ზომერფელდმა (A. Sommerfeld. Phys. Zeitschr. 17 (1916) p. 491) ე.ი. აღებული იქნას ინტეგრების გზა ან კონტური, რომელიც მოიცავს ინტეგრალქვეშა გამოსახულების განშტოების წერტილებს და შეცვლის მას პოლუსების გარშემო შემოვლით. ჩვენს შემთხვევაში უნდა იქნას გათვალისწინებული, რომ გათვლების დროს უგულვებელვყოფთ M_z-(მაგნიტურ მომენტთან) დაკავშირებულ პირველ ხარისხზე მაღალ წევრებს, ამიტომ p_z შეიძლება გაშლილი იქნას ნიუტონის ბინომით და შევჩერდეთ P_φ-ის მიმართ წრფივ წევრებზე [გვ. 39-40]. მიღებულ მიახლოებაში

$$\nu_1 = 2\pi\left\{\frac{Zme^2}{\sqrt{-2mC_1}} - C_2 + \frac{Mec_3}{c}\frac{Zme^2}{C_2^3}\right\}. \qquad (3.1.36)$$

თუ (3.1.36) გამოსახულებაში C_2 და C_3-ს შევცვლით $\nu_2 = n_\vartheta h$ და $\nu_3 = n_\varphi h$ მნიშვნელობებით, მაშინ შეიძლება $C_1 = W_n$ ν_1, ν_2, ν_3 ანუ $n_r, n_\vartheta, n_\varphi$ გამოვსახოთ კვანტური რიცხვებით. ამასთან ელიფსური მოძრაობის შესაბამისი „აზიმუტური" კვანტური რიცხვი n_φ ტოლია „ეკვატორული"

(„მაგნიტური“) კვანტური n_φ რიცხვისა და განედური n_ϑ კვანტური რიცხვების ჯამის სახით წარმოგვიდგება

$$n_\varphi = n_\psi + n_\vartheta . \tag{3.1.37}$$

ამასთან, n_φ და n_ψ კვანტურ რიცხვებს შორის, რაც ნახაზიდან ჩანს, არსებობს დამოკიდებულება

$$n_\psi = n_\varphi \cos\alpha , \text{ რადგან } P_\psi = P\cos\alpha , \tag{3.1.38}$$

ხოლო, რადგან P_ψ მომენტის z მდგენელი შენახვადი სიდიდეა და $P_z = n_\psi \hbar$, ამიტომ

$$\cos\alpha = \frac{P_\psi}{P} = \frac{n_\psi}{n_\varphi} = \frac{n_\psi}{n_\psi + n_\vartheta} . \tag{3.1.39}$$

ლ. დ. ლანდაუ და ე. შ. ლიფშიცი იძლევა სფერულ კოორდინატებში მოცემული ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალებას, როცა პოტენციური ენერგია

$$U = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} , \tag{3.1.40}$$

და როცა განტოლებას მახასიათებელი V ფუნქციისათვის აქვს სახე

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta)\right] + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 = W . \tag{3.1.41}$$

(3.1.41) გათვალისწინებული იქნება φ ცვლადის ციკლურობა და $P_\varphi = const$.

ამონახსნი შეიძლება მოიძებნოს სახით:

$$V = P_\varphi \cdot \varphi + R(r) + Q(\theta) \tag{3.1.42}$$

ხოლო $R(r)$ და $Q(\theta)$ ფუნქციებისათვის მიიღება განტოლებანი

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = W \\ &\left(\frac{\partial Q(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \beta \end{aligned}\right\}, \tag{3.1.43}$$

რომელთა ინტეგრირების შედეგად მიიღება გამოსახულება

$$S = -Wt + V(r,\theta,\varphi) = -Wt + P_\varphi \varphi + \int \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{P_\varphi^2}{\sin^2\theta}} d\theta + \\ + \int \sqrt{2m[W - a(r)] - \frac{\beta}{r^2}} dr \qquad (3.1.44)$$

სფერულ კოორდინატთა სისტემაში გამოსახული ამონახსნი, ამ შემთხვევაში განისაზღვრება სამი ნებისმიერი P_φ, β, W მუდმივის სიზუსტით; ამ პარამეტრების მიხედვით (3 1.44)-ის დიფერენცირების და შედეგის ახალ მუდმივებთან გატოლებით, შეიძლება განისაზღვროს მოძრაობის განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომლის მაგალითს ჩვენ განვიხილავთ პარაბოლურ კოორდინატებში.

ჩვენ აქ არაფერს ვიტყვით ელიფსურ კოორდინატებში (ξ, η, φ) ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალების მეთოდზე ასეთი ამოცანა ატომური კომისიის (1920) წინაშე დასმული იყო აკად. ა კრილოვის მოხსენებებში, რომელიც ბორი-ზომერფელდის კვანტური თეორიის თვალსაზრისით ჰელიუმის ატომის (სამი ნაწილაკის) ამოცანას განიხილავდა და რომლისთვისაც ურთიერთქმედების პოტენციალი წარმოდგენილია სახით

$$U(r_1, r_2) = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\alpha}{r_2} \qquad (3.1.45)$$

სადაც $\xi = \frac{r_2 + r_1}{2\sigma}$, $\eta = \frac{r_2 - r_1}{2\sigma}$ (3.1.46)

და σ-პარამეტრია, ხოლო r_1 და r_2-არის ელიფსურ ორბიტაზე მოძრავ ელექტრონებსა და ცენტრს შორის მანძილი.

§ 3.2. შტარკის მოვლენის შვარცშილდ-ეპშტეინის თეორია

წყალბადური ელექტრონის სპექტრულ ხაზზე გარეშე ელექტრული ველის მოქმედების ექსპერიმენტული და თეორიული შესწავლის ისტორია საკმარისი სისრულით მოტანილი აქვს ა. ზომერფელდს თავის კაპიტალურ ორტომეულში „Atombau und Spektralinien"-ის პირველ ტომში, რომლის მე-2 გერმანული გამოცემის (1921 წ.) რუსული თარგმანი 1956 წ. გამოქვეყნდა [38]. ამ წიგნში ა. ზომერფელდი წერს: „ელექტრული ველის გავლენა ბალმორის ემისიურ სერიაზე აღმოჩენილი იყო 1913 წ. შტარკის მიერ, ხოლო მომდევნო წელს ეს მოვლენა დეტალურად იქნა ექსპერიმენტულად

შესწავლილი, წყალბადის ნაზი სტრუქტურისა და პოლარიზაციის ჩათვლით; ამასთან, არა მარტო წყალბადის, არამედ სხვა ელემენტების (He, Li და ა შ.)-თვისაც. ბედნიერი დამთხვევის გამო, რომელიც მომდევნო წელს იმდენად დეტალურად იქნა დამუშავებული, რომ მას შეეძლო პასუხი გაეცა წყალბადური ხაზის ელექტრული გახლეჩის ამოცანაზე. ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელი გახდა დამოუკიდებლად და ერთდროულად, ამასთან ერთიდაიგივე მეთოდით შვარცშილდის და ეპშტეინის მიერ 1916 წელს იმ დროს, როცა კლასიკური თეორია სრულიად გამოუსადეგარი შეიქმნა ამ ამოცანის ამოსახსნელად, კვანტურმა თეორიამ იწინასწარმეტყველა ნაზი სტრუქტურის განსაკუთრებული დეტალები, რომელიც დაკვირვებული იქნა შტარკის ცდებით იმ დონეზე, რომ შემდგომი ეჭვისათვის არავითარი საფუძველი არ არსებობდა“ [38, გვ 265-266].

შტარკის ეფექტის ანუ ხაზის გახლეჩის დამახასიათებელი იმ 8 ნიშან-თვისებიდან, რომელსაც ჩამოთვლის ა. „ზომერფელდი თავის „ატომის აგებულება და სპექტრების“ (1956 წ.) I ტომში, ჩვენ მოვიტანთ სამს, რომლებიც უშუალოდ დაკავშირებული იქნება ამ მოვლენის თეორიასთან, რომელიც განავითარეს კ შვარცშილდმა, პ. ეპშტეინმა და ნ. მუსხელიშვილმა.

„1 თითოეული ბალმორული ხაზი იხლიჩება რამდენიმე კომპონენტად.

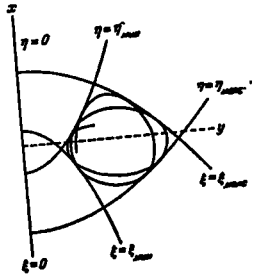
2. კომპონენტების რიცხვი იზრდება ხაზის შესაბამისი სერიის ნომრის ზრდით.

...

8. გახლეჩის სიდიდე (კერძოდ უმცირესი მანძილი) არა ძალზე ძლიერი ველის შემთხვევაში იზრდება ველის პროპორციულად ძლიერი ველის შემთხვევაში ეს დამოკიდებულება წრფივის ნაცვლად იცვლება კვადრატულით (მეორე რიგის შტარკის ეფექტი); ველის შემდგომი ზრდისას დაიკვირვება მესამე რიგის ასეთივე ეფექტი“ [38, გვ.266-267].

შტარკის მოვლენის კვანტურ თეორიას, რომელიც განვითარებული იყო შვარცშილდის და ეპშტეინის მიერ 1916 წ., ჩვენ გადმოვცემთ ა. ზომერფელდის ზემოთ დასახელებული წიგნის მიხედვით, რაც ზოგიერთი დეტალიზაციის გათვალისწინებით ემთხვევა ნ. მუსხელიშვილის (1920 წ.) განხილვას, რასაც ჩვენ დისერტაციის შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ.

ამ თეორიის ავტორები, უპირველეს ყოვლისა მექანიკური ამოცანით არიან დაინტერესებულნი და არკვევენ თუ როგორ მოძრაობს წყალბადისმსგავს ატომში ელექტრონი, რომელიც ერთდროულად განიცდის +Ze მუხტის მქონე ატომბირთვიდან r მანძილით დაშორებული -e მუხტის ელექტრონზე მოქმედი $F_1 = -Ze^2/r^2$ და გარე ელექტრული ძალის $F = -eE$ ზემოქმედებას. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის შესატყვისი კოორდინატთა სისტემა უნდა იყოს კონფოკალური ელიფსებისა და ჰიპერბოლების ერთობლიობა, რომელთათვის ორი მითითებული ცენტრი (ბირთვი და ელექტრონი) წარმოგვიდგება როგორც ფოკუსები, ხოლო კუთხე, აითვლება ფოკუსების შემაერთებელ ხაზიდან. თუ ერთ-ერთი ცენტრი იმყოფება უსასრულობაში, მაშინ ამოცანა ორ კონფოკალური პარაბოლულურ კოორდინატთა სისტემაში გადაწყდება, რომელთა საერთო ფოკუსში მოთავსებულია ატომბირთვი.



პარაბოლური კოორდინატების (ξ, η) შემოტანა, დეკარტეს (x, y) კოორდინატების ნაცვლად განსაზღვრულია ფორმულებით:

$$\frac{y^2}{\xi} + 2x = \xi\,, \quad \frac{y^2}{\eta} - 2x = \eta \qquad (3.2\,1)$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ელექტრული ველი მიმართულია x ღერძის გასწვრივ, მაშინ $\xi = const$-ს პარაბოლას აქვს უარყოფითი მიმართულება, ხოლო $\eta = const$ პარაბოლას აქვს-დადებითი.

ა. ზომერფელდს პარაბოლურ კოორდინატთა სისტემა შემოაქვს შემდეგი სახით: მერიდიანულ სიბრტყეში $x+iy$ კომპლექსურ კოორდინატთან ერთად შემოაქვს დამატებითი $X+iY$ კომპლექსური კოორდინატი, რომლებიც დაკავშირებულნი არიან პირობით:

$$x+iy=\frac{1}{2}(X+iY)^2 \ , \tag{3.2.2}$$

საიდანაც $x=\frac{1}{2}(X^2+Y^2)$, $y=XY$. გამორიცხავს რა ამ განტოლებათაგან X და Y და შეიტანს რა (3.2 1)-ში მიიღება:

$$\frac{y^2}{X^2}+2x=X^2, \ \frac{y^2}{Y^2}-2x=Y^2, \tag{3.2.3}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\xi=X^2$, $\eta=y^2$. (3.2.4)

ჩავწეროთ (3.2.2) დიფერენციალური ფორმით:

$$dx+idy=(X+iY)(dX+idY) \tag{3 2 5}$$

და განვსაზღვროთ პარაბოლურ კოორდინატთა სისტემაში ორ წერტილს შორის მანძილის კვადრატი

$$ds^2=dx^2+dy^2=(X^2+Y^2)(dX^2+dY^2), \tag{3.2.6}$$

რომელიც (ξ, η) ცვლადებში გადაიწერება სახით:

$$ds^2=\frac{1}{2}(\xi+\eta)\left(\frac{d\xi^2}{\xi}+\frac{d\eta^2}{\eta}\right), \tag{3.2.7}$$

ვინაიდან $dX^2=\frac{d\xi^2}{4\xi}$, $dY^2=\frac{d\eta^2}{4\eta}$. (3.2.8)

მეორეს მხრივ $r^2=x^2+y^2=\frac{1}{4}(X^2+Y^2)^2=\frac{1}{4}(\xi+\eta)^2$ (3.2.9)

წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ (x, y), ან იგივე (ξ, η) სიბრტყე ბრუნავს x ღერძის გასწვრივ და შემოვიტანოთ ψ კუთხე. ადრე შემოღებული r კოორდინატი ამ დროს ასრულებს ρ მანძილის როლს ბრუნვის ღერძიდან ამ შემთხვევისათვის შემოტანილი x, y, z კოორდინატები შემდეგნაირად უკავშირდებიან ადრეულ ბრტყელ კოორდინატებს, რომლებიც ამჟამად აღინიშნება x', y'-ით და ψ კუთხით:

$$x=x', \ y=y'\cos\psi, \ z=y'\sin\psi \ . \tag{3.2.10}$$

მაშინ, ბრტყელი წირი გარდაიქმნება სივრცულ წირად და

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + y'^2\, d\psi^2. \qquad (3.2.11)$$

თუ $dx'^2 + dy'^2$-ის ნაცვლად (3.2.11)-ში ამჯერად შევიტანთ (3.2.7)-ს და გამოვსახავთ ξ და η-თი, მივიღებთ:

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\xi+\eta)\left(\frac{d\xi^2}{\xi} + \frac{d\eta^2}{\eta}\right) + \xi\eta\, d\psi^2. \qquad (3.2.12)$$

კინეტიკური ენერგია პარაბოლურ კოორდინატებში გამოისახება ფორმულით:

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\frac{1}{4}(\xi+\eta)\left(\frac{\dot\xi^2}{\xi} + \frac{\dot\eta^2}{\eta}\right) + \xi\eta\dot\psi^2\right\}, \qquad (3.2.13)$$

ხოლო პოტენციური ენერგიისათვის გვექნება

$$U = -\int_0^x F dx = -\int (F_1 + F_2)dx = -\frac{Ze^2}{r} + eEx, \qquad (3.2.14)$$

