ТБИЛИССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМЕНИ ИВ. ДЖАВАХИШВИЛИ

На правах рукописи

Анзор Беридзе

О КОГОМОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ТИПА АЛЕКСАНДЕРА-СПЕНЬЕРА

ДИССЕРТАЦИЯ

представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

01.01.04 – Геометрия и топология

Научный руководитель: **Владимер Баладзе**, доктор физико-математических наук, профессор

ТБИЛИСИ – 2003

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Когомологические функторы, определенные на допустимых подкатегориях категории топологических пространств и непрерывных отображений и обладающие рядом основных свойств классических когомологических функторов ([3], [6], [10], [29], [39]), играют главную роль при решении различных задач алгебраической топологии и, вообще, топологии. Систематически возрастает как их число, так и значение при исследовании свойств топологических пространств [7].

Среди многочисленных когомологических функторов особое место занимают когомологические функторы, коцепные комплексы которых определяются с помощью отображений из конечнократного произведения топологического пространства в абелевую группу. Определения и исследования таких функторов связаны с работами Дж.Александера ([14], [15], [16]), А.Колмогорова [33], Е.Спеньера ([38], [40]) и Г.Чогошвили [12]. В течение почти полувека активно продолжались и в настоящее время успешно продолжаются исследования определенных ими когомологических функторов. Большинство результатов, полученных в этом направлении, отражены в монографиях Е.Спеньера [39] и У.Масси ([4], [35]), а также в работах Л.Д.Альтшулера [1], В.Баладзе [18], М.Балавадзе [2], Б.Гюнтера и Л.Мдзинаришвили [32], У.Масси [34], Л.Мдзинаришвили ([5], [36]), Е.Г.Скляренко (см. добавление к книге [4]) и Е.Спеньера [40].

Целью диссертационной работы является систематическое исследование когомологических теорий типа Александера-Спеньера. Имея в виду дальнейшие приложения, в диссертации определены и аксиоматически исследованы разновидности когомологического функтора Александера-Спеньера, так называемые, конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера с компактными носителями, частично непрерывный конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера и частично непрерывный когомологический функтор Александера-Спеньера с компактными носителями. В диссертации установлены различные свойства построенных функторов и найдены их связи с известными классическими функторами, выраженные в терминах аксиом типа Стинрода-Эйленберга и изоморфизмов. Кроме того, исследованы задачи В.Баладзе [20] и Ю.М.Смирнова [9], касающиеся проблем теории расширений. А именно, найдены необходимое и достаточное условия, при которых нарост реалькомпактификации вполне регулярного пространства имеет когомологическую группу типа Александера-Спеньера, изоморфную данной группе.

Перейдем к краткому изложению содержания диссертации.

В §1 первой главы построена конечно определенная когомологическая теория Александера-Спеньера, путь построения которой отличается от всех ранее известных методов построения функциональных групп когомологии. Это построение, в отличие от Александера и Спеньера, существенно использует понятие конечно локально нулевой функции (см. определение 1.1) из q-кратного произведения топологического пространства X в абелевую группу G. Это дает возможность простого описания как построенной теории когомологии, так и ее связей с когомологией Александрова-Чеха. С помощью таких функций построена категория коцепных комплексов $\overline{C}_f^*(X,A;G)=\{\overline{C}_f^q(X,A;G),\delta\}$. Конечно определенная когомологическая теория Александера-Спеньера вводится как естественно определенная последовательность контравариантных функторов из категории коцепных комплексов в категорию абелевых групп. Таким образом, существует конечно определенный q-мерный когомологический функтор Александера-Спеньера $\overline{H}_f^q(-,-;G):Top^2\to Ab$ из категории пар топологических пространств и непрерывных отображений в категорию абелевых групп. Кроме того, доказывается, что определенный функтор удовлетворяет аксиоме точности (теорема 1.2) и аксиоме размерности (теорема 1.6).

С целью проверки аксиомы гомотопии и установления связей построенного функтора с другими когомологическими функторами, в §1 дано описание коцепного комплекса $\overline{C}_f^*(X,A;G)$, как предела прямой системы коцепных комплексов $C^*(\alpha,\alpha';G)$ виеторисианов конечных открытых покритий (α,α') пары (X,A). В частности, доказано, что предел прямой системы $\{C^q(\alpha,\alpha';G),\pi_{\alpha\beta}, Cov^f(X,A)\}$ и группа $\overline{C}_f^q(X,A;G)$ изоморфны (теорема 1.8).

В отличие от классического когомологического функтора Александера-Спеньера, конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера удовлетворяет не обычной аксиоме гомотопии, а аксиоме равномерной гомотопии (см. определение 1.10). Справедлива следующая

Теорема 1.11 (аксиома равномерной гомотопии). *Для равномерно гомотопных отображений $f_0,f_1:(X,A)\to(Y,B)$ пар топологических пространств*

$$f_0^*=f_1^*:\overline{H}_f^*(Y,B;G)\to\overline{H}_f^*(X,A;G).$$

Одна из задач этого параграфа – показать, что конечно определенные когомологические группы Александера-Спеньера описывают когомологические группы Чеха $\check{H}_f^*(-,-;G)$, основанные на конечных открытых покрытиях.

Следствие 1.12. *Для каждой пары (X,A) топологических пространств существует изоморфизм*

$$\overline{H}_f^q(X,A;G)\approx\check{H}_f^q(X,A;G).$$

Из этих результатов, как следствие, получается описание классической когомологической группы $\overline{H}^*(-,-;G)$ Александера-Спеньера стоун-чеховской компактификации замкнутых пар нормальных пространств. Справедливо следующее

Следствие 1.13. *Пусть X нормальное пространство, а A – его замкнутое подпространство. Тогда*

$$\overline{H}_f^q(X,A;G)\approx\overline{H}^q(\beta X,\beta A;G).$$

В §2 первой главы построен конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера с компактными носителями над категорией замкнутых пар топологических пространств и их собственных отображений. Определение функтора $\overline{H}^{*}_{f,c}(-,-;G)$ основано на коцепных комплексах, которые определяются с помощью функции, являющейся конечно локально нулевой на каком-либо коограниченном подмножестве. Здесь доказано, что этот функтор удовлетворяет аксиоме точности (теорема 2.1) и аксиоме размерности (теорема 2.2). Кроме того, установлена теорема 2.3, из которой непременно следует, что функтор $\overline{H}^{*}_{f,c}(-,-;G)$ удовлетворяет аксиоме вырезания (теорема 2.4).

В §3 первой главы скрупулезно исследован конечно определенный когомологический функтор с компактными носителями над категорией локально компактных пространств и их собственных отображений.Здесь, для каждого открытого подпространства U локально компактного пространства X определены мономорфизм $\sigma_{U,X} : \overline{C}^{q}_{f,c}(U;G) \to \overline{C}^{q}_{f,c}(X;G)$ и гомоморфизм $\tau_{U,X} : \overline{H}^{q}_{f,c}(U;G) \to \overline{H}^{q}_{f,c}(X;G)$, обладающие следующими свойствами:

1) $\sigma_{X,X}$ и $\tau_{X,X}$ – изоморфизмы;

2) если U и V – такие открытые подмножества пространства X, что $V \subset U$, то

$$\sigma_{V,X} = \sigma_{U,X} \circ \sigma_{V,U}, \ \tau_{V,X} = \tau_{U,X} \circ \tau_{V,U};$$

3) пусть X и Y – локально компактные пространства, $f : X \to Y$ собственное отображение, а $U \subset X$ и $V \subset Y$ – такие открытые подмножества пространств X и Y, что $U = f^{-1}(V)$. Тогда коммутативны диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \overline{C}^{q}_{f,c}(Y;G) & \xrightarrow{f^{\#}} & \overline{C}^{q}_{f,c}(X;G) \\ \uparrow\sigma_{V,Y} & & \uparrow\sigma_{U,X} \\ \overline{C}^{q}_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{f_0^{\#}} & \overline{C}^{q}_{f,c}(U;G) \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} \overline{H}^{q}_{f,c}(Y;G) & \xrightarrow{f^{*}} & \overline{H}^{q}_{f,c}(X;G) \\ \uparrow\tau_{V,Y} & & \uparrow\tau_{U,X} \\ \overline{H}^{q}_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{f_0^{*}} & \overline{H}^{q}_{f,c}(U;G) \end{array},$$

где $f_0 = f_{|U}$;

4) для каждого элемента $a \in \overline{H}^{q}_{f,c}(X;G)$ найдутся такое открытое ограниченное подпространство U пространства X и такой элемент $b \in \overline{H}^{q}_{f,c}(U;G)$, что $\tau(b) = a$;

5) пусть U – открытое ограниченное подмножество пространства X, а $a \in \overline{H}^q_{f,c}(U;G)$ такой элемент, что $\tau_{U,X}(a)=0$. Тогда найдется такое открытое ограниченное подмножество V пространства X, что $U \subset V$ и $\tau_{U,V}(a)=0$.

Из перечисленных свойств следует, что для каждого локально компактного пространства X группа $\overline{H}^q_{f,c}(X;G)$ является прямым пределом прямой системы, состоящей из групп $\overline{H}^q_{f,c}(U;G)$ всех открытых ограниченных подмножеств U в X (Следствие 3.3).

Кроме того, показано, что конечно определенная когомологическая группа Александера-Спеньера с компактными носителями замкнутой пары (X,A) локально компактных пространств изоморфна конечно определенной когомологической группе Александера-Спеньера с компактными носителями дополнения $X\setminus A$. Отметим, что существует гомоморфизм $\delta:\overline{H}^q_{f,c}(A;G)\to \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G)$, обладающий интересными свойствами. А именно, доказана следующая

Теорема 3.5. *Пусть X – локально компактное пространство, A – его замкнутое подпространство, а U – дополнение подпространства A. Тогда существует такой гомоморфизм*

$$\delta:\overline{H}^q_{f,c}(A;G)\to \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G),$$

что

1) последовательность

$$\ldots\to \overline{H}^q_{f,c}(U;G)\xrightarrow{\tau}\overline{H}^q_{f,c}(X;G)\xrightarrow{i^*}\overline{H}^q_{f,c}(A;G)\xrightarrow{\delta}\overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G)\to\ldots$$

точна;

2) если V открытое подмножество множества U и $B=X\setminus V$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\overline{H}^q_{f,c}(B;G) & \xrightarrow{j^*} & \overline{H}^q_{f,c}(A;G)\\ \downarrow\delta & & \downarrow\delta\\ \overline{H}^{q+1}_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{\tau} & \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G)\end{array}$$

коммутативна, где гомоморфизм j^* индуцирован отображением вложения $j:A\to B$;

3) если $f: X \to Y$ собственное отображение, а U и V такие открытые подмножества пространств X и Y, соответственно, что $U = f^{-1}(V)$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^q_{f,c}(B;G) & \xrightarrow{f^*} & \overline{H}^q_{f,c}(A;G) \\ \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\ \overline{H}^{q+1}_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{f_0^*} & \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G) \end{array}$$

коммутативна, где $f_0 = f_{|U}$;

4) если V – такое открытое подпространство пространства X, что $U \subset V$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^q_{f,c}(V \cap A;G) & \searrow^{\delta} & \\ \downarrow\tau & & \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G) \\ \overline{H}^q_{f,c}(A;G) & \nearrow_{\delta} & \end{array}$$

коммутативна.

С помощью выше приведенных результатов и теоремы 6.1 из [4] установлено, что справедлива аксиома собственной гомотопии.

Следствие 3.6. *Пусть $f_0, f_1 : X \to Y$ собственно гомотопные отображения локально компактных пространств. Тогда для всех целых чисел $q \geq 0$ индуцированные гомоморфизмы $f_0^*, f_1^* : \overline{H}^q_{f,c}(Y;G) \to \overline{H}^q_{f,c}(X;G)$ совпадают.*

Наконец, §3 первой главы посвящен описанию связи функтора $\overline{H}^*_{f,c}(-,-;G)$ с когомологическим функтором типа Чеха $\check{H}^*_{\blacktriangle}(-,-;G)$, основанным на особых подкомплексах [10]. При установлении этой связи существенную роль играет следующая конструкция:

пусть X – локально компактное пространство, а α его любое конечное открытое покрытие. Допустим $\Omega(\alpha)$ – подкомплекс виеторисиана $X(a)$, состоящий из всех симплексов s, для которых найдутся такие элементы U_α покрытия α, что замыкания $\overline{U}_\alpha$ некомпактны и $s \subset U_\alpha$. Коцепной комплекс пары $(X(a), \Omega(\alpha))$ обозначим символом $C^*(\alpha,\Omega;G)$. Система $\{C^q(\alpha,\Omega;G),\pi_{\alpha\beta}, Cov^f(X)\}$ является прямой системой и существует гомоморфизм

$$\tau : C^q_{f,c}(X;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} C^q(\alpha,\Omega;G),$$

определенный формулой $\tau(\varphi) = \pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}})$, где $\pi_\alpha : C^q(\alpha,\Omega;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} C^q(\alpha,\Omega;G)$ – естественная проекция.

В дальнейшем применяется следующая важная для нашей цели

Теорема 3.7. *Для каждого локально компактного пространства X гомоморфизм τ индуцирует изоморфизм*

$$\tilde{\tau} : \overline{C}^q_{f,c}(X;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} C^q(\alpha,\Omega;G).$$

Основными результатами §3 являются следующие следствия.

Следствие 3.8. *Для каждого локально компактного пространства X существует изоморфизм*

$$\overline{H}^q_{f,c}(X;G) \approx \check{H}^q_{\blacktriangle}(X;G).$$

Следствие 3.9. *Для каждой замкнутой пары (X,A) локально компактных пространств существует изоморфизм*

$$\overline{H}^q_{f,c}(X,A;G) \approx \check{H}^q_{\blacktriangle}(X,A;G).$$

При исследовании различных задач алгебраической топологии вместе с классическими когомологическими функторами важную роль играют также непрерывные когомологические функторы ([25], [26], [27], [28], [31], [32]). В настоящее время известно несколько способов описания этих функторов, которые существенно отличаются друг от друга. Непрерывная теория когомологии получила дальнейшее развитие в работах ([32], [36]). В работе [36] Д.Мдзинаришвили определил и исследовал частично непрерывную когомологическую теорию Александера-Спеньера. Затем, в работе [32], эта теория была успешно применена для решения различных задач. Цель второй главы продолжить исследования в этом направлении. В частности, здесь излагаются частично непрерывная версия конечно определенной когомологической теории Александера-Спеньера и частично непрерывная когомологическая теория Александера-Спеньера с компактными носителями.

В §4 второй главы развивается частично непрерывная конечно определенная когомологическая теория Александера-Спеньера. Здесь существенную роль играет определение, мотивированное работой Л.Мдзинаришвили [36]. Пусть X – топологическое пространство, а G – топологическая абелевая группа. Отображение $\varphi : X^q \to G$ называется конечно частично непрерывным, если существует такое конечное открытое покрытие $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2} ..., U_{\alpha_n}\}$ пространства X, что ограничение отображения φ на подпространство α^q является непрерывным.

Естественным образом определяется частично непрерывный конечно определенный когомологический функтор $h_f^*(-,-;G)$, который удовлетворяет аксиомам размерности и точности (см. теорема 4.2, теорема 4.3).

Заметим, что для любого топологического пространства X и для любых топологических абелевых групп G_1 и G_2 существует изоморфизм

$$P : h_f^q(X; G_1 \times G_2) \to h_f^q(X; G_1) \oplus h_f^q(X; G_2)$$

(см. теорему 4.4). Следовательно, Если G является коммутативной связной группой Ли, то для каждого топологического пространства X существует изоморфизм

$$h_f^q(X; G) \approx h_f^q(X; R^n) \oplus h_f^q(X; T^m),$$

где R^n – n-мерное эвклидово пространство, а T^m – m-мерный тор (см. следствие 4.5).

Далее, доказана теорема 4.7 и получено следствие 4.8, в которых, с помощью прямых систем, даны изоморфные представления группы $M_f^q(X; G)$ q-мерных коцепей и q-мерной когомологической группы $h_f^q(X; G)$.

С использованием этих результатов в §4 доказано, что частично непрерывная конечно определенная когомологическая теория удовлетворяет аксиоме равномерной гомотопии (теорема 4.11, следствие 4.12).

Кроме того, найдены условия, при которых выполняется аксиома вырезания.

Теорема 4.14. *Пусть* (X,A) *– замкнутая пара топологических пространств. Если для целого числа* $q \geq 0$ *декартово произведение* X^{q+1} *является нормальным пространством, а* G *– абсолютным ретрактом, то отображение вырезания* $i:(X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ *индуцирует изоморфизм*

$$i^* : h_f^q(X,A;G) \to h_f^q(X \setminus U, A \setminus U; G).$$

С помощью частично непрерывной конечно определенной когомологической группы Александера-Спеньера в §4 дано описание частично непрерывной когомологической группы Александера-Спеньера [36] стоун-чеховского расширения.

Следствие 4.16. *Пусть* X *такое топологическое пространство, что для целого числа* $q \geq 0$ *декартово произведение* X^{q+1} *нормально и псевдокомпактно. Тогда для любой компактной группы* G *вложение* $i: X \to \beta X$ *индуцирует изоморфизм*

$$i^* : h^q(\beta X;G) \to h_f^q(X;G) .$$

Из этого получается следующее

Следствие 4.17. *Пусть* (X,A) *замкнутая пара топологических пространств. Если для целого числа* $q \geq 0$ *декартово произведение* X^{q+1} *нормально и псевдокомпактно, то для любой компактной группы* G *вложение* $i:(X,A) \to (\beta X, \beta A)$ *индуцирует изоморфизм*

$$i^* : h^q(\beta X, \beta A;G) \to h_f^q(X,A;G).$$

В §5 второй главы определен и исследован частично непрерывный когомологический функтор Александера-Спеньера с компактными носителями $h_c^q(-,-;G): Top_c^2 \to Ab$ над подкатегорией Top_c^2 замкнутых пар топологических пространств и их собственных отображений. Сперва, в пункте I §5 определены носители отображений (см.определение 5.1) и установлены их основные свойства. Затем показано, что функтор $h_c^*(-,-;G)$ удовлетворяет аксиомам размерности (теорема 5.6) и точности (теорема 5.7). Стоит обратить особое внимание на тот естественный факт, что определенный функтор существенно проявляет себя на подкатегории локально компактных пространств и собственных отображений. Одним из основных результатов пункта II §5 является теорема 5.16, согласно которой для всякого локально компактного пространства X q-мерная группа $h_c^q(X;G)$ является прямым пределом прямой системы $\{h_c^q(U;G),\ \tau_{U',U},\Delta\}$, где Δ – множество всех открытых ограниченных подмножеств пространства X.

В пункте Ш §5 предложены конструкции и новые требования для проверки аксиом собственной гомотопии и вырезания. Верны следующие результаты.

Следствие 5.21. *Если $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ собственно гомотопные отображения замкнутых пар локально компактных паракомпактных пространств, то*

$$f_0^* = f_1^* : h_c^q(Y, B; G) \to h_c^q(X, A; G).$$

Теорема 5.22. *Пусть (X, A) – замкнутая пара топологических пространств, а G – абсолютный ретракт. Если для целого числа $q \geq 0$ декартово произведение X^{q+1} нормально, а $A \setminus U$ – коограничено в $X \setminus U$, то отображение вырезания $i : (A \setminus U, X \setminus U) \to (X, A)$ индуцирует изоморфизм*

$$i^* : h_c^q(X, A; G) \to h_c^q(X \setminus U, A \setminus U; G).$$

Третья глава мотивирована задачами Ю.Смирнова [41] и В.Баладзе [20]. В 1966 г. на Пражском симпозиуме Ю.Смирновым была поставлена следующая общая проблема ([41], стр. 332):

найти необходимое и достаточное условия, при которых пространство из некоторого класса пространств имеет расширение с наростом с данным топологическим свойством.

Эта общая проблема интересна и имеет нетривиальное решение для следующего топологического свойства:

(ко) гомологическая группа нароста изоморфна данной группе ([17], [19], [20], [41]).

В работе [41] Ю.М.Смирновым была определена спектральная группа $F^n(X)$, основанная на окаймлениях и был аннонсирован (без доказательства) следующий результат:

для пространств X с бикомпактной аксиомой счетности существует изоморфизм $F^n(X) \approx \check{H}^n(cX \setminus X)$.

В работах В.Баладзе ([17], [19]) эта проблема была скрупулезно исследована, и были доказаны теоремы, дающие внутренние характеристики (ко)гомологических групп, когомологической размерности и коэфициента цикличности наростов пар как топологических, так и равномерных пространств. В работе [19] была поставлена задача о нахождении таких внутренних характеристик для когомологических групп наростов волмэновской реалькомпактификации.

В третьей главе это задача исследована с использованием методов и результатов работ В.Баладзе ([17], [19]). В §6 построен когомологический функтор типа Александера-Спеньера, основанный на конуль покрытиях над категорией Top_R^2. Обьектами категории Top_R^2 являются пары $(X,A)_Y$ топологических пространств, состоящие из подпространств $A, X \subset Y$ топологических пространств Y категории Top, т.е.

$$ob(Top_R^2) = \{(X,A)_Y \mid Y \in ob(Top),\ A \subset X \subset Y\}.$$

Морфизмами $f:(X_1,A_1)_{Y_1} \to (X_2,A_2)_{Y_2}$ категории Top_R^2 являются такие непрерывные отображения $f:(X_1,A_1) \to (X_2,A_2)$ категории Top^2, которые имеют непрерывные продолжения $F:Y_1 \to Y_2$, т.е.,

$$Mor_{Top_R^2}((X_1,A_1)_{Y_1},(X_2,A_2)_{Y_2}) = \{f:(X_1,A_1) \to (X_2,A_2) \mid f \in Mor_{Top^2}((X_1,A_1),(X_2,A_2)),$$

$$\exists\, F:Y_1 \to Y_2,\ F_{|(X_1,A_1)} = f\}.$$

Существует изоморфное вложение категории $PROX^2$ близостных пространств и близостных отображений в категорию Top_R^2, которое каждой паре (T,S) близостных пространств сопоставляет пару $(T,S)_{cT} \in Top_R^2$, где cT близостное расширение, а $T \subset cT$ и $S \subset cS$ подпространства с топологическими структурами, индуцированными близостями на T и S, соответственно. При этом, каждому близостному отображению $f:(T_1,S_1)\to (T_2,S_2)$ сопоставляется непрерывное отображение $f:(T_1,S_1)\to(T_2,S_2)$ пар индуцированных топологических пространств, которое, как известно [8], имеет непрерывное продолжение $F:cT_1\to cT_2$. Из результатов работы [8] вытекает, что это соответствие функториально.

Следуя §1 первой главы, определены (см. определение 6.1) $CZ(X,Y)$-локально нулевые отображения относительно $CZ(X,Y)$-покрытий, т.е. относительно покрытий, состоящих из конечного числа элементов, принадлежащих системе $CZ(X,Y)=\{U\cap X\mid U\in CZ(Y)\}$, где $CZ(Y)$ система всех конуль-множеств пространства Y.

Далее, с помощью конструкции, аналогичной конструкции, развиваемой в §1, строится δ-функтор $\overline{H}^q_Y(-,-G):Top^2_R\to Ab$ (см. теоремы 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6) и определен гомоморфизм $\tau:C^q_Y(X,A;G)\to \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^{CZ}_Y(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G)$, который, со своей стороны, индуцирует изомофизм $\widetilde{\tau}:\overline{C}^q_Y(X,A;G)\to \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^{CZ}_Y(X,A)} C^q(\alpha,\alpha')$ (теорема 6.7).

Заметим, что если подпространство X пространства Y таково, что $CZ(X,Y)=CZ(X)$, то группа $\overline{H}^q_Y(X;G)$ зависит только от пространства X и, в этом случае, употребляется обозначение $\overline{H}^q_{CZ}(X;G)$. Известно, что если X есть замкнутое подмножество нормального пространства Y, или X есть совершенно замкнутое подпространство вполне регулярного пространства Y, то $CZ(X,Y)=CZ(X)$.

Для каждого объекта $T_{cT}\in Top^2_R$, соответствующего пространству близости T, семейство $CZ(T,cT)$ совпадает с семейством $CZ_p(T)=\{T\setminus A\mid A=f^{-1}(0), f:T\to R\}$, где $f:T\to R$ ограниченное близостное отображение во множество действительных чисел R с естественной близостью. Поэтому, группа $\overline{H}^q_{cT}(T;G)$ зависит только от близостного пространства T и она обозначается просто символом $\overline{H}_p^q(T;G)$. Для каждой пары (T,S) пространств близости имеем $CZ(S.cT) = CZ(S,cS)$. Поэтому $\overline{H}_{cT}^q(S;G) = \overline{H}_{cS}^q(S;G) = \overline{H}_p^q(S;G)$.

Основной целью §6 является установление связей построенного функтора с другими известными функторами. С этой целью установлены вспомогательные предложения (леммы 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.15, теоремы 6.12, 6.13, следствие 6.14), имеющие важную роль при решении вышеприведенной задачи. Среди основных результатов следует выделить следующие предложения.

Теорема 6.16. *Если X является вполне регулярным пространством, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ и $A \in \mathcal{F}$, то*

$$\overline{H}_{w(\mathcal{F})}^q(X,A;G) \approx \overline{H}^q(w(\mathcal{F}),w(\mathcal{F}_A);G).$$

Следствие 6.17. *Пусть A совершенно замкнутое подмножество вполне регулярного пространства X. Тогда*

$$\overline{H}_{cZ}^q(X,A;G) \approx \overline{H}^q(\beta X,\beta A;G).$$

Следствие 6.18. *Пусть A замкнутое подмножество нормального пространства X. Тогда*

$$\overline{H}_{cZ}^q(X,A;G) \approx \overline{H}_f^q(X,A;G).$$

Пусть $h^*(-,-;G)$ когомологический функтор, исследованный в [17]. Из теоремы 5.13 [17] и теоремы 6.16 вытекает

Следствие 6.19. *Пусть S – нуль-множество пространства близости T, а $CZ_p(T)$ принадлежит системе $\mathcal{L}(T)$ топологического пространства T с топологией, индуцированной близостью на T. Тогда*

$$\overline{H}_p^q(T,S;G) \approx h^q(T,S;G).$$

§7 третьей главы посвящен описанию когомологических групп типа Александера-Спеньера наростов реалькомпактификаций. Здесь определен функтор $\overline{H}_{R(Y)}^q(-,-;G): cTop_R^2 \to Ab$ над категорией, объектами которой являются такие пары $(X,A)_Y \in Top_R^2$, что $A \in Z(X,Y)$. Морфизмами категории $cTop_R^2$ являются совершенные отображения $f:(X_1,A_1)_{Y_1}\to(X_2,A_2)_{Y_2}$. Определение когомологической группы $\overline{H}^q_{R(Y)}(X,A;G)$ основано на $R(X,Y)$-локально нулевых отображениях $\varphi:X^{q+1}\to G$, т.е. на таких отображениях, для которых существует такое $R(X,Y)$ -окаймление [11] $\alpha\in Cov^R_Y(X,A)$, что $\varphi_{|\alpha^q}=0$. Для функтора $\overline{H}^q_{R(Y)}(-,-;G)$ справедливы предложения, аналогичные предложениям, полученным в предыдущем параграфе. При доказательстве основной теоремы, дающей внутреннюю характеристику когомологической группы нароста реалькомпактификаций $(v(X,Z(X,Y)),v(A,Z(A,Y)))$ пары (X,A), большей частью применяются методы, разработанные в работах В.Баладзе ([17], [19]). Кроме того, доказательство опирается и на теорему 7.7, на леммы 7.8, 7.9, 7.10, 7.11 и на следствия 7.12, 7.13.

