საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ია რამიშვილი

გაწრფივებული მაქსიმუმის პრინციპი კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანებისათვის არაფიქსირებული საწყისი მომენტით

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი

დ ი ს ე რ ტ ა ც ი ა

01.01.02–დიფერენციალური განტოლებები

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: გ. ხარატიშვილი
აკდემიკოსი, ფიზ.-მათ. მეც. დოქტორი პროფესორი
თ. თადუმაძე ფიზ.-მათ. მეც. დოქტორი, პროფესორი

თბილისი-2004

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი 4

თ ა ვ ი. 1. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის სამართი დიფერენციალური განტოლებებისათვის წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით 7

§1.1. ზოგიერთი აღნიშვნა და დამხმარე დებულება 7

§1.2. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები განტოლებისათვის წყვეტილი საწყისი პირობით 14

1.2.1. ძირითადი თეორემების ფორმულირება 14

1.2.2. ზოგიერთი კომენტარი 17

§1.3. ამონახსნის ნაზრდის შეფასება V^- და V^+ ვარაციათა სიმრავლის მიმართ 19

§1.4. თეორემა 1.2.1 დამტკიცება 28

§1.5. თეორემა 1.2.2 დამტკიცება 35

§1.6. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები განტოლებისათვის უწყვეტი საწყისი პირობით. 42

1.6.1. ძირითადი თეორემების ფორმულირება 42

1.6.2. ზოგიერთი კომენტარი 44

§1.7. ამონახსნის ნაზრდის შეფასება V_1^- და V_1^+ ვარაციათა სიმრავლეების მიმართ 45

§1.8. თეორემა 1.6.1 დამტკიცება 53

§1.9. თეორემა 1.6.2 დამტკიცება 56

თ ა ვ ი. 2. კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანები წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები 58

§2.1. დამხმარე დებულებები 58

§2.2. ოპტიმალური ამოცანები წყვეტილი საწყისი პირობით 62

2.2.1 ამოცანა ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქციონალით 62

2.2.2 ამოცანა დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით 69

2.2.3 წრფივი ამოცანა 73

§2.3. ოპტიმალური ამოცანები უწყვეტი საწყისი პირობით 76

2.3.1 ამოცანა ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქციონალით 76

2.3.2 ამოცანა დამაგრებული მარჯვენა ბოლოთი და ინტეგრალური ფუნქციონალით 78

2.3.3 წრფივი ამოცანა 80

§2.4. თეორემა 2.2..1 დამტკიცება 81

§2.5. თეორემა 2.3..1 დამტკიცება 87

§2.6. ეკონომიკური ზრდის ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანა 89

ლიტერატურა 93

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

ოპტიმალური მართვის ამოცანას სამართი ობიექტებისთვის, რომლებიც აღიწერება ნეიტრალური ტიპის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით, ეწოდება ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანა. ასეთი განტოლებებით აღიწერება მრავალი ტექნიკური, ეკონომიკური და სხვა სახის სამართი სისტემები, რომლებიც შეიცავენ ინფორმაციას წარსულში როგორც სისტემის მდგომარეობის ასევე მდგომარეობის ცვლილების შესახებ [1–4].

ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანების შესწავლას სტიმული მისცა გ. ხარატიშვილის გამოკვლევამ [5], სადაც პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგი [6] პირველად დამტკიცებულია ფაზურ კოორდინატებში მუდმივი დაგვიანების შემცველი ოპტიმალური ამოცანებისათვის.

ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების თვალსაზრისით, სხადასხვა კლასის ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანები ფიქსირებული საწყისი მომენტითა და მართვებში დაგვიანების გარეშე, შესწავლილია [7–20] ნაშრომებში; ამოცანები, მართვებში თანაზომადი დაგვიანებებით, შესწავლილია [21] ნაშრომში; ამოცანები წყვეტილი საწყისი პირობით და მართვებში დაგვიანებების გარეშე შესწავლილია [3], [22] ნაშრომებში. აქვე ავღნიშნავთ, რომ არაწრფივი ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანებისათვის, საზოგადოდ, პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის ანალოგს ადგილი არა აქვს.

სადისერტაციო ნაშრომში, გამოკვლეულია კვაზი-წრფივი (ტრაექტორიის წარმოებულის წინაისტორიის მიმართ წრფივი) ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანები არაფიქსირებული საწყისი მომენტით, წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით, ზოგადი ცვლადი დაგვიანებებით როგორც ფაზურ კოორდინატებსა და მის წარმოებულებში, ასევე მართვებში. აღნიშნული ამოცანებისათვის, ვარიაციის ფორმულებზე დაყრდნობით, მიღებულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

ოპტიმალური ამოცანები დაგვიანებებით ფაზურ კოორდინატებსა და მართვებში შესწავლილია [23−34] ნაშრომებში.

ნაშრომი შედგება ორი თავისაგან, და იგი აერთიანებს 15 პარაგრაფს.

პირველი თავი ეხება ამონახსნის ვარიაციის ფორმულებს. ვარიაციის ფორმულა ეწოდება ამონახსნის ვარიაციის წარმოდგენას, წრფივად, საწყისი მონაცემებისა და განტოლების მარჯვენა მხარის შეშფოთებების (ვარიაციის) მიმართ.

ვარიაციის ფორმულები არსებით როლს თამაშობს ოპტიმალურობის აუცილებე ლი პირობების დამტკიცებისას [25,27,32,37].

§1.2 და §1.6-ში მოყვანილი თეორემები ეხება ამონახსნის ვარიაციის ფორმუ ლებს კვაზი-წრფივი სამართი ნეიტრალური ტიპის დიფერენციალური განტოლებისა თვის, შესაბამისად, წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით. განხილულია შემთხვევ ები, როცა ხდება საწყისი მომენტის ვარიაცია მარცხნიდან, მარჯვნიდან და ორივე მხრიდან. აღნიშნული თეორემების დამტკიცება განხორციელებულია [38]-ში დამუშავე ბული სქემით (§§ 1.4, 1.5, 1.7, 1.8). §§ 1.3, 1.4-ში დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის შეფასება და საწყისი მომენტში მისი ანალიზური სახე. ყოველივე ეს გამოიყენება ძირითადი თეორემების დასამტკიცებლად.

ვარიაციის ფორმულები, კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის დიფერენციალური განტოლებისათვის წყვეტილი საწყისი პირობით, როცა მარჯვენა მხარე არ არის დამ ოკიდებული მართვაზე, მიღებულია [3,39] ნაშრომებში.

მე-2 თავში, შესწავლილია ოპტიმალური ამოცანები არაფიქსირებული საწყისი მომენტით, ზოგადი ცვლადი დაგვიანებებით, ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქ ციონალით. §2.2 და §2.3-ში მოყვანილი თეორემები შეიცავენ ოპტიმალურობის აუცი ლებელ პირობებს გაწრფივებული ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპის სახით საწყი სი ფუნქციისა და მართვისათვის, უტოლობებისა და ტოლობების სახით საწყისი და საბოლოო მომენტებისათვის. ძირითადი თეორემები დამტკიცებულია [40]-ში შემოთავა ზებული მეთოდით (§§ 2.3, 2.4). ოპტიმალურობის ზოგადი აუცილებელი პირობები დაკონკრეტებულია ამოცანებისათვის ინტეგრალური ფუნქციონალითა და დამაგრებული ბოლოებით, წრფივი ამოცანებისათვის, სწრაფქმედების ამოცანებისათვის (2.2.2, 2.2.3, 2.3.2, 2.3.3).

ბოლოო §2.6-ში განხილულია ეკონომიკური ზრდის მათემატიკური მოდელი [41], დასმულია სწრაფქმედების ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანა არაფიქსირებული საწყისი მომენტით, წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით, მუდმივი დაგვიანებებით როგორც ფაზურ კოორდინატებსა და მის წარმოებულებში, ასევე მართვებში. თეორემა 2.2.13 და 2.3.8 გამოყენებით დადგენილია ოპტიმალური მართვის სტრუქტურა, მიღებულია საწყისი და საბოლოო მომენტების ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენებული იყო: თსუ ი. ვეკუას სახ. გმი ჩვეულებრივ და კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა და მართვის თეორიის განყოფილების სემინარზე (2002-2004); ა. რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინსტიტუტის თბილისის სემინარზე დიფერენციალური განტოლებების თვისებრივ თეორიაში (2003); საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკის კათედრის სემინარზე (2003); ვ. კუპრაძის 100 წლისთავისადმი და ნ.ვეკუას 90 წლისთავისადმი მიძღვნილ სიმპოზიუმზე დიფერენციალურ განტოლებებსა და მათემატიკურ ფიზიკაში (2003).

