ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ბექან ღვაბერიძე

ბულის პროგრამირების თვისებრივი თეორიის საკითხები და მათი გამოყენება მარშრუტიზაციის ამოცანებში

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხი მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

01.01.08. – მათემატიკური კიბერნეტიკა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
პროფესორი თამაზ თადუმაძე

თბილისი

2003

შინაარსი

ᲗᲐᲕᲘ II

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომში განხილულია ბულის ოპტიმიზაციის სკალარული და ვექტორული (მრავალკრიტერიალური) ამოცანების თეორიის ზოგიერთი საკითხი. როგორც ცნობილია, დისკრეტული ოპტიმიზაციის და კერძოდ ბულის ოპტიმიზაციის ამოცანების უმრავლესობა ეკუთვნის ე.წ. რთულად ამოხსნადი ამოცანების *NP*-სრულ კლასს [1-4]. ინტერესი ასეთი ამოცანებისადმი განპირობებულია იმით, რომ მართვისა და დაგეგმვის, პროექტირების, ობიექტების ოპტიმალური განლაგების მრავალი პრაქტიკული პრობლემის მათემატიკური მოდელი წარმოადგენს დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანას [3, 5-7].

უკანასკნელ წლებში მათემატიკური პროგრამირების ამოცანების ამოხსნისას დიდი ადგილი ეთმობა მიღებული ამონახსნის მდგრადობის გამოკვლევას, რაც განპირობებულია ამ საკითხის როგორც თეორიული მნიშვნელობით, ასევე პრაქტიკული ღირებულებითაც. კერძოდ, ოპტიმიზაციის როგორც უწყვეტ, ასევე დისკრეტულ ამოცანებში ხშირად საწყისი მონაცემები ცნობილია გარკვეული ცდომილებით. იმის გასარკვევად, რამდენად დიდი შეიძლება იყოს ეს ცდომილება, რომ მან არ მოახდინოს გავლენა ოპტიმალურ ამონახსნზე, საჭიროა ამონახსნის მდგრადობის გამოკვლევა. ამას გარდა, მრავალი პრაქტიკული ამოცანა თავისი ბუნებით დინამიურია იმ აზრით, რომ ამონახსნის მისაღებად საჭირო საწყისი მონაცემები განიცდიან გარკვეულ ცვლილებებს. შედეგად ვღებულობთ ერთნაირი სტრუქტურის ამოცანების ერთობლიობას, რომლებიც ერთმანეთისგან მხოლოდ რამდენიმე კოეფიციენტის მნიშვნელობით განსხვავდებიან. ამიტომ ზოგადად ოპტიმიზაციის და კერძოდ დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანებში აქტუალურია კონკრეტული ამოცანის ამოხსნით მიღებული ინფორმაციის, ამ ამოცანასთან ახლოს მდგომი ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენების საკითხი.

დისკრეტული (ბულის) პროგრამირების ამოცანებში ამონახსნის მდგრადობის გამოკვლევის ქვეშ, როგორც წესი, იგულისხმება საწყისი მონა-

ცემების ცვლილების იმ საზღვრების დადგენა, რომლებშიც ოპტიმალური ამონახსნი დარჩება უცვლელი.

მდგრადობის საკითხები ოპტიმიზაციის ამოცანებში განხილული და გამოკვლეულია მრავალი ავტორის მიერ: წრფივი პროგრამირების – ს.რობინსონის [8], ს.აშმანოვის [9], ს.შვარტინის [10-11], არაწრფივი პროგრამირების რ.ევანსისა და ფ.გოულდის [12], ნ.ასტაფიევის [13,14], ვ. ფიოდოროვის [15], ოპტიმალური მართვის ამოცანებისათვის თ.თადუმაძისა და გ.ხარატიშვილის [16,17], თ.ვასილიევის [18] და სხვათა ნაშრომებში [19-23].

მათემატიკური პროგრამირების უწყვეტი ამოცანებისათვის მდგრადობის საკითხების გამოკვლევით მიღებული შედეგების პირდაპირი გადატანა დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანებისათვის ან შეუძლებელია, ან მას მივყავართ ტრივიალურ ფაქტებამდე. მდგრადობის გამოკვლევის აპარატი, რომელიც დამუშავებულია უწყვეტი ამოცანებისათვის არ ითვალისწინებს ამოცანის დისკრეტულ სპეციფიკას. დისკრეტულ ამოცანებში ვაწყდებით დამატებით პრობლემებს ძირითადად იმის გამო, რომ თვლად (სასრულ) სიმრავლეზე არ ხერხდება ტოპოლოგიის შემოღება, რომელიც განსხვავებული იქნება დისკრეტული ან ტრივიალური ტოპოლოგიისაგან [24]. უწყვეტობის, ამოზნექილობის და ბმულობის ცნებები კი, რომლებიც ხელსაყრელია პრაქტიკული ამოცანების კვლევისას, ითხოვენ დისკრეტულისა და ტრივიალური ტოპოლოგიისაგან განსხვავებული ტოპოლოგიის შემოტანას.

გასული საუკუნის 80-იანი წლების დასაწყისში დამუშავდა რამდენიმე მიდგომა დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანების ამონახსნის მდგრადობის გამოსაკვლევად. მათგან აღვნიშნავთ ი.სერგიენკოს, ლ.კასპშიცკაიას და ტ.ლებედევას შრომებს [3, 24-29], რომლებშიც განხილულია მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანები.

ვ.ლეონტიევისა და მისი მოწაფეების მიერ [30-38] ტრაექტორული ამოცანებისათვის შესწავლილ იქნა ოპტიმალური ამონახსნის მდგრადობის საკითხი, რომლის საფუძველსაც წარმოადგენს მდგრადობის რადიუსის განსაზღვრა. იგივე საკითხი განრიგების თეორიის ამოცანებისათვის განხილულია შრომებში [39-41].

დისერტაციაში, ვ.ლეონტიევის მიდგომაზე დაყრდნობით ამონახსნის მდგრადობის და მდგრადობის რადიუსის ცნება გადატანილია ბულის პროგრამირების ამოცანების ε-მიახლოებითი ამონახსნისათვის და განხილულია მიღებული შედეგების გამოყენების საკითხი მარშრუტიზაციის ამოცანებისათვის.

მდგრადობის საკითხების განხილვა მიახლოებითი ამონახსნისათვის გამართლებულია იმით, რომ, როგორც კარგადაა ცნობილი [2,4] ოპტიმალური ამონახსნის მიღება დიდი განზომილების ამოცანებში ფაქტიურად შეუძლებელია ან დაკავშირებულია გამოთვლითი ტექნიკის დიდი რესურსების ხარჯვასთან. მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის საკითხი გრაფთა თეორიის ერთი კონკრეტული ამოცანისათვის განხილული იყო ვ.კარასის მიერ [42].

თანამედროვე პირობებში დაგეგმვის, მართვისა და პროექტირების სხვადასხვა ამოცანებში გადაწყვეტილების მიღებისას, ხშირად აუცილებელია ოპტიმალურობის რამდენიმე კრიტერიუმის გათვალისწინება, შედეგად ვღებულობთ მათემატიკური პროგრამირების მრავალკრიტერიუმიან (ვექტორულ) ამოცანას. მისი ამოხსნის ქვეშ გვესმის პარეტოს აზრით ოპტიმალურ (ეფექტურ) [43-44] ამონახსნთა მთელი სიმრავლის ან მისი რომელიმე ელემენტის პოვნა. პირველი შედეგები მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანების თეორიაში უკავშირდება წრფივი ნახვევის სკალარული კრიტერიუმის გამოყენების საკითხს [45-48].

მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების თეორიასა და პრაქტიკასთან დაკავშირებული მრავალი საკითხი განხილულია მ.სალუქვაძის შრომებში [49,50]. მასვე ეკუთვნის კომპრომისული ამონახსნის პოვნის იდეალური წერტილის მეთოდი [51]. არასრული ინფორმაციის პირობებში მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანები განხილულია ვ.ჟუკოვსკისა და ვ.მოლოსტვოვის მიერ [52], ვექტორული ოპტიმიზაციის საკითხები დალაგებულ სივრცეებში ვ.მაისურაძის მიერ [53].

დისკრეტული და კერძოდ ბულის პროგრამირების მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანები ნაკლებად შესწავლილია. ამ მიმართულებით გამოქვეყნე-

ბული შრომებიდან აღვნიშნავთ ვ.ემელიჩევისა და ვ.პერეპელიცას [54-56], და რ.ბურკარდის [57,58] შრომებს.

დისერტაციის პირველი თავის §1.1-ში ბულის წრფივი ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანისათვის განხილულია ε-მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის საკითხი. შემოტანილია მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის სიმრავლის ცნება, შესწავლილია ამ სიმრავლის თვისებები. საწყისი ამოცანის მიზნის ფუნქციის კოეფიციენტების (საწყისი მონაცემების) შეშფოთებით მიღებულ ამოცანას ვუწოდოთ შეშფოთებული ამოცანა. თუ შეშფოთება გარკვეული აზრით მცირეა, მაშინ საწყისი ამოცანის ε-მიახლოებითი ამონახსნი შეშფოთებული ამოცანის ε-მიახლოებითი ამონახსნიც იქნება. შემოტანილია მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის ბირთვისა და მდგრადობის რადიუსის ცნება, მიღებულია მდგრადობის რადიუსის გამოსათვლელი ანალიზური ფორმულა. განხილულია მდგრადობის რადიუსის ექსტრემუმების საკითხი. კერძოდ, გამოყოფილია კლასები ამოცანებისა, რომელთათვისაც მდგრადობის რადიუსის მნიშვნელობა შესაძლებელია გახდეს უსასრულობის ან ნულის ტოლი. მიღებულია მდგრადობის რადიუსის შეფასება ზემოდან. გამოკვლეულია მდგრადობის რადიუსის δ მოცემული ფარდობითი ცდომილებით გამოთვლის სირთულის საკითხი.

§1.3-ში განიხილება მარშრუტიზაციის ამოცანების ერთი კლასი. ნაჩვენებია ამ ამოცანების NP-სრულობა. მოყვანილია ამ ამოცანების ამოხსნის ევრისტიული ალგორითმები, და განხილულია §1.1-1.2-ში მიღებული შედეგების გამოყენების შესაძლებლობის საკითხი მარშრუტიზაციის ამოცანებისათვის.

დისერტაციის მეორე თავი ეძღვნება ბულის მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანების გამოკვლევას.

§2.1-ში გამოკვლეულია წრფივი ნახვევის კრიტერიუმით ბულის მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანის ამოხსნადობის საკითხი.

§2.2-ში განიხილება ამონახსნის ცნების დაზუსტების საკითხი. როგორც ცნობილია [54], პარეტოს წერტილთა სიმრავლე დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანებში შეიძლება იყოს ძალიან „დიდი". ეფექტურ ამონახსნს, რომელიც

შესაძლებელია არ იყოს ოპტიმალური არც ერთი კრიტერიუმისათვის, მაგრამ მისაღებია კრიტერიუმთა მთელი სიმრავლისათვის უწოდებენ კომპრომისულ ამონახსნს [59]. ბულის ცვლადებიანი წრფივი პროგრამირების ამოცანისათვის მოყვანილია კომპრომისული ამონახსნის პოვნის ალგორითმი, შეფასებულია ამ ალგორითმის სირთულე.

§2.3-ში შტოებისა და საზღვრების მეთოდის [3] ძირითადი იდეების გამოყენებით კომივოიაჟერის ბიკრიტერიალური ამოცანისათვის აგებულია ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლის პოვნის ალგორითმი.

განხილულია არამკაფიო დაფარვის ამოცანა, რომელიც დაფარვის საიმედოობის კრიტერიუმის შემოტანის გზით მიყვანილია ბიკრიტერიალურ ამოცანამდე.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო: I და III საკავშირო სკოლაზე „მაკროსისტემების მართვის გამოყენებითი პრობლემები" (ალმა-ატა, 1985), (მოსკოვი, 1989), რესპუბლიკურ სემინარზე „გაზის მეურნეობის პროცესების მათემატიკური და ტექნიკური მოდელირება" (თბილისი, 1988), საკავშირო კონფერენციაზე „მათემატიკური მეთოდებისა და გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენება სახალხო მეურნეობის ამოცანების ამოსახსნელად (გომელი, 1986), გმი სემინარების გაფართოებულ სხდომაზე (1999), თსუ გამოყენებითი მათემატიკისა და კომპიუტერულ მეცნიერებათა ფაკულტეტის 35 წლისთავისადმი მიძღვნილ სამეცნიერო კონფერენციაზე (1999), აკად. ი.ვეკუას საიუბილეო დღეებისადმი მიძღვნილ მათემატიკოსთა რესპუბლიკურ კონფერენციაზე (თბილისი, 2001), საქართველოს მათემატიკოსთა მე-3 ყრილობაზე (თბილისი, 2001).

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია [66-71] შრომებში.

თავი I
ამონახსნის მდგრადობის საკითხები ბულის პროგრამირების ამოცანებში და მათი გამოყენება მარშრუტიზაციის ზოგიერთი ამოცანის ამოხსნისას

§1.1. მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობა ბულის წრფივი ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანებში

1.1.1. *ε-მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის არე და რადიუსი.* ვთქვათ, $N_n = \{1,\ldots,n\}$; B^n არის ბულის ყველა $x = (x_1,\ldots,x_n)$ ვექტორთა სიმრავლე; $R^n_+ = \{c = (c_1,\ldots,c_n) : c_i \geq 0,\ c_i \in R,\ i = 1,\ldots,n\}$.

განვიხილოთ ამოცანა

$$\left.\begin{array}{c} \min \langle c^0, x \rangle \\ x \in X \end{array}\right\} \qquad (1.1.1)$$

სადაც $c^0 \in R^n_+$ მოცემული ვექტორია; $X \subset B^n$ დასაშვებ ამონახსნთა არაცარიელი სიმრავლეა; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ აღნიშნავს ვექტორთა სკალარულ ნამრავლს.

ცნობილია, რომ საკმარისად ფართო კლასი დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანებისა დაიყვანება (1.1.1) ტიპის ამოცანაზე. ცხადია, რომ (1.1.1) ამოცანას ყოველთვის გააჩნია ამონახსნი $x^* \in X : \langle c^0, x^* \rangle = \min\limits_{x \in X} \langle c^0, x \rangle$.

<u>*განსაზღვრება 1.1.1.*</u> ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ მოცემული რიცხვია, $x^\varepsilon \in X$ ეწოდება (1.1.1) ამოცანის ε-მიახლოებითი ამონახსნი თუ შესრულებულია უტოლობა:

$$\langle c^0, x^\varepsilon \rangle \leq (1+\varepsilon)\langle c^0, x(c^0) \rangle, \qquad (1.1.2)$$

აქ $x(c^0)$ (1.1.1) ამოცანის c^0 ვექტორის შესაბამისი ამონახსნია.

X სიმრავლის სასრულობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $c \in R^n_+$-სთვის და $\varepsilon \geq 0$-სთვის არსებობს (1.1.1) ამოცანის ერთი მაინც ε-მიახლოებითი ამონახსნი, კერძოდ ε-მიახლოებითი ამონახსნია $x(c)$.

<u>*განსაზღვრება 1.1.2.*</u> ვთქვათ, $\varepsilon > 0$ მოცემული რიცხვია, $c \in R^n_+$ ვექტორთა სიმრავლეს, რომელთათვის x^ε წარმოადგენს (1.1.1) ამოცანის ε-მიახლოებით

ამონახსნს ვუწოდოთ x^{ε} ε-მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის არე და აღვნიშნოთ $F(x^{\varepsilon})$.

ქვემოთ შესწავლილი იქნება $F(x^{\varepsilon})$ სიმრავლის თვისებები.

ვთქვათ, $F(x)$ არის სიმრავლე ყველა ისეთი $c \in R_{+}^{n}$ ვექტორებისა, რომელთათვისაც x არის (1.1.1) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ სამართლიანია შემდეგი

წინადადება 1.1.1. ყოველი $\varepsilon \geq 0$-სთვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს $F(x) \subseteq F(x^{\varepsilon})$ და $F(x^{0}) = F(x)$.

წინადადება 1.1.2. $F(x^{\varepsilon})$ წარმოადგენს ამოზნექილ ჩაკეტილ კონუსს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $c \in F(x^{\varepsilon})$, მაშინ ε-მიახლოებითი ამონახსნის განსაზღვრების ძალით

$$\langle c, x^{\varepsilon} \rangle \leq (1+\varepsilon)\langle c, x(c) \rangle,$$

ყოველი $\alpha \geq 0$-თვის (1.1.2)-დან გამომდინარეობს $\langle \alpha\, c, x^{\varepsilon} \rangle = \alpha \langle c, x^{\varepsilon} \rangle \leq$ $\leq \alpha\,(1+\varepsilon)\langle c, x(c) \rangle = (1+\varepsilon)\langle \alpha\, c, x(\alpha\, c) \rangle$. აქედან ვღებულობთ $\alpha\, c \in F(x^{\varepsilon})$.

თუ $c \in F(x^{\varepsilon})$ და $c' \in F(x^{\varepsilon})$, მაშინ $\langle c + c', x^{\varepsilon} \rangle = \langle c, x^{\varepsilon} \rangle + \langle c', x^{\varepsilon} \rangle \leq (1+\varepsilon)\langle c, x(c) \rangle +$ $+ (1+\varepsilon)\langle c', x(c') \rangle \leq (1+\varepsilon)(\langle c, x(c) \rangle + \langle c', x(c') \rangle) = (1+\varepsilon)\langle c + c', x(c + c') \rangle$. ამიტომ $c + c' \in F(x^{\varepsilon})$. ე.ი. $F(x^{\varepsilon})$ ჩაკეტილია შეკრებისა და არაუარყოფით რიცხვებზე გამრავლების მიმართ.

განვიხილოთ $F(x^{\varepsilon})$ სიმრავლის $\{c^{i}\}_{i\to\infty}$ ელემენტების კრებადი მიმდევრობა და ვთქვათ, $\lim\limits_{i\to\infty} c^{i} = c$. ნებისმიერი $c^{i} \in F(x^{\varepsilon})$ ვექტორისათვის შესრულებულია უტოლობა $\langle c^{i}, x^{\varepsilon} \rangle \leq (1+\varepsilon)\langle c^{i}, x(c^{i}) \rangle$. მიზნის ფუნქციის c-ს მიმართ უწყვეტობიდან გამომდინარეობს სასრული ზღვრის არსებობა $\lim\limits_{i\to\infty}\langle c^{i}, x^{\varepsilon} \rangle = \langle c, x^{\varepsilon} \rangle$, ხოლო X სიმრავლის სასრულობიდან კი შემდეგი ტოლობა $\lim\limits_{i\to\infty}\langle c^{i}, x(c^{i}) \rangle = \langle c, x(c) \rangle$. ამიტომ უტოლობაში ზღვარზე გადასვლის ცნობილ თეორემაზე დაყრდნობით შეიძლება დავასკვნათ, რომ c წარმოადგენს $F(x^{\varepsilon})$

სიმრავლის ელემენტს. ამით $F(x^\varepsilon)$ სიმრავლის ჩაკეტილობაც დამტკიცებულია. ■

წინადადება 1.1.3. $\bigcup\limits_{x^\varepsilon \in X} F(x^\varepsilon) = R_+^n$.

ამ წინადადების სამართლიანობა გამომდინარეობს იქედან, რომ ყოველი $c \in R_+^n$ და $\varepsilon \geq 0$-სთვის არსებობს (1.1.1) ამოცანის ერთი მაინც ε-მიახლოებითი ამონახსნი.

განსაზღვრება 1.1.3. ვთქვათ $\delta \geq 0$, (1.1.1) ამოცანის δ-შეშფოთებული ამოცანა ვუწოდოთ ამოცანას:

$$\left.\begin{array}{l} \min \left\langle c^0 + b, x\right\rangle \\ \overline{x} \in X \end{array}\right\}$$

სადაც $\|b\| \leq \delta$, $\|b\| = \max\limits_{i \in N_n} \left|b^i\right|$ $-b$ ვექტორის ჩებიშევის ნორმაა. ■

განსაზღვრება 1.1.5. $S_\rho(c)$ - ჩაკეტილ ბირთვს ცენტრით $c \in F(x^\varepsilon)$ და ρ რადიუსით ვუწოდოთ $x^\varepsilon \in X$ ε-მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის ბირთვი, თუ

$$S_\rho(c) \cap R_+^n \subseteq F(x^\varepsilon),$$

ხოლო მდგრადობის ბირთვის ρ რადიუსის უდიდეს მნიშვნელობას ვუწოდოთ მდგრადობის რადიუსი და აღვნიშნოთ $\rho(x^\varepsilon, c)$.

1.1.3-1.1.5 განსაზღვრებებიდან გამომდინარეობს

$$\rho(x^\varepsilon, c) = \min_{c' \in \partial F(x^\varepsilon)} \|c - c'\|,$$

სადაც $\partial F(x^\varepsilon)$ არის $F(x^\varepsilon)$ სიმრავლის საზღვარი.