Основным результатом §7 является следующая

Теорема 7.14. *Пусть* $(X,A)_{w(\mathcal{F})}\in cTop^2_R$. *Тогда существует изоморфизм*

$$\overline{H}^q_{R(w(\mathcal{F}))}(X,A;G)\approx\overline{H}^q_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F})\setminus X,v(\mathcal{F}_A)\setminus A;G)).$$

ГЛАВА I

КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ АЛЕКСАНДЕРА-СПЕНЬЕРА

§1. Конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера

Пусть X произвольное топологическое пространство, а G абелевая группа. Для каждого целого числа $q \geq 0$ рассмотрим $q+1$-кратное произведение X^{q+1} пространства X и обозначим через $C^q(X;G)$ множество всевозможных отображений $\varphi : X^{q+1} \to G$. Ясно, что $C^q(X;G)$ – абелевая группа. Кограничный гомоморфизм

$$\delta : C^q(X;G) \to C^{q+1}(X;G)$$

определяется следующей формулой:

$$\delta\varphi(x_0,...,x_i,...,x_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i \varphi(x_0,...\hat{x}_i,...,x_{q+1}),$$

где символ “^” означает пропуск соответствующей координаты. Легко показать, что $\delta \circ \delta = 0$. Следовательно, $C^*(X;G) = \{C^q(X;G), \delta\}$ является коцепным комплексом [39].

Определение 1.1. Отображение $\varphi : X^q \to G$ называется конечно локально нулевым, если найдется такое конечное открытое покрытие $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ пространства X, что ограничение $\varphi_{|\alpha^q} : \alpha^q \to G$ отображения φ на подмножество $\alpha^q = \bigcup_{i=1}^{n} U^q_{\alpha_i}$ является нулевым отображением.

Заметим, что конечно локально нулевые отображения являются локально нулевыми отображениями, но обратное, вообще говоря, не верно.

Для каждого целого числа $q \geq 0$ обозначим через $C^q_{f,0}(X;G)$ подгруппу группы $C^q(X;G)$, состоящую из конечно локально нулевых отображений. Легко показать, что гомоморфизм δ переводит подгруппу $C^q_{f,0}(X;G)$ в подгруппу $C^{q+1}_{f,0}(X;G)$ и, значит, $C^*_{f,0}(X;G)=\{C^q_{f,0}(X;G),\delta\}$ представляет собой коцепной комплекс. Ясно, что он является подкомплексом комплекса $C^*(X;G)$.

Пусть $\overline{C}^*_f(X;G)$ фактор-комплекс коцепного комплекса $C^*(X;G)$ по подкомплексу $C^*_{f,0}(X;G)$. q-мерную когомологическую группу полученного комплекса $\overline{C}^*_f(X;G)$ обозначим символом $\overline{H}^q_f(X;G)$.

Любое отображение $f:X\to Y$ определяет гомоморфизм $f^\#:C^q(Y;G)\to C^q(X;G)$ [39]. По определению, $f^\#(\varphi)(x_0,x_1,...,x_q)=\varphi(f(x_0),f(x_1),....,f(x_q))$ $\varphi\in C^q(Y;G)$, $(x_0,x_1,...,x_q)\in X^{q+1}$.

Заметим, что гомоморфизм $f^\#$, определенный непрерывным отображением f, индуцирует гомоморфизм $f^\#:\overline{C}^q_f(Y;G)\to\overline{C}^q_f(X;G)$. Этот гомоморфизм коммутируется с кограничным гомоморфизмом и, следовательно, порождает гомоморфизм $f^\#:\overline{H}^q_f(Y;G)\to\overline{H}^q_f(X;G)$ когомологических групп.

Пусть дана пара (X,A) топологических пространств. Отображение вложения $i:A\to X$ индуцирует гомоморфизм $i^\#:\overline{C}^q_f(X;G)\to\overline{C}^q_f(A;G)$. Нетрудно убедиться, что $i^\#$ является эпиморфизмом. Обозначим через $\overline{C}^q_f(X,A;G)$ ядро отображения $i^\#$ и назовем его q-мерной группой коцепей пары (X,A). Заметим, что $\overline{C}^*_f(X,A;G)$ является коцепным комплексом. Ясно, что следующая короткая последовательность

$$0\to\overline{C}^*_f(X,A;G)\to\overline{C}^*_f(X;G)\to\overline{C}^*_f(A;G)\to 0$$

является точной. Следовательно, она, со своей стороны, индуцирует следующую длинную последовательность

$$...\to\overline{H}^q_f(X,A;G)\xrightarrow{j^*}\overline{H}^q_f(X;G)\xrightarrow{i^*}\overline{H}^q_f(A;G)\xrightarrow{\delta}\overline{H}^{q+1}_f(X,A;G)\to... \ .$$

Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема 1.2 (аксиома точности). *Для каждой пары (X,A) топологических пространств длинная когомологическая последовательность точна.* ■

Пусть дано непрерывное отображение $f:(X,A)\to(Y,B)$. Заметим, что $f^{\#}(\overline{C}_f^q(Y,B;G))\subset\overline{C}_f^q(X,A;G)$. Поэтому гомоморфизм f индуцирует гомоморфизм $f^*:\overline{H}_f^q(Y,B;G)\to\overline{H}_f^q(X,A;G)$. Заметим, что этот гомоморфизм обладает следующими свойствами.

Теорема 1.3. *Для каждого тождественного отображения* $1_{(X,A)}:(X,A)\to(X,A)$ *гомоморфизм* $1^*_{(X,A)}:\overline{H}_f^q(X,A;G)\to\overline{H}_f^q(X,A;G)$ *является тождественным изоморфизмом.* ■

Теорема 1.4. *Для любых непрерывных отображений* $f:(X,A)\to(Y,B)$ *и* $g:(Y,B)\to(Z,C)$

$$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*:\overline{H}_f^q(Z,C;G)\to\overline{H}_f^q(X,A;G).$$

■

Таким образом, существует контравариантный функтор $\overline{H}_f^q(-,-;G):Top^2\to Ab$. Его мы назовем конечно определенным q-мерным когомологическим функтором Александера-Спеньера. Справедливы также следующие теоремы.

Теорема 1.5. *Для каждого непрерывного отображения* $f:(X,A)\to(Y,B)$ *коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}\overline{H}_f^q(B;G) & \xrightarrow{\delta} & \overline{H}_f^{q+1}(Y,B;G)\\ \downarrow f^* & & \downarrow f^*\\ \overline{H}_f^q(A;G) & \xrightarrow{\delta} & \overline{H}_f^{q+1}(X,A;G).\end{array}$$

■

Теорема 1.6 (аксиома размерности). *Для каждого одноточечного топологического пространства P и абелевой группы G*

$$\overline{H}_f^q(P;G)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad q\neq 0\\ G, & \text{если}\quad q=0.\end{cases}$$

Доказательство. Ясно, что в условиях теоремы 1.6 для каждого целого числа $q\geq 0$ существует изоморфизм $\overline{C}_f^q(P;G)\approx G$. Кроме того, кограничный гомоморфизм является тождественным или нулевым. Из сказанного легко следует справедливость теоремы. ■

Теорема 1.7. *Пусть* (X, A) *пара топологических пространств, а* U *подпространство пространства* X, *для которого существует такая открытая окрестность* W, *что* $\overline{W} \subset IntA$. *Тогда отображение вложения* $i:(X\setminus U, A\setminus U) \to (X, A)$ *индуцирует изоморфизм*

$$i^{\#} : \overline{C}_f^q(X, A; G) \approx \overline{C}_f^q(X \setminus U, A \setminus U; G).$$

Доказательство. Из группы $C^q(X;G)$ выделим подгруппу $C_f^q(X.A;G)$ всех отображений $\varphi: X^{q+1} \to G$, для которых ограничения $\varphi_{|A^{q+1}} : A^{q+1} \to G$ являются конечно локально нулевыми отображениями на подпространстве A. Тогда справедливо следующее равенство

$$\overline{C}_f^q(X, A; G) = C_f^q(X, A; G) / C_{f,0}^q(X; G).$$

Рассмотрим диаграмму, индуцированную отображением вложения $i:(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to C_{f,0}^q(X;G) & \longrightarrow & C_f^q(X, A; G) & \longrightarrow & \overline{C}_f^q(X, A; G) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow i_1^{\#} & & \downarrow i_2^{\#} & & \downarrow i^{\#} & & \\
0 \to C_{f,0}^q(X \setminus U; G) & \longrightarrow & C_f^q(X \setminus U, A \setminus U; G) & \xrightarrow{\eta} & \overline{C}_f^q(X \setminus U, A \setminus U : G) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Используя эту диаграмму для доказательства теоремы, достаточно показать, что $\eta i_2^{\#}$ является эпиморфизмом и $(i_1^{\#})^{-1}(C_{f,0}^q(X \setminus U; G)) = C_{f,0}^q(X; G)$.

Возьмем произвольный элемент $\overline{\varphi} \in \overline{C}_f^q(X \setminus U, A \setminus U; G)$ и рассмотрим его представитель $\varphi \in \overline{\varphi}$. Определим отображение $\widetilde{\varphi}: X^{q+1} \to G$ следующим равенством:

$$\widetilde{\varphi}(x_0, x_1, ..., x_q) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x_i \in W \textit{ для какого-либо } 0 \le i \le q \\ \varphi(x_0, x_1, ..., x_q), & \textit{если } \; x_0, x_1, ..., x_q \in X \setminus W. \end{cases}$$

Элемент $\varphi \in C_f^q(X \setminus U, A \setminus U; G)$. Поэтому существует такое конечное открытое покрытие α пространства $A \setminus U$, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}}$ является нулевым. Семейство $\widetilde{\alpha} = \{U_{\alpha_i} \bigcup W \mid U_{\alpha_i} \in \alpha\}$ будет таким конечным открытым покрытием пространства A, что $\widetilde{\varphi}_{|\widetilde{\alpha}^{q+1}}$ является нулевым и, следовательно, $\widetilde{\varphi} \in C_f^q(X, A; G)$. Заметим, что семейство $\beta = \{U_{\alpha_i} \bigcap IntA \mid i = 1,2,...,n\} \bigcup \{X \setminus \overline{W}\}$ будет таким конечным открытым покрытием пространства $X \setminus U$, что ограничение $(i_2^{\#}\widetilde{\varphi}-\varphi)_{|\beta^{q+1}}$ будет нулевым отображением, т.е. $\eta i_2^{\#}\widetilde{\varphi}=\overline{\varphi}$, значит $\eta i_2^{\#}$ – эпоморфизм.

Допустим, что элемент $\varphi \in C_f^q(X,A;G)$ таков, что $i_2^{\#}\varphi \in C_{f,0}^q(X \setminus U;G)$. В этом случае найдется такое конечное открытое покрытие $\alpha'=\{U'_{\alpha_1},U'_{\alpha_2},...,U'_{\alpha_n}\}$ подпространства A, что $\varphi_{|\alpha'^{q+1}}$ является нулевым. Можно найти и такое конечное открытое покрытие $\alpha''=\{U''_{\alpha_1},U''_{\alpha_2},...,U''_{\alpha_m}\}$ пространства $X \setminus U$, что $\varphi_{|\alpha''^{q+1}}$ является нулевым. Допустим, что $\alpha_1=\{U'_{\alpha_i} \cap IntA \mid U'_{\alpha_i} \in \alpha'\}$, $\alpha_2=\{U''_{\alpha_i} \setminus \overline{W} \mid U''_{\alpha_i} \in \alpha''\}$. Семейство $\alpha=\alpha_1 \cup \alpha_2$ является таким конечным открытым покрытием пространства X, что ограничение $\varphi_{|\alpha^{q+1}}$ есть нулевое отображение, т.е. $\varphi \in C_{f,0}^q(X;G)$.

С другой стороны, для каждого $\varphi \in C_{f,0}^q(X;G)$ образ $i_1^{\#}\varphi \in C_{f,0}^q(X \setminus U;G)$. Поэтому, указанное равенство справедливо. Теорема доказана. ■

Пусть α является покрытием топологического пространства X. Обозначим через $X(\alpha)$ абстрактный симплициальный комплекс, вершинами которого являются точки пространства X, а симплексами – конечные подмножества пространства X, которые содержатся в каком-либо элементе U_α покрытия α. Пусть A – подпространство пространства X, а (α,α') – покрытие пары (X,A). Тогда из комплекса $X(\alpha)$ можно выделить подкомплекс $A(\alpha')$, вершинами которого являются точки подпространства A, а симплексами – симплексы комплекса $X(\alpha)$, входящие в пересечение какого-либо элемента U_α покрытия α' и подпространства A. Соответственно, для каждого покрытия (α,α') пары (X,A) получим пару $(X(\alpha),A(\alpha'))$ симплициальных комплексов. Пусть $C^*(\alpha,\alpha';G)$ является упорядоченным коцепным комплексом пар симплициальных комплексов $(X(\alpha),A(\alpha'))$ с коэффициентами в группе G. В таком случае, каждый элемент $\varphi \in C^q(\alpha,\alpha';G)$ является отображением $\varphi:\alpha^{q+1} \to G$, принимающим нулевое значение на $\alpha'^{q+1} \cap A^{q+1}$.

Пусть (α,α') является открытым покрытием пары (X,A), а (β,β') – его открытое измельчение. Тогда пару $(X(\beta),A(\beta'))$ симплициальных комплексов можно вложить в пару $(X(\alpha),A(\alpha'))$. Это вложение индуцирует гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta}:C^q(\alpha,\alpha';G)\to C^q(\beta,\beta';G)$.

Рассмотрим множество $Cov(X,A)$ всех открытых покрытий пары (X,A). Выделим из него подмножество $Cov^f(X,A)$ всех конечных открытых покрытий.

Рассмотрим прямую систему $\{C^q(\alpha,\alpha';G),\pi_{\alpha\beta},Cov^f(X,A)\}$ над направленным множеством $Cov^f(X,A)$. Наша цель – показать, что группа $\overline{C}_f^q(X,A;G)$ изоморфна предельной группе $\varinjlim\limits_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G)$.

Возьмем любой элемент $\varphi\in C_f^q(X,A;G)$. Тогда найдется такое конечное открытое покрытие $\alpha''=\{U''_{\alpha_1},U''_{\alpha_2},...,U''_{\alpha_n}\}$ подпространства A, что $\varphi_{|\alpha''^{q+1}}$ является нулевым. Пусть $U_{\alpha_i}\subset X$, $i=1,2,...,n$ такие открытые подмножества пространства X, что $U''_{\alpha_i}=U_{\alpha_i}\cap A$, $i=1,2,...,n$. В таком случае $\alpha'=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_n}\}$ будет системой открытых подмножеств пространства X, покрывающей подпространство A. Если допустить, что $\alpha=\alpha'\cup\{X\}$, то (α,α') будет открытым покрытием пары (X,A) и $\varphi_\alpha=\varphi_{|\alpha^{q+1}}\in C^q(\alpha,\alpha';G)$. Таким образом, можно определить гомоморфизм

$$\tau:C_f^q(X,A;G)\to \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G)$$

следующей формулой

$$\tau(\varphi)=\pi_\alpha(\varphi_\alpha),$$

где $\pi_\alpha:C^q(\alpha,\alpha';G)\to \varinjlim\limits_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G)$ естественная проекция.

Теорема 1.8. *Для каждой пары (X,A) топологических пространств гомоморфизм τ индуцирует изоморфизм*

$$\tilde{\tau}:\overline{C}_f^q(X,A;G)\approx \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G).$$

Доказательство. Для любого элемента $\bar{\varphi} \in \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G)$ существует такое конечное открытое покрытие (α,α') пары (X,A) и такой элемент $\varphi_\alpha \in C^q(\alpha,\alpha';G)$, что $\pi_\alpha(\varphi_\alpha)=\bar{\varphi}$. Определим отображение $\varphi: X^{q+1} \to G$ следующим образом:

$$\varphi(x_0,x_1,...,x_q)=\begin{cases}\varphi_\alpha(x_0,x_1,...,x_q), & \text{если } x_0,x_1,...,x_q \in U_{\alpha_i}, \text{ где } U_{\alpha_i}\in\alpha\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_{|\alpha'^{q+1}\cap A^{q+1}}=0$ и, значит, $\varphi\in C^q_f(X,A;G)$. Вместе с тем $\varphi_\alpha=\varphi_{|\alpha^{q+1}}$, поэтому, $\tau(\varphi)=\bar{\varphi}$. Таким образом, τ представляет эпиморфизм.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $C^*_{f,0}(X,G)=Ker\tau$. Действительно, если $\varphi\in C^q_{f,0}(X;G)$, то, согласно определению, $\tau(\varphi)=0$, т.е. $\varphi\in Ker\tau$. Наоборот, допустим $\varphi\in Ker\tau$, т.е. $\pi_\alpha(\varphi_\alpha)=0$. Тогда найдется такое конечное открытое покрытие β, что $\alpha<\beta$ и $\pi_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha)=\varphi_{|\beta^{q+1}}=0$, т.е. $\varphi\in C^q_{f,0}(X;G)$. Теорема доказана. ■

Скажем, что покрытия (α,α') и (β,β') пар топологических пространств (X,A) и (Y,B) совместимы с непрерывными отображениями $f,g:(X,A)\to(Y,B)$, если для каждого элемента $U_\alpha\in\alpha$ $(U_\alpha\in\alpha')$ найдется такой элемент $U_\beta\in\beta$ $(U_\beta\in\beta')$, что $f(U_\alpha)\subset U_\beta$, $g(U_\alpha)\subset U_\beta$ [36].

Лемма 1.9. *Если покрытия (α,α') и (β,β') совместимы с отображениями f и g, то гомоморфизмы*

$$f^\#_\alpha,\ g^\#_\alpha : C^q(\beta,\beta';G)\to C^q(\alpha,\alpha';G)$$

коцепно гомотопны.

Доказательство. Определим гомоморфизм $D_q: C^q(\beta,\beta';G)\to C^{q-1}(\alpha,\alpha';G)$ формулой

$$D_q(\varphi)(x_0,x_1,...,x_{q-1})=\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i\varphi(f(x_0),...,f(x_i),g(x_i),...,g(x_{q-1})).$$

Заметим, что D_q удовлетворяет условию

$$f_\alpha^\#(\varphi) - g_\alpha^\#(\varphi) = \delta D_q(\varphi) + D_{q+1}\delta(\varphi).$$

Тем самым лемма доказана. ■

Определение 1.10 (см. [10]). Непрерывные отображения $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ называются равномерно гомотопными, если существует такая гомотопия $F : (X, A) \times I \to (Y, B)$, что для каждого конечного открытого покрытия (β, β') пары (Y, B) найдутся такое конечное открытое покрытие (α, α') пары (X, A) и конечное открытое покрытие γ пространства I, что $F^{-1}(\beta, \beta') < (\alpha, \alpha') \times \gamma$.

Теорема 1.11 (аксиома равномерной гомотопии). *Для равномерно гомотопных отображений* $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ *пар топологических пространств*

$$f_0^* = f_1^* : \overline{H}_f^*(Y, B; G) \to \overline{H}_f^*(X, A; G).$$

Доказательство. Пусть (β, β') произвольное конечное открытое покрытие пары (Y, B). По условию теоремы найдутся такое конечное открытое покрытие пары (X, A) и такие точки $0 = t_0 \le t_1 < \ldots < t_{n-1} \le t_n = 1$ пространства I, что покрытия (α, α') и (β, β') совместимы с отображениями $\tilde{f}_{t_i}, \tilde{f}_{t_{i+1}} : (X, A) \to (Y, B)$ $i = 0, 1,$ $\ldots n-1$, определенными формулами

$$\tilde{f}_{t_i}(x) = F(x, t_i),\ i = 0, 1, \ldots n.$$

Согласно лемме 1.9, получим

$$\tilde{f}_{t_i}^* = \tilde{f}_{t_{i+1}}^* : H(C^*(\beta, \beta'; G)) \to H(C^*(\alpha, \alpha'; G)),\ i = 0, 1, \ldots n-1.$$

Из этого следует, что

$$\tilde{f}_0^* = \tilde{f}_1^* : H(C^*(\beta, \beta'; G)) \to H(C^*(\alpha, \alpha'; G)).$$

Учитывая теорему 1.8 и теорему А.10 из [4], получим

$$f_0^* = f_1^* : \overline{H}_f^*(Y, B; G) \to \overline{H}_f^*(X, A; G).$$

Тем самым теорема доказана. ■

Пусть (α, α') открытое покрытие пары (X, A) топологических пространств. Рассмотрим (X, A) и (α, α') как пары множеств. Определим пару отношений (R, R') следующим образом:

$(x,U_\alpha)\in R$ тогда и только тогда, когда $x\in X$, $U_\alpha\in\alpha$ и $x\in U_\alpha$.

$(x,U_\alpha)\in R'$ тогда и только тогда, когда $x\in A$, $U_\alpha\in\alpha'$ и $x\in U_\alpha$.

Полученные пары (R,R') определяют [30] пары $(X(\alpha),A(\alpha'))$ и $(X_\alpha,A_{\alpha'})$ симплициальных комплексов, где $(X_\alpha,A_{\alpha'})$ нерв покрытия (α,α').

Пусть $\check{H}^q_f(X,A;G)$ q-мерная когомологическая группа Чеха, определенная конечными открытыми покрытиями пары (X,A).

Применяя теорему 1.8 и теорему 1 из [30], получим

Следствие 1.12. *Для каждой пары (X,A) топологических пространств существует изоморфизм*

$$\overline{H}^q_f(X,A;G)\approx \check{H}^q_f(X,A;G).$$

■

Пусть $(\beta X,\beta A)$ компактификация Стоуна-Чеха пары (X,A), состоящей из нормального пространства X и его замкнутого подпространства A, а $\overline{H}^q(\beta X,\beta A;G)$ – его q-мерная когомологическая группа Александера-Спеньера.

Следствие 1.13. *Пусть X нормальное пространство, а A – его замкнутое подпространство. Тогда*

$$\overline{H}^q_f(X,A;G)\approx \overline{H}^q(\beta X,\beta A;G).$$

■

§2. Конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера с компактными носителями

Пусть дана замкнутая пара (X,A) топологических пространств. Построим для нее новый коцепной комплекс. Для каждого целого числа $q\geq 0$ из группы $C^q_f(X,A;G)$ выделим подгруппу $C^q_{f,c}(X,A;G)$, состоящую из всех элементов $\varphi\in C^q_f(X,A;G)$, являющихся конечно локально нулевыми на каком-либо коограниченном подпространстве. Заметим, что для выделенной подгруппы верно следующее вложение

$$\delta(C^q_{f,c}(X,A;G)) \subset C^{q+1}_{f,c}(X,A;G).$$

Следовательно, $C^*_{f,c}(X,A;G)$ является подкомплексом комплекса $C^*_{ff}(X,A;G)$. Вместе с тем, комплекс $C^*_{f,0}(X;G)$ представляет подкомплекс комплекса $C^*_{f,c}(X,A;G)$. Рассмотрим соответствующий фактор-комплекс и обозначим его через $\overline{C}^*_{f,c}(X,A;G)$.

Таким образом, для каждой замкнутой пары (X,A) топологических пространств мы построили коцепный комплекс $\overline{C}^*_{f,c}(X,A;G)$. Обозначим q-мерную когомологическую группу полученного комплекса $\overline{C}^*_{f,c}(X,A;G)$ символом $\overline{H}^q_{f,c}(X,A;G)$ и назовем ее q-мерной конечно определенной когомологической группой Александера-Спеньера с компактными носителями.

Допустим, $f:(X,A)\to(Y,B)$ – собственное отображение. Определим гомоморфизм

$$f^{\#}: C^q_{f,c}(Y,B;G) \to C^q_{f,c}(X,A;G)$$

формулой

$$f^{\#}(\varphi)(x_0,x_1,\dots,x_q) = \varphi(f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_q)),\ \varphi\in C^q_{f,c}(Y,B;G),\ (x_0,x_1,\dots,x_q)\in X^{q+1}.$$

Со своей стороны, гомоморфизм $f^{\#}$ индуцирует гомоморфизм (который обозначим тем же символом)

$$f^{\#}: \overline{C}^q_{f,c}(Y,B;G) \to \overline{C}^q_{f,c}(X,A;G).$$

Заметим, что в определении отображения $f^{\#}$ существенна собственность отображения f. Отметим, что $f^{\#}$ коммутирует с кограничным гомоморфизмом и, следовательно, индуцирует гомоморфизм

$$f^*: \overline{H}^q_{f,c}(Y,B;G) \to \overline{H}^q_{f,c}(X,A;G).$$

Возьмем замкнутую пару (X,A) топологических пространств. Тогда вложение $i:A\to X$ является собственным и, следовательно, индуцирует гомоморфизм

$$i^{\#}:\overline{C}^{q}_{f,c}(X,G)\to C^{q}_{f,c}(A;G).$$

Заметим, что $i^{\#}$ – эпиморфизм и $\overline{C}^{q}_{f,c}(X,A;G)=\operatorname{Ker}i^{\#}$. Следовательно, следующая короткая последовательность

$$0\longrightarrow\overline{C}^{q}_{f,c}(X,A;G)\longrightarrow\overline{C}^{q}_{f,c}(X;G)\longrightarrow\overline{C}^{q}_{f,c}(A;G)\longrightarrow 0$$

является точной, и она индуцирует длинную точную последовательность

$$\ldots\xrightarrow{\delta}\overline{H}^{q}_{f,c}(X,A;G)\xrightarrow{i^{*}}\overline{H}^{q}_{f,c}(X;G)\xrightarrow{i^{*}}\overline{H}^{q}_{f,c}(A;G)\xrightarrow{\delta}\overline{H}^{q+1}_{f,c}(X,A;G)\xrightarrow{i^{*}}\ldots.$$

Таким образом, получена теорема.

Теорема 2.1 (аксиома точности). *Для каждой замкнутой пары (X,A) топологических пространств точна длинная когомологическая последовательность.* ■

Теорема 2.2 (аксиома размерности). *Для каждого одноточечного пространства P и абелевой группы G*

$$\overline{H}^{q}_{f,c}(P;G)=\begin{cases}0, & \text{если}\ \ q\neq 0\\ G, & \text{если}\ \ q=0.\end{cases}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.6. ■

Теорема 2.3. *Пусть (X,A) – замкнутая пара топологических пространств, а U такое открытое подмножество пространства X, что $\overline{U}\subset \mathrm{Int}A$. Тогда отображение вложения $i:(X\setminus U,A\setminus U)\to(X,A)$ индуцирует изоморфизм*

$$i^{\#}:\overline{C}^{q}_{f,c}(X,A;G)\approx\overline{C}^{q}_{f,c}(X\setminus U,A\setminus U;G).$$

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0\longrightarrow & C^{*}_{f,0}(X;G) & \longrightarrow & C^{*}_{f,c}(X,A;G) & \longrightarrow & \overline{C}^{*}_{f,c}(X,A;G) & \longrightarrow 0\\
 & \downarrow i_1^{\#} & & \downarrow i_2^{\#} & & \downarrow i^{\#} & \\
0\longrightarrow & C^{*}_{f,0}(X\setminus U;G) & \longrightarrow & C^{*}_{f,c}(X\setminus U,A\setminus U;G) & \xrightarrow{\eta} & \overline{C}^{*}_{f,c}(X\setminus U,A\setminus U;G) & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Покажем, что в этой диаграмме $\eta i_2^{\#}$ – эпиморфизм и $(i_1^{\#})^{-1}(C^{*}_{f,0}(X\setminus U;G))=$
$=C^{*}_{f,0}(X;G)$.