რომელიც პარაბოლურ კოორდინატებში ღებულობს სახეს:

$$U = -\frac{2Ze^2}{\xi+\eta} + \frac{eE}{2}(\xi-\eta) = \frac{1}{2(\xi+\eta)}\left\{-4Ze^2 + eE(\xi^2-\eta^2)\right\}. \qquad (3.2.15)$$

თუ გვინდა პარაბოლურ განზოგადებულ იმპულსებში ჩავწეროთ კინეტიკური, პოტენციური და სრული ენერგიები, მაშინ (3.2.13) უნდა გავაწარმოოთ პარაბოლური სიჩქარეების $\left(\dot\xi,\dot\eta,\dot\psi\right)$-ის მიხედვით და მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} P_\xi &= \frac{\partial T}{\partial \dot\xi} = \frac{\mu}{4}(\xi+\eta)\frac{\dot\xi}{\xi} \\ P_\eta &= \frac{\partial T}{\partial \dot\eta} = \frac{\mu}{4}(\xi+\eta)\frac{\dot\eta}{\eta} \\ P_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = \mu\xi\eta\dot\psi \end{aligned}\right\}, \qquad (3.2.15)$$

რომლის ჩასმა (3.2.13)-ში მოგვცემდა:

$$T = \frac{1}{2\mu(\xi+\eta)}\left\{4\xi P_\xi^2 + 4\eta P_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta}\right)P_\psi^2\right\}. \qquad (3.2.16)$$

ჰამილტონის განტოლებას კი ექნება სახე: $T_a + U_a = H$ ან

$$4\xi P_\xi^2 + 4\eta P_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta}\right)P_\psi^2 - 4\mu Ze^2 + \mu eE(\xi^2-\eta^2) = 2\mu(\xi+\eta)W. \qquad (3.2.17)$$

შემდეგ, ა. ზომერფელდს შემოაქვს ქმედების ფუნქცია S და განზოგადებულ კოორდინატებს წარმოადგენს სახით:

$$P_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi}, P_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta}, P_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \psi} = const; \tag{3.2.18}$$

რომელთა ჩასმა (3.2.17)-ში მოგვცემს:

$$4\xi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + 4\eta\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\eta}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2 = \\ = 2\mu(\xi+\eta)W + 4\mu Ze^2 - \mu eE(\xi^2-\eta^2). \tag{3.2 19}$$

(3.2.17) განტოლებაში შესაძლებელია ცვლადთა განცალება, რომლის შემდეგ იგი გადაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} 4\xi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 - 2\mu\xi W - 2\mu Ze^2 + \mu eE\xi^2 + \frac{1}{\xi}P_\varphi^2 = -2\mu\beta \\ 4\eta\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 - 2\mu\eta W - 2\mu Ze^2 - \mu eE\eta^2 + \frac{1}{\eta}P_\varphi^2 = +2\mu\beta \end{aligned}\right\}, \tag{3 2.20}$$

საიდანაც, განზოგადებული იმპულსებია·

$$P_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi} = \sqrt{f_1(\xi)}, P_\eta = \frac{\partial S}{\partial \eta} = \sqrt{f_2(\eta)}, P_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \psi} = const. \tag{3.2.21}$$

ამასთან $f_1(\xi)$ და $f_2(\eta)$ ფუნქციები განისაზღვრებიან ფორმულებიდან:

$$\left.\begin{aligned} f_1(\xi) = \frac{1}{4\xi}\left\{2\mu\xi W + 2\mu(Ze^2-\beta) - \mu eE\xi^2 - \frac{1}{\xi}P_\varphi^2\right\} \\ f_2(\eta) = \frac{1}{4\eta}\left\{2\mu\eta W + 2\mu(Ze^2+\beta) + \mu eE\eta^2 - \frac{1}{\eta}P_\varphi^2\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{3.2.22}$$

განიხილავს რა $f_1(\xi)$ და $f_2(\eta)$ პოლინომების ფესვების საკითხს, რაც აუცილებელია დაკვანტვის პირობების განსაზღვრისათვის, ა. ზომერფელდი წერს, გადმოსცემს რა პ. ეპშტეინის თეორიას: $\xi(\eta)$ სიდიდე ღებულობს მხოლოდ ისეთ მნიშვნელობებს, რომლის დროსაც $f_1(\xi)>0$ და მაშასადამე $P_\xi = \frac{\partial S}{\partial \xi}$ არის ნამდვილი მნიშვნელობა. ამგვარად ξ-სიდიდის ზღვრული მნიშვნელობები უნდა განისაზღვროს როგორც $f_1(\xi)=0$ განტოლების ფესვები, რომლებიც აღინიშნებიან $\xi_{max}=\xi_1$ და $\xi_{min}=\xi_2$. როცა $E=0$, მაშინ $\xi_{max}(\xi)=0$,

კვადრატული განტოლებაა და მას ორი ნამდვილი ფესვი აქვს. $E \neq 0$ დროს მესამე ფესვი უსასრულობაში იკარგება და $\left.\begin{array}{l} f_{01}(\xi) = \lim\limits_{E\to 0} f_1(\xi) \\ \text{ასევე}\ \ f_{02}(\eta) = \lim\limits_{E\to 0} f_2(\eta) \end{array}\right\}$.

როგორც გაანგარიშება უჩვენებს, ელექტრონის ორბიტა თანმიმდევრულად ეხება $\xi-$ და $\eta-$საზღვრებს პარაბოლებისას და დროის მიხედვით გაივლის ამ საზღვრის შიგნით ყველა წერტილს.

შემდეგ, განიხილება ამოცანა კვანტურ-თეორიული თვალსაზრისით, რისთვისაც გამოიყენება დაკვანტვის პირობები:

$$\oint P_\xi d\xi = n_\xi h, \quad \oint P_\eta d\eta = n_\eta h, \quad \int_0^{2\pi} P_\psi d\psi = n_\psi h. \tag{3.2.23}$$

რადგანაც $P_\psi = \mu r^2 \dot{\psi} = const$ და იგი იმპულსის შენახვად მომენტს წარმოადგენს, ამიტომ

$$\int_0^{2\pi} P_\psi d\psi = 2\pi P_\psi = n_\psi h \ \text{ანუ} \ P_\psi = n_\psi \frac{h}{2\pi} \tag{3.2.24}$$

და იგი დაიყვანება ბორის დაკვანტის პირობაზე; რაც შეეხება (3.2.23) პირველ ორ ინტეგრალს, ისინი ჩაიწერებიან სახით:

$$\oint \sqrt{A_k + 2\frac{B_k}{z_k} + \frac{C_k}{z_k^2} + D_k z_k}\, dz_k = 2\pi n_k h, (k = 1,2)$$

სადაც
$$\left.\begin{array}{l} A_1 = 2\mu W, B_1 = \mu(Ze^2 - \beta), C_1 = -\left(\dfrac{n_\psi h}{2\pi}\right)^2, D_1 = -\mu eE \\ A_2 = 2\mu W, B_2 = \mu(Ze^2 + \beta), C_2 = -\left(\dfrac{n_\psi h}{2\pi}\right)^2, D_2 = +\mu eE \end{array}\right\}$$

$z = \mathrm{Re}\, z + i\, \mathrm{Im}\, z.$ კომპლექსური ცვლადის სიბრტყეში შესაბამისი ინტეგრების და ნაშთების ფორმულის გამოყენებით, შვარცშილდმა და ეპშტეინმა მიიღეს შემდეგი მიახლოებითი ფორმულები [38, გვ. 529-533]

$$\oint \sqrt{A_k + 2\frac{B_k}{z_k} + \frac{C_K}{z_k^2} + D_k z} dz_k = -2\pi i \left\{ \sqrt{C_k} - \frac{B_k}{\sqrt{A_k}} - \frac{D_k}{4A_k^{3/2}} \left(3\frac{B_k^2}{A_k} - C_k \right) \right\}. \tag{3.2.25}$$

გარკვეული მიახლოებითი გაანგარიშების შემდეგ მიიღება ფორმულები:

$$A_{0n} = -\frac{4\pi^2(\mu Ze^2)^2}{(n_\xi + n_\eta + n_\psi)^2 h^2} = -\frac{4\pi^2(Z\mu e^2)^2}{h^2 n^2}, E = 0 \tag{3.2.26}$$

და $A_n = -\frac{4\pi^2(\mu Ze^2)^2}{h^2n^2} - \frac{3h^2E}{4\pi^2Ze}n(n_\eta - n_\xi), E \neq 0,$ (3.2.27)

სადაც $n = n_\xi + n_\eta + n_\varphi$.

თუ (3.2.26)-(3.2.27) გამოსახულებებს გავყოფთ $-2\mu h$-ზე, მიიღება ფორმულები:

$$-\frac{W_n}{h} = +\frac{2\pi\mu Z^2e^4}{h^3n^2} + \frac{3hE}{8\pi^2\mu Ze}(n_\eta - n_\xi)n, E \neq 0 \quad (3.2.28)$$

$$-\frac{W_{0n}}{h} = +\frac{2\pi\mu Z^2e^4}{h^3n^2}, \text{როცა } E = 0, \quad (3.2\ 29)$$

მათგან გამომდინარე ყველა შედეგით, რომელიც საუკეთესო თანხვდენაშია ექსპერიმენტულ მონაცემებთან

§3.3. ბარიშე ელექტრულ ველში მოძრავი სავალენტო ელექტრონისათვის ჰამილტონ–იაკობის განტოლების ინტეგრების მუსხელიშვილისეული მეთოდის შესახებ

ნიკო მუსხელიშვილის ერთ გამოუქვეყნებელ ვრცელ ნაშრომში, „მუდმივ ელექტრულ ველში ელექტრონის მოძრაობის ამოცანა, როცა იგი მიეზიდება უძრავი ცენტრის (ბირთვის) მიერ“ [40], რომელიც მოხსენების სახით იყო მის მიერ წაკითხული ს - პეტერბურგში 1920 წ შექმნილი „ატომური კომისიის“ 5 თებერვლის სხდომაზე, ორიგინალურადაა გადაწყვეტილი ბორი-ზომერფელდის ატომური მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანა; კერძოდ, სავალენტო ელექტრონის პერიოდულ მოძრაობაზე გარე ელექტრული ველის გავლენისა და ასეთი მოძრაობის დაკვანტების შესახებ. ეს ამოცანა დასმული იყო ნ. ბორის [37, გვ. 175], კ. შვარცშილდის [41] და პ ეპშტეინის [42] მიერ 1914-1916 წლებში და ამოხსნილი, მაგრამ „ატომური კომისიის“ წინაშე იგი კვლავ დაისვა და ამოცანის თავისებურების გათვალისწინებით ახლებურად იქნა გადაწყვეტილი. ამასთან, ამ ნაშრომში ნიკო მუსხელიშვილმა გამოიყენა მოძრაობის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრების ერთი მეთოდი, რომელიც ჩვენის აზრით [43,44], არ გვხვდება მონოგრაფიულ და სახელმძღვანელო წიგნებში, რომლებშიც დასმულია ანალოგიური პრობლემა.

როგორც ცნობილია [42], გარე ელექტრულ E დაძაბულობის ველში ელექტრონის პოტენციური ენერგია (x,y,φ) სიბრტყეში მოძრაობისათვის ჩაიწერება სახით:

$$U = -\frac{ze^2}{r} - eEx, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.3.1}$$

ხოლო ჰამილტონის ფუნქციისათვის ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \frac{\partial V}{\partial q_3}; q_1, q_2, q_3, t\right) = 0. \tag{3.3.2}$$

განტოლების მახასიათებელი ანუ ქმედების ფუნქციაზე $S \equiv V = At + W = -Et + W$ გადასვლით, (3.3 2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$A + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}; q_1, q_2, q_3\right) = 0 . \tag{3.3 3}$$

S ქმედების ფუნქციის არაადიტიური ნაწილის (A,α,β) ინტეგრირების მუდმივები $W = W(q_1,q_2,q_3;A,\alpha,\beta)$-ში, დაკავშირებული არიან არაადიტიურ $t' = t_0 - t, \alpha', \beta'$ პარამეტრებთან თანაფარდობით

$$\frac{\partial W}{\partial A} = t', \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta' \ . \tag{3.3.4}$$

ნ. მუსხელიშვილს ისე, როგორც პ. ეპშტეინს ზემოთდასახელებულ სტატიაში შემოაქვს q,p პარაბოლური კოორდინატები:

$$y^2 = -2qx + q^2; \quad y^2 = 2px + p^2, \quad p,q \geq 0, \tag{3.3.5}$$

და კომპლექსურ სიბრტყეში $x + iy = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2$; $\xi = \sqrt{q}$, $\eta = \sqrt{p}$, ღებულობს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi^2 - \eta^2}{2} = \frac{q-p}{2}, \ y = \xi\eta = \pm\sqrt{qp} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{q+p}{2}, \ q = x + r, \ p = -x + r \end{aligned}\right\}. \tag{3.3.6}$$

პარაბოლურ კოორდინატებში სივრცითი წირის ელემენტი

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx + idy)(dx - idy) + y^2 d\varphi^2 = \\ &= \frac{1}{4}(q+p)\left\{\frac{dq^2}{q} + \frac{dp^2}{p}\right\} + qpd\varphi^2 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

კინეტიკური, პოტენციური და სრული ენერგია კი:

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{\mu}{8}(q+p)\left\{\frac{\dot{q}^2}{q} + \frac{\dot{p}^2}{p}\right\} + qp\dot{\varphi}^2 \\ U &= -\frac{2ze^2}{q+p} - eE\frac{q-p}{2} \end{aligned}\right\}, \tag{3.3.8}$$

$$H = T + U = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{2q}{q+p}p_1^2 + \frac{2p}{q+p}p_2^2 + \frac{1}{2}qp\,p_3^2\right\} - \frac{2ze^2}{q+p} - eE\frac{q-p}{2},$$

სადაც განზოგადებული იმპულსები -

$$P_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\mu}{4}(q+p)\frac{\dot{q}}{q}, P_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{p}} = \frac{\mu}{4}(q+p)\frac{\dot{p}}{p}, P_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mu qp\dot{\varphi}. \tag{3.3.9}$$

მოცემულ გარდაქმნების საფუძველზე ჰამილტონ-იაკობის განტოლება გადაიწერება სახით:

$$\frac{1}{\mu}\left\{\frac{2q}{q+p}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2+\frac{2p}{q+p}\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)^2+\frac{qp}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right\}-$$
$$-\frac{2ze^2}{q+p}-eE\frac{q-p}{2}+A=0. \qquad (3.3.10)$$

მე-(3.3.10) განტოლება ცვლადთა განცალების წესის გამოყენებით გადაიწერება სახით:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2q}{\mu}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q}\right)^2+\frac{\alpha^2}{2q}-(z+\beta)e^2-\frac{eE}{2}q^2+Aq=0\\&\frac{2p}{\mu}\left(\frac{\partial W_2}{\partial p}\right)^2+\frac{\alpha^2}{2p}-(z-\beta)e^2+\frac{eE}{2}p^2+Ap=0\end{aligned}\right\}, \qquad (3.3.11)$$