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ უტოლობათა სისტემა

$$\left\langle a^i, y\right\rangle \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (1.1.3)$$

აქ $a^i, y \in R^n$, ხოლო $b_i \in R$, $i = 1, \ldots, m$.

განსაზღვრება 1.1.6. (1.1.3) სისტემის y^0 ამონახსნს ეწოდება η-მდგრადი, თუ $y^0 + h$ ვექტორი წარმოადგენს (1.1.3) სისტემის ამონახსნს ნებისმიერი $h \in R^n$ ვექტორისათვის, $\|h\| \leq \eta$.

ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ [31]-ში მოყვანილი ლემის ანალოგი

ლემა 1.1.1. იმისათვის, რომ (1.1.3) სისტემის y^0 ამონახსნი იყოს η-მდგრადი, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს უტოლობა

$$\eta \le \min_i \frac{b_i - \langle a^i, y^0 \rangle}{\|a^i\|^*}, \tag{1.1.4}$$

აქ $\|a^i\|^* = \max_{j \in N_n} |a^i_j|$, a^i ვექტორის ნორმაა შეუღლებულ სივრცეში.

დამტკიცება. აუცილებლობა. ვთქვათ, (1.1.3) სისტემის y^0 ამონახსნი η-მდგრადია. მაშინ, როცა $\|h\| \le \eta$, გვაქვს

$$\langle a^i, y^0 + h \rangle \le b_i, \quad i = 1,...,m,$$

აქედან

$$\max_{\|h\| \le \eta} \langle y^0 + h, a^i \rangle \le b_i,$$

საიდანაც

$$\max_{\|h\| \le \eta} \left(\langle a^i, y^0 \rangle + \langle a^i, h \rangle \right) < b_i. \tag{1.1.5}$$

მაგრამ $\max_{\|h\| \le \eta} \langle h, a^i \rangle$ არის ნორმა შეუღლებულ სივრცეში, ე.ი.

$$\max_{\|h\| \le \eta} \langle h, a^i \rangle = \varepsilon \| a^i \|^*. \tag{1.1.6}$$

(1.1.5) და (1.1.6)-დან ვღებულობთ

$$\eta \le \frac{b_i - \langle a^i, y^0 \rangle}{\| a^i \|^*}. \tag{1.1.7}$$

(1.1.7)-დან გამომდინარეობს (1.1.4) უტოლობის სამართლიანობა.

საკმარისობა. ვთქვათ, y^0 (1.1.3) სისტემის ამონახსნია და η რიცხვი აკმაყოფილებს (1.1.4) უტოლობას. ვთქვათ, $\|h\| \le \eta$, მაშინ (1.1.6)-ის გათვალისწინებით

$$\langle y^0 + h, a^k \rangle \le \max_{\|h\| \le \varepsilon} \langle y^0 + h, a^k \rangle = \max_{\|h\| \le \varepsilon} \langle h, a^k \rangle + \langle y^0, a^k \rangle = \varepsilon \| a^k \|^* + \langle y^0, a^k \rangle \le$$

$$\le \| a^k \|^* \frac{b_k - \langle y^0, a^k \rangle}{\| a^k \|^*} + \langle y^0, a^k \rangle = b_k$$

ამით საკმარისობაც დამტკიცებულია. ■

თეორემა 1.1.1. სამართლიანია ფორმულა

$$\rho\left(x^{\varepsilon},c\right)=\min_{z\in X\setminus x^{\varepsilon}}\frac{\left|\left\langle c,x^{\varepsilon}-(1+\varepsilon)z\right\rangle\right|}{\sum_{i\in N_n}\left|x^{\varepsilon}-(1+\varepsilon)z_i\right|}. \qquad (1.1.8)$$

დამტკიცება. $F\left(x^{\varepsilon}\right)$ სიმრავლის საზღვარი, შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც $\left\langle c,x^{\varepsilon}\right\rangle\leq(1+\varepsilon)\langle c,x(c)\rangle$ უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლის საზღვარი. როცა c განიცდის შეშფოთებას, საზოგადოდ უნდა ჩავთვალოთ, რომ $x(c)$ შეიძლება იყოს ნებისმიერი $X\setminus x^{\varepsilon}$ სიმრავლიდან, ამიტომ $\partial F\left(x^{\varepsilon}\right)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც გაერთიანება $F_z=\left\{c\in R_+^n \;\middle|\; \left\langle c,x^{\varepsilon}-(1+\varepsilon)z\right\rangle=0\right\}$; $z\in X\setminus x^{\varepsilon}$ სიმრავლეებისა. თუ ლემა 1.1.1-ში ავიღებთ, $b_i=0, a^i=x^{\varepsilon}-(1+\varepsilon)z$, მივიღებთ

$$\rho\left(x^{\varepsilon},c\right)\leq\frac{\left|\left\langle c,x^{\varepsilon}-(1+\varepsilon)z\right\rangle\right|}{\sum_{i\in N_n}\left|x^{\varepsilon}-(1+\varepsilon)z_i\right|},$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის სამართლიანობა. ■

განვიხილოთ თეორემა 1.1.1-ის გამოყენების კონკრეტული შემთხვევა დანიშნულებისა და კომივოიაჟერის ამოცანებისათვის. პირველში მოითხოვება ისე დაინიშნოს k კანდიდატი k სამუშაოზე, რომ გაცემული ჯამური ხელფასი იყოს მინიმალური, თუ ცნობილია $a_{ij}\geq 0$ - ხელფასი, რომელსაც ითხოვს i-იური კანდიდატი j-ურ სამუშაოზე დანიშვნისას. $\|a_{ij}\|$ მატრიცა წარმოვადგინოთ k^2 განზომილებიანი c ვექტორის სახით:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{k1} & \dots & a_{kk}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} c_1 & \dots & c_k\\ \dots & \dots & \dots\\ c_{(k-1)k+1} & \dots & c_{k^2}\end{Vmatrix}.$$

დავუშვათ, რომ $n=k^2$ და (1.1.1) ამოცანის დასაშვებ ვექტორთა X სიმრავლედ ავიღოთ სიმრავლე

$$X=X'=\left\{x\in B^n \;\middle|\; \sum_{i=lk+1}^{(l+1)k}x_i=1, \sum_{i=0}^{k-1}x_{ik+l+1}=1, l=0,1,\dots,k-1\right\}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ როცა $n = k^2$ და $X = X'$, (1.1.1) ამოცანა დანიშნულების ამოცანის ექვივალენტურია.

ანალოგიურად, (1.1.1) ამოცანის ტერმინებში შეიძლება კომივოიაჟერის ამოცანის ფორმულირებაც, რომელშიც მოითხოვება სრული ორიენტირებული k წვეროიანი და აწონილ რკალებიანი G გრაფისათვის უმოკლესი სიგრძის ჰამილტონის კონტურის პოვნა. განსხვავება მხოლოდ იმაში მდგომარეობს, რომ (1.1.1) ამოცანის დასაშვებ ვექტორთა $X = X''$ სიმრავლე ამ შემთხვევაში შედგება X' სიმრავლის იმ და მხოლოდ იმ ვექტორებისაგან, რომელთა ერთეულოვანი კომპონენტები ქმნიან ჰამილტონის კონტურს G გრაფში (ეს განსხვავება გადააქცევს პოლინომიალურად ამოხსნად დანიშნულების ამოცანას NP-რთულ კომივოიაჟერის ამოცანად [4]).

განვიხილოთ კომივოიაჟერის სიმეტრიული ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მაგალითი, $k = 5$ შემთხვევა, მანძილების შემდეგი მატრიცით

$$\begin{Vmatrix} \infty & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & \infty & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & \infty & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & \infty & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & \infty \end{Vmatrix}.$$

კრისტოფიდესის [60] ალგორითმის საშუალებით ვიპოვოთ $\frac{1}{2}$-მიახლოებითი ამონახსნი $(1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5)$, რომლისთვისაც მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაა 14, ხოლო ოპტიმალური ამონახსნია $(1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3)$, მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობით 10. თეორემა 1.1.1-ზე დაყრდნობით მდგრადობის რადიუსის მნიშვნელობაა $\frac{4}{17}$.

მდგრადობის რადიუსის გამოსახულებიდან ჩანს, რომ მისი ზუსტი მნიშვნელობის გამოთვლა მოითხოვს ყველა დასაშვები ამონახსნის გადარჩევას $X \setminus x^{\varepsilon}$ სიმრავლიდან, რაც შესაძლებელია მხოლოდ მცირე განზომილების ამოცანებში. (იხ. განხილული რიცხვითი მაგალითი). ამასთან დაკავშირებით აღვნიშნავთ, რომ კონკრეტული ამოცანებისათვის შეიძლება შემოთავაზებულ იქნას ადვილად გამოთვლადი შეფასებები მდგრადობის

რადიუსისათვის, დადგენილ იქნას მდგრადობის რადიუსის ექსტრემუმები. მდგრადობის რადიუსის მიახლოებითი გამოთვლის ალგორითმი განხილულია 1.1.3-ში.

1.1.2. მდგრადობის რადიუსის ექსტრემუმები. X სიმრავლეზე შემოვიღოთ U ბინარული მიმართება შემდეგი წესით: $(x,x')\in U$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი $i\in N_n$-სთვის $x_i=1$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $x_i^{'}=1$ ტოლობა. აქ და შემდეგ ვგულისხმობთ, რომ $x'=\left(x_1^{'},\dots,x_n^{'}\right)$.

წინადადება 1.1.4. U მიმართება არამკაცრი დალაგების მიმართებაა.

დამტკიცება. ა) რადგან $(x,x)\in U$, ნებისმიერი $x\in X$-სთვის, ამიტომ U რეფლექსური მიმართებაა, საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ U არაცარიელია. ბ) $(x,x')\in U$ და $(x',x)\in U$ ჩართვები სამართლიანია მხოლოდ მაშინ, როცა $x=x'$, ამიტომ U ანტისიმეტრიულია. გ) თუ $(x,x')\in U$ და $(x',x'')\in U$, მაშინ $(x,x'')\in U$. ■

თეორემა 1.1.2. იმისათვის, რომ $\rho\left(x^{\varepsilon},c\right)=\infty$ აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\left(x^{\varepsilon},x'\right)\in U$ ჩართვა სრულდებოდეს ნებისმიერი $x'\in X$ ვექტორისათვის.

დამტკიცება. საკმარისობა. $(x,x')\in U$ პირობიდან, რომელიც სამართლიანია ნებისმიერი $x'\in X$ ვექტორისათვის ვღებულობთ

$$\left\langle c,x^{\varepsilon}\right\rangle\leq\left\langle c,x(c)\right\rangle. \tag{1.1.9}$$

ცხადია, რომ $\left\langle c,x^{\varepsilon}\right\rangle\leq(1+\varepsilon)\langle c,x(c)\rangle$, ნებისმიერი $c\in R_+^n$-თვის, სხვანაირად რომ ვთქვათ $F\left(x^{\varepsilon}\right)$ კონუსი ემთხვევა მთელი R_+^n სივრცეს და ამიტომ $\rho\left(x^{\varepsilon},c\right)=\infty$.

შევნიშნოთ, რომ (1.1.9) პირობა შეიძლება შესრულდეს მხოლოდ როგორც ტოლობა და ამ შემთხვევაში x^{ε} ვექტორი (1.1.1) ამოცანის ამონახსნს წარმოადგენს ნებისმიერი $c\in R_+^n$-სათვის.

საკმარისობა. ვთქვათ, არსებობს $x'\in X$ ვექტორი, რომლისთვისაც $(x,x')\in U$ პირობა არ სრულდება. მაშინ არსებობს x ვექტორის ერთი მაინც კომპონენტი x_i ისეთი, რომ $x_i=1$ და $x_i^{'}=0$. მაშინ ცხადია, რომ

$\langle c', x\rangle > 0 = (1+\varepsilon)\langle c', x'\rangle$ ისეთი c' ვექტორისათვის, რომლისთვისაც ყველა კომპონენტი 0-ის ტოლია, გარდა ერთი $c_i^{'} > 0$ კომპონენტისა. ამრიგად, x ვექტორი არ არის (1.1.1) ამოცანის ε-მიახლოებითი ამონახსნი, როცა $c = c'$ და $\rho(x,c) \leq c_i^{'} < \infty$. ■

თეორემა 1.1.2-ის საკმარისობის მტკიცებისას ჩვენს მიერ ფაქტიურად მიღებულ იქნა მდგრადობის რადიუსის შეფასება ზემოდან. კერძოდ, თუ აღვნიშნავთ $c_{\max} = \max\{c_i \mid i \in N_n\}$ სამართლიანია შემდეგი

შედეგი 1.1.1. თუ $\rho(x^{\varepsilon}, c) < \infty$, მაშინ $\rho(x^{\varepsilon}, c) < c_{\max}$.

თეორემა 1.1.3. თუ (1.1.2) პირობა სრულდება როგორც ტოლობა და არსებობს (1.1.1) ამოცანის $x(c)$ ამონახსნი, რომლისთვისაც $(x^{\varepsilon}, x(c)) \notin U$, მაშინ $\rho\left(x^{\varepsilon}, c\right) = 0$.

დამტკიცება. რადგანაც $(x^{\varepsilon}, x(c)) \notin U$ (1.1.1) ამოცანის $x(c)$ ამონახსნისათვის, მაშინ არსებობს x^{ε} ვექტორის ერთი მაინც კომპონენტი x_i^{ε} ისეთი, რომ $x_i^{\varepsilon} = 1$ და $x_i(c) = 0$. თეორემის პირობის ძალით $\langle c, x^{\varepsilon}\rangle = (1+\varepsilon)\langle c, x(c)\rangle$.

ვთქვათ, δ საკმარისად მცირე დადებითი რიცხვია. მაშინ $c^{\delta} = (c_1, \ldots, c_{i-1}, c_i + \delta, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ ვექტორისათვის სამართლიანია თანაფარდობა $\langle c^{\delta}, x^{\varepsilon}\rangle = \delta + (1+\varepsilon)\langle c^{\delta}, x(c^{\delta})\rangle > (1+\varepsilon)\langle c^{\delta}, x(c^{\delta})\rangle$. ამრიგად $c_{\delta} \notin F(x^{\varepsilon})$ და ცხადია, $\rho(x^{\varepsilon}, c) = 0$. ■

1.1.3. მდგრადობის რადიუსის მიახლოებითი გამოთვლა.

თუ $c \in R^n$ და $c' \in R^n$ მაშინ $(c + c')$ აღნიშნავს ვექტორს R^n-დან რომლის კომპონენტებია $c_i + c_i^{'}, i \in N_n$.

თეორემა 1.1.4. იმისათვის, რომ $S_{\rho}(c)$ ბირთვი, $\rho > 0$ იყოს (1.1.1) ამოცანის $x^{\varepsilon} \in X$ ε-მიახლოებითი ამონახსნის მდგრადობის ბირთვი აუცილებელი და საკმარისია $(c + \omega) \in F(x^{\varepsilon})$ ჩართვა სრულდებოდეს ყოველი $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in R_+^n$ ვექტორისათვის, $\omega_i \in \{\rho, \max\{-c_i, -\rho\}\}, i \in N_n$.

დამტკიცება. *აუცილებლობა.* ვთქვათ $S_\rho(c)$ მდგრადობის ბირთვია x^ε ε-მიახლოებითი ამონახსნისათვის და არსებობს ვექტორი $\omega' = (\omega_1', \ldots, \omega_n')$, $\omega_i' \in \{\rho, \max\{-c_i, -\rho\}\}, i \in N_n$ ისეთი, რომ $(c+\omega') \notin F(x^\varepsilon)$. თუ $r(c,c')$-თი აღვნიშნავთ ჩებიშევის მეტრიკით განსაზღვრულ მანძილს c და c' ვექტორებს შორის, ცხადია, რომ $r(c, c+\omega') \le \rho$ და $c_i + \omega_i' \ge c_i + \quad + \max\{-c_i, -\rho\} \ge 0$. მაშინ $c+\omega' \in S_\rho(c) \cap R_+^n$. ამრიგად, $S_\rho(c) \cap R_+^n \subseteq F(x^\varepsilon)$ ჩართვა არ სრულდება, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას - $S_\rho(c)$ მდგრადობის ბირთვია.

საკმარისობა. შევნიშნოთ, რომ ω ვექტორების რაოდენობა, რომელიც თეორემის ფორმულირებაში ფიგურირებს 2^n-ის ტოლია. ვთქვათ, $(c+\omega) \in F(x^\varepsilon)$ ჩართვა სრულდება თითოეული ასეთი ვექტორისათვის. $S_\rho(c) \cap R_+^n$ სიმრავლის ყოველი $c+\tau, \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ელემენტი ჩებიშევის მეტრიკის შემთხვევაში წარმოადგენს ამოზნექილ M მრავალწახნაგას, რომელიც მოიცემა, როგორც უტოლობათა შემდეგი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე

$$c_i - \rho \le c_i + \tau_i \le c_i + \rho,$$

$$c_i + \tau_i \ge 0, \quad i \in N_n.$$

რადგანაც მდგრადობის $F(x^\varepsilon)$ სიმრავლე ამოზნექილი სიმრავლეა იქიდან, რომ M მრავალწახნაგას $(c+\omega)$ წვერო ეკუთვნის $F(x^\varepsilon)$ სიმრავლეს გამომდინარეობს, რომ M-ის ყველა წახნაგი აგრეთვე ეკუთვნის $F(x^\varepsilon)$-ს, საიდანაც თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ M-ის ყველა შიგა წერტილი ეკუთვნის $F(x^\varepsilon)$-ს. სხვანაირად $M \subseteq F(x^\varepsilon)$ და $S_\rho(c)$ წარმოადგენს $x^\varepsilon \in X$ ამონახსნის მდგრადობის ბირთვს. ■

შემდეგი თეორემა გვაძლევს მდგრადობის რადიუსის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნის სირთულის შეფასებას.

თეორემა 1.1.5. მოცემული δ ფარდობითი ცდომილებით მდგრადობის $\rho(x^\varepsilon, c)$ რადიუსის მოსაძებნად საჭიროა $O\left(2^{2n} \log_2 \frac{C_{\max}}{\delta}\right)$ ოპერაცია.

დამტკიცება. თეორემის მტკიცებისას ფაქტიურად აღვწერთ $\rho(x^{\varepsilon},c)$-ს გამოთვლის ალგორითმს, რომელიც ორი ეტაპისაგან შედგება. პირველ ეტაპზე მოწმდება პირობა $\rho(x^{\varepsilon},c)<\infty$, მაშინ შედეგი 1.1.1-ის ძალით გვაქვს

$$0 \le \rho(x^{\varepsilon},c) < c_{\max}.$$

ორობითი ძიების მეთოდის [2] გამოყენებით $[0,c_{\max}]$ მონაკვეთის და მისი ნაწილების შუაზე გაყოფით δ მოცემული ცდომილებით რადიუსის მიახლოებითი მნიშვნელობის განსაზღვრას დავიყვანთ $\rho(x^{\varepsilon},c)\in[\rho',\rho'']$, $0\le\rho'<\rho''\le c_{\max}$ ჩართვის შესრულების შემოწმების $\log_2 \frac{C_{\max}}{\delta}$ რაოდენობის ამოცანაზე.

$\rho(x^{\varepsilon},c)\le\rho''$ სახის უტოლობის შესრულების შემოწმება შესაძლებელია $O(g(n)\cdot 2^n)$ ოპერაციის შედეგად შემდეგი $A(\rho)$ პროცედურის გამოყენებით. აქ და შემდეგ $O(g(n))$ $\langle c,x(c)\rangle$ მნიშვნელობის გამოთვლის სირთულეა.

$(c+\omega)$ ვექტორისათვის, რომლისთვისაც $\omega_i\in\{\rho,\max\{-c_i,-\rho\}\}$, $i\in N_n$ არა უმეტეს $O(g(n))$ ოპერაციის შედეგად განისაზღვრება $\langle c+\omega,x(c+\omega)\rangle$ სიდიდე, ხოლო $O(n)$ ოპერაციის შედეგად $\langle c+\omega,x^{\varepsilon}\rangle$ სიდიდე. თუ ყოველი ω ვექტორისათვის ($\omega_i\in\{\rho,\max\{-c_i,-\rho\}\}$, $i\in N_n$) შესრულებულია

$$\langle c+\omega,x^{\varepsilon}\rangle \le (1+\varepsilon)\langle c+\omega,x(c+\omega)\rangle$$

უტოლობა, მაშინ თეორემა 1.1.4-ის თანახმად $S_{\rho}(c)$ ბირთვი იქნება x^{ε} ამონახსნის მდგრადობის ბირთვის, ანუ $\rho(x^{\varepsilon},c)\ge\rho$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\rho(x^{\varepsilon},c)<\rho$.

