აკაკი არსენაშვილი

დინამიკური პროგრამირება და მარაგთა მართვა

ლექციების კურსი

თბილისი 2018

დინამიკური მოდელები

დინამიკურ მოდელებში, რომლებიც აღწერენ ეკონომიკურ სისტემებს დროში, თავიდანვე საჭიროა განვასხვავოთ ეგზოგენური ცვლადები(მართვები) და ენდოგენური ცვლადები, რომლებიც სისტემის მიმდინარე მდგომარეობას ახასიათებენ. შესასწავლი ეკონომიკური სისტემის მდგომარეობა t მომენტში აღიწერება სასრულ განზომილებიანი ვექტორით $x(t) \in E^n$, ხოლო მართვა დროის იმავე მომენტში - სასრულ განზომილებიანი $u(t) \in E^r$ ვექტორით, კერძოდ $u(t) \in E^2$. დინამიკური მოდელები იყოფა ორ ჯგუფად: უწყვეტი ან დისკრეტული დროით.

ჯერ განვიხილოთ უწყვეტი დინამიკური მოდელები. ვთქვათ სისტემის შესწავლა ხდება დროის $t \in [t_0, t_1]$ შუალედში. უწყვეტი დროის შემთხვევაში სისტემის მდგომარეობის ცვლილება აღიწერება დიფერენციალური განტოლების საშუალებით:

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u), \tag{0.1}$$

სადაც $f(t, x, u)$ არის სისტემის მდგომარეობის $x(t) \in E^n$ ვექტორის, სამართი $u(t) \in E^r$ პარამეტრის და $t \in [t_0, t_1]$ დროის რაიმე მოცემული ფუნქცია. გარდა ამ მონაცემებისა საჭიროა აგრეთვე მოცემული იყოს სისტემის საწყისი მდგომარეობა ანუ დიფერენციალური განტოლებისთვის საწყისი მნიშვნელობა

$$x(t_0) = x_0, \tag{0.2}$$

რათა ყოველი $u(t) \in E^r$ მართვისთვის (მაგალითად უბნობრივ უწყვეტ ფუნქციათა კლასიდან) ცალსახად განისაზღვროს

$x(t), t \in [t_0, t_1]$, (0.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. გარდა (0.1) და (0.2) შეზღუდვებისა, შეზღუდვები ედება აგრეთვე სამართ ცვლადებს და ასეთი მართვების სიმრავლეს ვუწოდებთ დასაშვებ მართვათა სიმრავლეს $U(t)$:

$$u(t) \in U(t), \ t \in [t_0, t_1]. \qquad (0.3)$$

როგორც სტატიკური მოდელების შემთხვევაში, აქაც მარტივი მოდელები აღიწერებიან წრფივი დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით:

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)u(t) + a(t), \ \ t \in [t_0, t_1], \qquad (0.4)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad (0.5)$$

$$C_1(t)x(t) + C_2(t)u(t) \le b(t) \qquad (0.6)$$

სადაც $A_1(t), A_2(t), C_1(t), C_2(t)$ წინასწარ მოცემული მატრიცებია, რომელთა ელემენტებიც დამოკიდებული არიან დროზე, $a(t)$ და $b(t)$ მოცემული ვექტორებია. ეკონომიკურ სისტემებში ხშირად გვხვდება სირთულეები გამოწვეული დაგვიანებით. მაგალითად, რომელიმე საწარმოო პროცესის შემთხვევაში დამატებითი პროდუქციის მიღება ხდება მხოლოდ გარკვეული დროის შუალედის შემდეგ. დროის ასეთ შუალედს დაგვიანებას უწოდებენ და მისი გათვალისწინებით ეკონომიკური სისტემა აღიწერება დაგვიანებულ არგუმენტიანი დიფერენციალური განტოლების საშუალებით. დაგვიანება შესაძლებელია მონაწილეობდეს როგორც სამართ ცვლადებში, ასევე სისტემის მდგომარეობის აღმწერ ცვლადში ან ორივეში ერთად. კერძოდ,

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-\tau), u(t-\eta)), \qquad (0.7)$$

სადაც τ და η დაგვიანებებია.

განვიხილოთ დინამიკური ეკონომიკური მოდელები დისკრეტული დროით

დისკრეტულ მოდელებს ანუ მრავალბიჯიან მოდელებს ეკონომიკაში უჭირავთ განსაკუთრებული ადგილი. ასეთ მოდელებში დრო თავის მნიშვნელობებს ღებულობს t_0 საწყისი მომენტიდან T მომენტამდე გარკვეული ρ ბიჯით. ძირითადად იღებენ, რომ $t_0 = 0, \rho = 1$. ამ დროს განტოლება (0.1) –ის მაგიერ გამოიყენება შემდეგი განტოლება:

$$x(t+1) = x(t) + f(t, x(t), u(t)), \quad t = 0,1,...,T-1 \ . \qquad (0.8)$$

საწყისი პირობით $x(t_0) = x_0$, და შეზღუდვებით

$$\{x(t), u(t)\} \in Y(t), \quad t = 0,1,...,T-1 \qquad (0.9)$$

ასევე შეზღუდვით სისტემის ბოლო მდგომარეობაზე

$$x(T) = X(T) \qquad (0.10)$$

დისკრეტული მოდელების უმარტივეს შემთხვევას წარმოადგენს წრფივი დისკრეტული მოდელები, სადაც (0.4) დიფერენციალური განტოლების ნაცვლად გვაქვს შემდეგი დისკრეტული (სხვაობიანი) განტოლება:

$$x(t+1) = x(t) + A_1(t)x(t) + A_2(t)u(t) + a(t), \quad t = 0,1,...,T-1 \qquad (0.11)$$

ამასთან საწყისი პირობა იგივე რჩება, პირობა (0.6)-ს ადგილი აქვს დროის დისკრეტული მომენტებისთვის და დაემატება (0.10) პირობა, რომლის ძალითაც $X(T)$ სიმრავლე უნდა იყოს მრავალწახნაგა.

ზოგადად ეკონომიკური პროცესის მათემატიკური მოდელი შესაძლებელია ასე ჩავწეროთ:

$$z \in G_z \subset Z \qquad (0.12)$$

სადაც Z - ცვლადების სივრცეა, z - მოდელის ცვლადებია, G_z - ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეა.

ეკონომიკური პროცესების დაგეგმარების ამოცანებში მათემატიკური მეთოდები გამოიყენება იმისათვის, რათა ვიპოვოთ რაციონალური გადაწყვეტილება. რაციონალური გადაწყვეტილების მისაღებად კი საჭიროა მივუთითოთ იმ სიდიდეებზე ან სიდიდეთა სისტემაზე, რომელიც ახასიათებს მოდელის ამონახსნის ხარისხს.

ვთქვათ მოდელი აღწერილია შემდეგი სახით $z \in G_z \subset Z$, ხოლო $z \in Z$ წარმოადგენს მოდელის ამონახსნს. ასეთ შემთხვევაში მოდელის ხარისხის მაჩვენებლები წარმოადგენენ z-ის ფუნქციებს და ასე აღვნიშნავთ:

$$f_i(z),\ i = 1,2,\ldots,r.$$

$f_i(z),\ i = 1,2,\ldots,r.$ ფუნქციების მნიშვნელობები განსაზღვრავენ თუ რომელი ამონახსნი უფრო უკეთესია ანუ ოპტიმალურია. ზოგჯერ ოპტიმალური ამონახსნი არ არის ერთადერთი, **ასეთ შემთხვევაში ვახდენთ რამოდენიმე ამონახსნისგან ერთი ამონახსნის აგებას.** ამ პროცესს ამონახსნთა შეხვევა ეწოდება. არსებობს ამონახსნთა შეხვევის რამოდენიმე ხერხი.

1) **ეკონომიკური მეთოდი.** უნდა ავიღოთ რაიმე დადებითი $\lambda_i, i = 1,2,...,r.$ სიდიდეები, რომელთა საშუალებითაც ვაგებთ ახალ კრიტერიუმს

$$U(z) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i(z) \tag{0.13}$$

λ_i რიცხვები წარმოადგენენ თვითოეული მაჩვენებლის ფასს.

2) **მაჩვენებელთა სტრუქტურის შერჩევა.** როგორც წინა შემთხვევაში, აქაც ვიღებთ დადებით $\lambda_i, i = 1,2,...,r.$ რიცხვებს და ახალ კრიტერიუმს ვაგებთ შემდეგი სახით

$$U(z) = \min_{i=1,...,r} (f_i(z)/\lambda_i) \tag{0.14}$$

3) **შეზღუდვების შემოღება და მაჩვენებლებიდან წამყვანი მაჩვენებლის გამოყოფა.** ვთქვათ მოცემულია $\lambda_i, i = 1,2,...,r.$ სიდიდეები. შემოვიღოთ შეზღუდვები $f_i(z) \geq \lambda_i, i = 1,2,...,r.$ კრიტერიუმად ვიღებთ ერთ-ერთ მაჩვენებელს, ვთქვათ

$$U(z) = f_{i*}(z) \tag{0.15}$$

გარდა ჩამოთვლილი კრიტერიუმებისა გამოიყენება სხვა კრიტერიუმებიც და მათი კომბინაციით აგებული ახალი კრიტერიუმები.

განვიხილოთ დინამიკური მოდელი, რომელიც აღიწერება (0.1) დიფერენციალური განტოლების საშუალებით. ასეთი მოდელების შეფასება როგორც წესი ხდება რაიმე $f^0(t, x(t), u(t))$ ფუნქციის მნიშვნელობების საშუალებით დროის ყოველი მომენტისთვის $t \in [0,T]$ მოცემული შუალედიდან. რადგან დროის ყოველ მომენტს $0 \leq t \leq T$ შუალედიდან შეესაბამება $f^0(t, x(t), u(t))$ ფუნქციის უსასრულო რაოდენობა მნიშვნელობები,

ამიტომ რიცხვითი კრიტერიუმი აიგება ინტეგრალის საშუალებით:

$$U = \int_0^T \delta(t) f^0(t, x(t), u(t)) dt, \qquad (0.15)$$

სადაც ხშირად უშვებენ, რომ $\delta(t) = e^{-\rho t}$, ρ- არაუარყოფითი რიცხვითი პარამეტრია.

თუ დინამიკური მოდელი აღწერილია (0.8) დისკრეტული ანუ მრავალბიჯიანი სისტემის საშუალებით, მაშინ (0.15) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$U = \sum_{i=1}^{T} \delta(t) f^0(t, x(t), u(t)), \qquad (0.16)$$

ხოლო ამ შემთხვევაში $\delta(t) = (1-\rho)^t$.

ასეთი სახის ამოცანებს უწოდებენ ოპტიმიზაციის ამოცანებს, ხოლო შესაბამის წყვილს $(u(t), x(t)),\ t \in [0, T]$ - ოპტიმალურ ამონახსნს.

განვიხილოთ ოპტიმიზაციის კლასიკური ამოცანები

1. **უპირობო ოპტიმიზაციის ამოცანა.** საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი $x^* \in E^n$ ვექტორი, რომელზედაც მიიღწევა $U(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმი. ვთქვათ x სკალარია, მაშინ ამ ამოცანას შეიძლება არ ჰქონდეს ამოხსნა, მაგალითად თუ $U(x) = ax$, ან $U(x) = ax^3$. დავუშვათ არსებობს ისეთი x^*, რომლისთვისაც $U(x^*) > U(x)$ ნებისმიერი $x^* \neq x$. ეს ნიშნავს, რომ x^* მაქსიმუმის წერტილია. კლასიკური ოპტიმიზაციის ამოცანებში ყოველთვის გულისხმობენ, რომ $U(x)$ ფუნქციას აქვს საჭირო რაოდენობის

წარმოებულები, ანუ იგი საკმარისად გლუვი ფუნქციაა. ასეთ შემთხვევაში $U(x)$ შეგვიძლია გავშალოდ ტეილორის მწკრივში x^* წერტილის მახლობლობაში. გვექნება

$$U(x) = U(x^*) + U'(x^*)\Delta x + \frac{1}{2}U''(x^* + \theta\Delta x)(\Delta x)^2, \qquad (0.17)$$

სადაც $\Delta x = x - x^*$, θ ისეთ რიცხვია , რომ $0 < \theta < 1$.

აქედან გვექნება ექსტრემუმის აუცილებელი პირობა

$$U'(x^*) = 0 \qquad (0.18)$$

მაგრამ ეს პირობა არ არის საკმარისი. მაგალითად შეიძლება ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში იყოს ნული, მაგრამ ამ წერტილში არ გვქონდეს ექსტრემუმი, არამედ ეს წერტილი იყოს გადაღუნვის წერტილი. იმისათვის რომ ექსტრემუმზე არ განვიხილოთ გადაღუნვის წერტილები, საჭიროა კრიტიკულ წერტილებში დავთვალოთ ამ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი: თუ

$U''(x^*) \le 0$, მაშინ გვაქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ $U''(x^*) \ge 0$, მაშინ გვაქვს მინიმუმი. გლობალური ექსტრემუმის წერტილის გამოსავლენად საჭიროა ერთმანეთს შევადაროთ ფუნქციის მნიშვნელობები ყველა ექსტრემალურ წერტილში.

აღნიშნული მეთოდები შეგვიძლია გავავრცელოთ მრავალგანზომილებიან ვექტორზეც. ვთქვათ $x \in E^n$, მაშინ კრიტიკულობის აუცილებელ პირობას ექნება შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, \ldots, n \qquad (0.19)$$

ხოლო მეორე რიგის პირობას ექნება შემდეგი სახე:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \le 0 \qquad (0.20)$$

ეს ნიშნავს შემდეგი მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობას:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

ეკონომიკურ გამოკვლევებში იშვიათად გვხვდება ამოცანები უპირობო ექსტრემუმზე, მაგრამ არსებობს ისეთი მეთოდები რომელთა საშუალებითაც პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები დაიყვანება უპირობო ექსტრემუმის ამოცანაზე. ერთ-ერთი ასეთი მეთოდია ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი გამოიყენება შემდეგი პირობითი ექსტრემუმის ამოცანის ამოსახსნელად:

ვიპოვოთ $U(x_1, x_2)$ ფუნქციის მაქსიმუმი, თუ x_1, x_2 სკალარული ცვლადები აკმაყოფილებენ პირობას: $g(x_1, x_2) = b$.

ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის იდეა შემდგომში გადატანილ იქნა ასეთ ამოცანებზე, სადაც შეზღუდვები მოცემულია არა ტოლობების არამედ უტოლობების სახით:

ვიპოვოთ $U(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმი იმ პირობით, რომ $x \in E^n$ და შეზღუდვები მოცემულია შემდეგი უტოლობების სახით:

$g_j(x) \le b_j, \quad j = 1,2,...,m,$

$x \ge 0.$

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოხსნისთვის გამოიყენება კუნი-ტაკერის თეორემა, რომელიც წარმოადგენს ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის განზოგადოებას.

ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდის გამოყენებით შეგვიძლია ამოვხსნათ ისეთი ოპტიმიზაციის ამოცანები, რომლებშიც შეზღუდვები არც ისე ბევრია და ასევე მოვახდინოთ მათემატიკურ-ეკონომიკური მოდელის ზოგადი თვისებების ანალიზი.

შემდეგი წინ გადადგმული ნაბიჯი იყო წრფივი პროგრამირების მეთოდის გამოყენება მათემატიკურ-ეკონომიკური მოდელების ამოსახსნელად და ანალიზის ჩასატარებლად. აღნიშნული მეთოდის გამოყენება დაიწყეს 1930 წლიდან. 1939 წელს ლ.კანტოროვიჩმა გამოაქვეყნა წიგნი: "მათემატიკური მეთოდები წარმოების ორგანიზაციასა და დაგეგმვაში", რომელშიც პირველად იქნა შემოთავაზებული წრფივი შეზღუდვებით და წრფივი კრიტერიუმით მოცემული ოპტიმიზაციის ამოცანის ამოხსნის ეფექტური მეთოდები. წრფივი პროგრამირების ამოცანა ზოგადად ასე ჩაიწერება:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_j, \quad j = 1,2,...,m,$$

$$x_i \ge 0, \; i = 1,2,...,n.$$

აქამდე განხილული მეთოდები ეხებოდა ოპტიმიზაციის სტატიკური ამოცანების ამოხსნას.

დინამიკური ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები შემუშავებულ იქნა უფრო მოგვიანებით 1950-1960 წლებში ლ.პონტრიაგინის და მისი მოწაფეების რ.გამყრელიძის, ვ.ბოლტიანსკის და ე.მიშჩენკოს მიერ. მათი ავტორობით 1961 წელს გამოქვეყნდა ამ დარგის ფუნდამენტური ნაშრომი "ოპტიმალური პროცესების მათემატიკური თეორია". ასეთი ამოცანების ზოგადი სახეა:

ვიპოვოთ $z^* \in Z \subset E^n$, ისეთი, რომ $\max_{z \in Z} U(z)$.

თუ ოპტიმიზაციის ამოცანა წარმოდგენილია დისკრეტული ანუ მრავალბიჯიანი მოდელის სახით, მაშინ ვიყენებთ რ.ბელმანის ოპტიმალურობის პრინციპს, რომელიც მის მიერ შემოთავაზებულ იქნა ასევე 1950-1960 წლებში, მისი წიგნი "დინამიკური პროგრამირება", რომელიც გამოქვეყნდა 1957 წელს პრისტონის უნივერსიტეტში, ასევე წარმოადგენს ფუნდამენტალურ ნაშრომს ამ დარგში.

თავი I

მათემატიკური პროგრამირების ამოცანა.

მათემატიკური პროგრამირების ამოცანა მდგომარეობს ცვლადების(ფაქტორების) ისეთი მნიშვნელობების მოძებნაში, რომლებიც მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებენ მოცემულ მიზნის ფუნქციას და ამავე დროს აკმაყოფილებენ შეზღუდვების სისტემას. ასეთ ამოცანას უწოდებენ მათემატიკური პროგრამირების სტატიკურ ამოცანას.

1.1. ამოცანის ფორმალური ჩამოყალიბება.

ამოცანის ფორმალური ჩამოყალიბების დროს საჭიროა ჯერ განვმარტოთ "ინსტრუმენტალური", ანუ სამართი ცვლადები, დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე და მიზნის ფინქცია.

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ ვექტორ სვეტს ვუწოდოთ

ინსტრუმენტალური ცვლადების ვექტორი.

ცხადია $x \in E^n$, სადაც E^n - ევკლიდეს n–განზომილებიანი სივრცეა.

შენიშვნა 1.1. E^1-ევკლიდეს ერთგანზომილებიანი სივრცე არის იგივე რიცხვითი წრფე, რომელზედაც შემოღებულია მეტრიკა, ანუ განმარტებულია მანძილი ნებისმიერ ორ ელემენტს, ანუ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის. ამასთან გვაქვს ნულოვანი ელემენტი 0. მანძილი ნებისმიერ ორ რიცხვს შორის განიმარტება როგორც $\sqrt{(x-y)^2} = |x-y|$. ამ სივრცეში განიმარტება აგრეთვე არითმეტიკური ოპერაციები.

E^2-ევკლიდეს ორგანზომილებიანი სივრცეა, რომელშიც ნულოვანი ელემენტი $0 = (0,0)$ არის კოორდინატთა სათავე, ხოლო მანძილი ნებისმიერ ორ წერტილს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$; სადაც $x = (x_1, x_2);\ \ y = (y_1, y_2)$.

ანალოგიურად განიმარტება E^n სივრცე, რომელშიც მანძილის ცნების განზოგადებას წარმოადგენს:

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_n-y_n)^2}; \qquad (1.1)$$

სადაც $x = (x_1, x_2, ..., x_n);\ \ y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

თუ $x \in E^n$ ვექტორი აკმაყოფილებს ამოცანის შეზღუდვებს მას უწოდებენ დასაშვებს, ხოლო ყველა დასაშვები ვექტორი ჰქმნის დასაშვებ ვექტორთა X სიმრავლეს, $X \subset E^n$. ცხადია, რომ ნებისმიერი არატრივიალური ამოცანისთვის $X \neq \varnothing$.

მიზნის ფუნქცია – არის მოცემული ამოცანის მიზნის მოკლე მათემატიკური ფორმულით წარმოდგენილი გამოსახულება. როგორც წესი ეს არის ინსტრუმენტული ცვლადების ნამდვილი და უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია:

$$F = F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1.2)$$

“ნამდვილი ფუნქცია” – ნიშნავს, რომ ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე დამნიშვნელობათა სიმრავლეც მდებარეობს ნამდვილ რიცხვთაღერძზე.

1.2. მათემატიკური პროგრამირების ზოგადი ამოცანა.

მათემატიკური პროგრამირების ზოგადი ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:

ვიპოვოთ $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ ინსტრუმენტული ცვლადების ისეთი ვექტორი, რომელიც მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანიჭებს მიზნის ფინქციას

$$\max_x F(x) \qquad (1.3)$$

იმ პირობით, რომ $x \in X$ (1.4)

ცხადია, რომ $F(x)$-ის მაქსიმიზაცია ექვივალენტურია $a+bF(x),\ b>0$ ფუნქციის მაქსიმიზაციის, ან $a+bF(x),\ b<0$ მინიმიზაციის.

მათემატიკური პროგრამირების ზოგადი ამოცანა იყოფა სამ ჯგუფად:

ა) მათემატიკური პროგრამირების კლასიკური ამოცანა;
ბ) არაწრფივი პროგრამირების ამოცანა;
გ) წრფივი პროგრამირების ამოცანა.

1.3. მათემატიკური პროგრამირების კლასიკური ამოცანა.

მათემატიკური პროგრამირების კლასიკური ამოცანის დროს შეზღუდვები მოიცემა ტოლობებით:

$$\begin{cases} g_1(x) = g_1(x_1, x_2, .., x_n) = b_1, \\ g_2(x) = g_2(x_1, x_2, .., x_n) = b_2, \\ ..... \\ g_m(x) = g_m(x_1, x_2, .., x_n) = b_m \end{cases} \qquad (1.5)$$

$g_1(x), g_2(x), ..., g_m(x)$ - ცნობილი უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, რომელთაც შეზღუდვების ფუნქციებს უწოდებენ; $b_1, b_2, ..., b_m$ - მოცემული ნამდვილი რიცხვებია, რომელთაც შეზღუდვების მუდმივებს ეწოდებენ. ვექტორული ფორმით ეს შეზღუდვები ასე ჩაიწერება.

$$g(x) = b \qquad (1.6)$$

სადაც

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ . \\ . \\ g_m(x) \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

კლასიკური პროგრამირების ამოცანა ვექტორულად ასე ჩაიწერება

$$\max_x F(x) \qquad (1.7)$$

$$g(x) = b \qquad (1.8)$$

1.4. არაწრფივი პროგრამირების ამოცანა.

ამ დროს შეზღუდვათა სისტემა შედგება მოთხოვნების ორი ნაწილისგან:

ა) ცვლადების არაუარყოფითობის მოთხოვნა $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ (1.9)

ბ) ცვლადების დამაკავშირებელი შეზღუდვები მოცემული უტოლობებით:

$$\begin{cases} g_1(x) = g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_1 \\ g_2(x) = g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_2 \\ ..... \\ g_m(x) = g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_m \end{cases} \qquad (1.10)$$

ანუ ვექტორულად, არაწრფივი პროგრამირების ამოცანა ასე ჩამოყალიბდება:

$$\max_x F(x) \qquad (1.11)$$

იმ პირობით, რომ

$$g(x) \geq b; \quad x \geq 0; \qquad 0 = (0,0,...,0)^T \qquad (1.12)$$

1.5. წრფივი პროგრამირების ამოცანა.

ამ შემთხვევაში:

$$F(x)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n=cx\,, \qquad (1.13)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\le b_{2;} \\ ..... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n\le b_m, \end{cases} \qquad (1.14)$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0,...., x_n\ge 0$$

ვექტორული ფორმით ეს ამოცანა ასე ჩაიწერება:

$$\max_x cx, \qquad (1.15)$$

იმ პირობით, რომ

$$\begin{aligned} &Ax\le b, \\ &x\ge 0, \end{aligned} \qquad (1.16)$$

სადაც

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12},..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22},..., a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1}, a_{m2},..., a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad c=(c_1, c_2,..., c_n).$$

ე.ი. წრფივი პროგრამირების ამოცანა წარმოადგენს არაწრფივი პროგრამირების ამოცანის კერძო შემთხვევას, როდესაც $g(x)$ და $F(x)$ ფუნქციები წრფივებია.

1.6. მაქსიმუმის ტიპები. ვეიერშტრასის თეორემა. თეორემა გლობალური ექსტრემუმის საკმარისი პირობების შესახებ.

მათემატიკური პროგრამირების ზოგად ამოცანაში ინსტრუმენტულ x^*ცვლადს ეწოდება გლობალური მაქსიმუმის წერტილი (ან ამონახსნი), თუ $x^* \in X$- დასაშვებ სიმრავლეს და მიზნის ფუნქცია x^* ვექტორზე ღებულობს არანაკლებ მნიშვნელობას ვიდრე ნებისმიერ სხვა დასაშვებ წერტილში:

$$F(x^*) \geq F(x) \quad \forall x \in X \qquad (1.17)$$

გლობალურ მაქსიმუმს ეწოდება მკაცრი (ძლიერი), თუ x^* წერტილში მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა მკაცრად მეტია მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობაზე ნებისმიერ სხვა წერტილში დასაშვები სიმრავლიდან, ე.ი.

$$F(x) > F(x) \quad \forall x \in X, x \neq x^* \quad (1.18)$$

ცხადია, რომ მკაცრი გლობალური მაქსიმუმის წერტილი ყოველთვის ერთადერთია. მართლაც, ვთქვათ გვაქვს ორი $x^* \neq x^{**}$ მკაცრი გლობალური მაქსიმუმის წერტილი, მაშინ ერთდროულად სრულდება შემდეგი ორი უტოლობა:

$$F(x^*) > F(x^{**}) \quad \text{და} \quad F(x^{**}) > F(x^*) \qquad (1.19)$$

ეს კი ერთდროულად შეუძლებელია შესრულდეს, ე.ი. $x^* = x^{**}$.

ვეიერშტრასის თეორემა. (გლობალური მაქსიმუმის არსებობის შესახებ).

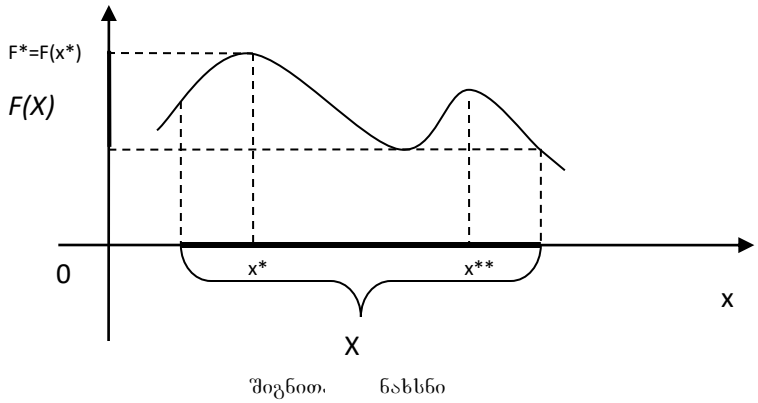
თუ დასაშვები სიმრავლე X არაცარიელია, მაშინ უწყვეტი $F(x)$ მიზნის ფუნქცია, განსაზღვრული X სიმრავლეზე, აღწევს გლობალურ მაქსიმუმს X-ის შიგა წერტილში ან X-ის საზღვრის წერტილზე.

დამტკიცება. ამ თეორემის დამტკიცება გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ კომპაქტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის სახე (ანუ მნიშვნელობათა სიმრავლე) ასევე კომპაქტურია. მაშინ გვაქვს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$F(X)=\{z\in E\,|\,z=F(x),\forall x\in X\} \qquad (1.20)$$

ამასთან ერთად $F(x)$ კომპაქტური სიმრავლეა. ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ კომპაქტურ სიმრავლეს აქვს ზუსტი როგორც ზედა ასევე ქვედა საზღვარი. ამრიგად, თუ F^* არის $F(x)$-ის ზედა საზღვარი, მაშინ არსებობს $x^*\in X$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $F(x^*)=F^*$ და რადგან $F(x)<F(x^*),\ \forall x\in X$, მაშინ x^* წერტილი არის გლობალური მაქსიმუმის წერტილი.

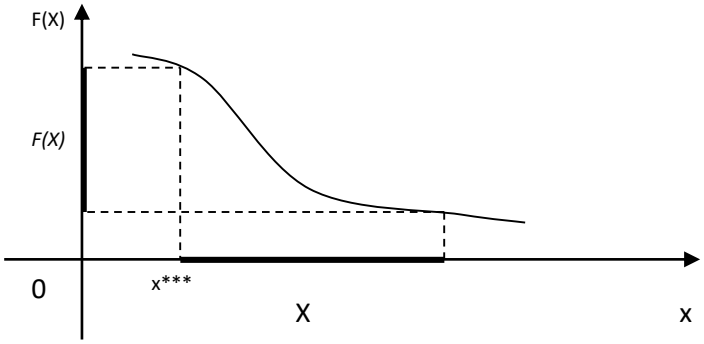
მოვიყვანოთ ვეიერშტრასის თეორემის გეომეტრიული ილუსტრაცია, როდესაც გვაქვს E^1 ერთგანზომილებიანი სივრცე. ანუ ნამდვილ რიცხვთა ღერძი.



შიგნით ნახსნი

ნახ. 1.1

ან შესაძლებელია ამონახსნი იმყოფებოდეს საზღვარზე:



საზღვარზე ამონახსნი

ნახ. 1.2

ორივე ნახაზზე X სიმრავლე არის ჩაკეტილი ინტერვალი და შესაბამისად

$F(X)$-იც ჩაკეტილი ინტერვალია.

პირველ ნახაზზე x^* არის არა მკაცრი გლობალური მაქსიმუმის წერტილი და x^* არის X-ის შიგა წერტილი. მეორე ნახაზზე x^{***} არის X-ის სასაზღვრო წერტილი და წარმოადგენს მკაცრი გლობალური მაქსიმუმის წერტილს.

თუ განვიხილავთ $F(x)=x^2$ მიზნის ფუნქციას, სადაც $x\geq 0$ (ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე) და გვინდა მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმის პოვნა, მაშინ ამ ამოცანას ამოხსნა არ ექნება, რადგან დასაშვებ მნიშვნელობათა X სიმრავლე არ არის შემოსაზღვრული მარჯვნიდან.

კიდევ ერთი მაგალითი, როდესაც ამოცანას ამოხსნა არა აქვს, რადგან დასაშვებ მნიშვნელობათა X სიმრავლე არ არის კომპაქტი: $F(x)=10x$ იმ პირობით, რომ $0\leq x<1$. ამ შემთხვევაშიც $10x$-ის მაქსიმუმი არ არსებობს, რადგან $x=1$

წერტილი არ ეკუთვნის დასაშვებ მნიშვნელობათა $0\leq x<1$ სიმრავლეს.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ვეიერშტრასის თეორემის პირობები წარმოადგენს საკმარის და არა აუცილებელ პირობებს. მაგალითად: $F(x)=x^3\to\max$ იმ პირობით, რომ $0<x\leq 1$. მიუხედავად იმისა, რომ $0<x\leq 1$ არ არის კომპაქტი, მაგრამ $x=1$ არის მაქსიმუმის წერტილი და რადგან ის ეკუთვნის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს ამიტომ ეს ამოცანა ამოხსნადია,.

სამართი (ინსტრუმენტული) ცვლადების x^* წერტილი არის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, თუ იგი ეკუთვნის დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეს და მასში მიზნის ფუნქციის მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი ამ წერტილის რაიმე მცირე შუალედის ნებისმიერი წერტილში გამოთვლილ მნიშვნელობაზე.

$x^* \in X$ არის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი თუ

$$F(x^*) \geq F(x), \ \forall x \in X \cap N_\varepsilon(x^*) \qquad (1.21)$$

სადაც $N_\varepsilon(x*)$ არის $x*$ ვექტორის ε მიდამო, რომელიც E^n ევკლიდეს n-განზომილებიან სივრცეში ასე განიმარტება:

$$|x - x*| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x*_i)^2} \leq \varepsilon \qquad (1.22)$$

ε-რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

ლოკალური მაქსიმუმის $x*$ წერტილს ეწოდება მკაცრი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$F(x^*) > F(x), \ \forall x \in X \cap N_\varepsilon(x^*), \ \ x = x^*, \qquad (123)$$

ცხადია, რომ ყოველი გლობალური მაქსიმუმის წერტილი წარმოადგენს აგრეთვე ლოკალური მაქსიმუმის წერტილს, ხოლო პირიქით არ არის სამართლიანი.

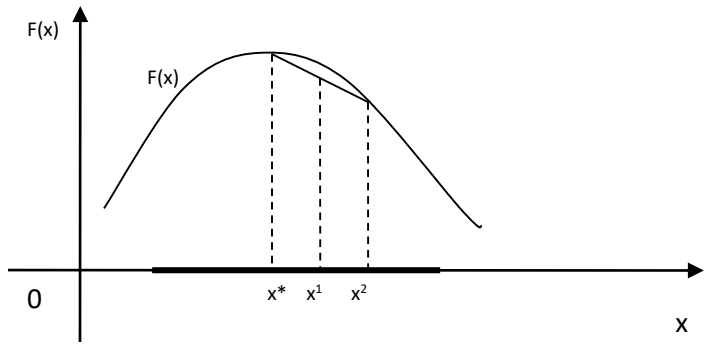
მეორე ძირითადი (ლოკალურ-გლობალური)__თეორემა. ეს თეორემა გვაძლევს საკმარის პირობებს იმისა, რომ ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი არის აგრეთვე გლობალური მაქსიმუმის წერტილი.

თეორემა. ვთქვათ დასაშვები სიმრავლე X არაცარიელია, კომპაქტურია და ამოზნექილია, ხოლო მიზნის ფუნქცია $F(x)$ არის უწყვეტი და ამოზნექილი X-ზე. მაშინ:

1) ლოკალური მაქსიმუმი არის გლობალურიც;
2) იმ წერტილების სიმრავლე, რომელზედაც მიიღწევა მაქსიმუმი ამოზნექილია;

თუ დავუშვებთ, რომ $F(x)$ მკაცრად ამოზნექილია, მაშინ ამონახსნი ერთადერთია, ე.ი. არსებობს ერთადერთი

გლობალური მაქსიმუმი, ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი ნახაზი:



ნახ. 1.3

x^*-ის მარჯვნივ მდებარე არცერთი წერტილი არ შეიძლება იყოს გლობალური მაქსიმუმის წერტილი, რადგან თუ შევაერთებთ x^* და x^2 წერტილებს, მაშინ მათ შორის არსებობს ისეთი x^1 წერტილი, რომ $F(x^1) > F(x^2)$

1.7. გეომეტრიული კომენტარები

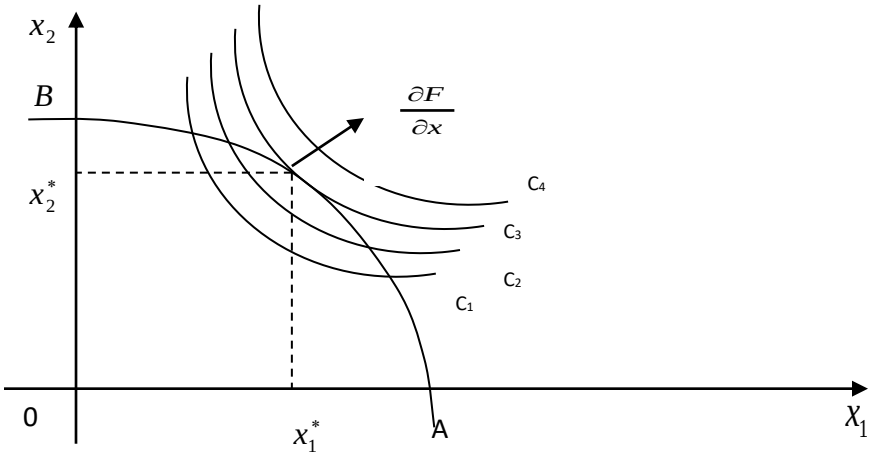
$n=1$ შემთხვევაში გეომეტრიული ილუსტრაციები მოცემულია პირველ და მეორე ნახაზზე.

განვიხილოთ $n=2$ შემთვევა. ამ შემთხვევაში განისაზღვრება დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე, ხოლო $F(x)$ მიზნის ფუნქცია განისაზღვრება როგორც დონეთა ხაზები და მიეთითება უსწრაფესი ზრდის მიმართულება.

მიზნის ფუნქციის დონეთა ზედაპირები (ხაზები) ეწოდება E^n სივრცის ისეთ წერტილებს, რომელთათვისაც $F(x)$ფუნქციის მნიშვნელობები ერთი და იგივეა ე.ი.

$$\left\{x \in E^n \mid F(x) = Const\ \right\} \qquad (1.24)$$

რა თქმა უნდა სხვადასხვა მუდმივები წარმოქმნიან სხვადასხვა ზედაპირებს. თუ ვცვლით მუდმივების მნიშვნელობებს მივიღებთ ზედაპირთა დონეების სიმრავლეს ანუ ზედაპირთა დონეების რუქას:

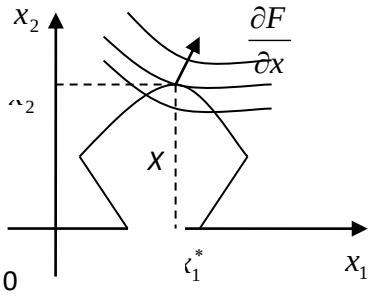


ნახ. 1.4

ნახაზ 1.4-ზე OAB არე წარმოადგენს დასაშვებ მნიშვნელობათა არეს. რაც შეეხება უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას ის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

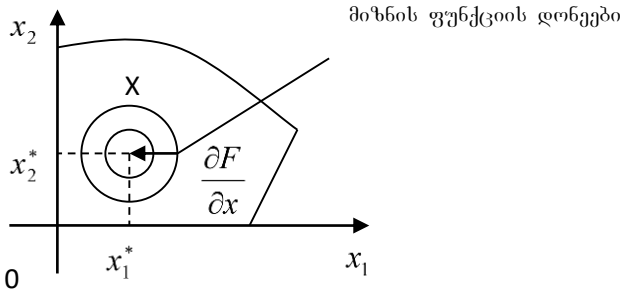
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)\right) \qquad (1.25)$$

ამ ვექტორს უწოდებენ გრადიენტის ვექტორს და გვიჩვენებს $F(x)$-ის მიზნის ფუნქციის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას.