სადაც $W(q,p,\varphi)=\sqrt{\mu}\alpha\varphi+W_1(q)+W_2(p)$; თავად $W_1(q)$ და $W_2(p)$ მიიღება (3.3.11) განტოლებათაგან სახით:

$$\left.\begin{aligned}&W_1(q)=\frac{\sqrt{\mu}}{2}\int\frac{\sqrt{F_1(q)}}{q}dq, F_1(q)=eEq^3-2Aq^2+2(z+\beta)e^2q-\alpha^2\\&W_2(p)=\frac{\sqrt{\mu}}{2}\int\frac{\sqrt{F_2(p)}}{p}dp, F_2(p)=-eEp^3-2Ap^2+2(z-\beta)e^2q-\alpha^2\end{aligned}\right\}. \qquad (3.3.12)$$

$W(q,p,\varphi)=W_1(\varphi)+W_2(q)+W_3(p)$ ზოგადი გამოსახულების და (3.3.4) განტოლებათა გათვალისწინებით მიიღება იაკობის განტოლებანი, რომელსაც ნ. მუსხელიშვილი ჩაწერს სახით:

$$\left.\begin{aligned}&\int^q\frac{dq}{2\sqrt{F_1(q)}}-\int^p\frac{dp}{2\sqrt{F_2(p)}}=\beta'\\&\int^q\frac{dq}{2q\sqrt{F_1(q)}}+\int^p\frac{dp}{2p\sqrt{F_2(p)}}=\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\\&\int^q\frac{qdq}{2\sqrt{F_1(q)}}+\int^p\frac{pdp}{2\sqrt{F_2(p)}}=\frac{t-\tau}{2}\end{aligned}\right\}. \qquad (3.3.13)$$

აქ, ჩვენ გვერდს ავუვლით იაკობის განტოლებების ინტეგრირების იმ მეთოდების გადმოცემას, რომლებიც ცნობილია [38], მათ შორის $E=0$ დროს წყალბადის მსგავსი ატომის მოძრაობის განტოლების ინტეგრებისა და დაქვანტვის შესაბამისი ზომერფელდის ამოცანას და განვიხილავთ მე-(3 3 13) განტოლებათა ინტეგრების წესს, რომელსაც გადმოსცემს ნ. მუსხელიშვილი თავის მოხსენებაში.

იკვლევს რა $F_1(q)=0,\ F_2(p)=0$ კუბურ განტოლებათა ფესვებს $xy(q_2 \geq q \geq q_3, p_2 \leq p \leq p_3)$ სიბრტყეში, ნ. მუსხელიშვილი იაკობის განტოლებათა ინტეგრებას ანხორციელებს ვაირშტრასის ელიფსური ფუნქციების $\rho(u),\ \varsigma(u)$ და $\sigma(u)$ საშუალებით, რომელთაგან $\rho(u)$ აკმაყოფილებს შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებას:

$$\frac{d\rho(u)}{du} = \sqrt{4\left[\rho(u)-e_1\right]\left[\rho(u)-e_2\right]\left[\rho(u)-e_3\right]} \qquad (3.3\ 14)$$

სადაც e_1, e_2, e_3 კუბური განტოლების ფესვებია რომელბზედაც დადებულია პირობები:

$$e_1+e_2+e_3=0,\ \ e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3=-\frac{1}{4}g_2, e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3. \qquad (3.3.15)$$

g_1 და g_2-ს უწოდებენ $\rho(u)$ ფუნქციის ინვარიანტებს და თავის მხრივ დაკავშირებულია (3 3.14) დიფერენციალურ განტოლებასთან ჩაწერილს ფორმით

$$\left(\frac{d\rho(u)}{du}\right)^2 = 4\rho^3(u)-g_2\rho(u)-g_3. \qquad (3.3\ 16)$$

შემდეგ, ნ. მუსხელიშვილი q და p პარაბოლურ კოორდინატებს უკავშირებს ვაირშტრასის ფუნქციას შემდეგი წესით

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{eE}\left[\rho(\bar{u})+a\right], \bar{u}=u+\omega_3 \\ p &= \frac{1}{eE}\left[\rho(\bar{v})+b\right], \bar{v}=v+\omega'_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.17)$$

სადაც ω_3 და ω'_2 პერიოდის განზომილების მქონე სიდიდეებია, რომლებიც შემოდის ელიფსური ფუნქციების განმარტებიდან,

$$\left.\begin{aligned}\rho(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1,m_2}{}' \left[\frac{1}{(u-\varpi)^2} - \frac{1}{\varpi^2}\right] \\ \varsigma(u) &= \frac{1}{u} + \sum_{m_1,m_2}{}' \left[\frac{1}{u-\varpi} + \frac{1}{\varpi} + \frac{u}{\varpi^2}\right] \\ \sigma(u) &= u \prod_{m_1,m_2}{}' \left(1 - \frac{u}{\varpi}\right) \exp\left[\frac{\mu}{\varpi} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\varpi}\right)^2\right]\end{aligned}\right\}. \qquad (3\,3\,18)$$

a და b - ენერგიის განზომილების პარამეტრებია.

თავად $\rho(u)$, $\zeta(u)$ და $\sigma(u)$ ფუნქციები ერთმეორესთან დაკავშირებულია თანაფარდობებით:

$$\rho(u) = -\zeta'(u), \zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{d}{du}\ln\sigma(u), \qquad (3.3.19)$$

სადაც u კომპლექსური ცვლადია, $\varpi = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, m_1, m_2 ნამდვილი დადებითი ან უარყოფითი რიცხვებია, ω_1 და ω_2 კი კომპლექსური, პერიოდის განზომილების რიცხვები. შემოღებული აღნიშვნების მიხედვით:

$$\left.\begin{aligned}F_1(q) &= \frac{1}{(eE)^2}\left[\rho(\bar{u}) - e_1\right]\left[\rho(\bar{u}) - e_2\right]\left[\rho(\bar{u}) - e_3\right] \\ F_2(p) &= \frac{1}{(eE)^2}\left[\rho(\bar{v}) - e_1^1\right]\left[\rho(\bar{u}) - e_2^1\right]\left[\rho(\bar{u}) - e_3^1\right]\end{aligned}\right\}, \qquad (3.3.20)$$

$$e_i = eEq_i - a, e_i' = -eEp_i + b, (i = 1,2,3), a = b = \frac{2}{3}A\ . \qquad (3.3.21)$$

ცხადია, რომ

$$\sum_{i=1}^{3} e_i = eE\sum_{i=1}^{3} q_i - 3a = 2A - 3a = 0, \sum_{i=1}^{3} e_i' = eE\sum_{i=1}^{3} p_i + 3b = -2A + 3b = 0. \qquad (3.3.22)$$

ამასთან, ნ. მუსხელიშვილი უჩვენებს, რომ

$$\left.\begin{aligned}F_1(q) &= \frac{1}{(eE)^2}\left[\frac{d\rho(\bar{u})}{d\bar{u}}\right]^2, \frac{dq}{\sqrt{4F_1(q)}} = \pm\frac{\rho(\bar{u})d\bar{u}}{eE\sqrt{4F_1(q)}} = \pm d\bar{u} \\ F_2(p) &= \frac{1}{(eE)^2}\left[\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}}\right]^2, \frac{dp}{\sqrt{4F_2(p)}} = \pm\frac{\rho(\bar{v})d\bar{v}}{eE\sqrt{4F_2(p)}} = \pm d\bar{v}\end{aligned}\right\}, \qquad (3.3.23)$$

ხოლო $F_1(q)$ და $F_2(p)$ ფუნქციების ფესვების განლაგება $\left(q_2 \geq q \geq q_3, p_2 \leq p \leq p_3\right)$ არეში, განსაზღვრავს ვაიერშტრასის ფუნქციის განსაზღვრის არეს $e_2 \leq \rho(\bar{u}) \leq e_3; e_3' \leq \rho(\bar{v}) \leq e_2'$; ითვალისწინებს რა, რომ ელიფსური ფუნქციები $\rho(\bar{u})$ და $\rho(\bar{v})$ კომპლექსური ფუნქციებია ორმაგი პერიოდით $2\omega_1$ და $2\omega_1'$, რომელთაგან ω_1 - ნამდვილია, ω_1', კი წარმოსახვითი, ნ. მუსხელიშვილი ადგენს, რომ როცა $u = 0, 2\omega_1, 4\omega_1, \ldots$, მოძრავი ელექტრონის ტრაექტორია შემოსაზღვრულია $q_3 = const$ პარაბოლის შტოთი, ხოლო $u = \omega_1, 3\omega_1, \ldots$, კი $q_2 = const$ -თი. ასევე, $v = 0, 2\omega_1', 4\omega_1', \ldots$ შესაბამისად, ელექტრონის ტრაექტორია შემოსაზღვრულია $p_2 = const$ პარაბოლის შტოთი, ხოლო $v = \omega_1', 3\omega_1', \ldots$, კი $p_3 = const$ პარაბოლის შტოთი.

ამ ვითარების გათვალისწინებით მე-(3.3.13) განტოლებათა სისტემის I და II განტოლება დაიყვანება სახეზე:

$$eE\frac{t-\tau}{\sqrt{\mu}} = -\zeta(u) + \zeta(v) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\rho'(u)}{\rho(u)-e_3} - \frac{\rho'(v)}{\rho(v)+e_2'}\right\} + a\beta' \qquad (3\,3.23)$$

მოცემულ პირობებში, e_i და e_i'-სათვის შერჩეული აქვს $F_1(q) = 0$ და $F_2(p) = 0$ ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობანი

$$\left.\begin{array}{ll} e_1 = \frac{1}{3}A + \sqrt{A^2 - 2e^3E(z+\beta)} > 0 & e_1' = \frac{1}{3}A + \sqrt{A^2 + 2e^3E(z-\beta)} > 0 \\ e_2 = \frac{1}{3}A - \sqrt{A^2 - 2e^3E(z+\beta)} < 0 & e_2' = -\frac{2}{3}A < 0, \sum_{i=1}^{3} e_i' = 0 \\ e_3 = -\frac{2}{3}A < 0, \sum_{i=1}^{3} e_i = 0 & e_3' = \frac{1}{3}A - \sqrt{A^2 + 2e^3(z-\beta)} < 0 \end{array}\right\}, \qquad (3.3.24)$$

რომელთა გათვალისწინებით, ნ. მუსხელიშვილი ღებულობს:

$$q = \frac{2e^2(z+\beta)}{\rho(u) + \frac{2}{3}A}, p = \frac{2e^2(z-\beta)}{\rho(v) + \frac{2}{3}A}, \qquad (3.3.25)$$

$$eE\frac{t-\tau}{\sqrt{\mu}} = -\zeta(u) + \zeta(v) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\rho'(u)}{\rho(u)+\frac{2}{3}A} - \frac{\rho(v)}{\rho(v)+\frac{2}{3}A}\right\} + \frac{2}{3}A\beta'. \qquad (3.3.26)$$

მცირე სიდიდის გარე ელექტრული ველისათვის ($E<400$ ვოლტ/სმ), თუ უკუვაგდებთ მაღალი რიგის წევრებს გაშლაში, მიიღება

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{e_1-e_3}&=\sqrt{2A}\left[1-\frac{1}{4}\frac{e^3E(z+\beta)}{A^2}\right]\\ \sqrt{e_1'-e_3'}&=\sqrt{2A}\left[1+\frac{1}{2}\frac{e^3E(z-\beta)}{A^2}\right]\end{aligned}\right\}, \qquad (3.3\ 27)$$

ხოლო ელიფსური ინტეგრალის მოდულები იქნება:

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_2}=\frac{e^3E(z+\beta)}{2A^2};\quad k_1^2=\frac{e_2'-e_3'}{e_1'-e_2'}=\frac{e^3E(z-\beta)}{2A^2}. \qquad (3.3.28)$$

ამავე მიახლოებაში, ნ. მუსხელიშვილი ღებულობს ორმაგი ნამდვილი და წარმოსახვითი პერიოდის შემდეგ ფორმულებს

$$\left.\begin{aligned}2\omega_1&=\frac{\pi}{2\sqrt{2A}}\left\{1+\frac{3}{8}\frac{e^3E(z+\beta)}{A^2}\right\}\\ 2\omega_1'&=\frac{\pi}{\sqrt{2A}}\left\{1-\frac{3}{8}\frac{e^3E(z-\beta)}{A^2}\right\}\end{aligned}\right\}, \qquad (3.3.29)$$

$$\delta=\frac{2\omega_1-2\omega_1'}{\omega_1'}=\frac{3}{2}\frac{zEe^3}{A^2}.$$

აქ, მიღებული ფორმულების ატომური პრობლემატიკაში გამოყენების ანალიზზე არ შევჩერდებით. აღვნიშნავთ მხოლოდ, რომ მოძრაობის განტოლებათა (კლასიკურ თუ ქვანტურ მექანიკაში) ინტეგრირების რიგის დაწევის მუსხელიშვილისეული მეთოდი, განსხვავდება მოძრაობის განტოლებათა ელიფსურ ინტეგრალზე დაყვანის იმ მეთოდებისაგან, რომლის შესახებ საკმაო ინფორმაცია მოცემულია, თუნდაც ვ. სმირნოვის კურსის მიხედვით [45] და თავად „ატომურ კომისიაში“ აკად. ა. ნ. კრილოვის მოხსენებების ციკლში „ჰელიუმის ატომის შესახებ“ [46].

III თავის დასკვნები

დადასტურებული და გაფართოებულია ფრანგი მათემატიკოსის პ კაპოდანოს და რუსი მათეატიკოსის გ. მიხაილოვის მტკიცებულება იმის შესახებ, რომ აკად. ნ. მუსხელიშვილი არის ჰიდროდინამიკის ბრტყელი ამოცანების კოშის ტიპის ინტეგრალების მეთოდით პირველი მკვლევარი, რომელმაც 7 წლით ადრე აკად. ს. ჩაპლიგინამდე (1926), 16 წლით ადრე აკად ლ. სედოვამდე (1935), 10-15 წლით ადრე იტალიელ მექანიკოსებზე (1928-1935) გამოიყენა ეს მეთოდი იდეალური სითხით სხეულების გარსდენის სიჩქარის მდგენელების განსაზღვრისათვის.

ჩატარებულია ბორი-ზომერფელდის ატომის თეორიაში ელიფსური და სივრცითი დაკვანტების ამოცანების ამოხსნის მათემატიკური მეთოდების ანალიზი. ნაჩვენებია, რომ კულონური ურთიერთობისას ელიფსური და სივრცითი ამოცანების შემთხვევაში, შესაბამისად პოლარული და სფერული კოორდინატები იძლევა ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალებისა და კომპლექსურ სიბრტყეში ქმედების ინტეგრალების ინტეგრების საშუალებას, რაც უზრუნველყოფს ატომის კინემატიკურ და დინამიკურ აღწერას ნახევარკლასიკური კვანტური თეორიის ფარგლებში.