პირველი ეტაპის შესასრულებლად საკმარისია ვისარგებლოთ $A(\rho)$ პროცედურით, როცა $\rho<c_{\max}$. თუ ამის შედეგად აღმოჩნდება, რომ $\rho(x^{\varepsilon},c)\ge c_{\max}$, მაშინ შედეგი 1.1.1-ის ძალით $\rho(x^{\varepsilon},c)=\infty$. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\rho(x^{\varepsilon},c)<\infty$. ამრიგად, აღწერილი ეტაპების სირთულეა $O\left(g(n)2^n\log_2\frac{C_{\max}}{\delta}\right)$.

შევნიშნოთ, რომ (1.1.1) ამოცანის ამოხსნის ტრივიალური ალგორითმის სირთულეა $O(g(n))$, სადაც $g(n)=2^n$. ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ $X\subseteq B^n$,

და $|B''| = 2^n$. ზოგად შემთხვევაში $\rho(x^\varepsilon, c)$-ს მნიშვნელობის პოვნა δ ცდომილებით შესაძლებელია $O\left(2^{2n}\log_2\frac{C_{\max}}{\delta}\right)$ ოპერაციით. ■

პარაგრაფის ბოლოს მოვიყვანთ თეორემების 1.1.2 და 1.1.3 დაზუსტებას კომივოიაჟერისა და დანიშნულების ამოცანებისათვის. ანუ როცა $X = X'$ და $X = X''$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ამოცანებისათვის შესრულებულია პირობა, თუ $X \in \{X', X''\}$ და $x \in X$, მაშინ $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$, სადაც k ამოცანის განზომილებაა. როგორც კომივოიაჟერის ასევე დანიშნულების ამოცანაში ერთადერთ U მიმართებას X სიმრავლეზე, რომელიც შემოტანილ იქნა 1.1.2. პუნქტში წარმოადგენს ტოლობის მიმართება: $(x, x') \in U$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = x'$. ამიტომ როცა $X = X'$ ან $X = X''$ თეორემები 1.1.2 და 1.1.3 შეიძლება დაზუსტდეს შემდეგნაირად.

შედეგი 1.1.2. ვთქვათ $X \in \{X', X''\}$, მაშინ $\rho(x^\varepsilon, c) < \infty$.

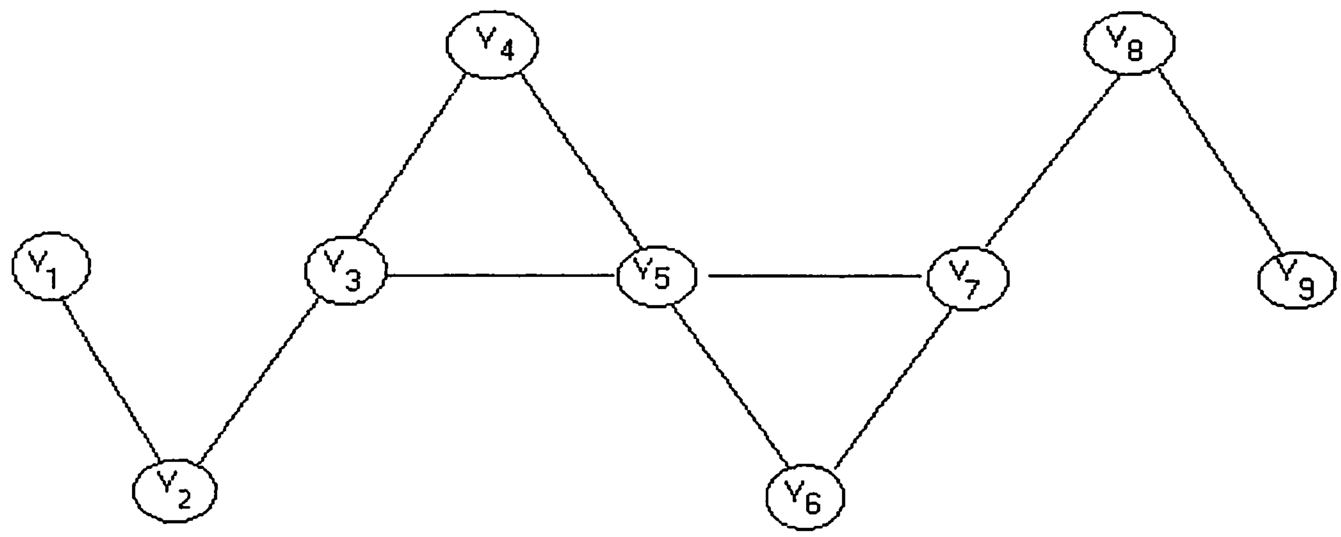
შედეგი 1.1.3. თუ $X \in \{X', X''\}$ და (1.1.2) პირობა სრულდება როგორც ტოლობა და არსებობს (1.1.1) ამოცანის $x^\varepsilon(c)$-საგან განსხვავებული ამონახსნი, მაშინ $\rho(x^\varepsilon, c) = 0$.

მოვიყვანოთ მაგალითი, როცა მდგრადობის რადიუსი $\rho(x^\varepsilon, c) = \infty$. ვთქვათ, $G = (V, E)$ არაორიენტირებული გრაფია, V- წვეროების სიმრავლეა, E-წიბოების სიმრავლე. $E = \{(v_i, v_j), v_i, v_j \in V\}$. ყოველ v_i წვეროს მიწერილი აქვს არაუარყოფითი c_i რიცხვი, მისი წონა. (1.1.1) ამოცანის ტერმინებში ჩამოვაყალიბოთ გრაფის ორ ფიქსირებულ წვეროს შორის უმოკლესი წონის ჯაჭვის პოვნის ამოცანა. დასაშვებ ვექტორთა $X \subseteq B^n$ სიმრავლე წარმოადგენს ფიქსირებულ წვეროებს შორის ყოველი μ ჯაჭვის სიმრავლეს. μ ჯაჭვს შეესაბამება ერთადერთი (0,1) ვექტორი $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$ განსაზღვრული შემდეგი წესით:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{თუ } v_i \in \mu, \\ 0, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ამრიგად, $x \in B^n$ ვექტორი არის X სიმრავლის ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მას შეესაბამება μ ჯაჭვი ორ ფიქსირებულ წვეროს შორის. ცხადია, რომ უმცირესი წონის ჯაჭვის მოძებნის ამოცანა ემთხვევა (1.1.1) ამოცანას.

ნახ.1-ზე გამოსახულია $G=(V,E)$ გრაფი. ვთქვათ $c=(2,4,2,3,4,6,8,2,6)$. გვაინტერესებს უმოკლესი ჯაჭვი v_1 და v_9 წვეროებს შორის.



ნახ. 1

ავაგოთ ყველა შესაძლო ჯაჭვის სიმრავლე v_1 და v_9 წვეროებს შორის.

$$\mu^1=(v_1,v_2,v_3,v_5,v_7,v_8,v_9), \qquad \mu^3=(v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9),$$

$$\mu^2=(v_1,v_3,v_3,v_4,v_5,v_7,v_8,v_9), \qquad \mu^4=(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9).$$

გვაქვს $X=\{x^1=(1,1,1,0,1,0,1,1,1),\ \ x^2=(1,1,1,0,1,1,1,1,1),\ \ x^3=(1,1,1,1,1,0,1,1,1),$ $x^4=(1,1,1,1,1,1,1,1,1)\}$.

(1.1.1) ფორმულით გამოვთვალოთ

$$\langle c,x^1\rangle = 2+4+2+4+8+2+6=28,$$

$$\langle c,x^2\rangle = 2+4+2+4+6+8+2+6=34,$$

$$\langle c,x^3\rangle = 2+4+2+3+4+8+2+6=31,$$

$$\langle c,x^4\rangle = 2+4+2+3+4+6+8+2+6=37.$$

ამრიგად $x(c)=x^1=(1,1,1,0,1,0,1,1,1)$.

ამ მაგალითში $U=\{(x^1,x^2),(x^1,x^3),(x^1,x^4),(x^2,x^4),(x^3,x^4),\ \ (x^i,x^i),\ \ i\in N_4\}$. ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი $\varepsilon \ge 0$ რიცხვისათვის და x^1 ვექტორისათვის შესრულებულია თეორემა 1.1.2-ის პირობები. ამიტომ $\rho(x^1,c)=\infty$.

§1.2. კომივოიაჟერის ამოცანის ამონახსნის მდგრადობა განზომილების ცვლილების დროს

1.2.1. ამონახსნის მდგრადობა კომივოიაჟერის ამოცანაში. განვიხილოთ კომივოიაჟერის ამოცანა, რომლის მანძილების მატრიცაა $A=\|a_{ij}\|_{n\times n}$. ვთქვათ $\tau_1,\ldots,\tau_{(n-1)!}$ ამ ამოცანის ყველა შესაძლო დასაშვები ამონახსნია. ყოველი τ_i-სთვის განსაზღვრულია წრფივი ფუნქციონალი (შემდგომში *MINSUM* ტიპის ფუნქციონალი)

$$\tau_i(A)=\sum_{(s,k)\in\tau_1}a_{sk}\,, \tag{1.2.1}$$

და ფუნქციონალი „ვიწრო ადგილებზე" (შემდგომში *MINMAX* ტიპის ფუნქციონალი)

$$\tau_i(A)=\max_{(s,k)\in\tau_i}a_{sk}\,, \tag{1.2.2}$$

ამოცანა მდგომარეობს განსახილველი ფუნქციონალის აზრით უმოკლესი სიგრძის ამონახსნის მოძებნაში. [30]-ში შემოტანილია კომივოიაჟერის ამოცანის ამონახსნის მდგრადობის რადიუსის ცნება, ხოლო [32]-ში ნაჩვენებია, რომ მდგრადობის რადიუსის გამოსათვლელ ფორმულებს ჩებიშევის მეტრიკის შემთხვევაში შესაბამისად (1.2.1) და (1.2.2) ფუნქციონალებისათვის აქვს სახე:

$$\rho(A)=\min_{i\notin\varphi(A)}\max_{j\in\varphi(A)}\frac{\tau_i(A)-\tau_j(A)}{2\left(n-\left|\tau_i\cap\tau_j\right|\right)}, \tag{1.2.3}$$

$$\rho(A)=\min_{i\notin\varphi(A)}\frac{\tau_i(A)-\tau_j(A)}{2},\quad j\in\varphi(A), \tag{1.2.4}$$

აქ $\varphi(A)$ ოპტიმალური ამონახსნების ნომრების სიმრავლეა, ხოლო $\left|\tau_i\cap\tau_j\right|$, τ_i და τ_j სიმრავლეების თანაკვეთის სიმძლავრე. საჭიროა აღინიშნოს, რომ მდგრადობის რადიუსის მნიშვნელობა (1.2.4) ფორმულის მიხედვით არ არის დამოკიდებული ტრაექტორიათა (დასაშვებ ამონახსნთა) ურთიერთთანაკვეთის სტრუქტურაზე. (1.2.4) ფორმულის მარტივი სახე საშუალებას იძლევა *MINMAX* ტიპის ამოცანებისათვის აგებულ იქნას მდგრადობის რადიუსის

გამოსათვლელი ეფექტური ალგორითმები. ცნობილია, რომ [32] ასეთ დამოკიდებულებას ადგილი აქვს მხოლოდ ჩებიშევის მეტრიკის შემთხვევაში.

1.2.2. კომივოიაჟერის ამოცანის ამონახსნის დამოკიდებულება განზომილების ზრდაზე. დავუშვათ, რომ კომივოიაჟერის *MINMAX* ტიპის ამოცანაში ოპტიმალური ამონახსნი ერთადერთია და მას აქვს სახე

$$\tau_1 = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n,1)\}.$$

როგორც ცნობილია [38], წრფივ ამოცანებში „თითქმის ყოველთვის" ამონახსნი ერთადერთია, ამიტომ აღნიშნული შეზღუდვა მიგვაჩნია ბუნებრივად.

შემოვიღოთ პარამეტრი

$$\alpha(A) = \min_{i \neq 1}(\tau_i(A) - \tau_1(A)).$$

შევნიშნოთ, რომ $\alpha(A)$ წარმოადგენს გაორმაგებულ მდგრადობის რადიუსის მნიშვნელობას, მხოლოდ *MINMAX* ტიპის ამოცანისათვის. ამიტომ $\alpha(A)$-ს გამოსათვლელად შესაძლებელია ვისარგებლოთ იგივე ამოცანისათვის $\rho(A)$-ს გამოსათვლელი ფორმულით, ოღონდ (1.2.2) ფუნქციონალით.

ვთქვათ, კომივოიაჟერის მიერ შემოსავლელ n პუნქტს მიემატა კიდევ ერთი პუნქტი (ამოცანის განზომილება ერთით გაიზარდა). ასეთი სიტუაცია ხშირად წარმოიშვება მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოხსნისას [61, 62].

ისმის კითხვა: შესაძლებელია თუ არა ახალი $(n+1)\times(n+1)$ განზომილების ამოცანის ამონახსნის მიღება, $n \times n$ განზომილების A მატრიცისათვის უკვე ამოხსნილი ამოცანის საშუალებით?

ამ პარაგრაფში ჩვენთვის მოსახერხებელი იქნება და ეს არ გამოიწვევს გაურკვევლობას თუ მანძილების მატრიცას $n+1$ პუნქტისათვის ისევ A-თი აღვნიშნავთ. თვითონ ამოცანები კი n და $n+1$ პუნქტისათვის აღვნიშნოთ Z და Z'-ით.

შემოვიღოთ ოპერაცია, რომელსაც ლოკალური გარდაქმნა ვუწოდოთ. ვთქვათ, τ_0 და τ შესაბამისად Z და Z' ამოცანების ტრაექტორიებია. ვიტყვით, რომ τ მიღებულია τ_0-სგან ლოკალური გარდაქმნით თუ არსებობს $(k,s)\in\tau_0$ ისეთი, რომ

$$\tau = \tau_0 \setminus (k,s) \cup \{(k,n+1),(n+1,s)\}.$$

შებრუნებულ ოპერაციას (τ-დან τ_0-ზე გადასვლას, სადაც τ მიღებულია τ_0-სგან ლოკალური გარდაქმნით) ვუწოდოთ შებრუნებული ლოკალური გარდაქმნა. როცა $\tau = \tau_1$, ვიტყვით, რომ მოხდა ოპტიმუმის ლოკალური გარდაქმნა. ლოკალური გარდაქმნის ფასი ვუწოდოთ სიდიდეს

$$c(\tau,\tau_0) = a_{k,n+1} + a_{n+1,s} - a_{k,s}. \tag{1.2.5}$$

$r(A)$-თი აღვნიშნოთ $\min(c(\tau,\tau_0))$, სადაც მინიმუმი აღებულია ყველა შესაძლო ლოკალური გარდაქმნის მიმართ, ხოლო $\beta(A)$-თი აღვნიშნოთ ასეთივე მინიმუმი ოპტიმუმის ლოკალური გარდაქმნის მიმართ. ამრიგად,

$$\beta(A) = \min_k (a_{k-1,n+1} + a_{n+1,k} - a_{k-1,k}), \tag{1.2.6}$$

და ვთქვათ, ეს მინიმუმი მიიღწევა, როცა $k = k_0$, რომელიღაც $\bar{\tau}$ ტრაექტორიისათვის.

დავუშვათ, რომ კომივოიაჟერის ამოცანის მანძილების A მატრიცა აკმაყოფილებს სამკუთხედის უტოლობას:

$$a_{ij} \le a_{ik} + a_{kj},$$

მაშინ სამართლიანია

<u>*თეორემა 1.2.1.*</u> თუ არსებობს i, $1 \le i \le n$ ისეთი, რომ

$$\min(a_{n+1,i}\,;\, a_{i,n+1}) \le \alpha(A)/2,$$

მაშინ Z' ამოცანის ამონახსნი შესაძლებელია მიღებული იქნეს Z ამოცანის ოპტიმუმის ლოკალური გარდაქმნით.

<u>*დამტკიცება.*</u> მართლაც, (1.2.6)-დან გამომდინარეობს

$$\alpha(A) \ge \beta(A), \tag{1.2.7}$$

სამკუთხედის უტოლობიდან ვღებულობთ

$$a_{n+1,i+1} \le a_{i,n+1} + a_{i,i+1}.$$

ამიტომ

$$\tau' = \tau_1 \setminus (i,i+1) \cup \{(i,n+1),(n+1,i+1)\}$$

ტრაექტორიისათვის, რომელიც მიღებულია τ_1 ტრაექტორიისგან ლოკალური გარდაქმნით ვღებულობთ:

$$\tau'(A) \le \tau_1(A) + 2\, a_{i,n+1}. \qquad (1.2.8)$$

მაგრამ $\beta(A)$-ს განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ტრაექტორიის სიგრძე, რომელიც მიღებულია ოპტიმუმისაგან ლოკალური გარდაქმნით აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\tau'(A) \le \tau_1(A) + \beta(A). \qquad (1.2.8')$$

(1.2.8) და (1.2.8') უტოლობებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი თეორემის სამართლიანობა. ■

ვაჩვენოთ თუ როგორ მიიღება ახალი Z' ამოცანის ამონახსნი. ამ ამოცანის ნებისმიერი τ ტრაექტორია შებრუნებული ლოკალური გარდაქმნით შეიძლება გარდაიქმნას Z ამოცანის რაღაც τ_0 ტრაექტორიად. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1. ვთქვათ, $\tau_0 \ne \tau_1$. სამკუთხედის აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ

$$a_{p,n+1} + a_{n+1,j} - a_{p,j} \ge 0,$$

სადაც (p,j) წარმოადგენს Z ამოცანის პუნქტების ნებისმიერ წყვილს. ამიტომ

$$\tau(A) \ge \tau_0(A).$$

მაგრამ $\tau_0(A) \ge \tau_1(A) + \alpha(A)$.

აქედან $\tau(A) \ge \tau_1(A) + \alpha(A) \ge \tau_1(A) + \beta(A)$.

2. ვთქვათ $\tau_0 = \tau_1$, მაშინ $\beta(A)$-ს განსაზღვრის ძალით გვაქვს

$$\tau(A) \ge \tau_1(A) + \beta(A).$$

ამრიგად, ორივე შემთხვევაში მივიღეთ, რომ Z' ამოცანის ნებისმიერი ტრაექტორია აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$\tau(A) \ge \tau_1(A) + \beta(A).$$

მაგრამ

$$\bar{\tau}(A) = \tau_1 \setminus (u-1,u) \cup \{(u-1,n+1),(n+1,u)\}$$

ტრაექტორია, აგების პრინციპიდან გამომდინარე ისეთია, რომ

$$\bar{\tau}(A) = \tau_1(A) + \beta(A).$$

ცხადია, $\bar{\tau}$ არის Z' ამოცანის ამონახსნი.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ z' ამოცანის ამონახსნი მიიღება Z ამოცანის ამონახსნისაგან ლოკალური გარდაქმნით, თუ $\alpha(A) \geq \beta(A)$.

სამკუთხედის უტოლობა პრაქტიკული ამოცანებისათვის საკმარისად ბუნებრივი მოთხოვნაა. მაგრამ არსებობს ამოცანები, რომლებშიც ეს პირობა საზოგადოდ არ სრულდება. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1.2.2. თუ შესრულებულია პირობა $\alpha(A) \geq \beta(A) - r(A)$, მაშინ Z' ამოცანის ამონახსნი შესაძლებელია მიღებულ იქნას Z ამოცანის ამონახსნისაგან $O(n^2)$ სირთულის გარდაქმნით.

დამტკიცება. განმარტების ძალით

$$\beta(A) \geq r(A).$$

ვთქვათ, Z ამოცანის τ_0 ტრაექტორია მიღებულია Z' ამოცანის τ ტრაექტორიისაგან შებრუნებული ლოკალური გარდაქმნით.

თუ $\tau_0 \neq \tau_1$, მაშინ

$$\tau(A) \geq \tau_0(A) + r(A) \geq \tau_1(A) + \alpha(A) + r(A).$$

თუ $\tau_0 = \tau_1$, მაშინ

$$\tau(A) \geq \tau_1(A) + \beta(A),$$

ანუ ორივე შემთხვევაში $\tau(A) \geq \tau_1(A) + \beta(A)$,

მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ $\bar{\tau}(A) = \tau_1(A) + \beta(A)$

არის Z' ამოცანის ამონახსნი. გარდაქმნის სირთულის შეფასება ჩანს ლოკალური გარდაქმნის პროცედურიდან. ■

აღვნიშნოთ, რომ თეორემები 1.2.1 და 1.2.2 გვაძლევენ გარკვეული აზრით საბოლოო პასუხს დასმულ კითხვაზე. თუ თეორემების პირობები არ სრულდება ანუ, პირველ შემთხვევაში ნებისმიერი $i \leq n$-თვის

$$\min(a_{n+1,i}; a_{i,n+1}) > \frac{\alpha(A)}{2},$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში

$$\alpha(A) < \beta(A) - r(A),$$

ადვილად შეიძლება ავაგოთ მაგალითები, როცა Z' ამოცანის ამონახსნი შეუძლებელია მიღებულ იქნას Z ამოცანის ამონახსნისაგან ლოკალური გარდაქმნით.