Возьмем произвольный элемент $\overline{\varphi} \in \overline{C}^q_{f,c}(X \setminus U, A \setminus U; G)$ и пусть $\varphi \in \overline{\varphi}$ его представитель. Определим отображение $\varphi : X^{q+1} \to G$ равенством

$$\widetilde{\varphi}(x_0, x_1, ..., x_q) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \in U \text{ для какого} - \text{либо } i = 0,1,...,q \\ \varphi(x_0, x_1, ..., x_q), & \text{если } x_0, x_1, ..., x_q \in X \setminus U. \end{cases}$$

Легко показать, что $\widetilde{\varphi} \in C^q_f(X, A; G)$. Теперь покажем, что $\widetilde{\varphi}$ является конечно локально нулевым на каком-либо коограниченном подмножестве B. Действительно, так как $\varphi \in C^q_{f,c}(X \setminus U, A \setminus U; G)$, то существуют коограниченное подмножество B_1 пространства $X \setminus U$ и его такое конечное открытое покрытие $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}}$ является нулевым. Пусть $B = B_1 \cup U$ и $\alpha' = \{U_{\alpha_i} \cup U \mid U_{\alpha_i} \in \alpha\}$. Ясно, что B коограниченное подпространство прастранства X, а α' – его конечное открытое покрытие. Из построения отображения $\widetilde{\varphi}$ следует, что $\widetilde{\varphi}_{\alpha'^{q+1}}$ является нулевым, т.е. $\widetilde{\varphi} \in C^q_{f,c}(X, A; G)$. Заметим, что $\eta i_2^\# \widetilde{\varphi} = \overline{\varphi}$ и, следовательно, $\eta i_2^\#$ – эпиморфизм.

Что касается доказательства второй части теоремы, оно аналогично соответствующему доказательству, приведенному при доказательстве теоремы 1.7, и поэтому опускается. ■

Из теоремы 2.3. непосретсвенно следует

Теорема 2.4. *Пусть (X, A) – замкнутая пара топологических пространств, а U такое открытое подмножество пространства X, что $\overline{U} \subset IntA$. Тогда отображение вложения $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ индуцирует изоморфизм*

$$i^* : \overline{H}^q_{f,c}(X, A; G) \approx \overline{H}^q_{f,c}(X \setminus U, A \setminus U; G) .$$

■

Возьмем произвольное конечное открытое покрытие (α, α') замкнутой пары (X, A) топологических пространств. Рассмотрим соответствующий коцепной комплекс $C^*(\alpha, \alpha'; G)$ и из каждой группы $C^q(\alpha, \alpha'; G)$ выделим подмножество $C^q_c(\alpha, \alpha'; G)$ всех тех отображений $\varphi : \alpha^{q+1} \to G$, для которых найдутся такое коограничное подмножество B пространства X и его конечное открытое покрытие β, что $\varphi_{|\alpha'^{q+1}\cap\beta^{q+1}}$ является нулевым. Покажем, что $C_c^q(\alpha,\alpha';G)$ – подгруппа. Возьмем два любых элемента $\varphi_1,\varphi_2 \in C_c^q(\alpha,\alpha';G)$. Соответственно, найдутся такие коограниченные подмножества B_1,B_2 и такие конечные открытые покрытия β_1,β_2 что

$$\varphi_{1|\alpha'^{q+1}\cap\beta_1^{q+1}}=0 \text{ и } \varphi_{2|\alpha'^{q+1}\cap\beta_2^{q+1}}=0.$$

Множество $B=B_1\cap B_2$ коограничено и семейство $\beta=\beta_{1|B}\wedge\beta_{2|B}$ является его конечным покрытием. Заметим, что $(\varphi_1+\varphi_2)_{|\alpha'^{q+1}\cap\beta^{q+1}}=0$, т.е. $(\varphi_1+\varphi_2)\in C_c^q(\alpha,\alpha';G)$ и, следовательно, $C_c^q(\alpha,\alpha';G)$ представляет группу. Ясно, что коцепной комплекс $C_c^*(\alpha,\alpha';G)$ является подкомплексом комплекса $C^*(\alpha,\alpha';G)$.

Допустим, что даны два конечных открытых покрытия $(\alpha,\alpha')<(\beta,\beta')$ пары (X,A). Тогда ясно, что существует гомоморфизм ограничения

$$\pi_{\alpha\beta}:C_c^q(\alpha,\alpha';G)\to C_c^q(\beta,\beta';G)$$

и, следовательно, $\{C_c^q(\alpha,\alpha';G),\ \pi_{\alpha\beta},Cov^f(X;A)\}$ является прямой системой.

Возьмем произвольный элемент $\varphi\in C_{f,c}^q(X,A;G)$. Для φ найдутся такое конечное открытое покрытие $\alpha''=\{U'_{\alpha_1},U'_{\alpha_2},...,U'_{\alpha_n}\}$ подпространства A и такое конечное открытое покрытие $\beta=\{U_{\beta_1},U_{\beta_2},...,U_{\beta_m}\}$ какого-либо коограниченного подмножества B, что $\varphi_{|\alpha''^{q+1}}=0$ и $\varphi_{|\beta^{q+1}}=0$. Допустим, что U_{α_i}, $i=1,2,...,n$ являются такими открытыми подмножествами пространства X, что $U'_{\alpha_i}=U_{\alpha_i}\cap A$, $i=1,2,...,n$. Тогда система $\alpha'=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_n}\}$ покрывает подпространство A. Ясно, что $\alpha=\alpha'\cup\{X\}$ конечное открытое покрытие подпространства X, а (α,α') конечное открытое покрытие пары (X,A). Пусть $\varphi_\alpha=\varphi_{|\alpha^{q+1}}$. Тогда элемент $\varphi_\alpha\in C_c^q(\alpha,\alpha';G)$, так как $\varphi_{\alpha|\alpha'^{q+1}\cap\beta^{q+}}=\varphi_{|\alpha'^{q+1}\cap\beta^{q+}}=0$.

Пусть $\pi_\alpha:C_c^q(\alpha,\alpha';G)\to \varinjlim\limits_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C_c^q(\alpha,\alpha';G)$ естественная проекция. Определим гомоморфизм

$$\tau:C_{f,c}^q(X,A;G)\to \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C_c^q(\alpha,\alpha';G)$$

формулой $\tau(\varphi)=\pi_\alpha(\varphi_\alpha)$.

Теорема 2.5. *Для каждой замкнутой пары (X,A) топологических пространств, гомоморфизм τ индуцирует изоморфизм*

$$\widetilde{\tau}:\overline{C}^q_{f,c}(X,A;G)\to \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^f(X,A)} C^q_c(\alpha,\alpha';G).$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1.8 и, поэтому опускается. ■

§3. Свойства ограничения функтора $\overline{H}^q_{f,c}(-,-;G)$ на категории локально компактных пространств

Пусть X – локально компактное пространство, а G – абелевая группа. Построим коцепной комплекс $C^*_{f,c}(X;G)$. Охарактеризуем элементы q-мерной группы $C^q_{f,c}(X;G)$ комплекса $C^*_{f,c}(X;G)$ следующим образом.

Лемма 3.1. *Отображение $\varphi: X^{q+1}\to G$ топологического пространства X в абелевую группу G тогда и только тогда будет элементом группы $C^q_{f,c}(X;G)$, когда найдется такое компактное подпространство C пространства X, что отображение φ является конечно локально нулевым на подпространстве $X\setminus C$.*

Доказательство. Пусть для отображения $\varphi: X^{q+1}\to G$ найдется такое компактное подпространство C пространства X, что φ является конечно локально нулевым на подпространстве $X\setminus C$. Заметим, что $X\setminus C$ – коограниченное подпространство, значит φ является элементом группы $C^q_{f,c}(X;G)$. Теперь допустим обратное. Пусть отображение φ является элементом группы $C^q_{f,c}(X;G)$. Тогда найдется такое коограниченное подмножество B пространства X, что отображение φ является конечно локально нулевым на подпространстве B.

Пусть $C=\overline{X\setminus B}$. Тогда C компактно и φ получает конечно локально нулевое значение на подмножестве $X\setminus C$. ■

Пусть U открытое подмножество локально компактного пространства X, а A его дополнение в X. Обозначим через $Q_f^q(X,A;G)$ подгруппу группы $\overline{C}_f^q(X,A;G)$, состоящую из всех элементов $\overline{\varphi}\in\overline{C}_f^q(X,A;G)$, для которых найдется такое компактное подпространство C пространства X, что $\varphi\in\overline{\varphi}$ является конечно локально нулевым на подпространстве $X\setminus C$ и C содержится в $X\setminus A$.

Ясно, что справедливо следующее включение

$$Q_f^q(X,A;G)\subset\overline{C}_{f,c}^q(X,A;G)\subset\overline{C}_{f,c}^q(X;G)\subset\overline{C}_f^q(X;G).$$

Пусть $i:U\to X$ отображение вложения. Ясно, что оно индуцирует гомоморфизм

$$i^{\#}:\overline{C}_f^q(X;G)\to\overline{C}_f^q(U;G).$$

Лемма 3.2. *Для каждого локально компактного пространства X гомоморфизм $i^{\#}$ изоморфно отображает группу $Q_f^q(X,A;G)$ на группу $\overline{C}_{f,c}^q(U;G)$.*

Доказательство. Возьмем любые два элемента $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2\in Q_f^q(X,A;G)$. Легко показать, что в этом случае найдется такое компактное подмножество $C\subset X\setminus A$ пространства X и такое конечное открытое покрытие $\alpha=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_n}\}$ пространства $X\setminus C$, что $\varphi_{1|\alpha^{q+1}}=\varphi_{2|\alpha^{q+1}}=0$. Если допустим, что $i^{\#}(\overline{\varphi}_1)=i^{\#}(\overline{\varphi}_2)$, то найдется такое конечное открытое покрытие $\beta=\{U_{\beta_1},U_{\beta_2},...,U_{\beta_m}\}$ подпространства U, что $\varphi_{1|\beta^{q+1}}=\varphi_{2|\beta^{q+1}}$. Пусть $\mu=\alpha\cup\beta$. Тогда μ будет таким конечным открытим покрытием пространства X, что

$$\varphi_{1|\mu^{q+1}}=\varphi_{2|\mu^{q+1}},$$

т.е. $\overline{\varphi}_1=\overline{\varphi}_2$. Следовательно, $i^{\#}$ – мономорфизм.

Теперь покажем, что $i^{\#}$ является и эпиморфизмом. Действительно, возьмем произвольный элемент $\overline{\varphi}\in\overline{C}_{f,c}^q(U;G)$ и его произвольный представитель $\varphi\in\overline{\varphi}$. Ясно, что существует такое компактное подпространство C пространства U и такое конечное открытое покрытие $\alpha=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\dots,U_{\alpha_n}\}$ пространства $U\setminus C$, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}}=0$. Пусть W и V непересекающиеся открытые окрестности подпространств C и $X\setminus U$, соответственно. Определим отображение $\psi: X^{q+1}\to G$ формулой

$$\psi(x_0,x_1,\dots,x_q)=\begin{cases}\varphi(x_0,x_1,\dots,x_q), & \textit{если } x_0,x_1,\dots,x_q\in W \textit{ или } U_\alpha \\ & \textit{для какого-нибудь } U_\alpha\in\alpha \\ 0, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Если $\beta=\alpha\cup\{V\}$, то оно будет таким конечным открытым покрытием подпространства $X\setminus C$, что $\psi_{|\beta^{q+1}}=0$ т.е. $\psi\in C^q_{f.c}(X,G)$. Допустим, что $\overline{\psi}$ смежный класс элемента ψ в группе $\overline{C}^q_{f,c}(X;G)$. В таком случае легко показать, что $\overline{\psi}\in Q^q_f(X;A)$ и $i^\#(\overline{\psi})=\overline{\varphi}$. Тем самым, лемма доказана. ■

Пусть U открытое подпространство локально компактного пространства X. Определим мономорфизм

$$\sigma_{U,X}:\overline{C}^q_{f,c}(U;G)\to\overline{C}^q_{f,c}(X;G).$$

Пусть $j:Q^q_f(X,A;G)\to\overline{C}^q_{f,c}(X,A;G)$ отображение вложения групп. По определению $\sigma_{U,X}=j(i^\#)^{-1}$, т.е. коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q^q_f(X,A;G) & \xrightarrow{\ j\ } & \overline{C}^q_{f,c}(X,A;G) \\ \downarrow i^\# & \nearrow & \\ C^q_{f,c}(U;G) & \sigma_{U,X} & \end{array}.$$

Заметим, что гомоморфизм $\sigma_{U,X}$ коммутирует с кограничным гомоморфизмом и, следовательно, индуцирует гомоморфизм

$$\tau_{U,X}:\overline{H}^q_{f,c}(U;G)\to\overline{H}^q_{f,c}(X;G).$$

Заметим, что гомоморфизмы σ и τ имеют следующие свойства.

1) $\sigma_{X,X}$ и $\tau_{X,X}$ – изоморфизмы.

Доказательство этого свойства тривиально и опускается.

2) Если U и V – такие открытые подмножества пространства X, что $V\subset U$, то

$$\sigma_{V,X} = \sigma_{U,X} \circ \sigma_{V,U},\ \tau_{V,X} = \tau_{U,X} \circ \tau_{V,U}.$$

Доказательство. Допустим $A = X \setminus U$ и $B = X \setminus V$. Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Q^q_f(X,B;G) \arrow[r] \arrow[d, "i_1^\#"] \arrow[dd, bend right, "k^\#"'] & Q^q_f(X,A;G) \arrow[r] \arrow[d, "i^\#"] & \overline{C}^q_{f,c}(X;G) \\
Q^q_f(U,U\cap B;G) \arrow[r] \arrow[d, "j^\#"] & \overline{C}^q_{f,c}(U;G) \arrow[ur, "\sigma_{U,X}"] & \\
\overline{C}^q_{f,c}(V;G) \arrow[ur, "\sigma_{V,U}"] \arrow[uurr, bend right, "\sigma_{V,X}"'] & &
\end{tikzcd},$$

где горизонтальные отображения являются отображениями вложения, а отображения $i^\#$, $i_1^\#$, $j^\#$ и $k^\#$ индуцированы отображениями вложений $i: U \to X$, $j: V \to U$ и $k: V \to X$. В диаграмме коммутативны квадрат и два маленьких треугольника, и выполняется равенство $k^\# = j^\# \circ i_1^\#$. Поэтому $\sigma_{V,X} = \sigma_{U,X} \circ \sigma_{V,U}$.

Из этого равенства вытекает правильность аналогичного равенства для гомоморфизма τ. ■

3) Пусть X и Y – локально компактные пространства, $f: X \to Y$ собственное отображение, а $U \subset X$ и $V \subset Y$ – такие открытые подмножества пространств X и Y, что $U = f^{-1}(V)$. Тогда коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\overline{C}^q_{f,c}(Y;G) & \xrightarrow{f^\#} & \overline{C}^q_{f,c}(X;G) \\
\uparrow \sigma_{V,X} & & \uparrow \sigma_{U,X} \\
\overline{C}^q_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{f_0^\#} & \overline{C}^q_{f,c}(U;G)
\end{array}, \qquad
\begin{array}{ccc}
\overline{H}^q_{f,c}(Y;G) & \xrightarrow{f^*} & \overline{H}^q_{f,c}(X;G) \\
\uparrow \tau_{V,X} & & \uparrow \tau_{U,X} \\
\overline{H}^q_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{f_0^*} & \overline{H}^q_{f,c}(U;G)
\end{array},$$

где $f_0 = f_{|U}$.

Доказательство. Рассмотрим отображения вложения $i: U \to X$, $j: V \to Y$ и следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{i} & X \\
\downarrow f_0 & & \downarrow f \\
V & \xrightarrow{j} & Y.
\end{array}$$

Эта диаграмма индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \overline{C}_f^q(Y;G) & \xrightarrow{j^\#} & \overline{C}_f^q(V;G) \\ \downarrow f^\# & & \downarrow f_0^\# \\ \overline{C}_f^q(X;G) & \xrightarrow{i^\#} & \overline{C}_f^q(U;G). \end{array}$$

В условиях нашего допущения имеем $f^\#(Q_f^q(Y,B;G)) \subset Q_f^q(X,A;G)$. Поэтому, из последней диаграммы получаем, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \overline{C}_{f,c}^q(Y;G) \arrow[d, "f^\#"] & Q_{f,c}^q(Y,B;G) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "f^\#"] & \overline{C}_{f,c}^q(V;G) \arrow[d, "f_0^\#"] \arrow[ll, bend right] \\ \overline{C}_{f,c}^q(X;G) & Q_{f,c}^q(X,A;G) \arrow[l] \arrow[r] & \overline{C}_{f,c}^q(U;G). \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Тем самым, доказана правильность 3)-го свойства. ■

4) Для каждого элемента $\alpha \in \overline{H}_{f,c}^q(X;G)$ найдется такое открытое ограниченное подпространство U пространства X и такой элемент $b \in \overline{H}_{f,c}^q(U;G)$, что $\tau(b) = a$.

Доказательство. Возьмем коцикл $\overline{\varphi} \in \overline{C}_{f,c}^q(X;G)$ элемента a. Рассмотрим такое компактное подпространство C, на дополнении которого отображение $\varphi \in \overline{\varphi}$ является конечно локально нулевым. Пусть U является открытой ограниченной окрестностью подпространства C и $A = X \setminus U$. Тогда ясно, что $\overline{\varphi} \in \overline{Q}_f^q(X,A;G)$. Допустим, $\overline{\psi} = i^\#\overline{\varphi}$, где $i: U \to X$ – отображение вложения, и b является смежным классом коцикла $\overline{\psi}$. Тогда $\tau(b) = a$. Тем самым, доказана правильность 4)-го свойства. ■

5) Пусть U – открытое ограниченное подмножество пространства X, а $\alpha \in \overline{H}_{f,c}^q(U;G)$ такой элемент, что $\tau_{U,X}(a) = 0$. Тогда найдется такое открытое ограниченное подмножество V пространства X, что $U \subset V$ и $\tau_{U,V}(a) = 0$.

Доказательство. Возьмем коцикл $\overline{\varphi} \in \overline{C}_{f,c}^q(U;G)$ элемента a. В силу равенства $\tau_{U,V}(a) = 0$ элемент $\sigma_{U,X}(\overline{\varphi})$ является кограницей, т.е. существует такой $\overline{\psi} \in \overline{C}_{f,c}^{q-1}(X;G)$ элемент, что $\delta\overline{\psi} = \sigma_{U,X}(\overline{\varphi})$. Ясно, что для элемента $\overline{\psi}$ существует такое компактное подпространство C' пространства X, что $\psi \in \overline{\psi}$ получает конечно локальное нулевое значение на подпраcтранстве $X \setminus C'$. Допустим W является открытой ограниченной окрестностью множества C'. Пусть $V = U \cup W$; тогда, в силу 4)-го свойства, найдется такой элемент $\overline{\psi}' \in \overline{C}^{q-1}_{f,c}(V;G)$, что $\sigma_{V,X}(\overline{\psi}') = \overline{\psi}$. Так как каждое отображение σ есть мономорфизм, и $\sigma_{U,X} = \sigma_{V,X} \circ \sigma_{U,V}$, то $\sigma_{U,V}(\overline{\varphi}) = \delta\overline{\psi}'$. Это означает, что $\tau_{U,V}(a) = 0$. ■

Следствие 3.3. *Для каждого локально компактного пространства X группа $\overline{H}^q_{f,c}(X;G)$ является прямым пределом когомологических групп $\overline{H}^q_{f,c}(U;G)$ всех открытых ограниченных подмножеств U.* ■

Теорема 3.4. *Отображение включения $Q^q_f(X,A;G) \to \overline{C}^q_{f,c}(X,A;G)$ индуцирует изоморфизм $H^q(Q^*_f(X,A;G)) \approx H^q_{f,c}(X,A;G)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.4 из [4], поэтому опускается. ■

Теорема 3.5. *Пусть X – локально компактное пространство, A – его замкнутое подпространство, а U – дополнение подпространства A. Тогда существует такой гомоморфизм*

$$\delta : \overline{H}^q_{f,c}(A;G) \to \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G),$$

что

1) последовательность

$$\ldots \to \overline{H}^q_{f,c}(U;G) \xrightarrow{\tau} \overline{H}^q_{f,c}(X;G) \xrightarrow{i^*} \overline{H}^q_{f,c}(A;G) \xrightarrow{\delta} \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G) \to \ldots$$

точна;

2) если V открытое подмножество множества U и $B = X \setminus V$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^q_{f,c}(B;G) & \xrightarrow{j^*} & \overline{H}^q_{f,c}(A;G) \\ \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\ \overline{H}^{q+1}_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{\tau} & \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G) \end{array}$$

коммутативна, где гомоморфизм j^* индуцирован отображением вложения $j : A \to B$;

3) если $f: X \to Y$ собственное отображение, а U и V такие открытые подмножества пространств X и Y, соответственно, что $U = f^{-1}(V)$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}^q_{f,c}(B;G) & \xrightarrow{f^*} & \overline{H}^q_{f,c}(A;G) \\ \downarrow\delta & & \downarrow\delta \\ \overline{H}^{q+1}_{f,c}(V;G) & \xrightarrow{f_0^\#} & \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G) \end{array}$$

коммутативна, где $f_0 = f_{|U}$.

4) если V – такое открытое подпространство пространства X, что $U \subset V$, то диаграмма

$$\begin{tikzcd} \overline{H}^q_{f,c}(V \cap A;G) \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\delta"] & \\ \overline{H}^q_{f,c}(A;G) \arrow[r, "\delta"] & \overline{H}^{q+1}_{f,c}(U;G) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q^q_f(X,A;G) & \xrightarrow{1} & \overline{C}^q_{f,c}(X;G) & \xrightarrow{5} & \overline{C}^q_{f,c}(X;G)/Q^q_f(X,A;G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 2 & & \downarrow 4 & & \downarrow 6 & & \\ 0 & \longrightarrow & \overline{C}^q_{f,c}(X,A;G) & \xrightarrow{3} & \overline{C}^q_{f,c}(X;G) & \xrightarrow{i^\#} & \overline{C}^q_{f,c}(A;G) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где 1,2,3 – отображения вложений, 4 – тождественный изоморфизм, 5 – естественная проекция, а 6 – гомоморфизм, индуцированный отображением $i^\#$. Перейдем к следующей диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to H^q(Q^*_f(X,A;G) & \xrightarrow{1} & \overline{H}^q_{f,c}(X;G) & \xrightarrow{5} & H^q\left(\dfrac{\overline{C}^q_{f,c}(X;G)}{Q^q_f(X,A;G)}\right) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(Q^*_f(X,A;G)) & \longrightarrow. \\ \downarrow 2 & & \downarrow 4 & & \downarrow 6 & & \downarrow 2 & \\ \ldots \to \overline{H}^q_{f,c}(X,A;G) & \xrightarrow{3} & \overline{H}^q_{f,c}(X;G) & \xrightarrow{i^\#} & \overline{H}^q_{f,c}(A;G) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(X,A;G) & \longrightarrow \end{array}$$

В силу теоремы 3.4, гомоморфизм 2 является изоморфизмом. С другой стороны, 4 – тождественный изоморфизм, и следовательно, эти две последовательности эквивалентны. Кроме того, как известно, комплекс $Q^*_f(X,A;G)$ изоморфен комплексу $\overline{C}^*_{f,c}(U;G)$. Поэтому, в этой диаграмме группу

$\overline{H}^q_{f,c}(X,A;G)$ можно заменить группой $\overline{H}^q_{f,c}(U;G)$, а гомоморфизм 3 – гомоморфизмом τ. Из вышесказанного следует существование гомоморфизма δ, который удовлетворяет условиям теоремы 3.5. ■

Из теоремы 6.1 работы [4] непосредственно следует

Следствие 3.6. *Пусть $f_0, f_1 : X \to Y$ собственно гомотопные отображения локально компактных пространств. Тогда для всех целых чисел $q \geq 0$ индуцированные гомоморфизмы $f_0^*, f_1^* : \overline{H}^q_{f,c}(Y;G) \to \overline{H}^q_{f,c}(X;G)$ совпадают.* ■

Возьмем локально компактное пространство X и его произвольное конечное открытое покрытие α. Для покрытия α построим абстрактный симплициальный комплекс $X(\alpha)$. Допустим $\Omega(\alpha)$ - подкомплекс комплекса $X(\alpha)$, который состоит из всех симплексов s, для которых найдутся такие элементы U_α покрытия α, что замыкания $\overline{U}_\alpha$ некомпактны и $s \subset U_\alpha$. Получим пару абстрактных симплициальных комплексов $(X(\alpha), \Omega(\alpha))$. Соответствующий ее коцепной комплекс обозначим символом $C^*(\alpha,\Omega;G)$.

Заметим, что если $\alpha < \beta$, то $(X(\beta),\Omega(\beta)) \subset (X(\alpha),\Omega(\alpha))$ и, следовательно, определяется гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta} : C^q(\alpha,\Omega;G) \to C^q(\beta,\Omega;G)$. Ясно, что для каждого конечного открытого покрытия α, $\pi_{\alpha\alpha}$ изоморфизм, а если $\alpha < \beta < \gamma$, то $\pi_{\alpha\gamma} = \pi_{\beta\gamma} \circ \pi_{\alpha\beta}$. Следовательно, система $\{C^q(\alpha,\Omega;G), \pi_{\alpha\beta}, Cov^f(X)\}$ является прямой системой.

Возьмем любой элемент $\varphi \in C^q_{f,c}(X;G)$. Ясно, что для него найдется такое компактное подпространство C пространства X и такое конечное открытое покрытие $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_{\alpha_n}}\}$ пространства $X \setminus C$, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} = 0$. Допустим, U открытая ограниченная окрестность подпространства C. Тогда $\alpha = \alpha_1 \cup \{U\}$ такое конечное открытое покрытие пространства X, что $\varphi_\alpha = \varphi_{|\alpha^{q+1}}$ будет элементом группы $C^q(\alpha,\Omega;G)$. Определим гомоморфизм

$$\tau : C^q_{f,c}(X;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} C^q(\alpha,\Omega;G),$$

равенством $\tau(\varphi)=\pi_\alpha(\varphi_\alpha)$, где $\pi_\alpha : C^q(\alpha,\Omega;G)\to \varinjlim\limits_{\alpha\in Cov^f(X)} C^q(\alpha,\Omega;G)$ – естественная проекция.

Теорема 3.7. *Для каждого локально компактного пространства X гомоморфизм τ индуцирует изоморфизм*

$$\tilde{\tau} : \overline{C}^q_{f,c}(X;G)\to \varinjlim_{\alpha\in Cov^f(X)} C^q(\alpha,\Omega;G).$$

■

Пусть X локально компактное пространство, а α его произвольное конечное открытое покрытие. Из покрытия α выделим подсистему α', состоящую из всех элементов U_α, замыкания которых некомпактны.

Рассмотрим пару множеств (X,X'), где $X'=\bigcup\limits_{U_\alpha\in\alpha'} U_\alpha$. Построим пару отношений (R,R_Ω):

$(x,U_\alpha)\in R$ тогда и только тогда, когда $x\in X$, $U_\alpha\in\alpha$ и $x\in U_\alpha$.

$(x,U_\alpha)\in R_\Omega$ тогда и только тогда, когда $x\in X'$, $U_\alpha\in\alpha'$ и $x\in U_\alpha$.