ნახ.1.5

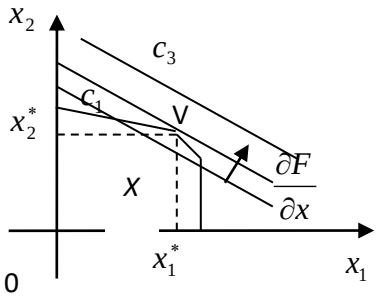
ამ შემთხვევაში მაქსიმუმი მიიღწევა X-ის საზღვარზე



ნახ. 1.6

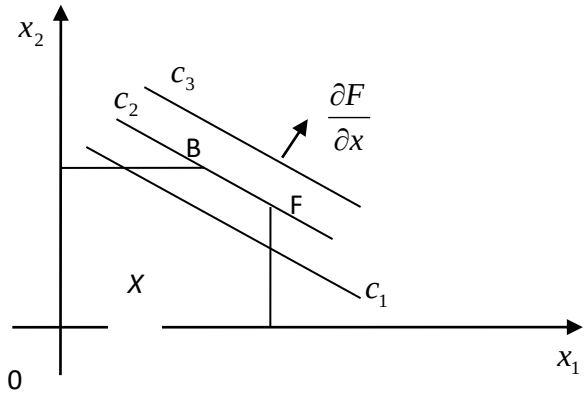
ამ შემთხვევაში მაქსიმუმი მიიღწევა X-ის შიგა წერტილში.

წრფივი პროგრამირების შემთხვევაში გვექნება შემდეგი ილუსტრაციები:



ნახ. 1.7

აქ მაქსიმუმი მიიღწევა ერთ (x_1^*, x_2^*) წერილში.



ნახ. 1.8

აქ მაქსიმუმი მიიღწევა BF მთლიანი მონაკვეთის ნებისმიერ წერტილში.

1.8. მათემატიკური პროგრამირების კლასიკური ამოცანა

საჭიროა ვიპოვოთ

$$\max_{x} F(x) \qquad (1.26)$$

იმ პირობით, რომ

$$g(x) = b \qquad (1.27)$$

ან გაშლილი სახით:

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.28)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = b_m \end{cases} \qquad (1.29)$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ -წარმოადგენენ სამართ ანუ ინსტრუმენტალურ ცვლადებს.

$F(\cdot)$-მიზნის ფუნქციაა, $g = (g_1(.), g_2(.), \ldots, g_m(.))^T$ - შეზღუდვების ფუნქციებია; $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ -შეზღუდვების მუდმივებია.

ვთქვათ n და m სასრული რიცხვებია და $n > m$. $n - m$ სხვაობას უწოდებენ ამოცანის თავისუფლების ხარისხს. დავუშვათ, რომ $F(.), g_1(.), g_2(.), \ldots, g_m(.)$ ფუნქციები მოცემული უწყვეტი ფუნქციებია, არ შეიცავენ შემთხვევით წევრს და აკმაყოფილებენ

შესაბამის შეზღუდვებს. x-ვექტორის კომპონენტები ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ცხადია, რომ $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i$, $i = \overline{1,m}$ განტოლებით, n-განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში, განისაზღვრება რაიმე m ცალი სხვადასხვა სიმრავლე, რომელთა თანაკვეთით მიიღება დასაშვები სიმრავლე

$$X = \{x \in E^n \mid g(x) = b\} \qquad (1.30)$$

$F(\cdot)$ ფუნქციების საშუალებით განისაზღვრებიან დონეთა ზედაპირები n განზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში და მათი სწრაფი ზრდის მიმართულებები.

საჭიროა დასაშვებ სიმრავლეში მოიძებნოს ისეთი წერტილი ან წერტილთა სიმრავლე, რომელიც $F(\cdot)$ ფუნქციონალს მიანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას ანუ დონეთა ზედაპირს ექნება ყველაზე დიდი მნიშვნელობა. ეს ამოცანა ამოხსნადია, რადგან $F(\cdot)$-უწყვეტია, დასაშვები სიმრავლე კომპაქტია და ვეიერშტრასის თეორემის თანახმად არსებობს ამონახსნი.

1.9. ოპტიმიზაციის ამოცანები შეზღუდვების გარეშე

ვთქვათ $m = 1$ და $n = 1$, მაშინ გვაქვს ერთი არგუმენტის სკალარული ფუნქცია $F(x)$, რომლის მაქსიმუმიც გვაინტერესებს. თუ ასეთ ამოცანაში შიდა ლოკალური მაქსიმუმი მიიღწევა x^* წერტილში, მაშინ განმარტების თანახმად ნებისმიერი Δx რაგინდ მცირე ნაზრდისთვის x^* წერტილის მახლობლობაში სრულდება უტოლობა:

$$F(x^*) \geq F(x^* + \Delta x) \qquad (1.31)$$

ვთქვათ, $F(x)$-ს გააჩნია უწყვეტი და სასრული პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები, მაშინ x^* წერტილის მიდამოში $F(x^*+\Delta x)$ შეგვიძლია გავშალოთ ტეილორის მწკრივში:

$$F(x^* + \Delta x) = F(x^*) + \frac{dF}{dx}(x^*)\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2F}{dx^2}(x^* + \Delta x\Theta)(\Delta x)^2, \ 0 < \Theta < 1, \qquad (1.32)$$

თუ მიღებულ გაშლას ჩავსვავთ წინა უტოლობაში მივიღებთ:

$$\frac{dF}{dx}(x^*)\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2F}{dx^2}(x^* + \Theta\Delta x)(\Delta x)^2 \leq 0 \qquad (1.33)$$

ეს უნდა სრულდებოდეს ნებისმიერი რაგინდ მცირე Δx-თვის.

თუ $\Delta x > 0$, მაშინ მიღებული უტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ Δx-ზე და გადავალთ რა ზღვარზე, როდესაც $\Delta x \to 0$, მივიღებთ:

$$\frac{dF}{dx}(x^*) \leq 0 \qquad (1.34)$$

ანალოგიური მსჯელობა იმ შემთხვევაში, როდესაც $\Delta x < 0$, გვაძლევს შემდეგ უტოლობას:

$$\frac{dF}{dx}(x^*) \geq 0 \qquad (1.35)$$

ამ ორი უტოლობიდან კი ვღებულობთ ექსტრემუმის (ამ შემთხვევაში მაქსიმუმის) არსებობის პირველი რიგის აუცილებელ პირობას:

$$\frac{dF}{dx}(x^*) = 0 \qquad (1.36)$$

თუ შესრულებულია პირველი რიგის პირობა, მაშინ ძირითადი უტოლობიდან ვღებულობთ $((\Delta x)^2 > 0)$:

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x^* + \Theta\Delta x) \le 0 \qquad (1.37)$$

რადგან ეს უტოლობა სრულდება ნებისმიერი Δx-თვის და რადგან F-ის მეორე რიგის წარმოებული უწყვეტია, გვექნება:

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x^*) \le 0 \qquad (1.38)$$

ე.ი. ლოკალური მაქსიმუმის წერტილში მეორე რიგის წარმოებული უარყოფითია ან ნულია.

ამრიგად, მივიღეთ x^* წერტილში ლოკალური მაქსიმუმის არსებობის პირველი და მეორე რიგის აუცილებელი პირობები.

x^* წერტილში მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმის არსებობის საკმარის პირობას წარმოადგენს შემდეგი:

$$\frac{dF}{dx}(x^*) = 0 \quad \text{და} \quad \frac{d^2F}{dx^2} < 0 \qquad (1.39)$$

დავამტკიცოთ ამ პირობის საკმარისობა. ეს ნიშნავს, რომ ამ ორი პირობიდან უნდა მივიღოთ

$$F(x^*) > F(x^* + \Delta x) \qquad (1.40)$$

მართლაც საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$F(x^* + \Delta x) = F(x^*) + \frac{dF}{dx}(x^* + \Theta\Delta x)\Delta x, \qquad (1.41)$$

სადაც $0 < \Theta < 1$.

$F(x)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია, ხოლო მისი პირველი რიგის წარმოებული ტოლია ნულის. თუ $\Delta x > 0$, მაშინ

$$\frac{dF}{dx}\left(x^* + \Theta\Delta x\right) < 0 \qquad (1.42)$$

ხოლო თუ $\Delta x < 0$, მაშინ

$$\frac{dF}{dx}\left(x^* + \Theta\Delta x\right) > 0 \qquad (1.43)$$

ნებისმიერ Δx-ის შემთხვევაში

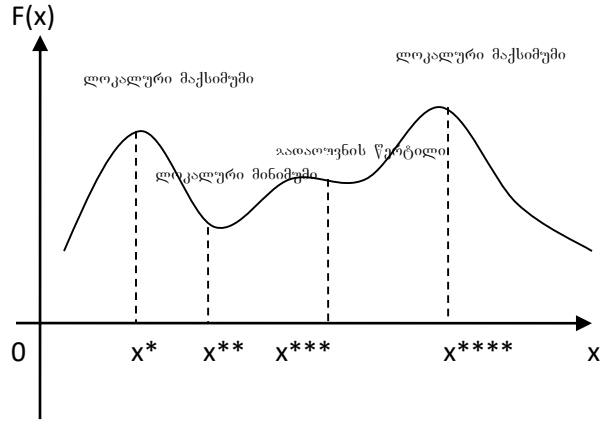
$$\Delta x \cdot \frac{dF}{dx}\left(x^* + \Theta\Delta x\right) < 0 \qquad (1.44)$$

მაშინ (2.15) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$F\left(x^* + \Delta x\right) < F\left(x^*\right) \qquad (1.45)$$

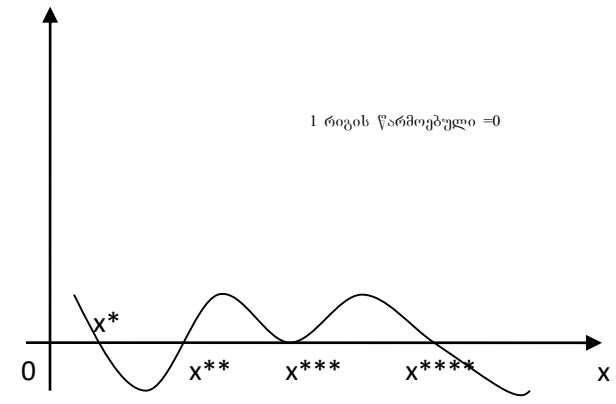
რ.დ.გ.

მოვიყვანოთ საილუსტრაციო მაგალითები ნახაზების სახით:



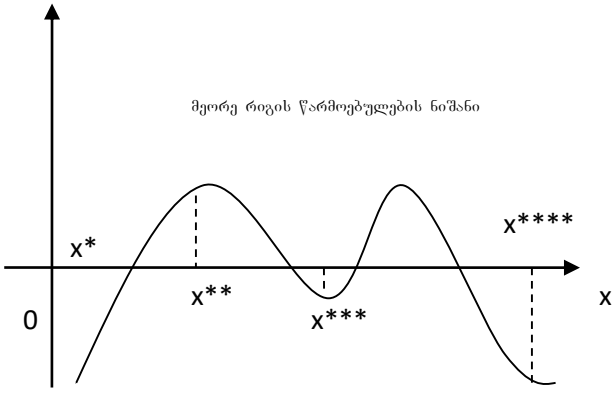
ნახ. 1.9

$\frac{dF}{dx}(x)$



ნახ. 1.10

$\frac{d^2F}{dx^2}(x)$



ნახ. 1.11

ვთქვათ $m=0$, $n>1$, მაშინ გვაქვს მრავალი ცვლადის ფუნქცია. გვინდა ვიპოვოთ მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმი შეზღუდვების გარეშე:

$$\max_{x} F(x) \qquad (1.46)$$

ანუ

$$\max_{x_1, x_2, ..., x_n} F(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1.47)$$

ვთქვათ ლოკალური მაქსიმუმი მიიღწევა $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ წერტილში ე.ი.

$$F(x^*) \geq F(x^* + h\Delta x) \qquad (1.48)$$

ანუ

$$F(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \geq F(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2, ..., x_n^* + h\Delta x_n) \qquad (1.49)$$

სადაც $h > 0$ ნებისმიერი მცირე რიცხვია, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)^T$.

გავშალოთ $F(x^* + h\Delta x)$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივში $h = 0$ წერტილში (ამ შემთხვევაში F-ის განვიხილავთ, როგორც h-ის ფუნქციას.

გვაქვს:

$$F(x^* + h\Delta x) = F(x^*) + h\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)\Delta x + \frac{1}{2!}h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^* + \Theta h\Delta x)\Delta' x\Delta x \qquad (1.50)$$

სადაც $0 < \Theta < 1$. $\frac{\partial F}{\partial x}$ არის F ფუნქციის გრადიენტი და ასე გამოითვლება:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x), ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \right) \qquad (1.51)$$

ხოლო $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ მატრიცა, რომელსაც ჰესის მატრიცა ეწოდება ასე გამოითვლება:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x), \ldots, \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(x) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x), \ldots, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x), \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(x), \ldots, \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \qquad (1.52)$$

ამოვწეროთ (1.50) გაშლილი სახით:

$$F\left(x_1^* + h\Delta x_1, x_2^* + h\Delta x_2, \ldots, x_n^* + h\Delta x_n\right) = F\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right) + h\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)\Delta x_j$$

$$+ \frac{1}{2}h^2 \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(x_1^* + \Theta h\Delta x_1, x_2^* + \Theta h\Delta x_2, \ldots, x_n^* + \Theta h\Delta x_n)\Delta x_j \Delta x_k, \qquad (1.53)$$

თუ (1.50)-ს ჩავსვავთ (1.48)-ში, მივიღებთ:

$$h\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*\right)\Delta x + \frac{1}{2}h^2(\Delta x)'\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(x^* + \Theta h\Delta x\right)(\Delta x) \le 0 \qquad (1.54)$$

უტოლობა (1.54) უნდა შესრულდეს ნებისმიერი $h > 0$ რაგინდ მცირე რიცხვისთვის და Δx-ის ყველა მიმართულებით. თუ (1.54)-ის ორივე მხარეს გავყოფთ h-ზე და გადავალთ ზღვარზე როდესაც $h \to 0$ მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^*\right) = 0 \qquad (1.55)$$

იმ წერტილს, რომელშიც ყველა პირველი რიგის წარმოებული ნულის ტოლია, ეწოდება სტაციონალური წერტილი. ე.ი. ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი ყოველთვის არის სტაციონალური წერტილი. თუ შესრულებულია პირველი

რიგის პირობა, მაშინ (1.54)-დან მიიღება მაქსიმუმის არსებობის მეორე რიგის აუცილებელი პირობა:

$$(\Delta x)^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*)\Delta x \le 0 \qquad (1.56)$$

(1.56) სრულდება ყველა Δx-თვის. ამრიგად, იმისათვის რომ x^* იყოს $F(x)$ ფუნქციის მკაცრი ლოკალური მაქსიმუმი აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*) = 0 \qquad (1.57)$$

$$(\Delta x)^T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*)(\Delta x) < 0 \qquad (1.58)$$

და შესრულდება პირობა

$$F(x^*) > F(x^* + \Delta x) \qquad (1.59)$$

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როდესაც $m=0$, $n=2$. გვაქვს

$$\max_{x_1, x_2} F(x_1, x_2); \qquad x^* = (x_1^*, x_2^*) \qquad (1.60)$$

ჯერ მოვითხოვოთ სტაციონარობის პირობის შესრულება

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^*) = 0, \qquad (1.61)$$

რაც შეეხება მეორე რიგის პირობას, (ჰესის მატრიცის უარყოფითად განსაზღვრულობას) ის ასეთ სახეს ღებულობს:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^*) < 0, \qquad (1.62)$$

და

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^*) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x^*) \end{vmatrix} > 0 \qquad (1.63)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ x^* სტაციონალურ წერტილში სრულდება პირობა

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^*) > 0, \qquad (1.64)$$

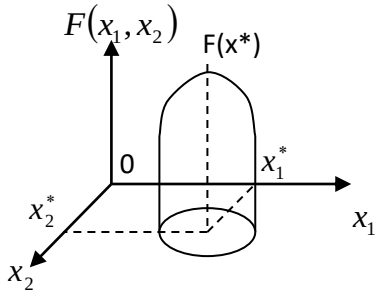
და ამასთან ერთად სრულდება (1.63), მაშინ x^* არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი. თუ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^*) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x^*) \end{vmatrix} < 0$$

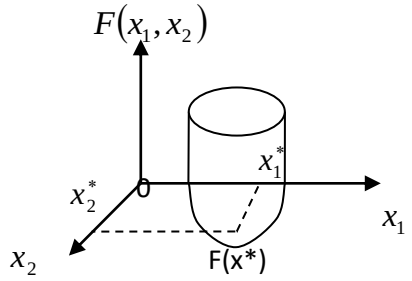
მაშინ $F(x_1, x_2)$ ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი, ხოლო თუ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^*) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x^*) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x^*) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x^*) \end{vmatrix} = 0$$

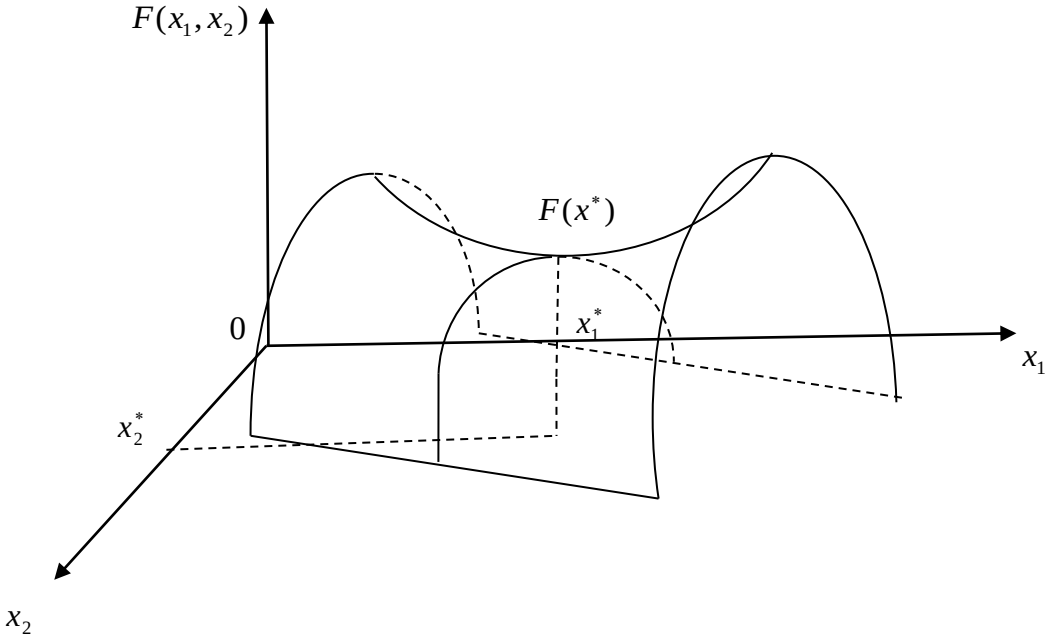
მაშინ გვაქვს საეჭვო შემთხვევა და საჭიროა დამატებითი გამოკვლევები. მოვიყვანოთ სამივე ტიპის სტაციონალური წერტილის გეომეტრიული წარმოდგენა:



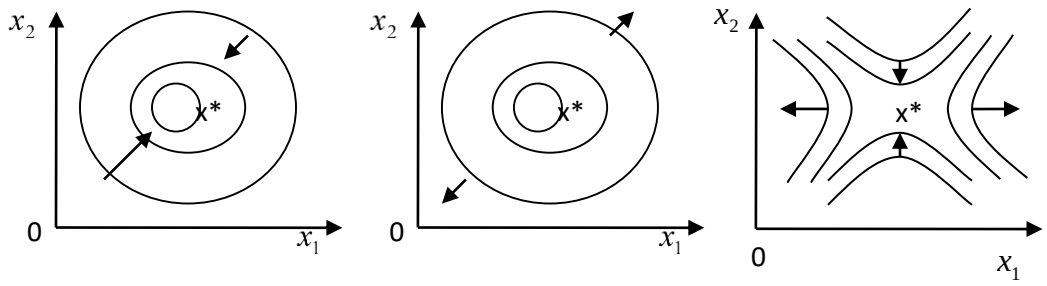
(x_1^*, x_2^*) არის მაქსიმუმის წერტილი.



(x_1^*, x_2^*) არის მინიმუმის წერტილი.



ამ ნახაზზე გვაქვს ის შემთხვევა, როდესაც ფუნქციას x_1-ის მიმართ აქვს მინიმუმი, ხოლო x_2-ის მიმართ აქვს მაქსიმუმი.



1.10. პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა. ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი.

დასაწყისში განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როდესაც $n=2$, $m=1$:

ვიპოვოთ

$$\max_{x_1,x_2} F(x_1,x_2) \qquad (1.65)$$

იმ პირობით, რომ

$$g(x_1,x_2)=b.$$

დავუშვათ, რომ $x^*=(x_1^*,x_2^*)$ წერტილში არსებობს ამოცანის ლოკალური ამონახსნი და ამ წერტილში ერთ-ერთი ცვლადის მიმართ g-ფუნქციის კერძო წარმოებული $\neq 0$. დავუშვათ

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(x^*)\neq 0 \qquad (1.66)$$

მაშინ სრული დიფერენციალის გამოსახულება იქნება:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad ; \text{ რადგან } \quad db = 0 \qquad (1.67)$$

ეს გამოსახულება x^* წერტილის მიდამოში შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \qquad (1.68)$$

თუ ამოვხსნით მიღებულ დიფერენციალურ განტოლებას, მივიღებთ:

$$x_2 = h(x_1), \text{ სადაც } \frac{dh(x_1)}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \qquad (1.69)$$

თუ x_2-ის ამ გამოსახულებას ჩავსვავთ (1.65)-ში, მივიღეთ უპირობო ექსტრემუმის ამოცანას:

$$\max_{x_1} H(x_1) = \max_{x_1} F(x_1, h(x_1)) \qquad (1.70)$$

როგორც ვიცით ამ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის არსებობის პირველი რიგის პირობაა

$$\frac{dH}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{dh(x_1)}{dx_1} = 0 \qquad (1.71)$$

თუ გამოვიყენებთ (1.69) ტოლობას, მივიღებთ:

$$\frac{dH}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\left(- \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \right) = 0 \quad ;$$

ნუ

$$\frac{dH}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \qquad (1.72)$$

მსგავსი მსჯელობით მივიღებთ, რომ

$$\frac{dH}{dx_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0; \qquad (1.73)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\lambda = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_1}} \quad ; \qquad (1.74)$$

მივიღებთ ლოკალური მაქსიმუმის აუცილებელ პირობას:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad j = 1.2; \qquad (1.75)$$

(1.74) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \qquad (1.76)$$

მოვიყვანოთ მიღებული შედეგის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია:

$F(x_1, x_2) = Const$ არის მიზნის ფუნქციის დონეების განმსაზღვრელი ფუნქცია. ცხადია

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 = 0 \qquad (1.77)$$

ანუ დონის ხაზის მიმართ

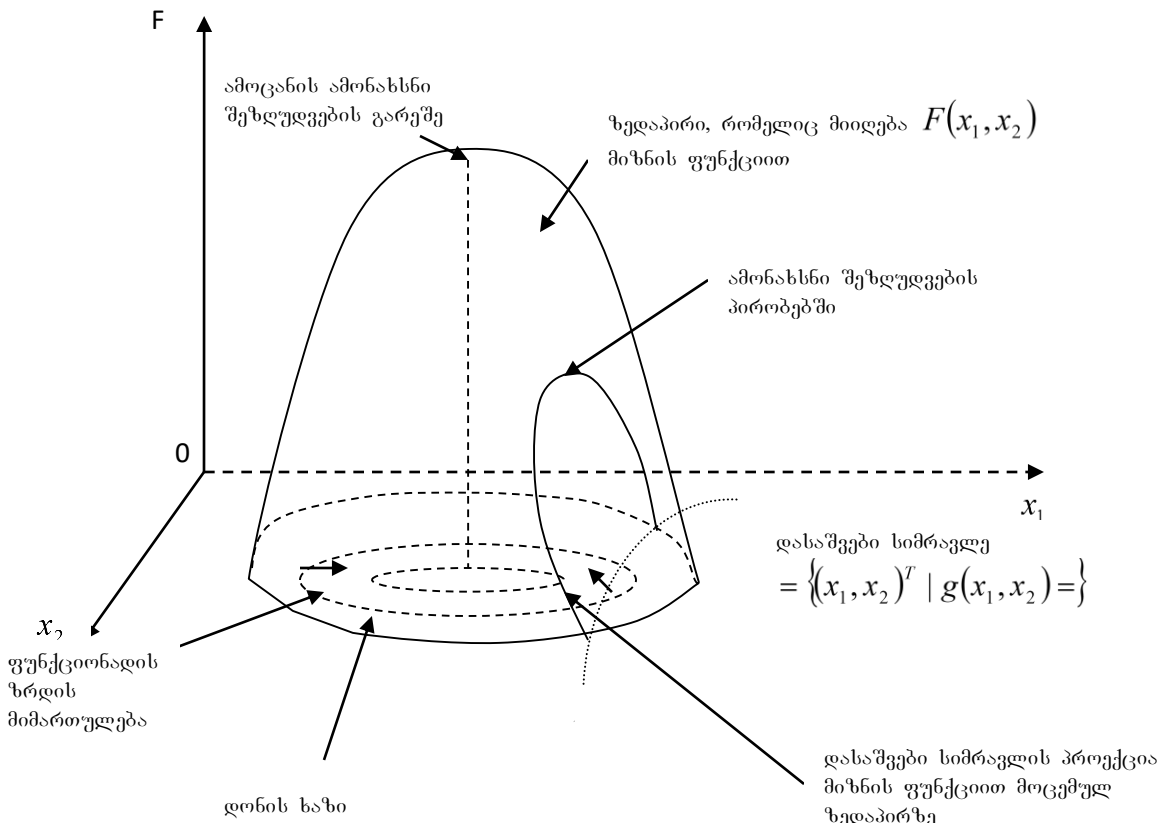
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_2}} \qquad (1.78)$$

მეორეს მხრივ (1.68) შეზღუდვიდან გვაქვს:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \qquad (1.79)$$

ამრიგად პირველი რიგის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ მაქსიმუმი მიიღწევა დონის ხაზის და შეზღუდვის მრუდის შეხების წერტილში. ანუ იქ სადაც კუთხური კოეფიციენტები ამ მრუდეების მხები წრფეებისა ერთმანეთის ტოლია:

$$\frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{დონის ხაზის}} = \frac{dx_2}{dx_1}\Big|_{\text{შეზღუდვის მრუდი}} \qquad (1.80)$$



შევნიშნოთ, რომ (1.71) აუცილებელი პირობა (ექსტრემუმის) და საწყისი შეზღუდვა შეგვეძლო მიგვეღო, როგორც შემდეგი ფუნქციის სტაციონარობის პირობა:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = F(x_1, x_2) + \lambda(b - g(x_1, x_2)) \qquad (1.81)$$

L ფუნქციისთვის სტაციონარობის პირობა ნიშნავს:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial F}{\partial x_2} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \qquad (1.82)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x_1, x_2) = 0 \qquad (1.83)$$

λ ცვლადს უწოდებენ ლაგრანჟის თანამამრავლს, ხოლო $L(x_1, x_2, \lambda)$ ფუნქციას – ლაგრანჟის ფუნქციას (ლაგრანჟიანს).

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$**:**

ვიპოვოთ

$$\max_{x_1, x_2, ..., x_n} F(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1.84)$$

იმ პირობით, რომ

$g(x_1, x_2, ..., x_n) = b$. სადაც $g = (g_1, g_2, ..., g_m)$

ვთქვათ ამოცანის ლოკალური ამონახსნია $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ წერტილში და შეზღუდვების ფუნქციები აკმაყოფილებენ იაკობის პირობას, ე.ი. x^* წერტილში $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულებისაგან შედგენილი მატრიცის (იაკობის მატრიცის ანუ იაკობიანის) რანგი ტოლია m-ის ანუ ემთხვევა მატრიცის სტრიქონების რაოდენობას:

$$rank\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\right) = rank\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x^*) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x^*) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(x^*) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(x^*) & ... & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} = m \qquad (1.85)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ვექტორი დავალაგოთ ისე, რომ $x = (x^1, x^2)$, სადაც x^1 არის $n-m$ ცალი ცვლადების ვექტორი, ხოლო x^2 - m ცვლადების ვექტორი, ეს

შესაძლებელია რადგან $n > m$. ამასთან $g = (g_1, g_2, ..., g_m)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ იაკობის პირობას ე.ი. $rank\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\right) = m$, ამიტომ

$$x^2 = h(x^1) \qquad (1.86)$$

სადაც h-არის ვექტორ-სვეტი, შედგენილი m რაოდენობა ფუნქციისგან. შესაბამისად $F(x) = F(x^1, x^2) = F(x^1, h(x^1))$ და მივიღებთ ოპტიმიზაციის ამოცანას შეზღუდვების გარეშე:

$$\max_{x^1} H(x^1) = \max_{x^1} F(x^1, h(x^1)) \qquad (1.87)$$

გვაქვს:

$$\frac{\partial H}{\partial x^1} = \frac{\partial F}{\partial x^1} + \frac{\partial F}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial x^1} = 0 \qquad (1.88)$$

სადაც

$\frac{\partial H}{\partial x^1} - (n-m)$ რაოდენობა ელემენტებიანი ვექტორ-სტრიქონია;

$\frac{\partial h}{\partial x^1} - m \times (n-m)$ განზომილების მატრიცა.

შეზღუდვები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$g(x^1, h(x^1)) = b \qquad (1.89)$$

ამ გამოსახულების დიფერენცირება მოგვცემს:

$$\frac{\partial g}{\partial x^1} + \frac{\partial g}{\partial x^2}\frac{\partial h}{\partial x^1} = 0 \qquad (1.90)$$

$\frac{\partial g}{\partial x^2}$ არის $m \times m$ განზომილების გადაუგვარებელი მატრიცა, ამიტომ გვექნება:

$$\frac{\partial h}{\partial x^1} = -\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^1} \qquad (1.91)$$

თუ (1.91)-ს გავითვალისწინებთ (1.88)-ში, მივიღებთ:

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} - \left(\frac{\partial F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x^1}\right) = 0 \qquad (1.92)$$

ცხადია, რომ სიმეტრიულობის გამო:

$$\frac{\partial F}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad (1.93)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \left(\frac{\partial F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial x^2}\right)^{-1} \qquad (1.94)$$

მაშინ (1.93) და (1.94) ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad (1.95)$$

ეს არის მაქსიმუმის არსებობის აუცილებელი პირობა.

თუ შევადგენთ ლაგრანჟის ფუნქციას

$$L(x, \lambda) = F(x) + \lambda(b - g(x)) \qquad (1.96)$$

ან გაშლილი სახით:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)); \qquad (1.97)$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$-უწოდებენ ლაგრანჟის თანამამრავლებს, ხოლო $L(x_1, x_2, ..., x_n; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$-ლაგრანჟის ფუნქციას. (1.97)-ის

გაწარმოებით და ნულთან გატოლებით მივიღებთ ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x}(x^*,\lambda^*)=\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)-\lambda^*\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)=0\\&\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*,\lambda^*)=b-g(x^*)=0\end{aligned}\qquad (1.98)$$

მიღებული სისტემის პირველი n განტოლება გვიჩვენებს, რომ მიზნის ფუნქციის გრადიენტი ტოლია ლაგრანჟის თანამამრავლებისაგან შედგენილ ვექტორს გამრავლებულს შეზღუდვების იაკობიანზე ე.ი.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)=\lambda^*\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\right) \qquad (1.99)$$

ანუ გაშლილი სახით:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)=\sum_{i-1}^{m}\lambda_i^*\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*),\ \ j=1,2,...,n, \qquad (1.200)$$

(1.98)-ის მეორე განტოლება არის m რაოდენობა შეზღუდვები:

$$g(x^*)=b \qquad (1.201)$$

თუ ამოვხსნით (1.98) განტოლებათა სისტემას, სადაც გვაქვს $m+n$ რაოდენობის განტოლება და ამდენივე უცნობი, მივიღებთ:

$$x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*) \qquad \text{და} \qquad \lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,...,\lambda_m^*).$$

გამოვიყვანოთ ლოკალური მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობა:

გვაქვს $m+n$ რაოდენობის (აუცილებელი) პირველი რიგის პირობები:

$$g(x)=b$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)=\lambda^*\frac{\partial g}{\partial x}(x^*) \qquad (1.202)$$

შეზღუდვებიდან ავიღოთ რომელიმე i-ური მრუდი:

$$\{x\in E^n \mid g_i(x)=b_i\ \} \qquad (1.202)$$

მაშინ ამ მრუდის გრადიენტ-ვექტორი იქნება:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x}=\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_1},\frac{\partial g_i}{\partial x_2},...,\frac{\partial g_i}{\partial x_n}\right) \qquad (1.203)$$

რომელიც წარმოადგენს იაკობის მატრიცის i-ურ სტრიქონს. ეს გრადიენტ-ვექტორი იქნება ამ მრუდის მხების ორთოგონალური.

$$dg_i(x)=\frac{\partial g_i}{\partial x}(x)dx=0, \qquad i=1,2,...,m \qquad (1.204)$$

ამრიგად (1.201) გვიჩვენებს, რომ $x^*\in X$ მდებარეობს დასაშვებ X სიმრავლეში და მიზნის ფუნქციის ზრდის მიმართულება x^* წერტილში (ანუ მიზნის ფუნქციის გრადიენტ ვექტორი) წარმოადგენს ლაგრანჟის თანამამრავლებისა და შეზღუდვების მრუდთა ნორმალების წრფივ კომბინაციას. ამ შემთხვევაში ლაგრანჟის თანამამრავლებს უწოდებენ წონის კოეფიციენტებს.

ლოკალური მაქსიმუმის მეორე რიგის აუცილებელი პირობაა ჰესის მატრიცის:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^{\,2}} \end{pmatrix} \qquad (1.205)$$

უარყოფითად განსაზღვრულობა ან ნახევრად განსაზღვრულობა (x^*,λ^*) წერტილში, ამასთან ერთად

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)dx=0 \qquad (1.206)$$

თუ ჰესის მატრიცა უარყოფითად განსაზღვრულია, მაშინ (1.201) პირობა წარმოადგენს აგრეთვე საკმარის პირობასაც.

(1.204)-ით მოცემული ჰესის მატრიცის უარყოფითად განსაზღვრულობა (1.205) შეზღუდვებით, შეიძლება წარმოვადგინოთ $n-m$ რაოდენობის პირობით, რომელიც დაედება $(m+n)\times(m+n)$ შემდეგი მატრიცის ზოგიერთ მინორებს. ასეთი განზომილების მატრიცის ბოლო $(n-m)$ მთავარი მინორების ნიშანი უნდა იცვლებოდეს თანმიმდევრობით, ამასთან პირველი მინორის ნიშანი ემთხვევა $(-1)^{m+1}$ გამოსახულების ნიშანს. რაც შეეხება $(m+n)\times(m+n)$ განზომილებიან მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{21}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \qquad (1.207)$$

1.11. ლაგრანჟის თანამამრავლების ეკონომიკური ინტერპრეტაცია.