ბოლოს, აღვნიშნავთ, რომ $\rho(A)$-ს გამოთვლა *MINMAX* ტიპის ამოცანებ-ში, დაიყვანება კომივოიაჟერის ამოცანის ამოხსნაზე, ოღონდ *MINSUM* ტიპის ფუნქციონალით. მოყვანილი თეორემებიდან ვასკვნით, რომ ადგილი აქვს გარკვეული აზრით „შებრუნებულ" ფაქტსაც: გარკვეული პირობების შესრულებისას Z' ამოცანის ამონახსნი მიიღება *MINMAX* ტიპის ფუნქცი-ონალზე გადასვლით და შემდგომ მდგრადობის რადიუსის გამოთვლით.

§1.3. მარშრუტიზაციის ამოცანების ზოგიერთი მათემატიკური მოდელი და მათი გამოკვლევა

1.3.1. ამოცანების დასმა, მათემატიკური მოდელები და გამოთვლითი სირთულე. მარშრუტიზაციის ამოცანები წარმოადგენენ კომბინატორული ოპტიმიზაციის ამოცანების საინტერესო კლასს. ინტერესი ასეთი ამოცანებისადმი განპირობებულია ორი ფაქტორით: პირველი – მარშრუტიზაციის მოდელების პრაქტიკული გამოყენება და მეორე – კომბინატორული ოპტიმიზაციისათვის აქტუალური თეორიული შედეგები, რომლებიც მიიღება ასეთი ამოცანების კვლევისას.

ყველაზე ზოგადი სახით დასმული მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოხსნის პრინციპულ გამოთვლით სირთულეებს მივყავართ ისეთი მათემატიკური მოდელების განხილვის აუცილებლობამდე, რომლებიც ასახავენ ამა თუ იმ კონკრეტულ ასპექტს. ჩვენ განვიხილავთ სატრანსპორტო საშუალებების რაციონალური მარშრუტების დადგენის შემდეგ ამოცანას. მომხმარებლები (დასახლებული პუნქტები) ცენტრალური ბაზიდან მარაგდებიან ერთგვაროვანი საქონლით სატრანსპორტო საშუალებების დახმარებით. ცნობილია მომხმარებელთა ადგილმდებარეობა და მოთხოვნები ამ საქონელზე, აგრეთვე სატრანსპორტო საშუალებების ტვირთამწეობა და განარბენის მაქსიმალური დასაშვები სიდიდე. ისმის კითხვა: დავაკმაყოფილოთ მომხმარებელთა მოთხოვნები სატრანსპორტო საშუალებების ისეთი მარშრუტებით, რომ ჯამური განარბენო იყოს მინიმალური და დაცული იქნას შეზღუდვები მაქსიმალურ განარბენზე და ტვირთამწეობაზე. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ თითოეული მომხმარებლის მოთხოვნა გაცილებით ნაკლებია სატრანსპორტო საშუალებების ტვირთამწეობაზე (სწორედ ეს შემთხვევაა საინტერესო პრაქტიკული თვალსაზრისით). ქვემოთ მოყვანილი მათემატიკური მოდელები ასეთ სიტუაციას ასახავენ.

ვთქვათ $I=\{1,2,...,n\}$; $C=\|c_{ij}\|$, $i,j\in I$ - დადებით ნამდვილ რიცხვთა მატრიცაა, ხოლო D,Q და $P_i, i\in I$, მოცემული მთელი რიცხვებია. იგულისხმება, რომ $1\le P_i << Q, i\in I$.

<u>*ამოცანა 1.*</u> ვიპოვოთ ჩაკეტილ მარშრუტთა $\{M_k\}$, $k=1,...,m$ სიმრავლე, სადაც $M_k=\{n+1,i_1^k,...,i_l^k,n+1\}$, $i_j^k\in I$, $j=1,...,l_k$, $1\le l_k\le n$ (m და l_k წინასწარ ფიქსირებული არ არის), რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$\bigcup_{k=1}^{m} M_k = I\,;$$

$$M_k\cap M_q=\{n+1\},\quad k,q\in\{1,...,m\},\quad k\ne q\,, \tag{1.3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{l_k} P_{i_j^k}\le Q\,, \tag{1.3.2}$$

$$C_k=C_{n+1,i_1^k}+C_{i_{l_k}^k,n+1}+\sum_{j=2}^{l_k} C_{i_j^k,i_{j-1}^k}\le D,\quad k=1,...,m\,, \tag{1.3.3}$$

და რომლებსაც აქვთ მინიმალური საერთო სიგრძე

$$\sum_{k=1}^{m} C_k=\sum_{k=1}^{m}\left(C_{n+1,i_1^k}+C_{i_{l_k}^k,n+1}+\sum_{j=2}^{l_k} C_{i_j^k,i_{j-1}^k}\right).$$

დასმული ამოცანა წარმოადგენს ცენტრალური ბაზიდან ერთგვაროვანი ტვირთის „წვრილი" პარტიების მომხმარებელთან მიტანის პრობლემის მათემატიკურ მოდელს, სადაც $n+1$-ცენტრალური ბაზის ნომერია, P_i - i-ური მომხმარებლის მოთხოვნა, C-პუნქტებს შორის მანძილების მატრიცაა, D და Q შესაბამისად შეზღუდვები მარშრუტის სიგრძეზე და სატრანსპორტო საშუალების ტვირთამწეობაზე.

<u>*ამოცანა 2.*</u> მიიღება ამოცანა 1- ისაგან თუ უგულებელვყოფთ (1.3.1) მოთხოვნას, ანუ დავუშვებთ, რომ თითოეული მომხმარებელს შეიძლება მოემსახუროს რამდენიმე მარშრუტი. მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოხსნის ჩვენთვის ცნობილ თითქმის ყველა მეთოდში საბაზო ამოცანებს წარმოადგენენ NP-სრული ამოცანები (კომივოიაჟერის, p-კომივოიაჟერის, p-კურიერის და სხვ.).

განვიხილოთ ამოცანა 1-ის გამოთვლითი სირთულის საკითხი. ამბობენ, რომ დისკრეტული ოპტიმიზაციის ამოცანა დაიყვანება მეორე ასეთივე

ამოცანაზე, თუ მეორე ამოცანის ამოხსნის ნებისმიერი ალგორითმი არაუმეტეს $f(n)$ ბიჯის საშუალებით (f-მრავალწევრია, ხოლო n პირველი ამოცანის განზომილების მახასიათებელი) შეიძლება გარდაიქმნას პირველი ამოცანის ამოხსნის ალგორითმად. სამართლიანია შემდეგი

წინადადება 1.3.1. p-კომივოიაჟერის ამოცანა NP-სრული ამოცანაა. ვთქვათ $C=\|c_{ij}\|$ კომივოიაჟერის n-განზომილებიანი ამოცანის მანძილების მატრიცაა, B - კი - p-კომივოიაჟერის ამოცანის ამოხსნის რაღაც ალგორითმია. ავაგოთ $m=n+p-1$ განზომილების C' მატრიცა შემდეგი წესით $c'_{ij}=c_{ij}$, როცა $i,j=\overline{1,n}$; $c'_{ii}=0$, როცა $i>n$; $c'_{ij}=\infty$ ყველა დანარჩენ შემთხვევაში. B ალგორითმით მიღებული p-კომივოიაჟერის ამოცანის ამონახსნი წარმოადგენს t ციკლს, რომელიც თავის მხრივ მოიცავს ელემენ-ტებს 1-დან n-მდე და ერთეული სიგრძის $p-1$ ციკლს. t ციკლის C' სიგრძე (იგულისხმება სიგრძე C' მატრიცის მიხედვით) ემთხვევა C მატრიცის კომივოიაჟერის ამოცანის ამონახსნის C-სიგრძეს, ხოლო C'-სიგრძე ერთეულოვანი ციკლებისა 0-ის ტოლია.

ვთქვათ, A ალგორითმი პოულობს C მატრიცის კომივოიაჟერის ამოცა-ნის ამონახსნს ξ ჩასმიდან t ციკლის ამორჩევით. ცხადია, რომ ამის გაკეთება არაუმეტეს p ბიჯის საშუალებით შეიძლება.

შედეგი 1.3.1. ამოცანები 1,2 NP- სრული ამოცანებია.

მართლაც, p-კომივოიაჟერის ამოცანა წარმოადგენს ამოცანა 1,2-ის კერძო შემთხვევას, როცა D და Q საკმარისად დიდი რიცხვებია. ამიტომ [2] ვღებულობთ შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 1.3.1-დან გამომდინარე პრაქტიკულად საინტერესო განზომი-ლების ამოცანა 1,2 – სათვის ზუსტი ალგორითმების გამოყენება კარგად ცნობილი მიზეზების გამო შეუძლებელია. ამიტომ გამართლებულია ევრის-ტიული ალგორითმების აგება, ანუ ისეთი ალგორითმებისა, რომლებიც ემყარებიან სხვადასხვა საღ მოსაზრებებს (მკაცრი დასაბუთების გარეშე) და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ვიპოვოთ „კარგი" ამონახსნები მისაღებ დროში.

1.3.2. მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოხსნის ევრისტიული ალგორითმები. ქვემოთ მოყვანილი ალგორითმების მუშაობის პირველ ეტაპზე ხორციელდება დასაშვები მარშრუტების აგება. მეორე ეტაპზე ხორციელდება დასაშვები მარშრუტების სიმრავლიდან ოპტიმალური მარშრუტების გამოყოფა, რისთვისაც იხსნება უმცირესი დაყოფის ამოცანა [60].

პირველ ეტაპზე ყველა შესაძლო დასაშვები მარშრუტის აგება შეუძლებელია (მათი რაოდენობის სიდიდის გამო). ამიტომ იძულებული ვართ ევრისტიული მოსაზრებების საფუძველზე განვიხილოთ მათი შემოსაზღვრული რაოდენობა. ცხადია, რომ რაც უფრო „მდიდარი" იქნება დასაშვები მარშრუტების სიმრავლე, მით უფრო ახლოს იქნება აგებული ამონახსნი ოპტიმალურ ამონახსნთან.

დასაშვები მარშრუტების აგება ხორციელდება ცალკეული მომხმარებლის მოთხოვნის, მათი გეოგრაფიული განლაგებისა და ტვირთამწეობაზე და მაქსიმალურ განარბენზე შეზღუდვების ანალიზის საფუძველზე.

ამოცანა 1-ის ამოხსნის ალგორითმი:

დასაშვები მარშრუტების აგების პროცესი თავის მხრივ 2 ეტაპად იყოფა. პირველ ეტაპზე ყოველი $i \in I$ პუნქტისათვის აიგება ე.წ. ინდივიდუალური მარშრუტი, რომელშიც გარდა i პუნქტისა შედიან ან i-სთან უახლოესი პუნქტები, ან ბაზასთან უახლოესი პუნქტები, ან პუნქტები, რომლებიც მდებარეობენ უმოკლეს გზაზე ბაზიდან i-პუნქტამდე, ისე, რომ შესრულდეს (1.3.2), (1.3.3) შეზღუდვები. აგებული მარშრუტების სიმრავლის გაფართოება მეორე ეტაპზე ხორციელდება ანალოგიურად, იმ განსხვავებით, რომ შემოდის გარკვეული მექანიზმი, რომელიც კრძალავს ზოგიერთი პუნქტების ჩართვას ფორმირებად მარშრუტში.

ყოველი დასაშვები მარშრუტი წარმოიდგინება როგორც n-განზომილებიანი (0,1)-ვექტორი, რომლის i-ური კოორდინატა ტოლია 1-ის, თუ i-ური პუნქტი შედის ამ მარშრუტში. ეს ვექტორები ქმნიან იმ მატრიცის სვეტებს, რომლისთვისაც შემდგომ იხსნება უმცირესი დაყოფის ამოცანა.

აღვნიშნოთ, რომ დასაშვები მარშრუტების ფორმირებისას არ არის გამორიცხული მარშრუტების დუბლირება. ამიტომ მორიგი მარშრუტის მატრიცაში ჩართვის წინ უნდა დავრწმუნდეთ, რომ ის არ ემთხვევა არც ერთ ადრე აგებულ მარშრუტს. (იხ. ბიჯი 9).

ალგორითმის ფორმალური აღწერისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები: C - მატრიცა განზომილებით $(n+1)\times(n+1)$, პუნქტებს შორის მანძილების დამახსოვრებისათვის. საწყის ეტაპზე

$$c_{ij}=\begin{cases} i \text{ და } j \text{ პუნქტებს შორის მანძილს, თუ } i \text{ და } j \\ \text{პუნქტები მეზობელი პუნქტებია,} \\ \infty \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში;} \end{cases}$$

Z-მატრიცა განზომილებით $(n+1)\times(n+1)$ პუნქტებს შორის უმოკლესი გზების შესანახად. საწყის ეტაპზე

$$z_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{თუ } c_{ij}=\infty, \\ j, & \text{თუ } c_{ij}<\infty; \end{cases}$$

n_1 - დასაშვები მარშრუტების მაქსიმალური რაოდენობა (პრაქტიკულად შეიძლება ავიღოთ $n_1=5n$);

L – n_1 განზომილების ვექტორი მარშრუტების სიგრძეების შესანახად;

P – n განზომილების ვექტორი პუნქტების მოთხოვნების შესანახად;

Z_0 – $(n+1)\times n_1$ განზომილების მატრიცა დასაშვები მარშრუტების შესანახად;

R – n განზომილების დამხმარე $(0,1)$ ვექტორი, $R(i)=1$ შემთხვევაში i პუნქტის ჩართვა მარშრუტში აკრძალულია.

Y – n განზომილების დამხმარე $(0,1)$ ვექტორი, რომელიც მორიგი მარშრუტის ფორმირებისათვის გამოიყენება.

Q და D - შესაბამისად, მაქსიმალური ტვირთამწეობა და მაქსიმალური განარბენი ერთი სატრანსპორტო საშუალებისათვის.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ პუნქტები გადანომრილია, მოთხოვნების ზრდის შესაბამისად.

ინდივიდუალური მარშრუტების აგების ალგორითმს აქვს შემდეგი სახე:

ბიჯი 1. ავიღოთ $Z_0(\alpha,\beta)=0, \quad \alpha=1,\dots,n, \quad \beta=1,\dots,n_1; \quad L(\alpha)=0, \quad \alpha=1,\dots,n_1;$

$R(\alpha)=0, \quad \alpha=1,\dots,n;$

ბიჯი 2. ფლოიდის [1] ალგორითმის გამოყენებით ვაქციოთ C და Z მატრიცები შესაბამისად უმცირესი მანძილებისა და უმცირესი გზების მატრიცებად. ავიღოთ $i=1$; $k=0$;

ბიჯი 3. ავიღოთ $L(k+1)=C(n+1,i)$; $y(\alpha)=0, \quad \alpha=1,\dots,n$; $i_1=i$; $k_p=i_1$; $B_1=Q$;

ბიჯი 4. ავიღოთ $y(i_1)=1$; $B_1=B_1-p(i_1)$; $R(i_1)=1$;

ბიჯი 5. თუ $P(l)>B_1$ პირობა შესრულებულია ყველა ისეთი $l\in\{1,2,\dots,n\}$-სთვის, რომლისთვისაც $R(l)=0$, გადავიდეთ ბიჯი 8-ზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიპოვოთ k_1 ინდექსი, რომლისთვისაც $P(k_1)\le B_1$ და $P(k_1+1)>B_1$. ავიღოთ $R(j)=1, \quad j=k_1+1,\dots,n$;

ბიჯი 6. თუ ნებისმიერი $l=1,\dots,n$-სთვის გვაქვს $R(j)=1$ გადავიდეთ ბიჯი 8-ზე.

წინააღმდეგ შემთხვევაში ავაგოთ პუნქტების $M\subset\{1,\dots,k_1\}$ პუნქტების ქვესიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $j\in M$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $R(j)=0$ და j პუნქტი განლაგებულია k_p პუნქტიდან $n+1$ პუნქტამდე უმოკლეს გზაზე.

თუ $M=\varnothing$, მაშინ ყველა იმ α პუნქტს შორის, რომლისთვისაც $R(\alpha)=0$, ვიპოვოთ პუნქტი, რომელიც უახლოესია k_p-სთან. ვთქვათ, მისი ნომერია j. ავიღოთ $i_1=j$;

თუ $M\neq\varnothing$, მაშინ M სიმრავლის პუნქტებიდან ავიღოთ j, რომელიც უახლოესია k_p-სთან და ავიღოთ $i_1=j$;

ბიჯი 7. თუ $L(k+1)+C(k_p,i_1)+C(i_1,n+1)\le D$, მაშინ ავიღოთ $L(k+1)=$ $=L(k+1)+C(k_p,i_1)$; $k_p=i_1$ და გადავიდეთ ბიჯი 4-ზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში ავაგოთ სიმრავლე

$$\{n+1,\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_s},i_1,n+1\},$$

სადაც α_{j_l}, $l=1,\dots,s$ პუნქტებია, რომლებიც ფორმირებად მარშრუტში უნდა ჩაერთონ.

$$\alpha_{J_1} = \min\{l \mid y(l)=1 \quad და \quad l \in \{1,\dots,n\}\},$$
$$\alpha_{J_2} = \min\{l \mid y(l)=1 \quad და \quad l \in \{\alpha_{J_1}+1,\dots,n\}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{J_s} = \min\{l \mid y(l)=1 \quad და \quad l \in \{\alpha_{J_{s-1}}+1,\dots,n\}\}.$$

ბიჯი 7-ში ფორმირებული პუნქტების სიმრავლისათვის ამოვხსნათ კომივოიაჟერის ამოცანა, ანუ ვიპოვოთ მიმდევრობა

$$\pi(n+1), \pi(\alpha_{J_1}), \dots, \pi(\alpha_{J_s}), \pi(i_1),$$

რომლისთვისაც

$$C(\pi(n+1), \pi(\alpha_{J_1})) + \sum_{l=2}^{s-1} C(\pi(\alpha_{J_l}), \pi(\alpha_{J_{l+1}})) + C(\pi(\alpha_{J_{s}}), \pi(\alpha_{i_1})) + C(\pi(i_1), \pi(n+1))$$

ჯამი იქნება მინიმალური. (აქ π არის $\{n+1, \alpha_{J_1}, \alpha_{J_2}, \dots, \alpha_{J_s}, i_1, n+1\}$ სიმრავლის ბიექცია თავის თავში). ვთქვათ, $D_{\min}$ ამ ჯამის მინიმალური მნიშვნელობაა.

თუ $D_{\min} \le D$, მაშინ კომივოიაჟერის მარშრუტზე ვიპოვოთ $(n+1)$-ის მომდევნო პუნქტი, (ცხადია, რომ $j = \pi(\alpha_{J_1})$) და ავიღოთ $i_1 = j$; $L(k+1) = D_{\min} - C(i_1, n+1)$; $k_p = i_1$ და გადავიდეთ ბიჯი 4-ზე.

თუ $D_{\min} > D$, გადავიდეთ ბიჯი 8-ზე.

ბიჯი 8. (მიმდინარე i პუნქტისათვის მარშრუტის ფორმირება დამთავრებულია). შევადგინოთ $\{n+1, \alpha_{J_1}, \alpha_{J_s}, n+1\}$ სიმრავლე წინა ბიჯზე აღწერილი მეთოდით და ამოვხსნათ მისთვის კომივოიაჟერის ამოცანა. ვთქვათ, $D_{\min}$ კომივოიაჟერის მარშრუტის სიგრძეა. ავიღოთ $L(k+1) = D_{\min}$.

ბიჯი 9. თუ რომელიმე $\beta \in \{1,\dots,k\}$-სთვის და ნებისმიერი $\alpha = 1,\dots,n$ - სთვის გვაქვს $y(\alpha) = z_0(\alpha, \beta)$ (y ემთხვევა ერთს მაინც ადრე აგებული მარშრუტებიდან), გადავიდეთ ბიჯი 10-ზე.

წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღოთ $k = k+1$; $Z_0(\alpha, k) = y(\alpha)$, $\alpha = 1,\dots,n$; (y ვექტორი ჩავწეროთ Z_0 მატრიცის k-ურ სვეტად);

ბიჯი 10. ავიღოთ $R(\alpha) = 0$, $\alpha = 1,\dots,n$; $i = i+1$ და თუ $i \le n$, გადავიდეთ ბიჯი 3-ზე.

თუ $i > n$, გავჩერდეთ. (k-ს მნიშვნელობა ტოლია აგებული ინდივიდუალური მარშრუტების რაოდენობისა; თვითონ მარშრუტები ჩაწერილია

Z_0. მატრიცის პირველ k სვეტში, ხოლო მარშრუტების სიგრძეები ემთხვევა L ვექტორის პირველი k კოორდინატის მნიშვნელობას).

მოყვანილი ალგორითმის მუშაობის შემდეგ აგებული იქნება სიმრავლე (Z_0 მატრიცის სახით), რომელიც შედგება $k \le n$ დასაშვები მარშრუტისაგან. მოვიყვანოთ Z_0 მატრიცის გაფართოების ერთ-ერთი ალგორითმი, სხვა ალგორითმები მოყვანილია [68]-ში.