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია ნაშრომებში [42-47].

თავი 1. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის სამართი დიფრენციალური განტოლებებისათვის წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით

ამონახსნის ვარიაცია ეწოდება ამონახსნის ნაზრდის მთავარ ნაწილში შემავალ, საწყის მონაცემებისა და განტოლების მარჯვენა მხარის ვარიაციებზე დამოკიდებულ წევრს. ვარიაციის ფორმულა ეწოდება ამონახსნის ვარიაციის წარმოდგენას, წრფივად აღნიშნული ვარიაციების მიმართ.

ვარიაციის ფორმულები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ოპტიმალური ამოცანების შესწავლისას. მათი დახმარებით შესაძლებელია გამოთვლილი იქნას გარკვეული გადასახ ვის დიფერენციალი, რომელიც თავის მხრივ საშუალებას იძლევა მიღებული იქნას ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

ვარიაციის ფორმულები, ამ თავში, დამტკიცებულია ორი შემთხვევისათვის. პირველი-საწყის მომენტში საწყისი ფუნქციისა და ტრაექტორიის მნიშვნელობები, საზოგადოდ, არ ემთხვევა ერთმანეთს (წყვეტილი საწყისი პირობა). მეორე-საწყის მომე ნტში საწყისი ფუნქციისა და ტრაექტორიის მნიშვნელობები ყოველთვის ემთხვევა ერთმა ნეთს (უწყვეტი საწყისი პირობა). როგორც შემდეგ დავინახავთ, ეს შემთხვევები არსები თად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

§1.1 ზოგიერთი აღნიშვნა და დამხმარე დებულება

R^n აღნიშნავს

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

წერტილთა (ვექტორთა, ელემენტთა) n-განზომილებიან სივრცეს, სადაც x ვექტორის მოდულის ქვეშ იგულისხმება ევკლიდეს მოდული. ე. ი. $|x|^2=\sum_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^2$. ვექტორთა

$$\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_n), \qquad x=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$$

სკალარულ ნამრავლს ჩვენ განვიხილავთ, როგორც $1\times n$ და $n\times 1$ განზომილებიან მატრიცთა ნამრავლს. ე. ი.

$$\pi x=(\pi_1,\ldots,\pi_n)\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\pi_i x^i.$$

ამრიგად,

$$|x|^2=x^*x,$$

სადაც ვარსკვლავი აღნიშნავს ტრანსპონირებას.

$J=[a,b]\subset R$-სასრული ინტერვალია; $O\subset R^n$, $G\subset R^r$-ღია სიმრავლეებია.

$\tau_i(t)$, $t\in R$, $i=1,\ldots,s$ (დაგვიანებები ფაზურ კოორდინატებში)-აბსოლუტურად უწყვეტი სკალარული ფუნქციებია და აკმაყოფილებენ პირობებს: $\tau_i(t)\le t$, $t\in R$, $i=1,\ldots,s$; $\dot\tau_i(t)>0$, $i=1,\ldots,s$, თითქმის ყველა $t\in R$.

$\eta_j(t)<t$, $t\in R$, $j=1,\ldots,k$ (დაგვიანებები ფაზურ კოორდინატების წარმოებულებში)-უწყვეტად წარმოებადი სკალარული ფუნქციებია და აკმაყოფილებენ პირობებს: $\eta_j(t)<t$, $\dot\eta_j(t)>0$, $t\in R$, $j=1,\ldots,k$.

$\theta_j(t)$, $t\in R$, $j=1,\ldots,\nu$ (დაგვიანებები მართვებში)-აკმაყოფილებენ ყველა იმ პირობებს, რომლებსაც აკმაყოფილებდა ფუნქცია $\tau_i(t)$.

E_φ-უწყვეტად წარმოებად $\varphi:J_1=[\tau,b]\to R^n$ ფუნქციათა სივრცეა, $\tau=\min(\tau_1(a),\ldots,$

$\tau_\nu(a),\eta_1(a),...,\eta_k(a))$, ნორმით $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(t)|+|\dot{\varphi}(t)|:t\in J_1\}$. $\Phi=\Phi(J_1,O)=\{\varphi\in E_\varphi:$ $:\varphi(t)\in O\}$ -საწყის ფუნქციათა სიმრავლეა.

E_u-ლებეგის აზრით ზომად $u:J_2=[\theta,b]\to R^r$ ფუნქციათა სივრცეა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $clu(J_2)$ სიმრავლე კომპაქტურია R^r-ში; $\theta=\min(\theta_1(a),...,\theta_\nu(a))$, $u(J_2)=\{u(t):t\in J_2\}$; $cl(M)$-აღნიშნავს M სიმრავლის ჩაკეტვას; $\|u\|=\sup\{|u(t)|:t\in J_2\}$. $\Omega=\Omega(J_2,G)=\{u\in E_u:clu(J_2)\subset G\}$ -მართვათა სიმრავლეა.

$L(J,R_+)$- ლებეგის აზრით ჯამად (ინტეგრებად) $m:J\to R_+=[0,\infty)$ ფუნქციათა სივ რცეა,

$A_j(t)$, $t\in J$, $j=1,...,k$ - უწყვეტი მატრიცული ფუნქციებია განზომილებით $n\times n$;

$f(t,x_1,...,x_s,u_1,...,u_\nu)$- n განზომილებიანი ვექტორული ფუნქციაა. იგი აკმაყოფი ლებს შემდეგ პირობებს:

თითქმის ყველა $t\in J$ ფუნქცია $f:O^s\times G^\nu\to R^\nu$ უწყვეტად წარმოებადია $x_i\in O$, $i=1,...,s$, $u_j\in G$, $j=1,...,\nu$ ცვლადების მიმართ; ყოველი ფიქსირებული $(x_1,...,x_s,u_1,...,$ $u_\nu)\in O^s\times G^\nu$ წერტილისათვის ფუნქციები f, f_{x_i}, $i=1,...,s$, f_{u_j}, $j=1,...,\nu$ ზომადია J-ზე; ნებისმიერი $K\subset O$, $N\subset G$ კომპაქტებისთვის არსებობს ფუნქცია $m_{K,N}(\cdot)\in L(J,R_+)$ ისეთი რომ, ნებისმიერი $(x_1,...,x_s,u_1,...,u_\nu)\in K^s\times N^\nu$ და თითქმის ყველა $t\in J$ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f(t,x_1,...,x_s,u_1,...,u_\nu)|+\sum_{i=1}^{s}|f_{x_i}(\cdot)|+\sum_{j=1}^{\nu}|f_{u_j}(\cdot)|\le m_{K,N}(t).$$

$A=(a_j{}^i)^n{}_{i,j=1}$ მატრიცის მოდულის ქვეშ იგულისხმება ევკლიდეს მოდული

$$|A|^2=\sum_{i,j=1}^{n}(a_j{}^i)^2.$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.1.1. ვთქვათ $u\in E_u$, მაშინ ფუნქციები $u(\theta_j(t))$, $t\in J$, $j=1,...,\nu$ ზომადია.

თ ე ო რ ე მ ა 1.1.2. ვთქვათ $u \in E_u$, მაშინ ფუნქციები $f(t,x_1...,x_s,u(\theta_1(t)),...,u(\theta_\nu(t)))$, $f_{x_i}(t,x_1...,x_s,u(\theta_1(t)),...,u(\theta_\nu(t)))$, $i=1,...,s$, $f_{u_j}(t,x_1...,x_s,u(\theta_1(t)),...,u(\theta_\nu(t)))$, $j=1,...,\nu$ ყოველ ფიქსირებულ $(x_1,...,x_s)\in O^s$ ზომადია J-ზე.

ეს თეორემები ცნობილია კლასიკური ანალიზიდან [26].