ლოკალური მაქსიმუმის აუცილებელი (1.201) პირობიდან ანუ პირველი რიგის პირობიდან ამონახსნის სახით მივიღებთ x^* ინსტრუმენული ცვლადების ოპტიმალურ მნიშვნელობებს და აგრეთვე λ^* - ლაგრანჟის თანამამრავლების ოპტიმალურ მნიშვნელობებს. ლაგრანჟის თანამამრავლები, რომლებიც შეესაბამებიან ამოცანის ამოხსნას, ზომავენ $F^* = F(x^*)$ მიზნის ფუნქციის ოპტიმალური მნიშვნელობის მგძნობიარობას შეზღუდვათა b მუდმივების ცვლილებების მიმართ:

$$\lambda^* = \frac{\partial F^*}{\partial b} \qquad (1.208)$$

ანუ

$$\lambda_i^* = \frac{\partial F^*}{\partial b_i}, i = 1,2,...,m; \qquad (1.209)$$

მართლაც განვიხილოთ (1.201) განტოლებათა სისტემა, როგორც $m+n$ რაოდენობა განტოლებებისა $2m+n$ რაოდენობა (b, λ, x) უცნობებით $\left(b_i, i = \overline{1,m};\ \lambda_i, i = \overline{1,m};\ x_j, j = \overline{1,n}\right)$. თუ ჩავთვლით, რომ

$b=(b_1,b_2,...,b_m)^T$ ცვლადებია, მაშინ შემდეგ განტოლებათა სისტემიდან გამოვსახოთ $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ და $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ როგორც $b=(b_1,b_2,...,b_m)^T$ ცვლადების ფუნქციები. გვაქვს:

$$\begin{aligned}&\psi^1(b,\lambda,x)=b-g(x)=0\\&\psi^2(b,\lambda,x)=\frac{\partial F}{\partial x}(x)-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x)=0\end{aligned}\qquad(1.210)$$

ჩავწეროთ (1.210) სისტემის იაკობის მატრიცა:

$$\begin{pmatrix}I & 0 & -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\\0 & -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^T & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\end{pmatrix}\qquad(1.211)$$

I არის m განზომილებიანი ერთეულოვანი მატრიცა. იაკობის მატრიცის რანგი არის m, თუ (1.207) ჰესის მატრიცა აკმაყოფილებს შესაბამის პირობებს (საკმარისობის პირობებს), მაშინ შეგვიძლია (1.210) სისტემიდან λ და x გამოვსახოთ b ცვლადის საშუალებით:

$$\begin{aligned}&\lambda=\lambda(b)\\&x=x(b)\end{aligned}\qquad(1.212)$$

ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ ლაგრანჟის ფუნქციაში და განვიხილოთ ლაგრანჟის ფუნქცია, როგორც ერთი b ცვლადის ფუნქცია:

$$L(b)=F(x(b))+\lambda(b)(b-g(x(b)))\qquad(1.213)$$

$L(b)$-ს დიფერენცირება b-თი გვაძლევს:

$$\frac{\partial L}{\partial b}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\lambda-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+(b-g(x))^T\left(\frac{\partial \lambda}{\partial b}\right)^T=$$
$$=\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)+(b-g(x))^T\left(\frac{\partial \lambda}{\partial b}\right)^T+\lambda \qquad (1.214)$$

მიღებული გამოსახულების პირველი ორი წევრი x^*, λ^* მნიშვნელობებისთვის ტოლი არიან ნულის და გვაქვს:

$$\frac{\partial L}{\partial b}(x^*,\lambda^*)=\frac{\partial F^*}{\partial b}=\lambda^*$$

ეს ნიშნავს, რომ თუ რომელიმე $\lambda=0$, მაშინ მისი შესაბამისი b_i მუდმივის მცირე ცვლილება არ გამოიწვევს მიზნის ფუნქციის ოპტიმალურ მნიშვნელობის ცვლილებას. ეკონომიკურ ამოცანებში, როგორიცაა რესურსების განაწილების ამოცანა, მიზნის ფუნქცია იზომება ფასებში ანუ ფულად ერთეულებში ე.ი. ფასები გამრავლებული პროდუქციის მოცულობაზე, ხოლო შეზღუდვების საშუალებით ჩაწერილია ფასები, მაგალითად ნედლეულზე და ა.შ. რადგან ასეთ ამოცანებში ლაგრანჟის მამრავლები ზომავენ ისეთი სიდიდის მგრძნობელობას, რომელსაც აქვს ფასის განზომილება, ამიტომ λ-საც აქვს ფასის განზომილება. ამის გამო ლაგრანჟის მამრავლებს ხშირად უწოდებენ ჩრდილოვან ფასებს (მოცემული დანახარჯებისთვის).

1.12. არაწრფივი პროგრამირების ამოცანა.

საჭიროა ვიპოვოთ

$$\max_{x} F(x)$$

შემდეგ პირობებში

$$g(x) \le b$$
$$x \ge 0$$

ანუ

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1.215)$$

შემდეგ პირობებში:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_m \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots x_n \ge 0 \end{cases} \qquad (1.216)$$

დავუშვათ m და n სასრული რიცხვებია, ხოლო $F(\cdot), g_1(\cdot), \ldots, g_m(\cdot)$ უწყვეტად დიფერენცირებადი მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც არ შეიცავენ შემთხვევით წევრს.

<u>შენიშვნა:</u>

1) თუ ამოცანის (1.216) პირობაში გვაქვს ≥ სახის უტოლობა, მაშინ ის შეგვიძლია გადავაქციოთ ისეთ პირობად სადაც გვექნება ≤ უტოლობა. მაგალითად, თუ გვაქვს $x_1 - 2x_2 \ge 7$ და ამ უტოლობას გავამრავლებთ (–1)-ზე მივიღებთ $-x_1 + 2x_2 \le -7$;

2) თუ ამოცანაში გვაქვს ტოლობის სახის შეზღუდვა, მაშინ ის შეიძლება შევცვალოთ ორი უტოლობის სახის შეზღუდვით. მაგალითად, თუ გვაქვს $x_3 + 8x_7 = 12$, მაშინ ის შეიძლება შევცვალოთ ორი ერთდროული უტოლობით $x_3 + 8x_7 \le 12$ და $-x_3 - 8x_7 \le -12$;
3) თუ რომელიმე $x_i, i = \overline{1,n},$ ცვლადზე არ გვაქს ≥ 0 სახის შეზღუდვა ანუ ის შეიძლება იყოს ნებისმიერი, მაშინ ასეთ ცვლადს წარმოვადგენთ ორი ახალი ცვლადის სხვაობის სახით, რომელთაგან თვითოეულს უკვე ექნება ≥ 0 სახის შეზღუდვა. მაგალითად: ვთქვათ x_9 ღებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას: უარყოფითს, 0-ს ან დადებითს, მაშინ $x_9 = x_9' - x_9''$, სადაც $x_9' \ge 0$ და $x_9'' \ge 0$.

1.13. არაწრფივი პროგრამირების ამოცანა, როდესაც გვაქვს "ინსტრუმენტალური" ანუ სამართ ცვლადებზე არაუარყოფითობის შეზღუდვა.

ვთქვათ დასმულ ამოცანაში $m = 0$ ე.ი. გვაქვს:

$$\max_x F(x) \qquad (1.217)$$

იმ პირობით, რომ $x \ge 0$.

ვთქვათ, x^* არის (1.217) ამოცანის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი, მაშინ x^*-ის მახლობლობაში სრულდება უტოლობა:

$$F(x^*) \ge F(x^* + h\Delta x) \qquad (1.218)$$

სადაც Δx-გვიჩვენებს E^n-ში მიმართულებას, ხოლო h-რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია. ვთქვათ $F(x)$ ორჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა, მაშინ $F(x^* + h\Delta x)$ ფუნქცია

შეგვიძლია გავშალოთ ტეილორის მწკრივში x^* წერტილის მახლობლობაში:

$$F(x^*+h\Delta x)=F(x^*)+h\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)\Delta x+\frac{1}{2!}h^2(\Delta x)^T\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*+\Theta h\Delta x)\Delta x,\ 0<\Theta<1, \qquad (1.219),$$

თუ მიღებულ გაშლას ჩავსვავთ (1.218)-ში, მივიღებთ:

$$h\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)\Delta x+\frac{1}{2!}h^2(\Delta x)'\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x^*+\Theta h\Delta x)\Delta x\le 0, \qquad (1.220)$$

მიღებული უტოლობა (1.220) არის ლოკალური მაქსიმუმის აუცილებელი პირობა x^* წერტილში.

თუ $x^*>0$ ანუ x^* არის დასაშვები შუა წერტილი, მაშინ (4.6) უტოლობა სრულდება Δx-ის ყველა მიმართულებით, ამიტომ ასეთ წერტილში მაქსიმუმის აუცილებელი პირობა იქნება პირველი წარმოებულის ნულთან ტოლობა.

თუ x^* ვექტორის რომელიმე კოორდინატი ნულის ტოლია, ვთქვათ $x_j^*=0$ ე.ი. x^* საზღვრის წერტილია, მაშინ $\Delta x_j\ge 0$ ხოლო ყველა დანარჩენი კოორდინატებისთვის სრულდება $\Delta x_i=0, i=1,2,\dots,n,\ i\ne j$, მაშინ ძირითადი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)\Delta x_j\le 0 \qquad (1.221)$$

აქედან კი ვღებულობთ მაქსიმუმის აუცილებელ პირობას:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)\le 0,\ \text{თუ}\ x_j^*=0, \qquad (1.222)$$

მაშასადამე, ნებისმიერ შემთხვევაში x^* იქნება შიგა წერტილი თუ საზღვრის წერტილი, შემდეგი ნამრავლი იქნება ნულის ტოლი:

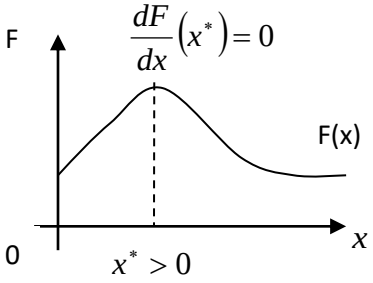
$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x^*)x_j^* = 0 \qquad (1.223)$$

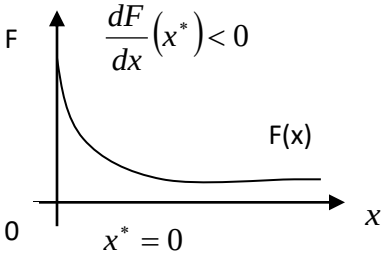
და ცხადია, რომ ამ ნამრავლების ჯამიც ნულის ტოლი იქნება:

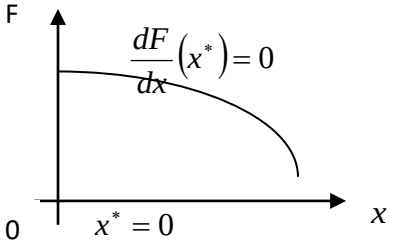
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)x^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(x^*)x_j^* = 0, \qquad (1.224)$$

ამრიგად x^* წერტილისთვის მივიღეთ ლოკალური მაქსიმუმის პირველი რიგის პირობა, რომელიც შედგება $2n+1$ პირობისაგან და აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x^*) \le 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x^*)x^* = 0, \\ x^* \ge 0; \end{cases} \qquad (1.225)$$







ე.ი.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x^*) = 0, & x_j^* > 0, \quad j = 1,2,...,n; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x^*) \le 0, & x_j^* = 0, \quad j = 1,2,...,n. \end{cases} \qquad (1.226)$$

1.14. კუნი-თაკერის პირობები.

მოცემული გვაქვს ამოცანა

$$\begin{aligned} &\max_x F(x) \\ &g(x) \le b \\ &x \ge 0 \end{aligned} \qquad (1.227)$$

იმისათვის, რომ უტოლობის ტიპის შეზღუდვები გადავაქციოთ ტოლობის სახის პირობებად, შემოვიღოთ m ცალი დამხმარე ცვლადები შემდეგი სახით:

$$S = b - g(x) = (S_1, S_2, ..., S_m)^T \qquad (1.228)$$

მივიღებთ შემდეგ ამოცანას:

$$\begin{aligned} &\max_{x,S} F(x) \\ &g(x) + S = b \\ &x \ge 0 \\ &S \ge 0 \end{aligned}$$

მიღებულ ამოცანაში, რომ არ გვქონდეს $x \ge 0$ და $S \ge 0$ შეზღუდვები გამოვიყენებდით ლაგრანჟის ფუნქციას

$$L = F(x) + \lambda(b - g(x) - S), \qquad (1.229)$$

სადაც $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$. როგორც ცნობილია ლაგრანჟის ფუნქციის მაქსიმუმის აუცილებელი პირობაა x-ით, λ-თი და S-ით L ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულების ნულთან ტოლობა. მაგრამ რადგან გვაქვს კიდევ შეზღუდვები $x \geq 0,\ S \geq 0,$ ამიტომ L ფუნქციისთვის უნდა გამოვიყენოთ (1.225) პირობები, რომლებიც შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x)}{\partial x} \leq 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} \cdot x = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g(x)}{\partial x} \right) \cdot x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x) - S = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial S} = -\lambda \leq 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial S} \cdot S = -\lambda S = 0, \\ x \geq 0,\ S \geq 0. \end{cases} \qquad (1.230)$$

თუ დავუშვებთ, რომ (x^*, λ^*, S^*) ლაგრანჟის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილია, მაშინ (1.230) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \lambda^* \dfrac{\partial g(x^*)}{\partial x} \leq 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} \cdot x^* = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x} - \lambda^* \dfrac{\partial g(x^*)}{\partial x} \right) \cdot x^* = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = b - g(x^*) - S^* = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial S} = -\lambda^* \leq 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial S} \cdot S^* = -\lambda^* S^* = 0, \\ x^* \geq 0,\ S^* \geq 0. \end{cases} \qquad (1.231)$$

თუ (1.231)-ში s-ს შევცვლით $b-g(x)$-ით მივიღებთ კუნი-თაკერის პირობებს:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}-\lambda^*\dfrac{\partial g}{\partial x}\le 0, \\ \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}-\lambda^*\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)x^*=0, \\ x^*\ge 0, \\ b^*-g\left(x^*\right)\ge 0, \\ \lambda^*\left(b^*-g\left(x^*\right)\right)=0, \\ \lambda^*\ge 0, \end{cases} \qquad (1.232)$$

თუ საწყისი (1.227) ამოცანისთვის შევადგენთ ლაგრანჟის ფუნქციას

$$L(x,\lambda)=F(x)+\lambda(b-g(x)), \qquad (1.233)$$

მაშინ კუნი-თაკერის პირობები ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}\left(x^*,\lambda^*\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(x^*\right)-\lambda^*\dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x^*\right)\le 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}\left(x^*,\lambda^*\right)x^*=\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(x^*\right)-\lambda^*\dfrac{\partial g}{\partial x}\left(x^*\right)\right)x^*=0 \\ x^*\ge 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\left(x^*,\lambda^*\right)=b-g\left(x^*\right)\ge 0 \\ \lambda^*\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\left(x^*,\lambda^*\right)=\lambda^*\left(b-g\left(x^*\right)\right)=0 \\ \lambda^*\ge 0 \end{cases} \qquad (1.234)$$

ეს პირობები წარმოადგენენ ლოკალური (მკაცრი) მაქსიმუმის არსებობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს, თუკი მიზნის ფუნქცია (მკაცრად) ჩაზნექილია, შეზღუდვათა ფუნქციები ამოზნექილებია და ამასთან ერთად სრულდება

გარკვეული რეგულარობის პირობები შეზღუდვების ფუნქციებზე.

(1.234) გაშლილი სახით წარმოადგენს $2m+2n+2$ რაოდენობის პირობას:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j} \le 0, \quad j = 1,2,...,n, \qquad (1.235)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) x_j = 0, \qquad (1.236)$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,2,...,n \qquad (1.237)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(\cdot) \ge 0, \qquad i = 1,2,...,m, \qquad (1.238)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - g_i(\cdot) \right) = 0, \qquad (1.239)$$

$$\lambda_i \ge 0, \qquad i = 1,2,...,m, \qquad (1.240)$$

ყველგან (1.235)-(1.240) განტოლებებში იგულისხმება რომ $(x, \lambda) = \left(x^*, \lambda^* \right)$.

შენიშვნა 1: (1.236) პირობაში იგულისხმება, რომ:

ან $\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n},$ ან $x_j = 0, \ j = \overline{1,n},$,

ან ორივე ერთდროულად უდრის ნულს

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1,n}, \quad \text{და} \quad x_j = 0, \ j = \overline{1,n},$$

შენიშვნა 2: ანალოგიურად (1.239) პირობაში იგულისხმება, რომ:

ან $\lambda_i = 0,\ i = \overline{1,m},$, ან $b_i - g_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,m},$

ან ორივე ერთდროულად უდრის ნულს

$\lambda_i = 0,\ i = \overline{1,m},$ და $b_i - g_i(x^*) = 0,\ i = \overline{1,m},$;

ამრიგად

$$\begin{cases} g_j(x^*) \le b_i, \\ \lambda_i^* \ge 0; \end{cases} \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

მაგრამ

$g_i(x^*) = b_i$, თუ $\lambda_i^* > 0,\ i = 1,2,\ldots,m,$

ან

$\lambda_i^* = 0$, თუ $g_i(x^*) < b_i,\ i = 1,2,\ldots,m,$

ასევე

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} \le 0, \\ x_j^* \ge 0, \end{cases}$$

მაგრამ

$\dfrac{\partial F}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0,$ თუ $x_j^* > 0,$

ან

$x_j^* = 0,$ თუ $\dfrac{\partial F}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} < 0,$

მივიღეთ პირობები, რომლებიც წარმოადგენენ კუნი-თაკერის პირობების სხვაგვარ ინტერპრეტაციას. მათ უწოდებენ დამატებითი არასიხისტის პირობებს ანუ დამატებითი არასიმკაცრის პირობებს. ცხადია

$$L(x^*,\lambda^*)=F(x^*)+\lambda^*(b-g(x^*))=F(x^*)$$

მოვიყვანოთ კუნი-თაკერის პირობების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია: განვიხილოთ კუნი-თაკერის პირობები. შემოვიღოთ დამატებითი ცვლადების მეორე ვექტორი:

$$r=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}=(r_1,r_2,...,r_n)$$

მაშინ კუნი-თაკერის პირობები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}-\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}+r=0\\ rx=0\\ r=0;x\le 0\\ b-g(S)-S=0\\ \lambda S=0\\ S\ge 0;\lambda\ge 0\end{cases}$$

ყველა ცვლადები და ფუნქციები გამოითვლებიან x^*,λ^*,r^* და S^* წერტილებში. პირველი n ცალი პირობა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)=\lambda^*\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)+r^*(-I)$$

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს, რომ x^* წერტილში მიზნის ფუნქციის გრადიენტი $\frac{\partial F}{\partial x}$ წარმოადგენს შემომსაზღვრელი ჰიპერსიბრტყეების გრადიენტების წრფივ კომბინაციას. შემომსაზღვრელი ჰიპერსიბრტყეების გრადიენტებს წარმოადგენენ $g_i(x),\ i=\overline{1,m},$ ფუნქციების კერძო

წარმოებულებისაგან შედგენილი $\frac{\partial g}{\partial x}$ იაკობის მატრიცის სტრიქონები, ხოლო არაუარყოფითობის პირობით მოცემული საზღვრის გრადიენტებს წარმოადგენენ $(-I)$ მატრიცის სტრიქონები, კოეფიციენტებს ამ გაშლაში წარმოადგენენ λ^* და r^*. ე.ი. თუ ამონახსნი მდებარეობს საზღვარზე, მაშინ უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას წარმოადგენს ზედაპირის ნორმალ-ვექტორების წრფივი კომბინაცია, აღებული არაუარყოფითი კოეფიციენტებით.

<u>მაგალითი:</u>

$$\max_{x_1,x_2} F(x_1,x_2) = \max_{x_1,x_2} F\left(-8x_1^2 - 10x_2^2 + 12x_1x_2 - 50x_1 + 80x_2\right)$$

შემდეგ პირობებში

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 8x_1^2 + x_2^2 \le 2 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

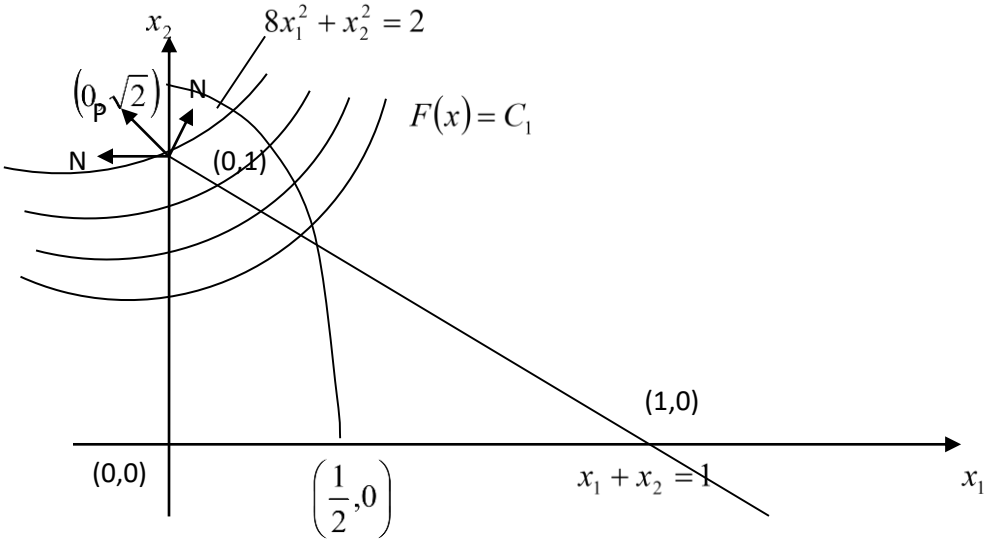
ავაგოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2) = -8x_1^2 - 10x_2^2 + 12x_1x_2 - 50x_1 + 80x_2 + \lambda_1(1 - x_1 - x_2) + \lambda_2\left(2 - 8x_1^2 - x_2^2\right)$$

კუნი-თაკერის პირობებიდან მივიღებთ:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -16x_1 + 12x_2 - 50 - \lambda_1 - 16\lambda_2 x_1 \le 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -20x_2 + 12x_1 + 80 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_2 \le 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} x_1 + \dfrac{\partial L}{\partial x_2} x_2 = \left(-16x_1 + 12x_2 - 50 - \lambda_1 - 16\lambda_2 x_1\right)x_1 + \\
\left(-20x_2 + 12x_1 + 80 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x_2\right)x_2 = 0 \\
x_1 \ge 0 \\
x_2 \ge 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - x_1 - x_2 \ge 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2 - 8x_1^2 - x_2^2 \ge 0 \\
\lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_1\left(1 - x_1 - x_2\right) + \lambda_2\left(2 - 8x_1^2 - x_2^2\right) = 0 \\
\lambda_1 \ge 0 \\
\lambda_2 \ge 0
\end{cases}
$$

პრაქტიკული თვალსაზრისით ამ პირობების გამოყენება არამოსახერხებელია.



შევამოწმოთ საზღვრითი წერტილები ოპტიმალურობაზე:

$(x_1, x_2) = (0,0)$ არ იქნება ოპტიმალური, რადგან ამ წერტილში $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,$ და $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 80 > 0$ არადა უნდა იყოს $\le 0.$

$(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ასევე არ აკმაყოფილებს პირობებს, რადგან $\lambda_1 = 0$ და $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 86 > 0$ მაგრამ უნდა იყოს $\le 0.$

განვიხილოთ $(x_1, x_2) = (0,1)$ წერტილი. გვაქვს:

$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0,1).$ გვექნება:

$$\begin{cases} 12 - 50 - \lambda_1 \le 0, & \Rightarrow \quad 12 - 50 - \lambda_1 \le 0, \\ -20 + 80 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0, & \Rightarrow \quad 60 - \lambda_1 - 2 \cdot 0 \le 0, \\ -20 + 80 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, & \Rightarrow \quad 60 - \lambda_1 = 0, \\ x_1 = 0; x_2 = 1, & \Rightarrow \quad \lambda_1 = 60, \\ 1 - 0 - 1 \ge 0, \\ 2 - 8 \cdot 0 - 1^2 \ge 0, \\ \lambda_1(1 - 0 - 1) + \lambda_2(2 - 8 \cdot 0 - 1^2) = 0, \\ \lambda_1 \ge 0, \\ \lambda_2 \ge 0, \end{cases}$$

$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0, \Rightarrow \lambda_2 = 0.$ ე.ი. $(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = (60;0)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, \lambda^*) = (12 - 50 - 60; 60 - 60) = (-98;0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = (1 - 1; 2 - 1) = (0;1)^T$$

$$F(x^*) = -8 \cdot 0 - 10 \cdot 1 + 12 \cdot 0 \cdot 1 - 50 \cdot 0 + 80 \cdot 1 = -10 + 80 = 70$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x^*), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x^*)\right) = (-16x_1^* + 12x_2^* - 50; -20x_2^* + 12x_1^* + 80) = (-38;60);$$

კუნი-თაკერის შემდეგი პირობებიდან:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*,\lambda^*)\le 0;\qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*,\lambda^*)\ge 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*,\lambda^*)\cdot x^*=0;\quad \lambda^*\cdot\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*,\lambda^*)=0;$$

$$x^*\ge 0,\lambda^*\ge 0;$$

სადაც

$$L(x,\lambda)=F(x)+\lambda(b-g(x)).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (x^*,λ^*) წერტილი წარმოადგენს $L(x,\lambda)$ ლაგრანჟის ფუნქციის უნაგირა წერტილს. ანუ $L(x^*,\lambda^*)$-არის მაქსიმუმი x ცვლადის მიმართ, ხოლო მინიმუმი λ-ს მიმართ:

$$L(x,\lambda^*)\le L(x^*,\lambda^*)\le L(x^*,\lambda),\qquad \forall\ x\ge 0,\ \lambda\ge 0.$$

Tavi II

dinamikuri programireba

2.1. დინამიკური პროგრამირების არსი. ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპი.

დინამიკური პროგრამირება წარმოადგენს ოპერაციათა კვლევის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან გამოყენებით დარგს. მისი ფუძემდებელია ამერიკელი მეცნიერი რიჩარდ ბელმანი, რომელიც მოღვაწეობდა XX საუკუნის 50-იან წლებში.

დინამიკური ამოცანებისათვის გადამწყვეტი მნიშვნელობა აქვს დროის ფაქტორს, რის გამოც ასეთი ამოცანების ამოხსნა ხდება ეტაპობრივად. დინამიკური პროგრამირების საშუალებით შეიძლება ეფექტურად ამოვხსნათ მათემატიკური პროგრამირების ზოგიერთი ამოცანა, რომელთა დაშლა შეიძლება შედარებით მცირე და მარტივ ქვეამოცანებად. დინამიკური პროგრამირების საშუალებით ამოცანის ამოხსნისას ამოცანას ვყოფთ ეტაპებად, სადაც თვითოეულ ეტაპს შეესაბამება თავისი სამართი ცვლადი.

ვთქვათ გვაქვს n ეტაპიანი პროცესი. საკვლევი სისტემის მდგომარეობა i, $i=1,2,...,n$ ეტაპის დასაწყისისათვის აღვნიშნოთ S_i-ით. დავუშვათ, რომ ყოველი i ეტაპისათვის არსებობს გადაწყვეტილებათა რაიმე U_i სიმრავლე და ყოველ i ეტაპზე ხდება ისეთი u_i გადაწყვეტილების მიღება, გადაწყვეტილებათა U_i სიმრავლიდან $u_i \in U_i$, რომლის

რეალიზაცია იწვევს სისტემის გადაყვანას S_i მდგომარეობიდან S_{i+1} მდგომარეობაში, $i=1,2,\ldots,n$. სქემატურად ეს შეიძლება ასე გამოისახოს:

$$S_1 \overset{u_1\in U_1}{\Rightarrow} S_2 \overset{u_2\in U_2}{\Rightarrow} \cdots \overset{u_{i-1}\in U_{i-1}}{\Rightarrow} S_i \overset{u_i\in U_i}{\Rightarrow} S_{i+1} \overset{u_{i+1}\in U_{i+1}}{\Rightarrow} \cdots \overset{u_{n-1}\in U_{n-1}}{\Rightarrow} S_n .$$

მმართველ გადაწყვეტილებათა $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ ვექტორს, ამოცანის გეგმა ანუ მართვის სტრატეგია (პოლიტიკა) ეწოდება. ვიტყვით, რომ თუ ცნობილია სისტემის საწყისი მდგომარეობა S_1 და მართვის სტრატეგია $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, მაშინ საკვლევი ობიექტის ქცევა განისაზღვრება ცალსახად.

თუ ყოველ i ეტაპზე შესაძლო გადაწყვეტილებათა U_i სიმრავლე სასრულია, მაშინ ყველა შესაძლო მართვის განხილვის გზით, საშუალება გვექნებოდა შეგვერჩია საუკეთესო მართვა, მოცემული მიზნის ფუნქციის მიხედვით. მაგრამ, მიუხედავად გადაწყვეტილებათა სიმრავლეების სასრულობისა, საჭირო ხდება ისეთი დიდი მოცულობის გამოთვლით სამუშაოთა შესრულება, რომელთა რეალიზაცია რთულია თანამედროვე კომპიუტერებისთვისაც კი.

ამიტომ, აღნიშნული სახის ამოცანების ამოსახსნელად, რ.ბელმანის მიერ, შემუშავებულ იქნა მარტივი პრინციპი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ოპტიმალური მართვის შერჩევისას არ განვიხილოთ "უვარგისი" მართვები.

ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპი, ანუ დინამიკური პროგრამირების ძირითადი პრინციპი, მდგომარეობს იმაში, რომ ოპტიმალური მართვის სტრატეგია უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ თვისებას: როგორიც არ უნდა იყოს სისტემის S_i მდგომარეობა ნებისმიერ მოცემულ i–ურ ეტაპზე

და ამ ეტაპისათვის შერჩეული u_i სტრატეგია $i=1,2,...,n-1$, შემდგომი მართვა (მმართველი გადაწყვეტილება) u_{i+1} ისე უნდა შეირჩეს, რომ წინა ეტაპებზე აღებულ მართვებთან ერთიანობაში იყოს ოპტიმალური. ეს კი ნიშნავს, რომ თუ პირველ ეტაპზე ყოველი შესაძლო გადაწყვეტილებისათვის ცნობილია ოპტიმალური გაგრძელება, მაშინ ამ ეტაპზე გადაწყვეტილება ისე უნდა შეირჩეს, რომ მან თავის გაგრძელებასთან ერთად მოგვცეს საუკეთესო შედეგი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ოპტიმალური სტრატეგიის ყოველი ქვესტრატეგია ასევე ოპტიმალური უნდა იყოს.

ვუწოდოთ $F_i(S_i;u_i), i=1,2,\cdots,n$ ფუნქციას მიზნის ფუნქცია და მისი ოპტიმალური მნიშვნელობა აღვნიშნოთ $f_i(S_i)$–ით:

$$f_i(S_i)=\underset{u_i\in U_i}{opt}\{F_i(S_i;u_i)\},$$

მაშინ $f_i(S_i)$ ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ რეკურენტულ დამოკიდებულებებს:

$$f_1(S_1)=\underset{u_1\in U_1}{opt}\{F_1(S_1;u_1)\}, \qquad (1.1)$$

$$f_2(S_2)=\underset{u_2\in U_2}{opt}\{F_2(S_2;u_2)+f_1(S_1;u_2(u_1))\},$$

$$f_i(S_i)=\underset{u_i\in U_i}{opt}\{F_i(S_i;u_i)+f_{i-1}(S_{i-1};u_i(u_{i-1}))\}, \qquad (1.2)$$

სადაც $i=1,2,\cdots,n$, $f_0(S_0;u_0)=0$ და ყოველ შემდგომ ეტაპზე გაითვალისწინება წინა ეტაპებზე გამოყენებული მმართველი გადაწყვეტილების მნიშვნელობები.

ეს დამოკიდებულება საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ $f_i(S_i)$ ფუნქციების მნიშვნელობები, თუ ვიცით საწყისი პირობა, რომელიც მოიცემა (1.1) ტოლობით.

ზოგიერთ შემთხვევაში გამოიყენება ეგრეთწოდებული უკუ გათვლის სქემა, რომლის შესაბამის რეკურენტულ დამოკიდებულებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$f_n(S_n) = \underset{u_n \in U_n}{opt} \{F_n(S_n; u_n)\}, \qquad (1.3)$$

$$f_{n-1}(S_{n-1}) = \underset{u_{n-1} \in U_{n-1}}{opt} \{F_{n-1}(S_{n-1}; u_{n-1}) + f_n(S_n; u_{n-1}(u_n))\},$$

$$f_i(S_i) = \underset{u_i \in U_i}{opt} \{F_i(S_i; u_i) + f_{i+1}(S_{i+1}; u_i(u_{i+1}))\}, \qquad (1.4)$$

ასეთ შემთხვევაში საწყის ეტაპად ვიღებთ ბოლო n–ურ ეტაპს და ოპტიმალურ მართვათა არჩევით ჩავდივართ პირველ ეტაპამდე.

განვიხილოთ ზოგიერთი ტიპიური დინამიკური პროგრამირების ამოცანები და მათთან დაკავშირებული შედარებით მარტივი მათი რიცხვითი მაგალითები.

წარმოების საშუალებათა შეცვლის ამოცანა

წარმოების საშუალებათა განახლების ამოცანები გვხვდება ყველა იმ საწარმოებში, სადაც პროდუქციის წარმოების ტექნოლოგიური პროცესი ითვალისწინებს გარკვეული სახის მანქანა-დანადგარების გამოყენებას. ცხადია, რომ თვითოეული დანადგარი დროთა განმავლობაში ხდება ნაკლებად რენტაბელური, ამიტომ ხშირად საჭიროა დავადგინოთ რა უფრო ხელსაყრელია: ვიმუშავოთ ძველი დანადგარებით, თუ შევცვალოთ ისინი ახლებით. როგორც

ცნობილია, ახალი დანადგარის შეძენა დაკავშირებულია გარკვეულ დანახარჯებთან, მეორეს მხრივ ძველი დანადგარებით წარმოებული პროდუქციის რეალიზაციით წარმოება ღებულობს სულ უფრო ნაკლებ მოგებას, რადგან იზრდება წუნდებული პროდუქციის გამოშვების პროცენტი. გარდა ამისა, სულ უფრო იზრდება დანადგარების შეკეთებისთვის საჭირო ხარჯები. დასმული ამოცანისთვის ამონახსნის მოსაძებნად, სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ საწარმოს გააჩნია ერთი დანადგარი. საჭიროა დადგინდეს ის მაქსიმალური სარგებელი, რომელიც შეუძლია მიიღოს საწარმომ დროის რაიმე n პერიოდის, ვთქვათ n ეტაპის (დროის შუალედის) განმავლობაში, თუ ის თავის სტრატეგიას ოპტიმალურად წარმართავს. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$r(t)$- t ხნოვანების დანადგარისგან მიღებული სარგებელი დროის ერთი ერთეულის განმავლობაში;

$q(t)$- t ხნოვანების დანადგარზე გაწეული დანახარჯები (შეკეთება, პროფილაქტიკა) დროის ერთი ერთეულის განმავლობაში;

p- აღნიშნული სახის ახალი დანადგარის ფასი (მუდმივია დროის მოცემული პერიოდისთვის);

$s(t)$- t ხნოვანების დანადგარის გასაყიდი ფასი;

ცხადია, რომ $r(t)$ და $s(t)$ არიან კლებადი ფუნქციები, ხოლო $q(t)$ კი ზრდადი ფუნქციაა $t-$ს მიმართ.

შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციები:

$f_i(t)$-თი აღვნიშნოთ ის მაქსიმალური სარგებელი, რომელიც შეუძლია მიიღოს საწარმომ იმ შემთხვევაში, როდესაც ეტაპების რაოდენობა განისაზღვრება ნებისმიერი i რიცხვით $i = 1,2,\cdots,n$;

ვთქვათ, პროცესის დასაწყისში საწარმოს გააჩნდა t ხნოვანების დანადგარი და ყველა i ეტაპზე პროცესი წარმართა ოპტიმალურად. ვგულისხმობთ, რომ ეტაპის ნომერი შეესაბამება გადაწყვეტილების მიღების პერიოდს. ჩვენი მიზანია $f_n(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობის დადგენა. გამოვიყენოთ რეკურენტული დამოკიდებულებები. ცხადია, რომ პირველ ეტაპზე გვაქვს

$$f_1(t) = \max_{U_1}\{r(t) - q(t); r(0) - q(0) + s(t) - p\} \qquad (2.1)$$

სადაც U_1 არის გადაწყვეტილებათა სიმრავლე და შესდგება ორი ელემენტისაგან: ა) თუ $r(t) - q(t) > r(0) - q(0) + s(t) - p$, მაშინ არ გავყიდოთ არსებული დანადგარი და ვიმუშაოთ ძველით;

ბ) თუ $r(t)-q(t)<r(0)-q(0)+s(t)-p$, მაშინ გავყიდოთ არსებული დანადგარი, ვიყიდოთ ახალი და ვიმუშაოთ ახლით.

თუ $r(t)-q(t)=r(0)-q(0)+s(t)-p$, მაშინ სულერთია რომელ გადაწყვეტილებას ავირჩევთ. ცხადია U_1 სიმრავლე ყოველ ეტაპზე ერთი და იმავე ელემენტებისაგან შესდგება.

მეორე ეტაპზე გვექნება:

$$f_2(t)=\max_{U_1}\{r(t)-q(t)+f_1(t+1);r(0)-q(0)+s(t)-p+f_1(1)\},$$

i-ურ ეტაპზე გვაქვს:

$$f_i(t)=\max_{U_1}\{r(t)-q(t)+f_{i-1}(t+1);r(0)-q(0)+s(t)-p+f_{i-1}(1)\}. \qquad (2.2)$$

(2.2) გამოსახულების მარჯვენა მხარის პირველი წევრი განსაზღვრავს საწარმოს მიერ მიღებულ სარგებელს იმ შემთხვევაში, თუ პირველ ეტაპზე არ გავყიდეთ t ხნოვანების დანადგარი და დარჩენილი $i-1$ ეტაპიანი პროცესი $t+1$ ხნოვანების დანადგარით წარვმართეთ ოპტიმალურად, ხოლო მეორე წევრი განსაზღვრავს საწარმოს სარგებელს იმ შემთხვევაში, თუ პირველ ეტაპზე გავყიდით დანადგარს და დარჩენილ $i-1$ ეტაპიან პროცესს წარვმართავთ ერთი ერთეული ხნოვანების დანადგარით ოპტიმალურად.