Полученная пара отношений (R,R_Ω) определяет пары симплициальных компльксов [30] $((X(\alpha),\Omega(\alpha))$ и $(X_\alpha,\Omega_\alpha))$, где X_α – нерв покрытия α, а Ω_α его особый подкомплекс.

Применяя теорему 3.7 и теорему 1 из [30], получим следующие следствия.

Следствие 3.8. *Для каждого локально компактного пространства X существует изоморфизм*

$$\overline{H}^q_{f,c}(X;G)\approx \check{H}^q_{\blacktriangle}(X;G).$$

■

Следствие 3.9. *Для каждой замкнутой пары (X,A) локально компактных пространств существует изоморфизм*

$$\overline{H}^q_{f,c}(X,A;G)\approx \check{H}^q_{\blacktriangle}(X,A;G).$$

■

ГЛАВА II
ЧАСТИЧНО НЕПРЕРЫВНЫЕ КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ АЛЕКСАНДЕРА-СПЕНЬЕРА

§4. Частично непрерывный конечно определенный когомологический функтор Александера-Спеньера

Пусть X – топологическое пространство, а G – топологическая абелевая группа. Отображение $\varphi: X^q \to G$ называется конечно частично непрерывным, если существует такое конечное открытое покрытие $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ пространства X, что ограничение отображения φ на подпространство $\alpha^q = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U^q_{\alpha_i}$ является непрерывным.

Для любого целого числа $q \geq 0$ через $L^q_f(X;G)$ обозначим группу всех конечно частично непрерывных отображений $\varphi: X^{q+1} \to G$. Кограничный гомоморфизм

$$\delta: L^q_f(X;G) \to L^{q+1}_f(X;G)$$

задается формулой

$$\delta(\varphi) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi \circ p_i, \ \varphi \in L^q_f(X;G),$$

где $p_i: X^{q+2} \to X^{q+1}$, $i = 0,1,...,q+1$ проекции, которые определены в [36] следующим образом:

$$p_i(x_0,...,x_i,...,x_{q+1}) = (x_0,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_{q+1}), \qquad i = 0,1,...,q+1.$$

Таким образом, мы получили коцепной комплекс $L^*_f(X;G) = \{L^q_f(X;G), \delta\}$.

Заметим, что для каждого топологического пространства X и топологической абелевой группы G конечно локально нулевыми отображениями можно построить коцепной комплекс $C^*_{f,0}(X;G) = \{C^q_{f,0}(X;G), \delta\}$, представляющий подкомплекс комплекса $L^*_f(X;G)$. Соответствующий фактор-комплекс обозначим символом $M_f^*(X;G)$. q-мерную когомологическую группу полученного комплекса обозначим через $h_f^q(X;G)$ и назовем q-мерной частично непрерывной конечно определенной когомологической группой Александера-Спеньера пространства X.

Пусть $f:X\to Y$ непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $f^{q+1}:X^{q+1}\to Y^{q+1}$, определенное ровенством

$$f^{q+1}(x_0,x_1,...,x_q)=(f(x_0),f(x_1),...,f(x_q)),\quad (x_0,x_1,...,x_q)\in X^{q+1}.$$

Коцепный гомоморфизм $f^{\#}:L_f^q(Y;G)\to L_f^q(X;G)$ определяется по формуле

$$f^{\#}(\varphi)=\varphi\circ f^{q+1},\quad \varphi\in L_f^q(Y;G).$$

Пусть $f:X\to Y$ – непрерывное отображение; тогда для отображения $f^{\#}$ справедливо включение $f^{\#}(C_{f,0}^q(Y;G))\subset C_{f,0}^q(X;G)$. Из этого следует, что коцепный гомоморфизм $f^{\#}$ индуцирует коцепный гомоморфизм (его обозначим тем же символом) $f^{\#}:M_f^q(Y;G)\to M_f^q(X;G)$, который, со своей стороны, определяет гомоморфизм когомологических групп

$$f^*:h_f^q(Y;G)\to h_f^q(X;G).$$

Пусть A – подпространство пространства X, а $i:A\to X$ отображение вложения. Тогда определяется коцепный гомоморфизм $i^{\#}:M_f^q(X;G)\to M_f^q(A;G)$. Для каждого $q\geq 0$ рассмотрим группу $M_f^q(X,A;G)=M_f^q(X;G)\oplus M_f^{q-1}(A;G)$ и кограничный гомоморфизм $\tilde{\delta}:M_f^q(X,A;G)\to M_f^{q+1}(X,A;G)$, который определяется формулой

$$\tilde{\delta}(\overline{\varphi},\overline{\psi})=(-\delta\overline{\varphi},i^{\#}\overline{\varphi}+\delta\overline{\psi}),\ \ \overline{\varphi}\in M_f^q(X;G),\ \overline{\psi}\in M_f^{q-1}(A;G).$$

Таким образом, мы получили коцепной комплекс $M_f^*(X,A;G)=\{M_f^q(X,A;G),\tilde{\delta}\}$. Его q-мерную когомологическую группу обозначим символом $h_f^q(X,A;G)$ и назовем q-мерной частично непрерывной конечно определенной когомологической группой Александера-Спеньера пары (X,A).

Заметим, что всякое непрерывное отображение $f:(X,A)\to(Y,B)$ пар топологических пространств индуцирует коцепный гомоморфизм

$$f^{\#}:M_f^q(Y,B;G)\to M_f^q(X,A;G),$$

который, со своей стороны, определяет гомоморфизм когомологических групп

$$f^{*}:h_f^q(Y,B;G)\to h_f^q(X,A;G).$$

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Для каждого целого числа* $q\geq 0$, $h_f^q(-,-;G)$ *является контравариантным функтором из категории пар топологических пространств и их непрерывных отображений в категорию абелевых групп и их гомоморфизмов.*

■

Построенный функтор удовлетворяет аксиому размерности.

Теорема 4.2. *Для каждого одноточечного пространства* P

$$h_f^q(P;G)=\begin{cases}0, & \text{если } q\neq 0\\ G, & \text{если } q=0.\end{cases}$$

Доказательство. Так как P одноточечное пространство, то для каждого целого числа $q\geq 0$, $M_f^q(P;G)\approx G$. Когграничный гомоморфизм является тождественным или нулевым. Поэтому $h_f^q(P;G)=0$, когда $q\neq 0$ и $h_f^0(P;G)\approx G$. ■

Пусть (X,A) пара топологических пространств. Рассмотрим коцепные комплексы $M_f^*(X,A;G)$, $M_f^*(X;G)$ и $M_f^*(A;G)$. Для каждого целого числа $q\geq 0$ определим гомоморфизмы

$$\kappa:M_f^{q-1}(A;G)\to M_f^q(X,A;G) \text{ и } \sigma:M_f^q(X,A;G)\to M_f^q(X;G)$$

следующими формулами:

$$\kappa(\overline{\varphi})=(0,\overline{\varphi}),\quad \overline{\varphi}\in M_f^{q-1}(A;G),$$

$$\sigma(\overline{\varphi},\overline{\psi})=\overline{\varphi},\quad (\overline{\varphi},\overline{\psi})\in M_f^q(X,A;G).$$

В таком случае точной будет следующая короткая последовательность

$$0\to M_f^*(A;G)\xrightarrow{\kappa}M_f^*(X,A;G)\xrightarrow{\sigma}M_f^*(X;G)\to 0.$$

Она индуцирует длинную точную когомологическую последовательность

$$\cdots \xrightarrow{E} h_f^{q-1}(A;G) \xrightarrow{\kappa^*} h_f^q(X,A;G) \xrightarrow{\sigma^*} h_f^q(X;G) \xrightarrow{E} h_f^q(A;G) \xrightarrow{\kappa^*} \cdots,$$

где E – соединительный (кограничный) оператор.

Заметим, что справедливы равенства $i^* = E : h_f^q(X;G) \to h_f^q(A;G)$ и $j^* = \sigma^*$: $h_f^q(X,A;G) \to h_f^q(X;G)$. Гомоморфизм κ^* обозначим символом δ.

Теорема 4.3 (аксиома точности). *Для каждой пары (X,A) топологических пространств точна когомологическая последовательность*

$$\cdots \xrightarrow{i^*} h_f^{q-1}(A;G) \xrightarrow{\delta} h_f^q(X,A;G) \xrightarrow{j^*} h_f^q(X;G) \xrightarrow{i^*} h_f^q(A;G) \xrightarrow{\delta} \cdots.$$

■

Пусть, X – произвольное топологическое пространство, а $P : G \to G'$ – непрерывный гомоморфизм топологических абелевых групп. Определим гомоморфизм $P^\# : L_f^q(X;G) \to L_f^q(X;G')$ равенством

$$P^\#(\varphi) = P \circ \varphi, \quad \varphi \in L_f^q(X;G).$$

Гомоморфизм $P^\#$ индуцирует гомоморфизм (его обозначим тем же символом) $P^\# : M_f^q(X;G) \to M_f^q(X;G')$, который, со своей стороны, определяет гомоморфизм

$$P^* : h_f^q(X;G) \to h_f^q(X;G').$$

Теорема 4.4. *Для любого топологического пространства X и для любых топологических абелевых групп G_1 и G_2 существует изоморфизм*

$$P^* : h_f^q(X;G_1 \times G_2) \to h_f^q(X;G_1) \oplus h_f^q(X;G_2).$$

Доказательство. Проекции $P_i : G_1 \times G_2 \to G_i$, $i = 1,2$ индуцируют гомоморфизмы $P_i^* : h_f^q(X;G_1 \times G_2) \to h_f^q(X;G_i)$, $i = 1,2$. Следуя Л.Мдзинаришвили [36], определим гомоморфизм

$$P^* : h_f^q(X;G_1 \times G_2) \to h_f^q(X;G_1) \oplus h_f^q(X;G_2)$$

формулой

$$P^*(a) = (p_1^*(a), p_2^*(a)), \quad a \in h_f^q(X;G_1 \times G_2).$$

1) P^* – мономорфизм. Пусть $a\in h_f^q(X;G_1\times G_2)$. Рассмотрим $\overline{\psi}$ представитель элемента a и $\psi\in\overline{\psi}$. Существует такое конечное открытое покрытие α пространства X, что $\psi_{|\alpha^{q+1}}$ является непрерывным и $\delta\psi_{|\alpha^{q+2}}=0$. Допустим, что $P^*(a)=0$. Тогда найдутся такие отображения $\varphi_i:X^q\to G_i$, $i=1{,}2$ и конечные покрытия β_i, $i=1{,}2$ пространства X, что отображения $\varphi_{i|\beta_i^q}$, $i=1{,}2$ непрерывны и $\delta\varphi_{i|\beta_i^{q+1}}=P_i\psi_{|\beta_i^{q+1}}$. Наша цель показать, что существуют такое отображение $\varphi:X^q\to G_1\times G_2$ и такое конечное открытое покрытие μ пространства X, что $\varphi_{|\mu^q}$ – непрерывно и $\delta\varphi_{|\mu^{q+1}}=\psi_{|\mu^{q+1}}$.

Пусть $\mu=\alpha\wedge\beta_1\wedge\beta_2$. Определим отображение $\varphi:X^q\to G_1\times G_2$ по формуле

$$\varphi(x)=\begin{cases}(\varphi_1(x),\varphi_2(x)), & \text{\it если}\quad x\in\mu^q,\\ 0, & \text{\it если}\quad x\in X^q\setminus\mu^q.\end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_{|\mu^q}$ непрерывно и

$$\delta\varphi_{|\mu^{q+1}}=\delta(\varphi_1)_{|\mu^{q+1}}\times\delta(\varphi_2)_{|\mu^{q+1}}=P_1\psi_{|\mu^{q+1}}\times P_2\psi_{|\mu^{q+1}}=\psi_{|\mu^{q+1}}.$$

2) P^* – эпиморфизм. Пусть $(a_1,a_2)\in h_f^q(X;G_1)\oplus h_f^q(X;G_2)$, а $\overline{\psi}_i$, $i=1{,}2$ представители элементов a_i, $i=1{,}2$ и $\psi_i\in\overline{\psi}_i$, $i=1{,}2$. Существуют такие открытые покрытия α_i, $i=1{,}2$ пространства X, что $\psi_{i|\alpha_i^{q+1}}$ – непрерывно и $\delta\psi_{i|\alpha_i^{q+2}}=0$, $i=1{,}2$. Наша цель – показать существование такого элемента $a\in h_f^q(X;G_1\times G_2)$, что $P^*(a)=(a_1,a_2)$. Для этого нужно показать, что существуют такое отображение $\varphi:X^{q+1}\to G_1\times G_2$ и такое конечное открытое покрытие β пространства X, что $\varphi_{|\beta^{q+1}}$ – непрерывно, $\delta\varphi_{|\beta^{q+2}}=0$ и $\varphi_{|\beta^{q+1}}=\psi_{1|\beta^{q+1}}\times\psi_{2|\beta^{q+1}}$.

Пусть $\beta=\alpha_1\wedge\alpha_2$. Определим отображение $\varphi:X^{q+1}\to G_1\times G_2$ по формуле

$$\varphi(x)=\begin{cases}(\varphi_1(x),\varphi_2(x)), & \text{\it если}\quad x\in\beta^{q+1},\\ 0, & \text{\it если}\quad x\in X^{q+1}\setminus\beta^{q+1}.\end{cases}$$

Тогда

$$\delta\varphi_{|\beta^{q+2}}=\delta\psi_{1|\beta^{q+2}}\times\delta\psi_{2|\beta^{q+2}}=0\ \text{и}\ \varphi_{|\beta^{q+1}}=\psi_{1|\beta^{q+1}}\times\psi_{2|\beta^{q+1}}.$$

Следствие 4.5. *Если G коммутативная связная группа Ли, то для каждого топологического пространства X существует изоморфизм*

$$h_f^q(X;G) \approx h_f^q(X;R^n) \oplus h_f^q(X;T^m),$$

где R^n — n-мерное эвклидово пространство, а T^m — m-мерный тор. ■

Рассмотрим произвольное конечное открытое покрытие $\alpha \in Cov^f(X)$ и коцепный комплекс $\Phi^*(\alpha;G) = \{\Phi^q(\alpha;G), \delta_\alpha\}$ [36], где $\Phi^q(\alpha;G)$ группа, состоящая из всех непрерывных отображений $\varphi : \alpha^{q+1} \to G$, а $\delta_\alpha : \Phi^q(\alpha;G) \to \Phi^{q+1}(\alpha;G)$ кограничный оператор [36], определенный формулой

$$\delta_\alpha(\varphi) = \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i \varphi \circ \widetilde{p}_i, \; \varphi \in \Phi^q(\alpha,G), \; \widetilde{p}_i = p_{i|\alpha^{q+2}} : \alpha^{q+2} \to \alpha^{q+1}.$$

Допустим, $\alpha, \beta \in Cov^f(X)$ и покрытие β вписано в покрытие α. Тогда для каждого целого числа $q \geq 0$ выполняется включение $\beta^{q+1} \subset \alpha^{q+1}$. Это включение определяет гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta} : \Phi^q(\alpha;G) \to \Phi^q(\beta;G)$ [36], который задается следующей формулой – $\pi_{\alpha\beta}(\varphi) = \varphi_{|\beta^{q+1}}$. Легко показать, что система $\{\Phi^q(\alpha,G), \pi_{\alpha\beta}, Cov^f(X)\}$ является прямой системой.

Лемма 4.6 (см.[36]). *Пусть $\varphi \in L_f^q(X;G)$, α и β являются такими открытыми покрытиями пространства X, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} \in \Phi^q(\alpha,G)$ и $\varphi_{|\beta^{q+1}} \in \Phi^q(\beta,G)$. Тогда $\pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = \pi_\beta(\varphi_{|\beta^{q+1}})$, где $\pi_\alpha : \Phi^q(\alpha,G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} \Phi^q(\alpha,G)$ естественная проекция.* ■

Определим гомоморфизм

$$\tau : L_f^q(X;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} \Phi^q(\alpha;G)$$

по формуле

$$\pi(\varphi) = \pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}),$$

где $\alpha \in \mathrm{Cov}^f(X)$ таково, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} : \alpha^{q+1} \to G$ непрерывно.

Теорема 4.7. *Для каждого топологического пространства X гомоморфизм τ индуцирует изоморфизм*

$$\widetilde{\tau} : M_f^q(X;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} \Phi^q(\alpha, G).$$

Доказательство. Для $\varphi \in C_{f,0}^q(X;G)$ найдется такое конечное открытое покрытие $\alpha \in Cov^f(X)$, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} = 0$ и, следовательно, $\tau(\varphi) = 0$, что и позволяет утверждать, что τ индуцирует гомоморфизм. Теперь докажем следующее:

1) $\widetilde{\tau}$ – мономорфизм. Пусть $\tau(\varphi) = \pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = 0$. Тогда найдется такое открытое покрытие $\beta \in Cov^f(X)$, что $\alpha < \beta$, и $\pi_{\alpha\beta}(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = \varphi_{|\beta^{q+1}} = 0$, т.е. $\varphi \in C_{f,0}^q(X;G)$. Это означает, что $Ker\tau = C_{f,0}^q(X;G)$. Таким образом, τ является мономорфизмом.

2) $\widetilde{\tau}$ – эпиморфизм. Допустим, что $a \in \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} \Phi^q(\alpha, G)$. Тогда найдутся такое конечное открытое покрытие $\alpha \in Cov^f(X)$ и такой элемент $\varphi \in \Phi^q(\alpha, G)$, что $\pi_\alpha(\varphi) = a$. Определим функцию $\psi : X^{q+1} \to G$ следующим образом:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in \alpha^{q+1}, \\ 0, & \text{если } x \in X^{q+1} \setminus \alpha^{q+1}. \end{cases}$$

Ясно, что $\psi \in L_f^q(X;G)$ и $\tau(\psi) = a$. Следовательно, $\widetilde{\tau}$ – эпиморфизм. ■

Следствие 4.8. *Для каждого топологического пространства X существует изоморфизм*

$$h_f^q(X;G) \approx \varinjlim_{\alpha \in Cov^f(X)} h^q(\alpha;G),$$

где $h^q(\alpha;G) = H^*(\Phi^q(\alpha;G))$. ■

Пусть $f : X \to Y$ собственное отображение топологических пространств, а $\beta \in Cov^f(Y)$. Рассмотрим ограничение $f_\beta^{q+1} = f_{|\alpha^{q+1}}^{q+1} : \alpha^{q+1} \to \beta^{q+1}$ отображения $f^{q+1} : X^{q+1} \to Y^{q+1}$ на подмножество $\alpha^{q+1} = (f^{q+1})^{-1}(\beta^{q+1}) \subset X^{q+1}$. Пусть $f_\beta^\# : \Phi^q(\beta;G) \to \Phi^q(\alpha;G)$ гомоморфизм [36], который определяется формулой $f_\beta^\#(\varphi) = \varphi \circ f_\beta^{q+1}$, $\varphi \in \Phi^q(\beta;G)$.

Теорема 4.9. *Для любого непрерывного отображения $f : X \to Y$ топологических пространств коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M_f^q(Y;G) & \xrightarrow{f^\#} & M_f^q(X;G) \\ \downarrow\tilde{\tau} & & \downarrow\tilde{\tau} \\ \varinjlim_{\beta\in Cov(Y)} \Phi^q(\beta;G) & \xrightarrow{f_\infty^\#} & \varinjlim_{\alpha\in Cov(X)} \Phi^q(\alpha;G) \end{array},$$

где $f_\infty^\# = \varinjlim_{\beta\in Cov^f(Y)} f_\beta^\#$. ■

Пусть $g:(X,A)\to(Y,B)$ непрерывное отображение, а $i:A\to X$ и $j:B\to Y$ – отображения вложения. Пусть $\alpha=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_n}\}$ и $\beta=\{U_{\beta_1},U_{\beta_2},...,U_{\beta_m}\}$ – открытие покрытия пространств X и Y, соответственно. Допустим, $\alpha_{|A}=i^{-1}(\alpha)$, $\beta_{|B}=j^{-1}(\beta)$, $\tilde{g}=g_{|A}$. Рассмотрим следующие гомоморфизмы $j_\beta^\#:\Phi^*(\beta;G)\to\Phi^*(\beta_{|B};G)$, $i_\alpha^\#:\Phi^*(\alpha;G)\to\Phi^*(\alpha_{|A};G)$ и их конусы

$$\overline{\Phi}_\beta^* = \{\Phi^q(\beta;G)\oplus\Phi^{q-1}(\beta_{|B};G);\tilde{\delta}_\beta\},$$

$$\overline{\Phi}_\alpha^* = \{\Phi^q(\alpha;G)\oplus\Phi^{q-1}(\alpha_{|A};G);\tilde{\delta}_\alpha\}.$$

Заметим, что если $\alpha=g^{-1}(\beta)$, то пара $(g,\tilde{g})$ индуцирует гомоморфизм $G_\beta^\#:\overline{\Phi}_\beta^*\to\overline{\Phi}_\alpha^*$ [36].

Теорема 4.10. *Для каждого непрерывного отображения $g:(X,A)\to(Y,B)$ топологических пространств коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M_f^q(Y,B;G) & \xrightarrow{g^\#} & M_f^q(X,A;G) \\ \downarrow\tilde{\tau} & & \downarrow\tilde{\tau} \\ \varinjlim_{\beta\in Cov(Y)} \overline{\Phi}_\beta^* & \xrightarrow{G_\infty^\#} & \varinjlim_{\alpha\in Cov(X)} \overline{\Phi}_\alpha^* \end{array},$$

где $G_\infty^\# = \varinjlim_{\beta\in Cov^f(Y)} G_\beta^\#$. ■

С применением теорем 4.7 и 4.9 доказывается следующая

Теорема 4.11. *Для любых равномерно гомотопных отображений f_0, $f_1:X\to Y$ топологических пространств имеет место равенство*

$$f_0^* = f_1^*: h_f^q(Y;G)\to h_f^q(X;G).$$

■

Следствие 4.12. *Для любых равномерно гомотопых отображений f_0, $f_1:(X,A)\to(Y,B)$ пар топологических пространств, имеет место равенсво*

$$f_0^* = f_1^* : h_f^q(Y,B;G) \to h_f^q(X,A;G).$$

■

Определение 4.13 (см.[39]). Отображение вложения $i:(X\setminus U, A\setminus U)\to$ (X,A) называется вырезанием, если U – такое открытое подмножество пространства X, что $\overline{U} \subset IntA$.

Теорема 4.14. *Пусть (X,A) – замкнутая пара топологических пространств. Если для целого числа $q\geq 0$ декартово произведение X^{q+1} является нормальным пространством, а G – абсолютным ретрактом, то отображение вырезания $i:(X\setminus U, A\setminus U)\to(X,A)$ индуцирует изоморфизм*

$$i^* : h_f^q(X,A;G) \to h_f^q(X\setminus U, A\setminus U;G).$$

Доказательство. Покажем, что i^* эпиморфизм. Пусть $j: A\setminus U\to X\setminus U$ – отображение вложения. Возьмем произвольный элемент $a\in h_f^q(X\setminus U, A\setminus U;G)$ и произвольный представитель $(\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1)$ этого элемента. Ясно, что $\widetilde{\delta}(\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1)=(-\widetilde{\delta}\overline{\varphi}_1,$ $j^\#\overline{\varphi}_1+\widetilde{\delta}\overline{\psi}_1)=0$, т.е. $\widetilde{\delta}\overline{\varphi}_1=0$ и $j^\#\overline{\varphi}_1+\widetilde{\delta}\overline{\psi}_1=0$. Рассмотрим представитель ψ_1 класса $\overline{\psi}_1$. Очевидно, что существует такое конечное открытое покрытие $\alpha=\{U_{\alpha_1},$ $U_{\alpha_2},\dots,U_{\alpha_n}\}$ пространства $A\setminus U$, что $\psi_{|\alpha^q}$ непрерывно. Подмножество $A\setminus U$ нормально; поэтому, найдется такое конечное открытое покрытие $\beta=\{V_{\beta_1},V_{\beta_2},$ $\dots,V_{\beta_n}\}$, что $\overline{V}_{\beta_i}\subset U_{\alpha_i}$, $i=1,2,\dots,n$. Допустим $|\beta^q|=\bigcup\limits_{i=0}^{n}\overline{V}_{\beta_i}^q$. Тогда $|\beta^q|\subset\alpha^q$ и, следовательно, $\psi_{1||\beta^q|}$ непрерывно. Кроме того, $|\beta^q|$ является замкнутым подмножеством нормального пространства $(X\setminus U)^q$ (так как X^{q+1} нормално), и поэтому, отображение $\psi_{1||\beta^q|}:|\beta^q|\to G$ непрерывно продолжается до отображений $\psi_2:(X\setminus U)^q\to G$. Пусть $\varphi_2=\varphi_1+\delta\psi_2$; тогда $(\overline{\varphi}_2,0)\in a$. ДейстВительно,

$$\widetilde{\delta}(\overline{\psi}_2,0)=(-\widetilde{\delta}\overline{\psi}_2,j^\#\overline{\psi}_2)=(-\widetilde{\delta}\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_1)=(\overline{\varphi}_1-\overline{\varphi}_1-\widetilde{\delta}\overline{\psi}_2,\overline{\psi}_1)=$$

$$(\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1)-(\overline{\varphi}_1+\widetilde{\delta}\overline{\psi}_2,0)=(\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1)-(\overline{\varphi}_2,0)$$

и поскольку $(\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1)$ является представителем элемента a, имеем $(\overline{\varphi}_2,0)\in a$. Ясно, что для отображения φ_2 существует такое открытое покрытие $\gamma=\{U_{\gamma_1},$

$U_{\gamma_2},...,U_{\gamma_n}\}$ пространства $X\setminus U$, что $\varphi_{2|\gamma^{q+1}}$ – непрерывно. С другой стороны, $j^{\#}\overline{\varphi}_2$ $= j^{\#}(\overline{\varphi}_1+\delta\overline{\psi}_2) = j^{\#}\overline{\varphi}_1+\delta\overline{\psi}_1 = 0$. Поэтому, найдется такое конечное открытое покрытие $\mu=\{U_{\mu_1},U_{\mu_2},...,U_{\mu_m}\}$ пространства $A\setminus U$, что $\varphi_{2|\mu^{q+1}}=0$. Допустим U_{η_i} = $U_{\mu_i}\bigcap IntA$, $i=1,2,...,m$, $\eta=\{U_{\eta_1},U_{\eta_2},...,U_{\eta_m},X\setminus\overline{U}\}$, $\xi=\eta\wedge\gamma=\{U_{\xi_1},U_{\xi_2},...,\ U_{\xi_k}\}$; тогда $\varphi_{2|\xi^{q+1}}$ непрерывное отображение. Рассмотрим конечное открытое покрытие $\zeta=\{U_{\zeta_i}=U_{\xi_i}\bigcup U\}_{i=1,2,...,k}$ пространства X и определим отображение $\varphi_3: X^{q+1}\to G$ следующим образом

$$\varphi_3(x_0,x_1,...,x_q)=\begin{cases}\varphi_2(x_0,x_1,...,x_q), & \text{\textit{если}}\ (x_0,x_1,...,x_q)\in U_{\xi_i},\ i=1,2,...,k\\ 0, & \text{\textit{в противном случае.}}\end{cases}$$

Легко показывается, что $\varphi_{3|\zeta^{q+1}}$ непрерывно и, следовательно, φ_3 – конечно частично непрерывно. Покажем, что $(\overline{\varphi}_3,0)$ цикл. Действительно, из построения φ_3 и из условия $\widetilde{\delta}\overline{\varphi}_2=0$ и $j^{\#}\overline{\varphi}_2=0$ витекает, что $\widetilde{\delta}(\overline{\varphi}_3,0)=(-\delta\overline{\varphi}_3,j^{\#}\overline{\varphi}_3)\ =(0,0)$. Допустим, элемент $b\in h^q_f(X,A;G)$ содержит цикл $(\overline{\varphi}_3,0)$. Тогда ясно, что $i^*(b)=a$. Этим эпиморфность отображения i^* доказана.

