ს ა ქ ა რ თ ვ ე ლ ო ს ტ ე ქ ნ ი კ უ რ ი უ ნ ი ვ ე რ ს ი ტ ე ტ ი

ნინო სვანიძე

მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემების ზოგიერთი გამოყენება საიმედოობის თეორიაში

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

01.01.08. - მათემატიკური კიბერნეტიკა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ტექნიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი ივერი კაკუბავა

თბილისი

2004

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თავი III

მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემა ორი ტიპის მომსახურებით

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემები (სისტემები განაცხადთა სასრული წყაროთი) წარმოადგენენ შედარებით ახალ მათემატიკურ მოდელებს, რომელთა წარმოშობაც განაპირობა ტექნიკური სისტემების მათემატიკური მოდელირების აუცილებლობამ. რთული ტექნიკური სისტემების საიმედოობის მაჩვენებლების პოვნის ამოცანა, რომლებშიც მტყუნებები და აღდგენები ხდება ალბათური კანონებით, მოითხოვენ სასრული წყაროების მოდელების ზოგიერთი მახასიათებლების კვლევას.

მასობრივი მომსახურების თეორიაში ჩაკეტილი სისტემები შედარებით ნაკლებად არის შესწავლილი. ამის მიზეზია შესაბამისი ანალიზური მოდელების აგებისა და გამოკვლევის სირთულეები. თანამედროვე ტექნიკური სისტემების ანალიზური მოდელების აგებისა და კვლევისას საჭიროა ორი ძირითადი ასპექტის გათვალისწინება, რომლებიც განსაზღვრავენ მოდელის უნივერსალობას, ადეკვატურობას და სიზუსტეს, ასევე მათი მეშვეობით გათვლილი შედეგების მიღების ოპერატიულობას. ეს ასპექტებია: სტრუქტურულ-ფუნქციონალური ასპექტი, რომელიც ასახავს მომსახურების პროცესის სტრუქტურული და ფუნქციონალური ორგანიზაციის თავისებურებებს და ალბათურ-სტატისტიკური ასპექტი, იმ სტატისტიკურ კანონზომიერებათა ერთობლიობის გამოსახატავად, რომელიც ახასიათებს სისტემას შემთხვევითი გარემოს ზემოქმედების შედეგად.

სტრუქტურულ-ფუნქციონალური ასპექტი ეხება მოდელების ორიგინალებთან მაქსიმალურად მიახლოების საკითხებს. ტექნიკის განვითარების თანამედროვე ეტაპზე ეს ნიშნავს მომსახურების სისტემის საკმაოდ რთული ობიექტის განხილვას, როგორც მათი სტრუქტურული ორგანიზაციის, ასევე მათი ფუნქციონირებისა და მართვის ალგორითმების თვალსაზრისითაც.

ალბათურ-სტატისტიკური ასპექტი ასახავს მკვლევართა მცდელობას მაქსიმალურად მიაახლოვონ გარეგნული ზემოქმედების შედეგად წარმოქმნილი

შემთხვევითი პროცესების მოდელებში ალბათურ-დროითი მახასიათებლები რეალურ, პრაქტიკულად გავრცელებულ სისტემებთან. ამ დროს მხედველობაში მიიღება განაცხადის წარმოქმნის, შემოსვლის, გასვლის, ასევე ტექნიკურ საშუალებათა მტყუნებების, მათი აღდგენის, კონტროლისა და დიაგნოსტიკის პროცესები და სხვა.

წინამდებარე ნაშრომის **კვლევის ობიექტს** წარმოადგენს მრავალელემენტიანი დარეზერვებული აღდგენადი სისტემები. საკვლევი ობიექტების მათემატიკური მოდელირების საჭიროებისათვის აგებულია მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემები. ეს მოდელები მათი აგებისა და კვლევის მეთოდებით, და უპირველეს ყოვლისა, განხილულ სისტემებში რიგების რაოდენობრივი ანალიზი შეადგენს ნაშრომის **კვლევის საგანს**.

ნაშრომის **ძირითად მიზანს** შეადგენს იმ სიდიდეების განსაზღვრა, რომლებიც საჭიროა ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოსახსნელად. აღნიშნული მიზნიდან გამომდინარე ნაშრომის **ძირითადი ამოცანებია:** 1) სხვადასხვა ტიპის დარეზერვებული სისტემების მათემატიკური მოდელების აგებისა და კვლევის მეთოდების შემუშავება; 2) მომსახურების სისტემების ალბათურ-დროითი მახასიათებლების ანალიზი და მათი გავლენის შეფასება ფუნქციობის ეკონომიკურ მახასიათებლებზე.

ნაშრომის **პირველი თავი** ეძღვნება მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემების შესახებ გამოკვლევების ანალიზს და მჟღავნდება ზოგიერთი ამოუხსნელი ამოცანა ამ სფეროში. განხილულია კვლევისას გამოყენებული ანალიზის მეთოდები.

მეორე თავში შესწავლილია მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემა ერთი ტიპის მომსახურებით. იგი წარმოადგენს მრავალელემენტიანი დარეზერვებული აღდგენადი სისტემის მოდელს, რომელშიც ფუნქციონირებს ერთი აღმდგენი ორგანო. აღდგენის დრო ზოგადი კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა. მტყუნებული ძირითადი ელემენტის ადგილზე ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტის გადართვა ხდება მყისიერად. მოდელის

სტრუქტურული სირთულე გამოიხატება იმაში, რომ იგი აგებული და გამოკვლეულია ძირითად და სარეზერვო ელემენტთა ნებისმიერი რაოდენობისათვის. სისტემის ეფექტიანობის შესაფასებლად მოყვანილია ეკონომიკური კრიტერიუმი, რომლის საფუძველზე შეირჩევა სარეზერვო ელემენტების ოპტიმალური რაოდენობა მინიმალური დანახარჯის მისაღებად. მიღებულია ცხრილები და დიაგრამები, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია რეალური ტექნიკური სისტემების ეფექტიანობისა და საიმედოობის მახასიათებელთა გაანგარიშება და შეფასება და მათ საფუძველზე ოპტიმალური საპროექტო გადაწყვეტილების მიღება.

შესწავლილია მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემა მომსახურე ორგანოს არასისტემური დაყოვნების გათვალისწინებით. აღნიშნული სისტემა სხვადასხვა ტიპის მრავალელემენტიანი დარეზერვებული ტექნიკური სისტემის ადეკვატური მოდელია. წარმოდგენილი მოდელი ითვალისწინებს იმ გარემოებას, რომ დროის რაიმე შემთხვევით ინტერვალებში აღმდგენი ორგანო შესაძლებელია ვერ ასრულებდეს აღდგენის ოპერაციას. ასეთ ინტერვალებში ის იმყოფება სწორედ “პასიურ“ მდგომარეობაში. პასიურ მდგომარეობაში ყოფნა შეიძლება გამოწვეული იმით, რომ აღმდგენი ორგანო დაკავებულია უფრო მაღალი პრიორიტეტის მოთხოვნათა მომსახურებით, ან იმყოფება არაქმედუნარიან მდგომარეობაში და ა.შ. აგებულია სისტემის ანალიზური მოდელი და ის გამოკვლეულია სტაციონარულ რეჟიმში.

მესამე თავში განვიხილავთ მრავალელემენტიან დარეზერვებულ სისტემას, რომელშიც გათვალისწინებულია გადართვის დროის მახასიათებლები. სახელდობრ, იგულისხმება, რომ ეს დრო ნულისაგან განსხვავებული შემთხვევითი სიდიდეა. სისტემის ანალიზური მოდელის აგებისას, რომელიც წარმოადგენს მასობრივი მომსახურების სისტემას ორი ტიპის მომსახურებით, მხედველობაში მიიღება როგორც მისი სტრუქტურული სირთულე, რაც იმაში გამოიხატება, რომ ძირითად, სარეზერვო ელემენტთა და მომსახურე ორგანოთა რაოდენობა ნებისმიერია, ასევე ალბათურ-სტატისტიკური მახასიათებლების მიახლოება რეალური სისტემებთან. ეს უკანასკნელი იმაში

მდგომარეობს, რომ მომსახურების სისტემების განხილვისას მომსახურების იმ ტიპისათვის, რომლისთვისაც ფუნქციონირებს ერთი მომსახურე ორგანო მომსახურების დროის განაწილების ფუნქცია ზოგადია, ამ დროს კი მეორე ტიპის მომსახურებას ახდენს რამდენიმე მომსახურე ორგანო და მათთვის მომსახურების დრო ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა. მიღებული მოდელის სირთულის გამო ვერ ვახერხებთ ზოგადი ამონახსნის ჩაწერას, თუმც დარეზერვებული სისტემის განხილვისას რამდენიმე გადამრთველითა და ერთი აღმდგენით მიღებული კერძოწარმოებულიან თუ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის მოგვყავს სისტემის ამოხსნის სქემა ზოგადი შემთხვევისათვის. დარეზერვებული სისტემისათვის ერთი გადამრთველითა და რამდენიმე აღმდგენით მოდელს ვადგენთ ზოგადი შემთხვევისათვის, მაგრამ ამონახსნების ჩაწერას ვახერხებთ ალბათური მსჯელობების საფუძველზე მხოლოდ ერთი კერძო შემთხვევისათვის. აღსანიშნავია, რომ მსგავსი ტიპის ექსპონენციალური მოდელებიც კი არ გვხვდება სამეცნიერო ლიტერატურაში, ჩვენ კი განვიხილავთ არაექსპონენციალური მოდელებს მრავალელემენტიანი დარეზერვებული სისტემებისა აღმდგენებითა და გადამრთველებით და ეს მოდელები პირველად განიხილება ჩვენს მიერ.

ჩატარებული გამოკვლევები საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ დაპროექტუბისა და მართვის ყველაზე ეფექტიანი მეთოდის არჩევა, აგრეთვე ამ მეთოდების გონივრული შეხამება განსახილველი ტექნიკური სისტემების სტრუქტურული და ფუნქციონალური თავისებურებების გათვალისწინებით. შემუშავებული მოდელების უნივერსალურობისა და ადეკვატურობის მაღალი დონე განაპირობებს მათ მაღალ სამომხმარებლო ეფექტიანობას.

თავი I.

თეორიულ კვლევათა მიმოხილვა მასობრივი მომსახურების თეორიაში და ძირითად ამოცანათა დასმა

1.1. ნაშრომში გამოყენებული ზოგადი ცნებები, ძირითად საკითხთა ფორმულირება

მასობრივი მომსახურების სისტემების (მმს) ქვეშ იგულისხმება რთული სისტემების კლასი, რომელიც გამოიყენება სისტემაში შემოსული ნებისმიერი ტიპის განაცხადების მომსახურებისათვის. ზოგად შემთხვევაში ინტერესს წარმოადგენს არა განაცხადის ფიზიკური შინაარსი ან მომსახურების პროცესის დეტალური ტექნოლოგია, არამედ მხოლოდ მისი დროითი მახასიათებლები. მასობრივი მომსახურების სისტემის ძირითადი ელემენტებია განაცხადების წყარო, შემავალი ნაკადი და მომსახურე ორგანოები. გარდა ამისა, მასობრივი მომსახურების სისტემა ხასიათდება მომსახურების პროცესით, რიგის სტრუქტურით და მომსახურების დისციპლინით.

განაცხადთა წყარო განიხილება როგორც მოწყობილობა ან ჯგუფი მოწყობილობებისა, რომელთაგან სისტემაში შედის განაცხადები მომსახურებისათვის. განასხვავებენ ორი ტიპის წყაროს: წყაროები, რომელთა მოქმედება ნაკლებად არის დამოკიდებული მომსახურების სისტემაზე და მისგან გამოსული განაცხადების ბედზე (ამასთან განაცხადების წყაროსა და მომსახურების სისტემას შორის კავშირი შემოისაზღვრება მხოლოდ წყაროდან სისტემაში განაცხადების შესვლის ფაქტით); წყაროები, რომელთა მოქმედება იცვლება იმასთან დაკავშირებით, ემსახურებიან მათ თუ არა, ე.ი. ორგანულადაა დაკავშირებული მომსახურების სისტემასთან.

პირველი ტიპის წყაროს უწოდებენ უსასრულოს, ხოლო მეორეს - სასრულს. წყაროების შესაბამისად სისტემები არიან ღია ან ჩაკეტილი. უსასრულო წყაროს ტიპიურ მაგალითს წარმოადგენს კოსმოსური ნაწილაკების წყარო, ჩაკეტილი სისტემების (სასრული წყაროთი) მაგალითია სატელეფონო

სისტემები აბონენტების მცირე რიცხვით, რადიოელექტრონული სისტემები აღდგენადი ელემენტებით (განაცხადების წყაროა დაზიანებული ელემენტები) და სხვა.

შემავალი ნაკადი წარმოადგენს განაცხადების ერთობლიობას, რომლების სისტემაში შემოდის წყაროდან და საჭიროებს მომსახურებას. ვთქვათ სისტემაში განაცხადების შემოსვლის მომენტებია $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$. დროის ინტერვალები ყოველ ორ მომდევნო განაცხადის შემოსვლის მომენტს შორის $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ შემთხვევითი სიდიდეებია $F(x) = P\{\tau_k \le x\}$ განაწილების ფუნქციით იმ დაშვებით, რომ τ_k ერთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი სიდიდეებია. ხშირად ითვლება, რომ $F(x)$ არის განაწილების ექსპონენტური ფუნქციაა ე.ი. $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, სადაც $\frac{1}{\lambda}$ არის საშუალო დრო ორი მომდევნო განაცხადის შემოსვლის მომენტებს შორის. ამ შემთხვევაში t დროის განმავლობაში შემოსული განაცხადების განაწილება $n(t)$ არის პუასონური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე და $P\{n(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t)$. პუასონური ნაკადი კი უმარტივესი ნაკადია და მას ახასიათებს სტაციონარულობა, ორდინარულობაა და მერმექმედების არქონა. λ სიდიდეს ნაკადის პარამეტრი ეწოდება და უმარტივესი ნაკადის შემთხვევაში იგი ნაკადის ინტენსივობის ტოლია.

ვარაუდი იმისა, რომ შემავალი ნაკადები უმარტივესია რეალურ სიტუაციებში ყოველთვის არ სრულდება. კერძოდ, თუ განაცხადების წყარო სასრულია და ყოველი განაცხადი შეიძლება იმყოფებოდეს მხოლოდ ორ მდგომარეობაში – მუშა მდგომარეობაში ან მოითხოვდეს აღდგენას, მაშინ განაცხადთა ნაკადი უკვე აღარ არის უმარტივესი. იმ შემთხვევაში როცა განაცხადების წყარო სასრულია, შემავალი ნაკადი განისაზღვრება შემდეგნაირად: განვიხილოთ რამე განაცხადი, რომელიც ეკუთვნის წყაროს. ეს განაცხადი წყაროში რაღაც τ_1' შემთხვევითი დროის ყოფნის შემდეგ პირველად დგება მომსახურებაზე. მომსახურების შემდეგ ის ბრუნდება წყაროში და რჩება

იქ τ_2' შემთხვევითი დროის განმავლობაში, სანამ მეორედ დადგება მომსახურებაზე. ზოგად შემთხვევაში, ის იმყოფება წყაროში τ_k' შემთხვევითი დროის განმავლობაში და შემდეგ კვლავ იგზავნება მოსამსახურებლად. ვთქვათ, $F(x) = P\{\tau_k' \leq x\}$. იმის მაგივრად რომ განისაზღვროს განაცხადების შემავალი ნაკადი ორი მომდევნო განაცხადის შემოსვლის მომენტებს შორის ინტერვალის საშუალებით, რომელიც მოიცემა როგორც τ_k' დროის ინტერვალების განაწილების ფუნქციით, ასევე წყაროს მოცულობით, შემავალ ნაკადს განვმარტავთ მხოლოდ τ_k' სიდიდეების განაწილებით.

მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია N მოცულობის წყარო ე.ი. წყაროში განაცხადების რაოდენობაა N და $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. მაშინ t დროის განმავლობაში შემოსული განაცხადების $n(t)$ რიცხვი, ანუ შემავალი ნაკადი განისაზღვრება ფორმულით: $P\{n(t) = n\} = C_N^n (1 - \exp(-\lambda t))^n \exp(-(N - n)\lambda t)$.

შევნიშნოთ, რომ უსასრულო წყაროს შემთხვევაში $F(x)$ წარმოადგენს განაცხადების შემოსვლის მომენტებს შორის ინტერვალების განაწილებას, ხოლო სასრული წყაროს შემთხვევაში — წყაროში განაცხადის ყოფნის ხანგრძლივობის განაწილებას.

მომსახურების პროცესი. ვთქვათ θ_k არის k-ური განაცხადის მომსახურების ხანგრძლივობა. დავუშვათ, რომ θ_k $(k = 1,2,\ldots)$ ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია $G(x) = P\{\theta_k \leq x\}$ განაწილების ფუნქციით. $G(x)$ ფუნქციას ეწოდება მომსახურების ხანგრძლივობის განაწილების ფუნქცია. დავუშვათ, რომ არსებობს ალბათობის სიმკვრივე $g(x) = (d/dx)G(x)$. მომსახურების საშუალო ხანგრძლივობა გამოითვლება ფორმულით $E\xi = \int_0^\infty x g(x) dx = \int_0^\infty (1 - G(x)) dx$.

მომსახურე ორგანოთა რიცხვი. მომსახურე მოწყობილობა შეიძლება შეიცავდეს ერთ ან რამდენიმე მომსახურე ორგანოს. სისტემას ერთი მომსახურე ორგანოთი უწოდებენ ერთარხიან სისტემას, მაშინ როცა, სისტემას რომელიც

შეიცავს ერთზე მეტ მომსახურების ორგანოს უწოდებენ მასობრივი მომისახურების მრავალარხიან სისტემას.

მომსახურების დისციპლინა. წესი, რომლის მიხედვითაც შეირჩევა განაცხადი მომსახურებისათვის განსაზღვრავს მომსახურების დისციპლინას. არსებობს მომსახურების მრავალი დისციპლინა. მათ შორის ძირითადია მომსახურების პირდაპირი რიგი (პირველი მოვიდა-პირველი გავიდა), ინვერსიული (უკანასკნელი მოვიდა-პირველი გავიდა), ჯგუფური მომსახურება, მომსახურება პრიორიტეტებით და სხვა.

ყველა ისეთი სიტუაცია, როცა განაცხადი შედის სისტემაში მომსახურებისათვის სასრული წყაროდან და მომსახურების შემდეგ ბრუნდება წყაროში შეიძლება აღიწეროს მათემატიკური მოდელით, რომელსაც უწოდებენ მასობრივი მომსახურების სისტემას განაცხადთა სასრული წყაროთი, ანუ მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილ სისტემას (მმჩძ). ერთ-ერთი ძირითადი თვისება ჩაკეტილი სისტემებისა არის ის, რომ ასეთ სისტემებში არ ხდება განაცხადის დაკარგვა. ასეთი სისტემების დაპროექტება ხდება სწორედ ისე, რომ უზრუნველყოფილ იყოს ყველა ცირკულირებად განაცხადთა შენახვა.

ამ ტიპის უმარტივესი მოდელი აღიწერება შემდეგნაირად: განაცხადი შემოდის ერთარხიან სისტემაში N მოცულობის სასრული წყაროდან. ყოველი განაცხადის წყაროში ყოფნის ხანგრძლივობა დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეა, განაწილებული მაჩვენებლიანი კანონით $\frac{1}{\lambda}$ საშუალო მნიშვნელობით. ამგვარად, თუ მიმდინარე მომენტში სისტემაში არის n განაცხადი, დროის $(t, t+h)$ ინტერვალში სისტემაში განაცხადის შესვლის ინტენსივობა არის λ_n, სადაც $\lambda_n = (N-n)\lambda h + 0(h)$. ე.ი. ალბათობა იმისა, რომ $(t, t+h)$ დროის ინტერვალი სისტემაში შევა განაცხადი არის $(N-n)\lambda h + 0(h)$. განაცხადების მომსახურების ხანგრძლივობა ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია. მომსახურების დასრულების შემდეგ განაცხადი ბრუნდება წყაროში.

ერთ-ერთი ამოცანა, რომელშიც ძირითადად გამოიყენება ეს მოდელი, არის ჩარხების მოცდენის ამოცანა. ეს პრობლემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ

შემდეგნაირად: ერთი ოსტატი მიმაგრებული N ჩარხზე, თუ ჩარხი დაზიანდება ოსტატი იწყებს მის აღდგენას თუ ის თავისუფალია; თუ ოსტატი დაკავებულია, მაშინ ჩარხი მოცდენილია მანამ, სანამ ოსტატი არ განთავისუფლდება. ამას მოყვება წარმოების დანაკარგი, რომელსაც უწოდებენ დანაკარგს მოცდენის გამო. ცხადია, თუ ჩარხების რიცხვი იზრდება წარმოების დანაკარგიც იზრდება. მეორეს მხრივ, თუ ოსტატზე მიმაგრებული ჩარხების რაოდენობა შემცირდება, მაშინ იზრდება ჩარხის მომსახურების ღირებულება. შესაბამისად, ამოცანა მდგომარეობს ოსტატისთვის მიმაგრებული ჩარხების რიცხვის განსაზღვრაში, რომ პროდუქციის მიღებისას დანაკარგი იყოს მინიმალური ჩარხის მომსახურების ღირებულებისა და ჩარხის მოცდენით გამოწვეული დანაკარგების დაბალანსებით.

ეს ამოცანა ფორმულირებულ იყო ხინჩინის [17] მიერ და შესწავლილ იქნა ბევრი ავტორის, მაგალითად პალმის (Palm C.) [40-41], აშკროფტის (Ashcroft H.) [19] და ტაკაჩის (Takács L.) [46-47] მიერ. ამ ავტორების ინტერესი ძირითადად კონცენტრირებული იყო ორი მახასიათებლის – ჩარხის მზადყოფნის კოეფიციენტისა და ოსტატის დაკავებულობის კოეფიციენტის გამოთვლაზე. სხვა მახასიათებლების გამოთვლას, რომლებიც უშუალოდ არ იყო დაკავშირებული ჩარხის მოცდენის ამოცანასთან, ნაკლები ყურადღება დაეთმო. თუმცა დაკავებულობის პერიოდის განაწილების ფუნქცია მიღებულ იქნა 1963 წელს ბლომის (Blom G.) [20], ტირუვენგადამისა (Thiruvengadam K.) და ჯეისუილის (Jaiswal N.K.) მიერ [30].

ჩაკეტილი მასობრივი მომსახურების სისტემების ხარჯების ანალიზის მოდელები, კერძოდ აღდგენადი სისტემების, შესწავლილი იქნა სხვადასხვა ავტორების მიერ Albright [18], Bhattacharyya [21], Elsayed [23], Gross and Harris [25], Gross, Kahc and Marsh [26], Hilliard [28], Morse [38], White, Schmidt, Benett [49].

[45]-ში წინა ნაშრომებისაგან განსხვავებით განხილულია დარეზერვებული სისტემა სხვადასხვა რეჟიმში (დაუტვირთავი, შემსუბუქებული, დატვირთული),

ამასთან ძირითად ცვლადებად განიხილება ორი პარამეტრი - სარეზერვო ელემენტთა და მომსახურე ელემენტთა რაოდენობა. აღვნიშნოთ, რომ სისტემის ყველა გამოსავალი დროითი მახასიათებელი ექსპონენციალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, რაც საშუალებას იძლევა სისტემის მოქმედება აღიწეროს გამრავლესა და კვდომის მარკოვული მოდელით, შემდგომ კი, სტაციონარულ რეჟიმში ამოცანა დაიყვანება ალგებრული განტოლებათა სისტემის გამოკვლევაზე.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ აღნიშნული ტიპის არაექსპონენციალური მოდელები, მაგრამ ამ მოდელების სირთულის გამო მივდივართ გარკვეულ შეზღუდვებზე და ვუშვებთ რომ ფუნქციონირებს ერთი მომსახურე ორგანო.

ზემოთ აღნიშნულ მოდელებში დაშვებულია რომ გადართვის ხანგრძლივობა ძალიან მცირეა აღდგენის ხანგრძლივობასთან შედარებით, ამიტომ გადართვა ითვლება მყისიერად. მაგრამ რთულ დარეზერვებულ სისტემებში ძირითადი ელემენტის მტყუნება პირველ რიგში წარმოშობს გადართვის საჭიროებას, რომლის ხანგრძლივობა ხშირად იგივე რიგისაა ან უფრო მეტისაც კი რაც აღდგენის ხანგრძლივობა. ამ დროს კი მყისიერი გადართვის დაშვება შეუძლებელია. ამ ტიპის ერთ-ერთი მოდელი, შეიძლება შემდეგნაირად აღვწეროთ:

დარეზერვებული ტექნიკური სისტემა შედგება m რაოდენობის ძირითადი და n რაოდენობის სარეზერვო ელემენტისაგან. ყველა ელემენტი იდენტურია. სისტემის ნორმალური ფუნქციონირებისათვის სასურველია მუშაობდეს m ძირითადი ელემენტი. ამასთან თუ მათი რაოდენობა m-ზე ნაკლებია სისტემა განაგრძობს მუშაობას, ოღონდ შემცირებული ეკონომიკური ეფექტიანობით. მტყუნებული ძირითადი ელემენტის ადგილზე ხდება ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტის გადართვა თუ არის ამის შესაძლებლობა. წინააღმდეგ შემთხვევაში (თუ ყველა სარეზერვო ელემენტი მტყუნებულია ან ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტები უკვე გათვლილია მანამდე მტყუნებული ძირითადი ელემენტების ადგილზე გადასართავად) გადართვა ხდება პირველი შეძლებისთანავე. მტყუნებული ელემენტები, როგორც ძირითადი, ასევე სარეზერვო იგზავნება

აღსადგენად და ელემენტი აღიდგენს ყველა თავის პირვანდელ თვისებას. გვაქვს k აღმდგენი და l გადამრთველი ორგანო. აღდგენის და გადართვის ხანგრძლივობათა განაწილების ფუნქციებია $G(t)$ და $H(t)$. როცა მომსახურე ორგანოების დაკავებულია ელემენტები დგებიან გადართვის ან აღდგენის რიგში. მომსახურების დისციპლინა ორივე მომსახურე ორგანოსათვის არის - პირველი მოვიდა, პირველი გავიდა. აღწერილი სისტემის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს მმჩპ ორი ტიპის მომსახურებით. დღეისათვის საიმედოობის თეორიასა და მმთ-ში გამოკვლეულია ამ ტიპის მხოლოდ რამდენიმე კერძო შემთხვევა. ამოცანათა შემდგომი დასმა და მათი კვლევა ანალიზური თუ რიცხვითი მეთოდებით რთული და მეტად საინტერესო პრობლემაა როგორც მათემატიკური თვალსაზრისით, ისევე საიმედოობისა და მმთ-ის თვალსაზრისითაც.

ჩვენ შევისწავლით სწორედ აღნიშნული ტიპის სისტემებს. ძირითადი მახასიათებელი, რომელსაც გამოვიკვლევთ სისტემის ფუნქციონირების შესწავლისას, არის დროის მოცემულ მომენტში განაცხადების რაოდენობა სისტემაში, ანუ რიგის სიგრძე. ამ კვლევების ძირითადი შედეგები წარმოადგენენ გამოსავალ პარამეტრებს ეკონომიკური ანალიზის ამოცანებში.

1.2. ანალიზის მეთოდები

შემთხვევითი პროცესები, რომლებიც გვხვდება რიგების თეორიაში, როგორც წესი, არ წარმოადგენენ მარკოვულ პროცესებს და მოითხოვენ კვლევას სპეციალური მეთოდების გამოყენებით.

ერთ-ერთი ფართოდ გამოყენებული მეთოდია არამარკოვული პროცესის შესწავლა იმ წერტილების განხილვით, რომელშიც ადგილი აქვს მარკოვულ თვისებებს. ამ წერტილებს უწოდებენ რეგენერაციის წერტილებს. ვთქვათ $i(t)$ არის დროის t მომენტში სისტემაში განაცხადთა რაოდენობა. t_0 ეწოდება $\{i(t)\}$ შემთხვევითი პროცესის რეგენერაციის წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $t > t_0$-სათვის $P\{i(t) \mid i(t_0)\} = P\{i(t) \mid i(\tau) -$ ყოველი $\tau \le t_0\}$. თუ განვიხილავთ ერთარხიანი მმს-ს უმარტივესი შემავალი ნაკადითა და მომსახურების დროის ზოგადი განაწილებით, მაშინ წერტილების სიმრავლე $\{T_n + 0\}$, სადაც T_n $\{n = 0,1,2...\}$ არის განაცხადის სისტემიდან გამოსვლის მომენტები, წარმოადგენენ რეგენერაციის წერტილების სიმრავლეს. მაშასადამე, ამ მომენტში რიგის სიგრძის მნიშვნელობები დაკავშირებულია მარკოვის ჯაჭვით მდგომარეობათა თვლად სისტემებთან, რომლებიც შეიძლება შესწავლილი იქნას მარკოვის ჯაჭვების თეორიით. აღნიშნულ მეთოდს, რომელიც შემოიტანა კენდალმა [32], უწოდებენ მარკოვის ჩალაგებული ჯაჭვების მეთოდს.