ყოველ $\mu=(t_0,x_0,\varphi,u)\in B=J\times O\times\Phi\times\Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)h(t_0,\dot{\varphi},\dot{y})(\eta_j(t))+f(t_0,\varphi,y,u)(t), \tag{1.1.1}$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0)=x_0, \tag{1.1.2}$$

სადაც

$$f(t_0,\varphi,y,u)(t)=f(t,h(t_0,\varphi,y)(\tau_1(t)),...,h(t_0,\varphi,y)(\tau_s(t)),u(\theta_1(t),...,u(\theta_\nu(t))), \tag{1.1.3}$$

ხოლო ოპერატორი $h(\cdot)$ განისაზღვრება ფორმულით

$$h(t,\varphi,y)(t)=\begin{cases}\varphi(t), t\in[\tau,t_0),\\ y(t), t\in[t_0,b].\end{cases} \tag{1.1.4}$$

განსაზღვრება 1.1.1. ვთქვათ $\mu=(t_0,x_0,\varphi,u)\in B,\ t_0\in[r_1,r_2]\subset J.$ აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციას $y(t)=y(t;\mu)\in O,\ t\in[r_1,r_2]$ ეწოდება (1.1.1) განტოლების ამონახსნი (1.1 2) საწყისი პირობით ან $\mu\in B$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განმარტებული $[r_1,r_2]$ ინტერვალზე, თუ $y(t_0)=x_0$ და $[r_1,r_2]$ ინტერვალზე $y(t)$ ფუნქცია თითქმის ყველა t-თვის აკმაყოფილებს (1.1.1) განტოლებას.

თუ $[r_1,r_2]$ ინტერვალის სიგრძე საკმარისად მცირეა, მაშინ μ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი [2].

შემოვიღოთ ვარიაციათა სიმრავლე:

$V=\{\delta\mu=(\delta t_0,\delta x_0,\delta\varphi,\delta u)\in E_\mu=R\times R^n\times E_\varphi\times E_u : |\delta t_0|\le c,\ |\delta x_0|\le c,\ \|\delta\varphi\|\le c,\ \|\delta u\|\le c\}$,

სადაც $c>0$-ფიქსირებული რიცხვია.

V სიმრავლე E_μ სივრცეში წარმოადგენს ნულის მიდამოს.

ლ ე მ ა 1.1.1. ვთქვათ $\tilde{y}(t)$, $t\in[r_1,r_2]\subset(a,b)$ არის $\tilde{\mu}=(\tilde{t}_0,\tilde{x}_0,\tilde{\varphi},\tilde{u})\in B$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი; $K_1\subset O$-კომპაქტი შეიცავს $\tilde{\varphi}(J_1)\cup\tilde{y}([r_1,r_2])$ სიმრავლის რაიმე

მიდამოს; $N_1 \subset G$ -კომპაქტი შეიცავს $cl\widetilde{u}(J_2)$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_1 > 0$ და $\delta_1 > 0$, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V$ ელემენტი $\widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu \in B$ და მას შეესაბამება ამონახსნი $y(t; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) \in K_1$, $t \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \subset J$. მასთან $\varphi(t) = \widetilde{\varphi}(t) + \varepsilon\delta\varphi(t) \in K_1$, $t \in J_1$; $u(t) = \widetilde{u}(t) + \varepsilon\delta u(t) \in N_1$, $t \in J_2$; $y(t; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) \in K_1$, $t \in$ $\in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1]$;

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = y(t; \widetilde{\mu}), \quad \text{თანაბრად} \quad (t, \delta\mu) \in [r_1 - \delta_1, r_2 + \delta_1] \times V. \tag{1.1.5}$$

ეს ლემა არის *ლემა 5.1* (იხ. [38] გვ. 78) ანალოგი და მტკიცდება იგივე ხერხით.

შემდეგ, ყოველ $\mu = (t_0, x_0, \varphi, u) \in B$ ელემენტს შევუსაბამოთ ნეიტრალური ტიპის კვაზი-წრფივი დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j(t)\dot{x}(\eta_j(t)) + f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \dots, u(\theta_\nu(t))), \tag{1.1.6}$$

წყვეტილი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [\tau, t_0), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1.1.7}$$

განსაზღვრება 1.1.2. ვთქვათ $\mu = (t_0, x_0, \varphi, u) \in B$, $t_0 < b$. $x(t) = x(t; \mu) \in O$, $t \in [\tau, t_1]$, $t_1 \in (t_0, b]$, ფუნქციას ეწოდება (1.1.6) განტოლების ამონახსნი (1.1.7) საწყისი პირობით, ან μ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი განმარტებული $[\tau, t_1]$ ინტერვალზე, თუ $x(t)$ ფუნქცია $[\tau, t_0]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს (1.1.7) პირობას, ხოლო $[t_0, t_1]$, ინტერვალზე აბსოლუტურად უწყვეტია და თითქმის ყველგან $[t_0, t_1]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს (1.1.6) განტოლებას.

არსებობისა და ერთადერთობის თეორემის თანახმად [2], ყოველ μ ელემენტს შეესაბამება ამონახსნი $x(t; \mu)$ განმარტებული $[\tau, t_1]$ ინტერვალზე, თუ $[t_0, t_1]$ ინტერვალის სიგრძე საკმარისად მცირეა.

შენიშვნა 1.1.1. ვთქვათ $y(t; \mu)$, $t \in [r_1, r_2]$, $\mu \in B$, არის (1.1.1) განტოლების ამონახსნი (1.1.2) საწყისი პირობით, მაშინ ფუნქცია

$$x(t; \mu) = h(t_0, \varphi, y(\cdot; \mu))(t), \quad t \in [\tau, r_2], \tag{1.1.8}$$

იქნება (1.1.6) განტოლების ამონახსნი (1.1.7) საწყისი პირობით.

ლ ე მ ა 1.1.2. ვთქვათ $\widetilde{x}(t)$, $t \in [\tau, \widetilde{t}_1]$ არის $\widetilde{\mu} \in B$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$. ვთქვათ $K_1 \subset O$-კომპაქტი შეიცავს $\widetilde{\varphi}(J_1) \cup \widetilde{x}([\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1])$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს, ხოლო $N_1 \subset G$-კომპაქტი შეიცავს $cl\widetilde{u}(J_2)$ სიმრავლის რაიმე მიდამოს. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_1 > 0$ და $\delta_1 > 0$, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon, \delta\mu) \in [0, \varepsilon_1] \times V$ ელემენტი $\widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu \in B$ და მას შეესაბამება ამონახსნი $x(t; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)$ $t \in [\tau, \widetilde{t}_1 + \delta_1] \subset J_1$. მასთან

$$x(t; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) \in K_1, \quad t \in [\tau, \widetilde{t}_1 + \delta_1]; \quad u(t) = \widetilde{u}(t) + \varepsilon\delta u(t) \in N_1, \quad t \in J_2. \tag{1.1.9}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ *ლემა 1.1.1*-ში $r_1 = \widetilde{t}_0$, $r_2 = \widetilde{t}_1$, მაშინ $\widetilde{y}(t) = \widetilde{x}(t), t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$;

$x(t; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = h(t_0, \varphi, y(\cdot; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu)(t))$, $(t, \varepsilon, \delta\mu) \in [\tau, \widetilde{t}_1 + \delta_1] \times [0, \varepsilon_1] \times V$ (იხ.(1.1.8)).

ამრიგად *ლემა 1.1.2* წარმოადგენს *ლემა 1.1.1*-ის უშუალო შედეგს.

ლ ე მ ა 1.1.3. ([38], გვ. 35). ნებისმიერი $K \subset O$, $N \subset G$ კომპაქტებისთვის არსებობს ფუნქცია $L_{K,N}(\cdot) \in L(J, R_+)$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $x'_i, x''_i \in K$, $i = 1,\dots,s$, $u'_j, u''_j \in N$, $j = 1,\dots,\nu$ და თითქმის ყველა $t \in J$ ადგილი აქვს უტოლობას

$$| f(t, x'_1,\dots,x'_s, u'_1,\dots,u'_\nu) - f(t, x''_1,\dots,x''_s, u''_1,\dots,u''_\nu) | \le L_{K,N}(t)\left(\sum_{i=1}^{s} | x'_i - x''_i | + \sum_{j=1}^{\nu} | u'_j - u''_j |\right). \tag{1.1.10}$$

განვიხილოთ წრფივი ნეიტრალური ტიპის დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j(t)\dot{x}(\eta_j(t)) + \sum_{i=1}^{s} B_i(t)x(\tau_i(t)) + f(t), \qquad t \in [t_0, b], \tag{1.1.11}$$

საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), t \in [\tau, t_0), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.1.12}$$

სადაც $B_i(t)$, $i = 1,\dots,s$, $t \in J$ არის ჯამადი მატრიცული ფუნქციები განზომილებით $n \times n$, $f \in L(J, R^n)$, $t_0 \in [a,b)$, $x_0 \in R^n$, $\varphi \in E_\varphi$.