Покажем, что i^* мономорфизм. Пусть $l:A\to X$ – отображение вложения. Возьмем такой элемент $a\in h^q_f(X,A;G)$, что $i^*(a)=0$ и покажем, что $a=0$. Допустим, цикл $(\overline{\varphi}_1,\overline{\psi}_1)$ является представителем элемента a. Пусть $\varphi_1\in\overline{\varphi}_1$ и $\psi_1\in\overline{\psi}_1$. Рассмотрим такое конечное открытое покрытие $\alpha=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_n}\}$ пространства A, что $\psi_{1|\alpha^q}$ непрерывно. В силу нормальности пространства A существует такое конечное открытое покрытие $\beta=\{V_{\beta_1},V_{\beta_2},...,V_{\beta_n}\}$, пространства A, что $\overline{V}_{\beta_i}\subset U_{\alpha_i}$, $i=1,2,...,n$. Ясно, что отображение $\psi_{1||\beta^q|}:|\beta^q|\to G$ непрерывно, и оно непрерывно продолжается до отображений $\psi_2: X^q\to G$. Если допустим, что $\varphi_2=\varphi_1+\delta\psi_2$, то $(\overline{\varphi}_2,0)\in a$, и следовательно, найдется такой элемент $(\overline{\varphi}_1',\overline{\psi}_1')$ $\in M^{q-1}_f(X\setminus U,A\setminus U;G)$, что $i^{\#}(\overline{\varphi}_2,0)=\delta(\overline{\varphi}_1',\overline{\psi}_1')=(-\delta\overline{\varphi}_1',j^{\#}\overline{\varphi}_1'+\ \delta\overline{\psi}_1')$, т.е. $i^{\#}\overline{\varphi}_2=-\delta\overline{\varphi}_1'$ и $j^{\#}\overline{\varphi}_1'+\delta\overline{\psi}_1'=0$. Аналогично определяется и непрерывное отображение

$\psi_2' : (X \setminus U)^{q-1} \to G$. Пусть $\varphi_2' = \varphi_1' + \delta\psi_2' : (X \setminus U)^q \to G$. Тогда $\widetilde{\delta}(\overline{\varphi}_2', 0) = (-\widetilde{\delta}\overline{\varphi}_1', j^{\#}\overline{\varphi}_1' + j^{\#}\widetilde{\delta}\overline{\psi}_2') = (-\widetilde{\delta}\overline{\varphi}_1', j^{\#}\overline{\varphi}_1' + \widetilde{\delta}\overline{\psi}_1') = i^{\#}(\overline{\varphi}_2, 0)$. Таким образом, $\widetilde{\delta}(\overline{\varphi}_2', =0) = i^{\#}(\overline{\varphi}_2, 0)$. Отметим что, по условию и по определению отображения φ_2' имеем $j^{\#}\overline{\varphi}_2' = 0$. Поэтому, для φ_2' найдется такое конечное открытое покрытие $\gamma = \{U_{\gamma_1}, U_{\gamma_2}, ..., U_{\gamma_n}\}$ пространства $X \setminus U$ и такое конечное открытое покрытие $\mu = \{U_{\mu_1}, U_{\mu_2}, ..., U_{\mu_m}\}$ пространства $A \setminus U$, что $\varphi'_{2|\gamma^{q+1}}$ непрерывно и $\varphi'_{2|\mu^{q+1}} = 0$. Поэтому, так же как и при доказательстве первой части теоремы, мы можем для отображений $\varphi_2' : (X \setminus U)^q \to G$ построить частично непрерывное отображение $\varphi_3' : X^q \to G$. Заметим, что так как $l^{\#}\overline{\varphi}_2 = 0$, $j^{\#}\overline{\varphi}_2' = 0$ и $-\widetilde{\delta}\overline{\varphi}_2' = i^{\#}\overline{\varphi}_2$, то $\widetilde{\delta}(\overline{\varphi}_3', 0) =$ $(-\widetilde{\delta}\overline{\psi}_3', l^{\#}\overline{\psi}_3) = (\overline{\varphi}_2, 0)$. Следовательно, $a = 0$. Этим теорема доказана. ■

Пусть X нормальное пространство, а βX – его стоун-чеховская компактификация. Рассмотрим отображение вложения $i : X \to \beta X$ и индуцированный им гомоморфизм

$$i^* : M_f^q(\beta X; G) \to M_f^q(X; G).$$

Теорема 4.15. *Пусть X такое топологическое пространство, что для целого числа $q \geq 0$ декартово произведение X^{q+1} нормально и псевдо компактно. Тогда для любой компактной группы G вложение $i : X \to \beta X$ индуцирует изоморфизм*

$$i^{\#} : M_f^q(\beta X; G) \to M_f^q(X; G).$$

Доказательство. Сначала покажем, что i^* эпиморфизм. Возьмем произвольный элемент $\overline{\varphi} \in M_f^q(X; G)$ и рассмотрим его представитель φ. Ясно, что существует такое конечное открытое покрытие $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ... U_{\alpha_n}\}$ пространства X, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} : \alpha^{q+1} \to G$ непрерывное отображение. В силу нормальности пространства X, найдется такое конечное открытое покрытие $\gamma = \{V_{\gamma_1}, V_{\gamma_2}, ..., V_{\gamma_n}\}$, что $\overline{V}_{\gamma_i} \subset U_{\alpha_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Ясно, что $\varphi_{\|\gamma^{q+1}\|}$ непрерывное отображение. С другой стороны, $|\gamma^{q+1}|$ является замкнутым подпространством пространства

X^{q+1} и, поэтому, его замыкание $|\gamma^{q+1}|^{\beta}$ в стоун-чеховской компактификации βX^{q+1} ($\beta X^{q+1} = (\beta X)^{q+1}$ так как X^{q+1} псевдокомпактно) пространства X^{q+1} является стоун-чеховской компактификацией пространства $|\gamma^{q+1}|$. Следовательно, существует непрерывное продолжение $\varphi_2 : \overline{|\gamma^{q+1}|}^{\beta} \to G$ отображения $\varphi_{\||\gamma^{q+1}|} : |\gamma^{q+1}| \to G$. Допустим,

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_q) = \begin{cases} \varphi_2(x_0, x_1, \ldots, x_q), \ \textit{если} \ (x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \overline{|\gamma^{q+1}|}^{\beta} \\ 0, \qquad \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что $\psi : \beta X^{q+1} \to G$ частично непрерывное отображение. Действительно, допуская, что $\gamma_1 = \{O_\beta V_{\gamma_1}, O_\beta V_{\gamma_2}, \ldots, O_\beta V_{\gamma_n}\}$, получим $O_\beta V_{\gamma_i} \subset \overline{V_{\gamma_i}}^{\beta}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Поэтому $\gamma_1^{q+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (O_\beta V_{\gamma_i})^{q+1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\overline{V_{\gamma_i}}^{\beta})^{q+1}$. С другой стороны, $\bigcup_{i=1}^{n} (\overline{V_{\gamma_i}}^{\beta})^{q+1} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_{\gamma_i}^{q+1}}^{\beta} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} V_{\gamma_i}^{q+1}}^{\beta} = \overline{|\gamma_i^{q+1}|}^{\beta}$ (так как X^{q+1} нормально и псевдонормально и , следовательно, $(\overline{V_{\gamma_i}}^{\beta})^{q+1} = (\beta \overline{V}_{\gamma_i})^{q+1} = \beta \overline{V}_{\gamma_i}^{q+1} = \overline{\overline{V}_{\gamma_i}^{q+1}}^{\beta}$). Таким образом $\gamma_1^{q+1} \subset \overline{|\gamma^{q+1}|}^{\beta}$. Из этого следует непрерывность ограничения $\psi_{|\gamma_1^{q+1}}$. А это значит, что ψ конечно частично непрерывно. Допустим $\overline{\psi}$ смежный клас элемента ψ в группе $M_f^q(\beta X; G)$. Ясно что $i^\#(\overline{\psi}) = \overline{\varphi}$.

Теперь покажем, что $i^\#$ мономорфизм. Рассмотрим такой элемент $\overline{\psi} \in M_f^q(\beta X; G)$, что $i^\#(\overline{\psi}) = 0$. Пусть ψ произволный представитель класса $\overline{\psi}$. Тогда существует такое конечное открытое покрытые $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots U_{\alpha_n}\}$ пространства X, что ограничение $\varphi_{|\alpha^{q+1}} : \alpha^{q+1} \to G$ отображения $\varphi = i^\# \psi$ является нулевым отображением. В силу нормальности X найдется такое конечное открытоэ покрытие $\gamma = \{V_{\gamma_1}, V_{\gamma_2}, \ldots, V_{\gamma_n}\}$, что $\overline{V}_{\gamma_i} \subset U_{\alpha_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Допустим $\varphi_1 = \varphi_{\||\gamma^{q+1}|} : |\gamma^{q+1}| \to G$ и $\psi_1 = \psi_{|\overline{|\gamma^{q+1}|}^{\beta}}$. Ясно, что ψ_1 является непрерывным продолжением отображения $\varphi_1 : |\gamma^{q+1}| \to G$. Но $\varphi_1 = 0$ и $|\gamma^{q+1}|$ всюду плотно в пространстве

$\overline{|\gamma^{q+1}|}^{\beta}$; значит $\psi_1 = 0$. С другой стороны, $\gamma_1 = \{O_\beta V_{\gamma_1}, O_\beta V_{\gamma_2}, ..., O_\beta V_{\gamma_n}\}$ такое конечное открытое покрытие пространства βX, что $\gamma_1^{q+1} \subset \overline{|\gamma^{q+1}|}^{\beta}$, и следовательно, $\psi_{|\gamma_1^{q+1}} = 0$. Это означает, что ψ конечно локально нулевое отображение, т.е. $a = 0$.

■

Следствие 4.16. *Пусть X такое топологическое пространство, что для целого числа $q \geq 0$ декартово произведение X^{q+1} нормально и псевдокомпактно. Тогда для любой компактной группы G вложение $i: X \to \beta X$ индуцирует изоморфизм*

$$i^*: h^q(\beta X; G) \to h_f^q(X; G).$$

■

Следствие 4.17. *Пусть (X, A) замкнутая пара топологических пространств. Если для целого числа $q \geq 0$ декартово произведение X^{q+1} нормально и псевдокомпактно, то для любой компактной группы G вложение $i:(X, A) \to (\beta X, \beta A)$ индуцирует изоморфизм*

$$i^*: h^q(\beta X, \beta A; G) \to h_f^q(X, A; G).$$

■

§ 5. Частично непрерывный когомологический функтор Александера-Спеньера с компактными носителями

I. Функториальность, аксиомы размерности и точности.

Частично непрерывный когомологический функтор Александера-Спеньера был определен и исследован Л.Мдзинаришвилим [36]. Следуя [4], [39] и [36], определим частично непрерывный когомологический функтор Александера-Спеньера с компактными носителями.

Пусть X – произвольное топологическое пространство, а G – топологическая абелевая группа. Отображение $\varphi: X^q \to G$ называется частично непрерывным, если существует такое открытое покрытие $\alpha = \{U_\alpha\}$ пространства X, что ограничение отображения φ на подпространство $\alpha^q = \bigcup\limits_{U_\alpha \in \alpha} U_\alpha^q$ является непрерывным [36].

Для любого целого числа $q \geq 0$ обозначим через $L^q(X;G)$ группу всех частично непрерывных отображений $\varphi : X^{q+1} \to G$. Определим кограничный гомоморфизм

$$\delta : L^q(X;G) \to L^{q+1}(X;G)$$

по формуле

$$\delta(\varphi) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi \circ p_i, \qquad \varphi \in L^q(X;G),$$

где $p_i : X^{q+2} \to X^{q+1}$, $i = 0,1,\dots,q+1$ проекции, определенные следующим образом

$$p_i(x_0,\dots,x_i,\dots,x_{q+1}) = (x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_{q+1}), \quad i = 0,1,\dots,q+1.$$

Таким образом, мы получили коцепной комплекс $L^*(X;G) = \{L^q(X;G),\delta\}$ [36].

Пусть W – открытая окрестность диагонали $\Delta^{q+1}(X)$. Определим носитель отображения.

Определение 5.1. Носителем отображения $\varphi : W \to G$ называется подмножество пространства X, которое обозначается символом $|\varphi|_W$ и задается следующим образом: точка x пространства X принадлежит множеству $|\varphi|_W$ тогда и только тогда, когда для любой открытой окрестности U точки x существуют такие точки $x_0, x_1, \dots, x_q \in U$, что $(x_0, x_1, \dots, x_q) \in W$ и $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_q) \neq 0$.

Лемма 5.2. *Пусть W_1 и W_2 открытые окрестности диагонали $\Delta^{q+1}(X)$, а $\varphi_1 : W_1 \to G$ и $\varphi_2 : W_2 \to G$ такие отображения, что $\varphi_{1|W_1 \cap W_2} = \varphi_{2|W_1 \cap W_2}$. Тогда*

$$|\varphi_1|_{W_1} = |\varphi_2|_{W_2}.$$

Доказательство. Пусть $x \in |\varphi_1|_{W_1}$. Рассмотрим произвольную открытую окрестность U точки x. Из окрестности U выделим такое открытое подмножество U_1, что $x \in U_1$ и $U_1^{q+1} \subset W_1 \cap W_2$. Согласно определению носителя, найдутся такие точки $x_0,x_1,...,x_q\in U_1$, для которых $\varphi(x_0,x_1,...,x_q)\neq 0$. Заметим, что $\varphi_{1|W_1\cap W_2}=\varphi_{2|W_1\cap W_2}$, и $U_1^{q+1}\subset W_1\bigcap W_2\subset W_2$. Поэтому $\varphi(x_0,x_1,...,x_q)\neq 0$. Следовательно, $x\in|\varphi_2|_{W_2}$, т.е. $|\varphi_1|_{W_1}\subset|\varphi_2|_{W_2}$. Аналогично доказывается обратное включение. Таким образом, лемма доказана. ■

Носители отображения имеют следующие свойства.

Лемма 5.3. *1) для любой открытой окрестности W диагонали $\Delta^{q+1}(X)$ и для любого отображения $\varphi:W\to G$ носитель $|\varphi|_W$ является замкнутым подмножеством пространства X.*

2) для любых окрестностей W_1 и W_2 диагонали $\Delta^{q+1}(X)$ и для любых отображений $\varphi_1:W_1\to G$ и $\varphi_2:W_2\to G$ выполняется следующее включение

$$|\varphi_1\pm\varphi_2|_{W_1\cap W_2}\subset|\varphi_1|_{W_1}\bigcup|\varphi_2|_{W_2}.$$

Доказательство. 1) Покажем, что $X\setminus|\varphi|_W$ представляет открытое подмножество пространства X. Возьмем любую точку $x\in X\setminus|\varphi|_W$. Тогда $x\notin|\varphi|_W$. Следовательно, найдется такая открытая окрестность U точки x, что для любых элементов $x_0,x_1,...,x_q\in U$, $(x_0,x_1,...,x_q)\in W$, выполняется условие $\varphi(x_0,x_1,...,x_q)=0$. Из множества U выделим открытое подмножество U_1, удовлетворяющее условиям $x\in U_1$, $U_1^{q+1}\subset W$. В таком случае легко показать, что ни одна из точек подмножества U_1 не принадлежит множеству $|\varphi|_W$, т.е. $U_1\subset X\setminus|\varphi|_W$. Это означает, что $X\setminus|\varphi|_W$ – открытое множество.

2) Возьмем любую точку $x\in|\varphi_1\pm\varphi_2|_{W_1\cap W_2}$ и допустим $x\notin|\varphi_1|_{W_1}\bigcup|\varphi_2|_{W_2}$. В таком случае найдутся такие открытые окрестности U_i точки x, $i=1,2$, что для любых элементов $x_0,x_1,...,x_q\in U_i$, $(x_0,x_1,...,x_n)\in W_i$, $i=1,2$ выполняется условие $\varphi_i(x_0,x_1,...,x_q)=0,\ i=1,2$. Пусть $U=U_1\bigcap U_2$. Тогда для любых элементов $x_0,x_1,$ $...,x_q\in U$, $(x_0,x_1,...,x_n)\in W_1\bigcap W_2$, имеем $(\varphi_1\pm\ \varphi_2)(x_0,x_1,...,x_q)=0$. Следовательно, $x\notin|\varphi_1\pm\varphi_2|_{W_1\cap W_2}$, что противоречит условию. ■

Носитель отображения $\varphi : X^{q+1} \to G$ обозначим через $|\varphi|$.

Рассмотрим коцепной комплекс $L^{*}(X;G)$ и из каждой группы $L^{q}(X;G)$ выделим подмножество $L_{c}^{q}(X;G)$, состоящее из всех частично непрерывных отображений, носители которых компактны. В силу свойств 1) и 2) леммы 5.3 множество $L_{c}^{q}(X;G)$ является группой. Кроме того, в силу свойства 2), $\delta(L_{c}^{q}(X;G)) \subset L_{c}^{q+1}(X;G)$. Таким образом, получили коцепной комплекс $L_{c}^{*}(X;G) = \{L_{c}^{q}(X;G);\delta\}$.

Заметим, что для каждого топологического пространства X и топологической абелевой группы G локально нулевыми отображениями можно построить коцепной подкомплекс $C_{0}^{*}(X;G) = \{C_{0}^{q}(X;G);\delta\}$ [39] комплекса $L_{c}^{*}(X;G)$. Соответствующий факторкомплекс обозначим символом $M_{c}^{*}(X;G)$. q-мерную когомологическую группу полученного комплекса обозначим через $h_{c}^{q}(X;G)$ и назовем частично непрерывной q-мерной когомологической группой Александера-Спеньера с компактными носителями пространства X.

Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение. Рассмотрим отображение $f^{q+1} : X^{q+1} \to Y^{q+1}$, определенное формулой

$$f^{q+1}(x_0, x_1, \ldots, x_q) = (f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_q)), \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_q) \in X^{q+1}.$$

Коцепный гомоморфизм [36] $f^{\#} : L^{q}(Y;G) \to L^{q}(X;G)$ определяется по формуле

$$f^{\#}(\varphi) = \varphi \circ f^{q+1}, \qquad \varphi \in L^{q}(X;G).$$

Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение, а V любая открытая окрестность диагонали $\Delta^{q+1}(Y)$. Тогда для каждого отображения $\varphi : V \to G$ определяется отображение $f_{V}^{\#}(\varphi) : W \to G$. По определению

$$f_{V}^{\#}(\varphi) = \varphi \circ f_{|W}^{q+1},$$

где $W = (f^{q+1})^{-1}(V)$.

Лемма 5.4. *Для каждого непрерывного отображения* $f:X\to Y$, *любой открытой окрестности* V *диагонали* $\Delta^{q+1}(Y)$ и *отображения* $\varphi:V\to G$ *справедливо включение*

$$\left|f_V^{\#}(\varphi)\right|_W \subset f^{-1}\left(|\varphi|_V\right),$$

где $W=(f^{q+1})^{-1}(V)$.

Доказательство. Пусть $x\notin f^{-1}\left(|\varphi|_V\right)$. Тогда $y=f(x)\notin|\varphi|_V$ и поэтому, найдется такая открытая окрестность U точки y, что для любых точек $y_0,y_1,\ldots,y_q\in U$, $(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in V$, выполняется равенство $\varphi(y_0,y_1,\ldots y_q)=0$. Пусть $U'=f^{-1}(U)$. Тогда U' будет такой открытой окрестностью точки x, что для любых точек $x_0,x_1,\ldots,x_q\in U'$, $(x_0,x_1,\ldots,x_q)\in W$, имеем $f^{q+1}(x_0,x_1,\ldots,x_q)\in V$. Следовательно, $f_V^{\#}(\varphi)(x_0,x_1,\ldots,x_q)=0$, т. е. $x\notin\left|f_V^{\#}(\varphi)\right|_W$. Тем самым, лемма доказана. ■

Пусть $f:X\to Y$ собственное отображение топологических пространств. В силу леммы 5.4 для отображения $f^{\#}$ справедливо включение $f^{\#}(L_c^q(Y;G))\subset L_c^q(X;G)$. Из этого следует, что коцепный гомоморфизм $f^{\#}$ индуцирует (его обозначим тем же символом) коцепный гомоморфизм $f^{\#}:M_c^q(Y;G)\to M_c^q(X;G)$, который, со своей стороны, определяет гомоморфизм групп

$$f^{*}:h_c^q(Y;G)\to h_c^q(X;G).$$

Пусть A – замкнутое подпространство пространства X, а $i:A\to X$ отобраение вложения. Тогда определяется коцепный гомоморфизм $i^{\#}:M_c^q(X;G)\to M_c^q(A;G)$. Для каждого $q\geq 0$ рассмотрим группу $M_c^q(X,A;G)=M_c^q(X;G)\oplus M_c^{q-1}(A;G)$ и кограничный гомоморфизм $\widetilde{\delta}:M_c^q(X,A;G)\to M_c^{q+1}(X,A;G)$, который определяется формулой

$$\widetilde{\delta}(\overline{\varphi},\overline{\psi})=(-\delta\overline{\varphi},i^{\#}\overline{\varphi}+\delta\overline{\psi}),\ \ \overline{\varphi}\in M_c^q(X;G),\ \overline{\psi}\in M_c^{q-1}(A;G).$$

Таким образом, мы получили коцепной комплекс $M_c^{*}(X,A;G)=\{M_c^q(X,A;G),\widetilde{\delta}\}$. Его q-мерную когомологическую группу обозначим символом $h_c^q(X,$

$A;G)$ и назовем частично непрерывной когомологической группой Александера-Спеньера с компактными носителями пары (X,A).

Заметим, что всякое собственное отображение $f:(X,A)\to(Y,B)$ замкнутых пар топологических пространств индуцирует коцепный гомоморфизм

$$f^{\#}:M_c^q(Y,B;G)\to M_c^q(X,A;G),$$

который, со своей стороны, определяет гомоморфизм градуированных групп

$$f^{*}:h_c^q(Y,B;G)\to h_c^q(X,A;G).$$

Теорема 5.5. *Для каждого целого числа* $q\geq 0$, $h_c^q(-,-;G)$ *является контравариантным функтором из категории замкнутых пар топологических пространств и их собственных отображений в категорию абелевых групп и их гомоморфизмов.* ■

Теорема 5.6 (аксиома размерности). *Для каждого одноточечного пространства* P

$$h_c^q(P;G)=\begin{cases}0, & \text{если } q\neq 0\\ G, & \text{если } q=0.\end{cases}$$

Доказательство. Так как P одноточечное пространство, то для каждого целого числа $q\geq 0$, $M_c^q(P;G)\approx G$. Кограничный гомоморфизм является тождественным или нулевым. Поэтому $h_c^q(P;G)=0$, когда $q\neq 0$ и $h_c^0(P;G)\approx G$. ■

Пусть (X,A) замкнутая пара топологических пространств. Рассмотрим коцепные комплексы $M_c^*(X,A;G)$, $M_c^*(X;G)$ и $M_c^*(A;G)$. Для каждого целого числа $q\geq 0$ определим гомоморфизмы

$$\kappa:M_c^{q-1}(A;G)\to M_c^q(X,A;G) \quad \text{и} \quad \sigma:M_c^q(X,A;G)\to M_c^q(X;G)$$

следующими формулами:

$$\kappa(\overline{\varphi})=(0,\overline{\varphi}), \qquad \overline{\varphi}\in M_c^{q-1}(A;G),$$

$$\sigma(\overline{\varphi},\overline{\psi})=\overline{\varphi}, \qquad (\overline{\varphi},\overline{\psi})\in M_c^q(X,A;G).$$

В таком случае точной будет следующая короткая последовательность

$$0\longrightarrow M_c^*(A;G)\xrightarrow{\ \kappa\ } M_c^*(X,A;G)\xrightarrow{\ \sigma\ } M_c^*(X;G)\longrightarrow 0,$$

которая индуцирует длинную точную последовательность

$$\cdots \xrightarrow{E} h_c^{q-1}(A;G) \xrightarrow{\kappa^*} h_c^q(X,A;G) \xrightarrow{\sigma^*} h_c^q(X;G) \xrightarrow{E} h_c^q(A;G) \xrightarrow{\kappa^*} \cdots,$$

где E соединительный (кограничный) оператор.

Пусть (X,A) замкнутая пара топологических пространств. Тогда справедливы равенства $i^* = E : h_c^q(X;G) \to h_c^q(A;G)$ и $j^* = \sigma^* : h_c^q(X,A;G) \to h_c^q(X;G)$. Гомоморфизм κ^* обозначим символом δ. Справедлива следующая

Теорема 5.7 (аксиома точности). *Для каждой замкнутой пары* (X,A) топологических *пространств точна когомологическая последовательность*

$$\cdots \xrightarrow{i^*} h_c^{q-1}(A;G) \xrightarrow{\delta} h_c^q(X,A;G) \xrightarrow{j^*} h_c^q(X;G) \xrightarrow{i^*} h_c^q(A;G) \xrightarrow{\delta} \cdots.$$

■

Пусть X произвольное топологическое пространство, а $P: G \to G'$ непрерывный гомоморфизм топологических абелевых групп. Определим гомоморфизм [36] $P^\# : L^q(X;G) \to L^q(X;G')$ по формуле

$$P^\#(\varphi) = P \circ \varphi, \quad \varphi \in L^q(X;G).$$

Заметим, что для каждого элемента $\varphi \in L_c^q(X;G)$ справедливо включение $|P^\#(\varphi)| \subset |\varphi|$ и, следовательно, гомоморфизм $P^\#$ индуцирует (его обозначим тем же символом) гомоморфизм $P^\# : M_c^q(X;G) \to M_c^q(X;G')$. Последний, со своей стороны, индуцирует гомоморфизм $P^* : h_c^q(X;G) \to h_c^q(X;G')$.

Теорема 5.8. *Для любого топологического пространства X и для любых топологических абелевых группы G_1 и G_2, существует изоморфизм*

$$P: h_c^q(X;G_1 \times G_2) \to h_c^q(X;G_1) \oplus h_c^q(X;G_2).$$

Доказательство проходит с небольшим изменением доказателства теореми 4.4 и по этому, опускается. ■

Следствие 5.9. *Если G – коммутативная связная группа Ли, то для каждого топологического пространства X существует изоморфизм*

$$h_c^q(X;G) \approx h_c^q(X;R^n) \oplus h_c^q(X;T^m),$$

где R^n – n-мерное эвклидово пространство, а T^m – m-мерный тор. ■

II. Характеристика группы $h_c^q(X;G)$ и свойства гомоморфизма $\tau_{U,X}: h_c^q(U;G) \to h_c^q(X;G)$

Пусть X – произвольное топологическое пространство. Обозначим через $\mathrm{Cov}(X)$ множество всех открытых покрытый пространства X. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$ и коцепной комплекс $\Phi^*(\alpha;G) = \{\Phi^q(\alpha;G), \delta_\alpha\}$ [36], где $\Phi^q(\alpha;G)$ группа, состоящая из всех непрерывных отображений $\varphi: \alpha^{q+1} \to G$, а $\delta_\alpha: \Phi^q(\alpha;G) \to \Phi^{q+1}(\alpha;G)$ кограничный оператор, определенный формулой

$$\delta_\alpha(\varphi) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi \circ \widetilde{p}_i, \qquad \varphi \in \Phi^q(\alpha;G),$$

где $\widetilde{p}_i = p_{i|\alpha^{q+2}}: \alpha^{q+2} \to \alpha^{q+1}$.