ჩატარებულია გარეშე ელექტრული ველის ზემოქმედების პირობებში ატომური ელექტრონის მოძრაობის დაკვანტვის ამოცანის ანალიზი, რომელსაც სწავლობდნენ ნ. ბორი (1914) კ. შვარცშილდი (1916), პ. ეპშტეინი (1916), ნ. მუსხელიშვილი (1920). ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული ამოცანისათვის, მხოლოდ ჰიპერბოლურ კოორდინატებში ხდება ჰამილტონ-იაკობის განტოლებაში ცვლადთა განცალება. განხილულია კომპლექსური ინტეგრების წესი კოშის ნაშთების მეთოდის გამოყენებით და ატომური ელექტრონის ენერგიის ფორმულის გამოყვანა $E=0$ და $E\neq 0$ შემთხვევებისთვის.

თავი IV. ნ. მუსხელიშვილი და სითბური გამოსხივების კვანტური თეორიის მათემატიკური პრობლემები

§4. 1. სითბური გამოსხივების სპექტრული განაწილების კვლევის ისტორიიდან

აბსოლუტურად შავი სხეულის წონასწორული სითბური გამოსხივების სპექტრული განაწილების საკითხი XIX-XX საუკუნეთა მიჯნის თეორიული და ექსპერიმენტული ფიზიკის ერთ-ერთი ცენტრალური პრობლემა იყო, რომლითაც დაინტერესებულნი იყვნენ მსოფლიოს დიდი ფიზიკოსები და მათემატიკოსები. პრობლემის თეორიული გადაწყვეტა, პირდაპირ დაკავშირებული იყო ახალი ფიზიკური მოძღვრების - კვანტური თეორიის შემოტანა-დაფუძნებასთან. ამიტომ, უაღრესად მნიშვნელოვანია ის გარემოება, რომ დიდი ქართველი მათემატიკოსი აკად. ნ მუსხელიშვილი მე-20 ს 20-იან წლებში დაინტერესდა ამ მოვლენის მათემატიკური პრობლემატიკით

საკითხის კვლევის ისტორიიდან აღვნიშნავთ ძირითად მომენტებს, რომლებიც წონასწორული სითბური გამოსხივების სპექტრული სიმკვრივის განაწილების განსაზღვრასთანაა დაკავშირებული.

სინათლის ელექტრომაგნიტური და გამოსხივების ელექტრონული თეორიიდან ცნობილია, რომ გამოსხივების სპექტრული განაწილების სიმკვრივე, რომელიც გამოსხივებული ტალღის სიხშირის და გამომსხივებელი ველის და ნივთიერების წონასწორული ტემპერატურის ფუნქციაა, განისაზღვრება ფორმულით

$$\rho(\omega,T)=\frac{dU}{d\omega}, \qquad \omega=2\pi\gamma=2\pi\frac{c}{\lambda}, \tag{4 1 1}$$

სადაც $U=\frac{dw}{dV}=\frac{1}{8\pi}\left(E^2+H^2\right)$ (4.1 2.)

გამოსხივებული ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის სიმკვრივეა

აბსოლუტურად შავი სხეულის წონასწორული სითბური გამოსხივების ენერგიის ინტეგრალური სიმკვრივე, როგორც განაწილების სპექტრული სიმკვრივეზე დამოკიდებული სიდიდე, ცნობილია სტეფანის ემპირიული კანონის სახით, რომლის თერმოდინამიკური დასაბუთება მოგვცა ლ. ბოლცმანმა (1844-1906) და სტეფან-ბოლცმანის კანონის სახელწოდებითაა ცნობილი

$$U(T)=\sigma T^4,\ \sigma=const, \qquad (4.1.3.)$$

რომელიც პირდაპირ კავშირშია გამოსხივების სპექტრული ფუნქციის ρ-ს თეორიულად განსაზღვრასთან რადგანაც

$$U(T)=\int_0^\infty \rho(\omega,T)d\omega. \qquad (4\ 1\ 4\ )$$

მე-19 საუკუნის ბოლოს ინგლისელი ფიზიკოსების ჯ რელეის (1842-1919) და ჯ. ჯინსის (1877-1946) მიერ თეორიულად დადგენილი იქნა გამოსხივების კლასიკური ელექტრონული თეორიის მიხედვით, რომ გამოსხივების სპექტრული სიმკვრივე

$$\rho(\omega,T)=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}<\varepsilon>, \qquad (4\ 1.5.)$$

სადაც $<\varepsilon>$ გამოსხივების წარმოქმნილი მდგარი ელექტრომაგნიტური ტალღების - რეზონატორების, როგორც ოსცილატორების საშუალო ენერგიაა, ხოლო

$$g(\omega)=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \qquad (4.1.6.)$$

მდგარი ტალღების - ოსცილატორების სტატისტიკურ მდგომარეობათა რიცხვია.

აქვე აღვნიშნავთ, რომ სტატისტიკური წონა შეიძლება განისაზღვროს, აგრეთვე როგორც სიხშირის (ν) ან ტალღის სიგრძის (λ) ფუნქციაზე დამოკიდებული თანაფარდობიდან:

$$\rho(\omega)=g(\nu)\left|\frac{d\nu}{d\omega}\right|=g(\lambda)\left|\frac{d\lambda}{d\omega}\right|. \qquad (4.1.7.)$$

კლასიკური სტატისტიკური მექანიკის თანახმად, ოსცილატორის ყოველ თავისუფლების ხარისხზე მოსული საშუალო ენერგია გამოითვლება ფორმულით

$$<\varepsilon>=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\alpha\varepsilon}d\Gamma_{p,q}, \qquad (4.1.8.)$$

სადაც

$$\alpha=\frac{1}{kT},\qquad \varepsilon=\frac{p^2}{2m}+\frac{Kq^2}{2}, \qquad (4.1.9.)$$

ოსცილატორის სრული ენერგიაა, ხოლო $d\Gamma = dpdq$ - ერთგანზომილებიანი ფაზური სივრცის pq ელემენტი.

ინტეგრებისა და დიფერენცირების ჩატარება (4.1.7.)-ში გვაძლევს

$$<\varepsilon>= kT \quad \text{და} \quad \rho_k(\omega,T)=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}kT, \qquad (4\ 1\ 10.)$$

ხოლო

$$U(T)=\frac{kT}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \omega^2 d\omega \to \infty. \qquad (4\ 1\ 11\ )$$

სპექტრული ფუნქციის განსაზღვრის კლასიკური მეთოდი წინააღმდეგობაში აღმოჩნდა სტეფან-ბოლცმანის ემპირიულ ფორმულასთან, რომელიც „ულტრაიისფერი კატასტროფით“ არის ცნობილი ფიზიკაში.

ყოველივე ზემოთქმული სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როცა წონასწორული გამოსხივების ტემპერატურა მაღალია ან გამოსხივებული ტალღის სიგრძე λ დიდი (სიხშირე მცირე). დაბალსიხშირიან უბანში $\rho(\omega,T)$ გრაფიკულად გამოისახება ω-ს მიმართ კვადრატული ფუნქციით, რომელიც მაქსიმუმს უსასრულობაში აღწევს.

დაბალტემპერატურულ ანუ მაღალსიხშირიან (მცირე ტალღის სიგრძის) უბანში სპექტრული სიმკვრივის ტემპერატურულ-სიხშირული დამოკიდებულების ინტუიციურ-ემპირიული განსაზღვრა მოახერხა გერმანელმა ვილჰელმ ვინმა (1864-1928), რომელმაც 1894 წ ივარაუდა, რომ მცირე ტემპერატურის პირობებში, სპექტრული სიმკრივე უნდა განისაზღვროს უნივერსალური ფუნქციით $f\left(\frac{\omega}{T}\right)$, კერძოდ კი -

$$\rho_w(\omega,T)= a\omega^3 \exp\left(-b\frac{\omega}{T}\right). \qquad (4.1.12.)$$

ცხადია, ვ. ვინის განაწილების კანონი უზრუნველყოფს სტეფან-ბოლცმანის ფორმულის სამართლიანობას, ვინაიდან

$$U(T)=\int_0^\infty \rho_w(\omega,T)d\omega = \sigma T^4 \qquad (4.1.13.)$$

და იმავდროულად, წანაცვლების კანონის შესრულებას, რომლითაც

$$T\lambda_m = b = 0{,}29\ \text{სმ}\,K, \qquad (4.1.14.)$$

სადაც λ_m- ტალღის სიგრძის მაქსიმუმია და გამოსხივების ტემპერატურის გაზრდით შესაბამისად მარცხნივ წაინაცვლებს.

დაბალტემპერატურული (მცირე ტალღის სიგრძის) გამოსხივების კანონზომიერების ექსტრაპოლაცია მაღალტემპერატურულ (დიდტალღოვანი) უბნისაკენ შუალედური ტემპერატურის და გამოსხივების სიხშირეთა გავლით, მოახდინა დიდმა გერმანელმა ფიზიკოსმა მაქს პლანკმა (1858-1947), რომელმაც დაუშვა, რომ ოსცილატორს სინათლის გამოსხივება შეუძლია, როგორც უწყვეტად, ასევე წყვეტილი - მცირე პორციების სახით

$$\varepsilon_0 = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \hbar\omega. \qquad (4\ 1\ 15)$$

ამასთან, ოსცილატორის მიერ გამოსხივებული ენერგია

$$E_n = nh\nu = n\hbar\omega. \qquad (4.1.16)$$

თუ სტატისტიკური საშუალოს გამოსაანგარიშებელ (4.1.8.) ფორმულას გადავწერთ კვანტური გამოსხივების (4.1.16.) გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$<\varepsilon>= -\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha\varepsilon_n}, \qquad (4.1.17.)$$

რომლითაც მიიღება სპექტრული სიმკვრივის გამოსახულება

$$\rho_p(\omega,T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}. \qquad (4.1.18)$$

პლანკის[5] ფორმულიდან ადვილად მიიღება მისი ზღვრული, მიახლოებითი გამოსახულებანი. მართლაც, როცა $kT >> \hbar\omega$-ზე, მაშინ ტეილორის ფორმულის თანახმად

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) = 1+\frac{\hbar\omega}{kT}+\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2+... \qquad (4.1.19)$$

რომლის მეორე წევრის გათვალისწინებით მიიღება რელეი-ჯინსის (4 1.10). ფორმულა; იმ შემთხვევაში კი, როცა $kT << \hbar\omega$ (დაბალ წონასწორული ტემპერატურა)

---

[5] 1911 წ მ პლანკმა განავითარა ე წ მეორე კვანტური თეორია, რომლის თანახმად ოსცილატორს შეუძლია გამოასხივოს მხოლოდ $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu$ ტოლი ენერგია, რაც შეეხება $E_0 = \frac{1}{2}h\nu$ ნულოვან ენერგიას მას ოსცილატორი ყოველთვის ინარჩუნებს იგივე მტკიცება კვანტური მექანიკით

$$\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right) \approx e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \qquad (4.1.20.)$$

და მიიღება ვინის (4.1.12.) ფორმულა, ემპირიული პარამეტრების (a,b) უნივერსალური მუდმივების $(c,k,\hbar)$ საშუალებით გამოსახვით:

$$a=\frac{\hbar}{\pi^2 c^3}, \qquad b=\frac{\hbar}{k}. \qquad (4.1\ 21.)$$

მ. პლანკის მიერ განვითარებული მოძღვრება, ენერგია-ქმედების დისკრეტული გაცვლის შესახებ ნივთიერებასა და გამოსხივებას შორის ურთიერთქმედების დროს, 1900-1920 წლებში მრავალჯერ და სხვადასხვა მეთოდების გამოყენებით იყო დადასტურებული. დასაბუთება-დადასტურების ფიზიკური მეთოდები შემოთავაზებული იყო თვით მ პლანკის (1858-1947), ჰ. ლორენცის (1953-1928), ფ. ჰაზენერლის (1874-1915), ჯ. ნერნსტის (1964-1941), ა. აინშტაინის (1879-1955), პ. ერენფესტის (1880-1933), ა პუანკარეს (1954-1912), ი. კრუტკოვის (1990-1952) და სხვების მიერ, ამათგან, მაქს პლანკი და ალბერტ აინშტაინის ე.წ. პლანკის განაწილების კანონის დამტკიცებას მრავალჯერ მიუბრუნდნენ ჩვენ აქ მოვიტანთ მხოლოდ მ პლანკის მიერ 1901 წ. განვითარებული გამოსხივების ენტროპიის სტატისტიკური მეთოდის და ა. აინშტაინის მიერ 1907 წ. განვითარებულ მეთოდს, რომლითაც შეიძლება ოსცილატორის საშუალო ენერგიის განსაზღვრა კვანტურ მდგომარეობათა სტატისტიკური წონის გათვალისწინებით, რომელიც 1920 წელს იყო შემდგომ განზოგადებული და გაფართოებული აკად. ნ. მუსხელიშვილის მიერ.

თავის 1901 წ. გამოქვეყნებულ ნაშრომში „ნორმალურ სპექტრში ენერგიის განაწილების კანონის შესახებ“ [47, გვ. 258], მ. პლანკი სარგებლობს გამოსხივების სრული ენერგიის და ენტროპიის გამოსახულებისათვის თანაფარდობით:

$$U_N = NU, \qquad S_N = NS, \qquad U=<\varepsilon>, \qquad S=<S>$$

და ბოლცმანის ფორმულით ენტროპიასა და ალბათობას შორის კავშირით

$$S_N = k\ln W, \qquad (4.1.22.)$$

სადაც W მდგომარეობის ალბათობაა და ამ უკანასკნელისათვის კომბინატორიკის მეთოდის გამოყენებით ღებულობს გამოსახულებას:

$$W = \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}. \qquad (4.1.23.)$$

(4.1.23) გამოსახულებაში N გამომსხივებელი რეზონატორ-ოსცილატორების რიცხვია, P-მთელი რიცხვი, რომელიც სრულ ენერგიასთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$U_N = P\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = h\nu. \qquad (4\ 1.24.)$$

სტირლინგის $N! \approx N^N$ ფორმულის გამოყენებით და (4 1.22)-ში ჩასმით, მ. პლანკი საბოლოოდ ღებულობს

$$S = k\left\{\left(1+\frac{U}{\varepsilon_0}\right)\ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon_0}\right) - \frac{U}{\varepsilon_0}\ln\frac{U}{\varepsilon_0}\right\}, \qquad (4.1\ 25)$$

საიდანაც $\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T} = \frac{k}{\varepsilon_0}\ln\left(1+\frac{\varepsilon_0}{U}\right)$ თანაფარდობის გამოყენებით მიიღება·

$$U = <\varepsilon> = \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}, \qquad \varepsilon_0 = h\nu \qquad (4.1.25)$$

და სპექტრული სიმკრივის ფორმულისათვის გამოსახულება

$$\rho(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}. \qquad (4.1.26.)$$

ა. აინშტაინი, 1907 წ. გამოქვეყნებულ ფუნდამენტურ ნაშრომში „პლანკის გამოსხივების თეორია და ხვედრითი სითბოტევადობის თეორია [48, გვ. 134], იძლევა მდგომარეობის სტატისტიკური წონის საშუალებით dE ენერგიის ინტერვალში ალბათობის განსაზღვრას ფორმულით

$$dw = C\ \ \omega(E)\exp\left(-\frac{N}{RT}E\right)dE, \qquad (4.1.27.)$$

სადაც $\omega(E) = G(E)$ მდგომარეობის სტატისტიკური წონაა.