(1.1.11) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი, (1.1.12) საწყისი პირობით, არსებობს და ერთადერთია, იგი განმარტებულია $[\tau, b]$ ინტერვალზე.

ლ ე მ ა 1.1.4. (კოშის ფორმულა, [2,38]). (1.1.11) განტოლების ამონახსნი (1.1.12) საწყისი პირობით, $[t_0, b]$ ინტერვალზე შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ფორმულით

$$x(t) = \Phi(t_0; t)x_0 + \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi); t)B_i(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(t_0)}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\varphi}(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f(\xi)d\xi,$$

სადაც $\Phi(\xi;t)$, $Y(\xi;t)$ მატრიცული ფუნქციებია, ისინი აკმაყოფილებენ სისტემას

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi(\xi;t)}{\partial\xi}=-\sum_{i=1}^{s}Y(\gamma_i(\xi);t)B_i(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi),\\ Y(\xi;t)=\Phi(\xi;t)+\sum_{j=1}^{k}Y(\rho_i(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi),\xi\in[t_0,t]\end{cases}\qquad(1.1.13)$$

და პირობას

$$Y(\xi;t)=\Phi(\xi;t)=\begin{cases}I,\xi=t,\\ \Theta,\xi>t,\end{cases}\qquad(1.1.14)$$

I -ერთეულოვანი მატრიცაა, Θ -ნულოვანი მატრიცაა.

შენიშვნა 1.1.2. თუ (1.1.11) განტოლებაში $B_i(t)=0,\ i=1,\dots,s,$ მაშინ $\Phi(\xi;t)=I,\ \xi\in[t_0,t]$ და ამონახსნი წარმოიდგინება ფორმულით

$$x(t)=x_0+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(t_0)}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\varphi}(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)f(\xi)d\xi.$$

ლ ე მ ა 1.1.5. [3, გვ.15]. მატრიცული ფუნქცია $\Phi(\xi;t)$ უწყვეტია $\Pi=\{(\xi;t):a\le\xi\le$ $\le t\le b\}$ სიმრავლეზე.

(1.1.13) სისტემის მე-2 განტოლება საშუალებას იძლევა ფუნქცია $Y(\xi;t)$, $\xi\in[a,t]$, გამოვსახოთ $\Phi(\xi;t)$ ფუნქციით. სახელდობრ ადგილი აქვს ფორმულას

$$Y(\xi;t)=\Phi(\xi;t)+\sum_{l=1}^{p(t)}\sum_{i=1}^{l}\sum_{k_1=1}^{k}\cdots\sum_{i=1}^{k}\Phi(\rho_{k_i}(\rho_{k_{i-1}}(\dots(\rho_{k_i}(\xi))\dots);t))A_{k_1}(\rho_{k_1}(\xi))A_{k_2}(\rho_{k_2}(\rho_{k_1}(\xi)))\dots$$

$$\dots A_{k_i}(\rho_{k_i}(\rho_{k_{i-1}}(\dots(\rho_{k_i}(\xi))\dots)))\frac{d}{d\xi}[(\rho_{k_i}(\rho_{k_{i-1}}(\dots(\rho_{k_i}(\xi))\dots)))],\qquad(1.1.15)$$

სადაც $p(t)$ არის მინიმალური ნატურალური რიცხვი რომლისთვისაც შესრულებულია უტოლობები:

$$\eta_{k_1}(\eta_{k_2}(\dots(\eta_{k_{p(t)+1}}(t))\dots))<a,\quad k_i=1,\dots,k,\quad i=1,\dots,p(t)+1.$$

ლ ე მ ა 1.1.6. მატრიცულ ფუნქციას $Y(\xi;t)$ აქვს შემდეგი თვისებები:

1.1.1) ყოველ ფიქსირებული $t\in(a,b]$ ფუნქციას $Y(\xi;t)$, $\xi\in[a,t)$ აქვს პირველი გვარის წყვეტა

$$I(a;t)=\left\{\eta_{k_1}(\eta_{k_2}(...(\eta_{k_l}(t)),...))\in[a,t]:l=1,2,...;\quad m=1,...,l,\quad k_m=1,...,k\right\}$$

სიმრავლის წერტილებში;

1.1.2)

$$\lim_{\sigma\to\xi-}Y(\sigma;t)=Y(\xi-;t),\quad \lim_{\sigma\to\xi+}Y(\sigma;t)=Y(\xi+;t)$$

თანაბრად $(\xi,t)\in\Pi$;

1.1.3) ვთქვათ $\xi_i\in(a,b)$, $i=0,1$, $\xi_0<\xi_1$, $\xi_0\notin I(\xi_0;\xi_1)$, მაშინ არსებობს რიცხვები $\delta_i>0$, $i=0,1$, ისეთი, რომ ფუნქცია $Y(\xi;t)$ უწყვეტია სიმრავლეზე $[\xi_0-\delta_0,\xi_0+\delta_0]\times$ $\times[\xi_1-\delta_1,\xi_1+\delta_1]\subset\Pi$.

ეს ლემა არის *ლემა 1.1.5* და (1.1.15) ფორმულის შედეგი.

ლ ე მ ა 1.1.7. (გრონუოლის ლემა) ვთქვათ $g(t)\geq 0$, $t\in[t_0,b]$ უწყვეტი ფუნქციაა, $m(\cdot)\in L(J,R_+)$ და შესრულებულია უტოლობა

$$g(t)\leq c+\int_{t_0}^{t}m(\xi)g(\xi)d\xi.$$

მაშინ

$$g(t)\leq c\exp\left(\int_{t_0}^{t}m(\xi)d\xi\right).$$

§1.2 ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები განტოლებისათვის წყვეტილი საწყისი პირობით

1.2.1. ძირითადი თეორემების ფორმულირება. ერთადერთობის გამო $x(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)$ ამონახსნი წარმოადგენს $\widetilde{x}(t)$ ამონახსნის გაგრძელებას $[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]$ ინტერვალზე, ამიტომ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $\widetilde{\mu}$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი თავიდანვე განსაზღვრულია $[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]$ ინტერვალზე. (იხ. *ლემა 1.1.2*)

განვსაზღვროთ $\widetilde{x}(t)=x(t;\widetilde{\mu})$ ამონახსნის ნაზრდი

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=x(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)-\widetilde{x}(t),\quad \forall(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]\times[0,\varepsilon_1]\times V \tag{1.2.1}$$

ძირითადი შედეგების ჩამოსაყალიბებლად ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი აღნიშვნები:

$$\varpi_{0i}=(\widetilde{t}_0,\underbrace{\widetilde{x}_0,\dots,\widetilde{x}_0}_{i},\underbrace{\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0),\dots,\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)}_{(p-i)},\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\widetilde{t}_0)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\widetilde{t}_0))),\qquad i=0,\dots,p;$$

თუ $i=0$, მაშინ იგულისხმება რომ ϖ_{00} არ შეიცავს $\widetilde{x}_0$; თუ $i=p$, მაშინ იგულისხმება რომ ϖ_{0p} არ შეიცავს $\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)$.

$$\varpi_{0i}=(\gamma_i,\widetilde{x}(\tau_i(\gamma_i)),\dots,\widetilde{x}(\tau_{i-1}(\gamma_i)),\widetilde{x}_0,\widetilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\gamma_i)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\gamma_i))),$$

$$\varpi_{1i}=(\gamma_i,\widetilde{x}(\tau_i(\gamma_i)),\dots,\widetilde{x}(\tau_{i-1}(\gamma_i)),\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0),\widetilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\gamma_i)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\gamma_i))),\qquad i=p+1,\dots,s;$$

$\gamma_i=\gamma_i(\widetilde{t}_0)$, $\rho_j=\rho_j(\widetilde{t}_0)$; $\gamma_i(t)$ და $\rho_j(t)$ აღნიშნავენ, შესაბამისად, $\tau_i(t)$ და $\eta_j(t)$ ფუნქც იების შექცეულს; $\widetilde{f}(\varpi)=f(\varpi,\widetilde{u}(\theta_1(t)),\dots,\widetilde{u}(\theta_\nu(t)),\quad \varpi=(t,x_1,\dots,x_s)$;

$$\widetilde{f}_{x_i}[t]=f_{x_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t)),\dots,\widetilde{x}(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t)),\dots,\widetilde{u}(\theta_\nu(t))).$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.2.1. ვთქვათ შესრულებულია პირობები