მეორე მეთოდი, რომლის გამოყენებითაც არამარკოვული პროცესი დაიყვანება მარკოვულ პროცესზე, არის სისტემის მდგომარეობის აღწერა არასაკმარისი ინფორმაციის შევსებით დამატებითი პარამეტრის შემოტანის გზით. ასეთი მიდგომა შემოთავაზებული იქნა კენდალის [33] მიერ, მაგრამ პირველად გამოიყენა კოქსმა (Cox D.R.) [22] და ცნობილია როგორც "დამატებითი ცვლადის შემოტანის მეთოდი". კოქსის სქემა ზოგადად შეიძლება აღიწეროს შემდეგნაირად: განიხილება შემთხვევითი პროცესი $i(t)$ მდგომარეობთა სასრული ან თვლადი სიმრავლით. ეს პროცესი, ზოგიერთი განსაკუთრებული შემთხვევის გამოკლებით, არ წარმოადგენს მარკოვულ

პროცესს. მაგრამ დამატებითი კომპონენტების ერთობლიობით გადაიქცევა მარკოვულად. $i(t)$ პროცესის ყველა შესაძლო i მნიშვნელობას შეესაბამება დამატებით კომპონენტთა თავისი რიცხვი. ეს უკანასკნელი იზრდება ერთეულოვანი სიჩქარით და გამოსახავს დროს რაღაც მოვლენის დაწყებიდან; დამატებითი კომპონენტის არსებობის დრო შემთხვევითი სიდიდეა და არ არის დამოკიდებული სხვა ანალოგიურ სიდიდეზე. ამგვარად, $M/G/1$ პროცესი ე.ი. ერთარხიანი მმს უმარტივესი შემავალი ნაკადითა და მომსახურების დროის ზოგადი განაწილებით, შეიძლება განვიხილოთ როგორც მარკოვული, თუ სისტემის მდგომარეობას განვსაზღვრავთ წყვილით $[i(t),u]$, სადაც $i(t)$-სისტემაში განაცხადების რაოდენობაა, u-კი აღნიშნავს მომსახურების პროცესში მყოფი განაცხადის მომსახურების დაწყებიდან გასულ დროს.

ჩვენ შევისწავლით ერთარხიან და მრავალარხიან ჩაკეტილ სისტემებს განაცხადთა ორი ტიპის შემავალი ნაკადებით, ვისარგებლებთ დამატებითი ცვლადის შემოტანის მეთოდით, თუმცა ასევე წარმატებით შეიძლება გამოყენებულ იქნას მარკოვის ჩალაგებული ჯაჭვების მეთოდიც. სისტემის ალბათურ მახასიათებლებს ვიპოვით როგორც გარდამავალ, ასევე სტაციონარულ რეჟიმში.

კვლევისას გარდამავალ რეჟიმში მიიღება ინტეგრო-დიფერენციალურ და პირველი რიგის კერძოწარმოებულიან განტოლებათა სისტემები, ხოლო სტაციონარულ რეჟიმში — ჩვეულებრივ წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები. განვიხილოთ ის კერძოწარმოებულიანი განტოლებები და მათი ამოხსნის გზები, რომელთა ცოდნაც დაგვჭირდება ამ განტოლებათა სისტემების ამოხსნისას.

ერთ-ერთი განტოლებაა $\dfrac{\partial p(t,u)}{\partial t}+\dfrac{\partial p(t,u)}{\partial u}=a(u)p(t,u).$ (1)

ჩვენი მიზანია აღნიშნული ტიპის განტოლებისათვის არსებული კლასიკური თეორიის გამოყენებით მოვახდინოთ განტოლების ინტეგრება. როგორც ცნობილია პირველი რიგის კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებას ახასიათებს ორი მარტივი თვისება. პირველი, მას აქვს ნებისმიერ ფუნქციაზე

დამოკიდებული ზოგადი ამონახსენი, მეორე - პირველი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნაზე. ავაგოთ (1) განტოლების ზოგადი ამონახსნების ფორმულა.

ვთქვათ, $$V(p,t,u)=0 \tag{2}$$

არის რაიმე განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს (1)-ის $p=p(t,u)$ ამონახსენი.

(2) ფორმულიდან გამოვსახოთ კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial t}}{\frac{\partial V}{\partial p}}, \qquad \frac{\partial p}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial u}}{\frac{\partial V}{\partial p}}.$$

შევიტანოთ ეს გამოსახულებები მოცემულ (1) განტოლებაში, ორივე მხარე გავამრავლოთ $\frac{\partial V}{\partial p}$ -ზე (ჩვენ ვუშვებთ რომ $\frac{\partial V}{\partial p}\neq 0$) და გადავიტანოთ ყველა წევრი მარცხნივ. მივიღებთ ერთგვაროვან განტოლებას:

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial u}+a(u)\frac{\partial V}{\partial p}=0 \tag{3}$$

ამ წრფივი კერძოწარმოებულიანი განტოლების მახასიათებელ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ექნება სახე: $\frac{\partial t}{1}=\frac{\partial u}{1}=\frac{\partial p}{a(u)p}$.

ამ უკანასკნელის პირველი ტოლობიდან ვღებულობთ $t-u=C_1$, ხოლო მეორე ტოლობიდან გვაქვს $pe^{-\int a(u)du}=C_2$. ამგვარად (3) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი იქნება $V=\Phi\left(t-u,\quad pe^{-\int a(u)du}\right)$, სადაც Φ არის თავისი არგუმენტების ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქცია.

(2) ტოლობიდან გამომდინარე (1) განტოლების ზოგადი ინტეგრალი მოიძებნება $V=\Phi\left(t-u,\quad pe^{-\int a(u)du}\right)=0$ განტოლებიდან, საიდანაც ვღებულობთ (1) განტოლების ზოგად ამონახსნს

$$p(t,u)=\varphi(t-u)e^{\int a(u)du} \tag{4}$$

სადაც φ არის ერთი ცვალებადის დიფერენცირებადი ფუნქცია.

ანალოგიური მსჯელობებით მივიღებთ განტოლების $\frac{\partial p(t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(t,u)}{\partial u}=ap(t,u)$ ზოგად ამონახსნს $p(t,u)=\varphi(t-u)e^{au}$.

და ბოლოს, განვიხილოთ მესამე ტიპის განტოლება:

$$\frac{\partial p(t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(t,u)}{\partial u}=ap(t,u)+k\varphi_1(t-u)e^{b\frac{t+u}{2}}, \tag{5}$$

სადაც a,b და k ნებისმიერი მუდმივებია.

განტოლების გამარტივება შეიძლება საძიებელი ფუნქციის გარდაქმნით:

$$p(t,u)=\psi(t,u)-\frac{k\varphi_1(t-u)}{a-b}e^{b\frac{t+u}{2}} \tag{6}$$

გამოვთვალოთ $\frac{\partial p}{\partial t}$ და $\frac{\partial p}{\partial u}$ კერძო წარმოებულები:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\partial \psi}{\partial t}-\frac{k}{a-b}\varphi_1'(t-u)e^{b\frac{t+u}{2}}-\frac{k\varphi_1(t-u)}{2(a-b)}e^{b\frac{t+u}{2}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{k}{a-b}\varphi_1'(t-u)e^{b\frac{t+u}{2}}-\frac{k\varphi_1(t-u)}{2(a-b)}e^{b\frac{t+u}{2}} \tag{8}$$

(6)-(8) გამოსახულებები გავითვალისწინოთ (5)-ში. მივიღებთ განტოლებას $\frac{\partial \psi(t,u)}{\partial t}+\frac{\partial \psi(t,u)}{\partial u}=a\psi(t,u)$, რომლის ზოგადი ამონახსნია $\psi(t,u)=\varphi_2(t-u)e^{au}$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი სასურველია ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $\psi(t,u)=\varphi_2(t-u)e^{a\frac{t+u}{2}}$. ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (6)-ში მივიღებთ (5) განტოლების ზოგად ამონახსნს:

$$p(t,u)=\varphi_2(t-u)e^{a\frac{t+u}{2}}-\frac{k\varphi_1(t-u)}{a-b}e^{b\frac{t+u}{2}} \tag{9}$$

ამ განტოლებების ამოხსნის მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელია ყველა ქვემოთ მიღებული კერძოწარმოებულიან განტოლებათა სისტემის ამოხსნა. განტოლებათა ამონახსნები მიიღება ისეთი ფორმით, რომ მათი ჩასმის შემდეგ ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები და სასაზღვრო პირობები, რომლებიც მიიღება ალბათური მსჯელობებით და ჩაწერილია ინტეგრალური სახით მარტივდება ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენების შედეგად.

მასობრივი მომსახურების ყველა ზემოთ განხილული სისტემის შესწავლისას და შემოტანილი მახასიათებლების საპოვნელად საბოლოოდ მივდივართ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების გამოყენებაზე.

თავი II

მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემა ერთი ტიპის მომსახურებით

2.1. ამოცანის დასმა და მათემატიკური მოდელის აგება

განვიხილოთ მასობრივი მომსახურების ერთარხიანი ჩაკეტილი სისტემა რომელშიც განაცხადები შემოდის m და n მოცულობის სასრული წყაროებიდან. ყოველი განაცხადის წყაროში ყოფნის ხანგრძლივობა შემთხვევითი სიდიდეა ერთნაირად განაწილებული მაჩვენებლიანი კანონით პირველი წყაროსათვის $\dfrac{1}{\alpha}$ და მეორე წყაროსათვის $\dfrac{1}{\beta}$ საშუალო მნიშვნელობებით, $0<\beta\le\alpha$. ამგვარად, თუ მოცემულ მომენტში სისტემაში იმყოფება i განაცხადი პირველი წყაროდან, ალბათობა იმისა, რომ $(t,t+h)$ ინტერვალში სისტემაში შემოვა განაცხადი პირველი წყაროდან არის $(m-i)\alpha h+0(h)$, ანალოგიურად, თუ სისტემაში არის j განაცხადი მეორე წყაროდან, დროის მცირე ინტერვალში სისტემაში მეორე წყაროდან განაცხადის შემოსვლის ალბათობა არის $(n-j)\beta h+0(h)$. პირველი წყაროდან სისტემაში განაცხადის შემოსვლის შემთხვევაში მის ადგილს იკავებს განაცხადი მეორე წყაროდან და შესაბამისად იცვლება ინტენსივობაც. მომსახურების დროის განაწილების ფუნქცია ზოგადია - $G(t)$. აღვნიშნოთ $\rho(u)$-მომსახურების ინტენსივობა. განმარტების თანახმად

$$\rho(u)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\mathrm{P}\left\{\begin{array}{l}\text{აღდგენა დასრულდება } (u,u+h) \text{ ინტერვალში, თუ აღდგენის}\\ \text{დაწყებიდან გასული დრო მეტია } u-\text{ზე}\end{array}\right\}\right).$$

$\rho(u)=\dfrac{g(u)}{1-G(u)}$, სადაც $g(u)=G'(u)$.

განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესები:

$i(t)$- დროის t მომენტში სისტემაში განაცხადების რაოდენობა;

$\xi(t)$- მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო t მომენტისათვის;

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$P(0,t)=P\{i(t)=0\}$;

$$p(i,t,u)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\mathrm{P}\{i(t)=i,u\le\xi(t)<u+h\}\right),\ \ i=\overline{1,m+n}$$

გამოვთვალოთ ეს ალბათური მახასიათებლები.

თეორემა 2.1.1. $P(0,t)$ და $p(i,t,u)$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ შემდეგ ინტეგრო-დიფერენციალურ და კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ-სხვაობით განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dP(0,t)}{dt}=-[m\alpha+n\beta]P(0,t)+\int_0^t p(1,t,u)\rho(u)du$$

$$\frac{\partial p(1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(1,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-1)\beta+\rho(u)]p(1,t,u)$$

$$\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-i)\beta+\rho(u)]p(i,t,u)+[m\alpha+(n-(i-1))\beta]p(i-1,t,u) \qquad (2.1.1)$$

$$2\le i\le n$$

$$\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial u}=-[(m+n-i)\alpha+\rho(u)]p(i,t,u)+(m+n-i+1)\alpha p(i-1,t,u)$$

$$n<i<m+n,$$

$$\frac{\partial p(m+n,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(m+n,t,u)}{\partial u}=-\rho(u)p(m+n,t,u)+\alpha p(m+n-1,t,u).$$

დამტკიცება: განტოლებათა სამართლიანობის საჩვენებლად განვიხილოთ დროის უსასრულოდ მცირე ინტერვალი $(t,\ t+h)$ და დავაკვირდეთ სისტემის მდგომარეობათა ცვლილებას ამ ინტერვალში.

იმისათვის რომ $t+h$ მომენტში სისტემაში არ იყოს განაცხადი აუცილებელია სრულდებოდეს ერთ-ერთი შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან:

1. t მომენტში სისტემაში არ არის განაცხადი. h დროში არცერთი განაცხადი არ შემოვა. ამ ხდომილობის ალბათობაა $P(0,t)(1-(m\alpha+n\beta)h)$;

2. t მომენტში სისტემაში არის ერთი განაცხადი. იგი მომსახურების პროცესშია და მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+du)$ ინტერვალში, h დროში მომსახურება დასრულდა. $u-$ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით მივიღებთ ამ ხდომილობის ალბათობას $h\int_0^t p(1,t,u)\rho(u)du$.

3. სხვა შესაძლო ხდომილობათა ალბათობების ჯამი არის $0(h)$.

ამგვარად $P(0,t+h)$ სიდიდის მიმართ მივიღებთ თანაფარდობას:

$$P(0,t+h)=P(0,t)(1-(m\alpha+n\beta)h)+h\int_0^t p(1,t,u)\rho(u)du+0(h)$$

ეს თანაფარდობა ექვივალენტურია შემდეგი თანაფარდობის:

$$\frac{P(0,t+h)-P(0,t)}{h}=-(m\alpha+n\beta)P(0,t)+\int_0^t p(1,t,u)\rho(u)du+\frac{0(h)}{h}$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $h\to 0$ მიიღება (2.1.1) სისტემის პირველი განტოლება.

ხდომილება $t+h$ მომენტში სისტემაში არის ერთი განაცხადი, რომლის მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,\ u+h)$ ინტერვალში შესაძლებელია მოხდეს მხოლოდ შემდეგი ხდომილობის შემდეგ - t მომენტში სისტემაში არის ერთი განცხადი, იგი მომსახურების პროცესშია და მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში, h დროში განაცხადი არ შემოსულა და არც მომსახურება დასრულდა. ამ ხდომილობის ალბათობაა $p(1,t,u-h)h[1-(m\alpha+(n-1)\beta+\rho(u-h))h]$.

ამგვარად $p(1,t+h,u)h$ ალბათობისათვის მივიღებთ:

$$p(1,t+h,u)h=p(1,t,u-h)h[1-(m\alpha+(n-1)\beta+\rho(u-h))h]h+0(h)$$

იმისათვის, რომ ხდომილება $t+h$ მომენტში სისტემაში იყოს i განაცხადი და ერთ-ერთის მომსახურებიდან გასული დრო მოთავსებული იყოს $(u,\ u+h)$ ინტერვალში უნდა შესრულდეს შემდეგ ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. დროის t მომენტში სისტემაში არის i განაცხადი და ერთ-ერთის მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,\ u)$

ინტერვალში, h დროში განაცხადის მომსახურება არ დასრულებულა და არც ახალი განაცხადი შემოსულა.

ამ ხდომილობის ალბათობა, როცა $2 \le i \le n$ ტოლია $p(i,t,u-h)h[1-(m\alpha+(n-i)\beta+\rho(u-h))h]$, ხოლო როცა $n < i \le m+n$, მაშინ - $p(i,t,u-h)h[1-((m+n-i)\alpha+\rho(u-h))h]$;

2. დროის t მომენტში სისტემაში არის $i-1$ განაცხადი და ერთ-ერთის მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში, h დროში შემოვიდა ერთი განაცხადი. ამ ხდომილობის ალბათობა, როცა $2 \le i \le n$ იქნება $P(i-1,t,u-h)h[m\alpha+(n-(i-1))\beta]h$, და როცა $n < i \le m+n$, მაშინ $P(i-1,t,u-h)h[(m+n-(i-1))\alpha h]$.

ამგვარად $P(i,t+h,u)$ სიდიდეებისათვის დავწერთ თანაფარდობებს:

$$P(i,t+h,u)h = P(i,t,u-h)h[1-(m\alpha+(n-i)\beta+\rho(u-h))h]+$$
$$+P(i-1,t,u-h)h[m\alpha+(n-(i-1))\beta]h+o(h), \qquad 2 \le i \le n,$$
$$P(i,t+h,u)h = P(i,t,u-h)h[1-((m+n-i)\alpha+\rho(u-h))h]+$$
$$+P(i-1,t,u-h)h[(m+n-(i-1))\alpha h]+o(h), \qquad n < i < m+n,$$
$$P(m+n,t+h,u)h = P(m+n,t,u-h)h[1-\rho(u-h)h]+P(m+n-1,t,u-h)\alpha h+o(h).$$

თანაფარდობების მარტივი გარდაქმნებით და ზღვარზე გადასვლით, როცა $h \to \infty$ მიიღება (2.1.1) განტოლებათა სისტემის კერძოწარმოებულიანი განტოლებები.

თეორემა 2.1.2. $p(i,t,u)$ სიდიდეთა სასაზღვრო პირობები გამოისახება შემდეგი თანაფარდობებით:

$$p(1,t+h,0)h = [m\alpha+n\beta]hP(0,t)+h\int_0^t p(2,t,u)\rho(u)du+o(h),$$

$$p(i,t+h,0)h = h\int_0^t p(i+1,t,u)\rho(u)du+o(h) \qquad 2 \le i \le m+n-1, \qquad (2.1.2)$$

$$p(m+n,t+h,0)h = o(h).$$

დამტკიცება: ამ თანაფარდობათა სამართლიანობა გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან:

იმისათვის, რომ დროის $t+h$ დროში სისტემაში იყოს 1 განაცხადი, რომელიც მომსახურების პროცესშია და მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(0,h)$ ინტერვალში, t მომენტში შესაძლებელია იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. t მომენტში სისტემაში არ არის განაცხადი, h დროში შემოვიდა ერთი განაცხადი. ამ ხდომილობის ალბათობაა $[m\alpha+n\beta]hP(0,t)$.

2. t მომენტში სისტემაში არის 2 განაცხადი, ერთ-ერთი განაცხადი მომსახურების პროცესშია და მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+du)$ ინტერვალში. h დროში ამ განაცხადის მომსახურება დასრულდა. ამ ხდომილობის ალბათობა u-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის $h\int_0^t p(2,t,u)\rho(u)du$.

3. სხვა შესაძლო ხდომილობათა ალბათობები იქნება $0(h)$ რიგის.

ამ ალბათობების შეკრებით მიიღება (2.1.2) სისტემის პირველი თანაფარდობა. ანალოგიური მსჯელობებით მიიღება დანარჩენი თანაფარდობების.

2.2. მოდელის გამოკვლევა

კერძოწარმოებულიან განტოლებათა ამოხსნის მეთოდების გამოყენებით ვაჩვენოთ (2.1.1) სისტემის ამოხსნის გზები.

ამ სისტემის პირველი განტოლების

$$\frac{\partial p(1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(1,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-1)\beta+\rho(u)]p(1,t,u) \qquad (I)$$

ზოგადი ამონახსნია $p(1,t,u)=f(1,t-u)[1-G(u)]e^{-[m\alpha+[n-1]\beta]u}$.

სისტემის მეორე განტოლებაა

$$\frac{\partial p(2,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(2,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-2)\beta+\rho(u)]p(2,t,u)+[m\alpha+(n-1)\beta]p(1,t,u). \qquad (II)$$

გავამარტივოთ განტოლება საძიებელი ფუნქციის გარდაქმნით $p(2,t,u)=p(1,t,u)\varphi(1,t,u)$. ამ ტოლობიდან გამოვსახოთ $\frac{\partial p(2,t,u)}{\partial t}$ და $\frac{\partial p(2,t,u)}{\partial u}$ კერძო წარმოებულები, შევიტანოთ (II) განტოლებაში და გავითვალისწინოთ (I) განტოლებაც. $\varphi(1,t,u)$ ფუნქციის მიმართ მიიღება შემდეგი კერძოწარმოებულიანი განტოლება:

$$\frac{\partial \varphi(1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(1,t,u)}{\partial u}=\beta\varphi(1,t,u)+[m\alpha+(n-1)\beta] \qquad (III)$$

შემოვიტანოთ დამხმარე ფუნქცია $\psi(1,t,u)$ შემდეგნაირად:

$$\psi(1,t,u)=\varphi(1,t,u)+\frac{m\alpha+(n-1)\beta}{\beta},$$

საიდანაც $\varphi(1,t,u)=\psi(1,t,u)-\frac{m\alpha+(n-1)\beta}{\beta}$.

ამ გამოსახულების გაწარმოებითა და (III)-ში გათვალისწინებით მივიღებთ განტოლებას: $\frac{\partial \psi(1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial \psi(1,t,u)}{\partial u}=\beta\psi(1,t,u)$, რომლის ზოგადი ამონახსნი სასურველია ჩავწეროთ $\psi(1,t,u)=f_2(t-u)e^{\beta\frac{t+u}{2}}$.

მაშინ $\varphi(1,t,u)=f_2(t-u)e^{\beta\frac{t+u}{2}}-\frac{m\alpha+(n-1)\beta}{\beta}$ და

$$p(2,t,u)=f(1,t-u)[1-G(u)]e^{-[m\alpha+[n-1]\beta]u}\left[f_2(t-u)e^{\beta\frac{t+u}{2}}-\frac{m\alpha+(n-1)\beta}{\beta}\right].$$

ამ მეთოდით ვაგრძელებთ შემდეგ განტოლებათა ამოხსნასაც, ყოველი $p(i,t,u)$ ამონახსნის საპოვნელად შემოგვაქვს აღნიშვნა $p(i,t,u)=p(1,t,u)\varphi(i-1,t,u)$, $i\geq 3$. ამ ტოლობას გავაწარმოებთ, შევიტანთ შესაბამის განტოლებაში, გავითვალისწინოთ (I) განტოლებას და $\varphi(i-1,t,u)$-ს მიმართ მივიღებთ შემდეგი სახის კერძოწარმოებულიან განტოლებას:

$$\frac{\partial\varphi(i-1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(i-1,t,u)}{\partial u}=b_i\varphi(i-1,t,u)+\sum_{j=1}^{i-1}k_j f(j,t-u)e^{b_j\frac{u+t}{2}} \qquad (IV)$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად შემოვიტანთ დამხმარე ფუნქციას $\psi(i-1,t,u)$ განსაზღვრული ტოლობით $\psi(i-1,t,u)=\varphi(i-1,t,u)+\sum_{j=1}^{i-1}k_j\frac{f(j,t-u)}{b_i-b_j}e^{b_j\frac{u+t}{2}}$, საიდანაც

$$\varphi(i-1,t,u)=\psi(i-1,t,u)-\sum_{j=1}^{i-1}k_j\frac{f(j,t-u)}{b_i-b_j}e^{b_j\frac{u+t}{2}}.$$

გავაწარმოოთ და შევიტანოთ (IV) განტოლებაში. მიიღება განტოლება

$$\frac{\partial\psi(i-1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial\psi(i-1,t,u)}{\partial u}=b_i\psi(i-1,t,u)$$

რომლის ზოგადი ამონახსნი ასე წარმოიდგინება $\psi(i-1,t,u)=f(i,t-u)e^{b_i\frac{u+t}{2}}$.

მაშინ $\varphi(i-1,t,u)=f(i,t-u)e^{b_i\frac{u+t}{2}}-\sum_{j=1}^{i-1}k_j\frac{f(j,t-u)}{b_i-b_j}e^{b_j\frac{u+t}{2}}$

და $p(i,t,u)=f(1,t-u)e^{-[m\alpha+[n-1]\beta]\frac{u+t}{2}}\left(f(i,t-u)e^{b_i\frac{u+t}{2}}-\sum_{j=1}^{i-1}k_j\frac{f(j,t-u)}{b_i-b_j}e^{b_j\frac{u+t}{2}}\right)[1-G(u)].$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები $H(i,t-u)=f(1,t-u)f(i,t-u)$, $e^{b_j\frac{u+t}{2}}$-ს ნაცვლად ისევ დავუბრუნდეთ $e^{b_j u}$-ს და მიიღება $p(i,t,u)$ ამონახსნები ჩაწერილი შემდეგი ფორმით

$$p(i,t,u)=e^{-[m\alpha+[n-1]\beta]u}\left(H(i,t-u)e^{b_i u}-\sum_{j=1}^{i-1}k_j\frac{H(j,t-u)}{b_i-b_j}e^{b_j u}\right)[1-G(u)].$$

ამ გზით $p(i,t,u)$ სიდიდეები განტოლებათა (2.1.1) სისტემიდან შემდეგნაირად გამოისახება:

$$p(1,t,u)=H(1,t-u)[1-G(u)]e^{-[m\alpha+[n-1]\beta]u}$$

$$p(i,t,u)=[1-G(u)]\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j H(i-j,t-u)\frac{\prod\limits_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\,\beta^j}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}, \qquad 2\le i\le n,$$

$$p(i,t,u)=[1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^j H(i-j,t-u)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\;[m+n-i]!}e^{-[m+n-(i-j)]\alpha u}+\right. \tag{2.2.1}$$

$$\left.+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}(-1)^j H(i-j,t-u)\frac{m!\;\;\alpha^{i-n}\;\;\prod\limits_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha+k\beta]}{(m+n-i)!\,[n-(i-j)]!\;\;\beta^{[n-(i-j)]}\;\;\prod\limits_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}e^{-[m\alpha+(n-(i-))\beta]u}\right]$$

$$n<i<m+n,$$

$$p(m+n,t,u)=[1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^j H(m+n-j,t-u)e^{-j\alpha u}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=m+1}^{N-1}(-1)^j H(m+n-j,t-u)\frac{m!\;\;\alpha^m\;\;\prod\limits_{k=1}^{j-m}[m\alpha+k\beta]}{[j-m]!\;\;\beta^{j-m}\;\;\prod\limits_{k=1}^{m}[k\alpha+(j-m)\beta]}e^{-[m\alpha+(j-m)\beta]u}\right],$$

სადაც $H(i,t-u)$ არის $t-u$ ცვალებადის ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციები.