მიღებული რეკურენტული ფორმულების გამოყენება განვიხილოთ შემდეგ კონკრეტულ მაგალითზე: განვიხილოთ

წარმოების პროცესი $n=5$ დროის ერთეულის განმავლობაში. ვთქვათ პროდუქციის საწარმოებლად გამოყენებულია ერთი დანადგარი შემდეგი მახასიათებლებით:

$$r(t)=\begin{cases}3-t, & t=0,1,2,\\ 0, & t=3,4;\end{cases}$$

$$q(t)=\begin{cases}0, & t=0,1,2,\\ \dfrac{t}{2}, & t=3,4;\end{cases}$$

$$s(t)=\begin{cases}4-2t, & t=0,1,2,3,\\ 0, & t=4;\end{cases}$$

$$p=p(t)=5,\quad t\le 4.$$

საჭიროა დავადგინოთ ოპტიმალური სტრატეგია. ამოხსნა:

(2.1) და (2.2) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$f_1(t)=\max_{U_1}\{r(t)-q(t);s(t)\},$$

$$f_i(t)=\max_{U_1}\{r(t)-q(t)+f_{i-1}(t+1);s(t)+f_{i-1}(1)\},\quad i=1,2,\cdots,10.$$

განსახილველ მაგალითში $p=r(0)=7,\ q(0)=0$, ამიტომ ფორმულებში ეს სიდიდეები გაფათილდა. თუ გამოვიყენებთ მიღებულ ფორმულებს შეგვიძლია, ეტაპების მიხედვით, შევადგინოთ შემდეგი ცხრილები და ვიპოვოთ შესაბამისი სტრატეგიები:

I ეტაპი. $f_1(t) = \max_{U_1}\{r(t) - q(t); r(0) - q(0) + s(t) - p\}$ ამ ფორმულის შესაბამისი ცხრილია:

t	$r(t)$	$q(t)$	$r(t) - q(t)$	$s(t)$	$r(0) - q(0) + s(t) - p$	$f_1(t)$	გადაწყვ-ება
0	3	0	3-0=3	4	3-0+4-5=2	3	არ გავყიდით
1	2	0	2-0=2	2	3-0+2-5=0	2	არ გავყიდით
2	1	0	1-0=1	0	3-0+0-5=-2	1	არ გავყიდით
3	0	1,5	0-1,5=-1,5	0	3-0+0-5=-2	-1,5	არ გავყიდით
4	0	2	-2	0	3-0+0-5=-2	-2	სულერთია

II ეტაპი. $f_2(t) = \max_{U_1}\{r(t) - q(t) + f_1(t+1); r(0) - q(0) + s(t) - p + f_1(1)\}$

t	$r(t)$	$q(t)$	$r(t) - q(t) + f_1(t)$	$s(t)$	$r(0) - q(0) + s(t) - p + f_1(t)$	$f_2(t)$	გადაწ.-ება
0	3	0	3-0+2=5	4	3-0+4-5+2=4	5	არ გავყ.
1	2	0	2-0+1=3	2	3-0+2-5+2=2	3	არ გავყ.
2	1	0	1-0-1,5=-0,5	0	3-0+0-5+2=0	0	გავყ.
3	0	1,5	0-1,5-2=-3,5	0	3-0+0-5+2=0	0	გავყ.

III ეტაპი. $f_3(t) = \max_{U_1}\{r(t) - q(t) + f_2(t+1); r(0) - q(0) + s(t) - p + f_2(1)\}$

t	$r(t)$	$q(t)$	$r(t)-q(t)+f_2(t)$	$s(t)$	$r(0)-q(0)+s(t)-p+f_2(t)$	$f_3(t)$	გადაწ.-ება
0	3	0	3-0+3=6	4	3-0+4-5+3=5	6	არ გავყ.
1	2	0	2-0+0=2	2	3-0+2-5+3=3	3	გავყ.
2	1	0	1-0+0=1	0	3-0+0-5+3=1	1	სულერთია

IV ეტაპი. $f_4(t)=\max_{U_1}\{r(t)-q(t)+f_3(t+1);r(0)-q(0)+s(t)-p+f_3(1)\}$

t	$r(t)$	$q(t)$	$r(t)-q(t)+f_3(t)$	$s(t)$	$r(0)-q(0)+s(t)-p+f_3(t)$	$f_4(t)$	გადაწ.-ება
0	3	0	3-0+3=6	4	3-0+4-5+3=5	6	არ გავყიდით
1	2	0	2-0+1=3	2	3-0+2-5+3=3	3	სულერთია

V ეტაპი. $f_5(t)=\max_{U_1}\{r(t)-q(t)+f_4(t+1);r(0)-q(0)+s(t)-p+f_4(1)\}$

t	$r(t)$	$q(t)$	$r(t)-q(t)+f_4(t)$	$s(t)$	$r(0)-q(0)+s(t)-p+f_4(t)$	$f_5(t)$	გადაწ.-ება
0	3	0	3-0+3=6	4	3-0+4-5+3=5	6	არ გავყიდით

აქედან გამომდინარე მივიღეთ შემდეგი ოპტიმალური გადაწყვეტილება:

I არ გავყ.→ II არ გავყ.→ III გავყ. და ვიყიდით ახალს → IV სულერთია → V არ გავყ.

2.3. რესურსების განაწილების ამოცანა (სტატიკური მოდელი)

ვთქვათ n სხვადასხვა საწარმო პროდუქციის დასამზადებლად იყენებს გარკვეული ერთი სახის ნედლეულს(რესურსს), რომელიც მთლიანობაში არის რაიმე R რაოდენობით. ვთქვათ თითოეული საწარმოს მიერ მიღებული მოგება იანგარიშება შესაბამისი $g_i(x),\ i=1,2,\cdots,n,$ ფუნქციების საშუალებით, სადაც $g_i(x),\ i=1,2,\cdots,n,$ ფუნქციების მნიშვნელობები გვიჩვენებენ იმ მოგებას, რომელსაც მოგვცემდა $i-$ური საწარმო, იმ შემთხვევაში თუ მას გამოეყოფოდა x რაოდენობის რესურსი, სადაც $x \le R$.

რესურსების განაწილების ამოცანის მიზანია მოვახდინოთ არსებული R რაოდენობის რესურსის დანაწილება n მოცემული რაოდენობის საწარმოებზე ისე, რომ მათგან მიღებული ჯამური მოგება იყოს მაქსიმალური. ზემოთ მიღებული აღნიშვნების გათვალისწინებით nრაოდენობა საწარმოს მიერ მიღებული მთლიანი მოგება გამოისახება შემდეგი ჯამით:

$$g_1(r_1)+g_2(r_2)+\cdots+g_n(r_n),$$

ამასთან ერთად აქ იგულისხმება, რომ r_1 არის რესურსის ის რაოდენობა, რომელიც გამოეყო პირველ საწარმოს, r_2- მეორე საწარმოს და ა.შ. ცხადია გამოყოფილი რესურსების ჯამი არ უნდა აღემატებოდეს რესურსის საერთო არსებულ რაოდენობას. ე.ი.

$$r_1+r_2+\cdots r_n \le R.$$

საბოლოოდ მივიღეთ შემდეგი ამოცანა:

ვიპოვოთ $\sum_{i=1}^{n} g_i(r_i)$ მიზნის ფუნქციის მაქსიმუმი

შემდეგ შეზღუდვებში:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \le R,\ \ r_i \ge 0.$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ამ ამოცანის ამოხსნის სირთულე დამოკიდებულია $g_i(x),\ i=1,2,\cdots,n,$ ფუნქციების სახეზე, ამიტომ

მის ამოსახსნელად უნდა გამოვიყენოთ წრფივი ან არაწრფივი პროგრამირების მეთოდები.($g_i(x),\ i=1,2,\cdots,n,$ ფუნქციების არაწრფივობის შემთხვევაში).

ამოვხსნათ დასმული ამოცანა ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპით. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ რესურსები საწარმოებს გამოეყოფათ რიგრიგობით.

შემოვიღოთ ბელმანის ფუნქციები:

$f_i(x)$-ით აღვნიშნოთ ის ჯამური მოგება, რომელსაც მოგვცემდა პირველი i საწარმო, თუ მათ x რაოდენობის რესურსი გაუნაწილდებოდათ ოპტიმალურად.

ცხადია გვექნება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_1(x)=\max_{0\le r_1\le x} g_1(r_1),$$

$$f_i(x)=\max_{0\le r_i\le x}\{g_i(r_i)+f_{i-1}(x-r_i)\},\ i=2,3,\cdots,n.$$

რომელთა გამოთვლა უნდა მოხდეს ყოველი $x\in[0,R]$.

ჩვენი მიზანია მოცემული რეკურენტული დამოკიდებულებებით დავითვალოთ $f_n(R)$ ფუნქციის მნიშვნელობები. მოყვანილი რეკურენტული დამოკიდებულებები შეესაბამება პირდაპირი გათვლის სქემას, როდესაც f_1–ის საშუალებით ვითვლით f_2–ს, f_2-ის საშუალებით f_3-ს და ა.შ. f_{n-1}–ის საშუალებით f_n–ს.

ზოგჯერ უფრო მეტი პრაქტიკული გამოყენება აქვს უკუგათვლის სქემას, როდესაც f_n–დან ვღებულობთ f_{n-1}–ს და ა.შ. f_2–დან f_1–ს. ამ შემთხვევაში იცვლება ბელმანის ფუნქციების შინაარსი. ვიგულისხმოთ, რომ $f_i(y)$ წარმოადგენს ჯამურ შემოსავალს ბოლო $n-(i+1)$ საწარმოდან იმ შემთხვევაში, თუ $n-(i+1)$ საწარმოებს y რაოდენობის რესურსი გაუნაწილდათ ოპტიმალურად. უკუგათვლის სქემისათვის რეკურენტული დამოკიდებულებები ღებულობენ შემდეგ სახეს:

$$f_n(y)=\max_{0\le r_n\le y} g_n(r_n),$$

$$f_i(x)=\max_{0\le r_i\le y}\{g_i(r_i)+f_{i+1}(y-r_i)\},\ i=n-1,n-2,\cdots,2,1.$$

აზრი აქვს დასმული ამოცანის განზოგადებას ორი, სამი და უფრო მეტი სახის რესურსის შემთხვევაში. ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნა ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპის გამოყენებითაც კი ძალზედ შრომატევადია, მაგრამ დიდი პრაქტიკული ღირებულება აქვს.

ვთქვათ საჭიროა n რაოდენობის საწარმოს გაუნაწილდეს ორი სახის რესურსი, რომელთა რაოდენობებია R და Q. რესურსების განაწილება საწარმოებზე უნდა მოხდეს ისე, რომ საწარმოებიდან მიღებული ჯამური შემოსავალი $f_n(R,Q)$ იყოს მაქსიმალური.

ვიგულისხმოთ, რომ თვითოეული საწარმოს მოგება იანგარიშება შემდეგი $g_i(x,y),\ i=1,2,\cdots,n,$ ფუნქციების საშუალებით, რომლებიც გვიჩვენებენ $i-$ური საწარმოსაგან მიღებულ მოგება, თუ მას გამოეყო x რაოდენობის პირველი სახის რესურსი და y რაოდენობის მეორე სახის რესურსი.

რეკურენტულ დამოკიდებულებებს პირდაპირი გათვლის სქემისათვის ექნებათ შემდეგი სახე:

$$f_1(x,y)=\max_{\substack{0\le r_1\le x\\ 0\le q_1\le y}} g_1(r_1,q_1),$$

$$f_i(x,y)=\max_{\substack{0\le r_i\le x\\ 0\le q_i\le y}} \{g_i(r_i,q_i)+f_{i-1}(x-r_i,y-q_i)\}\ i=2,3,\cdots,n,$$

$$0\le x\le R,\ 0\le y\le Q,$$

სადაც $f_i(x,y)$ წარმოადგენს პირველი i რაოდენობის საწარმოსგან მიღებულ მაქსიმალურ მოგებას, თუ მათ პირველი სახის x რაოდენობის და მეორე სახი y რაოდენობის რესურსი გაუნაწილდათ ოპტიმალურად.

აღნიშნული რეკურენტული დამოკიდებულებების გამოყენებისას პირველად უნდა დავითვალოთ $f_1(x,y)$ ფუნქციის მნიშვნელობები, x და y ყოველი შესაძლო მნიშვნელობისათვის, $0\le x\le R,\ 0\le y\le Q,$ შემდეგ $f_2(x,y)-$ის მნიშვნელობები და ა.შ. საბოლოოდ მივიღებთ ფუნქციის საძიებელ $f_n(R,Q)$ მნიშვნელობას.

რესურსების განაწილების დინამიკური მოდელი

ვთქვათ გვაქვს ერთი საწარმო, ერთი სახის R რაოდენობის რესურსი და გვაინტერესებს n წელიწადის განმავლობაში მოვახდინოთ R რესურსის განაწილება საწარმოზე ისე, რომ საწარმოსაგან მიღებული ჯამური მოგება n წლის განმავლობაში იყოს მაქსიმალური. პირველი წელიწადი იყოს პირველი ეტაპი, მეორე წელიწადი – მეორე წელიწადი და ა.შ. ყოველ წელიწადს დავუკავშიროთ ეტაპის ნომერი. მაშასადამე გვინდა ეტაპების მიხედვით ოპტიმალურად გავანაწილოთ საწარმოსათვის გამოყოფილი R რაოდენობის რესურსი. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$g_i(x)$ - იყოს მოგება, რომელიც მიიღება i–ურ ეტაპზე, საწარმოს მიერ გამოყენებული x რაოდენობის რესურსიდან.

$h_i(y)$ - იყოს მოგება, რომელიც მიიღება i–ურ ეტაპზე, საწარმოს მიერ გამოუყენებელი y რაოდენობის რესურსიდან. ცხადია, $h_i(y)$ შეიძლება იყოს იგივურად ნული ან ზოგ შემთხვევაში უარყოფითიც.

შემოვიღოთ ბელმანის ფუნქციები. ვთქვათ, $f_i(x)$- აღნიშნავს პირველ i ეტაპზე საწარმოს მიერ მიღებულ ჯამურ მოგებას, თუ ყველა წინა i ეტაპზე განაწილებული რესურსის საერთო რაოდენობაა x.

ამ შემთხვევაში რეკურენტულ დამოკიდებულებებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$f_1(x) = \max_{0 \le r_1 \le x} \{g_1(r_1) + h_1(x - r_1)\},$$

$$f_i(x) = \max_{0 \le r_i \le x} \{g_i(r_i) + h(x - r_i) + f_{i-1}(x - r_i)\} \quad i = 2,3,\cdots,n,$$

$$0 \le x \le R.$$

რესურსების განაწილების ალბათური მოდელი

ალბათურ მოდელთან მაშინ გვაქვს საქმე, როდესაც მოგების დასათვლელი ფუნქციები სრულად არ არიან განსაზღვრულნი.

ვთქვათ საწარმოს მიერ k-ურ ეტაპზე მიღებული შემოსავალი გამოყოფილი x რაოდენობის რესურსის მიხედვით გამოითვლება $g_k'(x)$ ფუნქციის საშუალებით ალბათობით p ან $g_k''(x)$ − ფუნქციით ალბათობით q. ანალოგიურად, გამოუყენებელი y რაოდენობის რესურსიდან მიღებული შემოსავალი k-ურ ეტაპზე შეიძლება იყოს $h_k'(y)$ ალბათობით p ან $h_k''(y)$ − ალბათობით q , $k = 1,2,\cdots,N$. სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ სხვა შემთხვევას არ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი ე.ი. $p + q = 1$.

მაშინ პირველ ეტაპზე საწარმოს მიერ მიღებული შემოსავალი იქნება მათემატიკური ლოდინი, რომელიც განისაზღვრება აღნიშნული დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მიხედვით

$$[g_1'(r_1) + h_1'(x - r_1)]p + [g_1''(r_1) + h_1''(x - r_1)]q.$$

ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპის თანახმად გვექნება შემდეგი სახის რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le X} \{[g_1'(r_1) + h_1'(x - r_1)]p + [g_1''(r_1) + h_1''(x - r_1)](1 - p)\}$$

$$f_k(x) = \max_{0 \le x_k \le X} \{[g_k'(r_1) + h_k'(x - r_k)]p + [g_k''(r_1) + h_k''(x - r_k)](1 - p) + f_{k-1}(X - r_k)\}, k = 2,3, \cdots, N; 0 \le X \le R.$$

მაგალითი, ვთქვათ, ფირმას აქვს სამი სახის საწარმო. ფირმის დირექტორთა საბჭომ გადაწყვიტა მოახდინოს საწარმოთა რეკონსტრუქცია, რათა მომავალში მიიღოს მაქსიმალური მოგება. საბჭომ ამ საქმისათვის გამოყო 5 მლნ, ლარი. ყოველ საწარმოს განსახილველად შემოაქვს რეკონსტრუქციის პროექტის თავისი ვარიანტი (ცხადია თავისი საწარმოსათვის). შემოვიღოთ აღნიშვნები:

C_i – i ($i = 1,2,3$)-ურ საწარმოზე გამოყოფილი კაპიტალდაბანდება.

R_i – i ($i = 1,2,3$)-ურ საწარმოდან მიღებული მოგება C_i კაპიტალდაბანდების შემთხვევაში.

C – ჯამური დანახარჯები, R – ჯამური მოგება.

ნულოვანი ეტაპი შეესაბამებოდეს ისეთ სიტუაციას, როდესაც არცერთ საწარმოში რეკონსტრუქცია არ ხდება, პირველი ეტაპი შეესაბმებოდეს პირველ საწარმოს, II ეტაპი – მეორე საწარმოს, III ეტაპი – მესამე საწაროს.

ვთქვათ საწყისი სიდიდეები მოცემულია შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

პროექ. №	I საწარ.		II საწარ.		III საწარ.	
	C_1	R_1	C_2	R_2	C_3	R_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	5	2	8	1	3
3	2	6	3	9	–	–
4	–	–	4	12	–	–

$x_0 = 0$შეესაბამებოდეს სიტუაციას, როდესაც განაწილებული რესურსების რაოდენობა ნულის ტოლია, ე,ი, არ ხდება კაპიტალდაბანდება.

x_1 არის რესურსების მოცულობა განაწილებული პირველ ეტაპზე.

x_2 - რესურსების მოცულობა განაწილებული პირველ და მეორე ეტაპზე ერთად.

x_3 - რესურსების მოცულობა განაწილებული პირველ, მეორე და მესამე ეტაპზე ერთად.

ცხადია $0 \le x_1 \le 5, 0 \le x_2 \le 5$, ხოლო $x_3 = 5$.

$f_j(x_j), (j = 1,2,3)$ იყოს j-ურ ეტაპზე მიღებული მოგება x_j რაოდენობის განაწილებული რესურსების საშუალებით, ამიტომ $f_0(x_0) = f_0(0) = 0$.

ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპს ამ შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

$$f_0(x_0) = 0,$$

$$f_j(x_j) = \max_{C_j(k_j) \le X_j} \{R_j(k_j) + f_{j-1}(x_j - C_j(k_j))\}, j = 1,2,3 ,$$

სადაც k_j – პროექტის ნომერია. $C_j(k_j)$ – k_j -ურ პროექტებზე დახარჯული თანხაა ე.ი. $C_j(k_j) = C_j = x_j - x_{j-1}, j = 1,2,3.$ ანუ $x_{j-1} = x_j - C_j(k_j)$, რადგან $x_{j-1} \ge 0$, ამიტომ $x_j \ge C_j(k_j)$.

შევუდგეთ გამოთვლებს შემდეგი ცხრილების საშუალებით:

I ეტაპი:

$$f_1(x_1) = \max_{C_1(k_1) \le X_1} \{R_1(k_1) + f_0(0)\}, k_1 = 1,2,3.$$

x_1	$R_1(k_1)$			ოპტიმ. ამონახსნი	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$f_1(x_1)$	k_1^*
0	0	–	–	0	1
1	0	5	–	5	2
2	0	5	6	6	3
3	0	5	6	6	3
4	0	5	6	6	3
5	0	5	6	6	3

II ეტაპი:

$$f_2(x_2) = \max_{C_2(k_2) \le X_2} \{R_2(k_2) + f_1(x_2 - C_2(k_2))\}, k_2 = 1,2,3,4.$$

x_2	$R_2(k_2) + f_1(x_2 - C_2(k_2))$				ოპტიმ. ამონახსნი	
	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$f_2(x_2)$	k_2^*
0	0+0=0	-	-	-	0	1
1	0+5=5	-	-	-	5	1
2	0+6=6	8+0=8	-	-	8	2
3	0+6=6	8+5=13	9+0=9	-	13	2
4	0+6=6	8+6=14	9+5=14	12+0=12	14	2 ან 3
5	0+6=6	8+6=14	9+6=15	12+5=17	17	4

III ეტაპი:

$$f_3(x_3) = \max_{C_3(k_3)\leq X_3} \{R_3(k_3) + f_2(x_3 - C_3(k_3))\}, k_3 = 1,2.$$

x_3	$R_3(k_3) + f_2(x_3 - C_3(k_3))$		ოპტიმალური ამონახსნი	
	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$f_3(x_3)$	k_3^*
5	0+17=17	3+14=17	17	1 ან 2

მოვძებნოთ ოპტიმალური ამოხსნა:

x_3	k_3^*	x_2	k_2^*	x_1	k_1^*	(k_1^*, k_2^*, k_3^*)
	1	5-0=5	4	5-4=1	2	(2;4;1)
5			2	4-2=2	3	(3;2;2)
	2	5-1=4	3	4-3=1	2	(2;3;2)

სამივე პროექტი: (2,4,1); (3,2,2) ან (2,3,2) ოპტიმალურია.

იგივე ამოცანა ამოვხსნათ შებრუნებული ალგორითმით, ანუ უკუ გათვლის სქემის საშუალებით: $f_3 \to f_2 \to f_1$.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

Y_1 – რესურსების რაოდენობა განაწილებული სამივე ეტაპზე ერთად,

Y_2 – რესურსების რაოდენობა განაწილებული მეორე და მესამე ეტაპზე ერთად,

Y_3 – რესურსების რაოდენობა განაწილებული მესამე ეტაპზე,

ცხადია, რომ $Y_1 = 5, 0 \leq Y_2 \leq 5$,$0 \leq Y_3 \leq 5$.

ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპს ამ შემთხვევაში აქვს ასეთი სახე:

$f_4(x_4) = 0,$ ნებისმიერი Y_4-თვის,

$$f_j(Y_j) = \max_{C_j(k_j) \leq Y_j} \{R_j(k_j) + f_{j+1}(Y_j - C_j(k_j))\}, j = 3,2,1,$$

გამოთვლებს ვიწყებთ მესამე ეტაპით,

III ეტაპი,

$$f_3(Y_3) = \max_{C_3(k_3) \leq Y_3} \{R_3(k_3) + f_4(Y_3 - C_3(k_3))\},\ k_3 = 1,2.$$

Y_3	$R_3(k_3)$		ოპტიმალ. ამონახსნი	
	$k_3 = 1$	$k_3 = 2$	$f_3(Y_3)$	k_3^*
0	0	-	0	1
1	0	3	3	2
2	0	3	3	2
3	0	3	3	2
4	0	3	3	2
5	0	3	3	2

II ეტაპი:

$$f_2(Y_2) = \max_{C_2(k_2) \le Y_2} \{R_2(k_2) + f_3(Y_2 - C_2(k_2))\},\ k_2 = 1,2,3,4.$$

Y_2	$R_2(k_2) + f_3(Y_2 - C_2(k_2))$				ოპტიმალ. ამონახსნი	
	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$f_2(Y_2)$	k_2^*
0	0+0=0	-	-	-	0	1
1	0+3=3	-	-	-	3	1
2	0+3=3	8+0=8	-	-	8	2
3	0+3=3	8+3=11	9+0=9	-	11	2
4	0+3=3	8+3=11	9+3=12	12+0=12	12	3 ან 4

5	0+3=3	8+3=11	9+3=12	12+3=15	15	4

I ეტაპი:

$$f_1(Y_1) = \max_{C_1(k_1) \le Y_1} \{R_1(k_1) + f_2(Y_1 - C_1(k_1))\},\ k_1 = 1,2,3.$$

Y_1	$R_1(k_1) + f_2(Y_1 - C_1(k_1))$			*ოპტიმალ. ამონახსნი*	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$f_1(Y_1)$	k_1^*
5	0+15=15	5+12=17	6+11=17	17	2 ან 3

ოპტიმალური ამონახსნები ასე ამოვწეროთ:

Y_1	k_1^*	Y_2	k_2^*	Y_3	k_3^*	(k_1^*, k_2^*, k_3^*)
	2	5-1=4	3	4-3=1	2	(2;3;2)
5			4	4-4=0	1	(2;4;1)
	3	5-2=3	2	3-2=1	2	(3;2;2)

1.6. დატვირთვის ამოცანა (ზურგჩანთის ამოცანა)

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე სატრანსპორტო საშუალება, რომლის ტვირთამწეობაა W და მასზე უნდა დავტვირთოთ გარკვეული სახის სხვადასხვა საქონელი ისე, რომ მათმა წონამ არ გადააჭარბოს ტვირთამწეობას, ხოლო საქონლის ჯამური ღირებულება იყოს მაქსიმალური.

დავუშვათ გვაქვს $i = 1,2,\cdots,N$ სხვადასხვა ტიპის საქონელი, P_i იყოს i -ური საქონლის წონა, V_i,i -ური საქონლის ღირებულება, X_i, i - ური საქონლის მოცულობა $i = 1,2,\cdots,N$. ჩვენი მიზანია ისე შევარჩიოთ $X_1, X_2, \cdots, X_N$ მოცულობები, რომ მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღოს ჯამმა

$$V_1X_1 + V_2X_2 + \cdots + V_NX_N \rightarrow max$$

შემდეგ შეზღუდვებში

$$P_1X_1 + P_2X_2 + \cdots + P_NX_N \le W\ ,$$

$$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0, \cdots, X_N \ge 0,$$

$X_i, (i = 1,2, \cdots, N)$ მთელი რიცხვებია.

თუ არ მოვითხოვთ $X_1, X_2, \cdots, X_N$ ცვლადების მთელობას, მაშინ ამ ამოცანის ამოხსნა შეიძლება სიმპლექსური მეთოდის საშუალებით. მართლაც, ამ შემთხვევაში გვრჩება ერთი შეზღუდვა, საბაზისო იქნება ერთი ცვლადი, კერძოდ ის ცვლადი, რომლისთვისაც $V_i \cdot \frac{W}{P_i}$ გამოსახულება ღებულობს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. მაშასადამე, თუ

$$max\left(V_i \cdot \frac{W}{P_i}\right) = V_{i0} \cdot \frac{W}{P_{i0}}\ ,$$

მაშინ ტრანსპორტის დატვირთვა უნდა მოხდეს მხოლოდ i_0 სახის საქონლით.

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ჩვენ გამოვიყენოთ დინამიკური პროგრამირების მეთოდი. ამისათვის ვიგულისხმოთ, რომ საქონლის დატვირთვა ხდება ეტაპობრივად: ყოველ $j\ , (i = 1,2, \cdots, N)$ -ურ ეტაპზე იტვირთება j -ური ტიპის საქონელი. გამოვიყენოთ ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპის უკუ გათვლის სქემა, Y_i -ით ავღნიშნოთ იმ საქონლის საერთო წონა, რომელთა დატვირთვა ხდება $j, j + 1, \cdots, N$ ეტაპებზე. $f_i(Y_j)$-ით აღვნიშნოთ საქონლის ის მაქსიმალური ჯამური ღირებულება, რომელთა ოპტიმალური დატვირთვა მოხდა $j, j + 1, \cdots, N$ ეტაპებზე, ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $Y_1 = W\ , Y_i = 0,1,2, \cdots, W\ ; j = 2,3, \cdots, N$.

ცხადია, ყოველი j-ური ტიპის საქონლის დასატვირთავი რაოდენობა X_j შეიძლება ღებულობდეს შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$0,1,2,\cdots,\left[\frac{W}{P_j}\right]$$

ე.ი, ყოველ j-ურ ეტაპზე X_j ვარიანტების რაოდენობა მოთავსებულია $0 \le X_j \le \left[\frac{W}{P_j}\right]$ შუალედში. უკუ გათვლის სქემის შესაბამისად გვექნება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_N(Y_N) = \max_{X_N=0,1,\cdots,\left[\frac{W}{P_N}\right]} \{X_N V_N\} \ ,$$

$$f_i(Y_i) = \max_{X_i=0,1,\cdots,\left[\frac{W}{P_i}\right]} \{X_i V_i + f_{i+1}(Y_i - X_i P_i)\}$$

მაგალითი: ვთქვათ გვაქვს შემდეგი მონაცემები: $W = 5$,

i	P_i	V_i
1	2	65
2	3	80
3	1	30

III ეტაპი:

$$f_3(Y_3) = \max_{X_3=0,1,\cdots,\left[\frac{5}{1}\right]} \{X_3 V_3\}, \textit{შევნიშნოთ, რომ} \ \left[\frac{5}{1}\right] = 5;$$

$$\textit{ე. ი.} \ X_3 = 0,1,2,3,4,5.$$

Y_3	$X_3=0$	$X_3=1$	$X_3=2$	$X_3=3$	$X_3=4$	$X_3=5$	ოპტ. ამონახსნი
			$30X_3$				

	$X_3V_3=0$	30	60	90	120	150	$f_3(X_3)$	X_3^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	0	30	-	-	-	-	30	1
2	0	30	60	-	-	-	60	2
3	0	30	60	90	-	-	90	3
4	0	30	60	90	120	-	120	4
5	0	30	60	90	120	150	150	5

II ეტაპი:

$$f_2(Y_2)=\max_{X_2=0,1,\cdots,\left[\frac{5}{3}\right]}\{80X_2+f_3(Y_2-3X_2)\},\ \text{ე.ი. } X_2=0,1.$$

Y_2	$80X_2+f_3(Y_2-3X_2$		ოპტ. ამონახსნი	
	$X_2=0$	$X_2=1$		
	$X_2V_2=0$	$X_2V_2=80$	$f_2(X_2)$	X_2^*
0	0+0=0	-	0	0
1	0+30=30	-	30	0
2	0+60=60	-	60	0
3	0+90=90	80+0=80	90	0
4	0+120=120	80+30=110	120	0
5	0+150=150	80+60=140	150	0

I ეტაპი:

$$f_1(Y_1)=\max_{X_1=0,1,\cdots,\left[\frac{5}{2}\right]}\{65X_1+f_2(Y_1-2X_1)\},\ \text{ე.ი. } X_1=0,1,2.$$

Y_1	$65X_1+f_2(Y_1-2X_1$			ოპტ. ამონახსნი	
	$X_1=0$	$X_1=1$	$X_1=2$		
	$X_1V_1=0$	$X_1V_1=65$	$X_1V_1=130$	$f_1(X_1)$	X_1^*
0	0+0=0	-	-	0	0
1	0+30=30	-	-	30	0

2	0+60=60	65+0=65	-	60	0
3	0+90=90	65+30=95	-	90	0
4	0+120=120	65+60=125	130+0=130	120	0
5	0+150=150	65+90=155	130+30=160	150	0

ოპტიმალური სტრატეგია ანუ ამონახსნები იქნება:

$$(X_1^*;\ X_2^*;\ X_3^*) = (2; 0; 1)$$

1.7. შრომითი რესურსების გამოყენების კალენდარული დაგეგმვა

ვთქვათ, რაიმე ორგანიზაციას დასახული სამუშაოს შესასრულებლად სხვადასხვა დროს ესაჭიროება სხვადასხვა რაოდენობის მუშახელი. ამ სამუშაოს შესრულების პერიოდი დავყოთ ეტაპებად:$k = 1,2, \cdots, N$ ვიგულისხმოთ, რომ წინასწარ ცნობილია თითოეულ ეტაპზე საჭირო მუშახელის მინიმალური რაოდენობა: პირველ ეტაპზე საჭიროა b_1 რაოდენობის მუშახელი, მეორე ეტაპზე b_2 რაოდენობის მუშახელი და ა,შ, მე–N–ე ეტაპზე – b_n რაოდენობის მუშახელი. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$C_1(X)$ იყოს დანაკარგები, გამოწვეული რომელიმე ეტაპზე X რაოდენობის მუშახელის სიჭარბის გამო,

$C_2(X)$ იყოს დანაკარგები, გამოწვეული რომელიმე ეტაპზე X რაოდენობის მუშახელის დაქირავებით.

ვთქვათ, მუშის დათხოვნა არ იწვევს დანაკარგებს და მხედველობაში მივიღოთ, რომ საწარმოს მდგომარეობას მოცემულ ეტაპზე განსაზღვრავს მუშახელის რაოდენობა წინა ეტაპის ბოლოს, Y_k -თი აღვნიშნოთ მუშახელის რაოდენობა k -ურ ეტაპზე, რადგან k -ურ ეტაპზე საჭირო მუშახელის მინიმალური რაოდე– ნობაა b_k , ამიტომ გვექნება შემდეგი თანაფარდობები:

1. $Y_k - b_k > 0$ ნიშნავს, რომ გვყავს იმაზე მეტი მუშახელი, ვიდრე გვჭირდება და ხარჯი, მუშახელის სიჭარბის გამო, ტოლი იქნება $C_1(Y_k - b_k)$.

2. $Y_k > Y_{k-1}$ ნიშნავს, რომ k ეტაპზე გვიწევს მუშახელის დაქირავება და ხარჯი, მუშახელის დაქირავების გამო, ტოლი იქნება $C_2(Y_k - Y_{k-1})$.

შემოვიღოთ ბელმანის ფუნქცია: $f_k(y_{k-1})$ - დანაკარგების ჯამური რაოდენობა k ეტაპზე და მის წინა ეტაპებზე ერთად, გამოწვეული იმით, რომ $k-1$ ეტაპის ბოლოს გვყავდა y_{k-1} რაოდენობის მუშახელი, გამოვიყენოთ უკუ გათვლის სქემა და ჩავწეროთ შესაბამისი რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_N(Y_{N-1}) = \min_{Y_N = b_N} \{C_1(Y_N - b_N) + C_2(Y_N - Y_{N-1})\}$$

$$f_k(Y_{k-1}) = \min_{Y_k \geq b_k} \{C_1(Y_k - b_k) + C_2(Y_k - Y_{k-1}) + f_{k+1}(Y_k)\},$$

$$k = 1,2,\cdots,N-1;$$

აქ საჭიროა განვსაზღვროთ $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{N-1}, Y_N$ ცვლადების მნიშვნელობათა საზღვრები $b_1, b_2, \cdots, b_{N-1}, b_N$ მოცემული მნიშვნელობების საშუალებით.

ჩხადია $Y_N = b_N$. თუ $Y_{N-1} > b_N$, მაშინ $Y_{N-1} = b_{N-1}, \cdots, b_N$, ხოლო თუ $b_{N-1} > b_N$, მაშინ $Y_{N-1} = b_N$ და ა.შ.

მაგალითი: ვთქვათ, რომელიმე ორგანიზაციას სჭირდება მუშახელი 5 თვის განმავლობაში და ყოველ თვე მას სჭირდება სხვადასხვა რაოდენობის მუშახელი. საჭიროა ორგანიზაციამ შეიმუშაოს ოპტიმალური გეგმა იმისა, თუ ყოველ თვე რამდენი მუშა ამუშაოს. ამისათვის ის ადგენს ყოველ თვეში საჭირო მუშების მინიმალურ რაოდენობას. ვთქვათ პირველ თვეში საჭიროა $b_1 = 5$ რაოდენობის მუშახელი, მეორე თვეში – $b_2 = 7$, მესამე თვეში – $b_3 = 8$, მეოთხე თვეში - $b_4 = 4$ და მეხუთე თვეში - $b_5 = 6$. მოცანა დავყოთ ეტაპებად ისე, რომ ყოველ თვეს შევუსაბამოთ ეტაპის ნომერი. ვთქვათ გვაქვს შემდეგი მონაცემები:

$$C_1(Y_k - b_k) = 3(Y_k - b_k), k = 1,2,3,4,5.$$

$$C_2(Y_k - Y_{k-1}) = \begin{cases} 4 + 2(Y_k - Y_{k-1}), & \text{თუ } Y_k > Y_{k-1}, \\ 0, & \text{თუ } Y_k \le Y_{k-1}. \end{cases}$$

განვსაზღვროთ რა ფარგლებში იცვლებიან Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 და Y_5 ცვლადები. ჩხადია $Y_5 = b_5 = 6$. მოცემულობის თანახმად:

$b_4 = 4 < 6 = b_5$, ამიტომ $Y_4 = 4,5,6$;

$b_3 = 8 > 6 = Y_4$, ამიტომ $Y_3 = 8$;

$b_2 = 7 < 8 = Y_3$, ამიტომ $Y_2 = 7,8$;

$b_1 = 5 < 8 = Y_2$, ამიტომ $Y_1 = 5,6,7,8$;

$Y_0 = 5$ – მუშების საწყისი რაოდენობაა.

V ეტაპი: $b_5 = 6$,

Y_4	$C_1(Y_5 - 6) + C_2(Y_5 - Y_4)$ $Y_5 = 6$	ოპტიმალ. ამონახსნი $f_5(Y_4)$	Y_5^*
4	$3 \cdot 0 + 4 + 2 \cdot 2 = 8$	8	6
5	$3 \cdot 0 + 4 + 2 \cdot 1 = 6$	6	6
6	$3 \cdot 0 + 0 = 0$	0	6

IV ეტაპი: $b_4 = 4$,

Y_3	$C_1(Y_4-4)+C_2(Y_4-Y_3)+f_5(y_4)$			ოპტიმალ. ამონახსნი	
	$Y_4=4$	$Y_4=5$	$Y_4=6$	$f_5(Y_4)$	Y_5^*
8	$3\cdot 0+0+8=8$	$3\cdot 1+0+6=9$	$3\cdot 2+0+0=6$	6	6

III ეტაპი: $b_3=8$,

Y_2	$C_1(Y_3-8)+C_2(Y_3-Y_2)+f_4(y_3)$	ოპტიმალ. ამონახსნი	
	$Y_3=8$	$f_3(Y_2)$	Y_3^*
7	$3\cdot 0+4+2\cdot 1+6=12$	12	8
8	$3\cdot 0+0+6=6$	6	8

II ეტაპი: $b_2=7$,

Y_1	$C_1(Y_2-7)+C_2(Y_2-Y_1)+f_3(y_2)$		ოპტიმალ. ამონახსნი	
	$Y_2=7$	$Y_2=8$	$f_2(Y_1)$	Y_2^*

5	$3 \cdot 0 + 4 + 2 \cdot 2 + 12 = 20$	$3 \cdot 1 + 4 + 2 \cdot 3 + 6 = 19$	19	8
6	$3 \cdot 0 + 4 + 2 \cdot 1 + 12 = 18$	$3 \cdot 1 + 4 + 2 \cdot 2 + 6 = 17$	17	8
7	$3 \cdot 0 + 0 + 12 = 12$	$3 \cdot 1 + 4 + 2 \cdot 1 + 6 = 15$	12	7
8	$3 \cdot 0 + 0 + 12 = 12$	$3 \cdot 10 + 0 + 6 = 9$	9	8

I ეტაპი: $b_1 = 5$,

y_0	$C_1(y_1-5)+ C_2(y_1-y_0)+ f_2(y_1)$				პტიმალ. ამონახსნი	
	$y_1=5$	$y_1=6$	$y_1=7$	$y_1=8$	$f_1(y_0)$	y_1^*
5	3·0+0+19=19	3·1+4+2·1+17=26	3·2+4+2·2+12=26	3·3+4+2·3+9=28	19	5

ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნია:

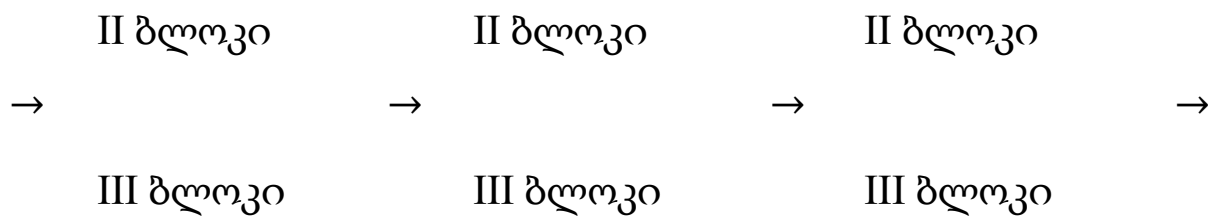
$y_0=5 \rightarrow y_1^*=5 \rightarrow y_2^*=8 \rightarrow y_3^*=8 \rightarrow y_4^*=6 \rightarrow y_5^*=6$

ე.ი. პირველ თვეში დაიქირავებს 5 მუშას, შემდეგ თვეში დაიქირავებს კიდევ 3 მუშას და ეყოლება 8 მუშა, მესამე თვეში დაიტოვებს 8 მუშას, მეოთხე თვეში დაითხოვს 2 მუშას და დაიტოვებს 6 მუშას და ბოლოს მეხუთე თვეში ეყოლება 6 მუშა. ჟამური დანახარჯები ამ შემთხვევაში ტოილ იქნება 19 ერთეულის.