დასაშვებ მარშრუტთა სიმრავლის გაფართოების ალგორითმი.

ბიჯი 1. ავიღოთ $j = k+1$; $l = 1$;

ბიჯი 2. ავიღოთ $R_1(\alpha) = Z_0(\alpha, l)$, $\alpha = 1,...,n$;

ბიჯი 3. ვიპოვოთ ინდექსი i_1 ისეთი, რომ $i_1 = \min\{\alpha \mid R_1(\alpha) = 0, \alpha = 1,...,n\}$. i_1 პუნქტისათვის y მარშრუტის ასაგებად შევასრულოთ წინა ალგორითმის ბიჯი 3 – ბიჯი 8, როცა $i = i_1$ და $k = j-1$; $R(\alpha) = R_1(\alpha)$, $\alpha = 1,...,n$.

ბიჯი 4. თუ რომელიღაც $\beta \in \{1,...,j-1\}$ და ნებისმიერი $\alpha = 1,...,n$ - სთვის გვაქვს $y(\alpha) = Z_0(\alpha, \beta)$, გადავიდეთ ბიჯი 6-ზე.

წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღოთ $Z_0(\alpha, j) = y(\alpha)$, $\alpha = 1,...,n$;

ბიჯი 5. ავიღოთ $j = j+1$; თუ $j > n_1$, გავჩერდეთ;

ბიჯი 6. მოვახდინოთ ახალი R_1 ვექტორის ფორმირება, შემდეგი წესით, ყოველი $\alpha = 1,...,n$-სთვის ავიღოთ

$$R_1(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } R_1(\alpha) = 0 \text{ და } y(\alpha) = 0; \\ 1, & \text{დანარჩენ შემთხვევაში }. \end{cases}$$

ბიჯი 7. თუ არსებობს α ისეთი, რომ $R(\alpha) = 0$, გადავიდეთ ბიჯი 3-ზე.

ბიჯი 8. თუ $l \le k$, გადავიდეთ ბიჯი 2-ზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში გავჩერდეთ.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ უმცირესი დაყოფის ამოცანას მატრიცისათვის, რომელიც აგებულია ზემოთ მოყვანილი ალგორითმებით, ყოველთვის გააჩნია ამონახსნი. ამიტომ გამართლებულად მიგვაჩნია ამოცანა 1-ის ამოხსნისადმი შემდეგი მიდგომა:

ავაგოთ დასაშვები მარშრუტების სიმრავლე (Z_0 მატრიცის სახით) და ამოვხსნათ უმცირესი დაყოფის ამოცანა მიზნის L ფუნქციით.

ამოცანა 2-ის ამოხსნის ალგორითმი:

იმ შემთხვევაში, როცა $P_i << Q$, $i=1,...,n$ [63]-ში განხილულია ალგორითმი TE, რომელიც აგებს დასაშვები მარშრუტების სიმრავლეს ამოცანა 2 - სათვის და ევრისტიულად დადგენილია ოპტიმალური ამონახსნის ამ სიმრავლეში არსებობა.

ქვემოთ მოვიყვანთ პუნქტების წინასწარი დაჯგუფების ალგორითმს, რომელიც უზრუნველყოფს $P_i << Q$, $i=1,...,n$ პირობის შესრულებას.

დავუშვათ, რომ ცენტრალურ ბაზას აქვს ნომერი 1 და მოხმარების პუნქტები გადანომრილია [63]-ში შემოთავაზებული მეთოდით. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

CT – $(n+2)\times(n+2)$ განზომილების მატრიცა, რომელიც მიღებულია C მატრიცისაგან $(n+2)$-ე სტრიქონის და $(n+2)$-ე სვეტის დამატებით, რომლებშიც ჩაწერილია პუნქტების ნომრები:

$CT(\alpha,n+2)=CT(n+2,\alpha)=\alpha,\quad \alpha=1,...,n+1$;

k_0 - ერთ გამოყოფილ მარშრუტში პუნქტების მაქსიმალური რაოდენობა.

α - პარამეტრი, რომელიც გვიჩვენებს სატრანსპორტო საშუალების საკმარისად (სრულად) დატვირთვას;

b - პარამეტრი, თუ გამოსაკვლევი პუნქტის მოთხოვნა არ აღემატება b-ს, მაშინ ის შესაძლებელია ჩაერთოს იმათ რიცხვში, რომელთათვისაც შემდეგში გამოყენებულ იქნება ალგორითმი TE.

p – n განზომილებიანი ვექტორი პუნქტების მოთხოვნების შესანახად. ჩამოთვლილ ცვლადებს ალგორითმის მუშაობის დაწყების წინ უნდა მიენიჭოს შესაბამისი მნიშვნელობები.

ალგორითმის მუშაობის შედეგად:

ა) ფორმირდება ჯგუფები არა უმეტეს k_0 რაოდენობის ერთმანეთთან „ახლოს" განლაგებული პუნქტებისაგან ისე, რომ სრულდება პირობა:

$$P_0 = mQ + r,$$

სადაც $m \geq 0$ და ან $r=0$, ან $r\in[Q-a\,;Q]$, ან $r\in\,]0;b]$.

ბოლო შემთხვევაში ჯგუფში რჩება i პუნქტი, რომელიც უახლოესია ბაზასთან, მას მიეწერება r მოთხოვნა, და მისთვის გამოყენებულ იქნება ალგორითმი TE. i პუნქტი ჯგუფში რჩება $p(i)-r$ მოთხოვნით.

ყოველი ჯგუფის პუნქტების მომსახურება ხდება ან m, ან $m+1$ მარშრუტით (როცა $r \in [Q-a\,;Q]$).

ბ) აიგება R ვექტორი, რომელიც შეიცავს იმ პუნქტების ნომრებს, რომელთათვისაც იმუშავებს ალგორითმი TE და მოთხოვნების P_1 ვექტორი.

ამრიგად, ამოცანა 2-ის ამოხსნისათვის შემოთავაზებულია შემდეგი მიდგომა: წინასწარი დაჯგუფების ალგორითმით აიგება მარშრუტები, რომლებითაც პუნქტებს მიეწოდებათ ტვირთის მაქსიმალური რაოდენობა, შედეგად ვღებულობთ R და P_1 ვექტორებს, TE ალგორითმის გამოყენებით აიგება დასაშვები მარშრუტების სიმრავლე, რომელთათვისაც იხსნება უმცირესი დაყოფის ამოცანა.

1.3.3. მდგრადობის გამოკვლევის გამოყენება მარშრუტიზაციის ამოცანებში. 1.3.1 პუნქტში დასმული მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოხსნის ალგორითმებში ძირითადი გამოთვლითი რესურსები იხარჯება კომივოიაჟერისა და უმცირესი დაფარვის NP-სრული ამოცანების ამოსახსნელად.

პირველ რიგში განვიხილოთ კომივოიაჟერის ამოცანის ამოხსნის საკითხი. მის ამოსახსნელად შეიძლება გამოყენებულ იქნას ზუსტი, მიახლოებითი (შეფასების მქონე) ან ევრისტიული ალგორითმები. გამოთვლითი ექსპერიმენტები გვიჩვენებს, რომ მცირე განზომილების შემთხვევაში ($n \le 10$), ევრისტიული ალგორითმი „ამოირჩიე მინიმალური რკალი" თითქმის ყოველთვის იძლევა ზუსტ ამონახსნს [61]. მაგრამ მისი გამოყენება დიდი განზომილების შემთხვევაში მისაღებ შედეგებს ვერ იძლევა. საშუალო განზომილების ამოცანების შემთხვევაში ($n \le 100$), შეიძლება შტოებისა და საზღვრების ტიპის მეთოდების სხვადასხვა მოდიფიკაციის გამოყენება, რომელთა გამოთვლითი სირთულე, როგორც ცნობილია ექსპონენციალურია [1,4]. ამიტომ ყოველი პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნით მიღებული შედეგები გამოყენებული უნდა იქნას ამოხსნილ ამოცანასთან გარკვეული აზრით

„ახლოს მდგომი" ამოცანების ამოხსნისას. ანუ სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყოველი ამოხსნილი NP-სრული ამოცანა იძენს არა მხოლოდ ერთჯერადი სარგებლობის „სამომხმარებლო" ღირებულებას, არამედ გარკვეულ ინფორმაციულ ღირებულებას, რომელიც გამოიხატება მიღებული ამონახსნის მრავალჯერად გამოყენებაში.

მარშრუტიზაციის ამოცანების სტრუქტურიდან გამომდინარე, ხშირად ხდება პუნქტებს შორის მანძილების ცვლილება, ანუ კომივოიაჟერის ამოცანის საწყისი მონაცემები (მანძილების მატრიცა) განიცდის ცვლილებებს, ე.ი. გვიხდება „შეშფოთებული" ამოცანის ამოხსნა. ნაშრომებში [30, 31, 33], როცა შეშფოთების ზომად მიღებულია ჩებიშევის მეტრიკა, კომივოიაჟერის ამოცანის ზუსტი ამონახსნისათვის შემოტანილია მდგრადობის ცნება, გამოყვანილია მდგრადობის რადიუსის ფორმულა და დამუშავებულია მისი პოვნის ალგორითმი. იგივე საკითხი ε - მიახლოებითი ამონახსნის შემთხვევაში განხილულია წინამდებარე ნაშრომის 1.1 პარაგრაფში. როგორც ზუსტი, ასევე ε - მიახლოებითი ამონახსნის შემთხვევაში მდგრადობის რადიუსის ზუსტი მნიშვნელობის პოვნა დიდი გამოთვლითი რესურსების გამოყენებას უკავშირდება. ამიტომ აქტუალურია მდგრადობის რადიუსის ქვედა და ზედა შეფასებების პოვნა. მართლაც, თუ ჩვენ ვიპოვეთ α და β რიცხვები ისეთი, რომ $\alpha \le \rho \le \beta$, მაშინ თუ „შეშფოთების" ზომა $\delta < \alpha$, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ საწყისი ამოცანის ნაპოვნი ამონახსნი, „შეშფოთებული" ამოცანისთვისაც იქნება იგივე თვისების (ოპტიმალური ამონახსნი დარჩება ოპტიმალურ ამონახსნად, ε - მიახლოებითი კი ε - მიახლოებითად).

თუ $\delta > \beta$, მაშინ „შეშფოთებული" ამოცანა უნდა ამოიხსნას (რადგან ამონახსნს შეიძლება დაკარგული ჰქონდეს ოპტიმალურობის ან ε - მიახლოებითობის თვისება), ხოლო როცა $\alpha < \delta < \beta$, რადიუსის შეფასებები საჭიროებს დაზუსტებას (თუ ეს შესაძლებელია), ან რადიუსი უნდა გამოითვალოს ზუსტად.

მეორე NP-სრული ამოცანა, რომელიც იხსნება მარშრუტიზაციის ამოცანების ამოხსნისას, არის უმცირესი დაყოფის ამოცანა, რომელიც თავის მხრივ შეიძლება ჩავწეროთ, როგორც ბულის პროგრამირების (1.1.1) ამოცანა:

ვიპოვოთ $\min\langle c,x\rangle$,

შემდეგი შეზღუდვებით

$$\begin{aligned} Ax &= e, \\ x &\in B^n . \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

აქ $A=(a_{ij})$, $a_{ij}\in\{0,1\}$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$; $e=(1,1,\dots,1)\in R^m$. თუ X სიმრავლედ ავიღებთ (1.3.4) პირობით განსაზღვრულ ყველა (0,1) ვექტორის სიმრავლეს, მივიღებთ, რომ უმცირესი დაყოფის ამოცანა (1.1) ამოცანის კერძო შემთხვევაა.

ამიტომ, ამ ამოცანის ამოხსნისას მდგრადობის გამოსაკვლევად შეიძლება ვისარგებლოთ თეორემა 1.1.1-ით. კერძოდ, როცა $\varepsilon=0$ მივიღებთ ოპტიმალური ამონახსნის მდგრადობის რადიუსის გამოსათვლელ ფორმულას. ამ ამოცანისათვის სამართლიანია ყველა თეორემა და შედეგი, რომელიც მიღებულია 1.1 პარაგრაფში, გარდა შედეგებისა 1.1.2, 1.1.3, რაც გამოწვეულია იმით, რომ ამ ამოცანაში ყოველი დასაშვები ამონახსნი არ შეიცავს არანულოვან კომპონენტთა ფიქსირებულ რაოდენობას, ანუ სხვანაირად რომ ვთქვათ, X სიმრავლეზე განსაზღვრულ ერთადერთ U მიმართებას არ წარმოადგენს ტოლობის მიმართება.

აუცილებელია შევნიშნოთ, რომ ოპტიმალური ამონახსნის მდგრადობის რადიუსის ფორმულა სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როცა ამოცანის ამონახსნი ერთადერთია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მდგრადობის რადიუსი იქნება 0-ის ტოლი. როგორც ნაჩვენებია [31]-ში, მრავალი ოპტიმალური ამონახსნის დროს კონკრეტული ამონახსნის მდგრადობის ნაცვლად განიხილება ოპტიმალურ ამონახსნთა სიმრავლის მდგრადობის საკითხი.

თავი II

მრავალკრიტერიალური ამოცანები

§2.1. ბულის პროგრამირების მრავალკრიტერიალური ამოცანები

2.1.1. ამოცანის დასმა და ზოგიერთი ცნობილი შედეგი. ვთქვათ, $X=\{x\}$ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეა და ვთქვათ მოცემულია ასახვა

$$f=(f_1,\ldots,f_p):X\to R_+^P, \qquad (2.1.1)$$

ვიტყვით, რომ $f(x^1)\geq f(x^2)$, თუ $f_i(x^1)\geq f_i(x^2)$, $i=1,\ldots,p$. x^0 წერტილს ეწოდება ეფექტური ან პარეტოს აზრით ოპტიმალური, თუ არ არსებობს ისეთი $x'\in X$ წერტილი, რომ $f(x^0)\geq f(x')$, თანაც $f(x^0)\neq f(x')$. პარეტოს აზრით ოპტიმალურ წერტილთა ან უბრალოდ პარეტოს წერტილთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $P(X)$-ით.

მრავალკრიტერიალური ამოცანა ანუ ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა მდგომარეობს (2.1.1) ვექტორული ფუნქციის ოპტიმალური წერტილების მოძებნაში (ზოგჯერ კმაყოფილდებიან $P(X)$ სიმრავლის ერთი წერტილის მოძებნით). (X,f) P-კრიტერიალურ ამოცანას უწოდებენ დისკრეტულს თუ X სიმრავლე სასრულია, ხოლო უწოდებენ ბულის მრავალკრიტერიალურ ამოცანას თუ $X\subset B^n$. ჩვენ ამ თავში ძირითადად ამ უკანასკნელ შემთხვევას განვიხილავთ.

მრავალკრიტერიალური ოპტიმიზაციის დარგში პირველი შედეგები უკავშირდება პარეტოს სიმრავლის ან მისი ქვესიმრავლის საპოვნელად წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის გამოყენების საკითხის გამოკვლევას.

კარგადაა ცნობილი [45], რომ ნებისმიერი

$$\lambda\in\Lambda=\left\{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_p):\sum_{i\in N_p}\lambda_i=1,\quad \lambda_i>0,\quad \forall i\in N_p\right\}$$

ვექტორისათვის

$$\Phi(\lambda,x)=\sum_{i\in N_p}\lambda_i f_i(x)$$

კრიტერიუმების წრფივი ნახვევის X სიმრავლეზე მამინიმიზირებელი x^* ელემენტი არის ეფექტური წერტილი. შევნიშნოთ, რომ ეს ფაქტი სამართლიანია ნებისმიერი ბუნების (როგორც უწყვეტი, ასევე დისკრეტული) X სიმრავლისათვის, და ის წარმოადგენს საფუძველს უმრავლესობა ალგორითმებისათვის, რომლებიც გამოიყენება დღესდღეობით მათემატიკური პროგრამირების მრავალკრიტერიალური ამოცანებისათვის.

მათემატიკური პროგრამირების ზოგიერთი ამოცანისათვის სამართლიანია შებრუნებული ფაქტიც [45,47]. კერძოდ თუ X ამოზნექილი სიმრავლეა, ხოლო $f(x)$ ვექტორული კრიტერიუმის კომპონენტები ჩაზნექილი ფუნქციებია, მაშინ $x^* \in P(X)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს $\lambda \in \Lambda$, რომლისთვისაც $\Phi(\lambda, x^*) = \min\{\Phi(\lambda, x), x \in X\}$. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ამოზნექილი და კერძოდ წრფივი მრავალკრიტერიალური ამოცანებისათვის წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის გამოყენებით თეორიულად შესაძლებელია X სიმრავლიდან $P(X)$ სიმრავლის გამოყოფა. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ამოცანა ამოხსნადია წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის გამოყენებით.

[56, 57] შრომებში ნაჩვენებია, რომ არსებობს დისკრეტული მრავალკრიტერიალური ამოცანების ისეთი ეფექტური ამონახსნები, რომელთა პოვნაც წრფივი ნახვევის კრიტერიუმით შეუძლებელია. ამდენად, შესაძლებელია საუბარი ასეთი ამოცანების წრფივი ნახვევის კრიტერიუმით ამოუხსნადობაზე.

2.1.2. კრიტერიუმის წრფივი ნახვევის გამოკვლევა ბულის მრავალკრიტერიალური ამოცანისათვის. განვიხილოთ 2.1.1 პუნქტში დასმული ბულის მრავალკრიტერიალური (X, f) ამოცანა. სიმრავლეს

$$Y = f(X) = \{f(x) \in R_+^p : x \in X\}$$

ვუწოდოთ კრიტერიალური ფუნქციის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე. R_+^p კრიტერიალურ სივრცეში განვიხილოთ შემდეგი ამოცანები:

ამოცანა 1.

$$f = (f_1,...,f_p) \to \min, \quad (f_1,...,f_p) \in Y.$$

ამოცანა 2.

$$f = (f_1,...,f_p) \to \min, \quad (f_1,...,f_p) \in coY,$$

სადაც coY წარმოადგენს Y სიმრავლის ამოზნექილ გარსს.

ამოცანა 3.

$$\Phi(\lambda, f) = \sum_{i=1}^{P} \lambda_i f_i \to \min, \quad (f_1,...,f_p) \in Y, \lambda \in \Lambda.$$

აღვნიშნოთ Y^λ-თი ამოცანა 3-ის ამონახსნი ფიქსირებული $\lambda \in \Lambda$-თვის.

შემოვიღოთ სიმრავლე

$$Y^\Lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y^\lambda.$$

თუ R_+^P სიმრავლეზე შემოვიღებთ ნაწილობით დალაგებას

$$y' \prec y'' \quad \Leftrightarrow \quad y_i' \le y_i'' \quad \forall\, i \in N_p,$$

მაშინ ნაწილობით დალაგებული $(Y, \prec)$ სიმრავლის მინიმალურ ელემენტთა სიმრავლე იქნება პარეტოს აზრით ოპტიმალურ წერტილთა $P(X)$ სიმრავლის სახე კრიტერიალურ სივრცეში, აღვნიშნოთ ის $P(Y)$-ით. ე.ი. $f(P(X)) = P(Y)$. ადვილი სანახავია, რომ (X, f) ამოცანის ამოხსნა ექვივალენტურია ამოცანა 1-ის ამოხსნისა.

ჩვენ გვაინტერესებს კავშირი ამოცანა 1-ისა და ამოცანა 2-ის ეფექტურ ამონახსნებსა და ამოცანა 3-ის ოპტიმალურ ამონახსნებს შორის. ჩამოვაყალიბოთ და დავამტკიცოთ რამდენიმე ლემა.