(2.2.1) გამოსახულებების გათვალისწინებით სასაზღვრო პირობები შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$p(1,t,0)=[m\alpha+n\beta]P(0,t)+\int_0^t\left(H(2,t-u)e^{-(m\alpha+(n-2)\beta)u}-H(1,t-u)\frac{m\alpha+(n-1)\beta}{\beta}e^{-(m\alpha+(n-1)\beta)}\right)g(u)du$$

$$p(i,t,0)=\int_0^t\left(\sum_{j=0}^{i}(-1)^j H(i+1-j,t-u)\frac{\prod\limits_{k=n-i}^{n-(i+1-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\,\beta^j}e^{-[m\alpha+(n-(i+1-j))\beta]u}\right)g(u)du \qquad 2\le i<n$$

$$p(i,t,0)=\int_0^t\left(\sum_{j=0}^{i+1-n}(-1)^j H(i+1-j,t-u)\frac{[m+n-(i+1-j)]!}{j!\;\;[m+n-(i+1)]!}e^{-[m+n-(i+1-j)]\alpha u}+\right. \tag{2.2.2}$$

$$+\sum_{j=i-n+2}^{i}\left((-1)^j H(i+1-j,t-u)\frac{m!\,\alpha^{i+1-n}}{\beta^{[n-(i+1-j)]}}\times\right.$$

$$\times \frac{\prod_{k=1}^{n-(i+1-j)}[m\alpha+k\beta]}{(m+n-(i+1))!(n-(i+1-j))!\prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i+1-j))\beta]} e^{-[m\alpha+(n-(i+1-j))\beta]u}\Bigg)\Bigg)g(u)du$$

$$n<i<m+n$$

$p(m+n,t,0)=0.$

$P(1,t,0)$ როცა $n=1$ შემდეგნაირად გამოისახება:

$$p(1,t,0)=[m\alpha+n\beta]P(0,t)+\int_0^t\left(H(2,t-u)e^{-(m-1)\alpha u}-H(1,t-u)me^{-m\alpha u}\right)g(u)du$$

მეორეს მხრივ, $P(i,t,0)$ სიდიდეები შეიძლება გამოვთვალოთ (2.2.1) გამოსახულებებიდან:

$p(1,t,0)=H(1,t-u)$

$$p(i,t,0)=\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j H(i-j,t-u)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\beta^j} \qquad 2\le i\le n,$$

$$p(i,t,0)=[1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^i H(i-j,t-u)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\ [m+n-i]!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}(-1)^j H(i-j,t-u)\frac{m!\ \ \alpha^{i-n}\ \prod_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha+k\beta]}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\ \ \beta^{[n-(i-j)]}\ \prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}\right] \qquad 2.2.3)$$

$$n<i<m+n,$$

$$p(m+n,t,0)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^j H(m+n-j,t-u)+$$

$$+\sum_{j=m+1}^{N-1}(-1)^i H(m+n-j,t-u)\frac{m!\ \ \alpha^m\ \prod_{k=1}^{j-m}[m\alpha+k\beta]}{[j-m]!\ \ \beta^{j-m}\ \prod_{k=1}^{m}[k\alpha+(j-m)\beta]}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\overline{p}(i,s,u)=\int_0^\infty e^{-st}p(i,t,u)dt \qquad \overline{g}(s)=\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

$$\overline{H}(i,s)=\int_0^\infty e^{-st}H(i,t)dt \qquad \overline{P}(0,s)=\int_0^\infty e^{-st}P(0,t)dt$$

(2.2.1) გამოსახულებებზე ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\overline{p}(1,s,u)=\overline{H}(1,s)[1-G(u)]e^{-[s+m\alpha+[n-1]\beta]u}$$

$$\overline{p}(i,s,u)=[1-G(u)]\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\overline{H}(i-j,s)\frac{\prod\limits_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\beta^j}e^{-[s+m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}, \qquad 2\le i\le n,$$

$$\overline{p}(i,s,u)=[1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^j\overline{H}(i-j,s)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\ [m+n-i]!}e^{-[s+(m+n-(i-j)\alpha)]u}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}(-1)^j\overline{H}(i-j,s)\frac{m!\ \ \alpha^{i-n}\ \prod\limits_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha+k\beta]}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\ \ \beta^{[n-(i-j)]}\ \prod\limits_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}e^{-[s+m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}\right]$$

$$n<i<m+n,$$

$$\overline{p}(m+n,s,u)=[1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\overline{H}(m+n-j,s)e^{-(s+j\alpha)u}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=m+1}^{m+n-1}(-1)^j\overline{H}(m+n-j,s)\frac{m!\ \ \alpha^m\ \prod\limits_{k=1}^{j-m}[m\alpha+k\beta]}{[j-m]!\ \ \beta^{j-m}\ \prod\limits_{k=1}^{m}[k\alpha+(j-m)\beta]}e^{-[s+m\alpha+(j-m)\beta]u}\right],$$

(2.2.2) და (2.2.3) გამოსახულებებში გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა და გავუტოლოთ ერთმანეთს. ლაპლასის გარდაქმნა გამოვიყენოთ (2.1.1) სისტემის პირველ განტოლებაზეც. დავუშვათ რომ $P(0,0)=1$.

$\overline{H}(i,s)$ და $\overline{P}(0,s)$ სიდიდეების მიმართ, როცა $n>1$, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\overline{P}(0,s)(s+m\alpha+n\beta)-\overline{H}(1,s)\overline{g}(s+m\alpha+(n-1)\beta)=1$$

$$\overline{P}(0,s)(m\alpha+n\beta)+\overline{H}(2,s)\overline{g}(s+m\alpha+(n-2)\beta)-$$

$$-\overline{H}(1,s)\left[1+\frac{m\alpha+(n-1)\beta}{\beta}\overline{g}(s+m\alpha+(n-1)\beta)\right]=0$$

$$\overline{H}(i+1,s)\overline{g}(s+m\alpha+(n-(i+1))\beta)+\sum_{j=0}^{i-1}\left((-1)^{j+1}\overline{H}(i-j,s)\frac{\prod\limits_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\ \ \beta^j}\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{m\alpha+(n-i)\beta}{(j+1)\beta}\overline{g}\left(s+m\alpha+\left(n-(i-j)\right)\beta\right)\right)\Bigg)=0 \qquad 2\le i<n,$$

$$\overline{H}(i+1,s)\overline{g}\left(s+\left(m+n-(i+1)\right)\alpha\right)+\sum_{j=0}^{i-n}\left[(-1)^{j+1}\overline{H}(i-j,s)\frac{\left[m+n-(i-j)\right]!}{j!\ \ [m+n-i]!}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{m+n-i}{j+1}\overline{g}\left(s+\left(m+n-(i-j)\right)\alpha\right)\right)\right]+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}\left[(-1)^{j+1}\frac{m!\ \ \alpha^{i-n}}{(m+n-i)!\left[n-(i-j)\right]!\ \ \beta^{[n-(i-j)]}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\overline{H}(i-j,s)\prod_{k=1}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{\prod_{k=1}^{i-n}\left[k\alpha+\left(n-(i-j)\right)\beta\right]}\left(1+\frac{(m+n-i)\alpha}{(i-n+1)\alpha+\left(n-(i-j)\right)\beta}\overline{g}\left(s+m\alpha+\left(n-(i-j)\right)\beta\right)\right)\right]=0$$

$$n\le i<m+n,$$

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}\overline{H}(m+n-j,s)+\sum_{j=m+1}^{m+n-1}(-1)^{j}\overline{H}(m+n-j,s)\frac{m!\ \ \alpha^{m}\ \prod_{k=1}^{j-m}[m\alpha+k\beta]}{[j-m]!\ \ \beta^{j-m}\ \prod_{k=1}^{m}[k\alpha+(j-m)\beta]}=0$$

ხოლო, როცა $n=1$, მაშინ უკანასკნელი სისტემის მეორე განტოლება შეიცვლება განტოლებით:

$$\overline{P}(0,s)(m\alpha+\beta)+\overline{H}(2,s)\overline{g}\left(s+(m-1)\alpha\right)-\overline{H}(1,s)\left[1+m\overline{g}(s+m\alpha)\right]=0$$

2.3. დარეზერვებული სისტემის ანალიზი ეკონომიკური კრიტერიუმის მიხედვით

განვიხილოთ m ძირითადი და n სარეზერვო ელემენტისგან შედგენილი დარეზერვებული სისტემა. ელემენტების მტყუნება ხდება ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად. ძირითადი ელემენტების მტყუნება ხდება α ინტენსივობით, სარეზერვო ელემენტებისა - β ინტენსივობით, $0<\beta\leq\alpha$. დაზიანებული ძირითადი ელემენტი მყისიერად იცვლება სარეზერვო ელემენტით და შესაბამისად იცვლება მტყუნების ინტენსივობაც. მტყუნებული ელემენტი (როგორც ძირითადი, ასევე სარეზერვო) გადაეცემა აღსადგენად. გვაქვს ერთი აღმდგენი ხელსაწყო. აღდგენის დროის განაწილების ფუნქცია მივიღოთ ზოგადად $G(t)$. $\rho(u)$ იყოს აღდგენის ინტენსივობა.

განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესები:

$i(t)$- დროის t მომენტში მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა;

$\xi(t)$- აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო t მომენტისათვის;

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$P(0,t)=P\{i(t)=0\}$;

$$p(i,t,u)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\mathrm{P}\{i(t)=i, u\leq\xi(t)<u+h\}\right),\ \ i=\overline{1,m+n}$$

განხილული სისტემა ძირითადი და სარეზერვო ელემენტების მტყუნებებითა და აღდგენებით განიხილება როგორც მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემა, რომელშიც განაცხადები შედის ორი წყაროდან. დარეზერვებული სისტემა წარმოადგენს §2.1-ში განხილული მომსახურების სისტემის მოდელს.

რამდენადაც სისტემის მდგომარეობათა სიმრავლე სასრულია, სტაციონარული მდგომარეობა არსებობს პარამეტრთა ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის. განვიხილოთ სისტემის მოქმედება სტაციონარულ მდგომარეობაში და შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\lim_{t\to\infty}P(0,t)=P(0),\quad \lim_{t\to\infty}p(i,t,u)=p(i,u),\quad i=\overline{1,m+n}.$$

გავითვალისწინებთ, რა რომ სტაციონალურ მდგომარეობაში $\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial t}=0$ და $\frac{dP(0,t)}{dt}=0$, (2.1.1) სისტემიდან მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$[m\alpha+n\beta]P(0)=\int_0^\infty p(1,u)\rho(u)du;$$

$$\frac{dp(1,u)}{du}=-[m\alpha+(n-1)\beta+\rho(u)]p(1,u); \tag{2.3.1}$$

$$\frac{dp(i,u)}{du}=-[m\alpha+(n-i)\beta+\rho(u)]p(i,u)+[m\alpha+(n-(i-1))\beta]p(i-1,u), \qquad 2\le i\le n;$$

$$\frac{dp(i,u)}{du}=-[(m+n-i)\alpha+\rho(u)]p(i,u)+[m+n-(i-1)]\alpha p(i-1,u), \qquad n<i<m+n;$$

$$\frac{dp(m+n,u)}{du}=-\rho p(m+n,u)+\alpha p(m+n-1,u).$$

ხოლო სასაზღვრო პირობებისათვის გვექნება:

$$p(1,0)=[m\alpha+n\beta]P(0)+\int_0^\infty p(2,u)\rho(u)du;$$

$$p(i,0)=\int_0^\infty p(i+1,u)\rho(u)du, \qquad 2\le i\le m+n-1, \tag{2.3.2}$$

$$p(m+n,0)=0.$$

$P(0)$ და $p(i,u)$ სიდიდეები (2.3.1) სისტემიდან შემდეგნაირად გამოისახება:

$$P(0)=\frac{C(1)}{m\alpha+n\beta}\bar{g}(m\alpha+(n-1)\beta),$$

$$p(1,u)=C(1)[1-G(u)]e^{-[m\alpha+[n-1]\beta]u} \tag{2.3.3}$$

$$p(i,u)=[1-G(u)]\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j C(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\,\beta^j}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}, \qquad 2\le i\le n,$$

$$p(i,u)=[1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^j C(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\ [m+n-i]!}e^{-[m+n-(i-j)]\alpha u}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}(-1)^j C(i-j)\frac{m!\ \ \alpha^{i-n}\ \ \prod_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha+k\beta]}{(m+n-i)!\,[n-(i-j)]!\ \ \beta^{[n-(i-j)]}\ \ \prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}\right],$$

$$n<i<m+n;$$

$$p(m+n,u)=[1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C(m+n-j)e^{-j\alpha u}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=m+1}^{m+n-1}(-1)^j C(m+n-j)\frac{m!\ \ \alpha^{m}\ \ \prod_{k=1}^{j-m}[m\alpha+k\beta]}{[j-m]!\ \ \beta^{j-m}\ \ \prod_{k=1}^{m}[k\alpha+(j-m)\beta]}e^{-[m\alpha+(j-m)\beta]u}\right],$$

სადაც $C(i)$ კოეფიციენტები ჯერჯერობით უცნობი სიდიდეებია, ხოლო $\overline{g}(s)=\int_0^\infty e^{-su}g(u)du$.

$C(i)$ კოეფიციენტების საპოვნელად (2.3.3) გამოსახულებებით გამოთვლილი $p(i,0)$ სიდიდეები გავუტოლოთ (2.3.2) სასაზღვრო პირობებს და $C(i)$ კოეფიციენტების მიმართ, როცა $n>1$, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$C(2)\overline{g}(m\alpha+(n-2)\beta)-C(1)\left[1+\frac{m\alpha+(n-2)\beta}{\beta}\overline{g}(m\alpha+(n-1)\beta)\right]=0$$

$$C(i+1)\overline{g}(m\alpha+(n-(i+1))\beta)+\sum_{j=0}^{i-1}\left[\ (-1)^{j+1}C(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\ \ \beta^j}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{m\alpha+(n-i)\beta}{(j+1)\beta}\overline{g}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)\right)\right]=0,\qquad 2\le i<n,$$

$$C(i+1)\bar{g}((m+n-(i+1))\alpha)+\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^{j+1}C(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\ [m+n-i]!}\cdot\left(1+\frac{m+n-i}{j+1}\bar{g}((m+n-(i-j))\alpha)\right)+$$

$$+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}\left[(-1)^{j+1}C(i-j)\frac{m!\ \alpha^{i-n}\prod_{k=1}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\ \beta^{[n-(i-j)]}\prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{(m+n-i)\alpha}{(i-n+1)\alpha+(n-(i-j))\beta}\bar{g}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)\right)\right]=0 \qquad n\le i<m+n-1,$$

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}C(m+n-j)+\sum_{j=m+1}^{m+n-1}(-1)^{j}C(m+n-j)\frac{m!\ \alpha^{m}\prod_{k=1}^{j-m}[m\alpha+k\beta]}{[j-m]!\ \beta^{j-m}\prod_{k=1}^{m}[k\alpha+(j-m)\beta]}=0$$

ხოლო, როცა $n=1$, მაშინ

$$C(2)\bar{g}((m-1)\alpha)-C(1)[1+(m-1)\bar{g}(m\alpha)]=0$$

$$C(i+1)\bar{g}((m+n-(i+1))\alpha)+\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^{j+1}C(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\ [m+n-i]!}\cdot\left(1+\frac{m+n-i}{j+1}\bar{g}((m+n-(i-j))\alpha)\right)=0$$

$$2\le i<m+n-1,$$

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}C(m+n-j)=0$$

ამასთან უნდა გავითვალისწინოთ ნორმირების პირობა,

$$P(0)+\sum_{i=1}^{m+n}\int_0^\infty p(i,u)du=1$$

რომელიც ადვილად გამომდინარეობს იმ მდგომარეობის გათვალისწინებით, რომ ხდომილობები, რომელთა ალბათობების შეკრებაც ხდება წარმოადგენენ უთავსებად ხდომილობათა სრულ სივრცეს.

აქედან კი მიიღება

$$C(m+n)=\frac{1-\dfrac{C(1)}{m\alpha+n\beta}\bar{g}(m\alpha+(n-1)\beta)}{E\xi}, \qquad (2.3.4)$$

სადაც $E\xi=\int_0^\infty[1-G(u)]du$ ელემენტის აღდგენის საშუალო დროა.

ეკონომიკური კრიტერიუმი

ჩვენ განვიხილავთ დროის ერთეულში მოგების ფუნქციას, როცა n არის ცვლადი. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ n-ის ოპტიმალური მნიშვნელობა.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$E_1(n)$— ქმედუნარიანი ძირითადი ელემენტების რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი;

$E_2(n)$— სარეზერვო ელემენტების რაოდენობის მათემატიკური ლოდინი;

$E_3(n)$— დროის სტაციონარულ მდგომარეობაში მოქმედი აღმდგენი ორგანოების საშუალო რაოდენობა.

ცხადია:

$$E_1(n)=m-\sum_{i=n+1}^{m+n}\int_0^{\infty}(i-n)p(i,u)du,$$

$$E_2(n)=nP(0)+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}(n-i)p(i,u)du,$$

$$E_3(n)=1-P(0).$$

(2.3.3) მნიშვნელობების გათვალისწინებით კი მივიღებთ:

$$E_1(n)=mP(0)+C(m+n-1)\frac{1-\bar{g}(\alpha)}{\alpha}+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j C(n-j)\frac{\prod_{k=0}^{j-1}(m\alpha+k\beta)}{\beta^{j-1}(j-1)!((m-1)\alpha+j\beta)}\cdot\frac{1-\bar{g}(m\alpha+j\beta)}{m\alpha+j\beta}$$

$$E_2(n)=nP(0)+\sum_{i=1}^{n}\left[(n-i)\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j C(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\,\beta^j}\cdot\frac{1-\bar{g}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)}{m\alpha+(n-(i-j))\beta}\right]$$

$$E_3(n)=1-P(0)$$

ვთქვათ

$p=$ სისტემის შემოსავალია დროის ერთეულში ერთი ქმედუნარიანი ძირითადი ელემენტიდან,

$c_1=$ დანახარჯი ერთ ძირითად ელემენტზე დროის ერთეულში,

c_2 =დანახარჯი ერთ ელემენტზე, როცა ის იმყოფება შემსუბუქებულ დარეზერვებაში,

c_3 =დანახარჯი დროის ერთეულში აღმდგენ ელემენტზე, როცა ის მუშაობს,

c_4 =დანახარჯი აღმდგენ ელემენტზე დროის ერთეულში, როცა ის უმოქმედოა.

მაშინ მოგების ფუნქცია დროის ერთეულში შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად:

$$F(n)=(p-c_1)E_1(n)-c_2E_2(n)-c_3E_3(n)-c_4(1-E_3(n)) \qquad (2.3.5)$$

n-ის ოპტიმალურ მნიშვნელობად n^* შეიძლება ჩავთვალოთ სიდიდე, რომლისთვისაც $F(n)$ ფუნქცია მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

მოგების ფუნქციის საშუალებით შესაძლებელი ხდება შევარჩიოთ აღდგენის კონკრეტული განაწილების ფუნქციისათვის სარეზერვო ელემენტების ოპტიმალური რაოდენობა, ასევე სარეზერვო ელემენტების ფიქსირებული რაოდენობისათვის შესაძლებელია აღდგენის ფუნქცია ისე შევარჩიოთ, რომ მოგება იყოს მაქსიმალური.

დაბოლოს, შესაძლებელია ერთდროულად შეირჩეს აღდგენის განაწილების ფუნქციაც და სარეზერვო ელემენტების რაოდენობაც მაქსიმალური მოგების მისაღებად.

განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი:

$p=450\$/$ დღეში, $c_1=90\$/$ დღეში, $c_2=70\$/$ დღეში, $c_1=c_2=100\$/$ დღეში.

$m=10,\ 1\le n\le 10,\ \mu=1,\ \alpha=0{,}02,\ \beta=0{,}01.$

აღდგენის ფუნქციებად განვიხილოთ ერთიდაიგივე $\frac{1}{\mu}$ მათემატიკური ლოდინის მქონე ფუნქციები. ამ მიზნით განვიხილოთ შემდეგი განაწილების ფუნქციები:

$$\text{I. } G_\mu(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1-e^{-\mu t}, & t>0.\end{cases};$$

$$\text{II. } G_\mu(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ 1-e^{-2\mu t}(1+2\mu t), & t>0.\end{cases}; \qquad (2.3.6)$$

III. $G_\mu(t)=\begin{cases}0, & t\le \dfrac{1}{\mu},\\ 1, & t>\dfrac{1}{\mu}.\end{cases}$;

IV. $G_\mu(t)=\begin{cases}0, & t\le \tau,\\ 1-e^{-\frac{\mu}{1-\mu\tau}(t-\tau)}, & t>\tau.\end{cases}, \qquad \tau=\dfrac{\mu}{2}.$

მოგების ფუნქცია მომსახურების ხანგრძლივობის მოცემული განაწილების ფუნქციებისათვის შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი ცხრილით:

ცხრილი 1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	3426,9	3374,5	3309,2	3241,1	3172,5	3103,7	3035	2966,2	2887,5	2828,8
II	3431,2	3375,6	3308,8	3240,1	3171,3	3102,3	3033,4	2964,6	2895,7	2826,9
III	3435,5	3376,2	3308	3239	3170	3100,9	3031,9	2962,9	2893,9	2824,9
IV	3433,3	3375,9	3308,4	3239,6	3170,6	3101,6	3032,7	2963,7	2894,8	2825,9

როგორც ცხრილი 1.-დან ჩანს მოცემული α-სა და β-სათვის ოთხივე ფუნქციისათვის $n^*=1$. აღმოჩნდა, რომ $\alpha=0{,}02$ და $\beta=0{,}01$-სათვის, როცა $m=\overline{1,\ 10}$, ყოველთვის $n^*=1$.

ცხრილი 2. გამოხატავს მოგების ფუნქციის ცვლილებას $m=\overline{1,\ 10}$-სათვის და ოპტიმალური $n^*=1$-სათვის. როგორც ცხრილიდან ჩანს, m-ის მცირე მნიშვნელობისათვის ერთიდაიგივე მათემატიკური ლოდინის მქონე განაწილების ფუნქციებისათვის მოგების ფუნქციის მნიშვნელობები ძალიან მცირეთი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. განსხვავება თავს იჩენს m-ის ზრდასთან ერთად.

ცხრილი 2.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	191,8	552,7	913,3	1273,6	1633,6	1999,9	2352,1	2710,8	3069,1	3426,9
II	191,9	552,9	913,7	1274,2	1634,5	1994,5	2354,1	2713,5	3072,5	3431,2
III	192,0	553,1	914,1	1274,9	1635,5	1995,9	2356,2	2716,2	3076,0	3435,5
IV	191,9	553	913,9	1274,5	1365	1995,2	2355,2	2714,8	3074,2	3433,3

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ α-სა და β-ს ცვლის შესაბამისად იცვლება n^* მნიშვნელობა.

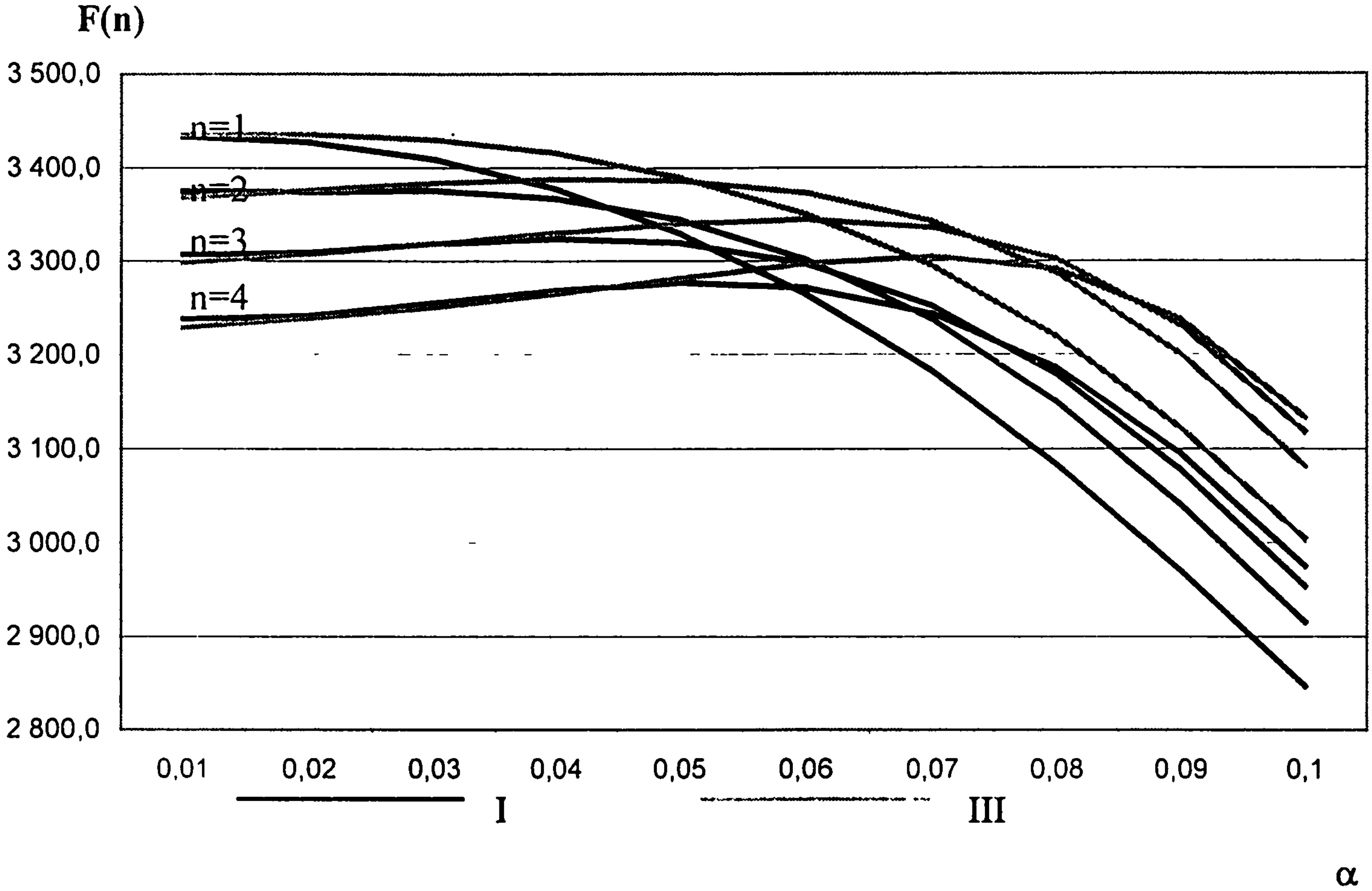
დავუშვათ $\alpha = \overline{0{,}01;\ 0{,}1}$ და $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$. შემდეგი ცხრილი გამოსახავს მოცემული α-სა და β-სათვის და (2.2.6) განაწილების ფუნქციებისათვის n^*-ისა და შესაბამისად $F(n^*)$ მნიშვნელობებს:

ცხრილი 3.

α		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
I	n*	1	1	1	1	2	2	3	4	5	7
	F(n)*	34433,2	3426,9	3408,9	3377.2	3344,2	3301,9	3252,1	3186,2	3100,7	2990.8
II	n*	1	1	1	1	2	2	3	4	5	6
	F(n)*	3434.2	34431,2	3418,9	3395,3	3366	3337.3	3294,7	3238,5	3163,2	3057.5
III	n*	1	1	1	1	2	2	2	3	4	6
	F(n)*	3435.3	3435,5	3429,4	3414.8	3389.5	3373.4	3342,8	3302,2	3238.1	3137.8
IV	n*	1	1	1	1	2	2	3	3	4	6
	F(n)*	3434,7	344433.3	3424,1	3405	3376	3355	3315	3268,7	3198,3	3095.8

მოგების ფუნქციის ცვლილება I და III განაწილებისათვის შეიძლება გამოვსახოთ გრაფიკულად, როცა $n = 1,2,3,4$; $\alpha = \overline{0{,}01;\ 0{,}1}$ და $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$.

დიაგრამა1.



როგორც დიაგრამიდან ჩანს, როცა $n=1$ და $\alpha=0{,}01$ მოგების ფუნქციებს შორის განსხვავება მოცემული ორი აღდგენის განაწილების ფუნქციებისათვის — მაჩვენებლიანი (I) და მუდმივი (III) — უმნიშვნელოა, მაგრამ α-ს ზრდასთან ერთად ეს განსხვავება მატულობს. კერძოდ, მოგება მცირდება, მაგრამ I განაწილებისათვის უფრო სწრაფად მცირდება, ვიდრე III განაწილებისათვის. $n-$ის ზრდისას კი ეს განსხვავება იწყება $\alpha-$ს უფრო მაღალი მნიშვნელობებისათვის.

ამავე დიაგრამიდანვე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თუ $n=1$ მაქსიმალური მოგება ორივე ფუნქციისათვის არის $\alpha=0{,}01$ მნიშვნელობისათვის, $n=4$-სათვის კი მაქსიმალური მოგებას I განაწილებისათვის მიიღება როცა $\alpha=0{,}05$ და III განაწილებისათვის - $\alpha=0{,}07$.

სარეზერვო ელემენტთა ფიქსირებული რაოდენობისათვის და აღდგენის სხვადასხვა ფუნქციებისათვის (I და III) ცხრილი 4. გვიჩვენებს α-ს რა მნიშვნელობისათვის აღწევს $F(n)$ ფუნქცია მაქსიმუმს $\left(\beta = \frac{\alpha}{2}\right)$.

ცხრილი 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	0,01	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08
III	0,01	0,04	0,06	0,07	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09

შესაძლებელია თითოეული აღდგენის განაწილების ფუნქციისათვის $E_1(n)$, $E_2(n)$, $E_3(n)$, $P(0)$ ალბათური მახასიათებლები გამოვთვალოთ და გამოვიყენოთ დამოუკიდებლად ეფექტიანობისა და საიმედოობის სხვადასხვა სიდიდეების გამოსათვლელად და შესაფასებლად.