2.4. საიმედოობის ამოცანა

ვთქვათ, უნდა ავაწყოთ რაიმე ხელსაწყო, რომელიც შედგება *N* ძირითადი კომპონენტისაგან. თითოეული მათგანი ერთმანეთთან შეერთებულია მიმდევრობით, ამიტომ რომელიმე კომპონენტის მწყობრიდან გამოსვლა იწვევს ხელსაწყოს მწყობრიდან გამოსვლას. Xელსაწყოს საიმედოობა შეგვიძლია გავზარდოთ თითოეული კომპონენტის დუბლირებით. Xელსაწყოს კონსტრუქცია საშუალებას იძლევა ყოველ ცომპონენტს ჰქონდეს სამ ბლოკამდე, რომლებიც შეერთებული იქნება პარალელურად:

I კომპონენტი	IIკომპონენტი	IIIკომპონენტი
I ბლოკი	I ბლოკი	I ბლოკი



ვთქვათ, ხელსაწყოს ღირებულებამ არ უნდა გადააჭარბოს C რაოდენობის თანხას. შემოვიღოთ აღნიშვნები: $R_j(k_j)$ იყოს თითოეული კომპონენტის საიმედოობა. $C_j(k_j)$ თითოეული კომპონენტის ასაგებად გაწეული დანახარჯები. k_j ბლოკების რაოდენობა. ღომლებიც კომპონენტებში შეერთებულნი არიან პარალელურად $-j = 1,2,\cdots,N$.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: განვსაზღვროთ k_j ბლოკების რაოდენობა თითოეულ $j = 1,2,\cdots,N$ კომპონენტში ისე, რომ ხელსაწყოს საიმედოობა იყოს მაქსიმალური, ხოლო მასზე გაწეულმა დანახარჯებმა არ გადააჭარბოს განსაზღვრულ თანხას.

განმარტების თანახმად, თუ ხელსაწყო შედგება N ცალი მიმდევრობით ჩართული კომპონენტისაგან, სადაც თითოეული კომპონენტი შეიცავს k_j რაოდენობის $j = 1,2,\cdots,N$

პარალელურად შეერთებულ ბლოკს, ხელსაწყოს საიმედოობა R ტოლია თითოეული კომპონენტის საიმედოობის ნამრავლის, ამრიგად გვაქვს:

$$R = \prod_{j=1}^{N} R_j(k_j) \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^{N} C_j(k_j) \leq C,$$

$C -$ ხელსაწყოს მაქსიმალური ღირებულებაა.

შევნიშნოთ, რომ ამ ამოცანაში $k_j = 0$ ვარიანტს აზრი არა აქვს.

დინამიკური პროგრამირების მოდელის ელემენტები: ეტაპი, მდგომარეობა და ვარიანტები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

1) jძირითად ცომპონენტს დავუკავშიროთ j-ური ეტაპი $j = 1,2, \cdots, N$.
2) Y_j მდგომარეობა გვიჩვენებს იმ ჯამურ დანახარჯებს, რომლებიც დასჭირდა $j, j+1, \cdots, N$ კომპონენტების შექმნას.
3) ამოხსნათა $k_j, j = 1,2, \cdots, N$ ვარიანტები გვიჩვენებენ j –ურ კომპონენტში პარალელურად შეერთებული ბლოკების რაოდენობას.

4) $f_j(Y_j)$–ით აღვნიშნოთ საიმედოობის მაქსიმალური მნიშვნელობა, იმ შემთხვევაში, როდესაც $j, j+1, \cdots, N$ კომპონენტების აგება დაჯდა Y_j თანხა.

ვექნება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობანი:

$$f_N(Y_N) = \max_{C_N(k_N) \le Y_N} \{R_N(k_N)\},$$

$$f_j(Y_j) = \max_{C_j(k_j) \le Y_j} \{R_j(k_j) \cdot f_{j+1}(Y_j - C_j(k_j))\}, j = 1,2, \cdots, N-1;$$

განვიხილოთ კერძო მაგალითი, როდესაც ხელსაწყო შედგება სამი ძირითადი კომპონენტისაგან, ე.ი. $j = 1,2,3$. ვთქვათ $C = 10000\$$ და საწყისი მონაცემები მოცემულია შემდეგი ცხრილის საშუალებით:

k_j	$j=1$		$j=2$		$j=3$	
	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3
1	0,6	1	0,7	3	0,5	2
2	0,8	2	0,8	5	0,7	4
3	0,9	3	0,9	6	0,9	5

გავიგოთ Y_1, Y_2, Y_3 ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლეები:

რადგან მესამე ძირითადი კომპონენტი არ შეიძლება შეიცავდეს ერთზე ნაკლებ ბლოკს, ამიტომ Y_3-ის უმცირესი

მნიშვნელობაა $C_3(1) = 2$, მეორეს მხრივ Y_3-ის მნიშვნელობა არ შეიძლება მეტი იყოს ვიდრე $10 - C_2(1) - C_1(1) = 10 - 3 - 1 = 6$, წინააღმდეგ შემთხვევაში დარჩენილი თანხა არ ეყოფა პირველ და მეორე ძირითად კომპონენტებში თითო ბლოკის ჩართვასაც კი, მაშასადამე $Y_3 = 2,3,4,5,6$. ნალოგიურად გავარკვიოთ Y_2 და Y_1 ცვლადების დასაშვები მნიშვნელობები, Y_2–ის მინიმალური მნიშვნელობა ტოლია $C_2(1) + C_3(1) = 3 + 2 = 5$, ხოლო მაქსიმალური მნიშვნელობა ტოლია $10 - C_1(1) = 10 - 1 = 9$, ე.ი. $Y_2 = 5,6,7,8,9$.

Y_1-ისმინიმალურიმნიშვნელობატოლია$C_1(1) + C_2(1) + C_3(1) = 1 + 3 + 2 = 6$, ხოლო$Y_1$–ის მაქსიმალური მნიშვნელობა ტოლია 10–ის, ე.ი. $Y_1 = 6,7,8,9,10$.

დათვლის დროს გამოვიყენოთ უკუგათვლის სქემა:

III ეტაპი:

$$f_3(Y_3) = \max_{k_3=1,2,3}\{R_3(k_3)\},$$

Y_3	$R_3(k_3)$			ოპტიმალური ამონახსნი	
	$k_3 = 1$ $R = 0{,}5; C = 2$	$k_3 = 2$ $R = 0{,}7; C = 4$	$k_3 = 3$ $R = 0{,}9; C = 5$	$f_3(Y_3)$	k_3^*
2	0,5	-	-	0,5	1
3	0,5	-	-	0,5	1
4	0,5	0,7	-	0,7	2
5	0,5	0,7	0,9	0,9	3
6	0,5	0,7	0,9	0,9	3

II ეტაპი:$f_2(Y_2) = \max_{k_2=1,2,3}\{R_2(k_2) \cdot f_3(Y_2 - C_2(k_2))\}$

Y_2	$R_2(k_2) \cdot f_3(Y_2 - C_2(k_2))$			ოპტიმალური ამონახსნი	
	$k_2 = 1$ $R = 0{,}7; C = 3$	$k_2 = 2$ $R = 0{,}8; C = 5$	$k_2 = 3$ $R = 0{,}9; C = 6$	$f_2(Y_2)$	k_2^*
5	$0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$	-	-	0,35	1
6	$0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35$	-	-	0,35	1
7	$0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$	$0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}40$	-	0,49	1
8	$0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$	$0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}40$	$0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}45$	0,63	1
9	$0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$	$0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$	$0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}45$	0,63	1

I ეტაპი: $f_1(Y_1) = \max_{k_1=1,2,3} \{R_1(k_1) \cdot f_2(Y_1 - C_1(k_1))\}$

Y_1	$R_1(k_1) \cdot f_2(Y_1 - C_1(k_1))$			ოპტიმალური ამონახსნი	
	$k_1 = 1$ $R = 0{,}6; C = 1$	$k_1 = 2$ $R = 0{,}8; C = 2$	$k_1 = 3$ $R = 0{,}9; C = 3$	$f_1(Y_1)$	k_1^*
6	$0{,}6 \cdot 0{,}35 = 0{,}21$	-	-	0,21	1
7	$0{,}6 \cdot 0{,}35 = 0{,}21$	$0{,}8 \cdot 0{,}35 = 0{,}28$	-	0,28	2
8	$0{,}6 \cdot 0{,}49 = 0{,}294$	$0{,}8 \cdot 0{,}35 = 0{,}28$	$0{,}9 \cdot 0{,}35 = 0{,}315$	0,315	3
9	$0{,}6 \cdot 0{,}63 = 0{,}378$	$0{,}8 \cdot 0{,}49 = 0{,}392$	$0{,}9 \cdot 0{,}35 = 0{,}315$	0,392	2
10	$0{,}6 \cdot 0{,}63 = 0{,}378$	$0{,}8 \cdot 0{,}63 = 0{,}504$	$0{,}9 \cdot 0{,}49 = 0{,}441$	0,504	2

ოცემული $C = 10000$ დოლარისათვის და ცხრილში მოცემული საწყისი მონაცემების შემთხვევაში ოპტიმალური ამონახსნი იქნება: $(k_1^*; k_2^*; k_3^*) = (2; 1; 3)$ (k_1*,k_2*,k_3*)=(2,1,3), საიმედოობა კი $R = 0{,}50$, ეს ნიშნავს, რომ ხელსაწყოს პირველ კომპონენტში ექნება ორი ბლოკი, მეორე კომპონენტში ერთი ბლოკე და მესამე კომპონენტში სამი ბლოკი.

თავი III
მარაგთა ოპტიმალური მართვის თეორია

3.1. შესავალი

ოპერაციათა კვლევის ერთ–ერთ ყველაზე უმნიშვნელოვანეს დარგს პრაქტიკული თვალსაზრისით წარმოადგენს მარაგთა ოპტიმალური მართვის თეორია. მარაგები და მათი შექმნისა და გამოყენების საკითხები ხშირად გვხვდება მრეწველობაში, ეკონომიკაში და ყოველდღიურ ცხოვრებაში.

მარაგების არსებობა ერთის მხრივ გამოწვეულია აუცილებლობით, ხოლო მეორეს მხრივ მათი არსებობა დაკავშირებულია გარკვეულ დანახარჯებთან. მარაგების შექმნის აუცილებლობა განპირობებულია იმით, რომ როგორც წესი მომარაგება ხდება გაცილებით დიდი მოცულობებით,

ვიდრე საქონლის გასაღება. შეიძლება მარაგის უქონლობის გამო ვერ დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნილება გარკვეულ საქონელზე, რაც ფაქტიურად დაგვაკარგინებდა გარკვეულ შემოსავალს. ე.ი. დეფიციტის შემთხვევაში შეგვიძლია ვიფიქროთ, რომ ადგილი აქვს წაგებას. აღნიშნული სახის დანაკარგებს ხშირად სადეფიციტო ჯარიმას უწოდებენ.

მარაგების შექმნა დაკავშირებულია აგრეთვე გარკვეულ დანახარჯებთან: საჭიროა საწყობების აშენება, საქონლის შენახვისასშესაძლებელია მისი დიდი რაოდენობა ნაწილობრივ ან მთლიანად დაზიანდეს ან მოხდეს საქონლის ჩაწოლა მასზე მოთხოვნილების უქონლობის გამო, ამიტომ საჭიროა ამ დადებითი და უარყოფითი მხარეების გათვალისწინებით განვსაზღვროთ მარაგების შექმნის ოპტიმალური რაოდენობა ყოველ კონკრეტულ სიტუაციაში. საერთოდ მომარაგება – გასაღების პროცესი შეიძლება სქემატურად ასე წარმოვიდგინოთ:

მომხმარებელი → შეკვეთის პუნქტი → საწყობი → რეალიზაციის პუნქტი

შეკვეთისას გაწეული დანახარჯები შემდეგი სახისაა:

1. საქონლის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯები, რომელიც შეკვეთილი საქონლის რაოდენობის პროპორციულია.
2. ზედნადები ხარჯები, რომელიც შეკვეთილი საქონლის მოცულობაზე არ არის დამოკიდებული.

დანახარჯები საქონლის შენახვაზე არის:

1. საწყობების აშენებასთან დაკავშირებული დანახარჯები.
2. საქონლის შენახვასთან დაკავშირებული დანახარჯები.
3. სადეფიციტო ჯარიმა.

განვიხილოთ მომარაგება–გასაღების პროცესის სხვადასხვა შემთხვევები:

1. სტატიკურ–დეტერმინირებული შემთხვევა. ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ, რომ ზუსტადაა ცნობილი მოთხოვნილება გარკვეული სახის საქონელზე და შეკვეთილი საქონლის საერთო რაოდენობა ემთხვევა საქონელზე მოთხოვნილების რაოდენობას,

2. მარაგთა მართვის სტოქასტური ანუ ალბათური მოდელი. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მოთხოვნილება საქონელზე უცნობია და დავუშვათ, რომ ვიცით მხოლოდ მოთხოვნილებების ალბათური განაწილება, ე.ი. ვთვლით, რომ ვიცით ალბათობები იმისა, რომ მოთხოვნილი საქონლის რაოდენობა იქნება: $1,2,3,\cdots$. ალბათობა იმისა რომ მოთხოვნაა

1 არის p_1 - ალბათობა იმისა რომ მოთხოვნაა 2 არის p_2 და ა.შ. დავუშვათ, რომ საქონლის ერთეულის რეალიზაციისას მიღებული შემოსავალი არის M, ხოლო ერთეული საქონლის გაუსაღებლობით მიღებული ზარალი არის E. ჩვენი მიზანია მოვძებნოთ შესაკვეთი საქონლის ოპტიმალური მოცულობა. ჩვენ შემთხვევაში ცხადია, რომ $p_1, p_2, \cdots, p_N$ ალბათობების მიმდევრობა წარმოადგენს კლებად მიმდევრობას, რადგან N რაოდენობა საქონლის გაყიდვის ალბათობა არის p_N , ამიტომ p_N ფაქტიურად იქნება აგრეთვე მე– N -ე საქონლის გაყიდვის ალბათობა. მე– N -ე საქონლის გაყიდვით მიღებული შემოსავალი იქნება Mp_N, ხოლო მე- N-ე საქონლის არ გაყიდვით მიღებული ზარალი იქნება $E(1-p_N)$ რადგან $1-p_N$ წარმოადგენს საქონლის არგაყიდვის ალბათობას.

ცხადია N ისე უნდა შეირჩეს, რომ სრულდებოდეს უტოლობა

$$Mp_N - E(1-p_N) > 0\,, \qquad (3.1)$$

და ეს გამოსახულება ღებულობდეს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.

(3.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$p_N > \frac{E}{E+M}\,, \qquad (3.2)$$

ე.ი. N უნდა შეირჩეს ისე, რომ იგი იყოს მაქსიმალური და დააკმაყოფილოს (3.2) უტოლობა. დავითვალოთ $\frac{E}{E+M}$ სიდიდე,

რომელიც ყოველთვის ერთზე ნაკლებია. შემდეგ, მოცემულ ალბათობათა $p_1, p_2, \cdots, p_N, \cdots$ მიმდევრობაში მარცხნიდან მარჯვნივ ვეძებთ ისეთ წევრს, რომელიც აკმაყოფილებს (3.24) უტოლობას და ბოლოა ასეთ წევრებს შორის.

ცხადია, რომ რაც უფრო მცირე იქნება $\frac{E}{E+M}$ გამოსახულების მნიშვნელობა, მით უფრო მარჯვნივ იქნება შესაბამისი p_N ალბათობათა მიმდევრობაში ე.ი. მით უფრო დიდი მოცულობის შეკვეთა უნდა გაკეთდეს.

(3.2) უტოლობას აქვს მარტივი ეკონომიკური აზრი. კერძოდ, იმ შემთხვევაში, როდესაც $M \gg E$, მაშინ $\frac{E}{E+M}$ ნულთან ახლოსაა. ეს კი შეესაბამება იმას, რომ ამ შემთხვევაში საქონლის რეალიზაციით მიღებული მოგება M გაცილებით მეტია, ვიდრე საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები. ე.ი. საქონელზე უნდა გაკეთდეს დიდი მოცულობის მოთხოვნა, ხოლო თუ პირიქით $E \gg M$, მაშინ $\frac{E}{E+M}$ ახლოს არის ერთთან, რაც ნიშნავს, რომ საქონელი უნდა შევუკვეთოთ მცირე მოცულობით.

ნებისმიერი საწარმოს ან ორგანიზაციის უწყვეტი მოქმედებისათვის აუცილებელია გარკვეული სახის საქონლის მარაგის შექმნა. მარაგის შექმნა კი ყოველთვის დაკავშირებულია დანახარჯებთან.

მარაგის შექმნა შეიძლება მოხდეს საწარმოს ფუნქციონირების მთელი დროისათვის ან შეიძლება მარაგის შევსება ხდებოდეს გარკვეული მცირე პერიოდის შემდეგ. პირველ შემთხვევაში საქმე გვაქვს დიდ დანახარჯებთან, რაც გამოწვეულია ზედმეტი საქონლის შენახვასთან დროის დიდი შუალედის განმავლობაში, სამაგიეროდ ადგილი არა აქვს დეფიციტს და მცირეა ზედნადები ხარჯებიც. მეორე შემთხვევაში კი დიდია ზედნადები ხარჯები, მცირდება შენახვის ხარჯები და შესაძლებელია ადგილი ჰქონდეს საქონლის დეფიციტს. მაშასადამე საჭიროა ამ ორ მიდგომას შორის შეირჩეს შუალედური ოპტიმალური მიდგომა.

მარაგთა მართვის ნებისმიერი მოდელის აგებისას პასუხი უნდა გავცეთ შემდეგ ორ კითხვას:

1. რა მოცულობის შეკვეთა უნდა მოხდეს საქონელზე?
2. დროის რომელ მომენტში უნდა მოხდეს შეკვეთა?

პირველ კითხვაზე პასუხს გვაძლევს დანახარჯების მინიმიზაციის ამოცანა, ხოლო მეორე კითხვაზე რომ პასუხი გავცეთ, საჭიროა ვიცოდეთ როგორ ხდება კონტროლი არსებული მარაგის ოდენობაზე. თუ კონტროლი ხორციელდება ეტაპობრივად, დროის გარკვეული შუალედების შემდეგ, მაშინ საქონელზე შეკვეთის მომენტები ემთხვევა ახალი პერიოდის დასაწყისს, ხოლო თუ კონტროლი ხორციელდება უწყვეტად, მაშინ შეკვეთის მომენტი

განისაზღვრება არსებული მარაგის გარკვეული კრიტიკული რაოდენობით.

მარაგთა მართვის ჯამური დანახარჯები შედგებიან შემდეგი კომპონენტებისაგან:

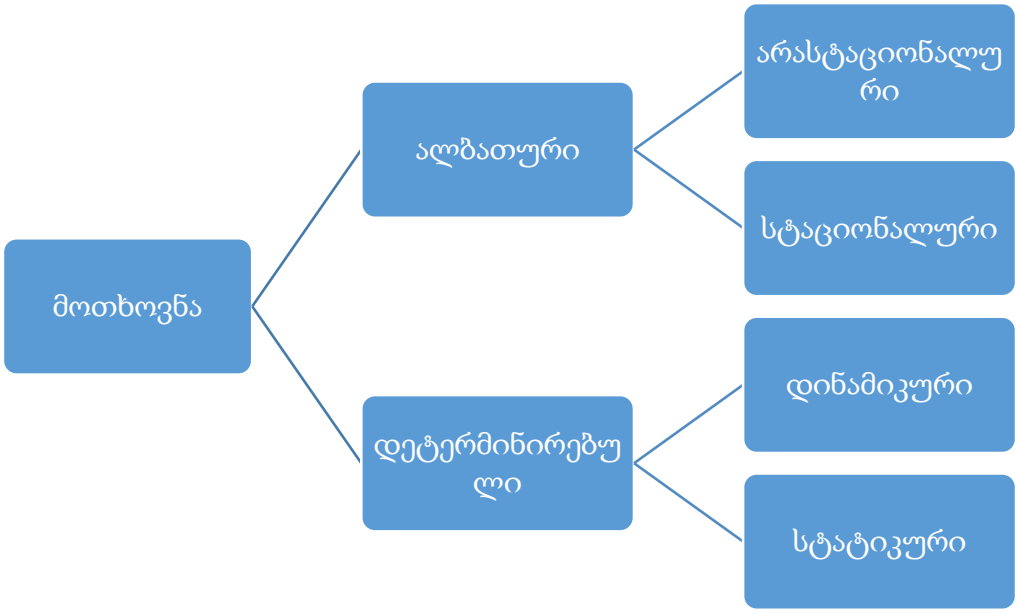
ა) დანახარჯები საქონლის შეძენაზე; ბ) ზედნადები ხარჯები; გ) შენახვის ხარჯები; დ) სადეფიციტო ჯარიმა.

საქონლის შეძენაზე გაწეული დანახარჯები მნიშვნელოვანია განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც ერთეული საქონლის ფასი დამოკიდებულია შეკვეთის მოცულობაზე. ზედნადები ხარჯები გამოწვეულია შეკვეთის გაფორმებით და გადაზიდვით. სადეფიციტო ჯარიმა გამოწვეულია საჭირო საქონლის მარაგის უქონლობით ე.ი. ფაქტიურად იგი ტოლია იმ მოგებისა, რომელსაც მივიღებდით იმ შემთხვევაში, როდესაც საქონელზე მოთხოვნას ყოველთვის დავაკმაყოფილებდით სრულად.

ჩვენი მიზანია შევარჩიოთ შეკვეთის ის ოპტიმალური მოცულობა Y^*, რომლის დროსაც ჯამური დანახარჯები იქნება მინიმალური.

მარაგთა ოპტიმალური მართვის მოდელების შედგენისას არსებითი მნიშვნელობა აქვს საქონელზე მოთხოვნის ხასიათს. თუ საქონელზე მოთხოვნა სარწმუნოა, მაშინ გვაქვს მარაგთა მართვის დეტერმინირებული მოდელი, ხოლო თუ მოთხოვნა საქონელზე ატარებს ალბათურ ხასიათს, მაშინ იყენებენ

ალბათურ მოდელებს. თავის მხრივ, დეტერმინირებული მოდელები იყოფა ორ ჯგუფად: დინამიკური მოდელები და სტატიკური მოდელები, იმის მიხედვით მოთხოვნილება საქონელზე ცვალებადია დროში თუ არა. ალბათური მოდელებიც იყოფა ორ ჯგუფად: თუ მოთხოვნის ალბათური განაწილების სიმკვრივე დროში არ იცვლება, მაშინ გვაქვს სტაციონალური მოდელი, ხოლო თუ მოთხოვნის ალბათური განაწილების სიმკვრივე დროში იცვლება, მაშინ გვაქვს არასტაციონალური მოდელი.



მარაგთა ოპტიმალური მართვის მათემატიკური მოდელების შედგენისას გარდა მოთხოვნილების შესახებ ინფორმაციისა უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი ფაქტორებიც:

ა) როგორ ხდება შეკვეთის მიღება, მომენტალურად თუ ადგილი აქვს დაყოვნებას შეკვეთის გაფორმებიდან მის მიღებამდე.

ბ) მარაგის შევსება ხდება ერთდროულად თუ თანდათანობით.

გ) მარაგის დასაგროვებელი პუნქტები ერთია თუ ერთზე მეტი.

დ) ვაგროვებთ ერთი სახის საქონელს თუ სხვადასხვა სახისას.

3.2. მარაგთა მართვის ერთპროდუქტიანი სტატიკური მოდელი

მარაგთა მართვის ერთპროდუქტიანი სტატიკური მოდელი აიგება იმ შემთხვევაში, როდესაც მოთხოვნა მუდმივია დროში, მარაგის შევსება ხდება მყისიერად და ადგილი არა აქვს საქონელზე დეფიციტს. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

β – მოთხოვნის ინტენსივობა, ანუ აღნიშნულ საქონელზე მოთხოვნილება დროის ერთეულში.

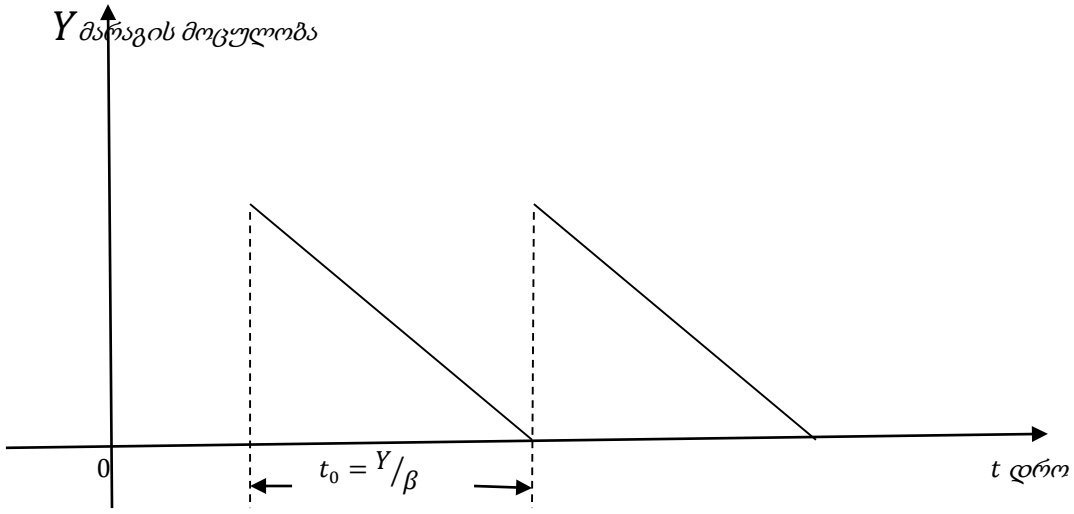
Y – შეკვეთილი საქონლის მოცულობა.

K– ზედნადები ხარჯები, ანუ შეკვეთის გაფორმებაზე და გადაზიდვაზე გაწეული დანახარჯები.

h – ერთეული საქონლის დროის ერთეულში შენახვის ხარჯები.

დავუშვათ, მარაგი თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს, როდესაც ვუკვეთავთ Y მოცულობის საქონელს, ხოლო მარაგი ხდება 0 –ის ტოლი $\frac{Y}{\beta}$ დროის შემდეგ.

$Q(Y)$–ით ავღნიშნოთ ჯამური დანახარჯები დროის ერთეულში, Y მოცულობის მარაგის შექმნისას.



ნახაზიდან ჩანს, რომ ციკლის ხანგრძლივობა ე.ი. დროის შუალედი შეკვეთიდან შემდეგ შეკვეთამდე არის $t_0 = {}^{Y}/_{\beta}$, ხოლო მარაგის საშუალო დონეა ${}^{Y}/_{2}$, ცხადია გვექნება:

$$Q(Y) = \frac{K}{\frac{Y}{\beta}} + \frac{hY}{2} = \frac{K\beta}{Y} + \frac{hY}{2} \ ,$$

შესაკვეთი საქონლის ოპტიმალური მოცულობის დასადგენად ვიპოვოთ $Q(Y)$ ფუნქციის მინიმალური

მნიშვნელობა. ამისათვის $Q(Y)$ ფუნქცია გავაწაროოთ $Y-$ის მიმართ და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ:

$$\frac{dQ(Y)}{dY} = -\frac{K\beta}{Y^2} + \frac{h}{2} = 0\,,$$

აქედან კი მივიღებთ, რომ

$$Y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}\ .$$

მიღებულ ფორმულას უწოდებენ უილსონის ფორმულას.

შეკვეთა საქონელზე უნდა მოხდეს ყოველი $t_0^* = \frac{Y^*}{\beta}$ დროის გასვლის შემდეგ

$$t^* = \frac{\sqrt{\frac{2K\beta}{h}}}{\beta} = \sqrt{\frac{2K}{h\beta}}\ .$$

დავითვალოთ ჯამური დანახარჯების ოპტიმალური რაოდენობა:

$$Q(Y^*) = \frac{K\beta\sqrt{h}}{\sqrt{2K\beta}} + h \cdot \frac{\sqrt{2K\beta}}{2\sqrt{h}} = \sqrt{2K\beta h}\ .$$

უილსონის ფორმულის მარტივი ეკონომიკური აზრი შემდეგია: შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობა პირდაპირპროპორციულია კვადრატული ფესვი ზედნადები ხარჯისა და მოთხოვნის ინტენსივობის ნამრავლიდან და უკუპროპორციულია კვადრატული ფესვი საქონლის ერთეულის შენახვაზე გაწეული ხარჯებისა დროის ერთეულში.

3.3. ერთპროდუქტიანი სტატიკური მოდელი უწყვეტი მომარაგებით

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მოთხოვნილება და მომარაგება უწყვეტი სიდიდეებია. ასეთი სიტუაცია წარმოიქმნება მაშინ, როდესაც მომარაგების და გასაღების პუნქტები ერთადაა თავმოყრილი, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

β არის მოთხოვნილების ინტენსივობა.

α – წარმოების ინტენსივობა (გვიჩვენებს დროის ერთეულში საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას).

Y – შეკვეთის მოცულობა.

K – შეკვეთით გამოწვეული ზედნადები ხარჯები.

C – ერთეული პროდუქციის შესასყიდი ღირებულება.

h– ერთეული პროდუქციის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში.

Y მოცულობის პროდუქციის საწარმოებლად საჭირო დრო ტოლია $t = \frac{Y}{\alpha}$ სიდიდის, ხოლო ამავე მოცულობის პროდუქციის სარეალიზაციოდ საჭირო დრო ტოლია $\tau = \frac{Y}{\beta}$ სიდიდის, გრაფიკულად მარაგის დაგროვების პროცესი შემდეგნაირად შეიძლება გამოვსახოთ:

$$0 \qquad \overbrace{\qquad\qquad} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t$$
$$\tau$$

ჩხადია $\alpha - \beta$ წარმოადგენს პროდუქციის დაგროვების ინტენსივობას, ანუ დროის ერთეულში დაგროვილი საქონლის რაოდენობას. იმ შემთხვევაში, როდესაც ერთდროულად ხდება როგორც საქონლის წარმოება, ისე მისი რეალიზაცია, მაშინ დაგროვებული საქონლის რაოდენობა t დროის განმავლობაში არის

$$(\alpha - \beta)t = \frac{(\alpha-\beta)Y}{\alpha} \ .$$

იმის გამო, რომ მარაგის მინიმალური რაოდენობა ნოლია, ამიტომ მარაგის საშუალო დონედ შეგვიძლია მივიჩნიოთ შემდეგი სიდიდე:

$$\frac{(\alpha-\beta)t}{2} = \frac{(\alpha-\beta)Y}{2\alpha} \ .$$

Y მოცულობის საქონლის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში ტოლია $C\beta$, ხოლო ზედნადები ხარჯები კი – $\frac{K\beta}{Y}$, ჯამური დანახარჯები ავღნიშნოთ $Q(Y)$–ით, გვექნება:

$$Q(Y) = C\beta + \frac{K\beta}{Y} + \frac{(\alpha - \beta)Yh}{2\alpha},$$

შადაც $\frac{(\alpha-\beta)Yh}{2\alpha}$ წარმოადგენს Y მოცულობის საქონლის შენახვაზე გაწეულ დანახარჯებს დროის ერთეულში.

შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობის დასადგენად $Q(Y)$ ფუნქცია გავაწარმოოთ Y–ით და გავუტოლოთ ნულს, გვექნება:

$$\frac{dQ(Y)}{dY} = -\frac{K\beta}{Y^2} + \frac{(\alpha - \beta)h}{2\alpha} = 0\,,$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$Y^* = \sqrt{\frac{2K\alpha\beta}{(\alpha - \beta)h}},$$

ე.ი.

$$Y^* = \sqrt{\frac{2\beta K}{(1-\frac{\beta}{\alpha})h}}$$

მივიღეთ უილსონის ფორმულის განზოგადებული ფორმულა, რომელიც გვიჩვენებს შეკვეთის მოცულობის ზრდას იმ შემთხვევაში, როდესაც მოთხოვნილებისა და წარმოების ინტენსივობანი ერთი და იგივე რიგისანი არიან. ეს სიტუაცია

წარმოადგენს განუწყვეტელი წარმოების შესაბამის სიტუაციას.

თუ α გაცილებით აღემატება β–ს ე.ი. $\alpha \gg \beta$, მაშინ უილსონის განზოგადოებული ფორმულა ემთხვევა უილსონის ფორმულას.

საწარმოს მუშაობის ოპტიმალური დრო გამოითვლება ფორმულით:

$$t^* = \frac{Y^*}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha\beta K}{(\alpha-\beta)h}} = \sqrt{\frac{2\beta K}{\alpha(\alpha-\beta)h}},$$

ხოლო Y^* მოცულობის საქონლის სარეალიზაციოდ საჭირო დრო შემდეგი ფორმულით:

$$\tau^* = \frac{Y^*}{\beta} = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\alpha\beta K}{(\alpha-\beta)h}} = \sqrt{\frac{2\alpha K}{\beta(\alpha-\beta)h}}.$$

3.4. მარაგთა მართვის ერთპროდუქტიანი სტატიკური მოდელი ცვლადი შესასყიდი ფასებით

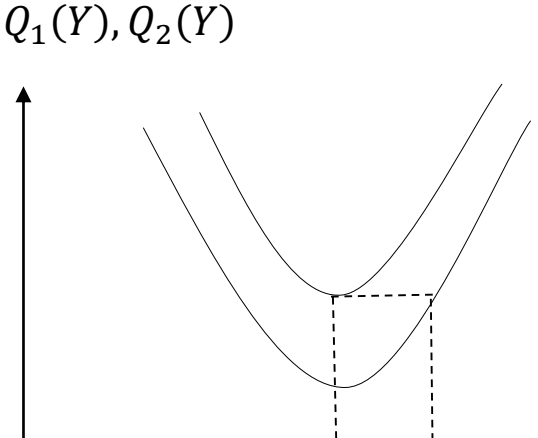
განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საქონლის შესასყიდი ფასი დამოკიდებულია შეკვეთის მოცულობაზე. ვთქვათ, ერთეული საქონლის შესასყიდი ფასი ტოლია C_1 -ის, თუ შეკვეთილი საქონლის მოცულობა $Y < q$, ხოლო ერთეული საქონლის შესასყიდი ფასი ტოლია C_2 −ის, თუ შეკვეთილი საქონლის მოცულობა $Y \geq q$ $\mathrm{y} \geq \mathrm{q}$, ცხადია $C_1 > C_2$. ვთქვათ დეფიციტს არა აქვს ადგილი.

ამ შემთხვევაში ჯამური დანახარჯები გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

$$Q_1(Y) = C_1\beta + \frac{K\beta}{Y} + \frac{Yh}{2\alpha}\,, \qquad \text{თუ } Y < q\,,$$

$$Q_2(Y) = C_2\beta + \frac{K\beta}{Y} + \frac{Yh}{2\alpha}\,, \qquad \text{თუ } \quad Y \geq q\,.$$

შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობის Y^*-ის საპოვნელად მივმართოთ გრაფიკულ ხერხს, რისთვისაც ავაგოთ $Q_1(Y)$ და $Q_2(Y)$ ფუნქციების შესაბამისი გრაფიკები:



0 Y_m q_1 Y

თითოეული $Q_1(Y)$ და $Q_2(Y)$ ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა $Y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$ წერტილში, შეკვეთის ოპტიმალური Y^* მოცულობის გასაგებად არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმას, თუ ფასების „წყვეტის„ შესაბამისი q სიდიდე რა დამოკიდებულებაშია შემდეგ შუალედებთან:

1) $0 \le q < Y_m$; 2) $Y_m \le q < q_1$; 3) $q \ge q_1$.