1.2.1) $\gamma_i=\widetilde{t}_0$, $i=1,\dots,p$; $\gamma_{p+1}<\dots<\gamma_s<\widetilde{t}_1$, $\rho_j<\widetilde{t}_1$, $j=1,\dots,k$;

1.2.2) არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\gamma_1(t)\le\dots\le\gamma_p(t)$, $t\in(\widetilde{t}_0-\delta,\widetilde{t}_0]$;

1.2.3) არსებობს სასრული ზღვრები: $\dot{\gamma}_i^-=\dot{\gamma}_i(\widetilde{t}_0-)$, $i=1,\dots,s$;

$$\lim_{\varpi\to\varpi_{0i}}\widetilde{f}(\varpi)=f_i^-,\quad \varpi\in(\widetilde{t}_0-\delta,\widetilde{t}_0]\times O^s,\quad i=0,\dots,p;$$

$$\lim_{(\varpi_1,\varpi_2)\to(\varpi_{0i},\varpi_{1i})}[\widetilde{f}(\varpi_1)-\widetilde{f}(\varpi_2)]=f_i^-,\quad \varpi_1,\varpi_2\in(\gamma_i-\delta,\gamma_i]\times O^s,\quad i=p+1,\dots,s.$$

მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2>0$ და $\delta_2>0$, ისეთი, რომ ყოველი

$$(t,\varepsilon,\delta\mu)\in[\widetilde{t}_1-\delta_2,\widetilde{t}_1+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times V^-\ ,\ \text{სადაც}\ V^-=\{\delta\mu\in V:\delta t_0\le 0\},$$

სამართლიანია ტოლობა

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\delta x(t;\delta\mu)+o(t;\varepsilon\delta\mu),^{1} \tag{1.2.2}$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta\mu)=\left\{Y(\widetilde{t}_0-;t)\left[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^--\hat{\gamma}_i^-)f_i^-\right]-\right.$$

---

[1] აქ და შემდეგში სიდიდეები (სკალარული და ვექტორული) რომელთაც აქვთ, თანაბარად $(t,\delta\mu)$ მიმართ, შესაბა მისი სიმცირის რიგი აღნიშნული იქნება შესაბამისად $O(t;\varepsilon\delta\mu)$, $o(t;\varepsilon\delta\mu)$.

$$-\sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i-;t)f_i^-\dot{\gamma}_i^-\Bigg\}\delta t_0+\beta(t;\delta\mu). \qquad (1.2.3)$$

$$\beta(t;\delta\mu)=\Phi(\widetilde{t}_0;t)[\delta x_0-\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\delta t_0]+\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\dot{\varphi}(\xi)d\xi+\sum_{j=1}^{v}\int_{\widetilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)\widetilde{f}_{u_j}[\xi]\delta u(\theta_j(\xi))d\xi,$$

$$\hat{\gamma}_0^-=1,\ \ \hat{\gamma}_i^-=\dot{\gamma}_i^-,\ \ i=1,\dots,p,\ \ \hat{\gamma}_{p+1}^-=0;$$

მატრიცული ფუნქციები $\Phi(\xi;t)$, $Y(\xi;t)$ აკმაყოფილებენ სისტემას

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi(\xi;t)}{\partial\xi}=-\displaystyle\sum_{i=1}^{s} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi),\\ Y(\xi;t)=\Phi(\xi;t)+\displaystyle\sum_{j=1}^{k} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi),\xi\in[\widetilde{t}_0,t]\end{cases} \qquad (1.2.4)$$

და (1 1.14) პირობას.

$\delta x(t;\delta\mu)$ ეწოდება ამონახსნის ვარიაცია, ხოლო (1.2.3) -ვარიაციის ფორმულა.

თ ე ო რ ე მ ა 1.2.2. ვთქვათ შესრულებულია *თეორემა 1.2.1.* მოთხოვნა 1.2.1). გარდა ამისა, ვუქვათ შესრულებულია ქვემოთმოყვანილი პირობები:

12.4) არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $\gamma_1(t)\le\dots\le\gamma_p(t)$, $t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_0+\delta)$;

12.5) არსებობს სასრული ზღვრები: $\dot{\gamma}_i^+=\dot{\gamma}_i(\widetilde{t}_0+)$, $i=1,\dots,s$;

$$\lim_{\varpi\to\varpi_{0i}}\widetilde{f}(\varpi)=f_i^+,\ \ \varpi\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_0+\delta)\times O^s,\ \ i=0,\dots,p;$$

$$\lim_{(\varpi_1,\varpi_2)\to(\varpi_{0i},\varpi_{1i})}[\widetilde{f}(\varpi_1)-\widetilde{f}(\varpi_2)]=f_i^+,\ \ i=p+1,\dots,s,\ \ \varpi_1,\varpi_2\in[\gamma_i,\gamma_i+\delta)\times O^s.$$

მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2>0$, $\delta_2>0$ ისეთი, რომ ყოველი $(t;\varepsilon,\delta\mu)\in[\widetilde{t}_1-\delta_2,\widetilde{t}_1+\delta_2]\times$ $\times[0,\varepsilon_2]\times V^+$ სადაც $V^+=\{\delta\mu\in V:\delta t_0\ge 0\}$, ადგილი აქვს (1.2.2) ტოლობას სადაც, $\delta x(t;\delta\mu)$ აქვს სახე

$$\delta x(t;\delta\mu)=\Bigg\{Y(\widetilde{t}_0+;t)\Bigg[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^+-\hat{\gamma}_i^+)f_i^+\Bigg]-$$

$$-\sum_{i=p+1}^{s} Y(\gamma_i+;t)f_i^+\dot{\gamma}_i^+\Bigg\}\delta t_0+\beta(t;\delta\mu), \qquad (1.2.4)$$

$$\hat{\gamma}_0^+ = 1, \quad \hat{\gamma}_i^+ = \dot{\gamma}_i^+, \quad i = 1,\dots,p, \quad \hat{\gamma}_{p+1}^+ = 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.2.3. ვთქვათ შესრულებულია 1.2.1) და 1.2.2) მოთხოვნები და ვთქვათ გარდა ამისა შესრულებულია ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობები:

1.2.6) $\gamma_i, \widetilde{t}_0 \notin I(\widetilde{t}_0;\widetilde{t}_1)$, $i = p+1,\dots,s$; (იხ. 1.1.1))

1.2.7) $\sum\limits_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-)f_i^- = \sum\limits_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^+ - \hat{\gamma}_i^+)f_i^+ = f_0$, $f_i^-\dot{\gamma}_i^- = f_i^+\dot{\gamma}_i^+ = f_i$, $i = p+1,\dots,s.$

მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2 > 0$ და $\delta_2 > 0$ ისეთი, რომ ყოველი $(t,\varepsilon,\delta\mu) \in [\widetilde{t}_1 - \delta_2;\widetilde{t}_1 + \delta_2]\times$ $\times[0,\varepsilon_2]\times V$ ადგილი აქვს (1.2.2) ტოლობას, სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$ აქვს სახე

$$\delta x(t;\delta\mu) = \left\{Y(\widetilde{t}_0;t)\left[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + f_0\right] - \sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i;t)f_i\right\}\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu).$$

1.2.2. ზოგიერთი კომენტარი. ქვემოთ მოყვანილი ჩამონათვალი მეტწილად შეეხება *თეორემა 1.2.1,* თუმცა იგივე შეიძლება ითქვას დანარჩენი თეორემების მიმართაც.

1.2.8) ვთქვათ $\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{x}_0$, მაშინ $f_0^- = \dots = f_p^-$, $f_i^- = 0$, $i = p+1,\dots,s.$ ამ შემთხვევაში (1.2.3) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\delta x(t;\delta\mu) = \left\{Y(\widetilde{t}_0-;t)\left[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) - f_0^-\right]\right\}\delta t_0 + \beta(t;\delta\mu).$$

1.2.9) ვთქვათ $\gamma_i > \widetilde{t}_0, i = 1,\dots,s,$ მაშინ (1.2.3) ფორმულაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $p = 0$. ამ შემთხვევაში 1.2.2) მოთხოვნა არ არის საჭირო.