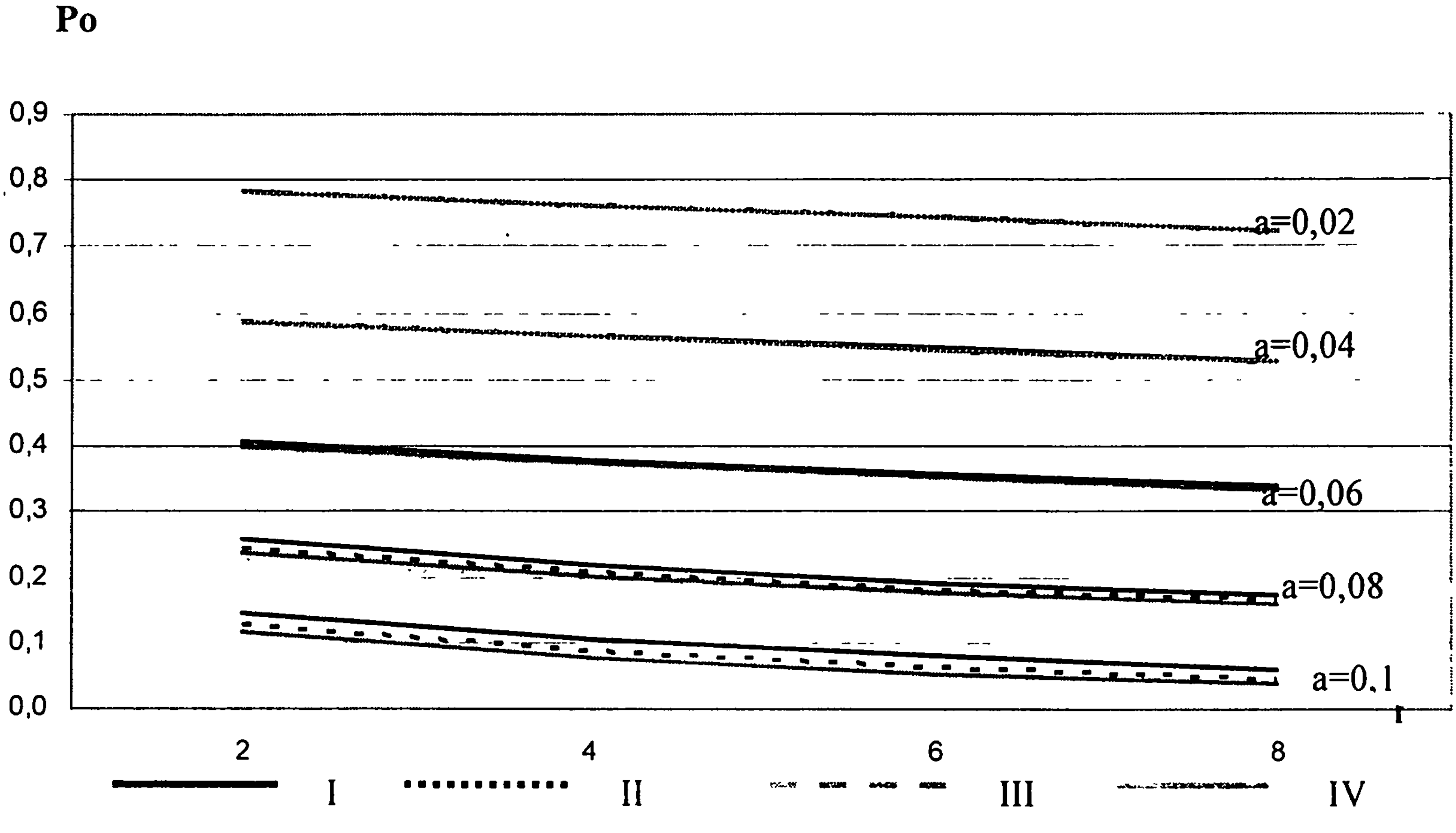
ცხრილი 5. გამოსახავს ამ სიდიდეთა მნიშვნელობებს, როცა $\alpha = 0{,}1$; $\beta = 0{,}01$; $m = 10$ და $n = 5$, სადაც $E_4(n)$ არის სისტემაში მტყუნებულ ელემენტთა საშუალო რაოდენობა დროის ერთეულში და $E_4(n) = 1 - (E_1(n) + E_2(n))$.

ცხრილი 5.

	E1	E2	E3	E4	P(0)
I	8,9285	1,4678	0,9075	4,6037	0,0925
II	9,106	1,4458	0,9251	4,4482	0,0749
III	9,3176	1,4257	0,946	4,2567	0,054
IV	9,2091	1,444	0,9354	4,3469	0,0646

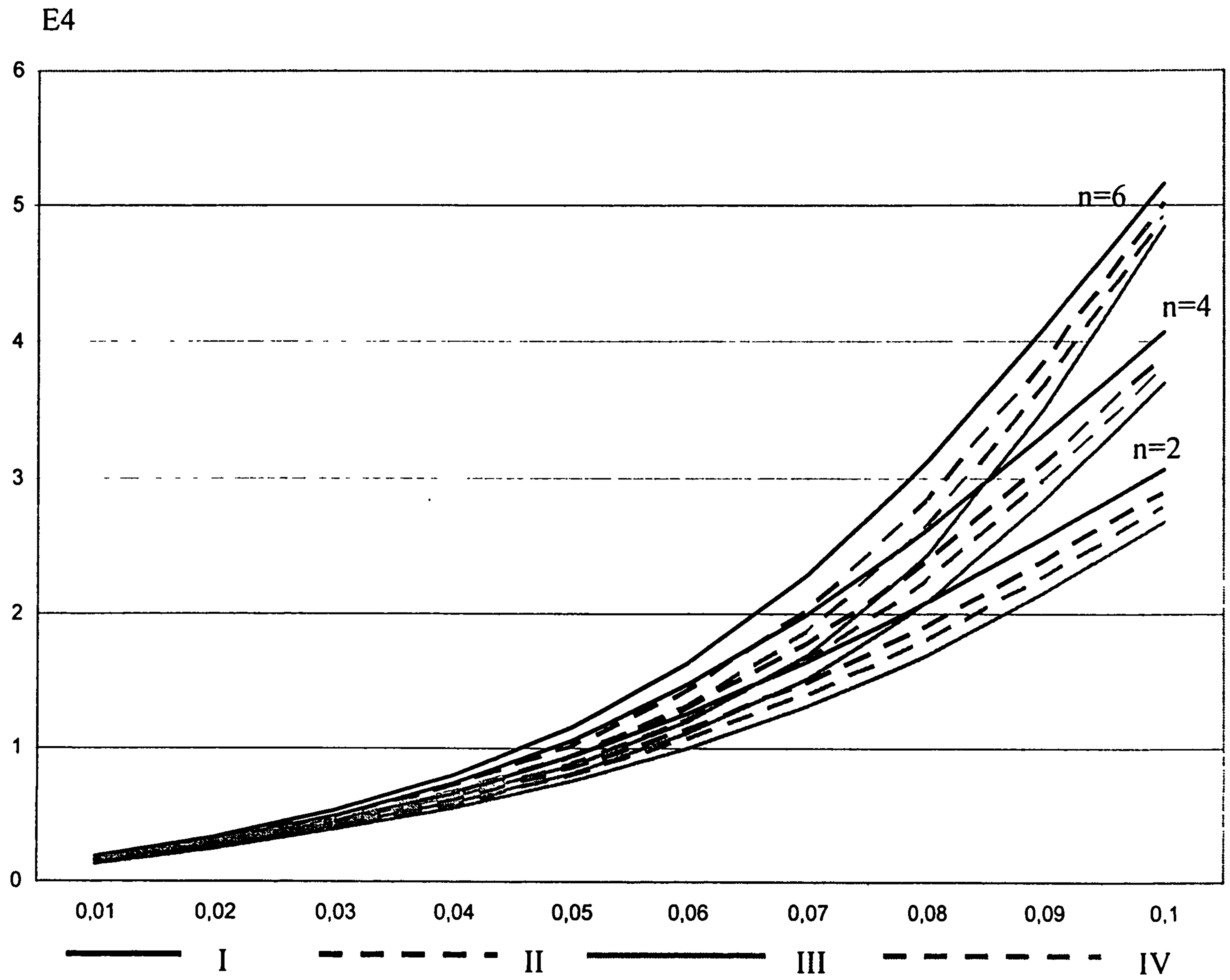
დიაგრამა 2 გამოხატავს α-ს ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის მომსახურე ორგანოს დაუკავებლობის ალბათობის ცვლილება n-ის ცვლილების შესაბამისად.

დიაგრამა 2.



როგორც დიაგრამიდან ჩანს, როცა $\alpha \to 0$ აღდგენის განაწილების ფუნქციის ცვლილება უმნიშვნელოდ აისახება შედეგებზე. მომსახურების დროის განაწილების ფუნქციის გავლენა შეიმჩნევა α–ს ზრდასთან ერთად. თუ მტყუნებული ელემენტის აღდგენა ხდება მაჩვენებლიანი განაწილების კანონით სხვა ფუნქციებთან შედარებით მეტია ალბათობა იმისა, რომ სისტემაში არ იქნება მტყუნებული ელემენტი, მაშინ როცა მუდმივი განაწილების შემთხვევაში ამის ალბათობა ყველაზე მაღალია.

დიაგრამა 3.



დიაგრამა 3 გამოხატავს n-ის ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის მტყუნებულ ელემენტთა საშუალო რაოდენობის ცვლილებას α-ს ცვლილების შესაბამისად. დიაგრამა 2-ს მსგავსად, ამ შემთხვევაშიც ჩანს რომ აღდგენის განაწილების ფუნქციის გავლენა შეიმჩნევა α – ს ზრდასთან ერთად.

2.4. მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემა მომსახურე ორგანოს არასისტემური დაყოვნებით

მასობრივი მომსახურების სისტემაში განაცხადების მომსახურება შეიძლება შეფერხდეს ორი ტიპის ფაქტორის გავლენით. პირველი ფაქტორი ასახავს შემოსული განაცხადის ადგილს და როლს სხვა განაცხადებთან მიმართებაში, ან სხვანაირად, მოსალოდნელია რომ მას მოუწიოს ლოდინი მომსახურების დაწყებამდე სანამ მომსახურებულ იქნებიან სხვა განაცხადები. ეს შეიძლება განპირობებული იყოს იმით, რომ ისინი ადრე იყვნენ შემოსული ან აქვთ რაიმე მიზეზის გამო პრიორიტეტი. მეორე ფაქტორი განპირობებულია გარე მიზეზებით. შეიძლება მრავალი მათგანის ჩამოთვლა, მაგრამ მოდელირების თვალსაზრისით არსებითია მხოლოდ ის, რომ მომსახურე ორგანო რაღაც შემთხვევითი ინტერვალების განმავლობაში ვერ ახერხებს მომსახურებას. სწორედ ამ შემთხვევითი ინტერვალების განაწილების ფუნქცია არის ის მახასიათებელი, რაც სისტემის სხვა მახასიათებლებთან ერთად იძლევა მისი მოდელის აგების შესაძლებლობას. განვიხილოთ მასობრივი მომსახურების სისტემის ორი მოდელი მომსახურე ორგანოს არასისტემური დაყოვნების გათვალისწინებით.

მ ო დ ე ლ ი 1

განვიხილოთ m ძირითადი და n სარეზერვო ელემენტისგან შედგენილი დარეზერვებული სისტემა. ელემენტების მტყუნება ხდება ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად. ძირითადი ელემენტების მტყუნება ხდება α ინტენსივობით, სარეზერვო ელემენტებისა - β ინტენსივობით, $0<\beta\le\alpha$. დაზიანებული ძირითადი ელემენტი მყისიერად იცვლება სარეზერვო ელემენტით და შესაბამისად იცვლება მტყუნების ინტენსივობაც. მტყუნებული ელემენტი (როგორც ძირითადი, ასევე სარეზერვო) გადაეცემა აღსადგენად. გვაქვს ერთი აღმდგენი ორგანო, რომელიც შეიძლება იყოს ორ მდგომარეობაში - პასიურსა და აქტიურში. აღდგენის დროის განაწილების ფუნქცია ზოგადია - $G(t)$.

მტყუნებული ელემენტების აღდგენის შემდეგ აღმდგენი ორგანო გადადის პასიურ მდგომარეობაში. ამ მდგომარეობაში ყოფნის დრო შემთხვევითი სიდიდეა განაწილებული ზოგადი კანონით - $H(t)$. თუ პასიური მდგომარეობის გასვლის მომენტში სისტემაში არის მტყუნებული ელემენტები, აღმდგენი ორგანო იწყებს მათ აღდგენას. ხოლო თუ სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი, აღმდგენი ორგანო განაგრძობს პასიურ მდგომარეობაში ყოფნას მორიგ ციკლში. ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტის გადართვა მტყუნებული ძირითადი ელემენტის ნაცვლად ხდება აღმდგენი ორგანოს პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის დროსაც. შემოვიტანოთ შემდეგი შემთხვევითი პროცესები:

$i(t)$- დროის t მომენტში სისტემაში მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა;

$\xi(t)$- აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო t მომენტისათვის;

$\zeta(t)$- აღმდგენი ორგანოს პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო;

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$p(i,t,u)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\mathrm{P}\{i(t)=i, u\le\xi(t)<u+h\}\right),\ i=\overline{1,m+n}$$

$$q(i,t,u)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\mathrm{P}\{i(t)=i, u\le\zeta(t)<u+h\}\right),\ i=\overline{0,m+n}$$

ამგვარად, $p(i,t,u)h$ არის ალბათობა იმისა, რომ დროს t მომენტში სისტემაში არის i მტყუნებული ელემენტი, ერთი-ერთი ელემენტი აღდგენის პროცესშია და აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+h)$ინტერვალში. ხოლო $q(i,t,u)h$ არის ალბათობა იმისა, რომ აღმდგენი ორგანოს პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში და t მომენტისათვის სისტემაში დაგროვდა i მტყუნებული ელემენტი.

სისტემის მდგომარეობის აღსაწერად შემოვიტანოთ $\rho(u)$ და $\eta(u)$ სიდიდეები, რომლებიც შესაბამისად არის აღდგენის ინტენსივობა და აღმდგენი ორგანოს პასიური მდგომარეობიდან გამოსვლის ინტენსივობა. ამგვარად, $\rho(u)h$ არის ალბათობა იმისა, რომ აღდგენა დასრულდება h დროში, თუ აღდგენის დაწყებიდან გასულია u დრო. ანალოგიურად $\eta(u)h$ არის ალბათობა იმისა, რომ თუ აღმდგენი ორგანოს პასიურ მდგომარეობაში გადასვლიდან გასულია u დრო,

ის პასიური მდგომარეობიდან გამოვა h დროში. ამასთან $\rho(u)=\dfrac{g(u)}{1-G(u)}$ და $\eta(u)=\dfrac{h(u)}{1-H(u)}$, სადაც $g(u)=G'(u)$ და $h(u)=H'(u)$.

თეორემა 2.4.1. $p(i,t,u)$ და $q(i,t,u)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემებს:

$$\frac{\partial p(1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(1,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-1)\beta+\rho(u)]p(1,t,u);$$

$$\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-i)\beta+\rho(u)]p(i,t,u)+[m\alpha+(n-i+1)\beta]p(i-1,t,u), \quad 2\le i\le n; \tag{2.4.1.1}$$

$$\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial u}=-[(m+n-i)\alpha+\rho(u)]p(i,t,u)+[m+n-i+1]\alpha p(i-1,t,u), \quad n<i\le m+n$$

და

$$\frac{\partial q(0,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(0,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+n\beta+\eta(u)]q(0,t,u);$$

$$\frac{\partial q(i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-i)\beta+\eta(u)]q(i,t,u)+[m\alpha+(n-i+1)\beta]q(i-1,t,u), \quad 1\le i\le n; \tag{2.4.1.2}$$

$$\frac{\partial q(i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,t,u)}{\partial u}=-[(m+n-i)\alpha+\eta(u)]p(i,t,u)+[m+n-i+1]\alpha q(i-1,t,u), \quad n<i\le m+n$$

დამტკიცება: (2.4.1.1) სისტემის სამართლიანობა ვაჩვენეთ §2.1.-ში. (2.4.1.2) სისტემის განტოლებათა სამართლიანობის საჩვენებლად განვიხილოთ დროის უსასრულოდ მცირე ინტერვალი $(t,t+h)$ და დავაკვირდეთ სისტემის მდგომარეობათა ცვლილებას ამ ინტერვალში.

იმისათვის რომ $t+h$ მომენტში აღმდგენი ორგანო იყოს პასიურ მდგომარეობაში, პასიურ მდგომარეობაში გადასვლის მომენტიდან გასული დრო მოთავსებული იყოს $(u,u+h)$ ინტერვალში და სისტემაში არ იყოს მტყუნებული ელემენტი შესაძლებელია t მომენტში აღმდგენი ორგანო იყოს პასიურ მდგომარეობაში და პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო

მოთავსებული იყოს $(u-h,u)$ ინტერვალში, სისტემაში კი არ იყოს მტყუნებული ელემენტი. h დროში კი აღმდგენი არ გამოვა პასიური მდგომარეობიდან და არ გამტყუნდება არცერთი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობაა $(1-[m\alpha+n\beta+\eta(u-h)]h)q(0,t,u-h)h$; ამგვარად $q(0,t,u)$ ფუნქციის მიმართ მიიღება თანაფარდობა:

$$q(0,t+h,u)h=(1-[m\alpha+n\beta+\eta(u-h)]h)q(0,t,u-h)h+0(h);$$

იმისათვის, რომ $t+h$ მომენტში აღმდგენი ორგანო იყოს პასიურ მდგომარეობაში და პასიურ მდგომარეობაში გადასვლიდან გასული დრო მოთავსებული იყოს $(u,u+h)$ ინტერვალში, ამასთან სისტემაში იყოს i მტყუნებული ელემენტი, შესაძლებელია t მომენტში სისტემაში იყოს შემდეგი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. დროის t მომენტში სისტემაში არის i მტყუნებული ელემენტი, აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია და ამ მდგომარეობაში გადასვლიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში. h დროში აღმდგენი არ გამოვა პასიური მდგომარეობიდან და არ გამტყუნდება არცერთი ელემენტი.

ამ ხდომილობის ალბათობა, როცა $1\le i\le n$ ტოლია $p(i,t,u-h)h[1-(m\alpha+(n-i)\beta+\eta(u-h))h]$, ხოლო როცა $n<i\le m+n$, მაშინ - $p(i,t,u-h)h[1-((m+n-i)\alpha+\eta(u-h))h]$;

2. დროის t მომენტში აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია და ამ მდგომარეობაში გადასვლიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში. სისტემაში არის $i-1$ მტყუნებული ელემენტი. h დროში აღმდგენი ორგანო არ გამოვა პასიური მდგომარეობიდან და არ გამტყუნდება არცერთი ელემენტი.

ამ ხდომილობის ალბათობა, როცა $1\le i\le n$ იქნება $q(i-1,t,u-h)h[m\alpha+(n-i+1)\beta]h$, და როცა $n<i\le m+n$, მაშინ $q(i-1,t,u-h)h[(m+n-i+1)\alpha h]$.

3. სხვა შესაძლო ხდომილობათა ალბათობა არის $0(h)$.

ამგვარად $q(i,t,u)$ სიდიდეებისათვის დავწერთ თანაფარდობებს:

$$q(i,t+h,u)h = q(i,t,u-h)h[1-(m\alpha+(n-i)\beta+\eta(u-h))h]+$$
$$+q(i-1,t,u-h)h[m\alpha+(n-i+1)\beta]h+o(h), \qquad 1\le i\le n,$$
$$q(i,t+h,u)h = q(i,t,u-h)h[1-((m+n-i)\alpha+\eta(u-h))h]+$$
$$+q(i-1,t,u-h)h[(m+n-i+1)\alpha h]+o(h), \qquad n<i\le m+n$$

აქედან, მაგალითად უკანასკნელი თანაფარდობის მარტივი გარდაქმნით დავწერთ:

$$\frac{q(i,t+h,u)-q(t,h,u)}{h}+\frac{q(i,t,u)-q(i,t,u-h)}{h}=[(m+n-i)\alpha+(u-h)]q(i,t,u-h)+$$
$$+(m+n-i+1)\alpha q(i-1,t,u-h)+\frac{0(h)}{h}$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $h\to\infty$ მიიღება (2.4.1.2) სისტემის მესამე განტოლება. ანალოგიურად მიიღება ამ სისტემის სხვა განტოლებებიც.

თეორემა 2.4.2. $p(i,t,u)$ და $q(i,t,u)$ სიდიდეთა სასაზღვრო პირობები გამოისახება შემდეგი თანაფარდობებით:

$$p(i,t,0)=\int_0^t p(i+1,t,u)\rho(u)du+\int_0^t q(i,t,u)\eta(u)du, \qquad 1\le i<m+n;$$

$$p(m+n,t,0)=\int_0^t q(m+n,t,u)\eta(u)du; \tag{2.4.1.3}$$

$$q(0,t,0)=\int_0^t p(1,t,u)\rho(u)du+\int_0^t q(0,t,u)\eta(u)du;$$

$$q(i,t,0)=0, \qquad 1\le i\le m+n$$

დამტკიცება: ამ თანაფარდობათა სამართლიანობა გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან: იმისათვის, რომ დროის $t+h$ დროში სისტემაში იყოს i მტყუნებული ელემენტი, ერთ-ერთი იყოს მომსახურების პროცესში და მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებული იყოს $(0,h)$ ინტერვალში, t მომენტში შესაძლებელია იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. t მომენტში სისტემაში არის $i+1$ მტყუნებული ელემენტი, ერთ-ერთი აღდგენის პროცესშია და მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო

მოთავსებულია $(u, u+du)$ ინტერვალში. h დროში ამ ელემენტის აღდგენა დასრულდა. ამ ხდომილობის ალბათობა u-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის $h\int_0^t p(i+1,t,u)\rho(u)du$

2. t მომენტში აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია და პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u, u+du)$ ინტერვალში. h დროში აღმდგენი ორგანო გამოვიდა პასიური მდგომარეობიდან. პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის განმავლობაში გამტყუნდა i ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა u-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის $h\int_0^t q(i,t,u)\eta(u)du$

ამ ალბათობების შეკრებით მიიღება

$$p(i,t+h,0)h = h\int_0^t p(i+1,t,u)\rho(u)du + h\int_0^t q(i,t,u)\eta(u)du + 0(h), \qquad 1 \le i < m+n;$$

ამით (2.4.1.3) თანაფარდობის სამართლიანობა დამტკიცებულია. ანალოგიური მსჯელობებით მტკიცდება დანარჩენი თანაფარდობების სამართლიანობაც.

განვიხილოთ სისტემა სტაციონარულ მდგომარეობაში და შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\lim_{t\to\infty} p(i,t,u) = p(i,u), \qquad i=\overline{1,m+n};$$

$$\lim_{t\to\infty} q_i(i,t,u) = q(i,u), \qquad i=\overline{0,m+n}$$

გავითვალისწინებთ, რა რომ სტაციონალურ მდგომარეობაში $\frac{\partial p(i,t,u)}{\partial t}=0$ და $\frac{\partial q(i,t,u)}{\partial t}=0$, მივიღებთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dp(1,u)}{du} = -[m\alpha + (n-1)\beta + \rho(u)]p(1,u);$$

$$\frac{dp(i,u)}{du} = -[m\alpha + (n-i)\beta + \rho(u)]p(i,u) + [m\alpha + (n-i+1)\beta]p(i-1,u), \; 2 \le i \le n; \qquad (2.4.1.4)$$

$$\frac{dp(i,u)}{du} = -[(m+n-i)\alpha + \rho(u)]p(i,u) + [m+n-i+1]\alpha p(i-1,u), \qquad n < i \le m+n$$

და

$$\frac{dq(0,u)}{du} = -[m\alpha + n\beta + \eta(u)]q(0,u);$$

$$\frac{dq(i,u)}{du} = -[m\alpha + (n-i)\beta + \eta(u)]q(i,u) + [m\alpha + (n-i+1)\beta]q(i-1,u), \quad 1 \le i \le n; \qquad (2.4.1.5)$$

$$\frac{dq(i,u)}{du} = -[(m+n-i)\alpha + \eta(u)]p(i,u) + [m+n-i+1]\alpha q(i-1,u), \qquad n < i \le m+n$$

ხოლო სასაზღვრო პირობებისათვის გვექნება:

$$p(i,0) = \int_0^\infty p(i+1,u)\rho(u)du + \int_0^\infty q(i,u)\eta(u)du, \qquad 1 \le i < m+n;$$

$$p(m+n,0) = \int_0^\infty q(m+n,u)\eta(u)du; \qquad (2.4.1.6)$$

$$q(0,0) = \int_0^\infty p(1,u)\rho(u)du + \int_0^\infty q(0,u)\eta(u)du;$$

$$q(i,0) = 0, \qquad 1 \le i \le m+n$$

(2.4.1.4) და (2.4.1.5) სისტემიდან $p(i,u)$ და $q(i,u)$ სიდიდეები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$p(i,u) = [1-G(u)]\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j C(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha + k\beta)}{j!\,\beta^j}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}, \qquad 1 \le i \le n,$$

$$p(i,u) = [1-G(u)]\left[\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^j C(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\;[m+n-i]!}e^{-[m+n-(i-j)]\alpha u} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=i-n+1}^{i-1}(-1)^j C(i-j)\frac{m!\;\alpha^{i-n}\;\prod_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha + k\beta]}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\;\;\beta^{[n-(i-j)]}\;\prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha + (n-(i-j))\beta]}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}\right]$$

$$n < i \le m+n,$$

$$q(i,u) = [1-H(u)]\sum_{j=0}^{i}(-1)^j K(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha + k\beta)}{j!\,\beta^j}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}, \qquad 0 \le i \le n,$$

$$q(i,u) = [1-H(u)]\left[\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^j K(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\;[m+n-i]!}e^{-[m+n-(i-j)]\alpha u} + \right. \qquad (2.4.1.7)$$

$$+\sum_{j=i-n+1}^{i}(-1)^{i}K(i-j)\frac{m!\quad\alpha^{i-n}\quad\prod_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha+k\beta]}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\quad\beta^{[n-(i-j)]}\quad\prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u}\Bigg]$$

$$n<i<m+n,$$

$$q(m+n,u)=[1-H(u)]\Bigg[\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}K(m+n-j)e^{-j\alpha u}+$$

$$+\sum_{j=m+1}^{m+n}(-1)^{i}K(m+n-j)\frac{m!\quad\alpha^{m}\quad\prod_{k=1}^{j-m}[m\alpha+k\beta]}{[j-m]!\quad\beta^{j-m}\quad\prod_{k=1}^{m}[k\alpha+(j-m)\beta]}e^{-[m\alpha+(j-m)\beta]u}\Bigg].$$

სადაც $C(i)$ და $K(i)$ კოეფიციენტები ჯერჯერობით უცნობი სიდიდეებია. ამ სიდიდეების საპოვნელად (2.4.1.7) თანაფარდობებით გამოთვლილი $p(i,0)$ და $q(i,0)$ სიდიდეები გავუტოლოთ (2.4.1.6) სასაზღვრო პირობებს. ამ კოეფიციენტების მიმართ მიიღება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$C(i+1)\bar{g}(m\alpha+(n-(i+1))\beta)+\sum_{j=0}^{i-1}\Bigg[\ (-1)^{j-1}C(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\quad\beta^{j}}\left(1+\frac{m\alpha+(n-i)\beta}{(j+1)\beta}\times\right.$$

$$\left.\times\,\bar{g}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)\ \right)\Bigg]+\sum_{j=0}^{i}K(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\quad\beta^{i}}\bar{h}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)=0,\qquad 1\le i<n;$$

$$C(i+1)\bar{g}((m+n-(i+1))\alpha)+\sum_{j=0}^{i-n}\Bigg[(-1)^{j+1}C(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\quad[m+n-i]!}\times$$

$$\times\left(1+\frac{m+n-i}{j+1}\bar{g}((m+n-(i-j))\alpha)\right)\Bigg]+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}\Bigg[(-1)^{j+1}C(i-j)\frac{m!\quad\alpha^{i-n}}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\quad\beta^{[n-(i-j)]}}\times$$

$$\times\frac{\prod_{k=1}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{\prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}\left(1+\frac{(m+n-i)\alpha}{(i-n+1)\alpha+(n-(i-j))\beta}\bar{g}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^{i}K(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\quad[m+n-i]!}\bar{h}((m+n-i+j)\alpha)+$$

$$+\sum_{j=i-n+1}^{i}\Bigg[(-1)^{i}K(i-j)\frac{m!\quad\alpha^{i-n}}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\quad\beta^{[n-(i-j)]}}\times$$

$$\frac{\prod_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha+k\beta]}{\prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}\bar{h}(m\alpha+(n-i+j)\beta)\Bigg]=0, \qquad n\le i<m+n;$$

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j C(m+n-j)+\sum_{j=m+1}^{m+n-1}(-1)^j C(m+n-j)\frac{m!\alpha^m}{(j-m)!\beta^{j-m}}\frac{\prod_{k=1}^{j-m}(m\alpha+k\beta)}{\prod_{k=1}^{jm}(k\alpha+(j-m)\beta)}+$$

$$+\sum_{j=0}^{m}(-1)^j K(m+n-j)\bar{h}(j\alpha)+\sum_{j=m+1}^{m+n}\Bigg[(-1)^j K(m+n-j)\frac{m!\alpha^m}{(j-m)!\beta^{j-m}}\times$$

$$\times\frac{\prod_{k=1}^{j-m}(m\alpha+k\beta)}{\prod_{k=1}^{jm}(k\alpha+(j-m)\beta)}\bar{h}(m\alpha+(j-m)\beta)\Bigg]=0;$$

$$C(1)\bar{g}(m\alpha+(n-1)\beta)+K(0)\left[\bar{h}(m\alpha+n\beta)-1\right]=0;$$

$$\sum_{j=0}^{i}(-1)^j K(i-j)\frac{\prod_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\beta^j}=0, \qquad 1\le i\le n;$$

$$\sum_{j=0}^{i-n}(-1)^j K(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\ [m+n-i]!}+$$

$$\sum_{j=i-n+1}^{i}(-1)^j K(i-j)\frac{m!\ \alpha^{i-n}\prod_{k=1}^{n-(i-j)}[m\alpha+k\beta]}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\ \beta^{[n-(i-j)]}\prod_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}=0,$$

$$n<i\le m+n.$$

სადაც $\bar{g}(s)=\int_0^\infty e^{-su}g(u)du$ და $\bar{h}(s)=\int_0^\infty e^{-su}h(u)du$.