გულისხმობს რა, რომ $\omega = const$, კლასიკური სტატისტიკური მეთოდით ენერგიის საშუალო მნიშვნელობის გამოთვლის დროს

$$\overline{E} = \frac{\int E_\varepsilon \exp\left(-\frac{N}{RT}E\right)dE}{\int\exp\left(-\frac{N}{RT}E\right)dE} = \frac{R}{N}T = kT. \qquad (4.1.28.)$$

ხოლო, როცა $\omega(E)=\begin{cases}0, & E\neq N\varepsilon_0\\ const, & E=N\varepsilon_0\end{cases}$. (4.1.29.)

ასე, რომ

$$\int_0^{\varepsilon}\omega dE=\int_{\varepsilon}^{2\varepsilon}\omega dE=\int_{2\varepsilon}^{3\varepsilon}\omega dE=\ldots=A \qquad (4\ 1.30\ )$$

ამ შემთხვევაში

$$\overline{E}=\frac{\int Ee^{-\frac{N}{RT}E}\omega(E)dE}{\int e^{-\frac{N}{RT}E}\omega(E)dE}=\frac{0+A\varepsilon e^{-\frac{N}{RT}\varepsilon}+A2\varepsilon e^{\frac{N}{RT}2\varepsilon}+\ldots}{A+Ae^{-\frac{N}{RT}\varepsilon}+Ae^{-\frac{N}{RT}2\varepsilon}+\ldots}= \qquad (4.1.31\ )$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\sum_{N=0}^{\infty}e^{-\alpha N\varepsilon}=\frac{\frac{R}{N}\beta\nu}{\exp\left(\beta\frac{\nu}{T}\right)-1}.$$

ხოლო სპექტრული სიმკრივის პლანკისეული ფუნქციისათვის მიიღება ფორმულა

$$\rho_{\nu}(T)=\frac{8\pi}{L^3}\frac{R\beta}{N}\frac{\nu^3}{\exp\beta\frac{\nu}{T}-1}, \qquad (4.1.32\ )$$

სადაც $R=N_A k,\quad \beta=\frac{h}{k},\quad L=c.$

აინშტაინის 1916 წ. გამოქვეყნებულ სტატიას „სინათლის გამოსხივება და შთანთქმა კვანტური თეორიის მიხედვით“ [48, გვ. 386], რომელშიც მოცემულია სითბური გამოსხივების სპექტრული სიმკვრივის პლანკისეული ფორმულის უზადო გამოყვანა-დამტკიცებას ჩვენ აქ არ განვიხილავთ.

§4. 2. პ. ერენფესტის და ა. პუანკარეს წვლილი პლანკის სპექტრული განაწილების შუნქციის მათემატიკურ დასაბუთებაში

შავი გამოსხივების თეორიაში ანუ სინათლის კვანტური თეორიის დარგში 1900-1911 წ.წ. შესრულებული თეორიული და ექსპერიმენტულ ნაშრომების ავტორთა ერთგვარ შემაჯამებელ თავყრილობად უნდა ჩაითვალოს 1911 წ. ოქტომბერ-ნოემბერში ქ. ბრიუსელში მოწვეული სოლვეის I კონგრესი, რომლის მონაწილეთა შორის ვხედავთ იმ დროის მსოფლიოში ცნობილ ფიზიკოსებს, რომლებიც პირდაპირ ან ირიბად დაკავშირებულნი იყვნენ ამ

თეორიის განვითარებასთან. კონგრესის მონაწილე ერთადერთმა დიდმა მათემატიკოსმა, მექანიკოსმა, ფიზიკოსმა და ასტრონომმა ანრი პუანკარემ (1854-1912), რომელმაც დიდი ღვაწლი დასდო XIX-XX ს.ს თეორიული ფიზიკის განვითარებას, სოლვეის კონგრესზე აქტიური მონაწილეობა მიიღო სინათლის კვანტური თეორიის მათემატიკური პრობლემების დამუშავებაში, რაც 1911-12 წლებში სამი სტატიის გამოქვეყნებით გამოიხატა

ამათგან, პირველი დასათაურებული „კვანტების თეორიის შესახებ", გამოქვეყნდა საფრანგეთის მ/ა ჟურნალ „Comp. Rendus"-ში (1911, 153, 1103-1108) იმავე სათაურით, უფრო ვრცელი და დეტალური მათემატიკური დამტკიცებებით დატვირთული სტატია, 1912 წელს დაიბეჭდა ფრანგულად „თეორიული და გამოყენებითი ფიზიკის ჟურნალში" (1912, მე-54 სერია 2, 5-34) და მესამე „კვანტების ჰიპოთეზის" სახელწოდებით პოპულარული სტატია ჟურნალ „Revie Saintifique"-ში (1912, 17, 225-232) [49, გვ. 516-599]. იმავე თემაზე, 1911 წ. „Ann. Phys"-ში (50, 1911, 36, 91-118) სათაურით - „სინათლის კვანტური ჰიპოთეზის რომელი თვისებებია არსებითი სითბური გამოსხივების თეორიაში" გამოქვეყნდა პ. ერენფესტის სტატია [50] ფაქტიურად ეს ორი ნაშრომი პ. ერენფესტისა და ა პუანკარესი, დაედო საფუძვლად მნიშვნელოვან გამოკვლევას შავი გამოსხივების თეორიაში, როგორც ეს ნ. მუსხელიშვილს აქვს ციტირებული. ამიტომაც, გადმოვცემთ ძირითად მეოთდებს, რომლებიც შემდგომ განვითარებული იყო ნ. მუსხელიშვილის მიერ 1920 წ შესრულებულ ნაშრომში.

სოლოვეის I კონგრესზე ა. პუანკარეს მიერ გამოთქმული მოსაზრება – „პლანკის ფორმულის მიღება შეუძლებელია ყოველგვარი მათემატიკური ეშმაკობით, გარდა კვანტური პოსტულატისა" – სადემონსტრაციოდ, იგი განიხილავს დიდტალღოვანი და მცირეტალღოვანი რეზონატორების სისტემას, რომელთა პარამეტრებია $x_1, x_2, ..., x_n$ და მოძრაობის პარამეტრული განტოლება

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad x_i = 1,2,...n, \qquad X_i = X_i(x_i). \tag{4.2.1}$$

ოსცილატორთა შორის დაჯახებების კოეფიციენტის გათვალისწინებით მოძრაობის განტოლებები ჩაიწერება სახით:

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -h_1 x_1 + z_1, \quad \frac{dy_2}{dt} = -h_2 x_2 + z_2. \tag{4.2.2}$$

თეორმოდინამიკის II კანონის შესაბამისად, უნდა არსებობდეს W ფუნქცია, ხოლო $Wd\tau$ ... უნდა განსაზღვრავდეს ალბათობას იმისას, რომ $x_1, x_2, \ldots x_n$ წერტილებით გამოსახული ოსცილატორები მოხვდნენ n განზომილებიანი ფაზური სივრცის ელემენტში. ამასთან დაცული უნდა იყოს უწყვეტობის პირობა

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (WX_i)}{\partial x_i} = 0, \text{ და } W = 1. \tag{4.2 3}$$

ამ ვითარებაში, ა, პუანკარე განიხილავს მოკლეტალღოვან n რეზორატორთა სისტემას, რომელთა ენერგიებია $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ და გრძელტალღოვან p რაოდენობის რეზონატორ-ატომებს ენერგიებით $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$. ამასთან, ოსცილატორების სრული ენერგია:

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i = h = const. \tag{4.2.4}$$

სტატისტიკური საშუალო სიდიდისათვის პუანკარეს შემოაქვს აღნიშვნები:

$$Mdh = \int \Pi d\sigma d\tau, \quad MXdh = \iint \prod_{i=1}^{p} \xi_i d\sigma d\tau, \quad MYdh = \iint \prod_{i=1}^{n} \eta_i d\sigma d\tau, \tag{4.2 5}$$

სადაც

$$\left.\begin{array}{l} \Pi = W(\eta_1) W(\eta_2) \ldots W(\eta_n) \\ d\sigma = d\eta_1 d\eta_1, \ldots, d\eta_n, \qquad d\tau = d\xi_1, d\xi_2 \ldots d\xi_p \end{array}\right\}. \tag{4.2.6}$$

პუანკარეს თვალსაზრისით, ξ და η პარამეტრებზე დადებული უნდა იყოს პირობა:

$$\xi_i > 0, \ \eta_i > 0, \ h < \sum \xi_i + \sum \eta_i < h + dh. \tag{4.2 7}$$

ამასთან, X არის რეზონატორთა ენერგიის საშუალო მნიშვნელობა. ა. პუანკარე ითვლის ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას ორი მეთოდით და გამოსახავს მას შემდეგი სახით:

$$X = \frac{F(Y)}{F'(Y)}, \qquad 2X + Y = h. \tag{4.2.8}$$

ფუნქციონალური დამოკიდებულების კონკრეტული წარმოდგენისათვის ა. პუანკარე განიხილავს შემთხვევებს:

$W=\eta^m$, როცა $F(Y)=Y^{m+1}$, $X=\frac{Y}{m+1}$, $Y=(m+1)X$. (4.2.9)

$W=e^{\alpha\eta}$ როცა $F(Y)=Ye^{\alpha Y}$, $X=-\frac{Y}{\alpha Y+1}$, $Y=\frac{X}{1-\alpha X}$ (4.2.10)

პლანკის ჰიპოთეზის გათვალისწინებით ყველგან $W=0$, იმ შემთხვევათა გარდა როცა η არის ε-ის ჯერადი. ამ მნიშვნელობისათვის W მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. მცირე ინტერვალზე გავრცელებული ინტეგრალი

$$\int W d\eta=1, \text{ როცა } W=\begin{cases}0, & \eta\neq n\varepsilon\\ \infty, & \eta=n\varepsilon\end{cases}. \quad (4.2.11)$$

ამ უკანასკნელი შემთხვევისათვის გამოთვლილი ფუნქციის მნიშვნელობას პუანკარე განსაზღვრავს სახით:

$$F(Y)=\left(1+\frac{\varepsilon}{Y}\right)^{\frac{Y}{\varepsilon}}\left(1+\frac{Y}{\varepsilon}\right). \quad (4.2.12)$$

$F(y)$გამოსახულების მინიმუმის პირობიდან მიიღება თანაფარდობანი:

$$X=\frac{\varepsilon}{\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{X}\right)};\quad Y=\frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{X}}-1}; \quad (4.2.13)$$

რომლებიც პლანკის ფუნქციის ეკვივალენტურია თუ დავუშვებთ, რომ

$\langle\varepsilon\rangle=Y,\quad \varepsilon=h\nu,\quad X=kT$.

იმავე შედეგებს ღებულობს ა. პუანკარე უფრო ზოგადი მეთოდით, რომელსაც ნ. მუსხელიშვილი თავის სტატიაში იხსენიებს, როგორც ნაკლოვანს ამ ნაშრომში ა. პუანკარეს შემოაქვს გარდაქმნა

$$\phi(\alpha)=\int_0^\infty W e^{-\alpha\eta}d\eta, \text{ სადაც } \alpha=\mathrm{Re}\,\alpha+i\,\mathrm{Im}\,\alpha>0 \quad (4.2.14)$$

მაშინ

$$\phi^*(\alpha)=\int_0^\infty \varphi(x)e^{-\alpha x}dx, \qquad x=\mathrm{Re}\,x+i\,\mathrm{Im}\,x>0. \quad (4.2.15)$$

საიდანაც, ფურიე-გარდაქმნის ფორმულის გამოყენებით

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\phi^*(\alpha)e^{\alpha x}d\alpha. \quad (4.2.16)$$

(4.2.16)-ში ინტეგრალი აიღება კომპლექსური სიბრტყის წარმოსახვითი ღერძის პარალელური წირის გასწვრივ. შემდგომი დეტალიზაციის გარეშე, ა.

პუანკარეს მოაქვს არგუმენტები იმის დასამტკიცებლად, რომ (4.2.15) სიდიდე, $\phi(\alpha)$-ს მაქსიმუმის დროს უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას

$$Y = -\frac{\phi'(\alpha)}{\phi(\alpha)}, \quad X = \frac{1}{\alpha}, \tag{4.2.17}$$

რაც პლანკის ჰიპოთეზის გათვალისწინებით გვაძლევს

$$\phi(\alpha) = \left(1 - e^{-\alpha\varepsilon}\right)^{-1}, \qquad Y = \varepsilon\left(e^{\frac{\varepsilon}{X}} - 1\right)^{-1}. \tag{4.2.18}$$

მიუხედავად ა. პუანკარეს კატეგორიული მტკიცებისა: „კვანტების ჰიპოთეზა – ერთადერთია, რომელსაც მივყავართ პლანკის კანონამდე"-ო, რომელიც მიღებულია მის მიერ I და II მეთოდის გამოყენებით, ნ. მუსხელიშვილი უპირატესობას ანიჭებს პ. ერენფესტის მიერ გამოქვეყნებულ მეთოდს, როდესაც განაწილების ფუნქცია ინტეგრალურ განტოლებაზე დაიყვანება.