ლემა 2.1.1. სამართლიანია თანაფარდობა

$$[coY]^\Lambda = P(coY).$$

დამტკიცება. X სიმრავლის სასრულობიდან გამომდინარეობს Y სიმრავლის სასრულობა, ამიტომ coY ჩაკეტილი მრავალწახნაგაა. ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს წრფივი პროგრამირების მრავალკრიტე-რიალური ამოცანების წრფივი ნახვევის კრიტერიუმით ამოხსნადობის ცნობილი ფაქტიდან [45]. ■

ლემა 2.1.2. სამართლიანია ტოლობა

$$P(coY) = P(coP(Y)).$$

დამტკიცება. ვთქვათ $y^1 \in P(coY)$ და $y^1 \notin P(coP(Y))$. მაშინ $y^1 \in coY$ და $y^1 \notin coP(Y)$, რადგან $coY \supseteq coP(Y)$ ცხადი ჩართვის ძალით თუ $y' \notin coP(Y)$, მივიღებთ $coY = coP(Y)$. y^1-ის წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი სახით $y' = \sum \alpha_k y^k$, $y^k \in Y$. ვიგულისხმოთ, რომ ყველა $\alpha_k > 0$. მაშინ მოიძებნება ერთი მაინც $y' \in \{y^k\}$ ვექტორი ისეთი, რომ $y' \notin P(Y)$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $y^1 \in coP(Y)$. ავაგოთ ვექტორთა ერთობლიობა $\{z^k\}: z^k = y^k$, თუ $y^k \in P(Y)$ და თუ $y^k \notin P(Y)$, მაშინ z^k-ს როლში ავიღოთ y^k-ს დომინირებადი ნებისმიერი ვექტორი. მაშინ ვექტორი $z^1 = \sum \alpha_k z^k$ დომინირებს y^1 ვექტორს, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ვთქვათ $y^0 \in P(coP(Y))$, მაგრამ $y^0 \notin P(coY)$, მაშინ იარსებებს $y^1 \in P(coY)$ ისეთი, რომ $y^1 \prec y^0$. ეს ნიშნავს $y^1 \in P(coY)$ და $y^1 \notin P(coP(Y))$, და დავუბრუნდებით განხილულ შემთხვევას. ■

ლემა 2.1.3. სამართლიანია თანაფარდობა

$$Y^\Lambda = [P(Y)]^\Lambda.$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$Y^\Lambda \subseteq [P(Y)]^\Lambda. \qquad (2.1.2)$$

ვთქვათ, $y^1 \in [P(Y)]^\Lambda$, მაგრამ $y^1 \notin Y^\Lambda$. მაშინ იარსებებს $y^0 \in Y \setminus P(Y)$ ისეთი, რომ

$$\Phi(\lambda, y^0) < \Phi(\lambda, y^1) \le \Phi(\lambda, y),$$

ყველა $y \in P(Y)$-ისა და რომელიღაც $\lambda \in \Lambda$-სთვის, რაც ეწინააღმდეგება (2.1.2)-ს. ■

ლემა 2.1.4. სამართლიანია შემდეგი

$$Y^\Lambda = [coY]^\Lambda \cap Y.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\lambda \in \Lambda$. ცხადია, რომ $Y^\lambda \supseteq [coY]^\lambda \cap Y$. ვთქვათ $y^1 \in Y^\Lambda$, მაგრამ $y^1 \notin [coY]^\lambda$. მაშინ მოიძებნება $y^0 \in [coY] \setminus Y$, რომლისთვისაც

$$\Phi(\lambda, y^0) < \Phi(\lambda, y^1).$$

(2.1.2)-დან გამომდინარეობს, რომ $y^0 = \sum \alpha_k y^k$, სადაც $\alpha_k \geq 0, \sum \alpha_k = 1$ და $y^k \in Y$. ამასთან $\Phi(\lambda, y^0) < \Phi(\lambda, y^k)$ ყოველი y^k-სთვის $\{y^k\}$-დან. მაშინ

$$\Phi(\lambda, y^0) = \sum \alpha_k \Phi(\lambda, y^0) < \sum \alpha_k \sum_i \lambda_i y_i^k = \sum \lambda_i \sum_i \alpha_k y_i^k = \Phi(\lambda, \bar{y}^0).$$

საიდანაც $Y^\lambda \subseteq [coY]^\lambda \cap Y$ და $Y^\lambda = [coY]^\lambda \cap Y$. თუ ავიღებთ გაერთიანებას $\lambda \in \Lambda$-ს მიმართ მივიღებთ დასამტკიცებელს. ■

ლემების 2.1.1 - 2.1.1.4 საფუძველზე ვღებულობთ, რომ

<u>თეორემა 2.1.1.</u> სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები

$$Y^\Lambda = P(coY) \cap P(Y) \tag{2.1.3}$$

$$Y^\Lambda = P(coP(Y)) \cap P(Y) \tag{2.1.4}$$

და $\qquad Y^\Lambda = P(coY) \cap Y.$

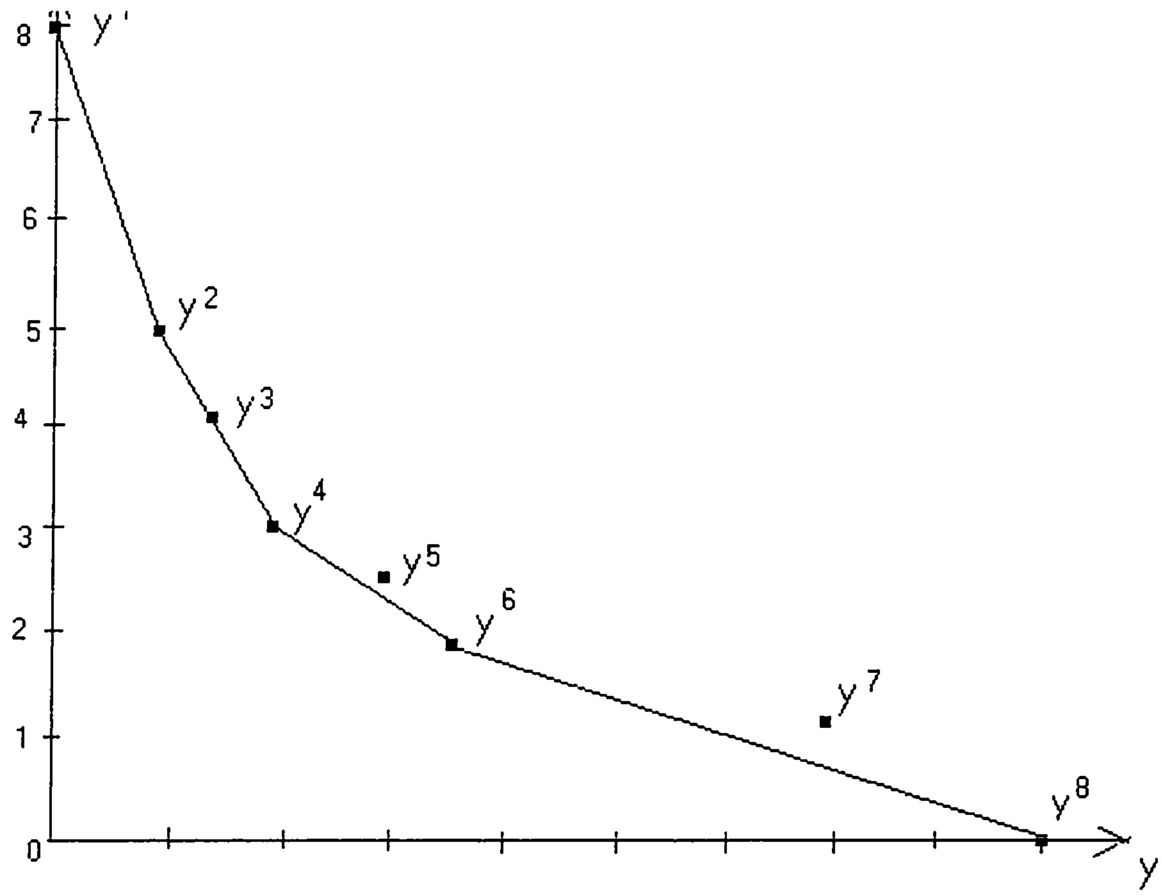
(2.1.5)

(2.1.4) ფორმულა შეიძლება გამოყენებულ იქნას რიცხვითი ექსპერიმენტისათვის ამოცანა1 და ამოცანა3-ის ამონახსნებს შორის თანაფარდობის დასადგენად, კერძოდ $P(Y)$ და Y^Λ სიმრავლეების სიმძლავრეთა თანაფარდობის დასადგენად.

განვიხილოთ წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის გეომეტრიული ინტერპრეტაციის საკითხი. ვთქვათ, $p = 2$ და $P(Y)$ სიმრავლე შედგება სასრული რაოდენობა წერილებისაგან

$$P(Y) = \{y^i\}_{i=\overline{1,8}} = \{(0;8), (1;5), (1.5;4), (2;3), (3;3.5), (3.5;2), (7;1.5), (9;0)\}.$$

$$\Phi(\lambda ., y) = \lambda\, y_1 + (1-\lambda)y_2, \quad \lambda \in (0;1).$$



ნახ.2

შეიძლება ამოვწეროთ λ-ს მნიშვნელობები, რომელთათვისაც y^i წერტილები ეკუთვნიან Y^Λ სიმრავლეს (ან რაც იგივეა, რომელთათვისაც წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის საშუალებით, სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნით ვპოულობთ შესაბამის y^i წერტილს). ნახაზიდან ჩანს, რომ ასეთი λ, y^5 და y^7 წერტილებისათვის არ იარსებებს. დანარჩენი წერტილებისათვის გვექნება გარკვეული შუალედები, ხოლო y^3 წერტილისათვის იარსებებს λ-ს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა. $y^5 \notin Y^\Lambda$ და $y^7 \notin Y^\Lambda$ გამოწვეულია იმით, რომ ეს წერტილები არ ეკუთვნიან coY სიმრავლის საზღვარს (იხ. 2.1.3. ფორმულა). ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ y^{i-1}, y^i წერტილების შემაერთებელი წრფის საკუთხო კოეფიციენტია k_i, მაშინ y^i წერტილი შედის Y^Λ სიმრავლეში თუ $\lambda \in \left[\frac{k_i}{k_i+1}, \frac{k_{i+1}}{k_{i+1}+1}\right]$, პირველი წერტილისათვის გვექნება $\lambda \in \left[\frac{k_n}{k_{n+1}+1}, 1\right]$, ხოლო ბოლო წერტილისათვის $\lambda \in \left[0, \frac{k_2}{k_2+1}\right]$ (ამ მსჯელობისას იგულისხმება, რომ წერტილები დალაგებულია მეორე კოორდინატის კლების მიხედვით).

$p=2$ შემთხვევაში გეომეტრიული სურათიდან ჩანს, რომ y^* წერტილი მოიძებნება წრფივი ნახვევის კრიტერიუმით, თუ არსებობს ამ წერტილზე გამავალი ისეთი წრფე, რომლითაც განსაზღვრულ ნახევარსიბრტყეში (ნახევარსიბრტყე ფიქსირდება ოპტიმიზაციის მიმართულებით) განლაგდება ყველა დანარჩენი წერტილი. ვაჩვენოთ ამ ფაქტის სამართლიანობა ზოგად შემთხვევაში.

__თეორემა 2.1.2.__ $y^* \in Y^{\Lambda}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ იარსებებს $a \in R_p^+$ და $b \in R^+$ ისეთი, რომ

$$\langle a, y^* \rangle = b \text{ და } \langle a, y \rangle - b \geq 0,$$

ყოველი $y \in coY$-სთვის.

__დამტკიცება. აუცილებლობა.__ ვთქვათ $\lambda^0 \in \Lambda$ და $\Phi(\lambda^0, y^*) \leq \Phi(\lambda^0, y)$ ნებისმიერი $y \in Y$-სთვის. მაშინ ლემა 2.1.4-ის ძალით

$$\Phi(\lambda^0, y^*) \leq \Phi(\lambda^0, y), \ \forall y \in coY.$$

ავიღოთ $a_i = \lambda_i^0$, $i = 1,2,...,p$, და $\Phi(\lambda^0, y^*) = b$, მაშინ $a \in \Lambda$ და $b > 0$.

__საკმარისობა.__ ავიღოთ $\lambda_i^0 = \dfrac{a_i}{\sum a_i}$, $i = 1,2,...,p$. ვღებულობთ $\Phi(\lambda^0, y^*) \leq$, $\leq \Phi(\lambda^0, y)$ ყველა $y \in coY$-სთვის. ∎

§2.2. კომპრომისული ამონახსნის მოძებნის საკითხი ბულის მრავალკრიტერიალურ ამოცანებში

2.2.1. ამონახსნის ცნების დაზუსტება მრავალკრიტერიალური ოპტიმიზაციის ამოცანებში. ცნობილია, რომ მათემატიკური პროგ-რამირების და გრაფთა თეორიის მრავალი ექსტრემალური ამოცანისათვის ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლე იმდენად ვრცელია, რომ მისი ელემენტების ჩამოწერაც კი რეალურ დროში შეუძლებელია [54]. ამიტომ გარკვეული უპირატესობა ენიჭებათ მეთოდებს, რომლებიც კონკრეტული ამოცანის სპეციფიკიდან გამომდინარე, ეფექტურ ამონახსნთა სიმრავლი-დან გამოყოფენ ერთს ან რამდენიმეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ინტუიციურად მისაღებ მოთხოვნებს. ეფექტურ ამონახსნს, რომელიც შესაძლებელია არ იყოს ოპტიმალური არც ერთი კრიტერიუმისათვის, მაგრამ მისაღებია კრიტერიუმთა მთელი სიმრავლისათვის უწოდებენ კომპრომისულ ამონახსნს [39]. მისაღების ქვეშ გვესმის შემდეგი: დასაშვებ ამონახსნთა X სიმრავლეში არსებობს ისეთი ამონახსნი, რომლისთვისაც თითოეული კერძო $f_i(x)$ კრიტერიუმისათვის

$$\Delta f_i(x) = f_i(x) - f_i^*$$

გადახრა ოპტიმალური მნიშვნელობიდან არის მინიმალური (აქ და შემდეგ f_i^*-ით აღნიშნულია i-ური კრიტერიუმის ოპტიმალური მნიშვნელობა X სიმრავლეზე). რადგანაც $\Delta f_i(x)$ სიდიდეების უმცირესი მნიშვნელობები, როცა $i \in N_p$ საზოგადოდ ერთი და იგივე დასაშვები ამონახსნისათვის არ მიიღწევა, წარმოიშვება ამ სიდიდეების ერთმანეთთან შედარების აუცილებლობა.

ჩვენ ვუშვებთ, რომ კერძო კრიტერიუმები ტოლფასია და რადგან $f_i(x)$ ფუნქციები საზოგადოდ ასახავენ სხვადასხვა ფიზიკურ თუ ეკონო-მიკურ მაჩვენებელს, საჭიროა შეთანხმება თითოეული ფუნქციის რომელი რაოდენობრივი მახასიათებელი შეიძლება შევადაროთ ერთმანეთს. ამისათვის ყოველ $f_i'(x)$ ფუნქციას შევუსაბამოთ $f_i(x) = a\, f_i'(x) + b$ სახის

ფუნქცია, რომელიც $f_i'(x)$-ს მისცემს უგანზომილებო სახეს. ასეთმა გარდაქმნამ დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლეზე არ უნდა შეცვალოს დალაგების მიმართება, რაც თავის მხრივ არ გამოიწვევს ეფექტურ წერტილთა სიმრავლის შეცვლას. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მიზნის ფუნქციათა $\{f_i(x)\}_i$, $i \in N_p$ და $\{f_i'(x)\}_i$, $i \in N_p$ სიმრავლეები განსაზღვრულნი ალტერნატივათა ერთი და იგივე X სიმრავლეზე ექვივალენტურია. კერძოდ, თუ ნებისმიერი ორი $x^1, x^2 \in X$ ალტერნატივისათვის $x^1 \overset{f}{\succ} x^2$-დან გამომდინარეობს $x^1 \overset{f'}{\succ} x^2$ და პირიქით, $x^1 \overset{f'}{\succ} x^2$-დან გამომდინარეობს $x^2 \overset{f}{\succ} x^1$. ასეთ გარდაქმნად შეიძლება გამოყენებულ იქნას, შემდეგი

$$f_i(x) \to \frac{f_i(x) - f_i^*}{f_i^{\max} - f_i^*}, \quad i \in N_p. \tag{2.2.1}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ასეთი გარდაქმნა ექვივალენტური გარდაქმნაა. აქ, $f_i^* = \min_{x \in X} f_i(x)$, $f_i^{\max} = \max_{x \in X} f_i(x)$, $i \in N_p$. დისკრეტული და კერძოდ ბულის პროგრამირების ამოცანებისათვის სასრული f_i^* და $f_i^{\max}$-ის არსებობის პრობლემა არ დგას. ჩავთვალოთ, რომ $f_i(x)$-ისთვის (2.2.1) გარდაქმნა უკვე შესრულებულია, მაშინ ცხადია, რომ $0 \le f_i(x) \le 1$. სამართლიანია

ლემა 2.2.1 [7]. ყოველი დასაშვები $x \in X$ ამონახსნისათვის, რომლისთვისაც $0 \le f_i(x) \le 1$, $i \in N_p$, არსებობს ისეთი $k_0 > 0$ რიცხვი, რომ x აკმაყოფილებს შემდეგ p ტოლობას

$$f_i(x) = k_0, \quad i \in N_p, \tag{2.2.2}$$

განვიხილოთ სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანა

$$k_0 \to \min$$

$$\lambda_i(x) = \frac{f_i(x) - f_i^*}{f_i^{\max} - f_i^*} \le k_0, \quad i \in N_p, \tag{2.2.3}$$

$$x \in X.$$

თუ (x^*,k_0^*) არის (2.2.3) ამოცანის ამონახსნი, მაშინ x^*-ს ვუწოდოთ საწყისი ამოცანის ამონახსნი. სამართლიანია

<u>*თეორემა 2.2.1.*</u> იმისათვის, რომ $x \in X$, $f_i(x) > 0$, $i \in N_p$ წერტილი იყოს ეფექტური საკმარისია, რომ x^* იყოს

$$\lambda_i(x) \le k_0, \quad i \in N_p, \qquad (2.2.4)$$

უტოლობათა სისტემის ერთადერთი ამონახსნი k_0-ის მინიმალური მნიშვნელობისათვის, რომლისთვისაც (2.2.4) სისტემა თავსებადია.

<u>*დამტკიცება.*</u> დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ (2.2.4) სისტემის ერთადერთი ამონახსნი x^*, $k = k_0^*$-სთვის არ არის ეფექტური. მაშინ არსებობს $x' \in X$ ისეთი, რომ $f_i(x') \le f_i(x^*)$, $i \in N_p$ და ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია. მაშინ $f_i(x') \le f_i(x^*) \le k_0^*$ და ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია. მივიღეთ წინააღმდეგობა x' დასაშვები ამონახსნი აკმაყოფილებს (2.2.4) სისტემას, k_0-სთვის რომელიც არ აღემატება k_0^*-ს.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ (2.2.3) ამოცანის ამონახსნი თუ ერთადერთია, მაშინ ის ეფექტურია და აქვს თვისება: ყოველი f_i კრიტერიუმი ამ წერტილში თანაბრად და მინიმალურად არის გადახრილი თავისი ოპტიმალური f_i^* მნიშვნელობიდან.

იმ შემთხვევაში, როცა (2.2.3) ამოცანას ერთადერთი ამონახსნი არ გააჩნია, მათ შორის აუცილებლად იარსებებს ეფექტური ამონახსნი.

მათემატიკური პროგრამირების მრავალკრიტერიუმიანი ამოცანისათვის (X მოცემულია საზოგადოდ არაწრფივ განტოლებათა და უტოლობათა სისტემით) (2.2.3) ამოცანა წარმოადგენს სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანას, რომლის ამოსახსნელად შეიძლება ცნობილი მეთოდების გამოყენება [18]. მაგრამ როცა X დისკრეტული არეა, მაშინ ასეთი მეთოდების გამოყენება ცნობილ პრობლემებთან არის დაკავშირებული. მომდევნო პუნქტში განვიხილავთ (2.2.3) ამოცანის კერძო შემთხვევას.

2.2.2. კომპრომისული ამონახსნი. ვთქვათ, დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლე წრფივ უტოლობათა სისტემის (0,1) კომპონენტების მქონე ამონახსნებია. ე.ი. ვიხილავთ ამოცანას

$$\left.\begin{aligned} f_i(x)=\langle c^i,x\rangle \to \min\,, \quad i\in N_p \\ A\,x\le b\,, \\ x\in B^n\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.5)$$

სადაც A არის მთელკოეფიციენტებიანი $m\times n$ მატრიცა, ხოლო b m-ვექტორი. გარდაქმნებს, რომლებიც f_i-ებს უგანზომილებო სახეს აძლევენ ამ შემთხვევაში აქვთ სახე:

$$\lambda_i(x)=\frac{\langle c^i,x\rangle-\langle c^i,x^{i(\min)}\rangle}{\langle c^i,x^{i(\max)}\rangle-\langle c^i,x^{i(\min)}\rangle}\,,\quad i\in N_p\,,$$

სადაც $x^{i(\min)}$, i-ური კრიტერიუმის მიმართ ოპტიმალური ამონახსნია, ხოლო $x^{i(\max)}$, ამონახსნია, რომელიც ახდენს იგივე კრიტერიუმის მაქსიმიზაციას. (2.2.5) ამოცანის კომპრომისული ამონახსნი იქნება ისეთი ეფექტური ამონახსნი, რომლისთვისაც ფარდობითი დანაკარგები იქნება მინიმალური, ე.ი.

$$k_1(x)=k_2(x)=\ldots=k_p(x)=k_{0(\min)}\,.$$

ეს ამონახსნი შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი სისტემის ამოხსნით:

$$\begin{gathered}\langle c,x\rangle \ge \langle c^i,x^{i(\min)}\rangle-k_0\left(\langle c^i,x^{i(\min)}\rangle-\langle c^i,x^{i(\max)}\rangle\right),\quad i\in N_p \\ A\,x\le b\,, \\ x\in B^n\,. \end{gathered} \qquad (2.2.6)$$

(2.2.6) სისტემის ამოხსნა ექვივალენტურია ბულის შერეული პროგრამირების შემდეგი ამოცანის ამოხსნის

$$k_0=x_{n+1}\to\min$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{11}\,x_1+\alpha_{12}\,x_2+\ldots+\alpha_{1n}\,x_n+\alpha_{1,n+1}\,x_{n+1}+\beta_1\ge 0\,, \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ &\alpha_{p1}\,x_1+\alpha_{p2}\,x_2+\ldots+\alpha_{pn}\,x_n+\alpha_{p,n+1}\,x_{n+1}+\beta_p\ge 0\,, \\ &a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1\,, \\ &.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ &a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m\,. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.7)$$

$$x_j \in \{0;1\}, \quad j \in N_n,$$

$$\alpha_{ij} = -c'_j, \quad j \in N_n, i \in N_p,$$

სადაც $\alpha_{1,n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j^i \left(x_j^{i(\max)} - x_j^{i(\min)}\right), \quad i \in N_p,$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} c'_j \, x_j^{i(\min)}, \quad i \in N_p.$$

(2.2.7) ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება გამოყენებულ იქნას ცნობილი მეთოდები [64, 65].