სისტემის ამოხსნისას უნდა გავითვალისწინოთ ნორმირების პირობა:

$$\sum_{i=1}^{m+n}\int_0^\infty p(i,u)du+\sum_{i=0}^{m+n}\int_0^\infty q(i,u)du=1 \qquad \textbf{(2.4.1.8)}$$

რომელიც ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს:

$$C(m+n)E\xi+K(m+n)E\zeta=1$$

სადაც $E\xi=\int_0^{\infty}[1-G(u)]du$ აღდგენის საშუალო დროა, $E\zeta=\int_0^{\infty}[1-H(u)]du$ - აღმდგენი ორგანოს პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის საშუალო დრო.

მ ო დ ე ლ ი 2

პრაქტიკაში ხშირია შემთხვევა, როცა მომსახურე ორგანოს პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის დროს შესაძლებელია სისტემაში მხოლოდ განაცხადების შემოსვლა, მაგრამ არ ხდება განაცხადების ჩანაცვლება ერთი წყაროდან მეორეში. მაგალითად, თუ მმს წარმოადგენს დარეზერვებულ სისტემას, რომელშიც აღდგენასაც და გადართვასაც ასრულებს ერთი ორგანო, პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის დროს იგი შეიძლება ვერ ასრულებდეს ვერც აღდგენას და ვერც გადართვას. განვიხილოთ სწორედ ამ ტიპის მოდელი:

დარეზერვებული სისტემა შედგება m რაოდენობის ძირითადი და n რაოდენობის სარეზერვო ელემენტისგან. აღმდგენი ორგანო შესაძლებელია იყოს აქტიურ ან პასიურ მდგომარეობაში. აღმდგენის პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის დროს არ ხდება ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტების გადართვა მტყუნებული ძირითადი ელემენტების ადგილზე. ხოლო პასიური მდგომარეობიდან გამოსვლის მომენტში ხდება მყისიერი გადართვა (თუ სისტემაში არის ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი), აღმდგენი ორგანო კი იწყებს მტყუნებულ ელემენტთა აღდგენას. თუ სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი, აღმდგენი განაგრძობს პასიურ მდგომარეობაში ყოფნას მორიგ ციკლში.

სისტემის მდგომარეობის აღსაწერად განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესები:

$i(t)$- დროის t მომენტში მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა;

$j(t)$- დროის t მომენტში მტყუნებულ ძირითად ელემენტთა რაოდენობა;

$\xi(t)$- აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო t მომენტისათვის;

$\zeta(t)$- აღმდგენი ორგანოს პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო;

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$p(i,t,u)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\mathrm{P}\{i(t)=i, u\le \xi(t)<u+h\}\right),\ \ i=\overline{1,m+n}$$

$$q(i,j,t,u)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\mathrm{P}\{i(t)=i,\ j(t)=j,\ u\le \zeta(t)<u+h\}\right),\ \ i=\overline{0,m+n},\ \ j=\overline{0,n}.$$

$p(i,t,u)h$ განიმარტება ისევე როგორც (2.4.1.1)-ში, ხოლო $q(i,j,t,u)h$ - არის ალბათობა იმისა, რომ აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია, პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+h)$ ინტერვალში და t მომენტისათვის სისტემაში გამტყუნდა i ელემენტი, რომელთაგან j იყო ძირითადი ელემენტი.

$G(t)$- არის აღდგენის დროის განაწილების ფუნქცია, $H(t)$- აღმდგენი ორგანოს პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის დროის განაწილების ფუნქცია. $\rho(u)$ და $\eta(u)$ სიდიდეები, ისევ გამოხატავს აღდგენის ინტენსივობას და აღმდგენი ორგანოს პასიური მდგომარეობიდან გამოსვლის ინტენსივობას.

$p(i,t,u)$ ფუნქციების მიმართ კვლავ იწერება განტოლებათა (2.4.1.1) სისტემა.

თეორემა 2.4.3. $q(i,j,t,u)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{\partial q(0,0,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(0,0,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+n\beta+\eta(u)]q(0,0,t,u);$$

$$\frac{\partial q(i,i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,i,t,u)}{\partial u}=-[(m-i)\alpha+n\beta+\eta(u)]q(i,i,t,u)+(m-(i-1))\alpha q(i-1,i-1,t,u),\quad (2.4.2.1)$$

$$1\le i\le m;$$

$$\frac{\partial q(i,0,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,0,t,u)}{\partial u}=-[m\alpha+(n-i)\beta+\eta(u)]q(i,0,t,u)+(n-(i-1))\beta q(i-1,0,t,u),$$

$$1\le i\le n;$$

$$\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial u}=-[(m-i)\alpha+(n-i+j)\beta+\eta(u)]q(i,j,t,u)+$$

$$+(m-i+1)\alpha q(i-1,j-1,t,u)+(n-i+1+j)\beta q(i-1,j,t,u)$$

$$1\le j\le m;\qquad j<i\le m+n$$

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, მაგალითად, მეოთხე განტოლების სამართლიანობა. განვიხილოთ დროის $t+h$ მომენტი. სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$q(i,j,t+h,u)h = q(i,j,t,u-h)h\left(1-\left[(m-i)\alpha+(n-i+j)\beta+\eta(u-h)\right]\right)+ \qquad (2.4.2.2)$$
$$+(m-(i-1))\alpha h q(i-1,j-1,t,u-h)+(n-(i-1-j))\beta h q(i-1,j,t,u-h)+0(h),$$
$$1\le j\le m; \qquad j<i\le m+n$$

მართლაც, იმისათვის, რომ დროის $t+h$ მომენტი სისტემაში მტყუნებული იყოს i ელემენტი, რომელთაგან j იყო ძირითადი ელემენტი, აღმდგენი ორგანო იყოს პასიურ მდგომარეობაში და პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო $\zeta(t)\in(u,u+h)$, შესაძლებელია t მომენტში სისტემაში იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. t მომენტში სისტემაში არის i მტყუნებული ელემენტი, ამათგან j ძირითადი, აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია და პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო $\zeta(t)\in(u-h,u)$, h დროში აღმდგენი ორგანო არ გამოვა პასიური მდგომარეობიდან და არ გამტყუნდება არცერთი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა არის (2.4.2.2) თანაფარდობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები;
2. t მომენტში სისტემაში არის $i-1$ მტყუნებული ელემენტი, ამათგან $j-1$ ძირითადი, აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია და პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო $\zeta(t)\in(u-h,u)$, h დროში აღმდგენი არ გამოვა პასიური მდგომარეობიდან და არ გამტყუნდება არცერთი ძირითადი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა არის (2.4.2.2) თანაფარდობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები;
3. t მომენტში სისტემაში არის $i-1$ მტყუნებული ელემენტი, ამათგან j ძირითადი ელემენტი. აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია და პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო $\zeta(t)\in(u-h,u)$, h დროში აღმდგენი არ გამოვა პასიური მდგომარეობიდან და არ გამტყუნდება არცერთი სარეზერვო ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა არის (2.4.2.2) თანაფარდობის მარჯვენა მხარის მესამე შესაკრები;
4. სხვა შესაძლო ხდომილობათა ალბათობათა ჯამი არის $0(h)$ რიგის.

(2.4.2.2) თანაფარდობა კი ექვივალენტურია შემდეგი თანაფარდობის:

$$\frac{q(i,j,t+h,u)-q(i,j,t+h,u)}{h}+\frac{q(i,j,t,u)-q(i,j,t,u-h)}{h}=$$

$$=-[(m-i)\alpha+(n-i+j)\beta+\eta(u-h)]q(i,j,t,u-h)+(m-i+1)\alpha q(i-1,j-1,t,u-h)$$

$$+(n-i+1+j)\beta q(i-1,j,t,u-h)+\frac{0(h)}{h}.$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $h\to\infty$ მიიღება (2.4.2.1) სისტემის მეოთხე განტოლება. ანალოგიურად მიიღება ამ სისტემის სხვა განტოლებებიც.

შევნიშნოთ, რომ მეორე განტოლება აღწერს შემთხვევას, როცა სისტემაში მტყუნდება მხოლოდ ძირითადი ელემენტები, მესამე კი - როცა მტყუნდება მხოლოდ სარეზერვო ელემენტები.

თეორემა 2.4.4. $p(i,t,u)$ და $q(i,j,t,u)$ სიდიდეთა სასაზღვრო პირობები გამოისახება შემდეგი თანაფარდობებით:

$$p(i,t,0)=\int_0^t p(i+1,t,u)\rho(u)du+\int_0^t q(i,j,t,u)\eta(u)du, \qquad 0\le j\le m, \qquad j\le i<m+n;$$

$$p(m+n,t,0)=\int_t q(m+n,m,t,u)\eta(u)du; \tag{2.4.2.3}$$

$$q(0,0,t,0)=\int_0^t p(1,t,u)\rho(u)du+\int_0^t q(0,0,t,u)\eta(u)du;$$

$$q(i,j,t,0)=0, \qquad 0\le j\le m, \qquad j<i\le m+n;$$

დამტკიცება: ვაჩვენოთ პირველი თანაფარდობის სამართლიანობა:

იმისათვის, რომ $t+h$ დროში სისტემაში იყოს i მტყუნებული ელემენტი, ერთ-ერთი აღდგენის იყოს პროცესში და მომსახურების დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებული იყოს $(0,h)$ ინტერვალში, t მომენტში შესაძლებელია იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. t მომენტში სისტემაში მტყუნებულია $i+1$ ელემენტი, ერთ-ერთი ელემენტი აღდგენის პროცესშია და აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,\ u+du)$ინტერვალში. h დროში ამ ელემენტის აღდგენა დასრულდა. ამ ხდომილობის ალბათობა u ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის $h\int_0^t p(i+1,t,u)\rho(u)du$

2. t მომენტში აღმდგენი ორგანო პასიურ მდგომარეობაშია და პასიური მდგომარეობის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+du)$ინტერვალში. პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის განმავლობაში გამტყუნდა i ელემენტი, ამათგან j იყო ძირითადი. h დროში აღმდენი ორგანო გამოვიდა პასიური მდგომარეობიდან. ამ ხდომილობის ალბათობა u ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის $h\int_0^t q(i,j,t,u)\eta(u)du$;

3. სხვა შესაძლო ხდომილობების ალბათობათა ჯამი არის $0(h)$ რიგის.

ამ ხდომილობების შეკრებით მიიღება თანაფარდობა:

$$p(i,t+h,0)h = h\int_0^t p(i+1,t,u)\rho(u)du + h\int_0^t q(i,j,t,u)\eta(u)du + 0(h),$$

$$0 \le j \le m, \qquad j \le i < m+n;$$

თუ უკანასკნელი თანაფარდობის ორივე მხარეს გავყოფთ h-ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $h \to \infty$ მიიღება (2.4.2.3) სისტემის პირველი თანაფარდობა. ანალოგიურად მიიღება ამ სისტემის სხვა თანაფარდობებიც.

განვიხილოთ სისტემა სტაციონარულ მდგომარეობაში. შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\lim_{t\to\infty} p(i,t,u) = p(i,u), \qquad i=\overline{1,m+n};$$

$$\lim_{t\to\infty} q(i,j,t,u) = q(i,j,u), \quad j=\overline{0,n}, \; i=\overline{0,m+n}.$$

რადგან სტაციონალურ მდგომარეობაში $\dfrac{\partial p(i,t,u)}{\partial t}=0$ და $\dfrac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}=0$, მივიღებთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dq(0,0,u)}{du} = -[m\alpha + n\beta + \eta(u)]q(0,0,u);$$

$$\frac{dq(i,i,u)}{du} = -[(m-i)\alpha + n\beta + \eta(u)]q(i,i,u) + (m-(i-1))\alpha q(i-1,i-1,u), \quad 1 \le i \le m; \qquad (2.4.2.4)$$

$$\frac{dq(i,0,u)}{du} = -[m\alpha + (n-i)\beta + \eta(u)]q(i,0,u) + (n-(i-1))\beta q(i-1,0,u), \qquad 1 \le i \le n;$$

$$\frac{dq(i,j,u)}{du}=-[(m-i)\alpha+(n-i+j)\beta+\eta(u)]q(i,j,u)+$$

$$+(m-i+1)\alpha q(i-1,j-1,u)+(n-i+1+j)\beta q(i-1,j,u) \qquad 1\le j\le m;\quad j<i\le m+n$$

ხოლო სასაზღვრო პირობები მიიღებს სახეს:

$$p(i,0)=\int_0^\infty p(i+1,t,u)\rho(u)du+\int_0^\infty q(i,j,t,u)\eta(u)du\,, \qquad 0\le j\le m, \qquad j\le i<m+n;$$

$$p(m+n,0)=\int_0^\infty q(m+n,m,t,u)\eta(u)du\,; \tag{2.4.2.5}$$

$$q(0,0,0)=\int_0^\infty p(1,t,u)\rho(u)du+\int_0^\infty q(0,0,t,u)\eta(u)du\,;$$

$$q(i,j,0)=0\,, \qquad 0\le j\le m, \qquad j<i\le m+n;$$

(2.4.2.4) სისტემიდან $q(i,j,u)$ სიდიდეები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$q(0,0,u)=[1-H(u)]K(0,0)e^{-(m\alpha+n\beta)u}\,;$$

$$q(i,j,u)=[1-H(u)]\sum_{l=k}^{k+i-j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^l K(i-l,j-k)C_{m-j+k}^{k}C_{n-i-l+j-k}^{l-k}e^{-[(m-j+k)\alpha+(n-i+l+j-k)\beta]u} \tag{2.4.2.6}$$

სადაც $C_{m-j+k}^{k}=\dfrac{(m-j+k)!}{k!(m-j)!}$ და $C_{n-i+l+j-k}^{l-k}=\dfrac{(n-i+l+j-k)!}{l-k!(n-i+j)!}$.

$q(i,i,u)$ და $q(i,0,u)$ წარმოადგენენ (2.4.2.6) გამოსახულების კერძო შემთხვევებს, მაგრამ ისინი მარტივად შეიძლება გამოვსახოთ (2.4.2.4) სისტემიდანაც:

$$q(i,i,u)=[1-H(u)]\sum_{j=0}^{i}(-1)^j K(i-j,i-j)C_{m-i+j}^{j}e^{-[(m-(i-j))\alpha+n\beta]u} \qquad 1\le i\le m;$$

$$q(i,0,u)=[1-H(u)]\sum_{j=0}^{i}(-1)^j K(i-j,0)C_{n-i+j}^{j}e^{-[m\alpha+(n-(i-j))\beta]u} \qquad 1\le i\le n;$$

$K(i,j)$ კოეფიციენტები (2.4.1.7) გამოსახულებებში მონაწილე $C(i)$-თან ერთად ჯერჯერობით უცნობი სიდიდეებია. ამ სიდიდეების საპოვნელად $u=0$-სათვის გამოვთვალოთ $p(i,u)$ და $q(i,j,u)$ სიდიდეები და გავუტოლოთ (2.4.2.5) სასაზღვრო პირობებს. ამ კოეფიციენტების მიმართ მიიღება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$C(i+1)\overline{g}(m\alpha+(n-(i+1))\beta)+\sum_{j=0}^{i-1}\left[\ (-1)^{j+1}C(i-j)\frac{\prod\limits_{k=n-(i-1)}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{j!\quad \beta^{j}}\left(1+\frac{m\alpha+(n-i)\beta}{(j+1)\beta}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\overline{g}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)\ \right)\right]+$$

$$+\sum_{l=k}^{k+i-j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{l}K(i-l,j-k)C_{m-j+k}^{k}C_{n-i+l+j-k}^{l-k}\,\overline{h}((m-j+k)\alpha+(n-i+l+j-k)\beta)=0, \qquad 1\le i<n;$$

$$C(i+1)\overline{g}((m+n-(i+1))\alpha)+\sum_{j=0}^{i-n}\left[(-1)^{j+1}C(i-j)\frac{[m+n-(i-j)]!}{j!\quad [m+n-i]!}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{m+n-i}{j+1}\overline{g}((m+n-(i-j))\alpha)\right)\right]+\sum_{j=i-n+1}^{i-1}\left[(-1)^{j+1}C(i-j)\frac{m!\quad \alpha^{i-n}}{(m+n-i)![n-(i-j)]!\quad \beta^{[n-(i-j)]}}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\prod\limits_{k=1}^{n-(i-j)}(m\alpha+k\beta)}{\prod\limits_{k=1}^{i-n}[k\alpha+(n-(i-j))\beta]}\left(1+\frac{(m+n-i)\alpha}{(i-n+1)\alpha+(n-(i-j))\beta}\overline{g}(m\alpha+(n-(i-j))\beta)\right)\right]+$$

$$+\sum_{l=k}^{k+i-j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{l}K(i-l,j-k)C_{m-j+k}^{k}C_{n-i+l+j-k}^{l-k}\,\overline{h}((m-j+k)\alpha+(n-i+l+j-k)\beta)=0$$

$$n\le i<m+n;$$

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^{j}C(m+n-j)+\sum_{j=m+1}^{m+n-1}(-1)^{j}C(m+n-j)\frac{m!\alpha^{m}}{(j-m)!\,\beta^{j-m}}\frac{\prod\limits_{k=1}^{j-m}(m\alpha+k\beta)}{\prod\limits_{k=1}^{jm}(k\alpha+(j-m)\beta)}+$$

$$+\sum_{l=k}^{k+m}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{l}K(n+m-l,m-k)\overline{h}(k\alpha+(l-k)\beta)=0;$$

$$C(1)\overline{g}(m\alpha+(n-1)\beta)+K(0,0)\left[\overline{h}(m\alpha+n\beta)-1\right]=0;$$

$$\sum_{l=k}^{k+i-j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{l}K(i-l,j-k)C_{m-j+k}^{k}C_{n-i+l+j-k}^{l-k}=0, \qquad 0\le j\le m, \qquad j<i\le m+n.$$

ნორმირების პირობა ამ შემთხვევაში მიიღებს სახეს

$$\sum_{i=1}^{m+n}\int_{0}^{\infty}p(i,u)du+\sum_{i=0}^{m+n}\sum_{ij=0}^{m}\int_{0}^{\infty}q(i,j,u)du=1 \qquad \textbf{(2.4.2.7)}$$

საიდანაც

$$C(m+n)E\xi+K(m+n,m)E\zeta=1$$

სადაც $E\xi=\int_0^\infty[1-G(u)]du$ აღდგენის საშუალო დროა, $E\zeta=\int_0^\infty[1-H(u)]du$ - აღმდგენი ორგანოს პასიურ მდგომარეობაში ყოფნის საშუალო დრო.

მიღებული შედეგები საშუალებას გვაძლევს გამოვსახოთ მომსახურების სხვადასხვა მახასიათებლები: ლოდინის დროის განაწილების ფუნქცია t მომენტში მტყუნებული ელემენტის მომსახურების დაწყებამდე, მომსახურე ორგანოს აქტიურ მდგომარეობაში ყოფნის საშუალო დრო და სხვა პარამეტრები, რომლებიც თავის მხრივ შეიძლება გამოვიყენოთ ეფექტიანობისა და საიმედოობის სხვა მახასიათებლების შესაფასებლად.

თავი III

მასობრივი მომსახურების ჩაკეტილი სისტემა ორი ტიპის მომსახურებით

3.1. დარეზერვებული სისტემა რამდენიმე გადამრთველითა და ერთი აღმდგენით

განვიხილოთ დარეზერვებული სისტემა, რომელიც შედგება m რაოდენობის ძირითადი და n რაოდენობის სარეზერვო ელემენტისაგან. ძირითადი ელემენტების მტყუნება ხდება α, ხოლო სარეზერვოსი β ინტენსივობებით, $0 \le \beta \le \alpha$. ძირითადი ელემენტის მტყუნება წარმოშობს როგორც აღდგენის, ასევე გადართვის მოთხოვნილებას, მაშინ როცა — სარეზერვოს მტყუნება წარმოშობს მხოლოდ აღდგენის მოთხოვნილებას. მტყუნებული ელემენტები, როგორც ძირითადი, ასევე სარეზერვო გადაეცემა აღსადგენად. მტყუნებული ძირითადი ელემენტი კი იცვლება ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტით ამ უკანასკნელის გადართვის შემდეგ. გადართვები და აღდგენები ხდება პრინციპით: პირველი მოვიდა, პირველი გავიდა ე.ი. თუ სისტემაში მტყუნებულია რამდენიმე ძირითადი ელემენტი გადართვა ხდება პირველად მტყუნებული ელემენტის ადგილზე. ასევე მტყუნებულ ძირითად და სარეზერვო ელემენტებს შორის პრიორიტეტები არ მოქმედებს, პირველად მტყუნებული პირველად აღდგება. გვაქვს l გადამრთველი ორგანო. გადართვის დროის განაწილების ფუნქცია მაჩვენებლიანია μ ინტენსივობით. გადართვის დროს ელემენტთა მტყუნებები არ ხდება. გვაქვს ერთი აღმდგენი ორგანო. თუ აღმდგენი დაკავებულია, მტყუნებული ელემენტი დგება აღდგენის რიგში. აღდგენის დროის განაწილების ფუნქცია ზოგადია - $G(t)$. აღდგენილი ელემენტი აღიდგენს ყველა თავის პირვანდელ თვისებას და დგება რეზერვში, ან გადართვის რიგში, თუ ძირითად ელემენტთა სიმრავლის შესავსებად საჭიროა მისი დამატება. აღწერილი სისტემის თავისებურება ის არის, რომ გადართვა სრულდება არა აუცილებლად პირველი აღდგენის შემდეგ, რადგან ამის საჭიროება ყოველთვის არ წარმოიშობა. პირიქით, მრავალელემენტიან დარეზერვებულ სისტემებში,

როგორც წესი, ჯერ სრულდება გადართვა, რადგან ძირითადი მტყუნებული ელემენტის ადგილზე შეიძლება გადაირთოს ნებისმიერი ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი, ხოლო მორიგი მტყუნებული ელემენტი აღდგენის შემდეგ საჭიროების შემთხვევაში დგება გადართვის რიგში, ან რჩება რეზერვში, როცა ასეთი საჭიროება არ არსებობს. აღნიშნულის გამო, გადართვას ვუწოდებთ პირველი სახეობის მომსახურებას, ხოლო აღდგენას - მეორე სახისას.

როგორც ვხედავთ, გადართვებისა და აღდგენათა მომსახურების სისტემაში შემოდის ორი ტიპის განაცხადები. პირველი ტიპის განაცხადი შემოდის რომელიმე ძირითადი ელემენტის მტყუნების შემთხვევაში. შევნიშნოთ, რომ იგივე მტყუნება წარმოშობს აგრეთვე მეორე ტიპის განაცხადს - მტყუნებული ელემენტი თხოულობს მომსახურებას. მეორე ტიპის განაცხადს წარმოშობს აგრეთვე სარეზერვო ელემენტის მტყუნებაც. აქედან გამომდინარე ცხადია, რომ აღდგენათა რაოდენობა ყოველთვის მეტია გადართვათა რაოდენობაზე. სწორედ ეს გარემოება მოითხოვს სათანადო ყურადღებას როგორც ანალიზისას, ასევე საპროექტო გადაწყვეტილებათა მიღების დროს.

განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესები:

$i(t)$ - ელემენტთა რაოდენობა, რომლებიც აკლია ძირითად ელემენტთა ჯგუფს;

$j(t)$ - მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა;

$\xi(t)$ - აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო t მომენტისათვის;

შემდეგში $\eta(u)$ აღნიშნავს აღდგენის ინტენსივობას და $\eta(u)=\dfrac{g(u)}{1-G(u)}$, სადაც $g(u)=G'(u)$.

სისტემის მდგომარეობის აღსაწერად განვსაზღვროთ შემდეგი ფუნქციები:

$$P(i,t)=P\{i(t)=i,\ j(t)=0\},\quad i=\overline{1,m}$$

$$q(i,j,t,u)=\lim\left(\frac{1}{h}P\{i(i)=i, j(t)=j, \mathrm{u}<\xi(t)<u+h\}\right),\qquad i=\overline{1,m},\qquad j=\overline{1,n+i}.$$

გამოიყოფა შემთხვევები:

1. $1\le l<m$,
2. $l\ge m$.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა.

თეორემა 3.1.1. $P(i,t)$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{dP(0,t)}{dt}=-(m\alpha+n\beta)P(0,t)+\mu P(1,t)+\int_0^t q(0,1,t,u)\eta(u)du;$$

$$\frac{dP(i,t)}{dt}=-((m-i)\alpha+n\beta+i\mu)P(i,t)+(i+1)\mu P(i+1,t)+\int_0^t q(i,1,t,u)\eta(u)du,\quad 1\le i<l; \qquad (3.1.1)$$

$$\frac{dP(i,t)}{dt}=-((m-i)\alpha+(n+i-l)\beta+l\mu)P(i,t)+l\mu P(i+1,t)+\int_0^t q(i,1,t,u)\eta(u)du,\quad l\le i<m;$$

$$\frac{dP(m,t)}{dt}=-((m+n-l)\beta+l\mu)P(m,t)+\int_0^t q(m,1,t,u)\eta(u)du$$

დამტკიცება: განვიხილოთ დროის $t+h$ მომენტი და ვაჩვენოთ, რომ როცა $1\le i<l$ სამართლიანია შემდეგი (3.1.3) თანაფარდობა:

$$P(i,t+h)=P(i,t)[1-((m-i)\alpha+n\beta+i\mu)h]+P(i+1,t)(i+1)\mu+h\int_0^t q(i,1,t,u)\eta(u)du+0(h),$$

ეს თანაფარდობა გამოსახავს ფაქტს, რომ ხდომილობა $\{i(t+h)=i,\, j(t)=0\}$, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ დროის $t+h$ მომენტი ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i ელემენტი, მაგრამ სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი, შეიძლება წარმოვადგინოთ უთავსებად ხდომილობათა ჯამისგან, რომელთაგან ის ხდომილობები, რომელთა ალბათობა $0(h)$-ისგან განსხვავებულია არის შემდეგი:

1. დროის t მომენტი ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i ელემენტი, სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი. h დროში არცერთი ელემენტი არ გამტყუნებულა და არც გადართვა მომხდარა. ამ ხდომილობის ალბათობა არის თანაფარდობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები;

2. დროის t მომენტი ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია $i+1$ ელემენტი, სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი და მიმდინარეობს გადართვა. h დროში გადართვება ერთი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა არის თანაფარდობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები;

3. დროის t მომენტი ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i ელემენტი, ერთი ელემენტი მტყუნებულია და მიმდინარეობს აღდგენა. აღდგენის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+du)$ ინტერვალში. h დროში აღდგენა დასრულდება. ამ ხდომილობის ალბათობა u ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის თანაფარდობის მარჯვენა მხარის მესამე შესაკრები.

(3.1.3) თანაფარდობა ექვივალენტურია თანაფარდობის:

$$\frac{P(i,t+h)-P(i,t)}{h}=-((m-i)\alpha+n\beta+i\mu)P(i,t)+(i+1)\mu P(i+1,t)+\int_0^t q(i,1,t,u)\eta(u)du+\frac{0(h)}{h},$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $h\to 0$ მივიღებთ (3.1.1) სისტემის მეორე განტოლებას.