პ. ერენფესტის მიხედვით [50, გვ.128], თუ განაწილების წონითი $a(\nu, E)$ ფუნქცია განსაზღვრულია, მაშინ წინა პარაგრაფში მის მიერ შემოტანილი $N(\nu)$ და $E(\nu)$ სიდიდეები განისაზღვრება.

$$\left.\begin{aligned} N(\nu) &= \int_0^\infty a(\nu, E)dE \\ E(\nu) &= \int_0^\infty Ea(\nu, E)dE \end{aligned}\right\}. \tag{4.2.19}$$

ამასთან $a(\nu, E) = e^{\lambda(\nu)}\gamma(\nu, E)e^{-\mu E}$. (4.2.20)

სადაც λ და μ ლაგრანჟის განუსაზღვრელი მამრავლებია შესაბამისად

$$a(\nu, E) = N(\nu)\frac{\gamma(\nu, E)e^{-\mu E}}{\int_0^\infty dE\gamma(\nu, E)e^{-\mu E}}. \tag{4.2.21}$$

თუ წონითი ფუნქციის არგუმენტებზე დამოკიდებულება განსაზღვრულია

$$\gamma(\nu, E) \sim G\left(\frac{E}{\nu}\right) = G(q), \tag{4.2.22}$$

მაშინ სპექტრის „ულტრაიისფერი" უბნისთვის სამართლიანი იქნება:

$$f(\mu\nu)=\frac{\int_0^{\infty} dqqe^{-\mu\nu q}G(q)}{\int_0^{\infty} dqe^{-\mu\nu q}G(q)}. \qquad (4.2\ 23)$$

ხოლო, თუ შემოვიტანდით აღნიშვნებს:

$$\mu=\frac{\beta}{T}, \qquad \mu\nu=\beta\frac{\nu}{T}=\sigma, \quad \frac{\alpha c^3}{8\pi}=C_1,$$

მაშინ,

$$C_1 f(\sigma)=\frac{Z(\sigma)}{N(\sigma)}=\frac{\int_0^{\infty} dqqe^{-\sigma q}G(q)}{\int_0^{\infty} dqe^{-\sigma q}G(q)} \qquad (4\ 2\ 25)$$

თუ უწყვეტი სპექტრის და მისი შესაბამისი წონითი განაწილების პარალელურად, არსებობს წყვეტილ $q_1,q_2,q_3,\ldots$ წერტილთა ერთობლიობა, რომელთა შესაბამისი წონითი ფუნქციებით $G_0,G_1,G_2,\ldots$ გამოისახებიან, მაშინ პ. ერენფესტის თანახმად

$$C_1 f(\sigma)=\frac{P(\sigma)}{Q(\sigma)}, \ \sigma=\frac{h\nu}{kT}, \qquad (4\ 2\ 26)$$

სადაც $P(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k e^{-\sigma q_k}G_k+\int_0^{\infty} dqqe^{-\sigma q}G(q),$ (4.2.27)

$$Q(\sigma)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sigma q_k}G_k+\int_0^{\infty} dqe^{-\sigma q}G(q). \qquad (4.2.28)$$

ა. პუანკარეს შედეგების მოკლე მიმოხილვის საპირისპიროდ, ჩვენ აქ არ გადმოვცემთ პ. ერენფესტის განტოლების მიახლოებითი გამოთვლების შედეგად მიღებულ დასკვნებს და დეტალურად განვიხილავთ ნ. მუსხელიშვილის გამოქვეყნებულ სტატიას და მის ხელნაწერ ვარიანტს.

§. 4.3. ნიკო მუსხელიშვილი – შავი გამოსხივების თეორიის პირდაპირი ამოცანის შესახებ

აბსოლუტურად შავი სხეულის სითბური გამოსხივების თეორია (შავი გამოსხივების თეორია, შემდეგში შგთ), რომლის საფუძველზე 1900 წელს წარმოიშვა სინათლის კვანტური თეორია, მეოცე საუკუნის პირველი მეოთხედის ფიზიკის ერთერთი ძირითადი ამოცანის ამოხსნის ნაყოფია და

ატომის კვანტური თეორიასა (კვანტური მექანიკა) და ფარდობითობის (სპეციალური და ზოგადი) თეორიასთან ერთად, იმდროინდელი დიდი ფიზიკოსებისა და მათემატიკოსების ინტერესების არეში იყო მოქცეული

ჯერ კიდევ ვ. ვინის (1896), ვ. რელეის (1898) და მ პლანკის (1900) მიერ იყო დასმული შავი გამოსხივების პირდაპირი ამოცანა გამოსხივების სპექტრის მთელი უბნისათვის, რომელიც დაიყვანება შემდეგი კითხვის პასუხზე: როგორ ფიზიკურ წარმოდგენას უნდა აკმაყოფილებდეს ნივთიერებასა და გამოსხივებას შორის ურთიერთქმედების ხასიათი, რომ სპექტრული განაწილების ფუნქცია ტალღის სიგრძის ან სიხშირის მთელ დიაპაზონში ($0<\lambda<\infty$ ან $\infty<\gamma<0$) აღწერდეს ექსპერიმენტულ მონაცემებს. მათ მიერვე ნაჩვენები იყო, რომ კლასიკური ფიზიკის ერთ-ერთ ფუნდამენტურ პრინციპზე - ურთიერთქმედების უწყვეტობაზე დაყრდნობით, სპექტრული განაწილება კარგად აღიწერება მხოლოდ სპექტრის დაბალსიხშირიან უბანში. მაშინ, როცა მაღალ უბანში განაწილების ფუნქციის ვინისეულ გამოსახულებას არ აქვს დასაბუთება [16; გვ. 236]

მხოლოდ მაქს პლანკის (1900წ.) გენიალური მიხვედრის შესატყვისად, როცა შგთ-ს ნივთიერებასა და გამოსხივებას შორის ურთიერთქმედების დისკრეტულობის პოსტულატი დაედო საფუძვლად, დიდი წარმატებით იქნა ახსნილი ემპირიული და ექსპერიმენტული მონაცემები გამოსხივების პირდაპირი ამოცანისა მ. პლანკმა მოგვცა გამოსხივების სპექტრული ფუნქციის თერმოდინამიკური (1900) და სტატისტიკური (1901წ.) მეთოდებით გამოყვანის სწორი გადაწყვეტა, რომელსაც ერენფესტ-პუანკარე-მუსხელიშვილის აღნიშვნებით ასე ჩავწერთ [16, გვ 30][6]

1) $\varrho(\lambda)\cong\left(e^{\lambda}-1\right)^{-1}$, $(0<\lambda<\infty)$; 2) $\varrho(\lambda)\cong\lambda^{-1}$, $(\lambda<<1)$; 3) $\varrho(\lambda)\cong e^{-\lambda}$, $(\lambda>>1)$

---

[6] აქვე შევნიშნავთ, რომ ნ მუსხელიშვილი, ისე როგორც პაულ ერენფესტი (1911წ) და ანრი პუანკარე (1911-1912 წწ), რომელთა ნაშრომების საფუძველზე დაიწერა (1920 წ) და გამოქვეყნდა (1924 წ) განხილული სტატია, პლანკის რელეი-ჯინსისა და ვინის ფორმულების ჩაწერის დროს ყურადღებას არ ამახვილებენ არა არსებით მათემატიკურ სიზუსტეზე ჩვეულებრივ, პლანკის ფორმულა სპექტრული სიმკვრივისათვის იწერება ასეთი სახით $\rho(\nu,T)=8\pi h\nu^3c^{-3}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]^{-1}$. ამასთან $h\gamma/kT=hc/\lambda kT$ ცვლადს ნიო მუსხელიშვილი აღნიშნავს λ-თი პაულ ერენფესტი σ-თი, ანრი პუანკარე კი α-თი, პლანკის ფორმულაში $\nu=c/\lambda$ სიხშირეა λ ტალღის სიგრძე. T ტემპერატურა, $h=6.67\times10^{-27}$ ერგი წმ - პლანკის მუდმივია, $c=3\cdot10^{10}$ სმ/წმ სინათლის სიჩქარე

ა. აინშტაინის [48, გვ. 134 1908 წ.); გვ. 386 (1916 წ.); გვ. 473 (1924 წ.], პ. ერენფესტის [4, გვ. 118 (1911 წ.), ა. პუანკარეს [5, გვ. 518 (1911)] და სხვათა მიერ დასმული იყო საკითხი იმის შესახებ, თუ რამდენად უზრუნველჰყოფს კვანტური ჰიპოტეზა (პლანკი-აინშტაინის გაგებით) გამოსხივების სპექტრისათვის პლანკისეული სპექტრული განაწილების ფუნქციის მიღებას ანუ შგთ პირდაპირი ამოცანის ამოხსნას

გ. პლანკისა და ა. აინშტაინის ზემოთ მითითებულ ნაშრომებში, შავი გამოსხივების სპექტრული განაწილების ფუნქციის გამოყვანა საკმარისი ლოგიკური დასაბუთებითაა მოცემული ფიზიკური თვალსაზრისით, რასაც ვერ ვიტყვით დამტკიცების მათემატიკურ სიმკაცრეზე. საკითხი იმის შესახებ, თუ რამდენად უზრუნველყოფს კვანტური პოსტულატი შგთ-ს პირადპირი ამოცანის ამოხსნას, როცა ერთდროულად მხედველობაშია მიღებული ველსა (გამოსხივებას) და ნივთიერებას (ოსცილატორებს) შორის ენერგიის კვანტურ-წყვეტილი და ტალღურ-უწყვეტი გაცვლა, დასმული იყო პ. ერენფესტისა და ა. პუანკარეს ზემოთ მითითებულ სტატიებში. ამასთან, პუანკარემ ეს საკითხი ჯერ კიდევ სოლვეის I კონგრესის ერთ-ერთ სხდომაზე დისკუსიის დროს აღძრა [49,გვ. 302].

პ. ერენფესტის ვრცელი ნაშრომის „კვანტური ჰიპოთეზის რომელი თვისება თამაშობს არსებით როლს სითბური გამოსხივების თეორიაში"-ს მეშვიდე პარაგრაფში სათაურით „დისკრეტული წონითი მნიშვნელობის შემოტანა უწყვეტ წონით ფუნქციასთან ერთად" ვკითხულობთ: უწყვეტ $G(q)$ განაწილებასთან ერთად, რომლის დროსაც dq ელემენტს შეესაბამება უსასრულოდ მცირე $G(q)dq$ წონის მნიშვნელობა, q_0, q_1, q_2, ..წერტილებისათვის, შეიძლება შემოტანილ იქნას დისკრეტულ წონათა სასრული მნიშვნელობანი და ჩვენ მივიღებთ გამოსახულებას:

$$c_1 f(\lambda) = P(\lambda)/Q(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\ln Q(\lambda); \quad Q(\lambda) = \exp\left\{-c_1 \int f(\lambda)d\lambda\right\}, \tag{4.3.1}$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \exp(-\lambda q_k) G_k + \int_0^{\infty} dq q \exp(-\lambda q) G(q), \tag{4.3.2}$$

$$Q(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} q_k \exp(-\lambda q_k) G_k + \int_0^{\infty} dqq \exp(-\lambda q) G(q) 8 \qquad (4\,3\,3)$$

(4.3.1) და (4.3.2) გამოსახულებაში თუ $G(q)=0$, ჩვენ საქმე გვაქვს განაწილების დისკრეტულ სპექტრთან. მაშინ კი, როცა $G_k=0$, ჩვენ ვუბრუნდებით მხოლოდ უწყვეტი განაწილების შესაბამის შემთხვევას [გვ. 129].

ჩვენ ამჯერად გვერდს ავუვლით პ. ერენფესტისა და ა პუანკარეს შედეგების გადმოცემას და მის ანალიზს და გადავალთ ნ მუსხელიშვილის ნაშრომში „შავი გამოსხივების თეორიაში ერთი განტოლების ამოხსნა", შგთ-ს პირდაპირი ამოცანის ამოხსნაში შეტანილი წვლილის შეფასებაზე.

სარგებლობს რა სტილტიესის ინტეგრალის განმარტებით, ნ. მუსხელიშვილი (4.3.3) ინტეგრალურ განტოლებას ჩაწერს სახით:

$$Q(\lambda)=\int_0^{\infty} \exp(-\lambda x) d\psi(x), \qquad x \equiv q, \qquad (4.3.4)$$

სადაც $d\psi(x)=G(x)dx$, ამასთან $\psi(x)$ ფუნქციის განსაზღვრულობის არე მის მიერ მოცემულია პირობით:

$$\lim_{x\to\infty} \exp(-\lambda x)\psi(x) -> 0, \quad x>0. \qquad (4.3.5)$$

ამ პირობის შესრულების მოთხოვნით იგი ღებულობს ინტეგრალურ განტოლებას:

$$Q(\lambda)=\lambda \int_0^{\infty} \exp(-\lambda x)\psi(x)dx. \qquad (4.3.6)$$

მე-(4.3.6) გამოსაულებაზე მე-(4.3.2)-ის დაყვანის სამართლიანობის დამტკიცების მიზნით იგი წერს: „ვთქვათ $\psi(x)$ წყვეტილი ფუნქციაა და გარკვეული მნიშვნელობა აქვს ox ღერძის მხოლოდ იმ წერტილებში, სადაც თავმოყრილი არაა წერტილოვანი G_k მასები. x_k წერტილის გავლის შემთხვევაში .. ფუნქცია იცვლება ნახტომისებურად ისე, რომ

$$\psi(x_k+0)-\psi(x_k-0)=G_k. \qquad (4.3.7)$$

ხოლო $\psi(x)$ გამოსახულებას კი, ჩვენ შეგვიძლია მივაწეროთ ნებისმიერი მნიშვნელობა, მაგალითად

$$\psi_k(x_k)\equiv\psi(x_k)=\frac{1}{2}[\psi(x_k+0)+\psi(x_k-0)] \qquad (4.3\,8)$$

რაც შეესატყვისება „მასის“ გაყოფას ორ ნაწილად: ერთი იმათგანი, რომელიც განლაგებულია x_k-ას მარცხნივ, ხოლო მეორე მისგან მარჯვნივ ამასთან, თუმცა გაყოფის წესი სრულიად პირობითია, ჩვენ დავეყრდნობით ამ პირობას ყველა $x=0$-სათვის, ხოლო $x_k \neq 0$-სათვის ვიგულისხმებთ $\psi(0)=0$

წყვეტილი ფუნქციის განმარტება კი, ნ. მუსხელიშვილს შემდეგნაირად შემოაქვს: ox ღერძის $(0,\infty)$ არეს იგი მცირე მონაკვეთად ჰყოფს

$$\exp(-\lambda x_1)[\psi(x_1)-\psi(0)]+\exp(-\lambda x_2)[\psi(x_2)-\psi(x_1)]+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda x_k)[\psi(x_k)-\psi(x_{k-1})], \quad (4\,3\,9)$$

სადაც $x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots$ აღნიშნავს წერტილებს, რომლებშიც მოთავსებულია G_k დისკრეტული „მასები“ და როცა $\lim_{\Delta\to 0} x_{k\pm\Delta}=x_k$, მაშინ .