1.2.10) *თეორემა 1.2.1* სამართლიანია, თუ $\rho_j > \widetilde{t}_1$, $j = k_1,\dots,k$, $\gamma_i > \widetilde{t}_1$, $i = s_1,\dots,s.$ ამ შემთხვევაში ყველგან გათვალისწინებული უნდა იქნას (1.1.14) პირობა. შემთხვევა როცა რომელიმე $\gamma_i = \widetilde{t}_1$ ან $\rho_j = \widetilde{t}_1$, ნაშრომში არ განიხილება.

1.2.11) თუ ადგილი აქვს უტოლობებს $\dot{\gamma}_p^- < \dots < \dot{\gamma}_1^-$, მაშინ 1.2.2) პირობა შესრულებულია. მართლაც

$$\gamma_i(t) - \gamma_{i+1}(t) = \int_{\widetilde{t}_0}^{t}(\dot{\gamma}_i(\xi) - \dot{\gamma}_{i+1}(\xi))d\xi = (\dot{\gamma}_i^- - \dot{\gamma}_{i+1}^-)(t - \widetilde{t}_0) + o(|t - \widetilde{t}_0|),$$

$$i = 1,\dots,p-1.$$

ცხადია, რომ თუ $\delta > 0$ საკმარისად მცირეა, მაშინ უკანასკნელი ტოლობი დან გამომდინარეობს უტოლობა $\gamma_i(t) \le \gamma_{i+1}(t)$, $i = 1,\dots,p$

$t \in (\widetilde{t}_0 - \delta, \widetilde{t}_0]$. ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ $\dot{\gamma}_i^+ < \ldots < \dot{\gamma}_p^+$, მაშინ 1.2.4) პირობა შესრულებულია.

1.2.12) პირობები 1.2.3) და 1.2.5) შესრულებულია თუ $\tau_i(t)$ $i = 1,\ldots,s$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია; $\widetilde{u}(t)$-უბან-უბან უწყვეტი ფუნქციაა, პირველი გვარის სასრული რაოდენობა წყვეტის წერტილებით, ხოლო $f(t, x_1,\ldots,x_s,u_1,\ldots,u_v)$ ფუნქციაზე მოთხოვნილ პირობებში t-ს მიმართ ზომადობა შეცვლილია უწყვეტობით.

1.2.13) ვთქვათ $\eta_j(t)$, $j = 1,\ldots,k$ ფუნქციები თანაზომადია ე.ი. არსებობს უწყვეტად წარმოებადი ფუნქცია $\eta(t)$ ისეთი, რომ $\eta(t) < t$, $\dot{\eta}(t) > 0$, $t \in R$ და $\eta_j(t)$ ფუნქციები წარმოადგენს $\eta(t)$ ფუნქციის სუპერპოზიციას ე.ი.

$$\eta_j(t) = \eta^j(t) = \eta(\eta^{j-1}(t)), \quad j = 1,\ldots,k, \quad \eta^0(t) = t.$$

მაშინ $I(\widetilde{t}_0;\widetilde{t}_1)$ სიმრავლის სტრუქტურა მარტივდება და მას აქვს სახე

$$I(\widetilde{t}_0;\widetilde{t}_1) = \{\eta^j(\widetilde{t}_1) \in [\widetilde{t}_0;\widetilde{t}_1] : j = 1,2,\ldots\}.$$

1.2.14) თუ $A_j(t) \equiv 0$, $j = 1,\ldots,k$, მაშინ (1 1 6) არის დაგვიანებულარგუმენტიანი გან ტოლებათა სისტემა. ამ შემთხვევაში $Y(\xi;t) \equiv \Phi(\xi;t)$ (იხ.(1.2.4)), ხოლო (1.2.3) ფორმულა ემთხვევა [36,48]-ში მიღებულ შედეგს, რომელიც დამტკი ცებულია უბან-უბან უწყვეტ საწყის ფუნქციათა კლასში.

1.2.15) კვაზი-წრფივი ნეიტრალური დიფერენციალური განტოლებისათვის, წყვეტი ლი საწყისი პირობით, ვარიაციის ფორმულები მიღებულია [3], [39]-ში იმ შემთხვევისთვის, როცა მარჯვენა მხარეში არ შედის სამართი ფუნქცია. ამდენად ჩვენს მიერ მიღებული ფორმულები განსხვავდება [3], [39]-ში მიღ ებული ფორმულებისაგან და ისინი ერთმანეთისაგან არ გამომდინარეობენ.

1.2.16) თუ $A_j(t) \equiv 0$, $j = 1,\ldots,k$, $s = 1$, $\tau_1(t) \equiv t$, მაშინ (1.1.6) არის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება და (1.2.3) ფორმულა ემთხვევა კლასიკურ შე დეგს [40].

1.2.17) მოყვანილ თეორემებში ვარიაციის ფორმულები დამტკიცებულია $\widetilde{t}_1$ მომენ ტის მიდამოში. ეს გამოწვეულია იმით, რომ ფუნქციები $Y(\gamma_i;t)$, $i = p +$

$+1,...s$ წყვეტას განიცდიან წერტილებში $t=\gamma_i$, $i=p+1,...,s$.

1.2.18) თეორემების დამტკიცების ტექნიკა საშუალებას იძლევა ვარიაციის ფორ მულები დამტკიცდეს იმ შემთხვევაშიც, როცა $A_j(t)$, $j=t,...k$ ფუნქციები ზომადია და შემოსაზღვრული. ამისათვის საკმარისია $A_j(t)$ მატრიცებიდან მივითხოვოთ გარკვეულ წერტილებში სასრული ზღვრების არსებობა.

1.2.19) თეორემები სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა საწყისი პირობა (1 1 7) შეცვლილია პირობით $x(t)=\varphi(t)$, $\dot{x}(t)=g(t)$, $t\in[\tau,t_0)$, $x(t_0)=x_0$. სადაც $\varphi(t)$ და $g(t)$ საწყისი ფუნქციები უბან-უბან უწყვეტ ფუნქციათა კლასიდა ნაა. ამ შემთხვევაში $\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)$ და $\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))$ შეიცვლება, შესაბამისად, $\widetilde{g}(\widetilde{t}_0-)$ და $\widetilde{g}(\eta_j(\widetilde{t}_0-))$.

1.2.20) პირობაში 1.2.1) უტოლობები შესრულებულია თუ $\gamma_i(\widetilde{t}_0)$, $i=p+1,...,s$ რიც ხვები ერთმანეთისგან განსხვავდება, ისინი ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება გადანომრილი იქნას ისეთნაირად როგორც 1.2.1) პირობაშია.

§1.3. ამონახსნის ნაზრდის შეფასება V^- და V^+ ვარიაციათა სიმრავლეების მიმართ

ერთადერთობის გამო $y(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)$ ამონახსნი $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე წარმოადგენს $\widetilde{y}(t)$ ამონახსნის გაგრძელებას, ამიტომ ჩვენ შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ $\widetilde{y}(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე (იხ. *ლემა 1.1.1.*)

განვსაზღვროთ $\widetilde{y}(t)=y(t;\widetilde{\mu})$ ამონახსნის ნაზრდი:

$$\Delta y(t)=\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=y(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)-\widetilde{y}(t),\quad (t,\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_1]\times[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\times V \qquad (1.3.1)$$

(1.1.5) თანახმად

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta y(t;\varepsilon\delta\mu)=0,\quad \text{თანაბრად}\ (t,\delta\mu)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\times V \qquad (1.3.2)$$

ლ ე მ ა 1.3.1. ვთქვათ $\gamma_i=\widetilde{t}_0$, $i=1,...p$, $\gamma_{p+1}<...<\gamma_s\le r_2$, $\rho_j<r_2$, $j=1,...k$ და ვთქვათ გარდა ამისა შესრულებულია *თეორემა 1.2.1*-ის 1.2.2) და 1.2.3) პირობები. მაშინ არსებო ბს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_2>0$ და $\delta_2>0$, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_2]\times V^-$ შესრულებუ ლია უტოლობა

$$\max_{t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]} |\Delta y(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.3.3}$$