სადაც q_1 $(q_1 > Y_m)$ არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

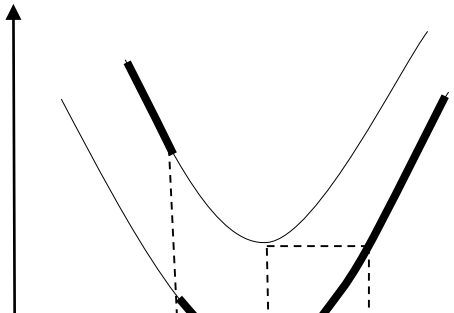
$$Q_1(Y_m) = Q_2(q_1)$$

ანუ

$$C_1\beta + \frac{K\beta}{Y_m} + \frac{Y_m h}{2} = C_2\beta + \frac{K\beta}{q_1} + \frac{q_1 h}{2}$$

1) განვიხილოთ $0 \le q < Y_m$ შემთხვევა

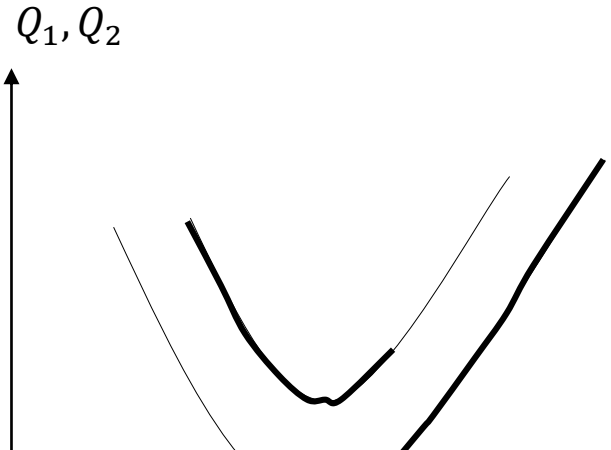
Q_1, Q_2

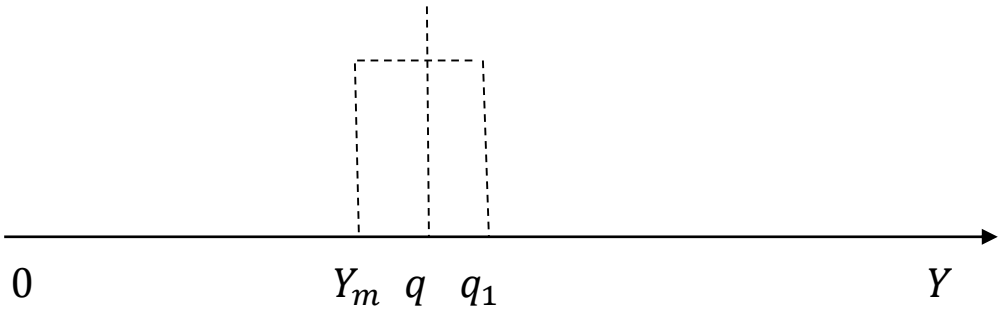


0 q Y_m q_1 Y

ნახაზზე მოცემული წყვეტილი ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა Y_m წერტილში. ეს კი ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში $Y^* = Y_m$, რადგან მოცემული გამოყოფილი გრაფიკების ნაწილები განსაზღვრავენ ჯამურ დანახარჯებს Y მოცულობის საქონლის შეკვეთისათვის.

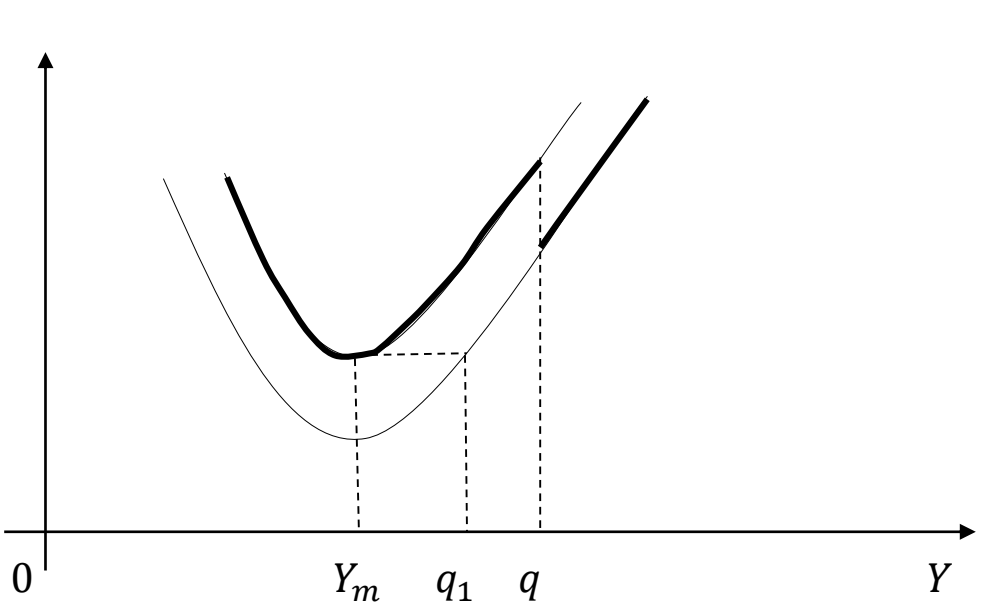
2) განვიხილოთ $Y_m \leq q < q_1$ შემთხვევა





ამ ნახაზზე მოცემული წყვეტილი ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა $Y = q$ წერტილში, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში $Y^* = q$.

3) განვიხილოთ $q \geq q_1$ შემთხვევა,



ცხადია, ამ შემთხვევაში ნახაზზე გამოყოფილი წყვეტილი ფუნქციის მინიმუმი მიიღწევა $Y = Y_m$ წერტილში. ე.ი. $Y^* = Y_m$. მრიგად, გვაქვს:

$$Y^* = \begin{cases} Y_m\,, & 0 \le q \le Y_m\,, \\ q\,, & Y_m \le q \le q_1\,, \\ Y_m\,, & q \ge q_1. \end{cases}$$

სადაც

$$Y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}.$$

Y^* სიდიდის მოძებნის ალგორითმი შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

ა) გამოვითვლით $Y_m = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}}$ სიდიდეს, თუ $q < Y_m$, მაშინ $Y_* = Y_m$ და ალგორითმი დამთავრებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავდივართ ბ) ბიჯზე,

ბ) გამოვითვლით q_1 სიდიდეს

$$C_1\beta + \frac{K\beta}{Y_m} + \frac{Y_m h}{2} = C_2\beta + \frac{K\beta}{q_1} + \frac{q_1 h}{2}$$

განტოლებიდან და q_1–ის მიღებულ მნიშვნელობას შევადარებთ Y_m და q სიდიდეებს.

1) თუ $Y_m \le q < q_1$, მაშინ $Y^* = q$.

2) თუ $q \geq q_1$, მაშინ $Y^* = Y_m$.

3.5. მრავალპროდუქტიანი სტატიკური მოდელი საწყობის ტევადობაზე შეზღუდვით

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც გვაქვს A ფართობის საწყობი გათვალისწინებული n სხვადასხვა სახის საქონლისათვის. ვთქვათ

β_i , $(i = 1,2, \cdots, n)$ არის $i-$ური სახის საქონელზე მოთხოვნილების ინტენსივობა ე.ი. გვიჩვენებს დროის ერთეულში რეალიზებული $i-$ური სახის საქონლის მოცულობას;

K_i , $(i = 1,2, \cdots, n)$ არის $i-$ური სახის საქონელზე გაწეული ზედნადები ხარჯები;

a_i , $(i = 1,2, \cdots, n)$ არის $i-$ური სახის ერთეული საქონლის შენახვისათვის საჭირო ფართობი;

h_i , $(i = 1,2, \cdots, n)$ არის $i-$ური სახის ერთეული საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში;

Y_i , $(i = 1,2, \cdots, n)$ არის $i-$ური სახის საქონელზე შეკვეთის მოცულობა.

დავუშვათ, რომ საქონლის მიღება ხდება შეკვეთისთანავე და ადგილი არა აქვს დეფიციტს.

ცხადია$a_i Y_i$, $(i = 1,2, \cdots, n)$ წარმოადგენს Y_i რაოდენობის $i-$ური სახის საქონლისათვის საჭირო ფართობს საწყობში, ამრიგად$Y_i, (i = 1,2, \cdots, n)$ სიდიდეები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ დაკმაყოფილდეს შემდეგი შეზღუდვა:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i \leq A \,, \qquad (3.5)$$

დავუშვათ, რომ ყოველიi , $(i = 1,2, \cdots, n)$ სახის ერთეული საქონლის შესასყიდი ფასი არ არის დამოკიდებული აღნიშნული საქონლის შეკვეთის მოცულობაზე. მ შემთხვევაში ყველა სახის საქონელზე გაწეული ჯამური დანახარჯები ტოილ იქნება შემდეგი სიდიდის:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i \beta_i}{Y_i} + \frac{h_i Y_i}{2} \right),$$

ამ გამოსახულებაში არ არის გათვალისწინებული საქონლის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯები, რადგან ეს დანახარჯები ვერ მოახდენენ გავლენას მთლიანი დანახარჯების მინიმიზაციაზე. ამრიგად, გვაქვს შემდეგი სახის ამოცანა: მოვძებნოთ, ყოველიi , $(i = 1,2, \cdots, n)$ სახის საქონლისათვის, შეკვეთის ისეთი ოპტიმალური მოცულობები, რომლებიც ანიჭებენ მინიმუმს შემდეგ გამოსახულებას:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i\beta_i}{Y_i}+\frac{h_iY_i}{2}\right),$$

შემდეგი შეზღუდვების პირობებში:

$$\sum_{i=1}^{n}a_iY_i\le A\,,$$

შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

1) ოველი $i-$ური სახის საქონლისათვის შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობა განვსაზღვროთ უილსონის ფორმულით

$$Y_i^*=\sqrt{\frac{2K_i\beta_i}{h_i}}\,,i=1,2,\cdots,n;$$

და შევამოწმოთ სრულდება თუ არა შემდეგი პირობა

$$\sum_{i=1}^{n}a_iY_i^*\le A\,.$$

თუ ეს პირობა შესრულდა, მაშინ საწყობს ჰქონია საჭირო ფართობი და ასეთი$Y_i^*,,i=1,2,\cdots,n.$ შიდიდეები იქნება მოცემული ამოცანის საძიებელი ამოხსნები.

2) თუ უილსონის ფორმულით მოძიებული$Y_i^*,,i=1,2,\cdots,n.$ სიდიდეებისთვის არ სრულდება (3.5) პირობა, მაშინ შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობის განსაზღვრისათვის

ვიყენებთ ლაგრანჟის დამატებითი მამრავლების მეთოდს. შემოვიღოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L(\lambda, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{K_i \beta_i}{Y_i} + \frac{h_i Y_i}{2} \right) - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i - A \right)$$

სადაც $\lambda < 0$ რაიმე პარამეტრია.

მოვძებნოთ $L(\lambda, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებულები ყველა ცვლადით და გავუტოლოთ ნულს. მივიღებთ $\lambda, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ უცნობების მიმართ შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Y_i} = -\dfrac{K_i \beta_i}{Y_i^2} + \dfrac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i + A = 0, \end{cases} \qquad i = 1,2, \cdots, n. \qquad (3.6)$$

(2.5) ტოლობა და (2.6) სისტემის პირველი განტოლება გვიჩვენებენ, რომ საწყობის ტევადობა მთლიანად უნდა იქნას დაკავებული საქონლით. (2.6) სისტემის დანარჩენი განტოლებებიდან მივიღებთ უილსონის განზოგადოებულ ფორმულას:

$$Y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i \beta_i}{h_i - 2\lambda a_i}}\ , i = 1,2, \cdots, n\ .$$

მიღებული ფორმულის λ პარამეტრის შერჩევა ხდება მოსინჯვის გზით. თავდაპირველად უნდა განისაზღვროს λ პარამეტრის ოპტიმალური მნიშვნელობა. შემდეგ უნდა მოხდეს Y_i^* , $(i = 1,2,\cdots,n)$ სიდიდეების განსაზღვრა.

3.6. მარაგთა მართვის ერთპროდუქტიანი დინამიკური მოდელი

ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს N ეტაპიანი პროცესი, ერთი სახის რაიმე პროდუქტი და ჩავთვალოთ, რომ საქონელზე შეკვეთიდან მის მიღებამდე დაყოვნებას ადგილი არა აქვს, ადგილი არა აქვს აგრეთვე დეფიციტს.

საჭიროა ეს N ეტაპიანი პროცესი წავმართოთ ისე, რომ საერთო დანახარჯები მთელი პროცესის განმავლობაში იყოს მინიმალური. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

Z_i იყოს შეკვეთილი საქონლის მოცულობა i , $(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპზე;

β_i იყოს საქონელზე მოთხოვნის ინტენსივობა i , $(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპზე;

X_i იყოს საქონლის რაოდენობა საწყობში i , $(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპის დასაწყისისათვის;

K_i იყოს ზედნადები ხარჯები i , $(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპზე;

h_i იყოს საქონლის ერთეულის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები, იმ შემთხვევაში თუ ის ვერ გაიყიდა $i\,,(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპზე და ამის გამო გადავიდა$i+1\,,(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპზე;

$C_i(Z_i)$იყოს$Z_i, (i = 1,2,\cdots,N)$ რაოდენობის საქონლის შესყიდვისათვის გაწეული დანახარჯები$i\,,(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპზე.

სქემატურად ეს პროცესი შეიძლება ასე გამოვსახოთ:

$$\begin{array}{ccccccccc} & Z_1 & & Z_2 \downarrow & & \cdots & Z_i & \cdots & Z_N \\ & \downarrow & & & & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \rightarrow & X_2 & \rightarrow X_3 & \cdots & \rightarrow X_{i+1} & \cdots & & X_{N+1} \\ \rightarrow & & & & & & & & = 0 \\ \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \cdots & \beta_i & \cdots & \beta_N & \\ & & & & & \downarrow & & \downarrow & \end{array}$$

მოცემულ აღნიშვნებში გვექნება

$$X_{i+1} = X_i + Z_i - \beta_i\,, i = 1,2,\cdots,N.$$

მიღებული ტოლობა გვიჩვენებს, რომ$i+1$ ეტაპის დასაწყისისათვის საწყობში მყოფი X_{i+1} საქონლის რაოდენობა ტოლია საქონლის იმ რაოდენობისა, რომელიც

დაგვრჩა i ეტაპის ბოლოს, მას დამატებული i ეტაპზე შესყიდული საქონლის Z_i რაოდენობა და გამოკლებული i ეტაპზე რეალიზებული საქონლის β_i რაოდენობა.

ებისმიერ i ეტაპზე საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$h_i(X_i + Z_i - \beta_i) = h_i X_{i+1}\,, i = 1,2,\cdots,N.$$

ვთქვათ $f_i(X_{i+1})$ არის საერთო დანახარჯების მინიმალური რაოდენობა თითოეულ i $(i = 1,2,\cdots,N)$ ეტაპზე.

გამოვიყენოთ ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპი, მაშინ პირდაპირი გათვლის სქემის თანახმად გვექნება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_1(X_2) = \min_{0 \le Z_1 \le \beta_1 + X_2} \{C_1(Z_1) + K_1 + h_1 X_2\}$$

$$f_i(X_{i+1}) = \min_{0 \le Z_i \le \beta_i + X_{i+1}} \{C_i(Z_i) + K_i + h_i X_{i+1} + f_{i-1}(X_i + Z_i - \beta_i)\}\,,$$

$$i = 1,2,\cdots,N.$$

პირობა$X_{N+1} = 0$ ე.ი. $X_N + Z_N = \beta_N$ აუცილებელია სულ ბოლო ეტაპზე, რადგან ჩვენ ვცდილობთ გვქონდეს მინიმალური დანახარჯები და ამიტომ ბოლო ეტაპზე ცხადია არავითარი აზრი არა აქვს საწყობში საქონლის დატოვებას.

თუ გამოვიყენებთ უკუგათვლის სქემას, მაშინ გვექნება:

$$f_N(X_N) = \min_{Z_N + X_N = \beta_N} \{C_N(Z_{N1})\}$$

$$f_i(X_i) = \min_{\beta_i \le X_i + Z_i \le \beta_i + \beta_{i+1} + \cdots + \beta_N} \{C_i(Z_i) + h_i(X_i + Z_i + \beta_i) + K_i + f_{i+1}(X_i + Z_i - \beta_i)\}\ , \qquad i = N-1, N-2, \cdots, 2, 1.$$

$f_i(X_i)$ფუნქცია ყოველი i–თვის წარმოადგენს ბელმანის ფუნქციას და გვიჩვენებს იმ ჯამურ დანახარჯებს, რომლებიც გვექნებოდა$i, i+1, \cdots, N$ ეტაპებზე იმ შემთხვევაში, თუ საქონლის საწყისი რაოდენობა i ეტაპზე იყო X_i და დარჩენილი პროცესი წარიმართა ოპტიმალურად.

3.7. ერთპროდუქტიანი უმარტივესი ალბათური მოდელი მარაგის ოდენობაზე უწყვეტი კონტროლით

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საქონელზე მოთხოვნილება ცნობილია, მაგრამ საქონელზე შეკვეთის გაფორმებიდან მის რეალიზაციამდე დრო შემთხვევით

სიდიდეს წარმოადგენს. ამ დროს ვუწოდოთ შეკვეთის რეალიზაციის დრო.

შეკვეთის მიცემის მომენტი განისაზღვრება მარაგის რაღაც კრიტიკული R რაოდენობით. იგულისხმება, რომ როგორც კი მარაგის რაოდენობა მიაღწევს R–ს, იმ მომენტში ხდება შეკვეთის გაფორმება, ხოლო შეკვეთის მიღებამდე დრო ალბათური ხასიათისაა. როის ერთეულად ჩავთვალოთ ერთი წელიწადი. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობა Y^* და შეკვეთის წარმოდგენის კრიტიკული დონე საწყობში R^*.

ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ ეტაპზე დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნები გადადიან შემდეგ ეტაპზე და დროის ბოლო მომენტში შეიძლება გვქონდეს არა უმეტეს ერთი დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნა, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

X–მოთხოვნილი საქონლის მოცულობა.

$f(X)$–X რაოდენობა საქონელზე მოთხოვნილების ალბათური განაწილების სიმკვრივე.

Y–შეკვეთილი საქონლის მოცულობა.

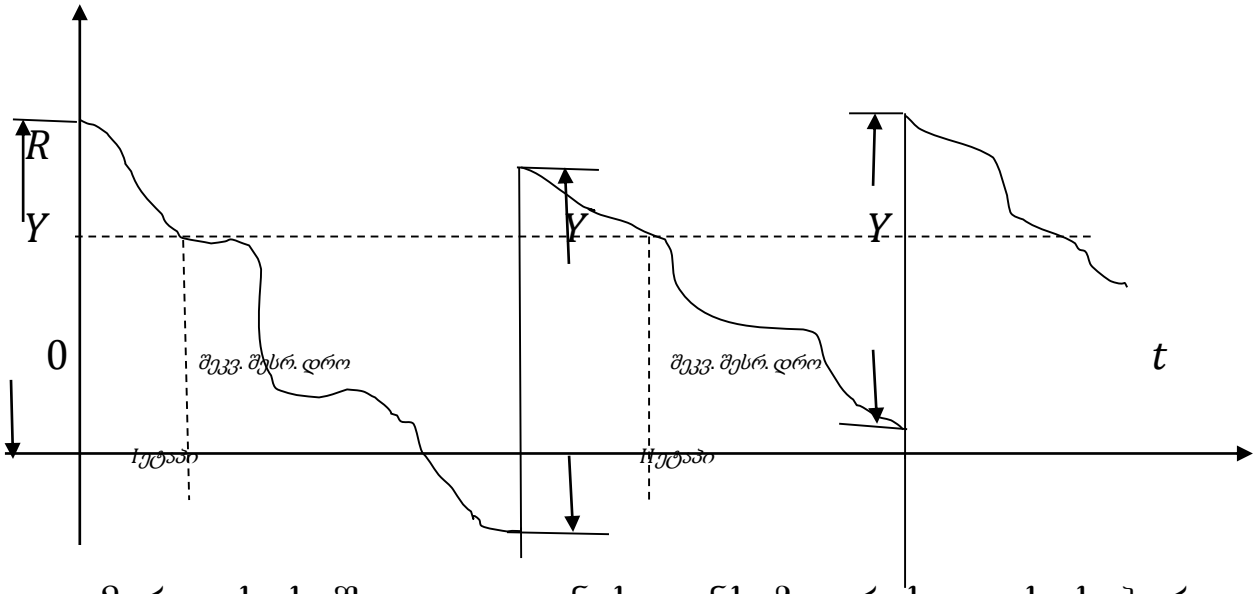
D–საქონელზე მოთხოვნილების მოსალოდნელი წლიური მოცულობა.

K–ერთეული საქონლის შეკვეთის გაფორმებით გამოწვეული ხედნადები დანახარჯები.

h–ერთეული საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები ერთი წლის განმავლობაში.

P–ერთეული საქონლის დეფიციტით გამოწვეული დანაკარგები ერთი წლის განმავლობაში.

გრაფიკულად საქონლის დაგროვებისა და რეალიზაციის პროცესი შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:



მარაგის საშუალო დონის განსაზღვრისათვის საჭიროა მარაგის მინიმალური და მაქსიმალური რაოდენობები შევკრიბოთ და ჯამი გავყოთ შუაზე, ეტაპის დასასრულისათვის მარაგის მოსალოდნელი რაოდენობა ტოლია$E(R - X)$ გამოსახულების, სადაც (Eმათემატიკური ლოდინია), ხოლო ეტაპის დასაწყისისათვის, როცა უკვე მოხდა შეკვეთილი საქონლის მიღება საქონლის მოსალოდნელი რაოდენობა ტოილ იქნება$Y + E(R - X)$

სიდიდის. ამრიგად, მარაგის მოსალოდნელი საშუალო რაოდენობა ტოლია

$$\frac{E(R-X)+Y+E(R-X)}{2}=\frac{Y}{2}+E(R-X).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\mathrm{E(R-x)}=\int_0^{\infty}\mathrm{(R-x)f(x)dx}\ =\mathrm{R-E(x)}$$

$$E(R-X)=\int_0^{\infty}E(R-X)f(X)dX=R-E(X)$$

მივიღებთ

$$\frac{Y}{2}+E(R-X)=\frac{Y}{2}+R-E(X).$$

აქედან გამომდინარე, შენახვაზე გაწეული დანახარჯები მთელი წლის განმავლობაში ტოლი იქნება შემდეგი სიდიდის:

$$h\left(\frac{Y}{2}+R-E(X)\right).$$

ჩხადია ეტაპების რაოდენობა ერთი წლის განმავლობაში ტოლი იქნება საქონელზე მოთხოვნილების მოსალოდნელი წლიური მოცულობა გაყოფილი საქონელზე შეკვეთის მოცულობაზე D/Y, ხოლო ზედნადები ხარჯები მთელი წლის განმავლობაში იქნება DK/Y.

შაქონლის დეფიციტის ზომად შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

$$S(X) = \begin{cases} 0, & X \le R, \\ X - R, & X > R. \end{cases}$$

მაშინ დეფიციტის მოსალოდნელი რაოდენობა ერთ ეტაპზე ტოლი იქნება შემდეგი სიდიდის

$$E\big(S(R)\big) = \int_0^\infty S(X) f(X) dX = \int_R^\infty (X - R) f(X) dX$$

Xოლო დეფიციტით გამოწვეული დანაკარგები ყველა ეტაპზე ერთად გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$D \cdot \frac{E\big(S(R)\big)P}{Y},$$

სადაც

$\frac{D}{Y}$ - ეტაპების რაოდენობაა, P–ერთეული საქონლის დეფიციტით გამოწვეული დანაკარგები, $E\big(S(R)\big)$–ერთ ეტაპზე მოსალოდნელი დეფიციტის რაოდენობა. ჟამური დანახარჯები ავღნიშნოთ $Q(Y,R)$–ით. გვექნება:

$$Q(Y,R) = \frac{DK}{Y} + h\left(\frac{Y}{2} + R - E(X)\right) + D \cdot \frac{E\big(S(R)\big)P}{Y}, \qquad (3.7)$$

Y^* და R^* სიდიდეების გამოსათვლელად (3.7) გამოსახულება გავაწარმოოთ Y–ით, R–ით და გავუტოლოთ ნულს:

$$\frac{\partial Q(Y,R)}{\partial Y} = -\frac{DK}{Y^2} + \frac{h}{2} - \frac{DPE\big(S(R)\big)}{Y^2} = 0$$

$$\frac{\partial Q(Y,R)}{\partial Y} = h + \frac{DP}{Y}\frac{\partial E\big(S(R)\big)}{\partial R} = h + \frac{DP}{Y}\frac{\partial}{\partial R}\int_R^\infty (X-R)f(X)dX$$

$$= h - \frac{DP}{Y}\int_R^\infty f(X)dX = 0$$

მივიღეთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} -\frac{DK}{Y^2} + \frac{h}{2} - \frac{DPE\big(S(R)\big)}{Y^2} = 0, \\ h - \frac{DP}{Y}\int_R^\infty f(X)dX = 0. \end{cases} \qquad (3.8)$$

(3.8) სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$$Y^* = \sqrt{\frac{2D(K + PE(S(R))}{h}}\,. \qquad (3.9)$$

$$\int_{R^*}^\infty f(X)dX = \frac{hY^*}{DP}\,. \qquad (3.10)$$

(2.9) და (2.10) ფორმულები არ გვაძლევენ Y^* და R^* სიდიდეებს ცხადი სახით, მაგრამ არსებობენ მიახლოებითი მეთოდები, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება Y^* და R^* სიდიდეების მოძებნა.

კერძოდ (2.9) ფორმულიდან მიიღება $Y_1 = \sqrt{\frac{2DK}{h}}$ საწყისი მნიშვნელობა. შემდეგ (2.10) ფორმულიდან განვსაზღვრავთ R_1 -ს, შემდეგ (2.9) ფორმულიდან Y_2-ს, შემდეგ (2.10) ფორმულიდან R_2-ს და ა.შ. პროცესს შევწყვეტავთ მაშინ, როდესაც ორ მომდევნო R სიდიდეებს შორის სხვაობა მოცემულ რაიმე მცირე სიდიდეზე ნაკლები გახდება.

3.8. ერთეტაპიანი ალბათური მოდელები

ა) მოთხოვნა ატარებს მყისიერ ხასიათს ე.ი. მთელი განსახილველი პერიოდის განმავლობაში პროდუქციაზე მოთხოვნა ხდება მხოლოდ ერთხელ და ვიგულისხმოთ, რომ მოთხოვნის წარმოდგენის მომენტი ემთხვევა ეტაპის დასაწყისს. ვაქვს ერთ ეტაპიანი

პროცესი და შეკვეთის შესრულების დრო ნულის ტოლია. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

h–პროდუქციის ერთეულის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები;

P–პროდუქციის დეფიციტით გამოწვეული დანაკარგები ერთ ერთეულზე;

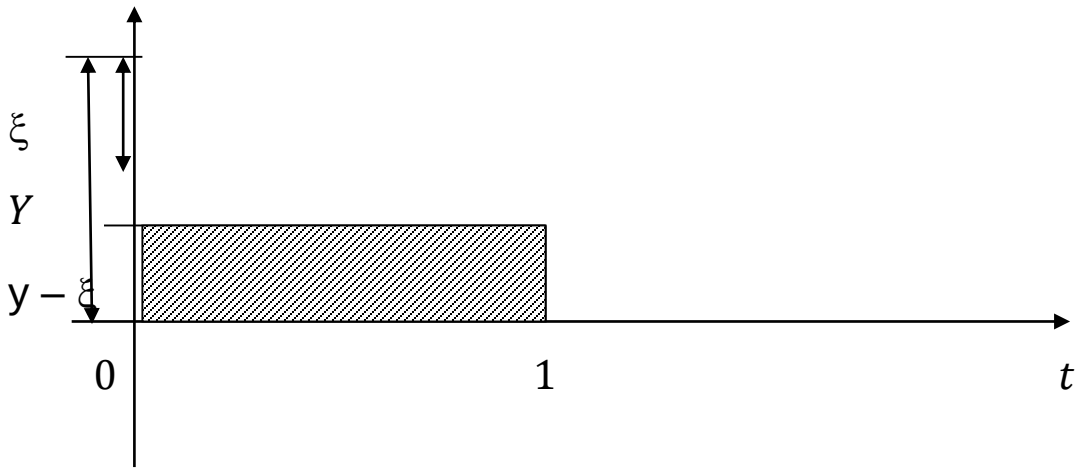
C–პროდუქციის ერთეულის შესასყიდი ღირებულება ან მის წარმოებაზე დახარჯული თანხა.

დავუშვათ, რომ ზედნადები ხარჯები არა გვაქვს. მოთხოვნა ξ უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა და $\varphi(\xi)$ არის მოთხოვნის ალბათური განაწილების სიმკვრივე.

ვთქვათ X პროდუქციის მარაგის საწყისი რაოდენობაა, Y შეკვეთილი პროდუქციის მოცულობაა, ხოლო $H(Y)$ კი მარაგის საშუალო დონე მთელი ეტაპის განმავლობაში. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ საქონლის მარაგის ოპტიმალური დონე ე.ი. ის დონე, რომლისთვისაც დანახარჯები იქნება მინიმალური.

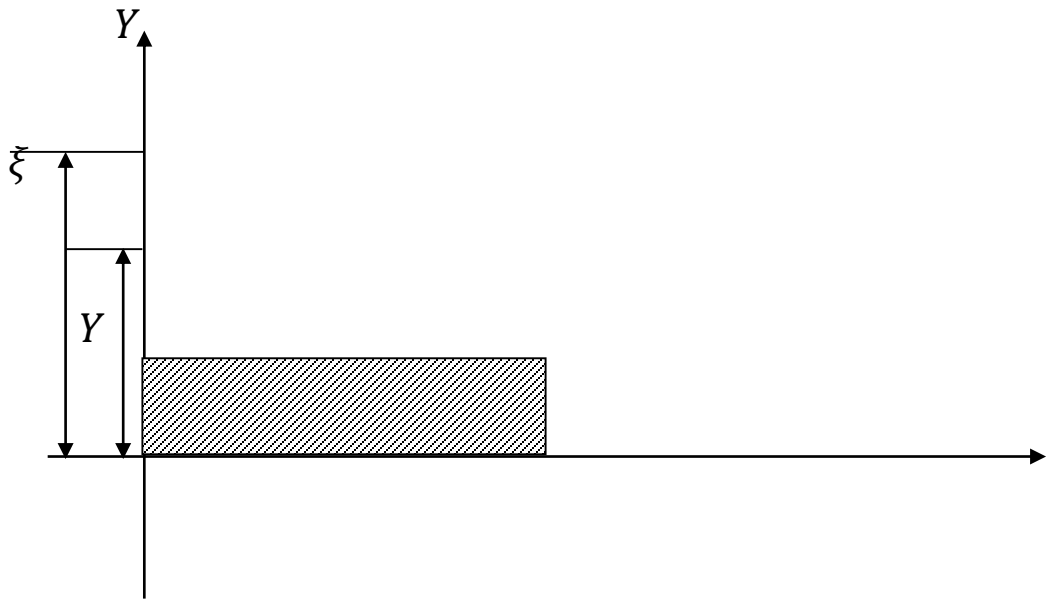
მარაგის საშუალო დონე მთელი ეტაპის განმავლობაში იქნება:

$$H(Y) = \begin{cases} Y - \xi\,, & \xi < Y, \\ 0, & \xi \geq Y. \end{cases}$$



რაც შეეხება პროდუქციის საშუალო დონეს, მისთვის ანალოგიურად გვექნება:

$$G(Y) = \begin{cases} \xi - Y\,, & \xi > Y, \\ 0, & \xi \leq Y. \end{cases}$$



$\xi - Y$

0 1 t

ჟამური დანახარჯების მოსალოდნელი სიდიდე აღვნიშნოთ $E(Q(Y))$–ით. $E(Q(Y)$ არის $Q(Y)$ სიდიდის მათემატიკური ლოდინი). გვაქვს:

$$E\big(Q(Y)\big) = C(Y - X) + E\big(H(Y)\big) + E\big(G(Y)\big)$$

$$= C(Y - X) + h\int_0^{\infty} H(Y)\varphi(\xi)d\xi$$

$$+ P\int_0^{\infty} G(Y)\varphi(\xi)d\xi\ , \qquad (3.15)$$

ირველი შესაკრები წარმოადგენს დანახარჯებს გამოწვეულს$(Y - X)$ რაოდენობის პრდუქციის შესყიდვით, მეორე შესაკრებია მოსალოდნელი დანახარჯები გამოწვეული ჭარბი პროდუქციის შენახვით, მესამე შესაკრები არის პროდუქციის დეფიციტით გამოწვეული მოსალოდნელი დანაკარგები.

თუ (3.15) ტოლობაში გავითვალისწინებთ $H(Y)$ და $G(Y)$ ფუნქციების მნიშვნელობებს, გვექნება:

$$E\big(Q(Y)\big) = C(Y - X) + h\int_0^Y (Y - \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

$$+ P\int_Y^\infty (\xi - Y)\varphi(\xi)d\xi\ , \qquad (3.16)$$

შეკვეთილი პროდუქციის ოპტიმალური Y^* მოცულობის დასადგენად (3.16) ტოლობა გავაწარმოოთ $Y-$ით და გავუტოლოთ ნოლს:

$$\frac{\partial E\big(Q(Y)\big)}{\partial Y} = C + h\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi - P\int_Y^\infty \varphi(\xi)d\xi\ , \qquad (3.17)$$

ღადგან $\varphi(\xi)$ ფუნქცია არის მოთხოვნის ალბათური განაწილების სიმკვრივე, ამიტომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\int_Y^\infty \varphi(\xi)d\xi = \int_0^\infty \varphi(\xi)d\xi - \int_0^Y \varphi(\xi)d\xi = 1 - \int_0^Y \varphi(\xi)d\xi\ , \qquad (3.18)$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.18)$-$ს, მაშინ (3.17) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$C + h\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi - P + P\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi = 0\,.$$

ქედან კი მივიღებთ, რომ

$$\int_0^{Y^*} \varphi(\xi)d\xi = \frac{P-C}{h+P}\ .$$

ცხადია, რომ Y^* განსაზღვრულია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $P \geq C$.

თუ$P < C$, მაშინ მარაგთა მართვის ასეთი შისტემა არ გამოდგება. Y^* სიდიდე ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ

$$p\{\xi < Y^*\} = \frac{P-C}{h+P}\ ,\ \text{თუ}\quad P \geq C\,.$$

მას შემდეგ რაც უკვე შერჩეულია Y^*, მოცემული X მარაგის საწყისი რაოდენობისთვის შეკვეთის ოპტიმალური სტრატეგია ასე განისაზღვრება:

თუ $Y^* > X$, მაშინ საჭიროა შევუკვეთოთ $Y^* - X$ მოცულობის პროდუქცია, ხოლო თუ $Y^* \leq X$, მაშინ პროდუქციაზე შეკვეთას არ განვახორციელებთ.