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda x_k)[\psi(x_1)-\psi(0)]=\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\lambda x_k)[\psi(x_k+0)-\psi(x_k-0)]+\int_0^{\infty}\exp(-\lambda x)d\psi(x)= \quad (4.3.10)$$

$$=\sum_{k=0}^{x}\exp(-\lambda x_k)G_k+\int_0^{\infty}\exp(-\lambda x)G(x)dx=Q(x).$$

მე-(4.3.6) და მე-(4 3.10) ფორმულებში სტილტიესის ინტეგრალის გამოყენება, ეკვივალენტურია დირაკის δ-ფუნქციაზე გადასვლის ოპერაციისა. მართლაც, როგორც ამჟამად ცნობილია [52, გვ. 13-29], სტილტიესის მე-(4.3.4) ინტეგრალში თუ შევიტანთ

$$\psi(x)\equiv\gamma(x)=\begin{cases}+1/2, x>0\\ -1/2, x<0\end{cases}, \qquad \Delta\gamma=0,\ldots x\neq 0 \quad (4.3.10)$$

მაშინ $\delta(x)=\gamma'(x)$, ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)d\gamma(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0). \quad (4.3.11)$$

მართლაც ავიღოთ უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{\alpha\to\infty}\gamma(x,\alpha)=\gamma(x)$ ასეთ მოთხოვნას აკმაყოფილებს, მაგალითად ფუნქცია:

$$\gamma(x,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\alpha\mu)\frac{\sin\mu x}{\mu}d\mu=\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{\alpha}. \quad (4.3.12)$$

რადგანაც $\gamma'(x,\alpha)=\delta(x,a)$, ამიტომ

$$\delta(x,a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\exp(-\alpha\mu)\cos\mu x d\mu=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}, \quad (4.3.13)$$

საიდანაც ჩანს, რომ

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\alpha)=\delta(x)=\begin{cases}0, x\neq 0\\ \infty, x=0\end{cases}, \qquad (4.3.14)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x,\alpha)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \qquad (4.3.15)$$

თავის გამოთვლებში ნ. მუსხელიშვილი ნაცვლად δ ფუნქციისა იყენებს ინტეგრალურ გამოსახულებას·

$$M(k,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[k(\lambda+i\mu)]}{\lambda+i\mu}d\mu=\begin{cases}1, k>0\\ 1/2, k=0\\ 0, k<0\end{cases} \qquad (4\ 3\ 16)$$

რომელიც δ -ფუნქციის ანალოგიურ როლს თამაშობს გარდაქმნებში

ჩვენ აქ ვამთავრებთ შავი გამოსხივების თეორიის პირდაპირი ამოცანის შესახებ ნ. მუსხელიშვილის სტატიის ანალიზს. მივუთითებთ რა იმ გარემოებაზე, რომ ფაქტიურად ამ ამოცანის მათემატიკური ამოხსნისას იგი ეყრდნობა პუანკარეს მიერ გამოყენებულ მეთოდს, რომელსაც ერენფესტი ბ. რიმანს მიაწერს [50, გვ. 130].

აქვე შევნიშნავთ, რომ ფ მედვედევი [8, გვ. 78] მიუთითებს რა მ ჯემერის [54, გვ. 293] მიერ მოტანილ სიაზე იმ მათემატიკოსებისა, რომლებმაც პ. დირაკამდე და მის შემდეგ თავიანთ შრომებში გამოიყენეს δ- ფუნქციის მსგავსი წყვეტილი ფუნქციები (მ. კირჰოფი, ო. ხევისაიდი, ჰ. ჰერცი, დ. შვარცი, ი. მიკუსიმსკი, მ. რისი, კ. შმიდენი, დ. დაუგვიცი), თავად უმატებს პ. ჩებიშევის, ა. მარკოვის, ფ. პოსეს და განსაკუთრებით იტალიელი მათემატიკოსის ჯ. ლ. ჯორჯის გვარებს. ჩვენის მხრივ დავუმატებთ ა. პუანკარეს, ს. სობოლევსა და განსაკუთრებით აკად. ნ. მუსხელიშვილს, რომლებიც ფართოდ იყენებენ δ - ფუნქციას ფიზიკური და მექანიკური ამოცანების ამოსხნაში.

§4.4. აკად. ნ. მუსხელიშვილი - შავი გამოსხივების თეორიის შებრუნებული ამოცანის შესახებ

პ. ერენფესტის [50] და ა პუანკარეს [49] მიერ 1911 წ გამოქვეყნებულ ნაშრომებში დასმული იყო შავი გამოსხივების თეორიის (შგთ) პირდაპირი ამოცანის მკაცრი მათემატიკური ამოხსნის გზა

როგორც ცნობილია, შგთ პირდაპირი ამოცანა, პ ერენფესტის მიხედვით, დაიყვანება სპექტრული განაწილების $f(\lambda)$ ფუნქციისათვის დისკრეტული G_k და უწყვეტი $G(q)$ წონითი ფუნქციების შერჩევაზე გამოსახულებაში

$$C_1 f(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)} = -\frac{d}{d\lambda}\ln Q(\lambda), \quad Q(\lambda) = \exp\left[-C_1 f(\lambda)\right], \tag{4.4 1}$$

სადაც

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k e^{-\lambda q_k} G_k + \int_0^{\infty} qdqe^{-\lambda q} G(q), \quad \lambda = \frac{h\nu}{kT}, \tag{4.4 2}$$

$$Q(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda q_k} G_k + \int_0^{\infty} dqe^{-\lambda q} G(q), \quad C_1 = \frac{\alpha c^3}{8\pi}, \tag{4 4 3}$$

რომელიც უზრუნველყოფს დიდი, შუალედური და მცირე სიხშირეების შემთხვევაში შესაბამისად ვინის ($Q(\lambda) \sim e^{-\lambda}$), პლანკისა $Q(\lambda) \sim (e^{\lambda} - 1)^{-1}$ და რელეი - ჯინსის ($Q(\lambda) \sim \lambda^{-1}$) განაწილების კანონის მიღებას.

ა. პუანკარემ თავისი წვლილი შეიტანა საშუალო სიხშირეების ინტერვალში პლანკის განაწილების ფუნქციის მათემატიკურ ამოხსნაში. მისი აღწერის მიხედვით, არავითარმა „მათემატიკურმა ოინმა" არ შეიძლება მოგვცეს სწორი ამოხსნა, თუ არა მხოლოდ დისკრეტული სტატიკური წონის შემოტანამ

ნ. მუსხელიშვილმა 1920 წ. შესრულებულ და 1924 წ. გამოქვეყნებულ ნაშრომში [51], სტილტიესის ინტეგრალის გამოყენებით, რომელიც დაიყვანება დირაკის δ - ფუნქციაზე [52], მე-(4.4.3) გამოსახულება ჩაწერა სახით:

$$Q(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \psi(x) dx, \tag{4.4.4}$$

სადაც $\psi(x)$ $(0,\infty)$ ინტერვალში წყვეტილი ფუნქციაა $x=x_k$ წერტილების მიდამოში, როცა, $G_k = \psi(x_k + 0) - \psi(x_k - 0)$,

ხოლო $x \neq x_k (k = 1,2,3,\ldots)$ წერტილებისთვის $G(x) = d\psi / dx$ უწყვეტია.

შგთ შებრუნებულ ამოცანას, ნ. მუსხელიშვილი განიხილავს კომპლექსურ სიბრტყეში ფურიეს ინტეგრალური გარდაქმნის სახით, სადაც $\tau = \lambda + i\mu$, $(\lambda, \mu > 0)$, რომლის შესაბამისად (4 4.4)-ე გადაიწერება სახით.

$$\int_0^{\infty} e^{-(\lambda+i\mu)x} \psi(x) dx = \frac{Q(\lambda + i\mu)}{\lambda + i\mu}. \qquad (4\,4.6)$$

თუ (4.4 6) გამოსახულების ორივე მხარეს $(2\pi)^{-1} e^{i\mu x}$-ზე გავამრავლებთ და ავიღებთ ინტეგრალს $(-\infty, +\infty)$ საზღვრებში, მიიღება

$$\psi(x) = \frac{e^{\lambda x}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\lambda + i\mu)}{\lambda + i\mu} e^{i\mu x} d\mu. \qquad (4\,4\,7)$$

ნ. მუსხელიშვილი (4.4.7) ინტეგრალს განიხილავს კომპლექსურ სიბრტყეში, სადაც ინტეგრება ხდება წარმოსახვითი ღერძის გასწვრივ $\lambda \to 0$, როცა ის ჩაიწერება სახით

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty+\lambda}^{+i\infty+\lambda} \frac{Q(\tau)}{\tau} e^{x\tau} d\tau. \qquad (4\,4\,8)$$

მიღებული ინტეგრალური გარდაქმნის გამოყენების ეფექტურობის დემონსტრირების მიზნით ნ. მუსხელიშვილი განიხილავს სხვადასხვა შემთხვევებს.

სპექტრული განაწილების კომპლექსური ფუნქციის $\tau = 0$ წერტილში წარმოდგენის მიხედვით, ნ მუსხელიშვილი ნაშთების ფორმულის გამოყენებით პოულობს:

1) $Q(\tau) = \tau^{-1}, \tau << 1$ (რელეი-ჯინსის ფორმულის თანახმად)

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{x\tau}}{\tau^2} d\tau = x. \qquad (4.4.9)$$

მართლაც, როგორც ცნობილია, კოშის თეორემის თანახმად [60, გვ. 79], $f(x)$ ანალიზური ფუნქციის ნაშთი განსაკუთრებულ განმხოლოებულ a წერტილში ანუ პოლუსში გამოითვლება ფორმულით

$$\mathrm{Res} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = C_{-1} \qquad (4.4.9)$$

სადაც C_{-1} არის ლორანის მწკრივის $n = -1$ შესაბამისი კოეფიციენტი:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}, \qquad (4.4.10)$$

საიდანაც სჩანს, რომ აცილებად განსაკუთრებულ $z = a$ წერტილში ფუნქციის ნაშთი ყოველთვის ნულის ტოლია.

ამ შემთხვევაში $f(z)$ ფუნქციის ნაშთი წერტილში განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathrm{Res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right] \qquad (4\ 4.11)$$

მუსხელიშვილისეული $f(\tau, x) = e^{x\tau}/\tau^2$ ფუნქციისათვის, წერტილი არის მეორე რიგის აცილებადი განსაკუთრებული წერტილი, ამიტომ

$$\mathrm{Res} f(x) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{d\tau}\left(\tau^2\cdot\frac{e^{x\tau}}{\tau^2}\right) = \lim_{\tau\to 0} x e^{x\tau} = x. \qquad (4.4.12)$$

ამ შემთხვევის შესაბამისად

$$\psi(x) = x, \quad G(x) = \psi'(x) = 1, \quad G_k = 0, \qquad (4.4.13)$$

საიდანაც ნ. მუსხელიშვილი ასკვნის, რომ უწყვეტია სპექტრის $G(x) \neq 0$ სტატისტიკური წონა, ხოლო $G_k = 0$.

2) $Q(\tau)$ არის 2π პერიოდის მჭონე ფუნქცია. ამ შემთხვევაში ნ მუსხელიშვილი განიხილავს ზოგად გამოსახულებას

$$Q(\lambda + i\mu) = Q(\tau) = \sum A_n e^{n(\lambda+i\mu)}. \qquad (4.4.14)$$

a) პლანკის განზოგადებული განაწილების ფუნქცია მიიღება, როცა $A_n = e^{-1}$ და

$$Q(\lambda + i\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1)(\lambda+i\mu)} = \left(e^{\lambda+i\mu} - 1\right)^{-1}. \qquad (4.4.15)$$

b) როცა $A_n = (n!)^{-1}$, მაშინ

$$Q(\lambda + i\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}e^{-n(\lambda+i\mu)} = \exp[\exp(-\tau)], \qquad (4.4.16)$$

რომლის გამოყვანის დროს ნ. მუსხელიშვილი სარგებლობს ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნით:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{e^{(\lambda+i\mu)(x-n)}}{\lambda + i\mu}, \qquad (4.4.17)$$

რომელ გამოსახულებაშიც ნ. მუსხელიშვილი სარგებლობს δ სახის ფუნქციით

$$M(\lambda + i\mu, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t(\lambda+i\mu)}}{\lambda + i\mu} d\mu = \begin{cases} 1, & k > 0 \\ \frac{1}{2} & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}, \qquad (4\ 4\ 18)$$

რომლის გამოყენებით მიიღება:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{[x]} A_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_{[x]} . \qquad (4\ 4\ 19)$$

შესაბამისად

$$G_n \equiv A_n = \psi(x_n + 0) - \psi(x_n - 0) \neq 0, \quad G(x) = 0, \quad n=1,2,\ldots[x]. \qquad (4.4.20)$$

შევნიშნავთ, რომ სტატიის ნაბეჭდ ტექსტს და ამავე სტატიის ხელნაწერს შორის არის ფიზიკური და მათემატიკური ხასიათის ცვლილებები .

მათემატიკური მტკიცებები მოცემულია შენიშვნების, სქოლიოებისა და მათემატიკური დამატების სახით, მაშინ როცა ყველა ამ მასალას ხელნაწერი თვით ტექსტში შეიცავს. თუ ჩვენ მხედველობაში მივიღებთ იმ გარემოებას, რომ გამომცემლობამ სტატია 1921 წლის 21 ივნისს მიიღო და ჩვენს ხელთ არის ხელნაწერი, რომელიც 1920 წლის 20 მარტით არის დათარიღებული, დასაშვებია, რომ მასალის ასეთი გადაჯგუფება თვით ავტორის მიერ მოხდა. აქვე უნდა აღინიშნოს იმ გარემოების შესახებ, რომელიც გამომდინარეობს მუსხელიშილის მიერ მისი მეუღლისადმი ლონდონში გაგზავნილ აქამდე უცნობი წერილიდან. ეს წერილი 1923 წლის 4 აპრილით თარიღდება. ქვემოთ მოგვაქვს ნაწყვეტი ამ წერილიდან: „... აქ მხოლოდ (იგულისხმება თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი) გიორგის შეეძლო გაეკეთებინა ისეთი რამ, რაც ტამარკინმა, კრუტკოვმა და უსპენსკიმ გააკეთეს იქ (პეტერბურგის უნივერსიტეტი). როგორც მახსოვს მე შენ უკვე გიამბე ერთი შემთხვევის შესახებ მე ჩემი ერთი ხელნაწერი დავტოვე იქ კრუტკოვისათვის (მან მთხოვა მე ამომეხსნა ერთი მათემატიკური ამოცანა). მათ ეს ხელნაწერი თარგმნეს გერმანულად ჩემი ნებართვის გარეშე და დასაბეჭდად გაგზავნეს გერმანიაში. ერთადერთი, რაც ცუდი გააკეთეს იყო ის, რომ მათ ჩემი გვარი დაწერეს, როგორც მუსხელოვი და

არა მუსხელიშვილი“. წერილიდან არ ჩანს, რომ პეტერბურგში დატოვებული უცნობი ხელნაწერი და სტატია „ერთი ინტეგრალური ამოცანის ამოხსნა“ ხელნაწერი ერთი და იგივე არ არის. ფიზიკური სტატია, რომელიც გერმანიაში გაიგზავნა, მუსხელიშვილის შრომების ბიბლიოგრაფიაში არ ჩანს ჩვენი კვლევა ამ მიმართულებით უშედეგოდ დასრულდა. უცნობია თუ რომელ ჟურნალში გაიგზავნა დასაბეჭდად სტატია. ჩვენ, ასევე უნდა ვიგულისხმოთ, რომ ზოგი რამ ამ ამოცანის შესახებ, „კრუტკოვს გამოეყენებინა ზემოხსენებულ სასწავლო კურსში. ამ დროს კრუტკოვი მუშაობდა მონოგრაფიულ სტატიაზე „ადიაბატური ინვარიანტები და მათი გამოყენება თეორიულ ფიზიკაში“, რომლის ხელნაწერი სახელმწიფო ოპტიკური ინსტიტუტის რედაქციაში გაგზავნილ იქნა 1921 წლის 3 ივნისს და სადაც არც ერთი მინიშნება არ იყო მუსხელიშვილის შესახებ. აქვე უნდა ითქვას, რომ ის თემები, რომლებიც მუსხელიშვილის ზემოთაღნიშნულ სტატიაში იყო განხილული, საერთოდ არ ყოფილა ნახსენები კრუტკოვის სტატიაში. შესაძლებელია ეს გამოიწვია თარგმნილი სტატიის ბეჭდვის პროცესში შექმნილმა ვითარებამ პროფ. კრუტკოვმა ის ЖРФХО რედაქციას წარუდგინა მუსხელიშვილთან კონსულტაციის გარეშე და გამოაქვეყნა ისეთი სახით, როგორიც დღეს ჩვენს ხელთაა.