მასთან

$$\Delta y(\widetilde{t}_0)=\varepsilon\left\{\delta x_0-\Big[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-}\Big]\delta t_0\right\}+o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.3.4}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$, $\delta_2\in(0,\delta_1]$ იმდენად მცირეა, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in$ $\in[0,\varepsilon_2]\times V^-$ შესრულებულია თანაფარდობანი:

$$\begin{cases} t_0=\widetilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0\in(\widetilde{t}_0-\delta_2,t_0],\widetilde{t}_0<\gamma_{p+1}(t_0)<\gamma_{p+1}\dots<\gamma_{s-1}<\gamma_s(t_0),\\ \eta_j(\widetilde{t}_0)<t_0,\widetilde{t}_0<\eta_j(r_2+\delta_2)\end{cases} \tag{1.3.5}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $\Delta y(t)$, $t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta}y(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)h(t_0,\dot{\varphi},\dot{\widetilde{y}}+\dot{\Delta}y)(\eta_j(t))+f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(t)-\sum_{j=1}^{k}A_j(t)h(\widetilde{t}_0,\dot{\widetilde{\varphi}},\dot{\widetilde{y}})(\eta_j(t))-$$

$$-f(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y},\widetilde{u})(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)h(\widetilde{t}_0,\varepsilon\dot{\delta\varphi},\dot{\Delta}y)(\eta_j(t))+\sum_{i=1}^{2}W_1(t;\varepsilon\delta\mu), \tag{1.3.6}$$

სადაც

$$\begin{cases} W_1(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\big[h(t_0,\dot{\varphi},\dot{\widetilde{y}}+\dot{\Delta}y)(\eta_j(t))-h(\widetilde{t}_0,\dot{\varphi},\dot{\widetilde{y}}+\dot{\Delta}y)(\eta_j(t))\big]=\sum_{j=1}^{k}W_{1j}(t;\varepsilon\delta\mu)\\ W_2(t;\varepsilon\delta\mu)=f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(t)-f(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y},\widetilde{u})(t).\end{cases} \tag{1.3.7}$$

ცხადია, რომ (1.3.6) განტოლება $[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$ ინტერვალზე შეიძლება განხილული იქნას როგორც წრფივი ნეიტრალური ტიპის განტოლება

$$\dot{z}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{z}(\eta_j(t))+\sum_{i=1}^{2}W_i(t;\varepsilon\delta\mu), \tag{1.3.8}$$

საწყისი პირობით $\dot{z}(t)=\varepsilon\dot{\delta\varphi}(t)$, $t\in[\tau,\widetilde{t}_0)$, $z(\widetilde{t}_0)=\Delta y(\widetilde{t}_0)$.

ერთადერთობის გამო $\Delta y(t)=z(t)$, $t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$. კოშის ფორმულის თანახმად (იხ. *ლემა 1.1.2.* და *შენიშვნა 1.1.2.*) (1.3.8) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას შემდეგნაირად

$$\Delta y(t)=z(t)=\Delta y(\widetilde{t}_0)+\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\delta\varphi}(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{\widetilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)\Big[\sum_{i=1}^{2} W_i(\xi;\varepsilon\delta\mu)\Big]d\xi, \tag{1.3.9}$$

სადაც $Y(\xi;t) = I + \sum_{i=1}^{k} A_j(\rho_j(\xi))Y(\rho_j(\xi);t)\dot{\rho}_j(\xi),$

(იხ. *შენიშვნა 1.1.2.* და (1.2.4) სისტემის მე-2 სასრულ-სხვაობიანი განტოლება).

(1 3.9) -დან მიიღება

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(\widetilde{t}_0)| + \varepsilon c \,\|Y\| \sum_{j=1}^{k} \|A_j\| |(\rho_j(\widetilde{t}_0) - \widetilde{t}_0)| \,\|\dot{\rho}_j\| + \|Y\| \left\{ \sum_{j=1}^{k} \int_{\widetilde{t}_0}^{r_2+\delta} |W_{1j}(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\xi + \right.$$

$$\left. \int_{\widetilde{t}_0}^{t} |W_2(\xi;\varepsilon\delta\mu)|d\xi \right\} = |\Delta y(\widetilde{t}_0)| + O(\varepsilon\delta\mu) + \|Y\| \left\{ \sum_{j=1}^{k} W_{1j}(\varepsilon\delta\mu) + W_3(t;\varepsilon\delta\mu) \right\}, \tag{1.3.10}$$

სადაც $\|Y\| = \sup\{|Y(\xi;t)| : (\xi;t) \in \Pi\}$, $\|A\| = \sup\{|A(t)| : t \in J\}$, $\|\dot{\rho}_j\| = \sup\{|\dot{\rho}_j(t)| : t \in J\}$.

დავამტკიცოთ (1.3.4) ტოლობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\Delta y(\widetilde{t}_0) = y(\widetilde{t}_0; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - \widetilde{y}(\widetilde{t}_0) = \varepsilon\delta x_0 + \sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} A_j(t)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(t))dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} f(t_0, \varphi, \widetilde{y} + \Delta y, u)(t)dt + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.3.11}$$

თითოეული ინტეგრალური შესაკრები გარდავქმნათ ცალ-ცალკე. გვექნება

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} A_j(t)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(t))dt = -\varepsilon A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))\delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.3.12}$$

შემდეგ

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} f(t_0, \varphi, \widetilde{y} + \Delta y, u)(t)dt = \sum_{i=0}^{p} \int_{\widetilde{\gamma}_i(t_0)}^{\widetilde{\gamma}_{i+1}(t_0)} f(t, \widetilde{y}(\tau_1(t)) + \Delta y(\tau_1(t)), \ldots, \widetilde{y}(\tau_i(t)) + \Delta y(\tau_i(t)),$$

$$\varphi(\tau_{i+1}(t)), \ldots, \varphi(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), \ldots, u(\theta_\nu(t)))dt = \sum_{i=0}^{p} I_i, \tag{1.3.13}$$

სადაც $\widetilde{\gamma}_0(t) = t$, $\widetilde{\gamma}_i(t) = \gamma_i(t)$, $i = 1,\ldots p$, $\widetilde{\gamma}_{p+1}(t) = \widetilde{t}_0$,

(იხ. *თეორემა 1.2.1*-ის 1.2.2) პირობა და (1.3.5)).

შევნიშნოთ, რომ

$$\gamma_1(t_0) - t_0 = \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} (\dot{\gamma}_1(t) - 1)dt = \varepsilon(\dot{\gamma}_1^- - 1)\delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu),$$

(იხ. *თეორემა 1.2.1*-ის 1.2.2) პირობა).

ამრიგად

$$I_0 = \varepsilon(\dot{\gamma}_1^- - 1) f_0^- \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu) + \alpha(\varepsilon\delta\mu),$$

სადაც

$$\alpha(\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0}^{\gamma_1(t_0)} [f(t, \varphi(\tau_1(t)), ..., \varphi(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), ..., u(\theta_\nu(t))) - f_0^-]dt.$$

1.2.3) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in [t_0, \gamma_1(t_0)]} | f(t, \varphi(\tau_1(t)), ..., \varphi(\tau_s(t)), u(\theta_1(t)), ..., u(\theta_\nu(t))) - f_0^- | = \lim_{\varpi \to \varpi_{00}} | \widetilde{f}[\varpi] - f_0^- | = 0,$$

$$\varpi \in (\widetilde{t}_0 - \delta, \widetilde{t}_0] \times O^s.$$

მაშასადამე $\alpha(\varepsilon\delta\mu) = o(\varepsilon\delta\mu)$. ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით გვექნება

$$I_0 = \varepsilon(\dot{\gamma}_1^- - 1) f_0^- \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu) \tag{1.3 14}$$

ანალოგიური გზით შეიძლება დამტკიცებული იქნას შემდეგი ტოლობები

$$I_i = \varepsilon(\dot{\gamma}_{i+1}^- - \dot{\gamma}_i^-) f_i^- \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu), \quad i = 1, ...p - 1, \quad I_p = -\varepsilon\dot{\gamma}_p^- f_p^- \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.3.15}$$

(1 3.11)-დან, (1 3.12) - (1.3.15) გათვალისწინებით, მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა (1.3.4).

ახლა დავამტკიცოთ (1.3.3) უტოლობა. ამისათვის პირველ რიგში შევაფასოდ $W_{1_j}(\varepsilon\delta\mu)$, $j = 1, ..., k$. ცხადია რომ

$$W_{1_j}(\varepsilon\delta\mu) = \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\eta_j(r_2+\delta_2)} \| A_j(\rho_j(t)) \| |h(t_0, \dot{\varphi}, \dot{y})(t) - h(\widetilde{t}_0, \dot{\varphi}, \dot{y})(t) | \dot{\rho}_j(t) dt,$$

(იხ.(1.3.7) და (1.3.10)).