ვთქვათ მოთხოვნა აღიწერება არა უწყვეტი, არამედ დისკრეტული ფუნქციით, მაშინ შეკვეთის მოცულობის მათემატიკურ ლოდინს აქვს შემდეგი სახე

$$E\big(Q(Y)\big) = C(Y - X) + h\sum_{\xi=0}^{Y}(Y - \xi)\varphi(\xi) + P\ \sum_{\xi=Y+1}^{\infty}(\xi - Y)\varphi(\xi),$$

Xოლო ფუნქციის მინიმუმის აუცილებელ პირობებს წარმოადგენენ შემდეგი უტოლობები:

$$E\{Q(Y-1)\} \geq E\{Q(Y)\}, \qquad E\{Q(Y+1)\} \geq E\{Q(Y)\}$$

ამრიგად გვაქვს:$E\big(Q(Y-1)\big) = C(Y-1-X) + h\sum_{\xi=0}^{Y}(Y-1-\xi)\varphi(\xi) + P\ \sum_{\xi=Y+1}^{\infty}(\xi - Y + 1)\varphi(\xi) = C(Y-X) + h\sum_{\xi=0}^{Y-1}(Y-\xi)\varphi(\xi) + P\ \sum_{\xi=Y}^{\infty}(\xi - Y)\varphi(\xi) - h\sum_{\xi=0}^{Y-1}\varphi(\xi) + P\ \sum_{\xi=Y}^{\infty}\varphi(\xi) - C = E\big(Q(Y)\big) + P - C - (h+P)\sum_{\xi=0}^{Y-1}\varphi(\xi)$

მივიღეთ შემდეგი უტოლობა:

$$E\{Q(Y-1)\} - E\{Q(Y)\} = P - C - (h+P)p\{\xi \leq Y-1\} \geq 0$$

ე.ი.

$$p\{\xi \leq Y-1\} \leq \frac{P-C}{P+h}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ

$$E\{Q(Y+1)\} \geq E\{Q(Y)\}$$

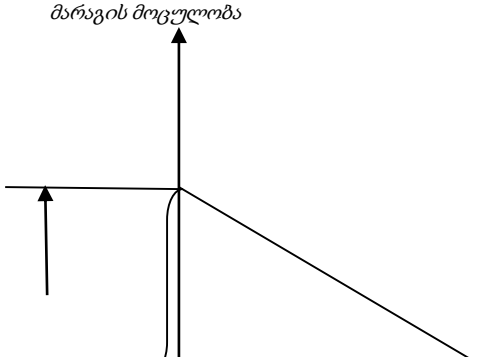
ხოლო ამ პირობიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა:

$$p\{\xi \leq Y\} \geq \frac{P-C}{P+h}.$$

ამიტომ მივიღებთ, რომ დისკრეტულ შემთხვევაში Y^* აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$p\{\xi \leq Y^* - 1\} \leq \frac{P-C}{P+h} \leq p\{\xi \leq Y^*\}.$$

ბ) **შემთხვევა:** მოთხოვნა საქონელზე თანაბარია მთელი ეტაპის განმავლობაში, ხოლო ზედნადები ხარჯები არა გვაქვს. მ შემთხვევაში მარაგის და დეფიციტის საშუალო მნიშვნელობები გრაფიკულად შეიძლება ასე გამოვსახოთ:



A

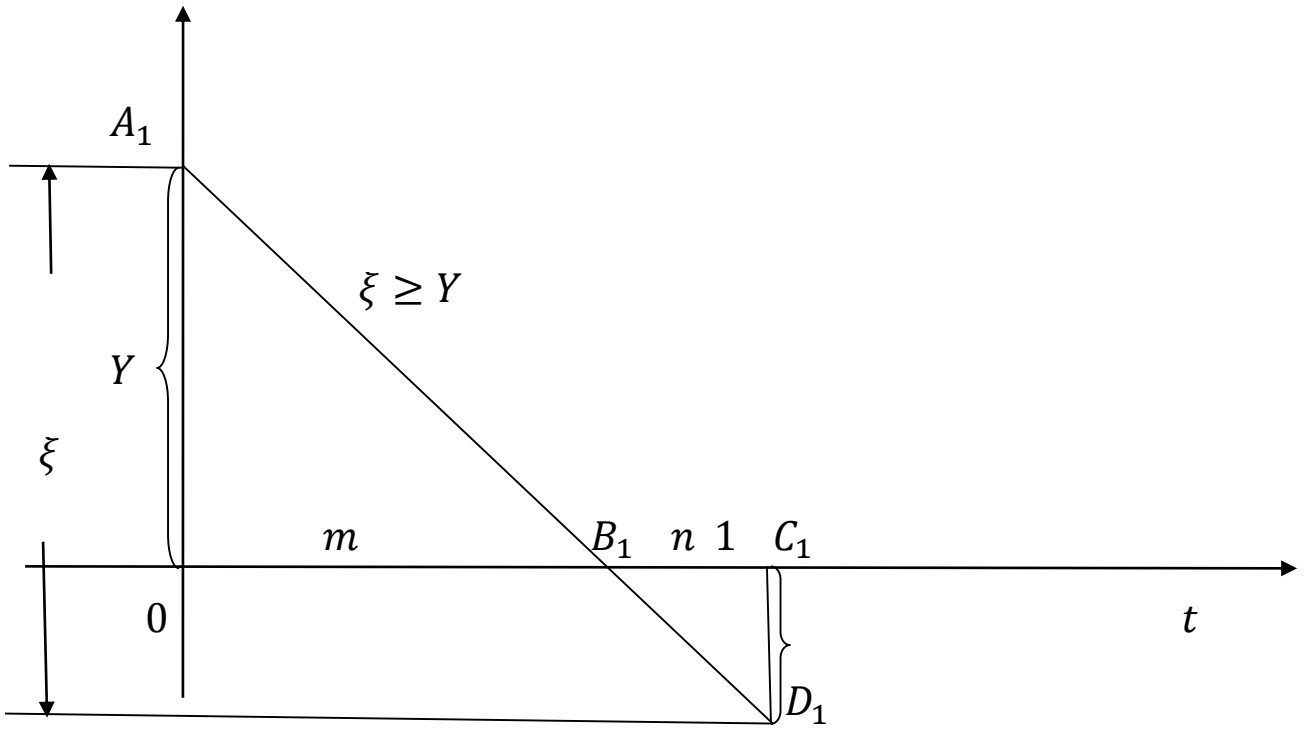
ξ $Y > \xi$

Y

B

$Y - \xi$ D

0 1 t



თუ დეფიციტს არა აქვს ადგილი, მაშინ $Y > \xi$ და მარაგის რაოდენობა ტოლია $OABD$ ტრაპეციის ფართობისა,

ხოლო თუ გვაქვს დეფიციტი, მაშინ $\xi \geq Y$ და მარაგის რაოდენობა ტოლია OA_1B_1 სამკუთხედის ფართობის. ამ შემთხვევაში დეფიციტის რაოდენობა ტოლი იქნება $B_1C_1D_1$ სამკუთხედის ფართობისა. გვაქვს:

$$H(Y) = \begin{cases} \frac{OA + BD}{2} \cdot OD\,, & \text{თუ} \quad Y > \xi\,, \\ \frac{OA_1 \cdot OB_1}{2}\,, & \text{თუ} \quad Y \leq \xi\,. \end{cases}$$

$$G(Y) = \begin{cases} 0\,, & \text{თუ} \quad Y > \xi\,, \\ \frac{B_1C_1 \cdot C_1D_1}{2}\,, & \text{თუ} \quad Y \leq \xi\,. \end{cases}$$

რადგან $\Delta DA_1B_1 \sim \Delta B_1C_1D_1$, ამიტომ $m : n = OA_1 : C_1D_1$. ვარდა ამისა $m + n = 1$. მივიღებთ:

$$H(Y) = \begin{cases} \frac{Y - \xi}{2}\,, & \text{თუ} \quad Y > \xi\,, \\ \frac{Y^2}{2\xi}\,, & \text{თუ} \quad Y \leq \xi\,. \end{cases}$$

$$G(Y) = \begin{cases} 0\,, & \text{თუ} \quad Y > \xi\,, \\ \dfrac{(\xi - Y)^2}{2\xi}\,, & \text{თუ} \quad Y \le \xi\,. \end{cases}$$

ოსალოდნელი საერთო დანახარჯების მათემატიკური ლოდინი გამოითვლება ფორმულით:

$$E\big(Q(Y)\big) = C(Y - X) + h\int_0^{\infty} H(Y)\varphi(\xi)d\xi + P\int_0^{\infty} G(Y)\varphi(\xi)d\xi$$

$$= C(Y - X) + h\int_0^{Y}(Y - \frac{\xi}{2})\varphi(\xi)d\xi + h\int_Y^{\infty}\frac{Y^2}{2\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

$$+ P\int_Y^{\infty}\frac{(\xi - Y)^2}{2\xi}\varphi(\xi)d\xi\,, \qquad (3.19)$$

პტიმალური Y^*–ის მოსაძებნად (3.19) გავაწარმოოთ Y–ით და გავუტოლოთ ნოლს. მივიღებთ:

$$\frac{\partial E\big(Q(Y)\big)}{\partial Y} = C + h\int_0^{Y}\varphi(\xi)d\xi + h\int_Y^{\infty}\frac{Y}{\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

$$- P\int_Y^{\infty}\frac{\xi - Y}{\xi}\varphi(\xi)d\xi\,, \quad (3.20)$$

გავითვალისწინოთ, რომ:

$$\int_0^{\infty}\varphi(\xi)d\xi = 1,$$

და შესაბამისად

$$\int_{Y}^{\infty} \varphi(\xi)d\xi = 1 - \int_{0}^{Y} \varphi(\xi)d\xi \ , \qquad (3.21)$$

თუ (3.21) −ს შევიტანთ (3.20) −ში მივიღებთ:

$$h\left(\int_{0}^{Y^*} \varphi(\xi)d\xi + Y^* \int_{Y^*}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi\right) - P$$

$$+ P\int_{0}^{Y^*} \varphi(\xi)d\xi + PY^* \int_{Y^*}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi = -C \ .$$

აქედან კი გვექნება:

$$\int_{0}^{Y^*} \varphi(\xi)d\xi + Y^* \int_{Y^*}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{P-C}{P+h} .$$

გ) შემთხვევა: განვიხილოთ ა) შემთხვევის ანალოგიური სიტუაცია, იმ განსხვავებით, რომ გვაქვს აგრეთვე საქონლის შეკვეთით გამოწვეული ზედნადები ხარჯები.

მოსალოდნელი ჯამური დანახარჯები აღვნიშნოთ $E\left(Q^*(Y)\right)$ −ით. გვაქვს:

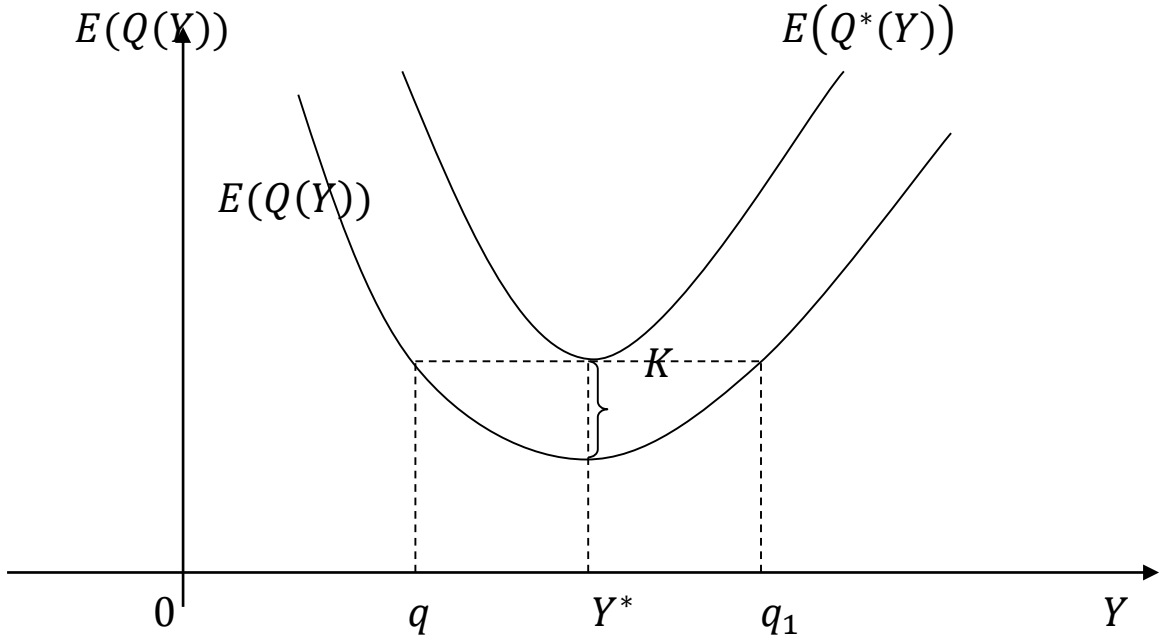
$$E\left(Q^*(Y)\right) = K + C(Y - X) + h\int_0^\infty H(Y)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^\infty G(Y)\varphi(\xi)d\xi = K + E\left(Q(Y)\right),$$

სადაც $E(Q(Y))$ არის მოსალოდნელი ჯამური დანახარჯები ა) შემთხვევაში. ღადგან $E(Q(Y))$ −ის მინიმუმი მიიღწევა ისეთ Y^* −ზე, რომელიც განისაზღვრება პირობიდან

$$\int_0^{Y^*} \varphi(\xi)d\xi = \frac{P - C}{P + h}$$

ამიტომ, ცხადია $E\left(Q^*(Y)\right)$ −ის მინიმუმიც მიიღწევა იმავე Y^*−ზე, რადგან K მუდმივი სიდიდეა. რაფიკულად $E(Q(Y))$ და $E\left(Q^*(Y)\right)$ ფუნქციები ასე გამოისახება:

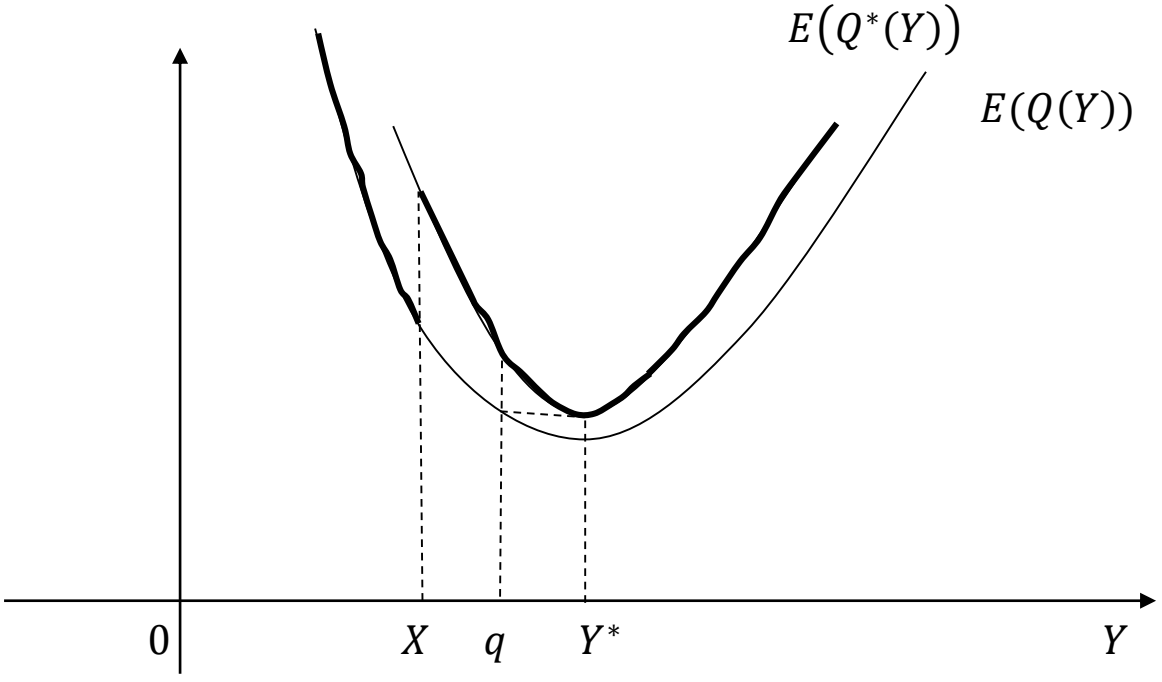


q და q_1 მნიშვნელობები განისაზღვრებიან შემდეგი განტოლებიდან:

$$E\big(Q(q)\big) = E\big(Q^*(Y^*)\big) = E\big(Q(Y^*)\big) + K\,,$$

$q < Y^*$ პირობით. ამიტომ q_1 მნიშვნელობა შეგვიძლია არ განვიხილოთ. საძიებელი Y^*-ის მოსაძებნად არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმას, თუ როგორ კავშირშია მარაგის X საწყისი რაოდენობა q და Y^* სიდიდეებთან. განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

1) $0 \le X \le q$- მაშინ მივიღებთ, რომ X რაოდენობის საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები ტოლია $E(Q(X))$-ის.

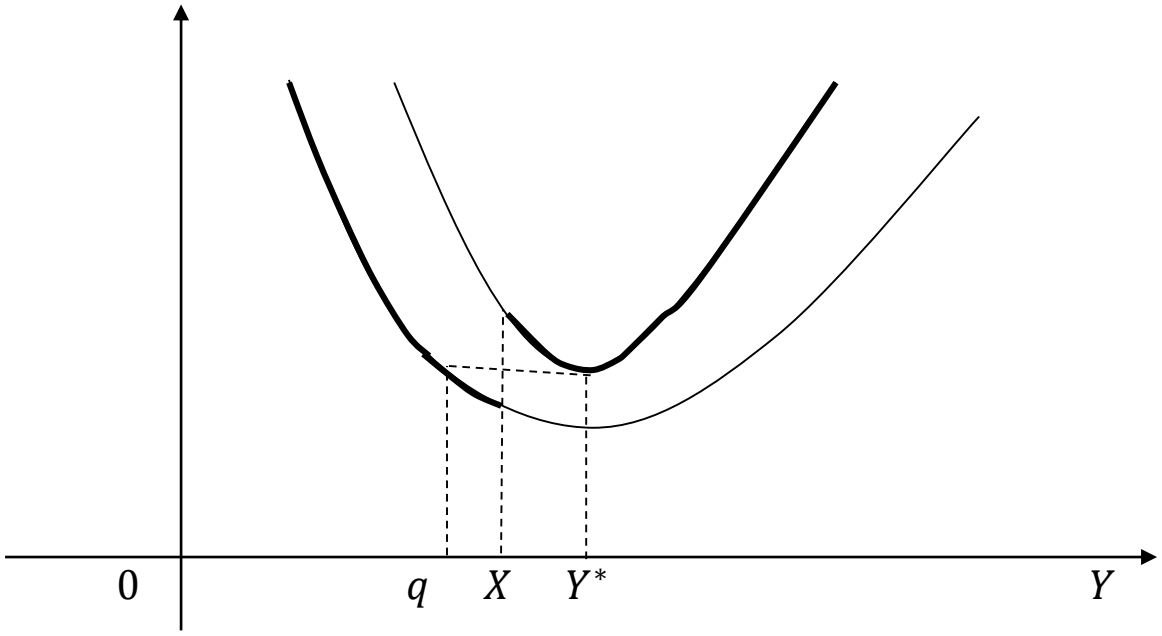


თუ შევუკვეთავთ Y რაოდენობის საქონელს ($Y > X$), მაშინ მასზე გაწეული ჯამური დანახარჯები იქნება $E\left(Q^*(Y)\right)$ და ნახაზიდან ცხადად ჩანს, რომ

$$E\left(Q^*(Y^*)\right) = \min_{Y>X} E\left(Q^*(Y)\right) < E(Q(X))$$

ეს კი ნიშნავს, რომ ამ შ მთხვევაში უნდა შევუკვეთოთ $Y^* - X$ რაოდენობის საქონელი.

2) $q < X < Y^*$



ამ შემთხვევაში გვაქვს:

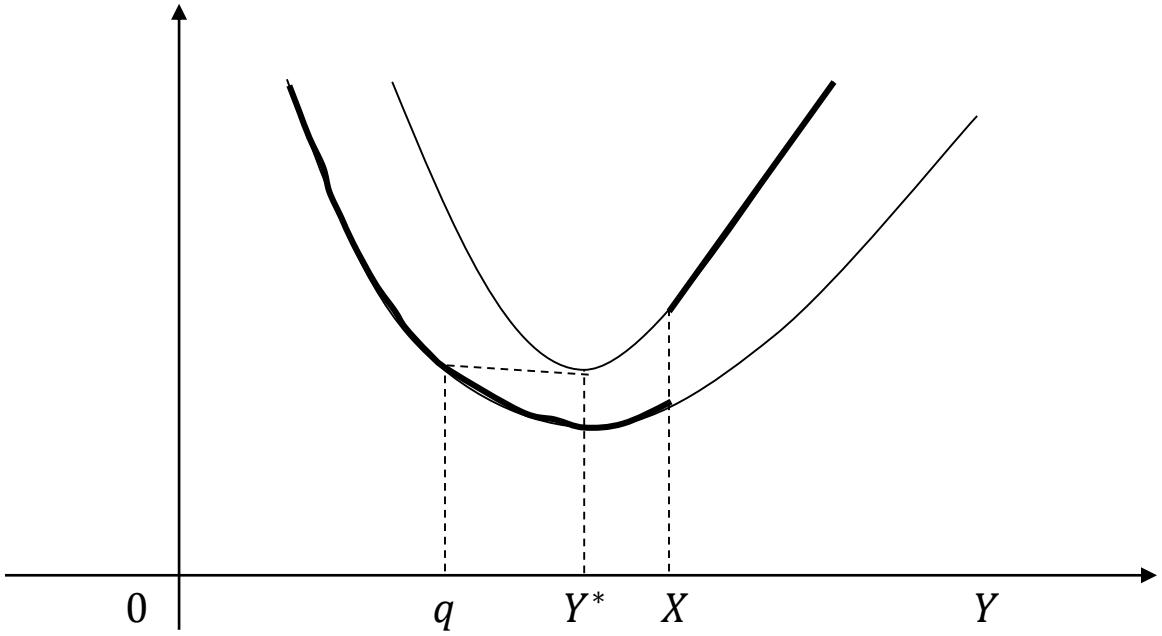
$$E\left(Q^*(Y^*)\right) = \min_{Y>X} E\left(Q^*(Y)\right) > E(Q(X))$$

ე.ი. $Y^* = X$ და ეს ნიშნავს, რომ არ ვახდენთ შეკვეთას საქონელზე.

3) $X > Y^*$, მაშინ

$$E\big(Q^*(Y^*)\big) = \min_{Y>X} E\big(Q^*(Y)\big) > E(Q(X)$$

ე.ი. $Y^* = X$ და ეს ნიშნავს, რომ არ ვახდენთ შეკვეთას საქონელზე.

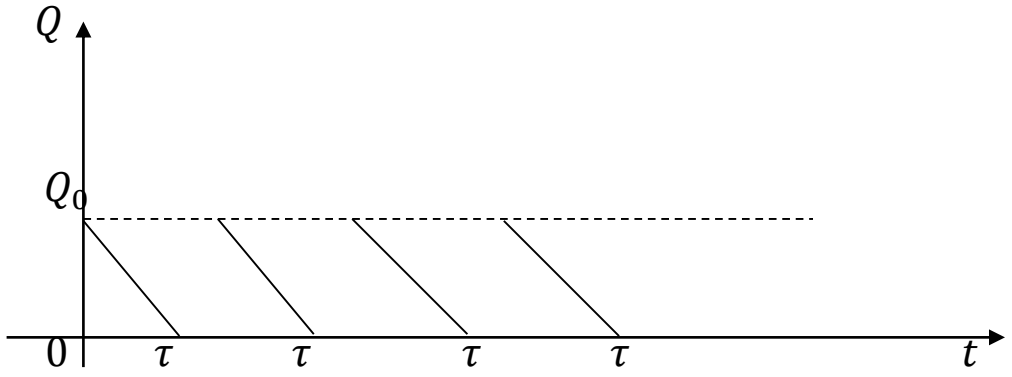


დასკვნა: აღნიშნული ტიპის ამოცანის ამოხსნისას პირველ რიგში უნდა განისაზღვროს Y^* და q სიდიდეები. შემდეგ ვნახოთ ზემოთ ჩამოთვლილი სამი პირობიდან მარაგის საწყისი X რაოდენობა რომელ პირობას აკმაყოფილებს. პირველი პირობის შესრულების შემთხვევაში ვუკვეთავთ $Y^* -$

X რაოდენობის პროდუქციას, ხოლო მეორე და მესამე პირობების შესრულებისას არ ვახდენთ შეკვეთას.

3.9. მარაგთა მართვის დინამიური ამოცანა უწყვეტი მოთხოვნილების შემთხვევაში

დავუშვათ, საქონელზე მოთხოვნა მცირეა მომარაგების მოცულობასთან შედარებით. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ შეკვეთაზე მოთხოვნა სრულდება მყისიერად (მომენტალურად). ასეთ შემთხვევაში, დროის გარკვეული პერიოდების შემდეგ უნდა მოხდეს შეკვეთა საქონელზე. გრაფიკულად გვექნება ასეთი სურათი:



შადაც Q - შეკვეთის მოცულობაა, τ - შეკვეთებს შორის შუალედი.

ცხადია, რომ შეკვეთის მყისიერი შესრულების გამო, შეკვეთაზე მოთხოვნა უნდა განხორციელდეს საქონლის განთავსებისას. შემოვიღოთ გარკვეული აღნიშვნები პროცესის დასახასიათებლად.

დავუშვათ, რომ S წარმოადგენს მოთხოვნილების ინტენსივობას, რაც გვიჩვენებს დროის ერთეულში რეალიზებული საქონლის რაოდენობას, K −ერთეული საქონლის შენახვაზე გაწეულ დანახარჯებს დროის ერთეულში, C−ერთეული საქონლის შესასყიდ ღირებულებას.

მაშინ Q რაოდენობის შესასყიდი საქონლის ღირებულება იქნება QC.

C_0−ით ავღნიშნოთ საქონლის შესყიდვისას გაწეული ზედნადები ხარჯები. იმის გამო, რომ S არის მოთხოვნილების ინტენსივობა, ამიტომ Q რაოდენობის საქონლის რეალიზაციისათვის საჭირო დროის შუალედი იქნება $\tau = \frac{Q}{S}$.

ვიანგარიშოთ საქონლის შესყიდვაზე და შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში და შევეცადოთ ამ დანახარჯების მინიმიზაციის გზით განვსაზღვროთ შეკვეთის ოპტიმალური მოცულობა.

Q რაოდენობის საქონლის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯებია

$$E(Q) = \begin{cases} 0, & Q = 0, \\ C_0 + CQ, & Q > 0. \end{cases}$$

Q რაოდენობის საქონლის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში $\frac{C_0+CQ}{\tau} = \frac{(C_0+CQ)S}{Q}$.

იმის გამო, რომ მარაგის მაქსიმალური რაოდენობა Q-ს ტოლია, ხოლო მინიმალური რაოდენობა ნულის, ამიტომ მარაგის საშუალო დონედ შეგვიძლია ჩავთვალოთ $\frac{Q}{2}$ სიდიდე. ამ რაოდენობის საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში იქნება $\frac{QK}{2}$. საქონლის შესყიდვასა და შენახვაზე გაწეული საერთო დანახარჯები დროის ერთეულში იქნება:

$$f(Q) = \frac{(C_0 + CQ)S}{Q} + \frac{QK}{2}, \qquad (3.22)$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ Q-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომ (3.22) გამოსახულებამ მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა. ე.ი. მოვძებნოთ შეკვეთის ის მოცულობა, რომლისთვისაც საქონლის შესყიდვაზე და შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში იქნება მინიმალური. ამისათვის (3.22) ტოლობა გავაწარმოოთ და წარმოებული გავუტოლოთ ნოლს.

$$f'(Q) = \left(\frac{(C_0 + CQ)S}{Q} + \frac{QK}{2}\right)'$$
$$= \frac{(C_0S + CSQ)'Q - (C_0S + CSQ)Q'}{Q^2} + \frac{K}{2}$$
$$= \frac{CSQ - C_0S - CSQ}{Q^2} + \frac{K}{2} = \frac{K}{2} - \frac{C_0S}{Q^2} = 0\,.$$

ე.ი.

$$\frac{KQ^2 - 2C_0S}{2Q^2} = 0\,.$$

მიღებული გამოსახულებიდან კი გვაქვს:

$$Q = \sqrt{\frac{2C_0S}{K}}\ , \qquad (3.23)$$

(3.23) ტოლობას უწოდებენ უილსონის ფორმულას. (3.23) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ შეკვეთილი საქონლის მოცულობა პირდაპირ პროპორციულია კვადრატული ფესვისა ხედნადები ხარჯებისა და მოხმარების ინტენსივობის გაორკეცებული ნამრავლიდან და უკუპროპორციულია კვადრატული ფესვისა დროის ერთეულში ერთეული საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯებისა.

ეს ყოველივე იმის მაჩვენებელია, რომ შეკვეთის მოცულობა მით უფრო დიდი უნდა იყოს, რაც უფრო მეტია

ზედნადები ხარჯები და მოხმარების ინტენსივობა, და მით უფრო ნაკლები რაც მეტია საქონლის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები.

3.10. მარაგთა მართვის მრავალპროდუქტიანი ამოცანა

ზემოთ განხილული დინამიკური მოდელის შემთხვევაში ვგულისხმობდით, რომ საქმე გვქონდა ერთი სახის პროდუქ–ციასთან. პრაქტიკაში, როგორც წესი მომარაგება–გასაღების ამოცანების განხილვისას საქმე გვაქვს მრავალი სახის პროდუქტთან. ასეთ შემთხვევაში ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში:

განვსაზღვროთ თითოეული სახის პროდუქტზე ოპტიმალური შეკვეთები ისე, რომ საერთო დანახარჯები მათ შესყიდვაზე და შენახვაზე იყოს მინიმალური და სრულად დაკმაყოფილდეს მომხმარებელთა მოთხოვნილებანი. ცხადია, რომ თუ ასეთი ამოცანების განხილვისას არაფრით არა ვართ შეზღუდულები: არც თანხით, არც საწყობის მოცულობით, მაშინ თითოეული პროდუქციისათვის გამოვიყენებთ უილსონის ფორმულას და მივიღებთ თითოეული საქონლისათვის ოპტიმალური შეკვეთის მოცულობას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც შეზღუდული ვართ პროდუქციის შესყიდვისათვის განკუთვნილი თანხით. ე.ი. ვუშვებთ, რომ გვაქვს თანხის გარკვეული R რაოდენობა, გვაქვს N სხვადასხვა სახის პროდუქცია, ხოლო თვითოეული სახის პროდუქტზე მოთხოვნილებათა ინტენსივობები აღვნიშნოთ $S_1, S_2, \cdots, S_N$ შესაბამისად. $K_1, K_2, \cdots, K_N$ იყოს შესაბამისი სახის ერთეული პროდუქტის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში, ხოლო $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ – შეკვეთების მოცულობა შესაბამისი სახის პროდუქციაზე.

ასეთი აღნიშვნების შემთხვევაში i-ური სახის პროდუქციის $Q_i, (i = 1,2, \cdots, N)$ რაოდენობის შესყიდვისას გაწეული დანახარჯები იქნება:

$$f_i(Q_i) = \begin{cases} C_i^0 + C_i Q_i\,, & Q_i > 0, i = 1,2, \cdots, N; \\ 0\,, & Q_i = 0\,. \end{cases}$$

სადაც $C_i^0, (i = 1,2, \cdots, N)$ $i-$ური სახის პროდუქციის ზედნადები ხარჯებია, $C_i\,, (i = 1,2, \cdots, N)$ $i-$ური სახის ერთეული პროდუქციის შესასყიდი ღირებულებაა.

საშუალო დანახარჯები $i-$ური სახის ერთეული პროდუქციის შენახვაზე დროის ერთეულში ტოლი იქნება $K_i/2$ სიდიდის.

საერთო დანახარჯები $i-$ური სახის პროდუქციის შესყიდვასა და დროის ერთეულში შენახვაზე ტოლი იქნება შემდეგი გამოსახულების:

$$\frac{C_i^0 + C_i Q_i}{\tau_i} + \frac{K_i Q_i}{2} = \frac{(C_i^0 + C_i Q_i) S_i}{Q_i} + \frac{K_i Q_i}{2} ,$$

რადგან $\tau_i \frac{Q_i}{S_i}$.

საერთო დანახარჯები ყველა სახის პროდუქტის შესყიდვასა და დროის ერთეულში შენახვაზე ტოლი იქნება:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(C_i^0 + C_i Q_i) S_i}{Q_i} + \frac{K_i Q_i}{2} \right)$$

ჩვენი მიზანია მოვძებნოთ ისეთი $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ სიდიდეები, რომ უკანასკნელმა ჯამმა მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა, შეძლებისდაგვარად დაკმაყოფილდეს მომხმარებელთა მოთხოვნილებები და ჩავეტიოთ იმ R თანხაში, რომელიც თავიდან გვქონდა გამოყოფილი პროდუქციის შესაძენად. უკანასკნელი შეზღუდვის მათემატიკურად გამოსახატავად შემოვიღოთ ასეთი აღნიშვნა:

$a_i, (i = 1,2, \cdots, N)$ იყოს $i-$ური სახის ერთეული პროდუქციის შესყიდვაზე გაწეული ხარჯი, მაშინ პროდუქციის

შესაძენად გამოყოფილ თანხაზე შეზღუდვას ექნება ასეთი სახე:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i Q_i \leq R\,.$$

ამრიგად მივიღეთ მათემატიკური პროგრამირების შემდეგი არაწრფივი ამოცანა:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(C_i^0 + C_i Q_i) S_i}{Q_i} + \frac{K_i Q_i}{2} \right) \to min$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_i Q_i \leq R\,.$$

აღნიშნული ამოცანა არაწრფივობის გამო საკმაოდ რთული ამოსახსნელია, მის ამოსახსნელად ჩვენ გამოვიყენებთ ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდს, რაც საშუალებას მოგვცემს აღნიშნული პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა შევცვალოთ უპირობო ექსტრემუმის ამოცანით.

განვიხილოთ შემდეგი $N+1$ უცნობიანი $L(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N, \lambda)$ ფუნქცია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$L(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(C_i^0 + C_i Q_i) S_i}{Q_i} + \frac{K_i Q_i}{2} \right) - \lambda \left(R - \sum_{i=1}^{N} a_i Q_i \right)$$

ზემოთ აღნიშნული უპირობო ექსტრემუმის ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: მოვძებნოთ $L(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N, \lambda)$ ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N, \lambda$ უცნობების შერჩევის ხარჯზე. $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N, \lambda$ უცნობების მოსაძებნად ვიპოვოთ $L(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N, \lambda)$ ფუნქციის კერძო წარმოებულები თითოეული ცვლადის მიმართ და ისინი გავუტოლოთ ნოლს. მივიღებთ $N+1$ უცნობიან განტოლებათა სისტემას ამდენივე განტოლებით:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial Q_1} = \dfrac{K_1}{2} - \dfrac{C_1^0 S_1}{Q_1^2} + \lambda a_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_2} = \dfrac{K_2}{2} - \dfrac{C_2^0 S_2}{Q_2^2} + \lambda a_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial Q_N} = \dfrac{K_N}{2} - \dfrac{C_N^0 S_N}{Q_N^2} + \lambda a_N = 0, \\ R - \sum_{i=1}^{N} a_i Q_i = 0. \end{cases}$$

მიღებული სისტემის ამოხსნაც საკმაო სირთულესთან არის დაკავშირებული, მაგრამ იმის გათვალისწინებით, რომ არსებობენ λ პარამეტრის მოძებნის მიახლოებითი მეთოდები,

ადვილად შეიძლება ვიპოვოთ $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ შეკვეთათა ოპტიმალური მნიშვნელობები. ამრიგად მივიღებთ:

$$Q_i = \sqrt{\frac{2C_i^0 S_i}{K_i + 2\lambda a_i}}\ , i = 1,2, \cdots, N.$$

აღნიშნული ტოლობა წარმოადგენს უილსონის განზოგადებულ ფორმულას და გვიჩვენებს შეკვეთის მოცულობის ოპტიმალურ მნიშვნელობას თანხის შეზღუდვის პირობებში.

3.11. მარაგთა მართვის დინამიკური მოდელი უწყვეტი მომარაგების შემთხვევაში

აქამდე განხილულ მარაგთა მართვის ამოცანებში ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ მომარაგება ხდებოდა დიდი პარტიებით, ე.ი. ატარებდა დისკრეტულ ხასიათს, ხოლო მოხმარება კი ითვლებოდა უწყვეტად. ეხლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მომარაგება ხდება მცირე პარტიებით, რის გამოც შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ მომარაგებაც ატარებს უწყვეტ ხასიათს. ასეთი სახის სიტუაციებთან ჩვენ საქმე გვაქვს მაშინ, როდესაც მომარაგებისა და გასაღების პუნქტები ერთადაა თავმოყრილი. მაგალითად პურის საცხობი.

ვიგულისხმოთ, რომ D არის წარმოების ინტენსივობა, რაც გვიჩვენებს დროის ერთეულში საწარმოს მიერ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობას.

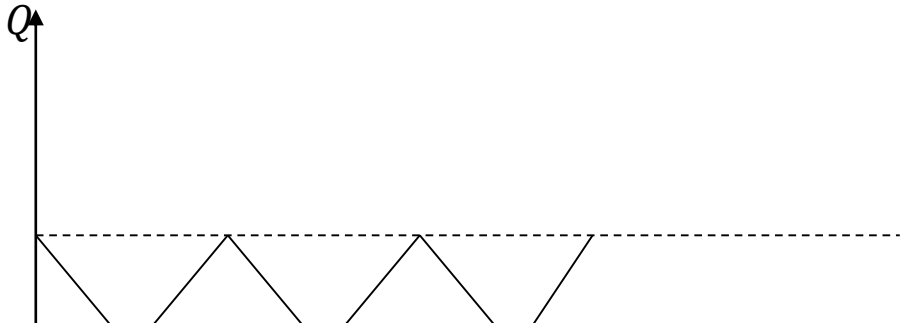
S არის მოთხოვნილების ინტენსივობა, იგი წარმოადგენს დროის ერთეულში მოხმარებული საქონლის რაოდენობას.

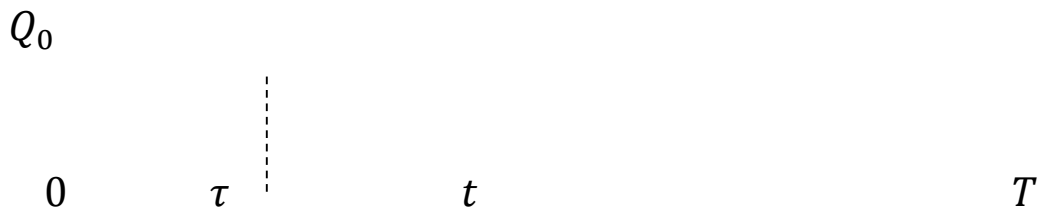
K არის ერთეული პროდუქციის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში.

Q არის შეკვეთის მოცულობა. ასეთი აღნიშვნების პირობებში Q რაოდენობის პროდუქციის საწარმოებლად საჭირო დრო ტოლი იქნება შემდეგი გამოსახულების: $T = \frac{Q}{D}$.

Q რაოდენობის პროდუქციის გასაყიდი დრო ტოლი იქნება $\tau = \frac{Q}{S}$ სიდიდის. ცხადია აზრი აქვს მხოლოდ $D > S$ შემთხვევის განხილვას, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ყოველგვარი გამოთვლების გარეშე დავადგენთ, რომ საჭიროა საწარმოს შეუჩერებელი მუშაობა. ამიტომ $D < S$ სიტუაციას არ განვიხილავთ.

გრაფიკულად მარაგის ცვლილება შემდეგნაირად შეიძლება გამოვსახოთ:





საწარმოს მუშაობისას დროის ერთეულში დაგროვებული პროდუქციის რაოდენობა ტოლი იქნება $D-S$ სიდიდის. იგი წარმოადგენს საქონლის დაგროვების ინტენსივობას საწარმოს მუშაობისას.

T დროის განმავლობაში დაგროვებული პროდუქციის მაქსიმალური რაოდენობა ტოლია შემდეგი სიდიდის:

$$(D-S)T = \frac{(D-S)Q}{D}.$$

იმის გამო, რომ მარაგის მინიმალური რაოდენობაა 0 , ხოლო მაქსიმალური რაოდენობაა $\frac{(D-S)Q}{D}$, ამიტომ მარაგის საშუალო დონედ შეგვიძლია ჩავთვალოთ $\frac{(D-S)Q}{2D}$ სიდიდე.