ჩვენ განვიხილავთ (2.2.5) ამოცანის ამოხსნის ერთ განსხვავებულ მიდგომას. კომპრომისული ამონახსნის მოსაძებნად განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი. ჩავთვალოთ, რომ (2.2.7) მიზნის ფუნქციაში მონაწილე k_0 პარამეტრია. ყოველ ბიჯზე მოწმდება (2.2.7) ამოცანის (2.2.3) შეზღუდვათა თავსებადობა.

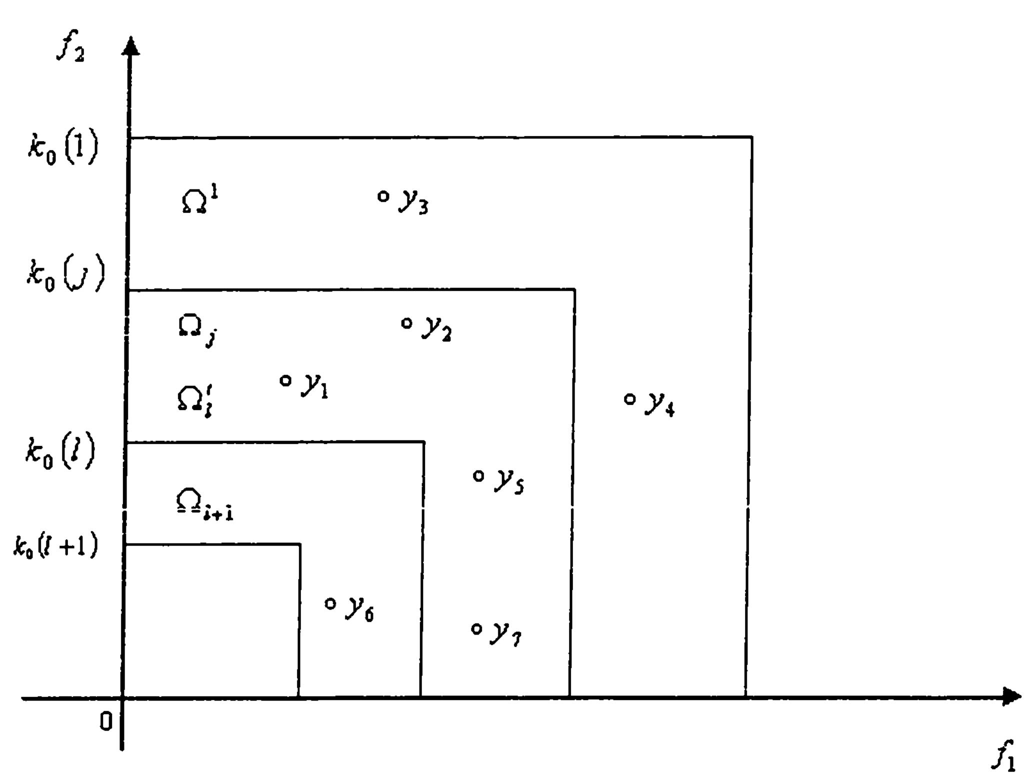
როცა პარამეტრი $k_0 \in (0;1) \to 0$, ფარდობითი გადახრები მიისწრაფიან ნულისკენ, ანუ $f_i(x)$ ფუნქციები მიისწრაფიან თავიანთი ოპტიმალური მნიშვნელობებისაკენ. ხოლო, როცა $k_0 \to 1$, (2.2.3) უტოლობა სრულდება დასაშვებ მნიშვნელობათა მთელს სიმრავლეზე. ვამცირებთ რა k_0-ს, ჩვენ ვამცირებთ ფარდობით გადახრებს ყოველი $f_i(x)$-ის მიმართ, ე.ი. ვუახლოვდებით კომპრომისულ ამონახსნს. იტერაციული პროცესი ჩერდება, თუ მინიმალური $k_0(l)$ (l-იტერაციის ნომერია), რომლისთვისაც (2.2.3) სისტემა ჯერ კიდევ თავსებადია დასაშვებ ალტერნატივათა სიმრავლეზე, განსხვავდება უახლოესი $k_0(l+1)$ მნიშვნელობისაგან არა უმეტეს $\varepsilon \ge 0$-ით, რომლისთვისაც სისტემა უკვე არათავსებადია. ε ითვლება წინასწარ მოცემულად. ამასთან თუ ამონახსნი ერთადერთია, ის იქნება საძებნი ამონახსნი. თუ ამონახსნი არ არის ერთადერთი და ისინი ქმნიან რაღაც $X' \subset X$ სიმრავლეს, მაშინ განვიხილავთ $F(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)$ სახის კრიტერიუმს და ვპოულობთ მის მინიმუმს უკვე X' სიმრავლეზე.

იტერაციული პროცესი ავაგოთ შემდეგნაირად:

ავიღოთ $k_0(1)=\frac{1}{2}$; თუ $k_0(1)$-ისათვის სისტემა თავსებადია, მაშინ ავიღოთ $k_0(2)=\frac{1}{4}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღოთ $k_0(2)=\frac{3}{4}$ და ა.შ. l-ურ ბიჯზე ვამოწმებთ $k_0(l)$-ისათვის სისტემა თავსებადია თუ არა. თუ თავსებადია, მაშინ ავიღოთ მარცხენა შუალედი, თუ არა მარჯვენა შუალედი. ცხადია, რომ $|k_0(l)-k_0(l+1)|=\frac{1}{2^l}$, ამიტომ სასურველი სიზუსტის მისაღწევად საჭიროა იტერაციების რაოდენობა $l\geq -\log_2 \varepsilon$. ამ მსჯელობის გამომდინარეობს, რომ სამართლიანია

<u>*თეორემა 2.2.1.*</u> ბულის პროგრამირებას მრავალკრიტერიალურ ამოცანაში კომპრომისული ამონახსნის $\varepsilon \geq 0$ სიზუსტით საპოვნელად საჭირო დროა $O(-\log_2^{\varepsilon} P(n))$, სადაც n ნატურალური რიცხვია, რომელიც ამოცანის განზომილებას ახასიათებს, ხოლო $P(n)$ დრო, რომელიც საჭიროა სისტემის თავსებადობის გასარკვევად.

მოვიყვანოთ მეთოდის იდეის ილუსტრირება ორი ტოლფასი კრიტერიუმის შემთხვევაში. Ω_j იყოს არე კრიტერიალურ $f_1 o f_2$ სივრცეში, სადაც კრიტერიუმები ღებულობენ მნიშვნელობას ნაკლებს ან ტოლს $k_0(j)$-ზე. ეფექტურ წერტილთა სიმრავლეა $P(Y)=\{y_1, y_6, y_7\}$. კომპრომისული ამანახსნია y_6.



ნახ. 3

§2.3. ბიკრიტერიალური ამოცანები

განვიხილოთ ბულის ბიკრიტერიალური ამოცანა

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \to \min$$
$$x \in X. \tag{2.3.1}$$

პრაქტიკულ ამოცანებში კერძო კრიტერიუმები გვხვდება ძირითადად ორი სახის:

1) $$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j \to \min, \tag{2.3.2}$$

2) $$f_i(x) = \min_{x \in X} \max_j (d_j x_j), \tag{2.3.3}$$

იმის და მიხედვით თუ რა სახის მიზნის ფუნქციები მონაწილეობენ $f(x)$ ვექტორულ მიზნის ფუნქციაში გვხვდება:

MINSUM – MINSUM, *MINSUM – MINMAX* ან *MINMAX – MINMAX* ტიპის ამოცანები.

მოვიყვანოთ თეორემა, რომელიც საშუალებას იძლევა ბულის *MINMAX* ტიპის ამოცანა შეიცვალოს მისი ექვივალენტური *MINSUM* ტიპის ამოცანით.

ვთქვათ, X დასაშვებ ამონახსნთა $(0,1)$ ვექტორების სიმრავლეა. განვიხილოთ ამოცანა:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j^{\chi} x_j \to \min,$$
$$x \in X, \quad x_j \in \{0,1\}. \tag{2.3.4}$$

თეორემა [57]. არსებობს ისეთი ზღვრული მნიშვნელობა $\bar{\chi}$, რომ ყოველი $\chi > \bar{\chi}$ - სთვის (2.3.2) ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნი წარმოადგენს (2.3.3) მიზნის ფუნქციის მქონე *MINMAX* ტიპის ამოცანის ამონახსნს.

აღვნიშნოთ, რომ არსებითია $x_j \in \{0,1\}$ პირობა.

მართლაც, ვთქვათ $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1, \quad x_1, x_2 \ge 0\}$ და განვიხილოთ ამოცანა

$$\max\{2x_1, 3x_2\} \to \min$$
$$(x_1, x_2) \in X.$$

MINMAX ტიპის ამოცანის ამონახსნია $(x_1, x_2) = (0.6\,;0.4)$, ხოლო *MINSUM* ტიპის ამოცანის ამონახსნია $(x_1, x_2) = (0,1)$, ნებისმიერი $\chi \geq 1$-სთვის თუ დავუმატებთ პირობას $(x_1, x_2) \in \{0;1\}$, მაშინ ორივე ამონახსნი იქნება ერთი და იგივე. ამ თეორემიდან გამომდინარე იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ დღეს-დღეობით წრფივი ნახვევის კრიტერიუმის გამოყენება რჩება ეფექტური ამონახსნების პოვნის ერთ-ერთ უმთავრეს მეთოდად, (2.3.1) ამოცანის ამოხსნა შეიძლება დაყვანილ იქნას სკალარული ოპტიმიზაციის ერთპარამეტრიანი ამოცანების ამოხსნაზე

$$\begin{aligned} &\lambda\, f_1 + (1-\lambda\,) f_2 \to \min\,, \\ &x \in X\,, \quad \lambda \in (0;1). \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

2.3.1. მარშრუტიზაციის ბიკრიტერიალური ამოცანა. როგორც პირველ თავში აღვნიშნეთ, მარშრუტიზაციის ამოცანებში ერთ-ერთ საბაზო ამოცანას წარმოადგენს კომივოიაჟერის ამოცანა. ხშირად გვხვდება ორი კრიტერიუმის შემთხვევა, რაც გამოწვეულია საერთო განვლილი გზის მინიმიზაციის აუცილებლობით, და ასევე, ვთქვათ დახარჯული დროის მინიმიზაციის აუცილებლობით, ან კიდევ კომივოიაჟერის მარშრუტში არსებული ყველაზე მაქსიმალური რკალის სიგრძის მინიმიზაციის აუცილებლობით, ასეთი შემთხვევა აღიწერება *MINMAX* ტიპის მიზნის ფუნქციით.

განვიხილოთ კომივოიაჟერის ბიკრიტერიალური *MINSUM – MINSUM* ტიპის ამოცანისათვის ყველა ეფექტური ამონახსნის მოძებნის საკითხი.

მოცემულია მანძილების ორი C_1 და C_2 $n \times n$ მატრიცა. ვიგულისხმოთ, რომ ამ მატრიცების დიაგონალებზე საკმარისად დიდი რიცხვები დგას. როგორც ცნობილია, კომივოიაჟერის მარშრუტი (ციკლი) t შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც გადანაცვლება N_n სიმრავლისა. t ციკლის შესაბამისი დანახარჯების ვექტორი იქნება

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t)).$$

როგორც ცნობილია, კომივოიაჟერის ამოცანის ერთ-ერთ ყველაზე ეფექტურ ალგორითმად ითვლება „შტოებისა და საზღვრების" მეთოდი [64].

ამ მეთოდის ძირითადი იდეების გამოყენებით ავაგოთ კომივოიაჟერის ბიკრიტერიალური ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი.

დაყვანა ეწოდება მატრიცის სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებისაგან ამ სტრიქონის (სვეტის) მინიმალური ელემენტის გამოკლებას. აღვნიშნოთ α_k-თი C_k მატრიცის სტრიქონების მინიმალური ელემენტების ჯამი. შემდეგ მოვახდინოთ დაყვანა სვეტების მიხედვით, შესაბამისად მინიმალური ელემენტების ჯამი აღვნიშნოთ β_k-თი. მაშინ

$$h_k = \alpha_k + \beta_k, \quad k = 1,2,$$

ეწოდება C_k მატრიცის დამყვან მუდმივთა ჯამი. მატრიცას, რომელსაც აქვს არაუარყოფითი ელემენტები და თითოეულ სტრიქონში და თითოეულ სვეტში აქვს ერთ მაინც ნულოვანი ელემენტი, ეწოდება დაყვანილი.

როგორც საზოგადოდ შტოებისა და საზღვრების მეთოდში შეფასებებს და ქვედა საზღვრებს გამოვითვლით ამონახსნის ხის ყოველი წვეროსათვის. ვთქვათ z ხის წვერო. აღვნიშნოთ $w(z)$-ით ვექტორ-ფუნქცია

$$w(z) = (w_1(z), w_2(z)),$$

სადაც $w_k(z)$ არის დანახარჯები z-ში შემავალი ციკლებისათვის. რადგან $w(z)$ გვაძლევს ქვედა საზღვარს, ცხადია, რომ $F(t) \geq w(z)$, z-ში შემავალი ციკლებისათვის.

როგორც კი $F(t) = w(z)$, ე.ი. აგებულია დასაშვები t ციკლი, მოწმდება მისი ეფექტურობა. თუ უკვე აგებულ ციკლებს შორის არ მოიძებნება t' ციკლი, რომლისთვისაც $f_k(t') \leq f_k(t)$, $k = 1,2$ და ერთი უტოლობა მაინც მკაცრია, მაშინ t იქნება ეფექტური. აღვნიშნოთ p_r-ით r იტერაციის შედეგად მიღებულ ეფექტურ ციკლთა სიმრავლე, ხოლო F_r-ით შესაბამისი დანახარჯების ვექტორი:

$$F_r = \{F(t) \mid t \in P_r\}.$$

დაგვჭირდება სიდიდე $\Theta_k(i,j)$, რომელიც გვიჩვენებს თუ როგორ გაიზრდება დანახარჯები თუ $C_k(i,j) = 0$ ელემენტისათვის (i,j) არ შევა ამონახსნში

$$\Theta_k(i,j) = \min_{q \neq i} C_k(q,j) + \min_{l \neq i} c_k(i,l).$$

ალგორითმის აღწერა

შტოებისა და საზღვრების მეთოდის იდეა მდგომარეობს ყველა დასაშვები ციკლების სიმრავლის არაგადამკვეთ ქვესიმრავლეებად დაყოფაში. პროცესი იწყება წვეროთი, რომელიც ყველა დასაშვებ ციკლს მოიცავს. როცა X წვეროში მოხდება განშტოება ორ მომდევნო წვეროდ, წვეროს ახლად არჩეულ ქალაქების წყვილით აღვნიშნავთ X_1-ით, ხოლო აკრძალული წყვილით $\overline{X}_1$-ით. ყოველ ახალ წვეროს შეესაბამება დანახარჯების თავისი ვექტორი. საწყისი წვეროსათვის ეს ვექტორი აიგება შემდეგნაირად; დაიყვანება ორივე მატრიცა და გამოითვლება დამყვან მუდმივთა ჯამი.

დავუშვათ, რომ უკვე განსაზღვრულია X წვერო, რომლიდანაც უნდა მოხდეს განშტოება. ვმოქმედებთ შემდეგნაირად:

1. ავირჩიოთ წყვილი (m,l) შემდეგი განშტოებისათვის. დაბალი დანახარჯები უფრო ალბათურია (i,j) წყვილებისათვის, რომელთათვისაც $C_k(i,j)=0$. ცნობილია, რომ თითოეული მატრიცის მიმართ ოპტიმალური ამონახსნი ეკუთვნის ეფექტურ ციკლთა სიმრავლეს. ამიტომ პროცესი შეიძლება დავიწყოთ ოპტიმალური ციკლის აგებით, რომელიც შეესაბამება ვთქვათ C_1 მატრიცას.

ყოველი (i,j) წყვილისათვის, რომელთათვისაც $C_k(i,j)=0$, გამოითვლება $\Theta_k(i,j)$. (m,l) წყვილად აირჩევა ის, რომლისთვისაც $\Theta_k(m,l)=\max\Theta_k(i,j)$, შემდეგ გამოითვლება $\Theta_k(m,l)$ უკვე განსხვავებული k-სთვის, რომლისთვისაც $C_k(m,l)=0$.

2. ვაწარმოებთ განშტოებას X-დან $\overline{X}_1$-სკენ (წვერო $(\overline{m,l})$). ამ წვეროსათვის შეფასებას ვეძებთ შემდეგი წესით:

ა) თუ $C_k(m,l)=0$,

$$w_k(\overline{X}_1) = w_k(\overline{m,l}) = w_k(X) + \Theta_k(m,l),$$

ბ) თუ $C_k(m,l) \neq 0$,

$$w_k(\overline{m,l}) = w_k(X).$$

ანუ შეფასება არ იცვლება X-დან X_1-სკენ გადასვლისას. თუ შემდგომში X_1 იქნება გამოყენებული განშტოებისათვის, ორივე მატრიცაში (m,l) იქნება აკრძალული და იქ ჩაიწერება ∞.

3. განშტოება X-დან X_1-სკენ, წვერო (m,l). რადგანაც (m,l) წყვილი ფიქსირებულია ამ შტოზე მდებარე ყველა ციკლისათვის, ორივე მატრიცაში m-ური სვეტი და l-ური სტრიქონი ამოიშლება. ქვეციკლების წარმოქმნის ასაცილებლად უნდა ავიღოთ ამ უჯრებში ∞. შესაძლებელია, რომ ამ პროცესის შემდეგ რომელიმე ან ორივე მატრიცა გახდეს დაყვანილი. ვთქვათ, h_k არის დამყვანი მუდმივების ჯამი C_k მატრიცისათვის. [64]-ში ნაჩვენებია, რომ

$$w_k(X_1) = w_k(X) + h_k,$$

ეს ფორმულა სამართლიანია, როცა $C_k(m,l) = 0$, ზოგად შემთხვევაში შეფასებას დავითვლით შემდეგნაირად:

$$w_k(X_1) = w_k(m,l) = w_k(X) + h_k + C_k(m,l).$$

4. ვამოწმებთ, ვიპოვეთ თუ არა წვერო, რომელიც შეიცავს ერთადერთ ციკლს. თუ C_k არის მატრიცა 2×2, გადავიდეთ მე-6 ბიჯზე, თუ არა, მაშინ გადავიდეთ მე-5 ბიჯზე.

5. შევამოწმოთ არსებობს თუ არა ვექტორი $F(t) \in F_r$ ისეთი, რომ $f_k(t) \le w_k(X_1)$ და ერთ-ერთისათვის მაინც თუ სრულდება მკაცრი უტოლობა: ა) თუ ასეთი არსებობს, მაშინ X_1 შემდეგ განხილვაში არ მონაწილებს და გადავდივართ მე-9 ბიჯზე; ბ) თუ ასეთი არ არსებობს, ანუ ციკლები, რომლებიც X_1 წვეროს ეკუთვნიან, არ არის უფრო „ცუდები" ვიდრე ეფექტური ციკლები, ვაგრძელებთ X_1 წვეროსთან მუშაობას, ვირჩევთ განშტოებას მარჯვნივ და გადავდივართ პირველ ბიჯზე.

6. ორივე მატრიცას აქვს 2×2 განზომილება. მაშინ ცალსახად განისაზღვრება ციკლი t და $F(t)$:

$f_k(t) = w_k(X_1)$ და გადავდივართ მე-7 ბიჯზე.

7. ვამოწმებთ, არსებობს თუ არა $F(t^0) \in F_r$ ისეთი, რომ $F(t) < F(t^0)$. თუ ა) ასეთი არსებობს, მაშინ t ეფექტურია, ამიტომ ის შევა P_{r+1}-ში,

$F_{r+1} = F_r \cup \{F(t)\}$. გადავდივართ მე-8 ბიჯზე. ბ) თუ არ არსებობს ასეთი $F(t^0)$, მაშინ t-ს არ დავიმახსოვრებთ, $F_{r+1} = F_r$, გადავდივართ მე-8 ბიჯზე.