IV თავის დასკვნები

ნაჩვენებია, რომ ჰიპერბოლურ კოორდინატებში ჰამილტონ-იაკობის განტოლებით აღწერილი სავალენტო ელექტრონის მოძრაობის ამოცანა, განხილული იყო ნ მუსხელიშვილის მიერ 1920წ და ცვლადთა განცალების შედეგად მიღებული იყო იაკობის განტოლებათა სისტემა ნაჩვენებია, რომ ინტეგრების მის მიერ გამოყენებული მეთოდით, რომლითაც იაკობის განტოლებანი დაიყვანება ორმაგპერიოდიანი ვაიერშტრასის და იაკობის ელიფსური ფუნქციებით მოცემულ ფუნქციონალურ განტოლებებზე, ორიგინალურია და განსხვავებული, ამავე განტოლებების ელიფსური ინტეგრალებით წარმოდგენის მეთოდისაგან

ჩატარებულია აბსოლუტურად შავი სხეულის წონასწორული სითბური გამოსხივების თეორიის (შ.გ.თ.) ანალიზი 1900 წლიდან მომდინარე სინათლის კვანტური თეორიის საფუძველზე. მინიშნებულია, რომ მაქს პლანკისა (1900წ. და ალბერტ აინშტაინის (1905წ) მიერ განვითარებული სინათლის კვანტური თეორიის საფუძველზე მოხერხდა, გამოსხივების ტემპერატურის და სიხშირის მთელს დიაპაზონში, სპექტრალური ფუნქციისათვის ემპირიული მონაცემების აღმწერი ადეკვატური გამოსახულების დადგენა.

ა პუნკარემ (1912წ) და პ ერენფესტმა (1911წ) მოგვცეს გამოსხივების სპექტრული ფუნქციის მათემატიკური დასაბუთების რამდენიმე ორიგინალური მეთოდი, რაც საშუალებას იძლეოდა მკაცრი მათემატიკური მეთოდებით დადგენილიყო ამ ფუნქციის გამოყვანისათვის კვანტური ჰიპოთეზის შემოტანის აუცილებლობა სიხშირის და ტემპერატურის ზღვრულ შემთხვევებში

ნ. მუსხელიშვილმა 1920წ. დაწერილ და 1924 წ. "ЖРФХО" გამოქვეყნებულ სტატიაში, განავითარა რა პ ერენფესტის და ა პუნკარეს მეთოდები უჩვენა, რომ შედარებით უფრო მკაცრად შეიძლება დამტკიცებულ იქნას შ გ თ პირდაპირი (თუ მოცემული) უწყვეტი და დისკრეტული განაწილების „ზომა." მაშინ მიიღება შესაბამისად რელეი-ჯინსის ან ვინის განაწილება) და შებრუნებული (თუ მოცემულია განაწილების შესაბამისი ფუნქციები, შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ განაწილების ზომა არის უწყვეტი ან დისკრეტული) ამოცანა. ამ ამოცანა-თეორემების დამტკიცებისთვის მან გამოიყენა სტილტიესის ინტეგრალის ერთი თვისება, რომელიც დირკის δ - ფუნქციის თვისებაზე დაიყვანება.

ციტირებული ლიტერატურა

1 თ. ეფრემიძე, აკადემიკოსი ნიკო მუსხელიშვილი, მონოგრაფია, ხელნაწერი, 650 გვ

2. ს. ჯორბენაძე, ნიკო მუსხელიშვილი, ლენინგრადის უნივერსიტეტი, საარქივო დოკუმენტების კრებული, ა რაზმაძის სახ მათემატიკის ინსტიტუტის ნ მუსხელიშვილის კაბინეტი

3 Вален-Пусен, Курс анализа бесконечно малых, т I, 1922; т. II, 1932.

4. Г. Вебстер. "Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких гель. Перевод Н.И. Мусхелова и К.Г. Меликова, М., 1922. 624 ст.

5. Н.И. Мусхелов, Об определение гармонической функции по заданиям на контуре, "ЖФМОПУ", вып. 1, 89-93, 1918(1919).

6. N. Muskhelov. Sur lintegration de l'equation biharmonique. Изд. РАН (Петроград) VI сер. т. 136, №12-15, 663-686, 1919.

7. Н.И. Мусхелов. О решении некоторых контурных задач математической физики. კრებული, ნ. მუსხელიშვილის უცნობი ნაშრომები მათემატიკური და თეორიული ფიზიკიდან, პროფ თ. ეფრემიძის რედ. გამომც ქუთაისი, 2005წ

8. N. Muskhelishvili. Applications des integrales analogous a celles de Cauchy a quelques Physique. Mathematiqe Tiflis. Ed. de l'Univ. 1992, 160 p.

9. Н. И. Мусхелишвили. О некоторых контурных задачах плоской гидродинамики. в кн. Труды Всес. съезда математиков, 1927 г. М.Л., Госиздат, 1928, с.289.

10. Р. Каподано. Об одной забитой работе Н.И. Мусхелишвили. Сб. "ИИФМ", 1986, "Наука", М. 1988.

11. П.Л. Чебышев, О построении географических карт. Соб. Сочинения, т. VI, М.-Л. АН СССР, 1949; в книге В.А. Добровольского, Д.А. Граве, "Наука", М, 1968, с. 49.

12. Н.Г. Чеботарев. Академик Димитрий Александрович Граве (1863-1939). Сбор. Посвяш. Акад. Д.А. Граве, ГИТТЛ, М.Л. 1940, 326 ст.

13. Ю.А. Крутков, Применение адиабатических инвариантов в теоретической физике. Труды ГОИ, т. IV, 1-92, Лен. 1922.

14. Материалы Атомной комиссии, Архив СП отд. РАН, фонд 241. оп. 2, е.х. 67. 1920.

15. В. Я. Френкель. Пауль Эренфест. изд. II-е. Атомздат, М., 1977. 192 ст.

16. თ. ეფრემიძე, კვანტური თეორიის რეტროსპექტივა, ქსუ, ქუთაისი, 2003წ , 316

17. თ. ეფრემიძე, ფიზიკა XIX-XX საუკუნეების მიჯნაზე და ალექსეი გრუზინცევი, ქსუ, ქუთაისი, 2002წ. 331 გვ.

18. А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т. I, ГИТТЛ, М., 1956, 591 ст.

19. Д.С. Рождественский. избранные Труды. "Наука", М.-Л., 1964, 345 ст.

20. Телеграмма проф. Лоренцу и Эренфесту. ИМЕН, вып. III, Физика, МГУ, 1965, 360 ст.

21. Эренфест-Иоффе. Научная переписка 1907-1933 гг., II-е изд., "Наука", Л. 1990, 316 ст.

22. Г.В. Колосов, Н.И. Мусхелов. О равновесии упругих круглих дисков под влиянием напряжении приложенных в точках их плоскости. "Изв. Элтехн. Инст." (Петроград), т. 12, 39-55, 1915.

23. Н.И. Мусхелов. О тепловых напряжениях в плоской задаче теории упругости. "Изв. Элтех. Инст." (Петроград). т 13, 23-37, 1916.

24. საქართველოს უახლესი ისტორიის სახელმწიფო ცენტრალური არქივი (სუისტა) 471, ა 2, საქ. 101.

25 თ. ეფრემიძე, „. .ოციდან ხუთზე“ (ნ მუსხელიშვილის პირველი წლები თბილისის უნივერსიტეტში), „თბილი,სი“, 1988, 24 ნოემბერი

26. ი. ქარცივაძე, ბ. ხვედელიძე, არჩილ ხარაძის ცხოვრება და მოღვაწეობა, თსუ, თბილისი, 1985, 87გვ

27 დ დოლიძე, დეფორმად სხეულთა მექანიკის შესავალი, თსუ, თბილისი, 1951, 293 გვ

28. Л.Г. Лоицианский. Механика жидкости и газа. "Наука", М., 1978, 736ст.

29. А.А. Эйхенвальд. Теоретическая физика. Часть I-я. Теория поля. ГТТЛ., М. -Л., 1934, 218 ст.

30. ნ. მუსხელიშვილი, კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის ზოგიერთი ამოცანისათვის. „მეცნიერება“, თბილისი, 1992, 139

31. Н.И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упрогости. Основные уравнения, Плоская задача, Кручение и изгиб. Предисловие А.Н. Крылова. Л. Изд. АН СССР, 1933 XVI, 381 ст. Пятое русское издание "Наука", М., 1966г, 707 ст. მეორე გერმანული გამოცემა Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitalstheorie, Leipzig, 1971, 636 S., some basic problems, of the mathematical theory of elastysity. Groningen, P. Nood of, 1963l, XXXI, 718 p.; ნ მუსხელიშვილი, დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანა, (თარგმანი მეოთხე რუსული 1954 წლის გამოცემიდან), ხელნაწერი, საქ მ/ა ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტი, 720 გვ)

32. ნ. მუსხელიშვილი. სინგულარული ინტეგრალური განტოლებები ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანები და მათი ზოგიერთი გამოყენება მათემატიკურ ფიზიკაში თარგმანი რუსული მესამე (1968წ 511 გვ) გამოცემიდან პრფოსორების ბ ხვედელიძის და გ მანჯავიძის რედაქციით „მეცნიერება“, თბილისი, 1982, პირველი რუსული გამოცემა Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат. М.-Л., 1946, 448 ст. გერმანული თარგმანი, Singulare intergal gleichungen, Berlin, 1965, XVI, 544 s. ინგლისური რ რადოკისეული თარგმანი Singular integral equations. Noordhoff, 1953, 447 p.

33. N. Muskhelishvili. Sur le probleme fondamental l'hidrodynamique a deux dimensions. Rend del. R. Accad. del Lincei, 1928, sen. 6, f. 12, vol VII, p. 995-1002.

34. Л.И. Седов. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Изд. II-е, "Наука", М., 1966, 448 ст.

35. Н.И. Мусхелишвили. О некоторых контурных задачах плоской гидродинамики В книге "Труды Веер. съезда математиков в Москве", М.-Л. Госиздат. 1928, ст. 289.

36. P. Capodano. Dinamics of continuous sistems containing a profile moving in incompesibl fluid. აკად. ნ. მუსხელიშვილის 100 წლისთავისადმი მიძღვნილი სიმპოზიუმი, „უწყვეტ ტანთა მექანიკა და ანალიზის მონათესავე საკითხები“, თეზისები, „მეცნიერება“, თბილისი, 1991; მასალები, „მეცნიერება“, 1992, 420 ст.

37. Н. Бор. Избранные научные труды, т. I. Статьи 1909-1925. "Наука", М., 1970, 583 ст.

38. А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т.I, ГИТТЛ, М., 1956, 591 ст.

39. Ю. А. Крутков. Адиабатические инварианты и их применение в теоретической физике. Труды ГОИ, т. 2, ст. 1-92, 1922.

40. Н.И. Мусхелов. Задача о движении электрона притягивающего к недвижному центру (ядру) в постоянном электрическом поле. Материалы Атомной комиссии. СПО Архива РАН. ф. 341 оп. 2 2.х. 67., с. 87; Н.И. Мусхелишвили. Неопубликованные труды. Под ред. проф. Т. Ефремидзе, изд. КГУ, Кутаиси, 2005 г.

41. K. Schwatzschild Zun quanten hipotese Berliner sitzungsber; Aprel, 1916.

42. P.S. Epstein. Das Starkeneoryen Ann. d. Phys. 50, 489, 1916.

43. Т.И. Ефремидзе. О решении уравнения Гамильтона-Якоби для водородного атома в параболических координатах в одном неизвесном докладе Н.И. Мусхелишвили. Труды ТГУ, 285 "Физика"- 27, Тб., 1989, ст. 185.

44. Т.И. Ефремидзе, Ш.Г. Киртадзе. გარე ელექტრულ ველში მოძრავი სავალენტო ელექტრონისათვის ჰამილტონ იაკობის განტოლების ინტეგრირების მუსხელიშვილისეული მეთოდის შესახებ „ქსუ შრომები", ტ III (37) საბუნებისმეტყველო-მათემატიკურ მეცნიერებათა სერია, 2, 64-77 2004

45. В.И. Смирнов, Курс высшей математики Т.3., ч. 2, из. 5-е "Наука", М., 1969. 672 ст.

46. А.Н. Крылов. Замечания о движении электрона в атоме геля. Материалы АК. Архив РАН СПО, ф. 341, оп. 2., уч. 67, 00-108, 154-158, 1920 г.

47. М. Планк. Избранные труды, статьи к речи. "наука", М., 1975., 788 ст.

48. А. Эйнштейн. Собрание избранных трудов. Т. III, "Наука", М. 1966, 632 ст.

49. А. Пуанкаре. Избранные труды. Т. III, Математика, Теоретическая физика, "Наука", М., 1877, ст. 516-559.

50. П. Эренфест. Относительность. Кванты. Статистика. Сборник статьи. "Наука" М., 1972., 358. ст.

51. Н.И. Мусхелишвили. Решение одного интерграмного уравнения встречаюшегося в теории черного излучения. ЖРФХО, ч. физ. 56, 30-39, 1924.

52. Д.Д Иваненко, А.А. Соколов Классическая теория ноля ГТТИ. М . 1951

53. Ф.А. Медведев. Сборник "НИФИ", 1988. М., 1988.

54. М. Джеммер, Эволюция понятии квантовой механики. "Наука", М., 1985, 379 ст.

55. T.E. Efremidze. Niko Muskhelishvili on the direct problem of Black Radiation Theory. "Bul. Geor. AN of Scien"., N1, 187-190, 2000.

56. T. Efremidze, Sh. Khirtadze.

57. T. Efremidze, N. Muskhelishvili about reversal problem of the Black revensal Theory. Internet http:/www.rmi. asnet.ge/DEMPH/2001.

58. T. Efremidze, Sh. Khirtadze, N, Muskhelisvili about reversal problem of the reversal Theory "Bul Georgian AN of Scien".

59. თ. ეფრემიძე, შ. კირთაძე აკად. ნ მუსხელიშვილი შავი გამოსხივების თეორის შებრუნებული ამოცანის შესახებ. „ქსუ შრომები" ტ 4(38), საბუნებისმეტყველო-მათემატიკური სერია, 31-37, 2004

60. М.А.Лаврентьев, В.В. Шабат. Методы теории, функции комплексной переменной. изд. 2-е, М.-Л., 1958, 678 ст.