Из группы $\Phi^q(\alpha;G)$ выделим подгруппу $\Phi_c^q(\alpha;G)$, состоящую из всех элементов $\varphi \in \Phi^q(\alpha;G)$, для которых $|\varphi|_{\alpha^{q+1}}$ компактно. В дальнейшем вместо символа $|\varphi|_{\alpha^{q+1}}$ используем $|\varphi|_\alpha$. Заметим, что в силу леммы 5.3, $\Phi_c^q(\alpha;G)$ является подгруппой. В силу свойства 2) леммы 5.3 $\delta_\alpha(\Phi_c^q(\alpha;G)) \subset \Phi_c^{q+1}(\alpha;G)$. Следовательно, получим коцепной комплекс $\Phi_c^*(\alpha;G) = \{\Phi_c^q(\alpha;G), \delta_\alpha\}$. Допустим, $\alpha, \beta \in \mathrm{Cov}(X)$ и покрытие β вписано в покрытие α. Для каждого целого числа $q \geq 1$ имеем $\beta^{q+1} \subset \alpha^{q+1}$. В силу леммы 5.2, это включение определяет гомоморфизм $\pi_{\alpha\beta}: \Phi_c^q(\alpha;G) \to \Phi_c^q(\beta;G)$, который задается следующей формулой $\pi_{\alpha\beta}(\varphi) = \varphi_{|\beta^{q+1}}$. Легко показать, что система $\{\Phi_c^q(\alpha;G), \pi_{\alpha\beta}, Cov(X)\}$ является прямой системой.

Лемма 5.10. *Пусть $\varphi \in L_c^q(X;G)$, α и β являются такими открытыми покрытиями пространства X, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} \in \Phi_c^q(\alpha;G)$ и $\varphi_{|\beta^{q+1}} \in \Phi_c^q(\beta;G)$. Тогда $\pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = \pi_\beta(\varphi_{|\beta^{q+1}})$,* где $\pi_\alpha: \Phi_c^q(\alpha;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} \Phi_c^q(\alpha;G)$ *– естественная проекция.*

Доказательство. Пусть $\mu = \alpha \wedge \beta$. Тогда $\pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = \varphi_{|\mu^{q+1}} = \pi_{\beta\mu}(\varphi_{|\beta^{q+1}})$ и следовательно, $\pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = \pi_\beta(\varphi_{|\beta^{q+1}})$. Тем самым, лемма доказана. ■

Определим гомоморфизм

$$\tau : L_c^q(X;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} \Phi_c^q(\alpha;G)$$

по формуле

$$\pi(\varphi) = \pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}),$$

где $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$ такое покрытие, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} : \alpha^{q+1} \to G$ непрерывно.

Теорема 5.11. *Для каждого топологического пространства* X *гомоморфизм* τ *индуцирует изоморфизм*

$$\tilde{\tau} : M_c^q(X;G) \to \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} \Phi_c^q(\alpha;G)$$

Доказательство. Для $\varphi \in C_0^q(X;G)$ найдется такое открытое покрытие $\alpha \in \mathrm{Cov}(X)$, что $\varphi_{|\alpha^{q+1}} = 0$ и, значит $\tau(\varphi) = 0$. Следовательно, τ индуцирует гомоморфизм. Теперь докажем следующее:

1) $\tilde{\tau}$ – мономорфизм. Допустим $\pi(\varphi) = \pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = 0$. Тогда найдется такое открытое покрытие $\beta \in \mathrm{Cov}(X)$, что $\alpha < \beta$ и $\pi_{\alpha\beta}(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = (\varphi_{|\beta^{q+1}}) = 0$, т.е. $\varphi \in C_0^q(X;G)$. Это означает, что $Ker\tau = C_0^q(X;G)$. Таким образом, τ является мономорфизмом.

2) $\tilde{\tau}$ – эпиморфизм. Допустим, что $a \in \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} \Phi_c^q(\alpha;G)$. Тогда найдутся такое открытое покрытие $a \in \mathrm{Cov}(X)$ и такой елемент $\varphi \in \Phi_c^q(\alpha;G)$, что $\pi_\alpha(\varphi_{|\alpha^{q+1}}) = a$. Определим функцию $\psi \in X^{q+1} \to G$ по формуле

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in \alpha^{q+1}, \\ 0, & \text{если } x \in X^{q+1} \setminus \alpha^{q+1}. \end{cases}$$

Ясно, что $|\psi| = |\varphi|_\alpha$. Поэтому, $\psi \in L_c^q(X;G)$ и $\tau(\psi) = a$. Следовательно, $\tilde{\tau}$ – эпиморфизм. ■

Следствие 5.12. *Для каждого топологического пространства X существует изоморфизм*

$$h_c^q(X;G) \approx \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} h_c^q(\alpha;G),$$

где $h_c^q(\alpha;G) = H^*(\Phi_c^*(\alpha;G))$. ■

Лемма 5.13. *Для каждого отображения $f: X \to Y$ и для каждого открытого покрытия $\beta \in \mathrm{Cov}(Y)$ справедливо следующее равенство*

$$\alpha^{q+1} = (f^{q+1})^{-1}\beta^{q+1},$$

где $\alpha = f^{-1}(\beta)$.

Доказательство. Пусть $(x_0, x_1, ..., x_q) \in \alpha^{q+1}$ произвольный элемент. Тогда существует такой элемент $U_\alpha \in \alpha$, что $x_0, x_1, ..., x_q \in U_\alpha$. Однако, так как $\alpha = f^{-1}(\beta)$, существует такой элемент $U_\beta \in \beta$, что $U_\alpha = f^{-1}(U_\beta)$. Допустим, что $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,...,q$. Тогда $f^{q+1}(x_0, x_1, ..., x_q) = (y_0, y_1, ..., y_q)$ и $y_0, y_1, ..., y_q \in U_\beta$. Это означает, что $(x_0, x_1, ..., x_q) \in (f^{q+1})^{-1}(\beta^{q+1})$. Следовательно, $\alpha^{q+1} \subset (f^{q+1})^{-1}(\beta^{q+1})$. Наоборот, допустим $(x_0, x_1, ..., x_q) \in (f^{q+1})^{-1}(\beta^{q+1})$. Тогда существуют такой элемент $(y_0, y_1, ..., y_q) \in \beta^{q+1}$ и такое множество $U_\beta \in \beta$, что $y_0, y_1, ..., y_q \in U_\beta$ и $f^{q+1}(x_0, x_1, ..., x_q) = (y_0, y_1, ..., y_q)$. Пусть $U_\alpha = f^{-1}(U_\beta)$. Тогда $U_\alpha \in \alpha$ и $x_0, x_1, ..., x_q \in U_\alpha$. Последнее означает, что $(x_0, x_1, ..., x_q) \in \alpha^{q+1}$ и следовательно, $(f^{q+1})^{-1}(\beta^{q+1}) \subset \alpha^{q+1}$. ■

Пусть $f: X \to Y$ собственное отображение топологических пространств, а $\beta \in \mathrm{Cov}(Y)$. Рассмотрим ограничение отображения $f^{q+1}: X^{q+1} \to Y^{q+1}$ на подмножество $\alpha^{q+1} = (f^{q+1})^{-1}(\beta^{q+1}) \subset X^{q+1}$ и обозначим его символом f_β^{q+1}, т.е. $f_\beta^{q+1} = f_{|\alpha^{q+1}}: \alpha^{q+1} \to \beta^{q+1}$. Как известно, отображение f_β^{q+1} индуцирует гомоморфизм $f_\beta^\#: \Phi^q(\beta;G) \to \Phi^q(\alpha;G)$. Из лемм 5.13 и 5.4 следует включение $\left|f_\beta^\#(\varphi)\right|_\alpha \subset f^{-1}(|\varphi|_\beta)$, $\varphi \in \Phi^q(\beta;G)$. Отображение f является собственным. Поэтому гомоморфизм $f_\beta^\#: \Phi^q(\beta;G) \to \Phi^q(\alpha;G)$ индуцирует гомоморфизм $f_\beta^\#: \Phi_c^q(\beta;G) \to \Phi_c^q(\alpha;G)$.

Теорема 5.14. *Для любого собственного отображения $f: X \to Y$ топологических пространств коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M_c^q(Y;G) & \xrightarrow{f^\#} & M_c^q(X;G) \\ \downarrow \tilde{\tau} & & \downarrow \tilde{\tau} \\ \varinjlim_{\beta \in Cov(Y)} \Phi_c^q(\beta;G) & \xrightarrow{f_\infty^\#} & \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} \Phi_c^q(\alpha;G) \end{array},$$

где $f_\infty^\# = \varinjlim_{\beta \in Cov(Y)} f_\beta^\#$. ■

Пусть $g:(X,A) \to (Y,B)$ собственное отображение, $i: A \to X$ и $j: B \to Y$ – отображения вложения. Пусть $\alpha = \{U_\alpha\}$ и $\beta = \{U_\beta\}$ открытые покрытия пространств X и Y, соответственно. Допустим, $\alpha_{|A} = i^{-1}(\alpha)$, $\beta_{|B} = j^{-1}(\beta)$, $\tilde{g} = g_{|A}$. Известно, что существуют следующие гомоморфизмы $j_\beta^\# : \Phi_c^*(\beta;G) \to \Phi_c^*(\beta_{|B};G)$, $i_\alpha^* : \Phi_c^*(\alpha;G) \to \Phi_c^*(\alpha_{|A};G)$ и конусы гомоморфизмов

$$\overline{\Phi}_{c\beta}^* = \{\Phi_c^q(\beta;G) \oplus \Phi_c^{q-1}(\beta_{|B};G); \tilde{\delta}_\beta\},$$

$$\overline{\Phi}_{c\alpha}^* = \{\Phi_c^q(\alpha;G) \oplus \Phi_c^{q-1}(\alpha_{|A};G); \tilde{\delta}_\alpha\}.$$

Заметим, что если $\alpha = g^{-1}(\beta)$, то пара $(g,\tilde{g})$ индуцирует гомоморфизм $G_\beta^\# : \overline{\Phi}_{c\beta}^* \to \overline{\Phi}_{c\alpha}^*$.

Теорема 5.15. *Для каждого собственного отображения $g:(X,A) \to (Y,B)$* топологических *пространств коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} M_c^q(Y,B;G) & \xrightarrow{g^\#} & M_c^q(X,A;G) \\ \downarrow \tilde{\tau} & & \downarrow \tilde{\tau} \\ \varinjlim_{\beta \in Cov(Y)} \overline{\Phi}_{c\beta}^* & \xrightarrow{G_\infty^\#} & \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} \overline{\Phi}_{c\alpha}^* \end{array},$$

где $G_\infty^\# = \varinjlim_{\beta \in Cov(Y)} G_\beta^\#$. ■

Пусть X локально компактное пространство, U – его открытое подпространство, а A – дополнение подпространства U. Возьмем произвольный элемент $\overline{\varphi} \in M_c^q(U;G)$ и его любой представитель φ. Ясно, что $|\varphi|$ компактно. Поэтому, для подпространств $|\varphi|$ и A существуют такие открытые окрестности

W и V, что $|\varphi| \subset W$, $A \subset V$ и $W \cap V = \varnothing$. Кроме того, для каждой точки $x \in U \setminus |\varphi|$ найдется такая открытая окрестность $V_x \subset U$, что для любых точек $x_0, x_1, \ldots, x_q \in V_x$, $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_q) = 0$. Ясно, что $\alpha = \{W, V, V_x \mid x \in U \setminus |\varphi|\}$ является открытым покрытием пространства X. Теперь определим функцию $\psi : X^{q+1} \to G$ по следующей формуле

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_q) = \begin{cases} \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_q), \ \textit{если} \ x_0, x_1, \ldots, x_q \in W \ \textit{или} \ V_x \\ \qquad \textit{для какого-либо} \ x \in U \setminus |\varphi|, \\ 0, \ \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что ψ – частично непрерывное отображение. Действительно, согласно допущению, найдется такое открытое покрытие β пространства U, что $\varphi_{|\beta^{q+1}}$ является непрерывным. Возьмем систему $\mu = \alpha \setminus \{V\}$. Ясно, что она является открытым покрытием пространства U. Пусть $\gamma = \mu \wedge \beta$. Тогда $\psi_{|\gamma^{q+1}} : \gamma^{q+1} \to G$ будет непрерывным. Заметим, что если $\gamma_1 = \gamma \cup \{V\}$, то $\psi_{|\gamma_1^{q+1}} : \gamma_1^{q+1} \to G$ будет непрерывным. Действительно, возьмем такое открытое подмножество W_1 группы G, что $0 \notin W_1$. Тогда $\psi^{-1}_{|\gamma_1^{q+1}}(W_1) = \varphi^{-1}_{|\gamma^{q+1}}(W_1)$ открыто в γ^{q+1} и, следовательно, в $\gamma_1{}^{q+1}$. Теперь рассмотрим такое открытое подмножество W_2 в группе G, что $0 \in W_2$. Множество $\psi^{-1}_{|\gamma_1^{q+1}}(W_2) = V^{q+1} \cup \varphi^{-1}_{|\gamma^{q+1}}(W_2)$ открыто в $\gamma_1{}^{q+1}$. Таким образом, ψ частично непрерывно. Из определения отображения ψ следует $|\psi| = |\varphi|$. Следовательно, $\psi \in L_c^q(X;G)$. Рассмотрим его смежный класс $\overline{\psi} \in M_c^q(X;G)$ и определим гомоморфизм $\sigma_{U,X} : M_c^q(U;G) \to M_c^q(X;G)$ формулой $\sigma_{U,X}(\overline{\varphi}) = \overline{\psi}$. Ясно, что $\sigma_{U,X}$ является мономорфизмом. В дальнейшем, вместо обозначения $\sigma_{U,X}$ используется обозначение σ.

Легко проверить, что σ коммутирует с кограничным гомоморфизмом, т.е.

$$\sigma\delta(\overline{\varphi}) = \delta\sigma(\overline{\varphi}), \quad \overline{\varphi} \in M_c^q(U;G).$$

Поэтому, он индуцирует гомоморфизм

$$\tau_{U,X}: h_c^q(U;G) \to h_c^q(X;G).$$

Сформулируем некоторые свойства гомоморфизмов σ и τ:

1) гомоморфизмы $\sigma_{X,X}$ и $\tau_{X,X}$ являются тождественными изоморфизмами;

2) если множества $V \subset U$ открыты в X, то $\sigma_{V,X} = \sigma_{U,X} \circ \sigma_{V,U}$ и, следовательно, $\tau_{V,X} = \tau_{U,X} \circ \tau_{V,U}$.

Допустим, что Δ является множеством всех открытых ограниченных подмножеств пространства X. Ясно, что Δ является направленным множеством по отношению включения. В силу 1) и 2) можно сделать вывод, что система $\{M_c^q(U;G), \sigma_{U,V}, \Delta\}$ является прямой системой.

Теорема 5.16. *Пусть X локально компактное пространство. Тогда группа $h_c^q(X;G)$ является пределом прямой системы $\{h_c^q(U;G), \tau_{U,V}, \Delta\}$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать справедливость следующих предложений:

а) для каждого элемента $a \in h_c^q(X)$ существуют такое открытое ограниченное подмножество U пространства X и такой элемент $b \in h_c^q(U;G)$, что $\tau(b) = a$;

б) если U является открытым ограниченным подмножеством пространства X, а элемент $a \in h_c^q(U;G)$ таков, что $\tau_{U,X}(a) = 0$, то найдется такое открытое ограниченное подмножество V пространства X, что $U \subset V$ и $\tau_{U,V}(a) = 0$.

Сперва проверим справедливость предложения а). Пусть $\overline{\varphi}$ представитель элемента a. Ясно, что $|\varphi|$ – компактное подмножество пространства X. Поэтому, найдется такое открытое ограниченное подмножество U пространства X, что $|\varphi| \subset U$. Пусть $\varphi_{|U}$ – ограничение отображения φ на подпространство U. Тогда ясно, что $\varphi_{|U} \in L_c^q(U;G)$. Возьмем смежный класс $\overline{\varphi}_{|U}$ отображения $\varphi_{|U}$. В силу определения гомоморфизма $\sigma_{U,X}$, ясно, что $\sigma_{U,X}(\overline{\varphi}_{|U}) = \overline{\varphi}$ и, следовательно, $\tau_{U,X}(b) = a$, где b – когомологический класс коцикла $\overline{\varphi}_{|U}$.

Теперь проверим предложение б). Пусть $\overline{\varphi}$ представитель элемента a. Элемент $\sigma_{U,X}(\overline{\varphi}_{|U})$ будет кограницей, так как $\tau_{U,X}(a)=0$ и, значит найдется такой элемент $\overline{\varphi}'\in M_c^{q-1}(X;G)$, что $\delta(\overline{\varphi}')=\sigma_{U,X}(\overline{\varphi})$. Пусть W открытая ограниченная окрестность носителя $|\overline{\varphi}'|$. Если $V=U\bigcup W$, то в силу условия а) существует такой элемент $\overline{\varphi}''\in M_c^{q-1}(V;G)$, что $\sigma_{U,X}(\overline{\varphi}'')=\overline{\varphi}'$. Заметим, что $\sigma_{U,X}=\sigma_{V,X}\circ\sigma_{V,U}$ и $\sigma_{U,X},\sigma_{V,X},\sigma_{V,U,}$ – мономорфизмы. Поэтому $\tau_{U,V}(a)=0$. ■

III. Аксиомы гомотопии и вырезания

Для изложения доказательства аксиомы гомотопии нам понадобятся определение и лемма из [36].

Определение 5.17(см.[36]). Пусть α и β открытые покрытия пространств X и Y соответственно, а $f,g:X\to Y$ непрерывные отображения. Скажем, что покрытия α и β совместимы с отображениями f и g, если для каждого элемента U_α найдется такой элемент U_β покрытия β, что $f(U_\alpha)\subset U_\beta$ и $g(U_\alpha)\subset U_\beta$.

Для любого целого числа $q\geq 0$ и любого $i=0,1,\dots,q-1$ определяются непрерывные отображения $d_i^q:X^q\to Y^{q+1}$ [36] следующим образом

$$d_i^q(x_0,x_1,\dots,x_{q-1})=(f(x_0),\dots,f(x_i),g(x_i),\dots,g(x_{q-1})).$$

Лемма 5.18 (см.[36]). *Если покрытия α и β совместимы с непрерывными отображениями f и g, то отображения $f_\alpha^\#,g_\alpha^\#:\Phi^q(\beta;G)\to\Phi^q(\alpha;G)$ коцепно гомотопны и гомотопия*

$$D_{q-1}:\Phi^q(\beta;G)\to\Phi^{q-1}(\alpha;G)$$

имеет вид

$$D_{q-1}(\varphi_\beta)=\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i\varphi_\beta\circ\widetilde{d}_i^q,\ \ \varphi_\beta\in\Phi^q(\beta;G),$$

где $\widetilde{d}_t^q = d_{t|\alpha^q}^q : \alpha^q \to \beta^{q+1}$. ■

Рассмотрим единичный отрезок $I=[0,1]$ и локально компактное паракомпактное пространство X. Ясно, что $X\times I$ будет также локально компактным паракомпактным пространством. Для любой точки $t\in I$ определим отображение $g_t : X \to X\times I$ по формуле

$$g_t(x) = (x,t), \quad x\in X.$$

Ясно, что отображения g_t, $t\in I$ являются собственными.

Теорема 5.19. *Если X локально компактное паракомпактное пространство, то для отображений $g_0, g_1 : X \to X\times I$ справедливо следующее равенство*

$$g_0^* = g_1^* : h_c^q(X\times I;G) \to h_c^q(X;G).$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $\overline{\varphi}\in M_c^q(X\times I;G)$. Ясно, что $|\overline{\varphi}|$ компактное подпространство пространства $X\times I$. Допустим, что β локально конечное брусчатое, с основанием α открытое покрытие [10], замыкание каждого элемента которого компактно и $\varphi_{|\beta^{q+1}} : \beta^{q+1} \to G,\ \varphi\in\overline{\varphi}$ непрерывное отображение. Множество $|\overline{\varphi}|$ компактно, а покрытие β локально конечно. Поэтому, подпространство $|\overline{\varphi}|$ имеет непустое пересечение только с конечным числом элементов $V_{\beta_1}, V_{\beta_2}, \ldots, V_{\beta_n}$ покрытия β. Соответственно, выделим из покрытия α элементы $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}$. Пусть $\alpha_1 = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \ldots, U_{\alpha_n}\}$ и $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. По определению покрытия β для каждого элемента U_{α_i}, $i=1,2,\ldots,n$ существует регулярное покрытие μ_{α_i} пространства I [10], которое применяется при построении брусчатого покрытия β. Покрытие $\mu_0 = \wedge\mu_{\alpha_i}$ является регулярным покрытием пространства I. Пусть $\beta_1 = \alpha_1\times\mu_0$. Тогда β_1 является открытым покрытием произведения $U\times I$ и отображение $\varphi_{|\beta_1^{q+1}} : \beta_1^{q+1} \to G$ непрерывно.

Далее, допустим, что $P : X\times I \to X$ – проекция, а $C = P(|\overline{\varphi}|)$. Ясно, что C – компактное подпространство пространства U. Возьмем открытую ограниченную окрестность V компактного подпространства C в пространстве U. Ясно, что $|\overline{\varphi}| \subset V \times I \subset \overline{V} \times I \subset U \times I \subset \overline{U} \times I$. Возьмем любую точку $(x,t) \in (\overline{U} \times I) \setminus |\overline{\varphi}|$ и такую $U_{(x,t)}$ окрестность этой точки, что для любых точек $(x_0,t_0),(x_1,t_1)$, $...,(x_q,t_q) \in U_{(x,t)}$ имеем $\varphi((x_0,t_0),(x_1,t_1),...,(x_q,t_q)) = 0$. В этом случае система $\gamma = \{U_{(x,t)} \mid (x,t) \in (\overline{U} \times I) \setminus |\overline{\varphi}|\} \cup \{V \times I\}$ будет открытым покрытием пространства $\overline{U} \times I$. Пространство $\overline{U} \times I$ компактно. В покрытие γ можно вписать открытое покрытие вида $\gamma_1 = \alpha_2 \times \mu_1$, где α_2 – конечное открытое покрытие пространства $\overline{U}$, а μ_1 является регулярным покрытием пространства I. Рассмотрим пересечение $\mu = \mu_0 \wedge \mu_1$ построенных выше регулярных покрытий μ_0 и μ_1. Ясно, что μ является регулярным покрытием пространства I, а $\widetilde{\beta} = \alpha_1 \times \mu$ – открытым покрытием пространства $U \times I$, вписанным в покрытие β_1. Следовательно, $\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}} : \widetilde{\beta}^{q+1} \to G$ является непрерывным отображением, т.е. $\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}} \in \Phi_c^q(\widetilde{\beta};G)$.

Согласно построению покрытия μ, найдутся такие точки $0 = t_0 < t < ... < t_n = 1$ что $t_i \in U_{\mu_i} \cap U_{\mu_{i+1}}$, $i = 1,2,...,n-1$.. Легко показать, что для каждого $i = 0,1,...,n-1$ покрытия α_1 и $\widetilde{\beta}$ совместимы с отображениями $g_{t_i}, g_{t_{i+1}} : X \to X \times I$. Поэтому, согласно лемме 5.18, отображения

$$g^{\#}_{t_i\alpha_1}, g^{\#}_{t_{i+1}\alpha_1} : \Phi^q(\widetilde{\beta};G) \to \Phi^q(\alpha_1;G)$$

коцепно гомотопны. Следовательно, существует какой гомоморфизм

$$D_{q-1} : \Phi^q(\widetilde{\beta};G) \to \Phi^{q-1}(\alpha_1;G),$$

что

$$(\delta_{\alpha_1} D_{q-1} + D_q \delta_{\widetilde{\beta}})(\psi) = g^{\#}_{t_i\alpha_1}(\psi) - g^{\#}_{t_i+1\alpha_1}(\psi), \ \psi \in \Phi^q(\widetilde{\beta};G).$$

Здесь же заметим, что, в наших условиях для элемента $\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}} \in \Phi_c^q(\widetilde{\beta};G)$ $| D_{q-1}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}})|_{\alpha_1} \subset V$. Следовательно, оно представляет собой компактное подпространство пространства U.

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что для каждой пары гомоморфизмов

$$g^{\#}_{t_i}, g^{\#}_{t_{i+1}} : M_c^q(X \times I;G) \to M_c^q(X;G)$$

и любого коцикла $\overline{\varphi} \in Z^q(M_c^q(X \times I;G))$, $g_{t_i}^{\#}(\overline{\varphi}) - g_{t_i+1}^{\#}(\overline{\varphi})$ является кограницей. Заметим, что

$$g_{t_i}^{\#}(\overline{\varphi}) = \sigma_{U,X}\pi_{\alpha_1} g_{t_i\alpha_1}^{\#}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}}),\ \overline{\varphi} \in M_c^q(X \times I;G),\ \varphi \in \overline{\varphi}.$$

Применяя вышесказанное, получим

$$\begin{aligned} g_{t_i}^{\#}(\overline{\varphi}) - g_{t_{i+1}}^{\#}(\overline{\varphi}) &= \sigma_{U,X}\pi_{\alpha_1} g_{t_i\alpha_1}^{\#}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}}) - \sigma_{U,X}\pi_{\alpha_1} g_{t_{i+1}\alpha_1}^{\#}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}}) = \\ &= \sigma_{U,X}\pi_{\alpha_1}(g_{t_i\alpha_1}^{\#}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}}) - g_{t_{i+1}\alpha_1}^{\#}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}})) = \\ &= \sigma_{U,X}\pi_{\alpha_1}(\delta_{\alpha_1} D_{q-1}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}})) = \delta(\sigma_{U,X}\pi_{\alpha_1} D_{q-1}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}})). \end{aligned}$$

Множество $|D_{q-1}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}})|_{\alpha_1}$ компактно. Поэтому, $\sigma_{U,X}\pi_{\alpha_1} D_{q-1}(\varphi_{|\widetilde{\beta}^{q+1}}) \in M_c^{q-1}(X;G)$. ■

Заметим, что из теорем 5.15 и 5.19 вытекает

Теорема 5.20. *Если (X,A) – замкнутая пара локально компактных паракомпактных пространств, то для отображений $g_0, g_1 : (X,A) \to (X \times I, A \times I)$ справедливо равенство*

$$g_0^* = g_1^* : h_c^q(X \times I, A \times I; G) \to h_c^q(X,A;G).$$

■

Из теоремы 5.20 непосредственно получается

Следствие 5.21. *Если $f_0, f_1 : (X,A) \to (Y,B)$ собственно гомотопные отображения замкнутых пар локально компактных паракомпактных пространств, то*

$$f_0^* = f_1^* : h_c^q(Y,B;G) \to h_c^q(X,A;G).$$

■

Следующая теорема доказывается так же как теорема 4.14.