8. არსებობს თუ არა წვეროები დაუმთავრებელი (შეუვსებელი) ციკლებით? ისეთები, რომ მათი შეფასებები უკეთესია ან შეუდარებადია ერთ-ერთ $F(t) \in P_{r+1}$-თან. ა) თუ არსებობს, მაშინ გადავიდეთ მე-9 ბიჯზე, ბ) თუ არა, მაშინ P_{r+1} არის ეფექტური ციკლების შესაბამისი დანახარჯების ვექტორთა სიმრავლე. ამონახსნი აგებულია. დამთავრება.

9. ვირჩევთ $\widetilde{X}$ წვეროს, საიდანაც ვიწყებთ შემდეგ განშტოებას.

თუ არსებობს წვერო, რომლის შეფასებათა ვექტორი მინიმალურია დანარჩენ შეუვსებელ წვეროებთან შედარებით, მას ავიღებთ $\widetilde{X}$=ის როლში. თუ ყველა შეუვსებელი წვერო ერთმანეთთან არასადარია, ვირჩევთ ისეთს, რომელსაც შეესაბამება წყვილთა დიდი სიმრავლე.

ალგორითმის სასრულობა გამომდინარეობს ყველა შესაძლო ციკლთა რაოდენობის სასრულობიდან.

2.3.2. არამკაფიო დაფარვის ამოცანის შესაძლებლობითი ანალიზი. 1.3.3 პუნქტში განვიხილეთ უმცირესი დაფარვის ამოცანა. განვიხილოთ ამ ამოცანის შემდეგი განზოგადება. ვთქვათ, მოცემულია $R = \{r_1,...,r_m\}$ და $S = \{S_1,...,S_n\}$ სიმრავლეები, $\widetilde{T}$ იყოს $R \times S$ ნამრავლზე განსაზღვრული არამკაფიო ბინარული მიმართება: $\widetilde{T} : R \times S \to [0;1]$. $\widetilde{T}$ მიმართების აგება უკავშირდება გარკვეულ სუბიექტურ ექსპერტულ შეფასებებს და $\widetilde{T}(r_i, S_j) \equiv a_{ij}$ მნიშვნელობა გაგებულია, როგორც (r_i, S_j) წყვილის გარკვეული არამკაფიო ცნებისადმი მიკუთვნების დონე. მაშინ ყოველი S_j, $j = 1,...,n$-სათვის შეიძლება განვიხილოთ არამკაფიო ქვესიმრავლე $\widetilde{S}_j$ მიკუთვნების შემდეგი ფუნქციით: $\mu_{\widetilde{S}_j}(r_i) = \widetilde{T}(r_i, S_j) = a_{ij}$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$, ანუ $\widetilde{T}$ შეიძლება განხილულ იქნას როგორც R-ზე არამკაფიო ქვესიმრავლეების სისტემა: $\varphi = \{\widetilde{S}_1,...,\widetilde{S}_n\}$.

__განსაზღვრება 2.3.1.__ ნებისმიერ $\varphi' = \{\widetilde{S}_{j_k}\} \subset \varphi$, $k = 1,...,p$ არამკაფიო ქვესიმრავლეთა სისტემას ეწოდება R სიმრავლის არამკაფიო დაფარვა, თუ ნე-

ბისმიერი r_i ელემენტისათვის მოიძებნება $\widetilde{S}_{Jk} \subset \varphi'$ არამკაფიო ქვესიმრავლე ისეთი, რომ $\mu_{\widetilde{S}_{Jk}}(r_i) > 0$.

თუ ყოველ $\widetilde{S}_j \in \varphi$ სიმრავლეს შეესაბამება ღირებულება (წონა) C_j (დადებითი რიცხვი), მაშინ არამკაფიო დაფარვის ამოცანა ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: ვიპოვოთ R სიმრავლის ისეთი არამკაფიო φ' დაფარვა, რომელსაც გააჩნია უმცირესი ღირებულება და არის მაქსიმალურად სანდო. ამრიგად, ოპტიმალური არამკაფიო დაფარვის ქვეშ გვესმის დაფარვა, რომელიც განსაზღვრულია ორი კრიტერიუმის საფუძველზე: 1) დაფარვის ღირებულების მინიმიზაცია, 2) დაფარვის არამკაფიოობით გამოწვეული განუსაზღვრელობის სანდოობის მაქსიმიზაცია. ვღებულობთ დისკრეტული ოპტიმიზაციის ბიკრიტერიალურ ამოცანას. შევნიშნოთ, რომ თუ $\widetilde{T}$-ს ქვეშ გავიგებთ კლასიკურ ბინარულ მიმართებას, მაშინ ჩამოყალიბებული ამოცანა იქცევა ცნობილ მინიმალური დაფარვის ამოცანად [60].

ქვემოთ დავადგენთ დაფარვის საიმედოობის მაქსიმიზაციის შესაბამისი კრიტერიუმის სახეს. ვთქვათ R_0^+-ზე მოცემულია არამკაფიო სიმრავლე განსაზღვრებით „დიდი შეფარდება" $(L-R)$ $\mu_{L-R} : R_0^+ \to [0;1]$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$P_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \mu_{L-R}\left(\frac{a_{ij}}{a_{ik}}\right) \quad i = 1,\dots,m .$$

$$n_{ij} = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \mu_{L-R}\left(\frac{a_{ik}}{a_{ij}}\right) \quad j = 1,\dots,n .$$

დადებითი (P_{ij}) და უარყოფითი (n_{ij}) დისკრიმინაციის ზომების ევრისტიული ინტერპრეტაცია მდგომარეობს შემდეგში: P_{ij} წარმოადგენს აკუმულირებული ნდობის ზომას იმისა, რომ S_j უფრო ინდიკატურია r_i ელემენტისათვის, ვიდრე ყველა დანარჩენი r_l-სთვის $(l = 1,2,\dots,m,\ \ l \neq i)$, მაშინ როდესაც n_{ij} წარმოადგენს ნდობის ზომას იმისა, რომ $\widetilde{S}_j$ უფრო ინდიკატურია არა r_i ელემენტისათვის, არამედ დანარჩენი r_l-ებისათვის $(l = 1,2,\dots,m,\ \ l \neq i)$ არამკაფიო a_{ij} დონეების მიმართ.

ვთქვათ $[0;1]$ სიმრავლეზე მოცემულია ორი არამკაფიო სიმრავლე

1) „დიდი" – მიკუთვნების ფუნქციით $\mu_{Large}:[0;1]\to[0;1]$ და

2) „მცირე" – მიკუთვნების ფუნქციით $\mu_{Small}:[0;1]\to[0;1]$. შემოვიღოთ შემდეგი სიდიდეები:

$$\pi_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}P_{ij},\quad v_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}n_{ij},\quad j=\overline{1,n}.$$

π_j და v_j წარმოადგენს შესაბამისად საშუალო დადებით და უარყოფით დისკრიმინაციულ ზომებს $\widetilde{S}_j$ ელემენტისათვის. $j=1,\dots,n$.

ამის შემდეგ $\{S_1,\dots,S_n\}$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ შესაძლებლობითი განაწილება, რომელშიც გათვალისწინებული იქნება როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი დისკრიმინაციული ზომები (π_j,v_j):

$$\delta_j=\frac{1}{2}\left(\mu_{Large}(\pi_j)+\mu_{Small}(v_j)\right),\quad j=1,\dots,n.$$

δ_j-ს ინფორმაციული აზრი შემდეგია: ის გვიჩვენებს რამდენად შესაძლებელია $\widetilde{S}_j$ ელემენტის ჩართვა ოპტიმალურ დაფარვაში.

ვთქვათ $\varphi'=\{\widetilde{S}_{J_k}\}$ არამკაფიო დაფარვაა. მისი დახასიათება შეიძლება $(0,1)$ ვექტორით $Z_{\varphi'}=(z_1,\dots,z_n)$, სადაც

$$Z_j=\begin{cases}1, & \text{თუ, რომელიღაც } r_k \text{ იფარება } \widetilde{S}_{J_k} \text{ ქვესიმრავლით,}\\ 0, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში .}\end{cases}$$

$Z_{\varphi'}$-ზე განვიხილოთ შესაძლებლობითი განაწილება $\widetilde{\varphi}'\Leftrightarrow\begin{pmatrix}z_1,\dots,z_n\\ \delta_1,\dots,\delta_n\end{pmatrix}$.

რადგანაც Z_j მნიშვნელობები აირჩევა წინასწარ ცნობილი ინფორმაციის გათვალისწინების გარეშე, $Z_{\varphi'}$-ზე შეიძლება განხილულ იქნას თანაბარი ალბათური განაწილება:

$$P_{\varphi'}=\begin{pmatrix}z_1,\dots,z_n\\ \dfrac{1}{n},\dots,\dfrac{1}{n}\end{pmatrix}.$$

ამრიგად, ყოველი არამკაფიო φ' დაფარვისათვის აგებულია შესაძლებლობითი განაწილება $\widetilde{\varphi}'$ და თანაბარი ალბათური განაწილება $P_{\varphi'}$. არამკა-

ფიო სტატისტიკის მეთოდის გამოყენებით არამკაფიო საშუალო $\widetilde{\varphi}'$ განისაზღვრება როგორც მონოტონური ლოდინი (აქ ის მათემატიკურ ლოდინს ემთხვევა).

$$E_{P_{\widetilde{\varphi}'}} \stackrel{def}{\equiv} \int_0^1 P_{\widetilde{\varphi}'}\left(\widetilde{\varphi}' \ge \alpha\right) d\alpha = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} z_j \delta_j \,.$$

აქვე აღვნიშნოთ $E_{P_{\widetilde{\varphi}'}}$ სიდიდე ყოველი φ' არამკაფიო დაფარვის სანდოობის მახასიათებელს. ბუნებრივია გვაინტერესებს არამკაფიო φ' დაფარვის სანდოობის მაქსიმიზაცია, ამიტომ ვღებულობთ კრიტერიუმს

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \delta'_j \to \max\,,$$

სადაც $\delta' = \left(\frac{\delta_1}{n},\ldots,\frac{\delta_n}{n}\right)$.

საბოლოოდ, არამკაფიო დაფარვის ამოცანა დაიყვანება ($MINSUM-MINSUM$) ტიპის ბიკრიტერიალურ ამოცანამდე:

$$f_1 = \sum_{j1}^{n} c_j z_j \to \min\,,$$

$$f_2 = \sum_{j1}^{n} \alpha_j z_j \to \min\,,$$

სადაც $\alpha_j = A - \delta'_j$, სადაც A რაღაც მუდმივია, რომლის განსაზღვრაც ადვილად შეიძლება.

თუ X წარმოადგენს ბულის ყველა ვექტორის სიმრავლეს, რომლებიც დაფარვის ამოცანის შეზღუდვებს აკმაყოფილებენ, მაშინ ამოვხსნით, რა სკალარული ოპტიმიზაციის ამოცანას

$$\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2 \to \min\,, \quad (z_1,\ldots,z_n) \in X, \quad \lambda \in (0;1),$$

მივიღებთ პარეტოს სიმრავლის გარკვეულ ელემენტებს. პრაქტიკულ ამოცანებში შეიძლება შემოვიფარგლოთ კომპრომისული ამონახსნის მოძებნით. თითოეული f_1 და f_2 კრიტერიუმის მიმართ ვიპოვოთ ოპტიმალური და მასთან ახლოს მდგომი ამონახსნები, აღვნიშნოთ მიღებული სიმრავლეები შესაბამისად X_1 და X_2-ით. ბიკრიტერიალური ამოცანის ამონახსნის ქვეშ გავიგოთ თანაკვეთა $X_1 \cap X_2$.

ლიტერატურა

1. Пападимитриу Х., Стайглищ К. Комбинаторная Оптимизация. Алгоритмы и сложность. М., Мир, 1985.
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. М., МЦНМО, 2000.
3. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев., Наукова думка, 1988.
4. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., Мир, 1982.
5. Авен О.У., Гурин Н.Н., Коган Я.А. Оценка качества и оптимизация вычислительных систем. М., Наука, 1982.
6. Якубайтис Э.А. Информационно-вычислительные сети. М., Финансы и статистика, 1984.
7. Михалевич В.С., Волкович В.А. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М. Наука, 1982.
8. Robinson S. A characterisation of stability in linear programming. – “Oper. Res.” 1977, v.25, N3, 412-417.
9. Ашманов С.А. Линейное программирование. М., Наука. 1981.
10. Швартин С.М. Общая задача устойчивости для некоторых классов задач линейного программирования. – «Доклады АН СССР», 1985, Т.25, №1, 56-59.
11. Швартин С.М. Исследование устойчивости транспортных задач. – Журн. Выч. Мат. и Мат. Физ. 1978, т. 18, №1, 235-240.
12. Evans I.P., Gould F.I. Stability in nonlinear programming. “Oper. res.”, v18, 1970, 107-118.
13. Астафьев Н.Н. Линейные неравенства и выпуклость М. Наука, 1979.
14. Астафьев Н.Н. Устойчивость и маргинальные значения задачи выпуклого програмирования Сиб. Мат. Журн. – 1978. -19, №3, 92-98.
15. Федоров В.В. Численные методы максимина – М., Наука, 1979.
16. Тадумадзе Т.А. Некоторые вопросы качественной теории оптимального управления. Тбилиси, Изд-во Тбилисского Университета, 1983.

17. Харатишвили Г.Л., Тадумадзе Т.А. Регулярные возмущения в задачах оптимального управления с переменными запаздываниями и со свободным правым концом. ДАН СССР, 1990, т.314, №1, 151-155.
18. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М., Наука, 1981.
19. Математическая оптимизация: вопросы разрешимости и устойчивости. М., МГУ, 1986.
20. Sensitivity, stability and parametric analysis. "Math. progr. study", 1984, 21, I-VI.
21. Молодцов Д.А. Устойчивость принципов оптимальности. М., Наука, 1987.
22. Intrator J., Paroush J. Sensitivity analysis of the classical transportation problem. "Comput. and Oper. Res." – 1977, N3, 213-226.
23. Rohn J. On Sensitivity of the optimal value of a linear program. "Econ. Math. Obz." – 1989, 25, N1, 105-107.
24. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации. «Кибернетика и системный анализ», 1993, №3, 93-97.
25. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н. О решении одной задачи параметрического програмирования. «Кибернетика», 1982, №3, 80-84.
26. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. Вопросы устойчивости, параметрический и постоптимальный анализ задач дискретной оптимизации. «Кибернетика», 1983, №3, 73-80.
27. Сергиенко И.В., Филоненко Н.В. Решение нокоторых задач устойчивости в целочисленном линейном програмировании. «Доклады АН УССР», 1982, №6, 79-82.
28. Каспшицкая М.Ф. устойчивость решения в задаче коммивояжера. «Кибернетика», 1986, №3, 121-122.
29. Козерацкая Л.Н. Област устойчивости одной задачи целочисленного програмирования. . «Докл. АН УССР, Сер А.», 1986, №2, 42-44.
30. Леонтьев В.К. Устойчивость задачи коммивояжера. – Журн. выч. мат. и мат. физ., 1975, т15, 129-137.
31. Леонтьев В.К. Устойчивость в линейных дискретных задачах. – В. сб. : «Проблемы кибернетики», М., «Наука», 1979, вып 35, 169-184.

32. Леонтьев В.К., Гордсев Э.Н. Качественное исследование траекторных задач. Кибернетика, 1986, №5, 82-90.
33. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К., Сигал И.Х. Вычислительные алгоритмы для нахождения радиуса устойчивости в задачах выбора. Журнал выч. мат. и мат. физики. 1983, т.23, №4, 973-979.
34. Гордеев Э.Н. Алгоритмы полиномиальной сложности для вычисления радиуса устойчивости в двух классах траекторных задач. Журнал выч. мат. и мат. физики., 1987, т. 27, №7, 984-992.
35. Гордеев Э.Н., Мамутов К.Х. Устойчивость в траекторных задачах на узкие места для широкого класса метрик. Автоматика и телемеханика, 1988, №1, 45-52.
36. Леонтьев В.К., Мамутов К.Х. Устойчивость решений в задачах линейного булева програмирования. «Журнал вычисл. мат. и мат. физики». 1989, т.28, №10, 14-17.
37. Мамутов К.Х. Некоторые вопросы устойчивости дискретных экстремальных задач. – Автореферат диссертации на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук, М., ВЦ АН СССР, 1985.
38. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Использование исследования устойчивости для решения задач выбора. – М., ВЦ АН СССР, 1987.
39. Василенко С.И. Об одной задаче теории расписаний. «Журн. Вычисл. мат. и мат. физики», 1983, т.23, №3, 713-718.
40. Сотсков Ю.Н. Устойчивость оптимальных по быстродействию расписаний. «Журн. Вычисл. мат. и мат. физики». 1989, т.29, №5, 723-731.
41. Сотсков Ю.Н., Алюшкевич В.Б. Устойчивость оптимальной ориентации ребер смешанного графа. «Докл. АН БССР», 1988. т.32, №2, 108-111.
42. Карась В.М. Устойчивость приближенных решений задачи разбиения графа. «Автоматика», 1987, №3, 72-76.
43. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М. Наука. 1982.
44. Борисов В.И. Проблемы векторной оптимизации. – В кн. Исследование операций. Метологические аспекты. – М. Наука, 1972.

45. Карлин С. Математические методы в теории игр, програмировании и экономике, М. Мир. 1964.
46. Zeleny M. Linear Multiobjective Programming. Springer, Berlin, 1974.
47. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М., Наука, 1971.
48. Мойсеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. - М., Наука, 1975.
49. Салуквадзе М.Е. Задачи векторной оптимизации в теории управления. – Тбилиси. Мецниереба. – 1975.
50. Zhukovskiy V.I. and Salukvadze M.E. The Vector – Volued Maximin. – Academic Press, New York. – 1993.
51. Салуквадзе М.Е. О задаче линейного программирования с векторным критерием качества. Автоматика и телемеханика, 1972, №5, 99-105.
52. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальная оптимизация систем в условиях непольной информации. – М., МНИИПУ. 1990.
53. Майсурадзе В.Г. Нескалярная оптимизация в упорядоченных в пространствах. Дис. кандидата физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1998.
54. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Сложность дискретных многокритериальных задач. Дискретная математика, 1994, т.б., выпуск 1, 3-33.
55. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Многокритериальные задачи об остовах графа. ДАН СССР (1988), 198, №3.
56. Емеличев В.А., Перепелица В.А. Польные задачи многокритериальной дискретной оптимизации. Сообщения АН ГССР. (1988) 131, №3, 501-504.
57. Burkard R.E., Krarup J., Pruzan P.M. Efficienci and optimality in minisum, minimax 0-1 programming problems. J. Oper. Res. Soc. (1982) 33, N2, 137-151.
58. Burkard R.E., Keiding H. A relationship between optimality and effeciency in multicriterua 0-1 programming problems. Comput. Oper. Res. (1981) 8, N2, 241-247.
59. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. М., 1986.
60. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход., Мир, 1978.
61. Бородин В.В., Габович Е.Я., Меламед И.И. Исследование еффективности некоторых эвристических алгоритмов решения задач маршрутизации. В кн. Управление транспортными процессами. М., ЦЭМИ, 1977.

62. Magnanti T.L. Combinatorial Optimization and Vehicle Fleet Planning: Perspectives and Prospects. Networks, v11 (1981).

63. Rohde M. Ein “Lösungsansattz für eine klasse von Tourenplanungsproblem: Ein-Depot-Falle”. Proc. Operat. Res. 9. DGOR. Würzburg; Wien 1980.

64. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное програмирование. – М. Наука, 1969.

65. Ковалёв М.М. Дискретная оптимизация. – Минск, БГУ, 1977.

66. Ghvaberidze B. Stability of Approximate Solutions of Boolean Optimization Problems. Bull. Georg. Acad. Sci., 167, 2, 2003, 219-222.

67. Гваберидзе Б.В., Мачаидзе З.А. Вычисление радиуса устойчивости в задаче о найменьшем разбиении. Прикладные проблемы управления макросистемами. Тезисы докладов, - М. 1989, 7-8.

68. Ананиашвили Н.Г. Гваберидзе Б.В., Мачаидзе З.А., Цинцадзе З.А. О приближенном решении одного класса задач маршрутизации. Некоторые задачи газогидродинамики и вопросы газификации. – Тбилиси: изд. ТГУ, 1986, 24-40.

69. Gvaberidze B. On a Stability of a Solution of the Travelling Salesman Problem. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics. 1999, vol 14, 3, 24-25.

70. Гваберидзе Б. Об исследовании линейной свёртки критериев в многокритериальном булевом программировании. Proceedings of Javakhishvili Tbilisi State University; Applied Mathematics and Computer Sciences, 2001, vol 343(21), 15-20.

71. Sirbiladze G., Ghvaberidze B. Possibilistic Analysis of the Fuzzy Covering Problem. Bull. Georg. Acad. Sci. 167, 1, 2003, 47-50.