აღნიშნული რაოდენობის პროდუქციის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში ტოილ იქნება შემდეგი სიდიდის: $\frac{(D-S)Q}{2D}K$.

Q რაოდენობის პროდუქციის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯები ტოლი იქნება $C_0 + CQ$ სიდიდის. მაშინ იმავე

რაოდენობის პროდუქციის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში ტოლი იქნება

$$\frac{C_0 + CQ}{\tau} = \frac{(C_0 + CQ)S}{Q}.$$

Q რაოდენობის საქონლის შესყიდვასა და შენახვაზე გაწეული საერთო დანახარჯები ტოლი იქნება შემდეგი სიდიდის:

$$\frac{C_0 + CQ}{\tau} = \frac{(C_0 + CQ)S}{Q} + \frac{(D - S)QK}{2D}, \qquad (3.24)$$

ჩვენი მიზანია შევარჩიოთ შეკვეთის მოცულობის ისეთი Q^* მნიშვნელობა, რომ მის შესყიდვასა და შენახვაზე გაწეული დანახარჯები იყოს მინიმალური.

ამისათვის (3.24) გამოსახულება გავაწარმოოთ Q ცვლადით და გავუტოლოთ ნოლს. მივიღებთ:

$$-\frac{C_0 S}{Q^2} + \frac{(D - S)K}{2D} = 0,$$

ნუ

$$Q^2(D - S)K = 2DC_0S.$$

აქედან კი გვექნება:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DC_0S}{(D-S)K}} = \sqrt{\frac{2SC_0}{\left(1-\frac{S}{D}\right)K}}, \qquad (3.25)$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს უილსონის ფორმულის კიდევ ერთ განზოგადებას. კერძოდ ის გვიჩვენებს საქონელზე შეკვეთის მოცულობის ზრდას, როცა S და D ერთი და იგივე რიგის სიდიდეები არიან. კერძოდ, თუ $S = D$, მაშინ (3.25) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ წარმოება უნდა მიმდინარეობდეს უწყვეტად. ღოდესაც $S \gg D$, მაშინ (3.25) ფორმულა ემთხვევა უილსონის ფორმულას.

დავითვალოთ Q^*მოცულობის პროდუქციის საწარმოებლად საჭირო T დრო. ვაქვს

$$T = \frac{Q^*}{D} = \sqrt{\frac{2C_0S}{(D-S)KD}}.$$

მიღებული ფორმულა გვიჩვენებს, თუ ყოველი ეტაპის განმავლობაში დროის რა შუალედებში უნდა იმუშაოს საწარმომ.

3.12. მრავალეტაპიანი სტაციონალური ალბათური მოდელები

განვიხილოთ მარაგთა მართვის მრავალეტაპიანი ამოცანები სტაციონალური მოთხოვნებით, სასრული და უსასრულო პერიოდების შემთხვევაში. ასეთი მოდელების განხილვისას ძირითადად მხედველობაში მივიღებთ შემდეგ ორ არსებით განმასხვავებელ ფაქტორს:

1, ყოველ ეტაპზე დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნები გადადიან თუ არა შემდეგ ეტაპზე.

2, შეკვეთის რეალიზაციის დრო ნოლია თუ ნულზე მეტი დადებითი სიდიდე.

ყველა მოდელში ვიგულისხმოთ, რომ ზედნადები ხარჯები ნოლის ტოლია, ხოლო პროდუქციაზე მოთხოვნა ატარებს სტაციონალურ ხასიათს. ეს კი ნიშნავს, რომ ყველა ეტაპზე მოთხოვნების რაოდენობა განაწილებულია ერთი და იმავე კანონით.

ა) შემთხვევა: შეკვეთის რეალიზაციის დრო ნოლის ტოლია და ყოველ ეტაპზე დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნები ემატებიან შემდეგი ეტაპის მოთხოვნებს. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

C არის პროდუქციის ერთეულის შესასყიდი ღირებულება;

h არის პროდუქციის ერთეულის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები ერთი ეტაპის განმავლობაში;

P არის პროდუქციის ერთეულის დეფიციტით გამოწვეული დანახარჯები ერთი ეტაპის განმავლობაში;

X_i არის $i-$ურ ეტაპზე პროდუქციის საწყისი რაოდენობა. იგი შეიძლება იყოს უარყოფითიც თუ წინა ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის დეფიციტი.

Y_i არის $i-$ურ ეტაპზე პროდუქციის მარაგის რაოდენობა;

τარის პროდუქციის ერთულის რეალიზაციით მიღებული მოგება.

წინა მოდელებისაგან განსხვავებით, სადაც ოპტიმალური სტრატეგიის კრიტერიუმად მივიჩნევდით დანახარჯების მინიმიზაციას. მრავალეტაპიან მოდელებში ოპტიმალობის კრიტერიუმად ავიღოთ მოგების მაქსიმიზაცია.

მოდელების აგებისას გამოვიყენებთ ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპს სასრული პერიოდისათვის, ხოლო უსასრულო ეტაპიანი მოდელებისათვის მოვახდენთ შესაბამისი სასრულ ეტაპიანი მოდელების ზღვრული სიტუაციების განხილვას, როდესაც ეტაპების რაოდენობა მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

დავუშვათ, რომ მოთხოვნის განაწილების კანონი ყოველ ეტაპზე მოცემულია ერთი და იმავე $\varphi(\xi)$ ფუნქციით. შემოვიღოთ ბელმანის ფუნქციები:

$f_i(X_i)$– გვიჩვენებს ჯამური შემოსავლის მოსალოდნელ სიდიდეებს $i, i+1, \cdots, N$ ეტაპებზე ერთად, თუ ყოველ წინა ეტაპზე პროცესი ჩავატარეთ ოპტიმალურად და i–ური ეტაპისთვის მარაგის საწყისი რაოდენობა იყო X_i.

გამოვიყენოთ ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპი და მისი შესაბამისი ალგორითმი უკუგათვლის სქემით. გვექნება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_i(X_i) = \max_{Y_i \geq X_i} \left\{ -C(Y_i - X_i) + \int_0^{Y_i} [r\xi - h(Y_i - \xi)]\varphi(\xi)d\xi \right.$$
$$+ \int_{Y_i}^{\infty} [r\xi - P(\xi - Y_i)]\varphi(\xi)d\xi$$
$$\left. + \int_0^{\infty} f_{i+1}(Y_i - \xi)\varphi(\xi)d\xi \right\}, \quad i = 1,2, \cdots, N; \quad f_{N+1}(Y_N - \xi)$$
$$= 0 \ , \qquad (3.26)$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $f_1(X_1)$–ის მნიშვნელობა.

(3.26) გამოსახულებაში პირველი შესაკრები წარმოადგენს $(Y_i - X_i)$ რაოდენობის პროდუქციის შესყიდვაზე გაწეულ დანახარჯებს, მეორე შესაკრები წარმოადგენს i −ურ ეტაპზე მოსალოდნელი მოგების მათემატიკურ ლოდინს, თუ ამ ეტაპზე გვექნება პროდუქციის სიჭარბე. მესამე შესაკრები წარმოადგენს i−ურ ეტაპზე მოსალოდნელი მოგების მათემატიკურ ლოდინს, თუ ამ ეტაპზე გვექნებოდა პროდუქციის დეფიციტი. მეოთხე შესაკრები გვიჩვენებს ჯამური შემოსავლის მათემატიკურ ლოდინს $i, i+1, \cdots, N$ ეტაპებზე ერთად, თუ პროდუქციის საწყისი რაოდენობა $i+1$ ეტაპისთვის იყო $(Y_i - \xi)$ (ეს სიდიდე შეიძლება უარყოფითიც იყოს) და პროცესი წავმართეთ ოპტიმალურად.

თუ მოვახდენთ აღნიშნული რეკურენტული დამოკიდებულების განზოგადებას უსასრულო პროცესისათვის და ჩავთვლით, რომ

$$\lim_{N\to\infty} f_N = f \ ,$$

მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$f(X) = \max_{Y \geq X} \left\{ -C(Y-X) + \int_0^Y [r\xi - h(Y-\xi)]\varphi(\xi)d\xi \right.$$
$$\left. + \int_Y^\infty [r\xi - P(\xi - Y)]\varphi(\xi)d\xi + \int_0^\infty f(Y-\xi)\varphi(\xi)d\xi \right\},$$

მიღებული გამოსახულება გავაწარმოოთ Y–ით და გავუტოლოთ ნოლს:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial Y} = -C - h\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi + P\int_Y^\infty \varphi(\xi)d\xi + \int_0^\infty \frac{\partial f(Y-\xi)}{\partial Y}\varphi(\xi)d\xi$$
$$= 0,$$

მაგრამ

$$\frac{\partial f(Y-\xi)}{\partial Y} = \frac{\partial C(Y-\xi)}{\partial Y} = C,$$

რადგან თუ შემდეგი ეტაპი იწყება $(Y-\xi)$ რაოდენობის პროდუქციით, ეს ფაქტიურად გვათავისუფლებს $C(Y-\xi)$ რაოდენობის ხარჯებისაგან, რის გამოც აღნიშნული თანხა შემდეგ ეტაპზე შეიძლება ჩაითვალოს მოგების სიდიდედ. ამ პირობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$-C - h\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi + P - P\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi + C = 0, \qquad (3.27)$$

(3.27)-დან კი მივიღებთ:

$$\int_0^{Y^*} \varphi(\xi)d\xi = \frac{P}{h+P}, \qquad (3.28)$$

(3.28) ფორმულიდან განისაზღვრება Y^*–ის მნიშვნელობა. Y^*–ის მიღებულ მნიშვნელობას ვადარებთ მოცემულ ეტაპზე პროდუქციის საწყის X_i რაოდენობას. თუ $Y^* > X_i$, მაშინ საჭიროა შევუკვეთოთ $Y^* - X_i$ მოცულობის პროდუქცია, ხოლო თუ $Y^* \leq X_i$, მაშინ არ მოვახდენთ შეკვეთას.

ბ) შემთხვევა: განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ყოველ ეტაპზე დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნა არ გადადის შემდეგ ეტაპზე ე.ი. თუ საწყის ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის დეფიციტი, მაშინ მარაგის რაოდენობა შემდეგ ეტაპზე ნულის ტოლია. ასევე ვიგულისხმოთ, რომ პროდუქციაზე შეკვეთის რეალიზაციის დრო ნოლის ტოლია.

თუ გამოვიყენებთ ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპს, მაშინ ა) შემთხვევის ანალოგიურად გვექნება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულება:

$$f_i(X_i) = \max_{Y_i \geq X_i} \Bigg\{ -C(Y_i - X_i) + \int_0^{Y_i} [r\xi - h(Y_i - \xi)]\varphi(\xi)d\xi + \int_{Y_i}^{\infty} [r\xi - P(\xi - Y_i)]\varphi(\xi)d\xi + \int_0^{Y_i} f_{i+1}(Y_i - \xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{Y_i}^{\infty} f_{i+1}(0)\varphi(\xi)d\xi \Bigg\}, \quad i = 1,2,\cdots,N; \quad f_{N+1}(Y_N - \xi) = 0, \qquad (3.29)$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ $f_1(X_1)$ –ის საუკეთესო მნიშვნელობა.

(3.29) გამოსახულებაში პირველი შესაკრები გვიჩვენებს $(Y_i - X_i)$ რაოდენობის პროდუქციის შეკვეთით მიღებულ დანახარჯებს, მეორე შესაკრები გვიჩვენებს i–ურ ეტაპზე მოსალოდნელი მოგების მათემატიკურ ლოდინს, თუ ამ ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის სიჭარბე. მესამე შესაკრები გვიჩვენებს i–ურ ეტაპზე მოსალოდნელი მოგების მათემატიკურ ლოდინს, თუ ამ ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის დეფიციტი. მეოთხე შესაკრები გვიჩვენებს მოსალოდნელი ჯამური მოგების მათემატიკურ ლოდინს $i, i+1, \cdots, N$ ეტაპებზე ერთად, თუ i–ურ

ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის სიჭარბე და დარჩენილი ეტაპები წავრმართეთ ოპტიმალურად. მეხუთე შესაკრები გვიჩვენებს ჯამური მოგების მათემატიკურ ლოდინს $i, i+1, \cdots, N$ ეტაპებზე ერთად, თუ $i-$ურ ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის დეფიციტი.

უსასრულო რაოდენობა პერიოდების შემთხვევაში უნდა გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც $N \to \infty$. მივიღებთ შემდეგ რეკურენტულ ინტეგრალურ დამოკიდებულებას:

$$f(X) = \max_{Y \geq X} \left\{ -C(Y-X) + \int_0^Y [r\xi - h(Y-\xi)]\varphi(\xi)d\xi \right.$$
$$+ \int_Y^\infty [r\xi - P(\xi - Y)]\varphi(\xi)d\xi + \int_0^Y f(Y-\xi)\varphi(\xi)d\xi$$
$$\left. + \int_Y^\infty f(0)\varphi(\xi)d\xi \right\},$$

Y^*სიდიდის განსაზღვრისათვის მიღებული ინტეგრალური დამოკიდებულება გავაწარმოოთ $Y-$ით და გავუტოლოთ ნოლს. მივიღებთ:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial Y} = -C - h\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi + (r+P)\int_Y^\infty \varphi(\xi)d\xi + C\int_0^Y \varphi(\xi)d\xi + 0$$
$$= 0,$$

რადგან

$$\frac{\partial f(Y-\xi)}{\partial Y} = C\,.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\int_0^{\infty} \varphi(\xi)d\xi = 1\,,$$

მივიღებთ:

$$-h\int_0^{Y} \varphi(\xi)d\xi - (r+P)\int_0^{Y} \varphi(\xi)d\xi + C\int_0^{Y} \varphi(\xi)d\xi = C - r - P\,,$$

საიდანაც გვექნება:

$$\int_0^{Y^*} \varphi(\xi)d\xi = \frac{r+P-C}{r+P+h-C}\quad .$$

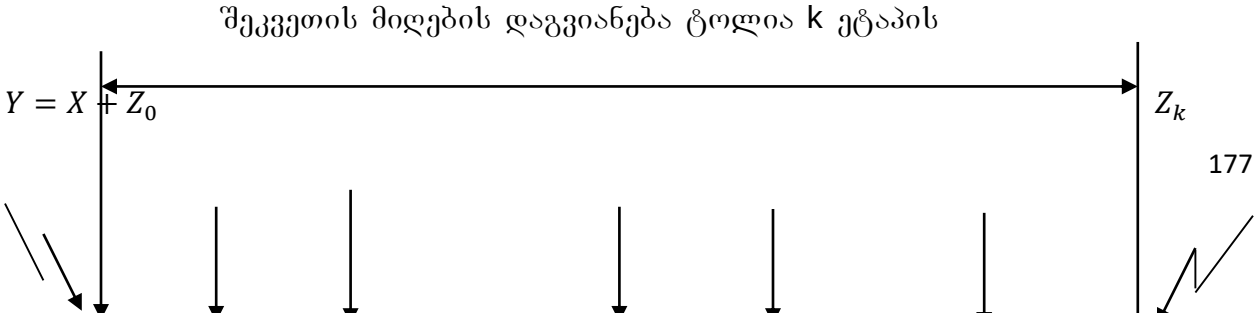
გ) შემთხვევა: განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც ყოველ ეტაპზე დაუკმაყოფილებელი მოთხოვნები ემატებიან შემდეგი ეტაპის მოთხოვნებს, ხოლო შეკვეთის რეალიზაციის დრო იგვიანებს k პერიოდით. ეს ნიშნავს, რომ მოცემულ ეტაპზე შეკვეთილი პროდუქცია მიიღება k ეტაპის შემდეგ.

გამოვიყენოთ ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპი და უკუგათვლის სქემა. დავუშვათ, რომ i-ური ეტაპის დასაწყისში გვაქვს X რაოდენობის პროდუქცია, ხოლო წინა ეტაპებზე განხორციელებული შეკვეთების შედეგად $i, i+1, \cdots, i+k-1$ ეტაპებზე მიღებული შეკვეთების სიდიდეებია $Z_0, Z_1, \cdots, Z_{k-1}$.

i–ურ ეტაპზე ძირითად შესარჩევ პარამეტრს წარმოადგენს შეკვეთის Z_k მოცულობა, რომლის მიღება მოხდება k ეტაპის შემდეგ ანუ $i+k$ ეტაპზე.

i–ურ ეტაპზე მარაგის რაოდენობა იქნება $Y = X + z_0$, ხოლო ამ ეტაპის ბოლოს მოთხოვნათა დაკმაყოფილების შემდეგ, $i+1$ ეტაპის დასაწყისში მარაგის საწყისი რაოდენობა ტოლი იქნება $Y - \xi = X + z_0 - \xi$, ხოლო მარაგის მაქსიმალური დონე $i+1$ ეტაპზე იქნება $Y - \xi + z_1$.

შემოვიღოთ ბელმანის ფუნქცია $f_i(Y, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{k-1})$, რომელიც გვიჩვენებს მოსალოდნელი ჯამური მოგების მათემატიკურ ლოდინს $i, i+1, \cdots, N$ ეტაპებზე ერთად, თუ მარაგის მაქსიმალური დონე i-ურ ეტაპზე იყო Y, წინა ეტაპებზე შეკვეთის მოცულობები კი – $Z_1, \cdots, Z_{k-1}$.



Z_1 Z_2 Z_{k-3} Z_{k-2} Z_{k-1}

i $i+1$ $i+2$ $i+k-3$ $i+k-2$ $i+k-1$

X

ξ ξ_1 ξ_{k-3} ξ_{k-2} ξ_{k-1} ξ_k

გვექნება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_i(Y, Z_1, Z_2, \cdots, Z_{k-1}) = \max_{Z_k \geq 0} \left\{ -CZ_k + \int_0^Y [r\xi - h(Y-\xi)]\varphi(\xi)d\xi + \int_Y^\infty [rY - P(\xi - Y)]\varphi(\xi)d\xi + \int_0^\infty f_{i+1}(Y + Z_1 - \xi, Z_2, \cdots, Z_k)\varphi(\xi)d\xi \right\},$$

$i = 1,2, \cdots, N;\ f_{N+1} = 0$.

3.13. მარაგთა მართვის ზოგადი ამოცანა

ზემოთ განხილულ ამოცანებში ყოველთვის ვთვლიდით, რომ ცნობილი იყო მოთხოვნის ინტენსივობა მოცემულ პროდუქციაზე. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მოთხოვნის ინტენსივობა უცნობია და არ არის დამოკიდებული დროზე ე.ი. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ალბათობა იმისა, რომ მოთხოვნილების ინტენსივობა მოთავსებული იქნება $(S, S+dS)$ ინტერვალში ტოლია $\Phi(S)dS$ სიდიდის, სადაც $\Phi(S)$ წარმოადგენს მოთხოვნილების ინტენსივობის განაწილების სიმკვრივეს.

დავუშვათ, რომ $r(X)$ არის X რაოდენობის პროდუქციის შესყიდვაზე გაწეული დანახარჯები, $P(X)$ წარმოადგენს დანაკარგებს X რაოდენობის პროდუქციაზე დეფიციტის შემთხვევაში. ფაქტიურად $P(X)$ წარმოადგენს იმ მოგებას, რომელსაც მივიღებდით X რაოდენობის პროდუქციიდან თუ მასზე იქნებოდა სათანადო მოთხოვნა. $K(X)$ -ით აღვნიშნოთ X რაოდენობის პროდუქციის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები დროის ერთეულში. ჩავთვალოთ, რომ გვაქვს N ეტაპიანი პროცესი და $F_N(Y)$ -ით აღვნიშნოთ ბელმანის ფუნქცია, რომელიც გამოსახავს დანახარჯებს N ეტაპიანი პროცესის დროს, თუ საწყის ეტაპზე გვქონდა Y რაოდენობის პროდუქცია და პროცესი წავმართეთ ოპტიმალურად.

დავუშვათ, რომ საწყის ეტაპზე გვქონდა A რაოდენობის პროდუქცია. ვიანგარიშოთ $f_1(A)$, რომელიც წარმოადგენს დანახარჯებს პირველ ეტაპზე, როდესაც ეტაპის დასაწყისისათვის გვაქვს A რაოდენობის პროდუქცია და ამ ეტაპს წარვმართავთ ოპტიმალურად.

ცხადია, რომ

$$f_1(A) = \min_Q \left\{ r(Q) + \int_{A+Q}^{\infty} P\big(S - (A+Q)\big)\Phi(S)dS + \int_0^{A+Q} K(A+Q-S)\Phi(S)dS \right\}$$

სადაც პირველი შესაკრები წარმოადგენს Q რაოდენობის პროდუქციის შესყიდვაზე გაწეულ დანახარჯებს. (ვგულისხმობთ, რომ პროდუქციაზე შეკვეთა სრულდება მომენტალურად).

მეორე შესაკრები წარმოადგენს პროდუქციაზე დეფიციტის შემთხვევაში მოსალოდნელ დანახარჯებს, ამ შემთხვევაში პროდუქციაზე მოთხოვნა მეტია ვიდრე საწყის ეტაპზე არსებული პროდუქციის რაოდენობას დამატებული შეკვეთილი პროდუქციის რაოდენობა. ე.ი. $S > Q + A$.

მესამე შესაკრები წარმოადგენს მოსალოდნელ დანაკარგებს იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს პროდუქციის ჭარბი რაოდენობა. ეს არის დანახარჯები პროდუქციის შენახვაზე, მაშინ ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპის გამოყენებით გვექნება შემდეგი რეკურენტული დამოკიდებულებები:

$$f_N(A) = \min_Q \left\{ r(Q) + \int_{A+Q}^{\infty} P\big(S-(A+Q)\big)\Phi(S)dS \right.$$
$$+ \int_0^{A+Q} K(A+Q-S)\Phi(S)dS + f_{N-1}(0) \int_{A+Q}^{\infty} \Phi(S)dS$$
$$\left. + \int_0^{A+Q} f_{N-1}(A+Q-S)\Phi(S)dS \right\}, \qquad (3.30)$$

სადაც მეოთხე შესაკრები წარმოადგენს მოსალოდნელ დანახარჯებს დარჩენილ $N-1$ ეტაპზე იმ შემთხვევაში, როდესაც პირველ ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის დეფიციტი და $N-1$ ეტაპზე მივიღეთ ოპტიმალური გადაწყვეტილება. სწორედ ამის გამო გვაქვს მეოთხე ინტეგრალის წინ $f_{N-1}(0)$. პირველ ეტაპზე დეფიციტის გამო, $N-1$ ეტაპი უნდა

წარიმართოს საწყისი პროდუქციის გარეშე. იგი არ არის დამოკიდებული S −ზე, ამიტომ გამოვიტანეთ ინტეგრალის ნიშნის გარეთ. მეხუთე შესაკრები წარმოადგენს მოსალოდნელ დანახარჯებს დარჩენილ $N-1$ ეტაპზე, როდესაც პირველ ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის სიჭარბე, ხოლო დარჩენილი $N-1$ ეტაპი წარვმართეთ ოპტიმალურად. ზოგიერთ შემთხვევაში $f_{N-1}(Y)$ და $f_N(Y)$ შორის ფაქტიურად არ არის განსხვავება (თუ N საკმაოდ დიდი რიცხვია). ამ შემთხვევაში (3.30) რეკურენტული დამოკიდებულებების ნაცვლად, რომელთა გამოყენება ძალიან შრომატევადია, განიხილავენ შემდეგი სახის ინტეგრალურ განტოლებას, რომელიც შედარებით იოლად იხსნება მიახლოვებითი მეთოდების გამოყენებით. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $f_{N-1}(Y)=f_N(Y)=f(Y)$, მაშინ რეკურენტური დამოკიდებულებების ნაცვლად გვექნება შემდეგი ინტეგრალური დამოკიდებულება:

$$f(A) = \min_{Q}\left\{ r(Q) + \int_{A+Q}^{\infty} P\big(S-(A+Q)\big)\Phi(S)dS \right.$$
$$+ \int_{0}^{A+Q} K(A+Q-S)\Phi(S)dS + f(0)\int_{A+Q}^{\infty}\Phi(S)dS$$
$$\left. + \int_{0}^{A+Q} f(A+Q-S)\Phi(S)dS \right\}$$

3.14. მარაგთა მართვის ზოგადი ამოცანა შეკვეთის დაგვიანებით

დავუშვათ გვაქვს მომარაგება–გასაღების N ეტაპიანი პროცესი და წინა ამოცანებისაგან განსხვავებით ვიგულისხმოთ, რომ პროდუქციაზე შეკვეთა იგვიანებს ერთი ეტაპით. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ რომელიმე ეტაპის დასაწყისში განვახორციელებთ შეკვეთას, მაშინ აღნიშნული რაოდენობის პროდუქციას მივიღებთ ამ ეტაპის ბოლოს შემდეგი ეტაპის დასაწყისისათვის. რა თქმა უნდა შეგვეძლო განგვეხილა უფრო რთული შემთხვევები, როდესაც დაგვიანებას ექნებოდა ადგილი უფრო მეტი ეტაპის გან–მავლობაში. წინა პარაგრაფებში შემოღებული აღნიშვნების და

ბელმანის ოპტიმალობის პრინციპის გამოყენებით გვექნება შემდეგი სახის რეკურენტური დამოკიდებულება:

$$f_N(A) = \min_Q \left\{ r(Q) + \int_A^{\infty} P(S-A)\Phi(S)dS + \int_0^A K(A-S)\Phi(S)dS \right.$$

$$\left. + f_{N-1}(Q) \int_A^{\infty} \Phi(S)dS + \int_0^A f_{N-1}(A+Q-S)\Phi(S)dS \right\},$$

სადაც პირველი შესაკრები $r(Q)$ წარმოადგენს Q მოცულობის პროდუქციის შეკვეთისათვის საჭირო დანახარჯებს, მეორე შესაკრები წარმოადგენს დანაკარგებს პირველ ეტაპზე პროდუქციაზე დეფიციტის შემთხვევაში და იმის გამო, რომ პროდუქციაზე შეკვეთა იგვიანებს ერთი ეტაპით. ინტეგრალი აიღება $A-$დან და არა $A+Q-$დან, რადგან პირველი ეტაპის დასაწყისში განხორციელებული შეკვეთა მხოლოდ მეორე ეტაპისათვის მიიღება.

მესამე შესაკრები წარმოადგენს დანახარჯებს პირველ ეტაპზე, გამოწვეულს იმ შემთხვევაში თუ გვქონდა პროდუქ ციის ჭარბი რაოდენობა. აქაც ინტეგრების საზღვრები შეცვლილია.

მეოთხე შესაკრები წარმოადგენს დანახარჯებს იმ შემთხვევაში თუ პირველ ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის

დეფიციტი და დარჩენილი $N-1$ ეტაპი წარვმართეთ ოპტიმალურად. აქ იგულისხმება, რომ პირველ ეტაპზე განხორციელებული შეკვეთა Q მოცულობის პროდუქციაზე მიღებული იქნა მეორე ეტაპის დასაწყისისათვის და ამიტომ $f_{N-1}(0)$-ის მაგივრად გვაქვს $f_{N-1}(Q)$. მეხუთე შესაკრები წარმოადგენს დანაკარგებს დარჩენილ $N-1$ ეტაპზე იმ შემთხვევაში, თუ პირველ ეტაპზე გვქონდა პროდუქციის ჭარბი რაოდენობა, ხოლო დარჩენილი $N-1$ ეტაპი წარვმართეთ ოპტიმალურად. როდესაც N საკმაოდ დიდი რიცხვია, მაშინ განსხვავება f_{N-1} და f_N–ს შორის ფაქტიურად არა გვაქვს და მათ მაგიერ ყველგან ვიგულისხმოთ f-ს. ასეთ შემთხვევაში რეკურენტული დამოკიდებულების ნაცვლად გვექნება შემდეგი ინტეგრალური დამოკიდებულება:

$$f(A)=\min_{Q}\left\{r(Q)+\int_{A}^{\infty}P(S-A)\Phi(S)dS+\int_{0}^{A}K(A-S)\Phi(S)dS\right.$$
$$\left.+f(Q)\int_{A}^{\infty}\Phi(S)dS+\int_{0}^{A}f(A+Q-S)\Phi(S)dS\right\}$$

რეკურენტური დამოკიდებულების შეცვლას ასეთი ინტეგრალური განტოლებით აზრი აქვს იმდენად, რამდენადაც აღნიშნული ინტეგრალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა გაცილებით იოლია, ვიდრე რეკურენტული დამოკიდებულების გამოყენება.

3.15. დანიშვნის ამოცანა

ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს N რაოდენობის მანქანა და მუშების რაოდენობაც $N-$ის ტოლია. იგულისხმება, რომ ყოველ მუშას შეუძლია მუშაობა ნებისმიერ დანადგარზე. ვგულისხმობთ აგრეთვე, რომ მოცემულია C_{ij} , $(i,j = 1,2,\cdots,N)$, რომლებიც გვიჩვენებენ მუშების შრომის ნაყოფიერებას დანადგარებზე. უფრო ზუსტად, C_{ij} არის $i-$ური მუშის შრომის ნაყოფიერება $j-$ურ დანადგარზე მუშაობისას (ფიქსირებული i და j-თვის).

ვიგულისხმოთ, რომ ყოველ დანადგარზე ინიშნება მხოლოდ ერთი მუშა, და ასევე ყოველ მუშას გამოეყოფა მხოლოდ ერთი დანადგარი. შემოვიღოთ ფუნქცია:

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \mathrm{i}-\text{ურ მუშას გამოეყო } \mathrm{j}-\text{ური დანადგარი,} \\ 0, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში ცხადია, რომ ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობებს:

$$\sum_{j=1}^{N} Z_{ij} = 1, (i = 1,2, \cdots, N);$$

$$\sum_{i=1}^{N} Z_{ij} = 1, (j = 1,2, \cdots, N)$$

პირველი ჯამი ნიშნავს, რომ$i-$ური მუშა$i = 1,2, \cdots, N$ მხოლოდ ერთ დანადგარზე იმუშავებს. ეორე ჯამი ნიშნავს, რომ$j-$ურ დანადგარზე$j = 1,2, \cdots, N$ იმუშავებს მხოლოდ ერთი მუშა.

ჩვენი მიზანია მოვახდინოთ ისეთი დანიშვნა, რომ საერთო შრომის ნაყოფიერება იყოს მაქსიმალური ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} Z_{ij} \rightarrow max$$

საბოლოოდ მივიღეთ მთელრიცხვა პროგრამირების შემდეგი ამოცანა:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} C_{ij}Z_{ij} \rightarrow max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} Z_{ij} = 1, (i = 1,2,\cdots,N); \\ \sum_{i=1}^{N} Z_{ij} = 1, (j = 1,2,\cdots,N) \end{cases}$$

როგორც ცნობილია მთელრიცხვა პროგრამირების ამოცანების ამოხსნა საკმაოდ პრობლემატურია. მათი შეცვლა ჩვეულებრივი პროგრამირების ამოცანებით, მთელობის შეზღუდვის მოხსნის გარეშე, ხშირ შემთხვევაში არ გვაძლევს საშუალებას მივიღოთ ოპტიმალური ამოხსნები. ე.ი. თუ Z_{ij} ცვლადების მთელობის მოთხოვნას შევცვლით მოთხოვნით$Z_{ij} \geq 0$ და ამოვხსნით მიღებულ ამოცანას, ხოლო შემდეგ ამოხსნებს დავამრგვალებთ უახლოეს მთელ რიცხვებამდე, არავითარი გარანტია არ გვექნება იმისა, რომ ასეთი გზით მიღებული ამოხსნები იქნება ოპტიმალური.

3.16. ტექნოლოგიური პროცესის გამართვის ამოცანა

ასეთი ამოცანა ფაქტიურად წარმოადგენს საწარმოს მუშაობის დაგეგმვის ამოცანას. Iგი გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ საწარმოს მუშაობის რეჟიმი. აღნიშნულ რეჟიმში საწარმოს მუშაობის სიმძლავრეები ისე შევარჩიოთ, რომ დაკმაყოფილებული იქნეს საქონელზე მოთხოვნები და დანახარჯები იყოს მინიმალური. ვიგულისხმოთ, რომ საწარმოს მუშაობა შეუძლია ორ რეჟიმში: ძირითად და დამატებით რეჟიმში. სევე დავუშვათ, რომ გვაქვს N ეტაპიანი გეგმური პერიოდი. ვთქვათ ძირითად რეჟიმში საწარმოს მუშაობის სიმძლავრეებია $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ ეტაპების მიხედვით. ოველი $i-$თვის Q_i-ური გვიჩვენებს პროდუქციის იმ რაოდენობას, რომლის გამოშვებაც შეუძლია საწარმოს $i-$ურ ეტაპზე. დავუშვათ, რომ პროდუქციის ერთეულის წარმოების ღირებულება ძირითად რეჟიმში არის $C\$$. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები: $S_1, S_2, \cdots, S_N$ იყოს პროდუქციაზე მოთხოვნები ეტაპების მიხედვით; $L_1, L_2, \cdots, L_N$ -საწარმოს სიმძლავრეები დამატებით რეჟიმში და დავუშვათ, რომ დამატებით რეჟიმში პროდუქციის ერთეულის წარმოების ღირებულებაა $C'\$$. შევნიშნოთ, რომ $C' > C$. ღოგორც წესი, ეს განპირობებულია იმით, რომ დამატებით რეჟიმში პროდუქციის გამოშვება დაკავშირებულია ან ძირითადი სამუშაო დროის გაზრდასთან, ან მეორე ცვლის

შემოღებასთან, ან დამატებითი მუშახელის დაქირავებასთან. K-თი აღვნიშნოთ პროდუქციის ერთეულის შენახვაზე გაწეული დანახარჯები ერთ ეტაპზე. ტექნოლოგიური პროცესის აღსანიშნავად შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

ეტაპების ნომრები		1	2	…	$N-1$	N
	მოთხოვნილებები	S_1	S_2	…	S_{N-1}	S_N
ეტაპების ნომრები	სიმძლავრეები					
1	Q_1	C	$C+K$	…	$C+(N-2)K$	$C+(N-1)K$
	L_1	C'	$C'+K$	…	$C'+(N-2)K$	$C'+(N-1)K$
2	Q_2		C	…	$C+(N-3)K$	$C+(N-2)K$
	L_2		C'	…	$C'+(N-3)K$	$C'+(N-2)K$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$N-1$	Q_{n-1}			…	C	$C+K$
	L_{n-1}			…	C'	$C'+K$
N	Q_n			…		C
	L_n			…		C'

მოცემული ცხრილის i–ური სტრიქონისა და j–ური სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტი გვიჩვენებს დანახარჯებს პროდუქციის ერთეულზე იმ შემთხვევაში, თუ იგი წარმოებული იყო i–ურ ეტაპზე და მოხმარებული j–ურ ეტაპზე, რეჟიმების შესაბამისად.

აღნიშნული მიდგომის გამო ცხრილის ის უჯრები, რომელთათვისაც$i > j$, არ არის შევსებული, რადგან შეუძლებელია პროდუქცია წარმოებული იყოს უფრო გვიან ვიდრე მას მოიხმარენ. q_{ij}–ით ავღნიშნოთ პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც წარმოებული იქნება i–ურ ეტაპზე და მოხმარებული j–ურ ეტაპზე ძირითადი რეჟიმის დროს.

ანალოგიურად,l_{ij}–ით აღვნიშნოთ დამატებით რეჟიმში მუშაობისას i–ურ ეტაპზე წარმოებული პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც რეალიზებული იქნა j–ურ ეტაპზე. ცხადია, რომ $q_{ij} = 0$ და $l_{ij} = 0$, თუ $i > j$.

C_{ij}–ით აღვნიშნოთ დანახარჯები პროდუქციის ერთეულზე, თუ იგი წარმოებულია ძირითად რეჟიმში i–ურ ეტაპზე და რეალიზებული j–ურ ეტაპზე. ანალოგიურად C'_{ij}–ით აღვნიშნოთ დანახარჯები პროდუქციის ერთეულზე დამატებით რეჟიმში მუშაობისას.

ცხადია, რომ თუ $j > i$, მაშინ

$C_{ij} = C + (j - i)K$, ხოლო $C'_{ij} = C' + (j - i)K$.

ასევე ცხადია, რომ ადგილი უნდა ჰქონდეს შემდეგ უტოლობებს:

$$\sum_{j=1}^{N} q_{ij} \le Q_i \ , \qquad (3.31)$$

$$\sum_{j=1}^{N} l_{ij} \le L_i \ , \qquad (3.32)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left(q_{ij} + l_{ij}\right) = S_j \ , \qquad (3.33)$$

(3.31) შეზღუდვა გვიჩვენებს, რომ $i-$ურ ეტაპზე წარმოებული და ყველა$j > i$ ეტაპზე მოხმარებული პროდუქციის რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს $i-$ურ ეტაპზე საწარმოს სიმძლავრეს ძირითად რეჟიმში მუშაობისას. (3.32) შეზღუდვა ანალოგიურია (3.31) –ის, ოღონდ დამატებითი რეჟიმისათვის. (3.33) პირობა შეესაბამება $i-$ურ ეტაპზე პროდუქციაზე მოთხოვნის დაკმაყოფილების აუცილებლობას. ცხადია, ჩვენი მიზანია ისე შევარჩიოთ q_{ij} და l_{ij} სიდიდეები, რომ დაკმაყოფილდეს (3.31),(3.32),(3.33) პირობები და მინიმალური მნიშვნელობა მიიღოს შემდეგმა ჯამმა:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} (C_{ij} q_{ij} + C'_{ij} l_{ij}) \to \min \qquad (3.34)$$

(3.34) წარმოადგენს საერთო დანახარჯებს, გამოწვეულს პროდუქციის წარმოებითა და შენახვით, მომარაგება გასაღების N ეტაპიან პროცესში.

(3.31) – (3.34) ერთად წარმოადგენს ჩვეულებრივ ტრანსპორტის ამოცანას და მისი ამოხსნა ხდება ტრანსპორტის ამოცანის მსგავსად.