Теорема 5.22. *Пусть (X,A) – замкнутая пара топологических пространств, а G – абсолютный ретракт. Если для целого числа $q \geq 0$ декартово произведение X^{q+1} нормально, а $A \setminus U$ – коограничено в $X \setminus U$, то отображение вырезания $i : (A \setminus U, X \setminus U) \to (X,A)$ индуцирует изоморфизм*

$$i^* : h_c^q(X,A;G) \to h_c^q(X \setminus U, A \setminus U; G).$$

■

ГЛАВА III
О КОГОМОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ АЛЕКСАНДЕРА-СПЕНЬЕРА НАРОСТОВ РЕАЛЬКОМПАКТИФИКАЦИЙ

§6. Функтор когомологии типа Александера-Спеньера, основанный на конуль покрытиях

В этом параграфе мы строим когомологический функтор, который будет иметь основные свойства функторов, определенных на подкатегориях категории пар пространств и ,будет зависеть как от пар, так и от их объемлющих пространств. Пусть Y – топологическое пространство, а (X,A) пара, состоящая из подпространств X и A пространства Y. Пару (X,A), где пространства X и A являются подпространствами пространства Y, обозначим через $(X,A)_Y$.

Отображением пары $(X_1,A_1)_{Y_1}$ в пару $(X_2,A_2)_{Y_2}$ назовем такое непрерывное отображение пар $f:(X_1,A_1)\to(X_2,A_2)$, категории Top^2, которое имеет непрерывное продолжение $F:Y_1\to Y_2$.

Рассмотрим категорию Top_R^2, объектами которой являются пары $(X,A)_Y$, $Y\in Ob(Top)$, а морфизмами отображения этих пар.

Ясно, что категорию $PROX^2$ пространств близости и их близостных отображений можно изоморфно вложить в категорию Top_R^2. Всякой паре (T,S) близостных пространств сопоставим пару $(T,S)_{cT}$, где T и S – топологические пространства с топологическими структурами, индуцированными близостями близостных пространств T и S, а cT – компактификация, порожденная близостью на T. Ясно, что $(T,S)_{cT}\in Top_R^2$. Всякому близостному отображению $f:(T_1,S_1)\to(T_2,S_2)$ пар простpвнств близости сопоставим непрерывное отображение $f:(T_1,S_1)\to(T_2,S_2)$ пар топологических прастранств, которое, как известно, имеет непрерывное продолжение $F:cT_1\to cT_2$. Ясно, что f можно рассматривать как морфизм $f:(T_1,S_1)_{cT_1}\to(T_2,S_2)_{cT_2}$ категории Top_R^2. Из [8] следует, что это соответствие функториально.

Пусть $(X,A)_Y$ такая пара, что Y является компактификацией вполне регулярного пространства X. Пару (X,A) можно рассматривать как пару близостных пространств. Из [8] следует, что пространство Y на подпространство X, и следовательно, и на подпространство A определяет близостные структуры. Кроме того, отображение $f:(X_1,A_1)_{Y_1}\to(X_2,A_2)_{Y_2}$, где Y_1 и Y_2 – компактификации вполне регулярных пространств X_1 и X_2, соответственно, можно рассматривать как близостное отображение $f:(X_1,A_1)\to(X_2,A_2)$ пар пространств близости. Таким образом, полная подкатегория категории Top_R^2, объектами которой являются пары $(X,A)_Y$, где X вполне регулярное пространство, а Y его компактификация, и категория $PROX^2$ являются изоморфными.

В дальнейшем нам понадобится понятие пар выделенных отображений, которое категорию Top_R^2 превратит в C-категорию. С этой целью каждому объекту $(X,A)_Y$ сопоставим два отображения вложения $i:A_Y\to X_Y$ и $j:X_Y\to(X,A)_Y$. Пару (i,j) назовем парой выделенных отображений категории Top_R^2. Эту пару мы рассматриваем так же, как и диаграмму

$$A_Y\xrightarrow{i}X_Y\xrightarrow{j}(X,A)_Y.$$

В дальнейшем в этой главе под пространствами мы будем подразумевать вполне регулярные хаусдорфовые пространства. Символом R обозначается действительная прямая с естественной топологией, а символом $C(X)$ $(C^*(X))$ множество всех непрерывных (ограниченных) отображений из X в R.

Пусть $Z(X)=\{A\,|\,A\subset X,\ A=f^{-1}(0),\ f\in C^*(X)\}$ и $CZ(X)=\{X\setminus A\,|\,A\in Z(X)\}$. Элементы системы $Z(X)$ $(CZ(X))$ назовем нуль-множествами (конуль-множествами) пространства X. Символами $Z(X,Y)$ $(CZ(X,Y))$ обозначим следы систем $Z(Y)$ $(CZ(Y))$ на подпространство $X\subset Y$. По определению,

$$Z(X,Y)=\{A\cap X\,|\,A\in Z(Y)\}$$

$$(CZ(X,Y) = \{U \cap X \mid U \in CZ(Y)\}).$$

Конечное покрытие пространства X с элементами из системы $CZ(X,Y)$, называется $CZ(X,Y)$-покрытием [11]. Множество всех $CZ(X,Y)$-покрытий пространства X обозначается символом $Cov_Y^{CZ}(X)$. Следуя [39], можно определит $CZ(X,Y)$-покрытие пары $(X,A)_Y$. Множество $Cov_Y^{CZ}(X,A)$ всех таких покрытий является направленным множеством.

Определение 6.1. Отображение $\varphi: X^q \to G$ из q-кратного произведения пространства X в абелевую группу G назовем $CZ(X,Y)$-локально нулевым отображением, если существует такое $CZ(X,Y)$-покрытие α, что $\varphi_{|\alpha^q} = 0$.

Пусть $X_Y \in Top_R^2$ и G – абелевая группа. Рассмотрим коцепной комплекс $C^*(X;G) = \{C^q(X;G);\delta\}$, порожденный множеством всевозможных отображений $\varphi: X^{q+1} \to G$. Легко проверить, что все $CZ(X,Y)$-локально нулевые отображения также порождают коцепной комплекс $C_Y^*(X;G)$, который является подкомплексом комплекса $C^*(X;G)$. Соответствующий фактор-комплекс обозначим символом $\overline{C}_Y^*(X;G)$ и назовем коцепным комплексом пространства X относительно пространства Y с коэффициентами в группе G. Когомологическую группу $\overline{H}_Y^*(X;G)$ определенного коцепного комплекса $\overline{C}_Y^*(X;G)$ назовем конуль когомологической группой Александера-Спеньера пространства X относительно пространства Y с коэффициентами в группе G.

Заметим, что с помощью конструкций, аналогичных конструкциям, развиваемым в предыдущих параграфах, можно определить конуль когомологическую группу Александера-Спеньера $\overline{H}_Y^q(X,A;G)$ пары $(X,A)_Y \in Top_R^2$, кограничный гомоморфизм $\delta: \overline{H}_Y^q(A;G) \to \overline{H}_Y^{q+1}(X,A;G)$ и гомоморфизм $f^*: \overline{H}_{Y_2}^*(X_2,A_2;G) \to \overline{H}_{Y_1}^*(X_1,A_1;G)$, индуцированный отображением $f:(X_1;A_1)_{Y_1} \to (X_2;A_2)_{Y_2}$.

Также, как и в первой главе, доказываются следующие теоремы.

Теорема 6.2. *Для любой пары* $(X,A)_Y \in Top_R^2$ *точна следующая длинная когомологическая последовательность*

$$\ldots \xrightarrow{\delta} \overline{H}_Y^q(X,A;G) \xrightarrow{j^*} \overline{H}_Y^q(X;G) \xrightarrow{i^*} \overline{H}_Y^q(A;G) \xrightarrow{\delta} \overline{H}_Y^{q+1}(X,A;G) \xrightarrow{j^*} \ldots .$$

■

Теорема 6.3. *Гомоморфизм* $1^*_{(X,A)_1} : \overline{H}_Y^q(X,A;G) \to \overline{H}_Y^q(X,A;G)$, *индуцированный тождественным морфизмом* $1_{(X,A)_1}$ $(X,A)_Y \to (X,A)_Y$, *является тождественным.* ■

Теорема 6.4. *Для любых двух отображений* $f_1 : (X_1, A_1)_{Y_1} \to (X_2, A_2)_{Y_2}$ *и* $f_2 : (X_2, A_2)_{Y_2} \to (X_3, A_3)_{Y_3}$ *выполняется равенство* $(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^* : \overline{H}_{Y_3}^q(X_3, A_3;G) \to \overline{H}_{Y_1}^q(X_1, A_1;G)$. ■

Теорема 6.5. *Для любого отображения* $f : (X_1, A_1)_{Y_1} \to (X_2, A_2)_{Y_2}$ *коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \overline{H}_{Y_2}^q(A_2;G) & \xrightarrow{\delta} & \overline{H}_{Y_2}^{q+1}(X_2, A_2;G) \\ \downarrow f|_{A_1}^* & & \downarrow f^* \\ \overline{H}_{Y_1}^q(A_1;G) & \xrightarrow{\delta} & \overline{H}_{Y_1}^{q+1}(X_1, A_1;G). \end{array}$$

■

Теорема 6.6. *Для любого пространства* Y *и его одноточечного подпространства* P

$$\overline{H}_Y^q(P;G) = \begin{cases} 0, \text{если}\, q \neq 0, \\ G, \text{если}\, q = 0. \end{cases}$$

■

Для любой пары $(X,A)_Y \in Top_R^2$, ранее приведенным методом определяется гомоморфизм

$$\tau : C_Y^q(X,A;G) \to \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov_Y^{CZ}(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G)$$

и доказывается следующая

Теорема 6.7. *Для любой пары* $(X,A)_Y$ *гомоморфизм* τ *индуцирует изоморфизм*

$$\widetilde{\tau} : \overline{C}_Y^q(X,A;G) \to \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov_Y^{CZ}(X,A)} C^q(\alpha,\alpha';G).$$

■

Заметим, что если подпространство X пространства Y таково, что $CZ(X,Y)=CZ(X)$, то группа $\overline{H}^q_Y(X;G)$ зависит только от пространства X и в этом случае, обозначается через $\overline{H}^q_{CZ}(X;G)$. В частности, если X является замкнутым подмножеством нормального пространства Y или совершенно замкнутым подмножеством вполне регулярного пространства Y, то $CZ(X,Y)=CZ(X)$.

Допустим, что на множестве действительных чисел R задана естественная близостная структура. Подмножество S пространства близости T назовем нуль-множеством, если существует такое ограниченное близостное отображение $f:T\to R$, что $S=f^{-1}(0)$. Систему всех нуль-множеств пространства близости T обозначим символом $Z_p(T)$. Дополнение нуль-множества назовем конуль-множеством и символом $CZ_p(T)$ обозначим систему всех таких множеств пространства близости T. Рассмотрим объект $T_{cT}\in Top^2_R$, соответствующий пространству близости T. В этом случае $CZ(T,cT)=CZ_p(T)$ и, следовательно, группа $\overline{H}^q_{cT}(T;G)$ зависит только от пространства близости T, и мы его обозначаем символом $\overline{H}^q_p(T;G)$. Кроме того, если (T,S) есть пара близостных пространств, то $CZ(S,cT)=CZ(S,cS)$. Поэтому $\overline{H}^q_{cT}(S;G)=\overline{H}^q_{cS}(S;G)=\overline{H}^q_p(S;G)$.

Нашей дальнейшей целью является установление связей построенного функтора с другими известными функторами. Поэтому, мы приведем некоторые нужные результаты из работы Стейнера [42].

Система $\mathcal{F}$ замкнутых множеств топологического пространства X называется разделяющей, если для каждого замкнутого множества $H\subset X$ и любой точки $x\notin H$ в системе $\mathcal{F}$ существуют непересекающиеся множества, одно из которых содержит множество H, а второе – точку x. Система $\mathcal{F}$ назывется кольцом, если она замкнута относительно операций конечного пересечения и конечного объединения. Систему $\mathcal{F}$ называют кольцом пересечения, если оно кольцо и замкнуто относительно операции счетного пересечения. Последовательность $\{F_n\}$ элементов системы $\mathcal{F}$ называют гнездом в $\mathcal{F}$, если существует такая последовательность $\{H_n\}$ в системе $\mathcal{F}$, что $X \setminus H_{n+1} \subset F_{n+1} \subset X \setminus H_n \subset F_n$ для любого $n = 1,2,3,\dots$. Система $\mathcal{F}$ замкнутых множеств называется гнездно порожденной, если для любого элемента F системы $\mathcal{F}$ существует такое гнездо $\{F_n\}$, что $F = \bigcap\{F_n \mid n \in N\}$.

Для каждого пространства X через $\mathcal{L}(X)$ обозначим семейство всех о колец пересечения, являющися разделяющими и гнездно порожденными [42]. Для любого $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ символом $w(X,\mathcal{F})$ обозначим семейство всевозможных центрированных ультрафильтров в системе $\mathcal{F}$. Известно [42], что $w(X,\mathcal{F})$ является компактификацией Волмэна. Из пространства $w(X,\mathcal{F})$ выделим подпространство $v(X,\mathcal{F})$, состоящее из всевозможных счетных центрированных ультрафильтров. Известно также, что $v(X,\mathcal{F})$ является реалькомпактом и содержит X как всюду плотное подпространство [42]. В дальнейшем, вместо обозначений $w(X,\mathcal{F})$ и $v(X,\mathcal{F})$ будем использовать просто обозначения $w(\mathcal{F})$ и $v(\mathcal{F})$.

Справедливы следующие предложения:

1. Если $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, то $\mathcal{F}$ совпадает со следом системы $Z(w(\mathcal{F}))$ на X (теорема 2.2, [42]).

2. Если $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ и $Y \subset X$, то $\{F \bigcap Y \mid F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{L}(Y)$ (лемма 1.4, [42]).

3. Для каждого пространства X, $Z(X) \in \mathcal{L}(X)$.

Пусть X – топологическое пространство, а $\mathcal{A}$ – система его подмножеств. След системы $\mathcal{A}$ на подмножестве A обозначим символом $\mathcal{A}_A$. Пусть $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, а $\mathcal{A}$ – фильтр в системе $\mathcal{F}_A$. Символом $\mathcal{A}^X$ обозначим максимальную подсистему в системе $\mathcal{F}$, след которой на A совпадает с системой $\mathcal{A}$.

Лемма 6.8. *Пусть X вполне регулярное пространство, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ – фильтр в системе $\mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}_A$ будет фильтром в системе $\mathcal{F}_A$.*

Доказательство. 1) Множество A принадлежит фильтру $\mathcal{A}$. Поэтому $\varnothing \notin \mathcal{A}_A$;

2) пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_A$, тогда существуют такие $A_1', A_2' \in \mathcal{A}$, что $A_1 = A_1' \cap A$, $A_2 = A_2' \cap A$. Система $\mathcal{A}$ является фильтром. Поэтому $A_1' \cap A_2' \in \mathcal{A}$. С другой стороны, $A_1 \cap A_2 = (A_1' \cap A) \cap (A_2' \cap A) = (A_1' \cap A_2') \cap A$ и, следовательно, $A_1' \cap A_2' \in \mathcal{A}_A$;

3) пусть для элемента $A_1 \in \mathcal{F}_A$ существует такой элемент $A_2 \in \mathcal{A}_A$, что $A_2 \subset A_1$. Покажем что $A_1 \in \mathcal{A}_A$. Действительно, так как $A \in \mathcal{F}$, то $A_1 \in \mathcal{F}$ и $A_2 \in \mathcal{A}$. Система $\mathcal{A}$ является фильтром. Поэтому $A_1 \in \mathcal{A}$. С другой стороны, $A_1 = A_1 \cap A$ и, следовательно, $A_1 \in \mathcal{A}_A$. ■

Лемма 6.9. *Пусть X вполне регулярное пространство, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, $A \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ фильтр в системе $\mathcal{F}_A$. Тогда $\mathcal{A}^X$ будет фильтром в системе $\mathcal{F}$.*

Доказательство. 1) Из $\varnothing \notin \mathcal{A}$ следует $\varnothing \notin \mathcal{A}^X$;

2) для любых двух элементов $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^X$ существуют такие элементы $A_1', A_2' \in \mathcal{A}$, что $A_1' = A_1 \cap A$ и $A_2' = A_2 \cap A$. Система $\mathcal{A}$ является фильтром. Поэтому $A_1' \cap A_2' \in \mathcal{A}$. Заметим, что $(A_1 \cap A_2) \cap A = (A_1 \cap A) \cap (A_2 \cap A) = A_1' \cap A_2' \in \mathcal{A}$. Следовательно, $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}^X$;

3) пусть $A_1 \in \mathcal{F}$ такой элемент, для которого существует такой $A_2 \in \mathcal{A}^X$, что $A_2 \subset A_1$. Покажем, что $A_1 \in \mathcal{A}^X$. Для элемента A_2 существует такой элемент $A_2' \in \mathcal{A}$, что $A_2' = A_2 \cap A$. Ясно, что $A_2' \subset A_1 \cap A$ и, следовательно, $A_1 \cap A \in \mathcal{A}$. Таким образом, $A_1 \in \mathcal{A}^X$. ■

Лемма 6.10. *Если X является вполне регулярным пространством, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, $A \in \mathcal{F}$, $\mathcal{A}$ является ультрафильтром в системе $\mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}_A$ будет ультрафильтром в системе $\mathcal{F}_A$. Если $\mathcal{A}$ является счетно центрированным, то $\mathcal{A}_A$ тоже будет счетно центрированным.*

Доказательство. В силу леммы 6.8 $\mathcal{A}_A$ будет фильтром. Покажем, что он будет ультрафильтром. Рассмотрим в системе $\mathcal{F}_A$ такой фильтр $\mathcal{A}'$, что

$\mathcal{A}_A \subset \mathcal{A}'$. В этом случае $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'^X$. Но так как $\mathcal{A}$ ультрафильтр, а в силу леммы 6.9 $\mathcal{A}'^X$, есть фильтр, получим $\mathcal{A} = \mathcal{A}'^X$. Из этого следует, что $\mathcal{A}_A = \mathcal{A}'$.

Пусть $\mathcal{A}$ является счетно центрированным. Покажем, что $\mathcal{A}_A$ тоже будет счетно центрированным. Пусть дано счетное количество элементов системы $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}_A$. Существуют такие элементы $A_1', A_2', A_3', \ldots$ системы $\mathcal{A}$, что $A_i = A_i' \cap A$, $i = 1,2,\ldots$. Заметим, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A_i' \cap A) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i' \cap A$. С другой стороны, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i' \in \mathcal{A}$. Следовательно, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_A$. Из этого следует, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing$. ■

Лемма 6.11. *Если X является вполне регулярным пространством, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, $A \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{A}$ является ультрафильтром в системе $\mathcal{F}_A$, то $\mathcal{A}^X$ будет ультрафильтром в системе $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{A}$ является счетно центрированным, то $\mathcal{A}^X$ тоже будет счетно центрированным.* ■

Пусть X вполне регулярное пространство, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$, а A – подпространство пространства X. Замыкание множества A в пространстве $w(\mathcal{F})$ $(v(\mathcal{F}))$ обозначим символом $\overline{A}^w$ $(\overline{A}^v)$, а символом $O_w A$ $(O_v A)$ обозначим множество $w(\mathcal{F}) \setminus \overline{X \setminus A}^w$ $(v(\mathcal{F}) \setminus \overline{X \setminus A}^v)$. Пусть $A \in \mathcal{F}$. Символом A^* обозначим систему $\{\mathcal{A} \in w(\mathcal{F}) \mid A \in \mathcal{A}\}$. Пусть $U = X \setminus A$. Введем обозначение $U_* = w(\mathcal{F}) \setminus (X \setminus U)^*$. Заметим, что если $\mathcal{B}(X) = \{U = X \setminus A \mid A \in \mathcal{F}\}$, то $\mathcal{B}^*(X) = \{U_* \mid U \in \mathcal{B}(X)\}$ будет базисом пространства $w(\mathcal{F})$. Со своей стороны, $\mathcal{B}(X)$ является базисом пространства X.

Теорема 6.12. *Если X является вполне регулярным пространством, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ и $A \in \mathcal{F}$, то пространство $w(\mathcal{F}_A)$ гомеоморфно замыканию $\overline{A}^w$ подпространства A в пространстве $w(\mathcal{F})$.*

Доказательство. Пусть $f : w(\mathcal{F}_A) \to w(\mathcal{F})$ отображение, которое задано формулой

$$f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^X, \quad \mathcal{A} \in w(\mathcal{F}_A).$$

Покажем, что f взаимнооднозначно. Действительно, пусть $\mathcal{A}_1 \neq \mathcal{A}_2$ различные элементы пространства $w(\mathcal{F}_A)$. В этом случае существуют такие элементы $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_A$, что $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Легко показать, что $A_1 \in \mathcal{A}_1^X$ и $A_2 \in \mathcal{A}_2^X$. А это означает, что $\mathcal{A}_1^X \neq \mathcal{A}_2^X$ и, следовательно, $f(\mathcal{A}_1^X) \neq f(\mathcal{A}_2^X)$.

Отображение f непрерывно, так как для любого элемента U базиса $\mathcal{B}^*(X)$ имеем $f^{-1}(U_*) = (A \cap U)_*$.

Покажем, что $\overline{A}^w = f(w(\mathcal{F}_A))$. Ясно, что $\overline{A}^w \subset f(w(\mathcal{F}_A))$. Покажем обратное включение. Пусть $\mathcal{A}^X \in f(w(\mathcal{F}_A))$. Тогда существует такой элемент $\mathcal{A} \in w(\mathcal{F}_A)$, что $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^X$. Заметим, что $A \in \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{A}$. Поэтому $A \in \mathcal{A}^X$. А это означает, что $\mathcal{A}^X \in \overline{A}^w$. ■

Теорема 6.13. *Пусть X вполне регулярное пространство, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ и $A_i \in \mathcal{F}$ для $i = 1,2,\ldots n$. Тогда* $\overline{\bigcap_{i=1}^{n}}^w = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}^w$.

Доказательство. Заметим, что для доказательства теоремы достаточно показать включение $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}^w \subset \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}^w$. Пусть ультрафильтр $\mathcal{A} \in w(\mathcal{F})$ принадлежит множеству $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}^w$. Тогда $A_i \in \mathcal{A}$ для $i = 1,2,\ldots n$, а это означает, что $\bigcap_{n=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ и, следовательно, $\mathcal{A} \in \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}^w$. ■

Учитывая тот факт, что $CZ(X, w(\mathcal{F})) = \{U = X \setminus A \mid A \in \mathcal{F}\}$, получим следующее

Следствие 6.14. *Для любых подмножеств $U_1, U_2 \in CZ(X, w(\mathcal{F}))$ вполне регулярного пространств X*

$$O_w(U_1 \cup U_2) = O_w U_1 \cup O_w U_2 .$$

■

Пусть X вполне регулярное пространство, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ и $A \in \mathcal{F}$. Рассмотрим компактификацию $(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A))$ пары (X, A) и отображение вложения $i:(X,A)_{w(\mathcal{F})} \to (w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A))_{w(\mathcal{F})}$. Ясно, что это отображение индуцирует отображение $i^{-1}: Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A)) \to Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(X, A)$.

Лемма 6.15. *Пусть X вполне регулярное пространство, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ и $A \in \mathcal{F}$. Тогда отображение i^{-1} отображает множество $Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A))$ на конфинальное подмножество множества $Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(X, A)$.*

Доказательство. Рассмотрим $CZ(X, w(\mathcal{F}))$-покрытие $(\alpha, \alpha') \in Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(X, A)$. Пусть $\beta = \{O_w U_\alpha \mid U_\alpha \in \alpha\}$, $\beta' = \{O_w U_\alpha \mid U_\alpha \in \alpha'\}$. В силу следствия 6.14, (β, β') является конечным покрытием пары $(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A))$. Так как пара $(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A))$ является парой компактных пространств, то существует такое $CZ(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}))$-покрытие $(\mu, \mu') \in Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A))$, что $i^{-1}(\mu, \mu')$ вписано в покрытие (α, α').

■

Заметим, что методами, использованными при доказательствах теоремы 6.7 и леммы 6.15, и конструкциями, примененными в предыдущих параграфах, легко доказывается следующая

Теорема 6.16. *Если X является вполне регулярным пространством, $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(X)$ и $A \in \mathcal{F}$, то*

$$\overline{H}^q_{w(\mathcal{F})}(X, A; G) \approx \overline{H}^q(w(\mathcal{F}), w(\mathcal{F}_A); G).$$

■

Следствие 6.17. *Пусть A совершенно замкнутое подмножество вполне регулярного пространства X. Тогда*

$$\overline{H}^q_{CZ}(X, A; G) \approx \overline{H}^q(\beta X, \beta A; G).$$

Следствие 6.18. *Пусть A замкнутое подмножество нормального пространства X. Тогда*

$$\overline{H}^q_{CZ}(X, A; G) \approx \overline{H}^q_f(X, A; G).$$

■

Пусть $h^*(-,-;G)$ – функтор, рассмотренный в работе [17]. Используя теорему 5.13 из [17] и теорему 6.16, получим

Следствие 6.19. *Пусть S – нуль-множество пространства близости T, а $CZ_p(T)$ принадлежит системе $\mathfrak{L}(T)$ топологического пространства T с топологией, индуцированной близостью на T. Тогда*

$$\overline{H}^q_p(T,S;G) \approx h^q(T,S;G).$$

■

§7. R-краевая когомологическая группа Александера-Спеньера и характеристика когомологической группы Александера-Спеньера нароста реалькомпактификации

Из категории Top^2_R выделим подкатегорию $cTop^2_R$, обьектами которой являются пары $(X,A)_Y$, $A \in Z(X,Y)$, а морфизмами – совершенные отображения $f:(X_1,A_1)_{Y_1} \to (X_2,A_2)_{Y_2}$.

Пусть X – подпространство вполне регулярного пространства Y. Подпространство X называют R-компактным относительно пространства Y, если $X = v(X,Z(X,Y))$ [11].

Лемма 7.1. *Пусть $(X,A)_Y \in cTop^2_R$. Подпространство A R-компактно относительно пространства Y тагда и только тогда, когда A является замкнутым подмножеством пространства $v(X,Z(X,Y))$.*

Доказательство. Пусть множество A является R-компактным относительно пространства Y. Покажем, что оно является замкнутым в $v(X,Z(X,Y))$. Для этого достаточно доказать, что любой счетно центрированный ультрафильтр в системе $Z(X,Y)$, который содержит множество A, обладает свойством $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Рассмотрим ультрафильтр $\mathcal{A}_A$ в системе $Z(A,Y)$. Пересечение

$\bigcap \mathcal{A}_A$ непусто, так как A является R-компактным относительно пространства Y. С другой стороны, $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}_A \neq \varnothing$.

Теперь допустим, что A замкнуто в $v(X, Z(X,Y))$ и покажем, что A является R-компактным относительно пространства Y. Для этого нужно показать, что для любого счетно центрированного ультрафильтра $\mathcal{A}$ в системе $Z(A,Y)$ пересечение $\bigcap \mathcal{A}$ не пусто. Действительно, в этом случае $A \in \mathcal{A}^X$ и, так как A является замкнутым в пространстве $v(X, Z(X,Y))$, пересечение $\bigcap \mathcal{A}^X$ не пусто. Следовательно, $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}^X \neq \varnothing$. ■

Пусть X – подпространство вполне регулярного пространства Y. Семейство $\alpha = \{U_{\alpha_1}, ..., U_{\alpha_n}\}$ элементов системы $CZ(X,Y)$ называется $R(X,Y)$-окаймлением, если $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ является R-компактным относительно пространства Y [11].