თეორემა 3.1.2. $q(i,j,t,u)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\frac{\partial q(0,1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(0,1,t,u)}{\partial u}=-(m\alpha+(n-1)\beta+\eta(u))q(0,1,t,u)+\mu q(1,1,t,u)$$

$$\frac{\partial q(0,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(0,j,t,u)}{\partial u}=-(m\alpha+(n-j)\beta+\eta(u))q(0,j,t,u)+\mu q(1,j,t,u)+$$
$$+(n-(j-1))\beta q(0,j-1,t,u) \qquad 1<j\le n;$$

$$\frac{\partial q(i,1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,1,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n-1)\beta+i\mu+\eta(u))q(i,1,t,u)+(i+1)\mu q(i+1,1,t,u),$$
$$1\le i<l$$

$$\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n-j)\beta+i\mu+\eta(u))q(i,j,t,u)+(i+1)\mu q(i+1,j,t,u)+$$
$$+(n-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,t,u)+(n-(i-1))\beta q(i,j-1,t,u), \qquad 1\le i<l,\ 1<j\le n;$$

$$\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n+i-j)\mu+\eta(u))q(i,j,t,u)+ \tag{3.1.2}$$
$$+(n+i-j+1)\mu q(i+1,j,t,u)+(m-(j-1))\alpha q(i-1,j-1,t,u), \qquad 1\le i<l,\ n<j\le n+i;$$

$$\frac{\partial q(i,1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,1,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n+i-l-1)\beta+l\mu+\eta(u))q(i,1,t,u)+l\mu q(i+1,1,t,u)$$
$$l\le i<m$$

$$\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n+i-l-j)\beta+l\mu+\eta(u))q(i,j,t,u)+l\mu q(i+1,j,t,u)+$$
$$+(m-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,t,u)+(n+i-(j-1)-l)\beta q(i,j-1,t,u),$$
$$l\le i<m, 1<j\le n+i-l$$

$$\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n+i-j)\mu+\eta(u))q(i,j,t,u)+$$
$$+(n+i-j+1)\mu q(i+1,j,t,u)+(m-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,t,u)$$
$$l\le i<m,\ n+i-l<j\le n+i;$$

$$\frac{\partial q(m,1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(m,1,t,u)}{\partial u}=-((m+n-l-1)\beta+l\mu+\eta(u))q(m,1,t,u)$$
$$\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial u}=-((m+n-l-j)\beta+l\mu+\eta(u))q(m,j,t,u)+$$
$$+(m+n-l-j+1)\beta q(m,j-1,t,u)+\alpha q(m-1,j-1,t,u),\quad 1<j\le m+n-l;$$
$$\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial u}=-((m+n-j)\mu+\eta(u))q(m,j,t,u)+\alpha q(m-1,j-1,t,u),$$
$$m+n-l<j\le m+n.$$

დამტკიცება: განტოლებათა სამართლიანობის საჩვენებლად კვლავ განვიხილოთ დროის უსასრულოდ მცირე ინტერვალი $(t,t+h)$ და დავაკვირდეთ სისტემის მდგომარეობათა ცვლილებას ამ ინტერვალში.

ვაჩვენოთ (3.1.2) სისტემის მეშვიდე და მერვე განტოლებების სამართლიანობა.

განვიხილოთ ხდომილობა $\{i(t+h)=i, j(t+h)=j, \mathrm{u}<\xi(t+h)<\mathrm{u}+h\}$, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ დროის $t+h$ დროში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლდეს i რაოდენობის ელემენტი და მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა იყოს j, ერთ-ერთი აღდგენის პროცესშია და აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებული იყოს $(u,u+h)$ ინტერვალში.

t მომენტში შესაძლებელია იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. დროის t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი და მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა არის j, ერთ-ერთი აღდგენის პროცესშია და აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში. ქმედუნარიან სარეზერვო ელემენტთა

რაოდენობა არის $n+i-j$. თუ $1<j\le n+i-l$, მაშინ $n+i-j\ge l$ და ამ სარეზერვო ელემენტებიდან l გადართვის პროცესშია, დანარჩენი $n+i-j-l$ რაოდენობის ელემენტი კი კვლავ რეზერვშია; თუ $n+i-l<j\le n+i$, მაშინ $n+i-j<l$ და ამიტომ ყველა სარეზერვო ელემენტი გადართვის პროცესშია. h დროში არ მტყუნდება არცერთი ელემენტი, არ გადაირთვება არცერთი ელემენტი და არც აღდგენა დასრულდება. ამ ხდომილობის ალბათობა როცა $1<j\le n+i-l$ არის $(1-((m-i)\alpha+(n+i-l-j)\beta+l\mu+\eta(u-h))h)q(i,j,t,u-h)$, ხოლო როცა $n+i-l<j\le n+i$, მაშინ $(1-((m-i)\alpha+(n+i-j)\mu+\eta(u-h))h)q(i,j,t,u-h)$.

2. დროის t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია $i+1$ რაოდენობის ელემენტი და მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა არის j. h დროში გადაირთვება ერთი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა როცა $1<j\le n+i-l$ არის $l\mu hq(i+1,j,t,u-h)$, ხოლო როცა $n+i-l<j\le n+i$, მაშინ $(n+i-j+1)\mu hq(i+1,j,t,u-h)$.

3. t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია $i-1$ რაოდენობის ელემენტი და მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა არის $j-1$. h დროში გამტყუნდა ერთი ძირითადი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა ორივე შემთხვევაში არის $(m-(i-1))\alpha hq(i-1,j-1,t,u-h)h$.

როცა $1<j\le n+i-l$, მაშინ t მომენტში შესაძლებელია იყოს კიდევ ერთი ხდომილობა

4. t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი და მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა არის $j-1$, l რაოდენობის ელემენტი გადართვის პროცესშია, h დროში გამტყუნდა $(n+i-(j-1)-l)\beta$ სარეზერვო ელემენტიდან ერთი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობაა $(n+i-(j-1)-l)\beta hq(i,j-1,t,u-h)h$.

ამ ხდომილობების შეკრებით მიიღება თანაფარდობები.

$$q(i,j,t+h,u)h=(1-((m-i)\alpha+(n+i-l-j)\beta+l\mu+\eta(u-h))h)q(i,j,t,u-h)h+$$
$$+l\mu hq(i+1,j,t,u-h)h++(m-(i-1))\alpha hq(i-1,j-1,t,u-h)h+$$
$$+(n+i-(j-1)-l)\beta hq(i,j-1,t,u-h)h+0(h) \qquad l\le i<m,\ 1<j\le n+i-l$$

$$q(i,j,t+h,u)=\left(1-\left((m-i)\alpha+(n+i-j)\mu+\eta(u-h)\right)h\right)q(i,j,t,u-h)+$$
$$+(n+i-j+1)\mu h q(i+1,j,t,u-h)+(m-(i-1))\alpha h q(i-1,j-1,t,u-h)+0(h)$$
$$l \le i < m,\ n+i-l < j \le n+i$$

ამ თანაფარდობების მარტივი გარდაქმნებითა და ზღვარზე გადასვლით, როცა $h \to \infty$ მივიღებთ დასამტკიცებელ განტოლებებს.

ანალოგიურად მტკიცდება (3.1.2) სისტემის სხვა განტოლებათა სამართლიანობაც. თანაფარდობათა შედგენისას ყურადღება უნდა მივაქციოთ გადართვაში, აღდგენაში მყოფ ელემენტთა და გადამრთველების რაოდენობას შორის დამოკიდებულებას. კერძოდ, თუ გადასართველად საჭირო ელემენტთა რაოდენობა ნაკლებია ან ტოლი გადამრთველებისა და ქმედუნარიან სარეზერვო ელემენტების რაოდენობაზე, მაშინ სისტემაში მიმდინარეობს ყველა საჭირო გადართვა. ამ ფაქტს ასახავს სწორედ მეოთხე განტოლება.

თუ სისტემაში გადამრთველების რაოდენობა მეტია გადართვისათვის საჭირო ელემენტების რაოდენობაზე, მაგრამ სარეზერვო ელემენტებში არ არის საჭირო რაოდენობის ქმედუნარიანი ელემენტი, მაშინ გადართვაში მონაწილეობს ყველა ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი. ამ ფაქტს აღწერს მეხუთე განტოლება.

მეშვიდე განტოლება აღწერს იმ ფაქტს, რომ დროის მოცემულ მომენტში სისტემაში გადართვაში საჭირო ელემენტთა რაოდენობა მეტია ან ტოლი გადამრთველების რაოდენობაზე, ხოლო ქმედუნარიან სარეზერვო ელემენტთა რაოდენობა აღემატება გადართვისათვის საჭირო ელემენტთა რაოდენობას, მაშინ სისტემაში მიდის ყველა საჭირო გადართვა.

(3.1.2) სისტემის სხვა თანაფარდობათა სამართლიანობაც მტკიცდება ანალოგიური მსჯელობების საფუძველზე.

თეორემა 3.1.3. $q(i,j,t,u)$ სიდიდეთა სასაზღვრო პირობები გამოისახება შემდეგი თანაფარდობებით:

$$q(0,1,t,0)=n\beta P(0,t)+\int_0^t q(0,2,t,u)\eta(u)du;$$

$$q(i,1,t,0)=(m-(i-1))\alpha P(i-1,t)+n\beta P(i,t)+\int_0^t q(i,2,t,u)\eta(u)du \qquad 1\le i<l;$$

$$q(i,1,t,0)=(m-(i-1))\alpha P(i-1,t)+(n+i-l)\beta P(i,t)+\int_0^t q(i,2,t,u)\eta(u)du, \quad l\le i\le m; \qquad (3.1.4)$$

$$q(i,j,t,0)=\int_0^t q(i,j+1,t,u)\eta(u)du, \qquad 0\le i\le m,\ 1<j<n+i;$$

$$q(i,n+i,t,0)=0, \qquad 0\le i\le m.$$

დამტკიცება: (3.1.4) სისტემის მეორე და მესამე თანაფარდობათა სამართლიანობა გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან:

იმისათვის, რომ დროის $t+h$ მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლდეს i რაოდენობის ელემენტი, მტყუნებული იყოს ერთი ელემენტი, რომლის აღდგენის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(0,h)$ ინტერვალში, t მომენტში შესაძლებელია იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია $i-1$ რაოდენობის ელემენტი, სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი, h დროში გამტყუნდა ერთი ძირითადი ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობაა $(m-(i-1))\alpha hP(i-1,t)$;

2. t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი, სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი. სისტემაში მიმდინარეობს მხოლოდ გადართვის პროცესი. როცა $1\le j<l$ გადართვაში მონაწილეობს j რაოდენობის ელემენტი და რეზერვში რჩება n რაოდენობის ელემენტი, თუ $l\le i\le m$, გადართვაში მონაწილეობს l რაოდენობის ელემენტი და რეზერვში იმყოფება $n+i-l$ რაოდენობის ელემენტი. h დროში

გამტყუნდა ერთი სარეზერვო ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობა როცა $1 \le i < l$ არის $n\beta hP(i,t)$, ხოლო როცა $l \le i \le m$ მაშინ $(n+i-l)\beta hP(i,t)$;

3. დროის t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი და მტყუნებულია 2 ელემენტი, რომელთაგან ერთი აღდგენის პროცესშია და აღდგენის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+du)$ ინტერვალში. h დროში აღდგენა დასრულდება. u-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით ამ ხდომილობის ალბათობა იქნება $h\int_0^t q(i,2,t,u)\eta(u)du$;

4. სხვა ხდომილობათა ალბათობების ჯამი არის $0(h)$.

ამ ხდომილობათა ალბათობების შეკრებით მივიღებთ თანაფარდობებს:

$$q(i,1,t+h,0)h = (m-(i-1))\alpha hP(i-1,t) + n\beta hP(i,t) + h\int_0^t q(i,2,t,u)\eta(u)du + 0(h), \quad 1 \le i < l;$$

$$q(i,1,t+h,0)h = (m-(i-1))\alpha hP(i-1,t) + (n+i-l)\beta hP(i,t) + h\int_0^t q(i,2,t,u)\eta(u)du + 0(h),$$

$$l \le i \le m;$$

თანაფარდობათა ორივე მხარე გავყოთ h-ზე და მივასწრაფოთ $h \to 0$, მივიღებთ (3.1.4.) სისტემის მეორე და მესამე თანაფარდობებს.

ანალოგიურად მსჯელობით შეიძლება ვაჩვენოთ სხვა თანაფარდობათა სამართლიანობაც.

იმ შემთხვევაში, როცა $l \ge m$ $P(i,t)$ და $q(i,j,t,u)$ ფუნქციები გამოითვლება ინტეგრო-დიფერენციალურ და კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემიდან, რომელიც შედგება უცვლელად (3.1.1) სისტემის პირველი და (3.1.2) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებებისგან, (3.1.1) სისტემის მეორე და (3.1.2) სისტემის მესამე, მეოთხე და მეხუთე განტოლებებისაგან იმ პირობით, რომ $1 \le i < m$ და შემდეგი განტოლებებისგან:

$$\frac{dP(m,t)}{dt} = -(n\beta + m\mu)P(m,t) + \int_0^t q(m,1,t,u)\eta(u)du;$$

$$\frac{\partial q(m,1,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial q(m,1,t,u)}{\partial u} = -((n-1)\beta + m\mu + \eta(u))q(m,1,t,u);$$

$$\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial u}=-((n-j)\beta+n\mu+\eta(u))q(m,j,t,u)+(n-(j-1))\beta q(m,j-1,t,u)+$$

$$+\alpha q(m-1,j-1,t,u), \qquad 1<j\le n;$$

$$\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(m,j,t,u)}{\partial u}=-((m+n-j)\mu+\eta(u))q(m,j,t,u)+\alpha q(m-1,j-1,t,u),$$

$$n<j\le m+n.$$

ხოლო სასაზღვრო პირობებში უცვლელად გამოვიყენებთ პირველ, მეოთხე და მეხუთე თანაფარდობებს, მეორე თანაფარდობაში კი შევცვლით პირობას $1\le i<m$.

(3.1.2) სისტემიდან შეგვიძლია თანმიმდევრობით გამოვსახოთ $q(i,j,t,u)$ სიდიდეები. თავდაპირველად მეცხრე განტოლებიდან გამოვსახავთ $q(m,1,t,u)$ ფუნქციას, მიღებულ გამოსახულებას შევიტანთ მეექვსე განტოლებაში და ვიპოვით $q(i,1,t,u)$ ფუნქციებს, როცა $l\le i<n$, აქედან მიღებულ გამოსახულებებს კი გავითვალისწინებთ მესამე განტოლებაში და გამოვთვლით $q(i,1,t,u)$ ფუნქციებს როცა $1\le i<l$. ამის შემდეგ გამოვსახავთ $q(0,1,t,u)$-ს ამ სისტემის პირველი განტოლებიდან.

მეორე ეტაპზე გამოვთვლით $q(i,2,t,u)$ ფუნქციებს. ჯერ $q(m,1,t,u)$ და $q(m-1,1,t,u)$ გამოსახულებების გამოყენებით მეათე ან მეთერთმეტე განტოლებიდან (პირობების გათვალისწინებით) გამოვსახავთ $q(m,2,t,u)$ ფუნქციას. შემდეგ თანმიმდევრობით გამოითვლება $q(i,2,t,u)$ ფუნქციები მეოთხე, მეშვიდე და მერვე განტოლებების გამოყენებით. $q(0,2,t,u)$-ს კი გამოვთვლით მეორე განტოლებიდან.

$q(m,3,t,u)$-ს გამოვსახავთ $q(m,2,t,u)$ და $q(m-1,2,t,u)$ გამოსახულებებით და ეს პროცესი გაგრძელდება სისტემის საჭირო განტოლებების თანმიმდევრობით გამოყენებით სანამ უკანასკნელად არ გამოითვლება $q(m,m+n,t,u)$ ფუნქცია $q(m-1,m+n-1,t,u)$ ფუნქციის გამოთვლის შემდეგ.

$l=1$ შემთხვევისათვის $q(i,j,t,u)$ სიდიდეების გამოთვლის თანმიმდევრობა შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სქემით:

$$
\begin{tikzcd}
q(m,1,t,u) \arrow[r] \arrow[d] & q(m-1,1,t,u) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] \arrow[dl] & q(1,1,t,u) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & q_1^0(0,1,t,u) \arrow[d] \arrow[dl] \\
q(m,2,t,u) \arrow[r] \arrow[d] & q(m-1,2,t,u) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] \arrow[dl] & q(1,2,t,u) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & q(0,2,t,u) \arrow[d] \arrow[dl] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
q(m,n,t,u) \arrow[r] \arrow[d] & q(m-1,n,t,u) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] \arrow[dl] & q(1,n,t,u) \arrow[r] \arrow[dl] & q(0,n,t,u) \arrow[dl] \\
q(m,n+1,t,u) \arrow[r] \arrow[d] & q(m,n+1,t,u) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] \arrow[dl] & q(1,n+1,t,u) \arrow[dl] & \\
\vdots \arrow[d] & & & & \\
q(m,m+n-1,t,u) \arrow[r] & q(m-1,m+n-1,t,u) \arrow[dl] & & & \\
q(m,m+n,t,u) & & & &
\end{tikzcd}
$$

სქემა 1.

$q(i,j,t,u)$ ფუნქციების მიღებულ გამოსახულებებში მონაწილეობენ უცნობი $H(i,j,t-u)$ფუნქციები, რომლებიც შეიძლება ვიპოვოთ ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით.

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა როცა $m=2, n=1,\ l=1,\quad 0<\beta<\alpha$. ამასთან დავუშვათ, რომ $\mu-\alpha\neq 0,\ \ \alpha-\beta-\mu\neq 0$ და $2\alpha-\beta-\mu\neq 0$ (ეს შემთხვევები განიხილება დამოუკიდებლად) $P(i,t),(i=0,1,2)$ და $q(i,j,t,u)\left(i=\overline{0,2},\ \ j=\overline{1,i+1}\right)$ სიდიდეების მიმართ მიიღება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\frac{dP(0,t)}{dt}=-(2\alpha+\beta)P(0,t,)+\mu P(1,t,)+\int_0^t q(0,1,t,u)\eta(u)du$$

$$\frac{dP(1,t)}{dt}=-(\alpha+\beta+\mu)P(1,t)+\mu P(2,t)+\int_0^t q(1,1,t,u)\eta(u)du \tag{3.1.5}$$

$$\frac{dP(2,t)}{dt} = -(\mu + 2\beta)P(2,t) + \int_0^t q(2,1,t,u)\eta(u)du$$

$$\frac{\partial q(0,1,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial q(0,1,t,u)}{\partial u} = -(2\alpha + \eta(u))q(0,1,t,u) + \mu q(1,1,t,u)$$

$$\frac{\partial q(1,1,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial q(1,1,t,u)}{\partial u} = -(\alpha + \mu + \eta(u))q(1,1,t,u) + \mu q(2,1,t,u)$$

$$\frac{\partial q(1,2,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial q(1,2,t,u)}{\partial u} = -(\alpha + \eta(u))q(1,2,t,u) + 2\alpha q(0,1,t,u) + \mu q(2,2,t,u)$$

$$\frac{\partial q(2,1,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial q(2,1,t,u)}{\partial u} = -(\beta + \mu + \eta(u))q(2,1,t,u)$$

$$\frac{\partial q(2,2,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial q(2,2,t,u)}{\partial u} = -(\mu + \eta(u))q(2,2,t,u) + \alpha q(1,1,t,u) + \beta q(2,1,t,u)$$

$$\frac{\partial q(2,3,t,u)}{\partial t} + \frac{\partial q(2,3,t,u)}{\partial u} = -\eta(u)q(2,3,t,u) + \alpha q(1,2,t,u)$$

შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{aligned}
&q(0,1,t,0) = \beta P(0,t) \\
&q(1,1,t,0) = 2\alpha P(0,t) + \beta P(1,t) + \int_0^t q(1,2,t,u)\eta(u)du \\
&q(1,2,t,0) = 0 \\
&q(2,1,t,0) = \alpha P(1,t) + 2\beta P(2,t) + \int_0^t q(2,2,t,u)\eta(u)du \\
&q(2,2,t,0) = \int_0^t q(2,3,t,u)\eta(u)du \\
&q(2,3,t,0) = 0
\end{aligned} \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

(3.1.5) სისტემიდან $q(i,j,t,u)$ **ფუნქციები შემდეგნაირად გამოისახება**

$$q(2,1,t,u) = (1 - G(u))H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u};$$

$$q(1,1,t,u) = (1 - G(u))\left(H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u} + \frac{\mu}{\alpha - \beta}H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\right);$$

$$q(0,1,t,u) = (1 - G(u))\left(H(0,1,t-u)e^{-2\alpha u} - \frac{\mu}{\mu - \alpha}H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu}{\mu + \beta - 2\alpha}\frac{\mu}{\alpha - \beta}H(2,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}\right);$$

$$q(2,2,t,u)=(1-G(u))\left(H(2,2,t-u)e^{-\mu u}-H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}+\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\right)H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\right);$$

$$q(1,2,t,u,)=(1-G(u))\left(H(1,2,t-u)e^{-\alpha u}-2H(0,1,t-u)e^{-2\alpha u}-\frac{\mu}{\mu-\alpha}H(2,2,t-u)e^{-\mu u}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}+\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\right);$$

$$q(2,3,t,u)=(1-G(u))\left(H(2,3,t-u)-H(1,2,t-u)e^{-\alpha u}+H(0,1,t-u)e^{-2\alpha u}+\frac{\alpha}{\mu-\alpha}H(2,2,t-u)e^{-\mu u}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\mu-\alpha}H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}-\frac{\alpha}{\beta+\mu}\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\right).$$

მიღებული გამოსახულებების გამოყენებით შეიცვლება (3.1.5) სისტემის პირველი სამი განტოლება და (3.1.6) სასაზღვრო პირობები. კერძოდ მივიღებთ:

$$\frac{dP(0,t)}{dt}=-(2\alpha+\beta)P(0,t)+\mu P(1,t)+\int_0^t\left(H(0,1,t-u)e^{-2\alpha u}-\frac{\mu}{\mu-\alpha}H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu}{\mu+\beta-2\alpha}\frac{\mu}{\alpha-\beta}H(2,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}\right)g(u)du;$$

$$\frac{dP(1,t)}{dt}=-(\alpha+\beta+\mu)P(1,t)+\mu P(2,t)+ \tag{3.1.7}$$

$$+\int_0^t\left(H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}+\frac{\mu}{\alpha-\beta}H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\right)g(u)du$$

$$\frac{dP(2,t)}{dt}=-(\mu+2\beta)P(2,t)+\int_0^t H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}g(u)du$$

$$q(1,1,t,0)=2\alpha P(0,t)+\beta P(1,t)+\int_0^t\left(H(1,2,t-u)e^{-\alpha u}-2H(0,1,t-u)e^{-2\alpha u}-\frac{\mu}{\mu-\alpha}H(2,2,t-u)e^{-\mu u}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}+\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\right)g(u)du;$$

$$q(2,1,t,0)=\alpha P(1,t)+2\beta P(2,t)+$$

$$+\int_0^t\left(H(2,2,t-u)e^{-\mu u}-H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}+\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\right)H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\right)g(u)du;$$

$$q(2,2,t,0)=\int_0^{t}\Big(H(2,3,t-u)-H(1,2,t-u)e^{-\alpha u}+H(0,1,t-u)e^{-2\alpha u}+$$

$$+\frac{\alpha}{\mu-\alpha}H(2,2,t-u)e^{-\mu u}-\frac{\alpha}{\mu-\alpha}H(1,1,t-u)e^{-(\alpha+\mu)u}-$$

$$-\frac{\alpha}{\beta+\mu}\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1.+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)H(2,1,t-u)e^{-(\beta+\mu)u}\Big)g(u)du.$$

$H(i,j,t-u)$ ფუნქციები ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციებია. მათ საპოვნელად გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა და შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\overline{q}(i,j,s,u)=\int_0^{\infty}e^{-st}q(i,j,t,u)dt,\quad \overline{H}(i,j,s)=\int_0^{\infty}e^{-st}H(i,j,t)dt,$$

$$\overline{g}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}g(t)dt,\quad \overline{P}(i,s)=\int_0^{\infty}e^{-st}P(i,t)dt$$

ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებით $q(i,j,t,u)$-ს გამოსახულებებიდან მივიღებთ:

$$\overline{q}(2,1,s,u)=(1-G(u))\overline{H}(2,1,s)e^{-(s+\beta+\mu)u};$$

$$\overline{q}(1,1,s,u)=(1-G(u))\left(\overline{H}(1,1,s)e^{-(s+\alpha+\mu)u}+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\overline{H}(2,1,s)e^{-(s+\beta+\mu)u}\right);$$

$$\overline{q}(0,1,s,u)=(1-G(u))\Big(\overline{H}(0,1,s)e^{-(s+2\alpha)u}-\frac{\mu}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)e^{-(s+\alpha+\mu)u}-$$

$$-\frac{\mu}{\mu+\beta-2\alpha}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\overline{H}(2,1,s)e^{-(s+\alpha+\mu)u}\Big);$$

$$\overline{q}(2,2,s,u)=(1-G(u))\left(\overline{H}(2,2,s)e^{-(s+\mu)u}-\overline{H}(1,1,s)e^{-(s+\alpha+\mu)u}+\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\right)\overline{H}(2,1,s)e^{-(s+\beta+\mu)u}\right);$$

$$\overline{q}(1,2,s,u)=(1-G(u))\Big(\overline{H}(1,2,s)e^{-(s+\alpha)u}-2\overline{H}(0,1,s)e^{-(s+2\alpha)u}-\frac{\mu}{\mu-\alpha}\overline{H}(2,2,s)e^{-(s+\mu)u}+$$

$$+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)e^{-(s+\alpha+\mu)u}+\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)\overline{H}(2,1,s)e^{-(s+\beta+\mu)u}\Big);$$

$$\overline{q}(2,3,s,u)=(1-G(u))\left(\overline{H}(2,3,s)e^{-su}-\overline{H}(1,2,s)e^{-(s+\alpha)u}+\overline{H}(0,1,s)e^{-s(+2\alpha)u}+\frac{\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(2,2,s)e^{-s(+\mu)u}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)e^{-(s+\alpha+\mu)u}-\frac{\alpha}{\beta+\mu}\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)\overline{H}(2,1,s)e^{-(s+\beta+\mu)u}\right).$$

ვიპოვოთ უცნობი $\overline{H}(i,j,s)$ სიდიდეები. ამისათვის $q(i,j,t,u)$-ს მიღებული გამოსახულებებიდან $u=0$-სათვის გამოვთვალოთ $q(i,j,t,0)$ მნიშვნელობები და გავუტოლოთ სასაზღვრო პირობებს. გამოვიყენოთ მათზე ლაპლასის გარდაქმნა. მივიღებთ:

$$\beta\overline{P}(0,s)-\overline{H}(0,1,s)+\frac{\mu}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)+\frac{\mu}{\mu+\beta-2\alpha}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\overline{H}(2,1,s)=0$$

$$2\alpha\overline{P}(0,s)+\beta\overline{P}(1,s)+\overline{H}(1,2,s)\overline{g}(s+\alpha)-2\overline{H}(0,1,s)\overline{g}(s+2\alpha)-\frac{\mu}{\mu-\alpha}\overline{H}(2,2,s)\overline{g}(s+\mu)+$$

$$\left.+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)\overline{g}(s+\alpha+\mu)+\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)\overline{H}(2,1,s)\overline{g}(s+\beta+\mu)\right)=$$

$$=\overline{H}(1,1,s)+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\overline{H}(2,1,s) \qquad (3.1.8)$$

$$\overline{H}(1,2,s)-2\overline{H}(0,1,s)-\frac{\mu}{\mu-\alpha}\overline{H}(2,2,s)+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)+$$

$$+\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)\overline{H}(2,1,s)=0$$

$$\alpha\overline{P}(1,s)+2\beta\overline{P}(2,s)+\overline{H}(2,2,s)\overline{g}(s+\mu)-\overline{H}(1,1,s)\overline{g}(s+\alpha+\mu)+$$

$$+\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\right)\overline{H}(2,1,s)\overline{g}(s+\beta+\mu)=\overline{H}(2,1,s)$$

$$\overline{H}(2,3,s)-\overline{H}(1,2,s)\overline{g}(s+\alpha)+\overline{H}(0,1,s)\overline{g}(s+2\alpha)++\frac{\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(2,2,s)\overline{g}(s+\mu)-$$

$$-\frac{\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)\overline{g}(s+\alpha+\mu)-\frac{\alpha}{\beta+\mu}\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)\times$$

$$\times\overline{H}(2,1,s)\overline{g}(s+\beta+\mu)=\overline{H}(2,2,s)-\overline{H}(1,1,s)+\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\right)\overline{H}(2,1,s)$$

$$\overline{H}(2,3,s)-\overline{H}(1,2,s)+\overline{H}(0,1,s)+\frac{\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(2,2,s)-$$

$$-\frac{\alpha}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)-\frac{\alpha}{\beta+\mu}\frac{\mu}{\mu+\beta-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{\alpha-\beta}\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu+3\beta-2\alpha}{\mu+\beta-2\alpha}\right)\overline{H}(2,1,s)=0$$

ლაპლასის გარდაქმნა მოვახდინოთ (3.1.7) განტოლებებზეც. დავუშვათ, რომ $P(0,0)=1,\quad P(1,0)=P(2,0)=0.$

მივიღებთ:

$$\overline{P}(0,s)(s+2\alpha+\beta)-\mu\overline{P}(1,s)-\overline{H}(0,1,s)\overline{g}(s+2\alpha)+\frac{\mu}{\mu-\alpha}\overline{H}(1,1,s)\overline{g}(s+\alpha+\mu)+$$

$$-\frac{\mu}{\mu+\beta-2\alpha}\frac{\mu}{\alpha-\beta}\overline{H}(2,1,s)\overline{g}(s+\beta+\mu)=1 \qquad \textbf{(3.1.9)}$$

$$\overline{P}(1,s)(s+\alpha+\beta+\mu)-\mu\overline{P}(2,s)-\overline{H}(1,1,s)\overline{g}(s+\alpha+\mu)-\frac{\mu}{\alpha-\beta}\overline{H}(2,1,s)\overline{g}(s+\beta+\mu)=0$$

$$\overline{P}(2,s)(s+\mu+2\beta)-\overline{H}(2,1,s)\overline{g}(s+\beta+\mu)=0$$

განტოლებათა სისტემიდან, რომელშიც შევა (3.1.8) და (3.1.9) სისტემების განტოლებები, გამოვსახავთ როგორც $\overline{H}(i,j,s)$ სიდიდეებს, ასევე $\overline{P}(i,s)$ სიდიდეებსაც.

3.2. სტაციონარული მდგომარეობის ანალიზი

განვიხილოთ სისტემა სტაციონარულ მდგომარეობაში. შემოვიტანოთ აღნიშვნები $\lim_{t\to\infty} P(i,t)=P(i)$, $\lim_{t\to\infty} q(i,j,t,u)=q(i,j,u)$. გავითვალისწინებთ რა, რომ სტაციონარულ მდგომარეობაში $\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}=0$ და $\frac{dP(i,t)}{dt}=0$, (3.1.1.) და (3.1.2.) სისტემებიდან მიიღება ინტეგრალურ და დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$(m\alpha+n\beta)P(0)=\mu P(1)+\int_0^\infty q(0,1,u)\eta(u)du;$$

$$((m-i)\alpha+n\beta+i\mu)P(i)=(i+1)\mu P(i+1)+\int_0^\infty q(i,1,u)\eta(u)du, \quad 1\le i<l; \tag{3.2.1}$$

$$((m-i)\alpha+(n+i-l)\beta+l\mu)P(i)=l\mu P(i+1)+\int_0^\infty q(i,1,u)\eta(u)du, \qquad l\le i<m;$$

$$((m+n-l)\beta+l\mu)P(m)=\int_0^\infty q(m,1,u)\eta(u)du$$

მეორე სისტემა არის განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\frac{dq(0,1,u)}{du}=-(m\alpha+(n-1)\beta+\eta(u))q(0,1,u)+\mu q(1,1,u)$$

$$\frac{dq(0,j,u)}{du}=-(m\alpha+(n-j)\beta+\eta(u))q(0,j,u)+\mu q(1,j,u)+(n-(j-1))\beta q(0,j-1,u),$$
$$1<j\le n;$$

$$\frac{dq(i,1,u)}{du}=-((m-i)\alpha+(n-1)\beta+i\mu+\eta(u))q(i,1,u)+(i+1)\mu q(i+1,1,u), \qquad 1\le i<l$$

$$\frac{dq(i,j,u)}{du}=-((m-i)\alpha+(n-j)\beta+i\mu+\eta(u))q(i,j,u)+(i+1)\mu q(i+1,j,u)+$$
$$+(n-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,u)+(n-(i-1))\beta q(i,j-1,u), \qquad 1\le i<l,\ 1<j\le n;$$

$$\frac{dq(i,j,u)}{du}=-((m-i)\alpha+(n+i-j)\mu+\eta(u))q(i,j,u)+ \tag{3.2.2}$$
$$+(n+i-j+1)\mu q(i+1,j,u)+(m-(j-1))\alpha q(i-1,j-1,u),$$
$$1\le i<l,\ n<j\le n+i;$$

$$\frac{dq(i,1,u)}{du}=-((m-i)\alpha+(n+i-l-1)\beta+l\mu+\eta(u))q(i,1,u)+l\mu q(i+1,1,u), \qquad l\le i<m;$$

$$\frac{dq(i,j,u)}{du}=-((m-i)\alpha+(n+i-l-j)\beta+l\mu+\eta(u))q(i,j,u)+l\mu q(i+1,j,u)+$$
$$+(m-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,u)+(n+i-(j-1)-l)\beta q(i,j-1,u),$$
$$l\le i<m, 1<j\le n+i-l$$

$$\frac{dq(i,j,u)}{du}=-((m-i)\alpha+(n+i-j)\mu+\eta(u))q(i,j,u)+(n+i-j+1)\mu q(i+1,j,u)+$$
$$+(m-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,u), \qquad l\le i<m,\ n+i-l<j\le n+i;$$

$$\frac{dq(m,1,u)}{du}=-((m+n-l-1)\beta+l\mu+\eta(u))q(m,1,u)$$
$$\frac{dq(m,j,u)}{du}=-((m+n-l-j)\beta+l\mu+\eta(u))q(m,j,u)+(m+n-l-j+1)\beta q(m,j-1,u)+$$
$$+\alpha q(m-1,i-1,u), \qquad 1<j\le m+n-l;$$

$$\frac{dq(m,j,u)}{du}=-((m+n-j)\mu+\eta(u))q(m,j,u)+\alpha q(m-1,j-1,u), \qquad m+n-l<j\le m+n.$$

ხოლო სასაზღვრო პირობებისათვის მივიღებთ:

$$q(0,1,0)=n\beta P(0)+\int_0^\infty q(0,2,u)\eta(u)du;$$

$$q(i,1,0)=(m-(i-1))\alpha P(i-1)+n\beta P(i)+\int_0^\infty q(i,2,u)\eta(u)du \qquad 1\le i<l;$$

$$q(i,1,0)=(m-(i-1))\alpha P(i-1)+(n+i-l)\beta P(i)+\int_0^\infty q(i,2,u)\eta(u)du, \quad l\le i\le m; \qquad (3.2.3)$$

$$q(i,j,0)=\int_0^\infty q(i,j+1,u)\eta(u)du, \qquad 0\le i\le m,\ 1<j<n+i;$$

$$q(i,n+i,0)=0, \qquad 0\le i\le m.$$

სტაციონალურ მდგომარეობაში მიღებული განტოლებათა სისტემა წარმოადგენს პირველი რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელიც ამოიხსნება ისევ სქემა 1-ის მიხედვით. თავდაპირველად გამოვსახავთ $q(m,1,u)$ სიდიდეს, განტოლებათა თანმიმდევრობით ამოხსნით ბოლოს მიიღება $q(m,m+n,u)$ სიდიდე.

$q(i,j,u)$ მიღებული გამოსახულებები გავითვალისწინოთ (3.2.1) განტოლებებსა და (3.2.3) სასაზღვრო პირობებში. ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ $\overline{g}(s)=\int\limits_0^\infty e^{-su}g(u)du$ და $\overline{g}^{(k)}(s)=\int\limits_0^\infty (-1)^k e^{-su}u^k g(u)du$.

$P(i)$სიდიდეები და $C(i,j)$უცნობი კოეფიციენტები მოიძებნება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემიდან, რომელიც მიიღება (3.2.3) სასაზღვრო პირობებისა და $q(i,j,u)$ გამოსახულებებიდან მიღებული $q(i,j,0)$ სიდიდეების გატოლებით.

სისტემის ამოხსნისას უნდა გავითვალისწინოთ ნორმირების პირობა:

$$\sum_{i=0}^{m}P(i)+\sum_{j=1}^{n+i}\sum_{i=0}^{m}\int\limits_0^\infty q(i,j,u)du=1 \qquad (3.2.4)$$

განვიხილოთ §3.1.-ში განხილული შემთხვევა, როცა სარეზერვო ელემენტი იმყოფება დაუტვირთავ დარეზერვებაში ე.ი. $m=2, n=1,\ l=1,\ \ \beta=0$ ამასთან დავუშვათ, რომ $\mu\neq\alpha$ და $\mu\neq 2\alpha$. $P(i),\ (i=0,1,2)$ და $q(i,j,u)\ \ \left(i=\overline{0,2},\ \ j=\overline{1,i+1}\right)$ სიდიდეების მიმართ მიიღება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\beta P(0)=\mu P(1)+\int\limits_0^\infty q(0,1,u)\eta(u)du$$

$$(\alpha+\mu)P(1)=\mu P(2)+\int\limits_0^\infty q(1,1,u)\eta(u)du$$

$$\mu P(2)=\int\limits_0^\infty q(2,1,u)\eta(u)du$$

$$\frac{dq(0,1,u)}{du}=-(2\alpha+\eta(u))q(0,1,u)+\mu q(1,1,u)$$

$$\frac{dq(1,1,u)}{du}=-(\alpha+\mu+\eta(u))q(1,1,u)+\mu q(2,1,u) \qquad (3.2.5)$$

$$\frac{dq(1,2,u)}{du}=-(\alpha+\eta(u))q(1,2,u)+2\alpha q(0,1,u)+\mu q(2,2,u)$$

$$\frac{dq(2,1,u)}{du}=-(\mu+\eta(u))q(2,1,u)$$

$$\frac{dq(2,2,u)}{du}=-(\mu+\eta(u))q(2,2,u)+\alpha q(1,1,u)$$

$$\frac{dq(2,3,u)}{du}=-\eta(u)q(2,3,u)+\alpha q(1,2,u)$$

შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით:

$$q(0,1,0)=0$$

$$q(1,1,0)=2\alpha P(0)+\int_0^\infty q(1,2,u)\eta(u)du$$

$$q(1,2,0)=0 \qquad (3.2.6)$$

$$q(2,1,0)=\alpha P(1)+\int_0^\infty q(2,2,u)\eta(u)du$$

$$q(2,2,0)=\int_0^\infty q(2,3,u)\eta(u)du$$

$$q(2,3,0)=0$$

(3.2.5) სისტემიდან $q(i,j,u)$ **ფუნქციები შემდეგნაირად გამოისახება:**

$$q(2,1,u)=(1-G(u))C(2,1)e^{-\mu u}$$

$$q(1,1,u)=(1-G(u))\left(C(1,1)e^{-(\alpha+\mu)u}+\frac{\mu}{\alpha}C(1,2)e^{-\mu u}\right)$$

$$q(0,1,u)=(1-G(u))\left(C(0,1)e^{-2\alpha u}-\frac{\mu}{\mu-\alpha}C(1,1)e^{-(\alpha+\mu)u}+\frac{\mu}{2\alpha-\mu}\frac{\mu}{\alpha}C(2,1)e^{-\mu u}\right)$$

$$q(2,2,u)=(1-G(u))\left(C(2,2)e^{-\mu u}-C(1,1)e^{-(\alpha+\mu)u}+\mu C(2,1)ue^{-\mu u}\right) \qquad (3.2.7)$$

$$q(1,2,u)=(1-G(u))\left(C(1,2)e^{-\alpha u}-2C(0,1)e^{-2\alpha u}-\frac{\mu}{\mu-\alpha}C(2,2)e^{-\mu u}+\frac{\mu+\alpha}{\mu-\alpha}C(1,1)e^{-(\alpha+\mu)u}+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu}{\mu-\alpha}\left(\frac{2\mu}{2\alpha-\mu}-\frac{\mu}{\alpha-\mu}\right)C(2,1)e^{-\mu u}+\frac{\mu^2}{\alpha-\mu}C(2,1)ue^{-\mu u}\right)$$

$$q(2,3,u)=(1-G(u))\left(C(2,3)-C(1,2)e^{-\alpha u}+C(0,1)e^{-2\alpha u}+\frac{\alpha}{\mu-\alpha}C(2,2)e^{-\mu u}-\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{\mu-\alpha}C(1,1)e^{-(\alpha+\mu)u}-\frac{\alpha}{\alpha-\mu}\left(1+\frac{2\mu}{2\alpha-\mu}-\frac{\mu}{\alpha-\mu}\right)C(2,1)e^{-\mu u}-\frac{\alpha\mu}{\alpha-\mu}C(2,1)ue^{-\mu u}\right)$$

$P(i)\,(i=0,1,2)$ **სიდიდეებისა და** $C(i,j)$ **კოეფიციენტების საპოვნელად გავუტოლოთ (3.2.6) სასაზღვრო პირობები და (3.2.7) თანაფარდობებით**

3.3. დარეზერვებული სისტემა რამდენიმე აღმდგენითა და ერთი გადამრთველით

დარეზერვებული სისტემა შედგება m რაოდენობის ძირითადი და n რაოდენობის სარეზერვო ელემენტისაგან. ძირითადი ელემენტების მტყუნება ხდება α, ხოლო სარეზერვოსი $-\beta$ ინტენსივობებით, $0 \le \beta \le \alpha$. მტყუნებული ძირითადი ელემენტი იცვლება ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტით ამ უკანასკნელის გადართვის შემდეგ. თუ სისტემაში არ არის ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი, მაშინ გადართვა ხდება პირველივე აღდგენის დასრულების შემდეგ. გვაქვს ერთი გადამრთველი ორგანო. გადართვის დროის განაწილების ფუნქცია ზოგადია - $H(t)$. თუ გადამრთველი დაკავებულია, ელემენტი დგება გადართვის რიგში. გადართვის დროს ელემენტთა მტყუნებები არ ხდება. მტყუნებული ელემენტი (როგორც ძირითადი, ასევე სარეზერვო) გადაეცემა აღსადგენად. გვაქვს l აღმდგენი ორგანო. აღდგენა ხდება პრინციპით: პირველად მტყუნებული აღდგება პირველი. თუ ყველა აღმდგენი დაკავებულია, მტყუნებული ელემენტი დგება აღდგენის რიგში. აღდგენის დროის განაწილების ფუნქცია მაჩვენებლიანია μ ინტენსივობით. აღდგენილი ელემენტი აღიდგენს ყველა თავის პირვანდელ თვისებას და დგება რეზერვში, ან გადართვის რიგში, თუ ძირითად ელემენტთა სიმრავლის შესავსებად საჭიროა მისი დამატება. ამგვარად, სისტემა წარმოადგენს მასობრივი მომსახურების მრავალარხიან სისტემას - გადართვებისა და აღდგენათა მომსახურების სისტემას, რომელშიც შემოდის ორი ტიპის განაცხადები.

განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესები:

$i(t)$- ელემენტთა რაოდენობა, რომლებიც აკლია ძირითად ელემენტთა ჯგუფს t მომენტში;

$j(t)$- მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა t მომენტში ;

$\theta(t)$- გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო t მომენტისათვის;

შემდეგში $\lambda(u)$ აღნიშნავს გადართვის ინტენსივობას და $\lambda(u)=\frac{h(u)}{1-H(u)}$, სადაც $h(u)=H'(u)$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$P(j,t)=P\{i(t)=0,\ j(t)=j\},\ \ j=\overline{0,n}$

$R(i,t)=P\{i(t)=i,\ j(t)=n+i\},\ \ i=\overline{1,m}$

$q(i,j,t,u)=\lim\left(\frac{1}{h}P\{i(i)=i,j(t)=j-1,\mathrm{u}<\theta(t)<u+h\}\right),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n+i}.$

შევნიშნოთ, რომ სისტემაში გადართვა არ ხდება ორ შემთხვევაში - როცა ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს არ აკლია ელემენტი, ან ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია ელემენტი, მაგრამ სისტემაში არ არის ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი გადასართავად. ამ ხდომილობათა ალბათობები არის შესაბამისად $P(j,t)$ და $R(i,t)$. $q(i,j,t,u)h$- კი არის ალბათობა ხდომილობისა, როცა სისტემაში მიმდინარეობს გადართვა და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო $\theta(t)\in(u,u+h)$. ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი და მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა არის j. $i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n+i}.$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $l\le n\le m$

თეორემა 3.3.1. $P(j,t)$ და $R(i,t)$ სიდიდეები აკმაყოფილებენ შემდეგ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{dP(0,t)}{dt}=-(m\alpha+n\beta)P(0,t)+\mu P(1,t)+\int_0^t q(1,1,t,u)\lambda(u)du;$$

$$\frac{dP(j,t)}{dt}=-(m\alpha+(n-j)\beta+j\mu)P(j,t)+(n-(j-1))\beta P(j-1,t)+(j+1)\mu P(j+1,t)+$$
$$+\int_0^t q(1,j+1,t,u)\lambda(u)du,\qquad 1\le j<l;$$

$$\frac{dP(j,t)}{dt}=-(m\alpha+(n-j)\beta+l\mu)P(j,t)+(n-(j-1))\beta P(j-1,t)+l\mu P(j+1,t)+\qquad(3.3.1)$$
$$+\int_0^t q(1,j+1,t,u)\lambda(u)du,\qquad l<j<n;$$

$$\frac{dP(n,t)}{dt} = -(m\alpha + \mu)P(j,t) + \beta P(j-1,t) + \int_0^t q(1,n+1,t,u)\lambda(u)du;$$

$$\frac{dR(i,t)}{dt} = -((m-i)\alpha + l\mu)R(i,t) + (m-(i-1))\alpha R(i-1,t) + \int_0^t q(i+1,n+i+1,t,u)\lambda(u)du,$$

$$1 \le i < m;$$

$$\frac{dR(m,t)}{dt} = -l\mu R(m,t) + \alpha R(m-1,t).$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ $R(0,t) = P(n,t)$.

დამტკიცება: ვაჩვენოთ ამ განტოლებათა სამართლიანობა. განვიხილოთ დროის უსასრულოდ მცირე ინტერვალი $(t, t+h)$ და დავაკვირდეთ სისტემის მდგომარეობათა ცვლილებას ამ ინტერვალში.

ჯერ ვაჩვენოთ (3.3.1) სისტემის პირველი განტოლების სამართლიანობა: განვიხილოთ ხდომილობა $\{i(t+h)=0,\ j(t+h)=j\}$, რაც მდგომარეობს იმაში, რომ $t+h$ მომენტში ძირითად ელემენტთა სისტემას არ აკლია ელემენტი და სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი. t მომენტში შესაძლო ხდომილობები, რომელთა ალბათობა არ არის $0(h)$ რიგის არის შემდეგი:

1. t მომენტში ადგილი აქვს ხდომილობას $\{i(t)=0,\ j(t)=j\}$, h დროში არ მოხდა მტყუნება. ამ ხდომილობის ალბათობაა $(1-(m\alpha + n\beta)h)P(0,t)$;

2. t მომენტში შესაძლებელია ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს არ აკლდეს ელემენტი, სისტემაში იყოს ერთი მტყუნებული ელემენტი, რომელიც აღდგება h დროში. ამ ხდომილობის შესაბამისი_ალბათობაა $\mu h P(1,t)$;

3. t მომენტში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია ერთი ელემენტი, სისტემაში მიმდინარეობს გადართვა და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h, u)$ ინტერვალში. h დროში გადართვა დასრულდა. u-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით ამ ხდომილობის ალბათობა იქნება $h\int_0^t q(1,1,t,u)\lambda(u)du$;

ამ ალბათობების შეკრებით მიიღება თანაფარდობა:

$$P(0,t+h)=\left(1-(m\alpha+n\beta)h\right)P(0,t)+\mu hP(1,t)+h\int_0^t q(1,1,t,u)\lambda(u)du+0(h);$$

ეს თანაფარდობა კი ექვივალენტურია თანაფარდობის:

$$\frac{P(0,t+h)-P(0,t)}{h}=-(m\alpha+n\beta)P(0,t)+\mu P(1,t)+\int_0^t q(1,1,t,u)\lambda(u)du+\frac{0(h)}{h};$$

ზღვარზე გადასვლით, როცა $h\to 0$ მიიღება (3.3.1) სისტემის პირველი განტოლება.

ეხლა ვაჩვენოთ (3.3.1) სისტემის მეხუთე განტოლების სამართლიანობა. განვიხილოთ ხდომილობა $\{i(t+h)=i,\ j(t+h)=n+i\}$, რაც მდგომარეობს იმაში რომ $t+h$ მომენტში ძირითად ელემენტთა სისტემას აკლია i ელემენტი, მტყუნებულია $n+i$ ელემენტი, ე.ი. სისტემაში არ არის ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი. t მომენტში შესაძლო ხდომილობები, რომელთა ალბათობა არ არის $0(h)$ რიგის არის შემდეგი:

1. t მომენტში ადგილი აქვს ხდომილობას $\{i(t)=i,\ j(t)=n+i\}$, h დროში არ მოხდა მტყუნება და არც მტყუნებული ელემენტებიდან არ აღდგენილა არცერთი. რადგან $l\le n$, ამიტომ ამ ხდომილობის დროს ყველა აღმდგენი დაკავებულია. ამ ხდომილობის ალბათობაა $\left(1-((m-i)\alpha+l\mu)h\right)R(i,t)$;

2. t მომენტში ადგილი აქვს ხდომილობას $\{i(t)=i-1,\ j(t)=n+i-1\}$, h დროში გამტყუნდა ერთი ელემენტი ძირითად ელემენტთა ჯგუფიდან. ამ ხდომილობის ალბათობაა $(m-(i-1))\alpha hR(i,t)$;

3. t მომენტში ადგილი აქვს ხდომილობას $\{i(t)=i+1,\ j(t)=n+i-2\}$ და სისტემაში მიმდინარეობს გადართვა, ამასთან $\theta(t)\in(u-h,u)$. h დროში დასრულდა გადართვა. ამ ხდომილობის ალბათობა u-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის $h\int_0^t q(i+1,n+i+1,t,u)\lambda(u)du$;

ამ ალბათობების შეკრებით მიიღება თანაფარდობა:

$$R(i,t+h)=(1-((m-i)\alpha+l\mu)h)R(i,t)+(m-(i-1))\alpha hR(i,t)+$$
$$+h\int_0^t q(i+1,n+i+1,t,u)\lambda(u)du+0(h)$$

ამ თანაფარდობის მარტივი გარდაქმნით და ზღვარზე გადასვლით როცა $h\to 0$ მიიღება (3.3.1) სისტემის მეხუთე განტოლება. ანალოგიური მსჯელობებით შეიძლება ვაჩვენოთ სხვა განტოლებათა სამართლიანობაც.

თეორემა 3.3.2. $q(i,j,t,u)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ-სხვაობით განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial q(1,1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(1,1,t,u)}{\partial u}=-((m-1)\alpha+n\beta+\lambda(u))q(1,1,t,u)+\mu q(1,2,t,u);$$

$$\frac{\partial q(1,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(1,j,t,u)}{\partial u}=-((m-1)\alpha+(n+1-j)\beta+j\mu+\lambda(u))q(1,j,t,u)+$$
$$+(n+1-(j-1))\beta q(1,j-1,t,u)+j\mu q(1j+,1,t,u),\qquad 1<j\le l;$$

$$\frac{\partial q(1,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(1,j,t,u)}{\partial u}=-((m-1)\alpha+(n+1-j)\beta+l\mu+\lambda(u))q(1,j,t,u)+$$
$$+(n+1-(j-1))\beta q(1,j-1,t,u)+l\mu q(1j+,1,t,u),\qquad l<j\le n;$$

$$\frac{\partial q(1,n+1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(1,n+1,t,u)}{\partial u}=-((m-1)\alpha+l\mu+\lambda(u))q(1,n+1,,t,u)+\beta q(1,n,t,u);\qquad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial q(i,1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,1,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n+i-1)\beta+\lambda(u))q(i,1,t,u)+\mu q(i,2,t,u),\quad 1<i\le m;$$

$$\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n+i-j)\beta+j\mu+\lambda(u))q(i,j,t,u)+$$
$$+(m-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,t,u)+(n+i-(j-1))\beta q(i,j-1,t,u)+j\mu q(i,j+1,t,u),$$
$$1<i\le m,\ 1<j\le l;$$

$$\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+(n+i-j)\beta+l\mu+\lambda(u))q(i,j,t,u)+$$
$$+(m-(i-1))\alpha q(i-1,j-1,t,u)+(n+i-(j-1))\beta q(i,j-1,t,u)+l\mu q(i,j+1,t,u),$$
$$1<i\le m,\ l<j<n+i;$$

$$\frac{\partial q(i,n+i,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(i,n+i,t,u)}{\partial u}=-((m-i)\alpha+l\mu+\lambda(u))q(i,n+i,t,u)+$$
$$+(m-(i-1))\alpha q(i-1,n+i-1,t,u)+\beta q(i,j-1,t,u),\qquad 1<i\le m.$$

დამტკიცება: ვაჩვენოთ ამ სისტემის უკანასკნელი განტოლების სამართლიანობა. განვიხილოთ ხდომილობა - $P\{i(t+h)=i,\, j(t+h)=n+i-1,\, u<\theta(t+h)<u+h\}$, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ დროის $t+h$ მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი, მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა არის $n+i-1$. სისტემაში არის ერთადერთი ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი, რომელიც გადართვის პროცესშია და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u,u+h)$ ინტერვალში. t მომენტში შესაძლო ხდომილობები არის შემდეგი:

1. t მომენტში ადგილი აქვს ხდომილობას $P\{i(t)=i,\; j(t)=n+i-1,\; u-h<\theta(t)<u\}$, ე.ი. სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი, მტყუნებულ ელემენტთა სიმრავლეში არის $n+i-1$ ელემენტი, სისტემაში მიმდინარეობს გადართვა და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში. h დროში არ გამტყუნდება არცერთი ელემენტი, არც აღდგება არცერთი ელემენტი და არც გადართვა დასრულდება. ამ ხდომილობის ალბათობაა $(1-((m-i)\alpha+l\mu+\lambda(u-h))h)q(i,n+i,t,u-h)h$;

2. t მომენტში ადგილი აქვს ხდომილობას $P\{i(t)=i,\; j(t)=n+i-2,\; u-h<\theta(t)<u\}$, ე.ი. სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია $i-1$ რაოდენობის ელემენტი, მტყუნებულ ელემენტთა სიმრავლე არის $n+i-2$, სისტემაში მიმდინარეობს გადართვა და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში. h დროში გამტყუნდა ერთი ელემენტი ძირითად ელემენტთა ჯგუფიდან. ამ ხდომილობის ალბათობაა $(m-(i-1))\alpha hq(i-1,n+i-1,t,u-h)$.

3. t მომენტში ადგილი აქვს ხდომილობას $P\{i(t)=i-1,\; j(t)=n+i-2,\; u-h<\theta(t)<u\}$, ე.ი. სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია i რაოდენობის ელემენტი, მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა არის $n+i-2$, სისტემაში მიმდინარეობს გადართვა და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებულია $(u-h,u)$ ინტერვალში. h

დროში გამტყუნდა ერთადერთი ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობაა $\beta hq(i-1, n+i-1, t, u-h)$,

4. დანარჩენი ხდომილობები არის $0(h)$ რიგის.

ამ ალბათობების შეკრებით მიიღება თანაფარდობა:

$$q(i, n+i, t+h, u)h = (1-((m-i)\alpha + l\mu + \lambda(u-h))h)q(i, n+i, t, u-h)h +$$
$$+(m-(i-1))\alpha hq(i-1, n+i-1, t, u-h)h + \beta hq(i-1, n+i-1, t, u-h)h + 0(h),$$

ეს თანაფარდობა კი ექვივალენტურია თანაფარდობის:

$$\frac{q(i, n+i, t+h, u) - q(i, n+i, t, u)}{h} + \frac{q(i, n+i, t, u) - q(i, n+i, t, u-h)}{h} =$$
$$= -((m-i)\alpha + l\mu + \lambda(u-h))q(i, n+i, t, u-h) + (m-(i-1))\alpha q(i-1, n+i-1, t, u-h) +$$
$$+ \beta q(i, j-1, t, u-h) + \frac{0(h)}{h}$$

ზღვარზე გადასვლით როცა $h \to 0$ მიიღება (3.3.2) სისტემის უკანასკნელი განტოლება.

ანალოგიურად მტკიცდება (3.2.2) სისტემის სხვა განტოლებათა სამართლიანობაც. თანაფარდობათა შედგენისას ძირითადი ყურადღება ექცევა თანაფარდობას მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობასა და აღმდგენების რაოდენობას შორის.

კერძოდ, თუ მტყუნებულ ელემენტთა რაოდენობა ნაკლებია აღმდგენ ორგანოთა რაოდენობაზე გადართვაში მონაწილეობს მხოლოდ იმდენი გადამრთველი რამდენი ელემენტიცაა მტყუნებული. სისტემის ამ მდგომარეობას შეესაბამება (3.2.2) სისტემის მეორე და მეექვსე განტოლებები.

როცა მტყუნებულ ელემენტთა სიმრავლე ტოლია ან მეტი აღმდგენ ელემენტთა რაოდენობაზე, ამ შემთხვევაში ყველა აღმდგენი მუშაობის პროცესშია. სისტემის ამ მდგომარეობებს შეესაბამება მესამე, მეოთხე, მეშვიდე და მერვე განტოლებები.

პირველი და მეხუთე განტოლებები კი აღწერენ იმ მდგომარეობას, როცა სისტემაში არ არის მტყუნებული ელემენტი და მიმდინარეობს მხოლოდ გადართვის პროცესი.