Пусть $(X, A)_Y \in cTop_R^2$, $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2} ..., U_{\alpha_n}\}$ является $R(X,Y)$-окаймлением, а α' является такой подсистемой системы α, что $A \setminus \bigcup_{U_{\alpha_i} \in \alpha'} U_{\alpha_i}$ R-компактно относительно Y. В этом случае говорим, что (α, α') является $R(X,Y)$-окаймлением пары (X, A).

Для всякой пары $(X, A)_Y \in cTop_R^2$ символом $Cov_Y^R(X, A)$ обозначим множество всех $R(X,Y)$-окаймлений пары $(X, A)_Y$.

Теорема 7.2. *Для любой пары $(X, A)_Y \in cTop_R^2$ множество $Cov_Y^R(X, A)$ является направленным относительно упорядочения, определенного вписанностью.*

Доказательство. Пусть (α, α') и (β, β'), $R(X,Y)$-окаймления пары $(X, A)_Y$. Пусть $\mu = \alpha \wedge \beta = \{W_{\mu_{ij}} = U_{\alpha_i} \cap V_{\beta_j} \mid U_{\alpha_i} \in \alpha,\ V_{\beta_j} \in \beta\}$ и $\mu' = \alpha' \wedge \beta' = \{W_{\mu_{ij}} = U_{\alpha_i} \cap V_{\beta_j} \mid U_{\alpha_i} \in \alpha', V_{\beta_j} \in \beta'\}$. Покажем, что (μ, μ') является $R(X,Y)$-окаймлением пары (X, A). Ясно, что $X \setminus \bigcup_{W_{\mu_{ij}} \in \mu} W_{\mu_{ij}} = X \setminus \bigcup_{U_{\alpha_i} \in \alpha} U_{\alpha_i} \cup X \setminus \bigcup_{V_{\beta_j} \in \beta} V_{\beta_j}$ и $A \setminus \bigcup_{W_{\mu_{ij}} \in \mu'} W_{\mu_{ij}} = A \setminus \bigcup_{U_{\alpha_i} \in \alpha'} U_{\alpha_i} \cup$

$A \setminus \bigcup_{V'_{\beta_i} \in \beta'} V_{\beta_i}$. Заметим, что, в силу леммы 7.1 это множество является R-компактным относительно пространства Y. Таким образом, $(\mu,\mu') \in Cov_Y^R(X,Y)$. Ясно, что (μ,μ') вписано как в (α,α'), так и в (β,β'). ■

Лемма 7.3 (см. [11]). *Морфизм* $f: X_{1Y_1} \to X_{2Y_2}$ *категории* $cTop_R^2$ *имеет непрерывное продолжение* $F: v(X_1, Z(X_1,Y_1)) \to v(X_2, Z(X_2,Y_2))$. ■

Заметим, что если $f: X_{1Y_1} \to X_{2Y_2}$ является морфизмом категории $cTop_R^2$, то продолжение $F: v(X_1, Z(X_1,Y_1)) \to v(X_2, Z(X_2,Y_2))$ удовлетворяет условию

$$F(v(X_1, Z(X_1,Y_1)) \setminus X_1) \subset v(X_2, Z(X_2,Y_2)) \setminus X_2.$$

Лемма 7.4. *Пусть* $f: X_{1Y_1} \to X_{2Y_2}$ *является морфизмом категории* $cTop_R^2$, *а* $A \in Z(X_2,Y_2)$ *является* R*-компактным относительно* Y_2. *Тогда* $f^{-1}(A)$ *будет* R*-компактным относительно* Y_1.

Доказательство. Рассмотрим непрерывное продолжение $F: v(X_1, Z(X_1,Y_1)) \to v(X_2, Z(X_2,Y_2))$ отображения f. В силу замечания, приведенного выше , $f^{-1}(A) = F^{-1}(A)$ и, следовательно, этот прообраз замкнут в $v(X_1, Z(X_1,Y_1))$. Ясно, что $f^{-1}(A) \in Z(X_1,Y_1)$. В силу леммы 7.1, прообраз $f^{-1}(A)$ будет R-компактным относительно прстранства Y_1. ■

Следствие 7.5. *Если* $f: (X_1,A_1)_{Y_1} \to (X_2,A_2)_{Y_2}$ *является морфизмом категории* $cTop_R^2$, *а* (α,α') $R(X,Y)$*-окаймленнием пары* $(X_2,A_2)_{Y_2}$, *то* $(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\alpha'))$ *будет* $R(X_1,Y_1)$*-окаймлением пары* $(X_1,A_1)_{Y_1}$. ■

Определение 7.6. Отображение $\varphi: X^q \to G$ из q-кратного произведения подпространства $X \subset Y$ в абелевую группу G назовем $R(X,Y)$-локально нулевым, если существует такое $R(X,Y)$-окаймление $\alpha \in Cov_Y^R(X,A)$, что $\varphi_{|\alpha^q} = 0$.

Для каждой пары $(X,A)_Y$ определим R-краевую когомологическую группу Александера-Спеньера с коэффициентами в группе G.

С помощью $R(X,Y)$-локально нулевых отображений естественным образом, как в предыдущих параграфах, определяются коцепной комплекс $\overline{C}^{\bullet}_{R(Y)}(X,$

$A;G)$, его когомологическая группа $\overline{H}^q_{R(Y)}(X,A;G)$, гомоморфизм $f^*:\overline{H}^q_{R(Y_2)}(X_2,$ $A_2;G)\to\overline{H}^q_{R(Y_1)}(X_1,A_1;G)$, индуцированный отображением $f:(X_1,A_1)_{Y_1}\to(X_2,A_2)_{Y_2}$, и кограничный гомоморфизм $\delta:\overline{H}^q_{R(Y)}(A;G)\to\overline{H}^{q+1}_{R(Y)}(X,A;G)$. В итоге, определяется R-краевый когомологический функтор Александера-Спеньера $\overline{H}^q_{R(Y)}(-,$ $-;G):cTop^2_R\to Ab$, который обладает аналогичными свойствами ранее определенных функторов. В дальнейшем, особо важен тот факт, что здесь тоже определяется гомоморфизм

$$\tau:C^q_{R(Y)}(X,A;G)\to\varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^R_Y(X,A)}C^q(\alpha,\alpha';G)$$

и справедлива следующая

Теорема 7.7. *Для каждой пары* $(X,A)_Y\in cTop^2_R$ *гомоморфизм* τ *индуцирует изоморфизм*

$$\tilde{\tau}:C^q_{R(Y)}(X,A;G)\to\varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^R_Y(X,A)}C^q(\alpha,\alpha';G)$$

■

Основная цель данного параграфа – найти характеристику конуль когомологической группы Александера-Спеньера нароста реалькомпактификации $(v(X,Z(X,Y)),v(A,Z(A,Y))$ пары (X,A) с помощью группы $\overline{H}^q_{R(Y)}(X,A;G)$.

Пусть $(X,A)_Y\in cTop^2_R$. Из множества $Cov^R_Y(X,A)$ выделим множество $Cov^R_{YP}(X,A)$, состоящее из всех таких $R(X,Y)$-окаймлений (α,α'), для которых выполняется условие: если $U_\alpha\in\alpha'$, то $U_\alpha\cap A\neq 0$.

Лемма 7.8. *Для каждой пары* $(X,A)_Y\in cTop^2_R$ *множество* $Cov^R_{YP}(X,A)$ *является конфинальным подмножеством направленного множества* $Cov^R_Y(X,A)$.

Доказательство. Пусть $(\alpha,\alpha')\in Cov^R_Y(X,A)$ произвольное $R(X,Y)$-окаймление. Пусть $\alpha_1=\alpha'\cup\{X\setminus A\}$, $\beta=\alpha\wedge\alpha_1$, и $\beta'=\{U_\beta\in\beta\mid U_\beta\cap A\neq\varnothing\}$. Легко видеть, что $(\beta,\beta')\in Cov^R_{YP}(X,A)$ и $(\beta,\beta')>(\alpha,\alpha')$. ■

Лемма 7.9. *Пусть* $f:X\to R$ *непрерывное отображение, имеющее ограниченное продолжение* $F_1:Y\to R$. *Тогда существует непрерывное продолжение* $F:w(X,Z(X,Y))\to R$ *отображения* f.

Доказательство. По условию, существует такой замкнутый сегмент $[a,b]\subset R$, что $F_1(Y)\subset[a,b]$. Покажем, что отображение $f':X\to[a,b]$, определенное формулой

$$f'(x)=f(x), x\in X,$$

имеет непрерывное продолжение $F':w(X,Z(X,Y))\to[a,b]$.

Пусть $\alpha=\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},...,U_{\alpha_n}\}$ пройзвольное конечное открытое покрытие сегмента $[a,b]$. Существует его конечное конуль измельчение $\alpha'=\{U_{\alpha'_1},U_{\alpha'_2},...,U_{\alpha'_m}\}$. Прообраз $f'^{-1}(\alpha')=\{f'^{-1}(U_{\alpha'_1}),f'^{-1}(U_{\alpha'_2}),...,f'^{-1}(U_{\alpha'_m})\}$ является $CZ(X,Y)$-покрытием. В силу следствия 6.14, система $O_w f'^{-1}(\alpha')$ – такое конечное открытое покрытие пространства $w(X,Z(X,Y))$, что ее след на X совпадает с покрытием $f'^{-1}(\alpha')$. Следовательно, $O_w f'^{-1}(\alpha')_{|X}>f'^{-1}(\alpha)$. Известно, что в этих условиях существует непрерывное продолжение $F':w(X,Z(X,Y))\to[a,b]$ (см. [10], упражнение 3.2.А). Отображение $F=i\circ F'$, где $i:[a,b]\to R$ вложение, является искомым продолжением отображения $f:X\to R$. ■

Пусть $X_Y\in Top_R^2$, а подмножество $B\subset X$ является элементом $Z(X,Y)$. Ясно, что в этом случае существует непрерывное отображение $f:X\to R$, имеющее непрерывное ограниченное продолжение $F_1:Y\to R$ и удовлетворяющее условию $B=f^{-1}(0)$. Пусть $F:w(X,Z(X,Y))\to R$ продолжение отображения f и $\widetilde{B}=F^{-1}(0)$.

Лемма 7.10. *Пусть* $X_Y\in Top_R^2$, *а* $B\in Z(X,Y)$ R*-компактно относительно множества* Y. *Тогда* $\widetilde{B}\cap v(X,Z(X,Y))=B$.

Доказательство. Сперва заметим, что $\widetilde{B}\cap X=B$. Теперь допустим, что $\widetilde{B}\cap v(X,Z(X,Y))\neq B$. Тогда существует ультрафильтр $\mathcal{A}\in v(X,Z(X,Y))\setminus X$, который принадлежит пересечению $\widetilde{B}\bigcap v(X,Z(X,Y))$. Так как B является R-компактным относительно Y, то $B\notin\mathcal{A}$. В силу этого, существует такой $B'\in\mathcal{A}$, что $B'\bigcap B\neq\varnothing$. Заметим, что $\widetilde{B}$ является пересечением счетного количества нуль-множеств $\{Z_n\}_{n\in N}$ пространства $w(X,Z(X,Y)))$ и для каждого $n\in N$ выполняется условие: $\widetilde{B}\subset\overline{Z_n\bigcap X}^w\subset Z_n$ [42]. Поэтому $\mathcal{A}\in\overline{Z_n\bigcap X}^w$ и, следовательно, $Z_n\bigcap X\in\mathcal{A}$. Покажем, что $\bigcap\{Z_n\bigcap X\}_{n\in N}\neq B$. Действительно, допустим, что $\bigcap\{Z_n\bigcap X\}_{n\in N}=B$. Из того, что $\mathcal{A}$ счетно центрировано и $B',Z_1\bigcap X$, $\dots,Z_n\bigcap X,\dots\in\mathcal{A}$ следует, что $B'\bigcap\bigcap\{Z_n\bigcap X\}_{n\in N}\neq 0$. Но это невозможно, так как $B'\bigcap B=\varnothing$. Таким обрзом, $B\neq\bigcap\{Z_n\bigcap X\}_{n\in N}=X\bigcap\bigcap\{Z_n\}_{n\in N}=X\bigcap\widetilde{B}$. А это противоречит условию $X\bigcap\widetilde{B}=B$. ■

Лемма 7.11. *Пусть* $\mathcal{F}$ *элемент системы* $\mathcal{L}(X)$, *а* $\alpha=\{U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}\}$ – $R(X,Y)$ *-окаймление пространства* X. *Тогда существуют такие множества* $G_1,G_2,\dots,G_n\in CZ(w(\mathcal{F}))$, *что* $v(\mathcal{F})\setminus X\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_i$ *и* $G_i\bigcap X\subset U_{\alpha_i}$, $i=1,2,\dots,n$.

Доказательство. Пусть $O_wX=\{O_wU_{\alpha_1},O_wU_{\alpha_2},\dots,O_wU_{\alpha_n}\}$. В силу следствия 6.14, $v(\mathcal{F})\setminus X\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_wU_{\alpha_i}$. Пусть $\widetilde{B}$ является множеством, соответствующим множеству $B=X\setminus\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}$ в пространстве $w(\mathcal{F})$ (см. лемму 7.10). В силу этой же леммы, $v(\mathcal{F})\setminus X\subset w(\mathcal{F})\setminus\widetilde{B}$. С другой стороны, $\overline{B}^w=w(\mathcal{F})\setminus\bigcup_{i=1}^{n}O_wU_{\alpha_i}$ и $\overline{B}^w\subset\widetilde{B}$. Поэтому $v(\mathcal{F})\setminus X\subset w(\mathcal{F})\setminus\widetilde{B}\subset\bigcup_{i=1}^{n}O_wU_{\alpha_i}$. Заметим, что $w(\mathcal{F})\setminus\widetilde{B}$ является пространством Линделефа, так как оно является конуль-множеством компактного пространства $w(\mathcal{F})$. Поэтому, существуют такие множества $V_{\beta_1},V_{\beta_2},\dots,$ $V_{\beta_n},\dots\in CZ(w(\mathcal{F}))$, что система $\beta=\{V_{\beta_1},V_{\beta_2},\dots,V_{\beta_n},\dots\}$ покрывает подпространство $v(\mathcal{F})\setminus X$, и она вписана в систему $O_w\alpha$. Пусть $G_i=\bigcup\{V_{\beta_j}\mid V_{\beta_j}\subset O_wU_{\alpha_i}\}$, $i=1,2,\dots n$.

Ясно, что множества $G_1, G_2, ..., G_n \in CZ(w(\mathcal{F}))$ удовлетворяют условиям леммы. ■

Пусть $\{A_s\}_{s\in S}$ семейство подмножеств топологического пространства X. Семейство $\{B_s\}_{s\in S}$ подмножеств пространства X называют раздутием семейства $\{A_s\}_{s\in S}$, если $A_s \subset B_s$, $s \in S$ и для любого конечного подмножества $T \subset S$, $\bigcap_{s\in T} B_s = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bigcap_{s\in T} A_s = \varnothing$ [13].

Пусть X – подпространство топологического пространства Y, а $\alpha = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ $CZ(A,Y)$-покрытие подпространства A пространства X. $CZ(X,Y)$-раздутием покрытия α назовем такую систему $\beta = \{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2} ..., U_{\alpha_n}\}$, что β является раздутием системы α и $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2} ..., U_{\alpha_n} \in CZ(X,Y)$.

Пусть X является подпространством пространства Y. Рассмотрим X как близостное пространство с близостью, индуцированной $w(X, Z(X,Y))$ компактификацией. Тогда $Z(X,Y) = Z_p(X)$ и, следовательно, $CZ(X,Y) = CZ_p(X)$. Используя этот факт и предложение 3.16 из [20], получим

Следствие 7.12. *Пусть α и α' $CZ(A,Y)$-покрытия подпространства A пространства X и $\alpha > \alpha'$. Тогда существуют такие $CZ(X,Y)$-раздутия β и β' покрытий α и α', соответственно, что $\beta > \beta'$.*

Следствие 7.13. *Пусть (α,α') и (β,β') такие $CZ(X',Y)$-покрытия подпары (X',A') пары (X,A), что (α,α') вписана в (β,β'). Тогда существуют такие $CZ(X,Y)$-раздутия (γ,γ') и (μ,μ') покрытий (α,α') и (β,β'), соответственно, что (γ,γ') вписано в (μ,μ').*

Теорема 7.14. *Пусть $(X,A)_{w(\mathcal{F})} \in cTop^2_R$. Тогда существует изоморфизм*

$$\overline{H}^q_{R(w(\mathcal{F}))}(X,A;G) \approx \overline{H}^q_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F}) \setminus X, v(\mathcal{F}_A) \setminus A; G)$$

Доказательство. При доказательстве теоремы существенную роль играет метод, изложенный в [20]. Для любого $CZ(v(\mathcal{F}) \setminus X, w(\mathcal{F}))$-покрытия $(\alpha,\alpha') \in Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F}) \setminus X, v(\mathcal{F}_A) \setminus A)$ рассмотрим множество $s(\alpha,\alpha')$ всех его $CZ(v(\mathcal{F}),$

$w(\mathcal{F}))$-раздутий. Пусть $S = \bigcup_{(\alpha,\alpha')\in Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F})\setminus X, v(\mathcal{F}_A)\setminus A)} s(\alpha,\alpha')$. Введем упорядочение на множество S. Скажем, что $(s(\alpha),s(\alpha')) >^* (s(\beta),s(\beta'))$, если пара $(s(\alpha),s(\alpha'))$ вписана в пару $(s(\beta),s(\beta'))$ и пара (α,α') вписана в пару (β,β'). В силу следствия 7.13, множество S превращается в направленное множество.

Определим отображения

$$\varphi : S \to Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F})\setminus X, v(\mathcal{F})\setminus A),$$

$$\varphi : S \to Cov^{R}_{w(\mathcal{F})}(X, A).$$

следующим образом:

$$\varphi(s(\alpha),s(\alpha')) = (\alpha,\alpha'),\ (s(\alpha),s(\alpha')) \in S,$$

$$\psi(s(\alpha),s(\alpha')) = (s(\alpha)_{|X}, s(\alpha')_{|X}), (s(\alpha),s(\alpha')) \in S.$$

Ясно, что отображения φ и ψ сохраняют упорядочения. Заметим, что множество S с помощью отображения φ отображается на множество $Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F})\setminus X, v(\mathcal{F}_A)\setminus A)$. При этом, покрытия (α,α') и $(s(\alpha),s(\alpha'))$ имеют изоморфные нервы и следовательно, когомологические группы виеторисианов изоморфны. В силу теоремы 6.7, существуют изоморфизмы

$$\varinjlim_{(s(\alpha),s(\alpha'))\in S} H^q(s(\alpha),s(\alpha);G) \approx \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^{CZ}_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F})\setminus X, v(\mathcal{F}_A)\setminus A)} H^q(\alpha,\alpha';G) \approx H^q_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F})\setminus X, v(\mathcal{F}_A)\setminus A;G).$$

Теперь покажем, что отображение ψ отображает множество S на конфинальное подмножество множества $Cov^{R}_{w(\mathcal{F})}(X,A)$. В силу леммы 7.8, для любого $R(X,w(\mathcal{F}))$-окаймления $(\alpha,\alpha')\in Cov^{R}_{w(\mathcal{F})}(X,A)$ существует такое $R(X,w(\mathcal{F}))$-окаймление $(\beta,\beta')\in Cov^{R}_{w(\mathcal{F})}(X,A)$, что $(\beta,\beta') > (\alpha,\alpha')$. В силу леммы 7.11, существуют такие множества $G_1, G_2,,..., G_n, \in CZ(w(\mathcal{F}))$, что $G_i \cap X \subset U_{\beta_i}$, $U_{\beta_i}\in\beta$, $i = 1,2,...,n$. Пусть $\mu = \{G_i \cap (v(\mathcal{F})\setminus X)\}_{i=1}^{n}$. Ясно, что μ является $CZ(v(\mathcal{F})\setminus X, w(\mathcal{F}))$-покрытием пространства $v(\mathcal{F})\setminus X$. В силу леммы 7.12, существует $CZ(v(\mathcal{F})$, $w(\mathcal{F}))$-раздутие ζ покрытия μ. Пусть $\xi = \{G_1, G_2,,..., G_n\}$, $\gamma = \xi \wedge \zeta$ и $\gamma' = \{U_\gamma \in \gamma \mid U_\gamma \cap v(\mathcal{F}_A) \neq \varnothing,\}$. Ясно, что $(\gamma,\gamma')\in S$ и $\psi(\gamma,\gamma') > (\beta,\beta')$. Таким образом, множество S с помощью отображения ψ отображается на конфинальное подмножество множества $Cov^R_{w(\mathcal{F})}(X,A)$. Для любого раздутия $(s(\alpha),s(\alpha'))\in S$ имеем $H^q(s(\alpha),s(\alpha');G)\approx H^q(\psi(s(\alpha)),\psi(s(\alpha'));G)$.

В силу теоремы 7.7, существуют изоморфизмы

$$\varinjlim_{(s(\alpha),s(\alpha'))\in S} H^q(s(\alpha),s(\alpha');G)\approx \varinjlim_{(s(\alpha),s(\alpha'))\in S} H^q(\psi(s(\alpha)),\psi(s(\alpha'));G)\approx$$

$$\approx \varinjlim_{(\alpha,\alpha')\in Cov^R_{w(\mathcal{F})}(X,A)} H^q(\alpha,\alpha';G)\approx \overline{H}^q_{R(w(\mathcal{F}))}(X,A;G)$$

Следовательно,

$$\overline{H}^q_{R(w(\mathcal{F}))}(X,A;G)\approx \overline{H}^q_{w(\mathcal{F})}(v(\mathcal{F})\setminus X,\ v(\mathcal{F}_A)\setminus A;G).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Л.Д.Альтшулер.** О функториалной зависимости между группами гомологий и когомологий. *Мат. Заметки, 38,4, 1985, стр. 599-606.*
2. **М.Б.Балавадзе.** О теории гомологии А.Н. Колмогорова. *Труды Тбилисского мат. инст., 41, 1972, стр. 5-40.*
3. **С.Лефшец.** Алгебраическая топология. *Москва, 1949.*
4. **У.Масси.** Теория гомологий и когомологий. *Москва, 1981.*
5. **Л.Д.Мдзинаришвили.** Функциональные гомологии. *Труды Тбилисского мат. инст., 59, 1978, стр. 98-119.*
6. **М.Свитцер.** Алгебраическая топология – гомотопии и гомологии. *Москва, 1985.*
7. **Е.Г.Скляренко.** К теории гомогологий ассоцированой с когомологиями Александрова-Чеха. *Успехи матем. наук., 34, 1979, стр. 90-110.*
8. **Ю.М.Смирнов.** О пространствах близости. *Матем. сб., 31, 73, 1952, стр. 543-574.*
9. **Ю.М.Смирнов.** О размерности наростов близостных и топологических пространств. *Докл. Акад. Наук СССР, 168, 3, 1966, стр. 528-531.*
10. **Н.Стинрод и С.Эйленберг.** Основания алгебраической топологии. *Москва, 1958.*
11. **А.Ч.Чигогидзе.** О Волмэновских R-расширениях и размерности наростов вполне регулярных пространств. *Сооб. Акад. Наук Грузинской ССР, 87, 2, 1977, стр. 289-292.*
12. **Г.С.Чогошвили.** Об эквивалентности функциональной и спектральной теории гомологии. *Изд. АН СССР, сер. Матем., 15, 3, 1951, стр. 421-438.*
13. **Р.Энгелькинг.** Общая топология. *Москва, 1986.*
14. **J.W.Alexander.** On the ring of compact metric space. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 21, 1935, pp. 511-512.*
15. **J.W.Alexander.** On the connectivity ring of an abstract space. *Ann. of Math., 379, 1936, pp. 689-708.*
16. **J.W.Alexander**. A theory of connectivity in terms of gratings. *Ann of Math., 39, 1938, pp. 883-912.*
17. **V.Baladze.** Characterization of precompact shape and homology properties of remainder. *Preprint, Tbilisi State University, 2000, pp. 1-25.*
18. **V.Baladze**. An intrinsically characterization of Alexander-Spanier cohomology groups of compactifications. *Preprint, Tbilisi State University, 2001, pp. 1-18.*

19. **V.Baladze.** On the homology and cohomology groups of increments. *Preprint, Tbilisi State University, 2002, pp. 1-24.*
20. **V.Baladze and L.Turmanidze.** On one question Yu.M.Smirnov in the compactification theory. *Bull. Georgian Acad. Sci., 167, 2, 2003, pp. 216-220.*
21. **A.Beridze.** On Alexander-Spanier's type cohomology groups. *Bull. Georgian Acad. Sci., 166, 3, 2002, pp. 445-449.*
22. **A.Beridze.** On Alexander-Spanier's type cohomology theory with compact supports. *Bull. Georgian Acad. Sci., 167, 1, 2003, pp. 11-15.*
23. **A.Beridze.** Partially continuous finitely generated Alexander-Spanier cohomology theory. *Bull. Georgian Acad. Sci., 168, 3, 2003, pp. 444-447.*
24. **A.Beridze.** Partially continuous Alexander-Spanier cohomology theory with compact supports. *Abstracts, Int. Math. Con., Zagreb, 2000.*
25. **A.Borel and N.Wallach.** Continuous cohomology, discrete subgroups, and representation of reductive groups. *Prinseton Univ. Press., 1980.*
26. **R.Bott.** Some remarks on continuous cohomology. *Proc. of International Conference on Topology and Related Topics, Univ. of Tokyo, 1973.*
27. **E. Brown.** Cohomology theories. *Ann. of Math., 75, 1962, pp. 467-484.*
28. **E.Brown and R.H.Szczarba.** Continuous cohomology and real homotopy type. *Trans. Amer. Math. Soc., vol. 311, 1, 1989, pp. 57-106.*
29. **A.Dold.** Lectures on algebraic topology. *Berlin, 1972.*
30. **C.Dowker.** Homology groups of relations. *Anal. of Math. vol. 58, 1, July, 1952, pp. 84-95.*
31. **Sze-Tsen Hu.** Cohomology rings of compact connected groups and their homogeneous spaces. *Ann. of Math., vol. 55, 3, 1952, pp. 391-419.*
32. **B.Günther and L.Mdzinarishvili.** Continuous Alexander-Spanier cohomology classifies principal bundles with abelian structure group. *Fun. Math., 153, 1997, pp. 145-156.*
33. **A.Kolmogoroff.** Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts. *C.R. de Paris, 20, 1936, pp. 1144-1147.*
34. **W.Massey.** How to give an exposition of the Cech – Alexander-Spanier cohomology theory. *Amer. Math. Monthly., 85, 1978, pp. 75-83.*
35. **W.Massey.** Homology and cohomology theory. New *York, 1978.*

36. **L.Mdzinarishvili.** Partially continuous Alexander-Spanier cohomology theory. *Topologie und nichtkomutative geometrie, Universität Heidelberg Math. Inst. 1996.*
37. **M.Mostow.** Continuous cohomology of spaces with two topology. *Mem. Amer. Math. Soc., 175, 1976.*
38. **E.Spanier.** Cohomology theory for general spaces. *Ann. Math. 49, 1948, pp. 405-427.*
39. **E.Spanier.** Algebraic topology. *New-York, 1966.*
40. **E.Spanier.** Tautness for Alexander-Spanier cohomology. *Pacif. J. Math., 75, 2, 1978, pp. 561-563.*
41. **Yu.M.Smirnov.** Proximity and construction of compactifications with given properties. *Proc. of the 2nd Progue Top. Symp. 1966, pp. 332-341.*
42. **A.Steiner and E.Steiner.** Nest generated intersection ring in Tychonoff spaces. *Trans. Am. Math. Soc., 148, 2, 1970, pp. 589-601.*