თეორემა 3.3.3. $q(i,j,t,u)$ სიდიდეთა სასაზღვრო პირობები გამოისახება შემდეგი თანაფარდობებით:

$$q(1,j,t,0)=m\alpha P(j-2,t)+\int_0^t q(2,j+1,t,u)\lambda(u)du+0(h), \qquad 1<j\le n;$$

$$q(i,j,t,0)=\int_0^t q(i+1,j+1,t,u)\lambda(u)du+0(h), \qquad 2<i<m,\ 1<j<n+i;$$

$$q(i,n+i,t,0)=l\mu R(1,t)+0(h), \qquad 2<i<m; \tag{3.3.3}$$

$$q(m,j,t,0)=0(h), \qquad 1\le j<m+n;$$

$$q(m,m+n,t,0)=l\mu R(m,t)+0(h)$$

დამტკიცება: სისტემის პირველი თანაფარდობის სამართლიანობა გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან: იმისათვის, რომ $t+h$ დროში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლდეს ერთი ელემენტი, მტყუნებული იყოს $j-1$ ელემენტი, ერთი ელემენტი იყოს გადართვის პროცესში და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო მოთავსებული იყოს $(0,h)$ ინტერვალში, t მომენტში შესაძლებელია იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. t მომენტში სისტემაში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს არ აკლია ელემენტი, სისტემაში მტყუნებულია $j-2$ რაოდენობის ელემენტი; h დროში გამტყუნდა ერთი ძირითადი ელემენტი და დაიწყო გადართვა. ამ ხდომილობის ალბათობაა $m\alpha hP(j-2,t)$;

2. t მომენტში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია 2 ელემენტი, სისტემაში მტყუნებულია j ელემენტი. სისტემაში მიმდინარეობს გადართვა და $\theta(t)\in(u,u+du)$. h დროში დასრულდა გადართვა. ამ ხდომილობის ალბათობა u-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის $\int_0^t q(2,j+1,t,u)\lambda(u)du$;

3. სხვა შესაძლო ხდომილობები არის $0(h)$ რიგის.

ამ ალბათობების შეკრებით მივიღებთ:

$$q(1,j,t+h,0)h=m\alpha hP(j-2,t)+h\int_0^t q(2,j+1,t,u)\lambda(u)du+0(h).$$

თანაფარდობის ორივე მხარე გავყოთ h-ზე და მივასწრაფოთ $h \to 0$, მივიღებთ დასამტკიცებელ თანაფარდობას. ანალოგიურად ვაჩვენებთ სხვა თანაფარდობათა სამართლიანობასაც.

გადავიდეთ სტაციონარულ მდგომარეობაში. შემოვიტანოთ აღნიშვნები $\lim_{t\to\infty} P(j,t) = P(j)$, $\lim_{t\to\infty} R(i,t) = P(j)$, $\lim_{t\to\infty} q(i,j,t,u) = q(i,j,u)$. გავითვალისწინებთ რა, რომ სტაციონარულ მდგომარეობაში $\frac{\partial q(i,j,t,u)}{\partial t} = 0$, $\frac{dR(i,t)}{dt} = 0$ და $\frac{dP(j,t)}{dt} = 0$, (3.3.1)-დან მიიღება ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა, ხოლო (3.3.2)-დან მიიღება წრფივ ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა. (3.3.2) სისტემიდან მიღებულ სისტემაში $q(i,j,u)$ წევრების კოეფიციენტები უწყვეტი ფუნქციებია. ამიტომ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის ძალით ამ სისტემას ექნება ამონახსნი (3.3.3) სასაზღვრო პირობებით. $q(i,j,u)$-ს გამოსახულებებს გავითვალისწინებთ (3.3.1) სისტემიდან მიღებულ ინტეგრალურ განტოლებებში და გამოვსახავთ $P(j)$ და $R(i)$ სიდიდეებსაც. სისტემის ამოხსნისას სტაციონარულ მდგომარეობაში მხედველობაში მივიღებთ ნორმირების პირობას:

$$\sum_{j=0}^{n} P(j) + \sum_{i=1}^{m} R(i) + \sum_{j=1}^{n+i} \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\infty} q(i,j,u)du = 1 \qquad (3.3.4)$$

განვიხილოთ დარეზერვებული სისტემა, რომელიც შედგება ერთი ძირითადი და შემსუბუქებულ დარეზერვებაში მყოფი ორი ელემენტისგან. ძირითადი ელემენტის მტყუნება ხდება α ინტენსივობით, სარეზერვოსი - β ინტენსივობით. გვაქვს ორი მომსახურე ორგანო, რომელთაგან ერთი ემსახურება მტყუნებული ელემენტის აღდგენას, მეორე კი — მტყუნებული ძირითადი ელემენტის ადგილზე ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტის გადართვას. აღდგენა ხდება მაჩვენებლიანი განაწილების კანონით μ ინტენსივობით. გადართვის ხანგრძლივობა კი ზოგადი კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა და განაწილების ფუნქცია არის $H(t)$. $\lambda(u)$-არის გადართვის ინტენსივობა.

$P(j,t)$, $R(i,t)$ და $q(i,j,t,u)$ ფუნქციების მიმართ იწერება ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned}
\frac{dP(0,t)}{dt} &= -(\alpha+2\beta)P(0,t)+\mu P(1,t)+\int_0^t q(1,1,t,u)\lambda(u)du;\\
\frac{dP(1,t)}{dt} &= -(\alpha+\beta+\mu)P(1,t)+2\beta P(0,t)+\mu P(2,t)+\int_0^t q(1,2,t,u)\lambda(u)du;\\
\frac{dP(2,t)}{dt} &= -(\alpha+\mu)P(2,t)+\beta P(1,t)+\int_0^t q(1,3,t,u)\lambda(u)du;\\
\frac{dR(1,t)}{dt} &= -\mu R(1,t)+\alpha P(2,t).
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

და კერძოწარმოებულიან განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q(1,1,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(1,1,t,u)}{\partial u} &= -(2\beta+\lambda(u))q(1,1,t,u)+\mu q(1,2,t,u);\\
\frac{\partial q(1,2,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(1,2,t,u)}{\partial u} &= -(\beta+\mu+\lambda(u))q(1,2,t,u)+\mu q(1,3,t,u)+2\beta q(1,1,t,u);\\
\frac{\partial q(1,3,t,u)}{\partial t}+\frac{\partial q(1,3,t,u)}{\partial u} &= -(\mu+\lambda(u))q(1,3,t,u)+\beta q(1,2,t,u).
\end{aligned}$$

შესაბამისი საწყისი $P(0,0)=1$, $P(1,0)=P(2,0)=R(1,0)=0$ და სასაზღვრო პირობებით

$$\begin{aligned}
&q(1,1,t,0)=0,\\
&q(1,2,t,0)=\alpha P(0,t),\\
&q(1,3,t,0)=\alpha P(1,t)+\mu R(1,t).
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

განვიხილოთ ხდომილობა $A_{ij}(u)$ - {u სიგრძის მონაკვეთის ბოლოს სისტემაში მტყუნებულია j ელემენტი, თუ მონაკვეთის დასაწყისში მტყუნებული იყო i ელემენტი } და შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $P_{ij}(u)=P\{A_{ij}(u)\}$.

$q(i,j,t,u)$ სიდიდეები ალბათური მსჯელობების საფუძველზე შეიძლება შემდეგნაირად გამოვსახოთ:

$$\begin{aligned}
q(1,1,t,u) &= q(1,2,t-u,0)\overline{H(u)}P_{10}(u)+q(1,3,t-u,0)\overline{H(u)}P_{20}(u)\\
q(1,2,t,u) &= q(1,2,t-u,0)\overline{H(u)}P_{11}(u)+q(1,3,t-u,0)\overline{H(u)}P_{21}(u)\\
q(1,3,t,u) &= q(1,3,t-u,0)\overline{H(u)}P_{22}(u)+q(1,2,t-u,0)\overline{H(u)}P_{12}(u)
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

სადაც $\overline{H(u)}=1-H(u)$.

ვაჩვენოთ პირველი თანაფარდობის სამართლიანობა:

იმისათვის რომ t მომენტში ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლდეს ერთი ელემენტი, სისტემაში არ იყოს მტყუნებული ელემენტი და გადართვის პროცესის დაწყებიდან გასული დრო $\theta(t)\in(u,u+h)$ დროის $t-u$ მომენტში შესაძლებელია იყოს შემდეგი უთავსებადი ხდომილობებიდან ერთ-ერთი:

1. $t-u$ მომენტში სისტემაში მტყუნებულია ერთი ელემენტი, ძირითად ელემენტთა სიმრავლეს აკლია ერთი ელემენტი. ამ მომენტში დაიწყება გადართვა. u დროში გადართვა არ დასრულდება და ამ დროის გასვლის შემდეგ სისტემაში არ იქნება მტყუნებული ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობაა პირველი თანაფარდობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები;

2. $t-u$ მომენტში სისტემაში მტყუნებულია ორი ელემენტი და იწყება ერთი ქმედუნარიანი სარეზერვო ელემენტის გადართვა. u დროში გადართვა არ დასრულდება და u დროის გასვლის შემდეგ სისტემაში არ იქნება მტყუნებული ელემენტი. ამ ხდომილობის ალბათობაა თანაფარდობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები.

ამ ალბათობების შეკრებით მიიღება პირველი თანაფარდობა და ანალოგიური მსჯელობებით დანარჩენი ორი თანაფარდობაც.

$P_{i,j}(u)$ ალბათობები გამოითვლება შემდეგი სისტემებიდან:

$$\begin{cases} P_{00}(u)=e^{-2\beta u}+2\int_0^u \beta e^{-2\beta v}P_{10}(u-v)dv \\ P_{10}(u)=\int_0^u \mu e^{-\mu v}e^{-\beta v}P_{00}(u-v)dv+\int_0^u \beta e^{-\beta v}e^{-\mu v}P_{20}(u-v)dv \\ P_{20}(u)=\int_0^u \mu e^{-\mu v}P_{10}(u-v)dv \end{cases} \qquad (3.3.8)$$

$$\begin{cases} P_{22}(u)=e^{-\mu u}+\int_0^u \mu e^{-\mu v}P_{12}(u-v)dv \\ P_{12}(u)=\int_0^u \mu e^{-\mu v}e^{-\beta v}P_{02}(u-v)dv+\int_0^u \beta e^{-\beta v}e^{-\mu v}P_{22}(u-v)dv \\ P_{02}(u)=2\int_0^u \beta e^{-2\beta v}P_{12}(u-v)dv \end{cases} \qquad (3.3.9)$$

და

$$\begin{cases} P_{00}(u)+P_{01}(u)+P_{02}(u)=1 \\ P_{10}(u)+P_{11}(u)+P_{12}(u)=1 \\ P_{20}(u)+P_{21}(u)+P_{22}(u)=1 \end{cases} \qquad (3.3.10)$$

(3.3.8) სისტემის მეორე თანაფარდობის სამართლიანობა გამოდის შემდეგი მსჯელობის საფუძველზე:

ხდომილობა $A_{10}(u)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი უთავსებადი ხდომილობის ჯამის სახით:

1. $(0,u)$ მონაკვეთის საწყის მომენტში მტყუნებული იყო ერთი ელემენტი, რომელიც აღდგა რომელიღაც დროის v მომენტში, ამ მომენტიდან ადგილი აქვს ხდომილობას $A_{00}(u-v)$, ამ ხდომილობის ალბათობა v-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის თანაფარდობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები;

2. $(0,u)$ მონაკვეთის საწყის მომენტში სისტემაში იყო ერთი მტყუნებული და ერთი ქმედუნარიანი ელემენტი, დროის $v\in(0,u)$ მომენტში გამტყუნდა ქმედუნარიანი ელემენტი და ამ მომენტიდან ადგილი აქვს ხდომილობას $A_{20}(u-v)$. ხდომილობის ალბათობა v-ს ყველა შესაძლო მნიშვნელობების გათვალისწინებით არის თანაფარდობის მარჯვენა მხარის მეორე შესაკრები; ამ ალბათობების შეკრებით მიიღება (3.3.8) სისტემის მეორე თანაფარდობა. ანალოგიურად მტკიცდება (3.3.8) და (3.3.9) სისტემის სხვა თანაფარდობათა სამართლიანობა. (3.3.10) ტოლობები კი იწერება ნორმირების პირობიდან გამომდინარე.

(3.3.8) და (3.3.9) სისტემებზე ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენები მივიღებთ:

$$\begin{cases} \overline{P}_{00}(s) - \dfrac{2\beta}{s+2\beta}\overline{P}_{10}(s) = \dfrac{1}{s+2\beta} \\ \dfrac{\mu}{s+\beta+\mu}\overline{P}_{00}(s) - \overline{P}_{10}(s) + \dfrac{\beta}{s+\beta+\mu}\overline{P}_{20}(s) = 0 \\ \dfrac{\mu}{s+\mu}\overline{P}_{10}(s) - \overline{P}_{20}(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{P}_{22}(s) - \dfrac{\mu}{s+\mu}\overline{P}_{12}(s) = \dfrac{1}{s+\mu} \\ \dfrac{\beta}{s+\beta+\mu}\overline{P}_{22}(s) - \overline{P}_{12}(s) + \dfrac{\mu}{s+\beta+\mu}\overline{P}_{02}(s) = 0 \\ \dfrac{2\beta}{s+2\beta}\overline{P}_{12}(s) - \overline{P}_{02}(s) = 0 \end{cases}$$

სადაც $\overline{P}_{ij}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su} P_{ij}(u)du$.

ამ სისტემებიდან $\overline{P}_{ij}(s)$ სიდიდეები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\overline{P}_{00}(s) = \frac{s^2 + s(\beta+2\mu) + \mu^2}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};\ \overline{P}_{10}(s) = \frac{\mu(s+\mu)}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};$$

$$\overline{P}_{20}(s) = \frac{\mu^2}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};\ \overline{P}_{22}(s) = \frac{s^2 + s(3\beta+\mu) + \mu^2}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};$$

$$\overline{P}_{12}(s) = \frac{\beta(s+2\beta)}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};\ \overline{P}_{02}(s) = \frac{2\beta^2}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};$$

$$\overline{P}_{01}(s) = \frac{2\beta(s+\mu)}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};\ \overline{P}_{21}(s) = \frac{\mu(s+2\beta)}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)};$$

$$\overline{P}_{11}(s) = \frac{s^2 + s(2\beta+\mu) + 2\beta\mu}{s\left(s^2 + s(3\beta+2\mu) + \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2\right)}.$$

ლაპლასის უკუგარდაქმნის გამოყენებით ადვილად გამოვსახავთ $P_{i,j}(u)$ ალბათობებს. ყოველი $P_{i,j}(u)$-სათვის დავწერთ თანაფარდობებს:

$$P_{ij}(u) = a_{ij} + b_{ij}e^{-\gamma u} + c_{ij}e^{-\delta u}, \tag{3.3.11}$$

სადაც $\gamma = \dfrac{3\beta + 2\mu + \sqrt{\beta^2 + 4\beta\mu}}{2}$ და $\delta = \dfrac{3\beta + 2\mu - \sqrt{\beta^2 + 4\beta\mu}}{2}$;

$$a_{20} = \frac{\mu^2}{\Delta_a}, \ b_{20} = \frac{\mu^2}{\Delta_b}, \ c_{20} = \frac{\mu^2}{\Delta_c},$$

$$a_{00} = \frac{\mu^2}{\Delta_a}, \ b_{00} = \frac{\beta^2\left(1 + \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{\Delta_b}, \ c_{00} = \frac{\beta^2\left(1\sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{\Delta_c},$$

$$a_{10} = \frac{\mu^2}{\Delta_a}, \ b_{10} = -\frac{\beta\mu\left(3 - \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{\Delta_b}, \ c_{10} = -\frac{\beta\mu\left(3 + \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{\Delta_c},$$

$$a_{22} = \frac{2\beta^2}{\Delta_a}, \ b_{22} = -\frac{\beta\mu\left(1 - \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{2\Delta_b}, \ c_{22} = -\frac{\beta\mu\left(1 + \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{2\Delta_c},$$

$$a_{12} = \frac{2\beta^2}{\Delta_a}, \ b_{12} = \frac{\beta^2\left(1 - \sqrt{\beta + 4\mu}\right) - 2\beta\mu}{2\Delta_b}, \ c_{12} = \frac{\beta^2\left(1 + \sqrt{\beta + 4\mu}\right) - 2\beta\mu}{2\Delta_c},$$

$$a_{21} = \frac{2\beta\mu}{\Delta_a}, \ b_{21} = -\frac{2\mu^2 - \beta\mu\left(1 - \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{2\Delta_b}, \ c_{21} = -\frac{2\mu^2 - \beta\mu\left(1 + \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{2\Delta_c},$$

$$a_{11} = \frac{2\beta\mu}{\Delta_a}, \quad b_{11} = \frac{\beta\mu\left(5 - \sqrt{\beta + 4\mu}\right) - \beta^2\left(1 + \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{2\Delta_b},$$

$$c_{11} = \frac{\beta\mu\left(5 + \sqrt{\beta + 4\mu}\right) - \beta^2\left(1 - \sqrt{\beta + 4\mu}\right)}{2\Delta_c},$$

ხოლო $\Delta_a = \mu^2 + 2\beta\mu + 2\beta^2$, $\Delta_b = \dfrac{\beta^2 + 4\beta\mu + (3\beta + 2\mu)\sqrt{\beta^2 + 4\beta\mu}}{2}$,

$$\Delta_c = \frac{\beta^2 + 4\beta\mu - (3\beta + 2\mu)\sqrt{\beta^2 + 4\beta\mu}}{2}.$$

გადავიდეთ სტაციონარულ მდგომარეობაში. მაშინ (3.3.5) სისტემიდან მივიღებთ:

$$(\alpha + 2\beta)P(0) = \mu P(1) + \int_0^\infty q(1,1,u)\lambda(u)du;$$

$$(\alpha + \beta + \mu)P(1) = 2\beta P(0) + \mu P(2) + \int_0^\infty q(1,2,u)\lambda(u)du; \qquad (3.3.12)$$

$$(\alpha + \mu)P(2) = \beta P(1) + \int_0^\infty q(1,3,u)\lambda(u)du;$$

$\mu R(1) = \alpha P(2)$.

სასაზღვრო პირობებისათვის კი:

$q(1,1,0) = 0$,

$q(1,2,0) = \alpha P(0)$,

$q(1,3,0) = \alpha P(1) + \mu R(1)$.

სტაციონარულ მდგომარეობაში გადავიდეთ (3.3.7) თანაფარდობებში, და თან გავითვალისწინოთ (3.3.11) გამოსახულებები და სასაზღვრო პირობები. მივიღებთ:

$$q(1,1,u) = \alpha P(0)\overline{H(u)}\left(a_{10j} + b_{10}e^{-\gamma u} + c_{10}e^{-\delta u}\right) + \left(\alpha P(1) + \mu R(1)\right)\overline{H(u)}\left(a_{20} + b_{20}e^{-\gamma u} + c_{20}e^{-\delta u}\right)$$

$$q(1,2,u) = \alpha P(0)\overline{H(u)}\left(a_{11} + b_{11}e^{-\gamma u} + c_{11}e^{-\delta u}\right) + \left(\alpha P(1) + \mu R(1)\right)\overline{H(u)}\left(a_{21} + b_{21}e^{-\gamma u} + c_{12}e^{-\delta u}\right) \quad (3.3.12)$$

$$q(1,3,u) = \alpha P(0)\overline{H(u)}\left(a_{12} + b_{12}e^{-\gamma u} + c_{12}e^{-\delta u}\right) + \left(\alpha P(1) + \mu R(1)\right)\overline{H(u)}\left(a_{22} + b_{22}e^{-\gamma u} + c_{22}e^{-\delta u}\right)$$

კვლავ უცნობი რჩება $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ და $R(1)$. მათ საპოვნელად (3.3.13) თანაფარდობები გავითვალისწინოთ (3.3.12) განტოლებებში. საბოლოოდ ამ სიდიდეების მიმართ მიიღება წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$P(0)\left[\alpha\left(1 - a_{10} - b_{10}\overline{h}(\gamma) - c_{10}\overline{h}(\delta)\right)\right] - P(1)\left[\mu + \alpha\left(a_{20} + b_{20}\overline{h}(\gamma) + c_{10}\overline{h}(\delta)\right)\right] -$$
$$- R(1)\mu\left[a_{20} + b_{20}\overline{h}(\gamma) + c_{20}\overline{h}(\delta)\right] = 0$$

$$P(0)\left[2\beta + \alpha\left(a_{11} + b_{11}\overline{h}(\gamma) + c_{10}\overline{h}(\delta)\right)\right] - P(1)\left[\mu + \beta + \alpha\left(1 - a_{21} - b_{21}\overline{h}(\gamma) - c_{21}\overline{h}(\delta)\right)\right] +$$
$$+ \mu P(2) - R(1)\mu\left[a_{21} + b_{21}\overline{h}(\gamma) + c_{21}\overline{h}(\delta)\right] = 0 \quad (3.3.14)$$

$$P(0)\alpha\left(a_{12} + b_{12}\overline{h}(\gamma) + c_{12}\overline{h}(\delta)\right) + P(1)\left[\beta + \alpha\left(a_{22} + b_{22}\overline{h}(\gamma) + c_{22}\overline{h}(\delta)\right)\right] -$$
$$+ P(2)\left[\alpha + \mu\right] + R(1)\mu\left[a_{22} + b_{22}\overline{h}(\gamma) + c_{22}\overline{h}(\delta)\right] = 0$$

$$\alpha P(2) - \mu R(1) = 0.$$

სისტემას დაემატება ნორმირების პირობა:

$$P(0) + P(1) + P(2) + R(1) + \int_0^\infty \left(q(1,1,u) + q(1,2,u) + q(1,3,u)\right)du = 1,$$

მაგრამ

$$\int_0^\infty (q(1,1,u)+q(1,2,u)+q(1,3,u))du=(q(1,2,0)+q(1,3,0))\int_0^\infty (1-H(u))du=(q(1,2,0)+q(1,3,0))E\xi,$$

სადაც $E\xi=\int_0^\infty (1-H(u))du$ ძირითადი ელემენტის ადგილზე სარეზერვო ელემენტის გადართვის საშუალო დრო. ნორმირების პირობა კი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$P(0)+P(1)+P(2)+R(1)+[\alpha P(0)+\alpha P(1)+\mu R(1)]E\xi=1, \qquad (3.3.15)$$

(3.3.14) სისტემიდან და (3.3.15) ნორმირების პირობიდან გამოთვლილ $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ და $R(1)$ სიდიდეებს გავითვალისწინებთ $q(1,1,u)$, $q(1,2,u)$ და $q(1,3,u)$-ის (3.3.13) გამოსახულებებში.

ლიტერატურა

1. არსენიშვილი გ. მასობრივი მომსახურების თეორია. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 1984, 120 გ.
2. სვანიძე ნ.ა. აღდგენისა და გადართვის თავისებურებათა ანალიზი დუბლირებული სისტემის მოცდენის მახასიათებლებზე, სტუ-ს შრომები. 2003, №4 (450), გვ. 109-112
3. სვანიძე ნ.ა. რიგების ჩაკეტილი სისტემის ოპტიმიზაცია ეკონომიკური კრიტერიუმის მიხედვით. სტუ-ს შრომები. 2004, №3 (454)
4. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. М.: Сов. Радио, 1969, 448 с.
5. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: «Наука», 1965, 524 с.
6. Гнеденко Б.В., Даниэлян З.А., Дмитров В.М., Климов Г.П., Матвеев В.Ф. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973, 477 с.
7. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Наука, 1987.
8. Джейсуил Н.К. Очереди с приоритетами. М.: Мир, 1973.
9. Какубава Р.В., Хуродзе Р.А. О новых подходах в теории и практике надежности резервированных систем// Информационные технологии в проектировании и производстве, №3, 2001
10. Какубава Р.В., Сванидзе Н.А. Анализ временных характеристик одноканальной системы массового обслуживания в случайной среде//Труды ГТУ, 2001, №4 (437), с.135-138
11. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения, М.: Мир, 1965, 302 с.
12. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания. - М.: Связь, 1966, 183 с.
13. Саати Т. Теория очередей. М.: Сов. Радио, 1974.

14. Сванидзе Н.А., Шарашидзе Н.Г. О влиянии исходных статистичестких характеристик резервированной системы на длительность её простоя. // Сб. мат. межд. научно-технич. конфер. «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных, электронных и лазерных технологии». М.: Радио и связь, 2002, с. 107-111
15. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. ГИТТЛ М.: 1953, 458 с.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её применения, в 2-х т. – М.: Мир, 1980, т.1, 498 с.
17. Хинчин А.Я. О среднем времени простоя станков. Математический сборник, т.40 (1933), №2, с. 119-123.
18. Albright S.C. Optimal Maintenance-Repair Policies for the Machine Repair Problem. Naval Research Logistics Quarterly, 1980, vol. 27, pp. 17-27.
19. Ashcroft H., The productivity of Several Machines under the Care of One Operator, Journal of the Royal Society, 1950, v.12, pp. 145-151.
20. Blom G., Some contribution to theory of machine interference. Biometrica, 1963, 50, pp. 135-143.
21. Bhattacharyya M.N. Optimal Allocation of Stand-by Systems, Operation research, 1969, vol. 17, pp. 337-343.
22. Cox D.R. The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, №51, pp. 433-441.
23. Elsayed E.A. An Optimum Repair Policy for the Machine Interference Problem. Journal of the Operational Research Society. 1981, vol.31, № 9, pp. 793-80.
24. Frey A. Schmidt V. Marked Point Processes in the Plane. University of Ulm. Germany 2000

25. Gross D. and Harris C.M. Fundamentals of Queueing Theory. 1-st Edition. John Wiley and Sons, New York, 1974.
26. Gross D., H.D.Kahc and J.D.Marsh. Queueing Models for Spares Provisioning. Naval Research Logistics Quarterly. 1977, vol.24, №4, pp. 521-236.
27. Haverkot, B.R., Harper R. Performance and dependability techniques and tools// Perform. Eval. 2001, 44, № 1-4.
28. Hilliard J.E. An Approach to Cost Analysis of maintenance Float System. AIIE Transactions. 1976, vol. 8, №1, pp. 128-133.
29. Haverkot, B.R., Harper R. Performance and dependability techniques and tools// Perform. Eval. 2001, 44, № 1-4.
30. Jaiswal N.K., Thiruvengadam K., Simple machine interference with two types of failures, Operation res., 1963, №11 , pp. 624-636.
31. Kakubava I., Svanidze N., Chkhaidze N. Analysis of closed queuing system with consideration of extra-system delays of service facility//Bull. Georg. Acad. Sci. 2003, v.168 N3, p. 517-521.
32. Kendall D. G. Some problems in the theory of queues, J.Roy. Statist. Soc. 1951, B.13, pp151-173, 184-185.
33. Kendall D.G. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analisis by Means of the Imbedded Markov Chain. A-nn. Mat. Statist., 1954, v. 24. p. 338-354
34. Khurodze R., Kakubava I., Svanidze N. Closed multi-channel queuing system with two types of service //Bull. Georg. Acad. Sci., 2003, 168, №2, p. 289-294
35. Khurodze R., Kakubava I., Kubetsia I., Svanidze N. Closed queueing system with two sources of requests //Bull. Georg. Acad. Sci., 2004, 170, №1.
36. Kleinrock L., Gail R. Queueing Systems. Problems and Solutions. John Wiley & Sons, INC, New York /Chichester /Brisbane /Toronto/ Singapore. 1996. 276 p.

37. Masuda Y., Yamakawa S. A compound dependability measure arising from semi-Markov reliability model.//Oper. Res. Soc. Japan, 2000, 43, №4, pp. 448-454.
38. Morse P.M. Queues. Inventories and Maintenance. John Wiley and Sons, New York , 1958.
39. Nahman, Jovan M. Dependebility of engineering systems. Modeling and evaluation, Berlin: 2002, 192 p.
40. Palm C. The assigment of operators to servicing automatic machines, J.Indust.Eng., 1955, 6, pp. 28-42.
41. Palm C. Probabilities and Stationary Queues. Berlin etc: Springer-Verlag. 1987. 106 p.
42. Quality of service, network management and traffic engeneering. Dependability planning of telecommunication networks. Recommendation E. 862, Geneva, 1992
43. Schmidt V. Spatial Stochastic Models. University of Ulm. Germany 2000
44. Second International Conference on Mathematical Methods in Reliability. ABSTRACT'BOOK Bordeaux, 2000 v. 1-2
45. Sivarzlan B.D. and Wang K.H. Economic analysis of the *M/M/R* machine repair problem. Microelectron. Reliab., 1989, vol. 29, №1, pp.25-35.
46. Takács L., On the limiting distribution of the number of coincidences conserning telephone traffic, Ann.Math.Statist., 1959, №30, pp. 134-142.
47. Takács L., Instroduction to the Theory of Queues, New York, 1962.
48. Veglis A., Pomportsis A. Dependebility evaluation of interconnection networks.//Comput. Electr. Eng. 2001, 27., №3, 239-263.
49. White J.A., J.W. Schmidt and G.K. Benett, Analysis of Queueing Systems. Academic Press, New York, 1975.