თუ $t \in [\eta_j(\widetilde{t}_0), t_0] \cup [\widetilde{t}_0, \eta_j(r_2 + \delta_2)]$, მაშინ $h(t_0, \dot{\varphi}, \dot{y})(t) - h(\widetilde{t}_0, \dot{\varphi}, \dot{y})(t) = 0$, (იხ.(1.3.5)).

ამრიგად

$$W_{1_j}(\varepsilon\delta\mu) = \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} \| A_j(\rho_j(t)) \| |\dot{y}(t_0, \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - \dot{\varphi}(t) | \dot{\rho}_j(t) dt \le \| A_j \| \| \dot{\rho}_i \| \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} | \dot{y}(t; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) | dt + O(\varepsilon\delta\mu).$$

შევაფასოთ უკანასკნელ გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალი

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}|\,\dot{y}(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)\,|dt \le \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}\Big[\sum_{j=1}^{k}|\,A_j(t)\,||\,\dot{\varphi}(\eta_j(t))\,|+|\,f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(t)\,|\Big]dt \le O(\varepsilon\delta\mu),$$

(იხ. (1.3.12) და (1.3.15)).

მაშასადამე

$$W_{1_j}(\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu), \quad j=1,\dots,k. \tag{1.3.16}$$

სანამ შევუდგებოდეთ $W_3(t;\varepsilon\delta\mu)$ შეფასებას შევნიშნავთ, რომ თუ $i=p+1,\dots,s$ და $\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_i]$ მაშინ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi,\widetilde{y}(\tau_1(\xi))+\Delta y(\tau_1(\xi)),\dots,\widetilde{y}(\tau_i(\xi))+\Delta y(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\dots,\varphi(\tau_s(\xi)))=\varpi_{0i},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi,\widetilde{y}(\tau_1(\xi)),\dots,\widetilde{y}(\tau_{i-1}(\xi)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_i(\xi)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)))=\varpi_{1i},$$

(იხ. (1.3.2))

ამ ტოლობისა და 1.2.3) პირობის ძალით, საკმარისად მცირეა $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ ფუნქციები

$$\sup_{t\in[t_0,\widetilde{t}_0]}\dot{\gamma}_i(t), \qquad \sup_{t\in[\gamma_i(t_0),\gamma_i]}|\,W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\,|, \quad i=p+1,\dots,s$$

შეოსაზღვრულია $[0,\varepsilon_2]\times V^-$ სიმრავლეზე. მაშასადამე ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_2]\times V^-$ სამართლიანია შეფასებები

$$\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}|\,W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\,|\,dt \le O(\varepsilon\delta\mu), \qquad i=p+1,\dots,s \tag{1.3.17}$$

$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)$ და $t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$, შეფასებისათვის განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა.

ვთქვათ $t\in[\widetilde{t}_0,\gamma_{p+1}(t_0)]$, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ $h(\cdot)$ ოპერატორის სახეს და (1.1.10) უტოლობას მოვიღებთ

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\widetilde{t}_0}^{t}|\,f(\xi,\widetilde{y}(\tau_1(\xi))+\Delta y(\tau_1(\xi)),\dots,\widetilde{y}(\tau_p(\xi))+\Delta y(\tau_p(\xi)),\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),\dots,$$

$$\varphi(\tau_s(\xi)),u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t)))-f(\xi,\widetilde{y}(\tau_1(\xi)),\dots,\widetilde{y}(\tau_p(\xi)),\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\xi)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)),\widetilde{u}(\theta_1(t)),\dots,$$

$$\widetilde{u}(\theta_\nu(t)))\,|\,d\xi \le \int_{\widetilde{t}_0}^{t}L_{K_1,N_1}(\xi)\Big[\sum_{i=1}^{p}|\,\Delta y(\tau_i(\xi))\,|+\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}|\,\delta\varphi(\tau_i(\xi))\,|+\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}|\,\delta u(\theta_i(\xi))\,|\Big]d\xi \le O(\varepsilon\delta\mu)+$$

$$+\int_{\tilde{t}_0}^{t} L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi, \tag{1.3.18}$$

(იხ. *ლემა 1.1.1*),

სადაც

$$L(\xi)=\sum_{i=1}^{s}\chi_J(\gamma_i(\xi))L_{K_1,N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi), \tag{1.3.19}$$

$\chi_J(\xi)$ არის J ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია. თუ $\gamma_i(\xi)>b$ მაშინ იგულისხმება, რომ $L(\xi)=0$.

თუ $t\in[\gamma_{p+1}(t_0),\gamma_{p+1}]$, მაშინ (1.3.17) და (1.3.18) თანახმად

$$W\,(t;\varepsilon\delta\mu)\le W_3(\gamma_{p+1}(t_0),\varepsilon\delta\mu)+\int_{\gamma_{p+1}(t_0)}^{\gamma_{p+1}}|\,W_2(\xi;\varepsilon\delta\mu)\,|\,d\xi\le O(\varepsilon\delta\mu)+\int_{\tilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi.$$

ამრიგად (1.3.18) შეფასება სამართლიანია მთელ ინტერვალზე $[\tilde{t}_0,\gamma_{p+1}]$.

ვთქვათ $t\in[\gamma_{p+1},\gamma_{p+2}(t_0)]$, მაშინ

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\le W_3(\gamma_{p+1};\varepsilon\delta\mu)+\int_{\gamma_{p+1}}^{\gamma_{p+2}(t_0)}L_{K_1,N_1}(\xi)\Big[\sum_{i=1}^{p+1}|\,\Delta y(\tau_i(\xi))\,|+\varepsilon\sum_{i=p+2}^{s}|\,\delta\varphi(\tau_i(\xi))\,|+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{v}|\,\delta u(\theta_i(\xi))\,|\Big]d\xi\le W_3(\gamma_{p+1};\varepsilon\delta\mu)+O(\varepsilon\delta\mu)+\sum_{i=1}^{p+1}\int_{\tau_i(\gamma_{p+1})}^{\tau_i(t)}L_{K_1,N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi.$$

რადგანაც $\tau_i(\gamma_{p+1})\ge\tilde{t}_0$, $\tau_i(t)\le t$, $i=1,\dots,p+1$, ამიტომ მიღებული უტოლობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\le O(\varepsilon\delta\mu)+W_3(\gamma_{p+1};\varepsilon\delta\mu)+\int_{\tilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi.$$

ამრიგად, როცა $t\in[\tilde{t}_0,\gamma_{p+2}(t_0)]$ სამართლიანია შეფასება

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\le O(\varepsilon\delta\mu)+2\int_{\tilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi.$$

ანალოგიური მსჯელობით და (1.3.17) უტოლობის გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს ბოლო უტოლობის სამართლიანობა მთელ $[\tilde{t}_0,\gamma_{p+2}]$ ინტერვალზე. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ მივიღებთ, რომ

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\le O(\varepsilon\delta\mu)+(i+1)\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi,\quad t\in[\widetilde{t}_0,\gamma_{p+i+1}],\quad i=2,\dots,s-p-1.$$

ვთქვათ $t\in[\gamma_s,r_2+\delta_2]$, მაშინ

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\le W_3(\gamma_s;\varepsilon\delta\mu)+\int_{\gamma_s}^{t}L_{K_1,N_1}(\xi)\Big[\sum_{i=1}^{s}|\,\Delta y(\tau_i(\xi))\,|+\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}|\,\delta u(\theta_i(\xi))\,|\Big]d\xi\le O(\varepsilon\delta\mu)+$$

$$+W_3(\gamma_s;\varepsilon\delta\mu)+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\gamma_s)}^{\tau_i(t)}L_{K_1,N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi.$$

რადგანაც $\tau_i(\gamma_s)\ge\widetilde{t}_0$, $i=1,\dots,s$, ამიტომ

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu)\le O(\varepsilon\delta\mu)+W_3(\gamma_s;\varepsilon\delta\mu)+\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi\le O(\varepsilon\delta\mu)+(s-p+1)\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi,$$

$$t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2].\qquad(1.3.20)$$

(1.3.10) უტოლობიდან, (1.3.4), (1.3.16), (1.3.20) გათვალისწინებით, მიიღება

$$|\,\Delta y(t)\,|\le O(\varepsilon\delta\mu)+(s-p+1)\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi,$$

აქედან გრონუოლის ლემის თანახმად გამომდინარეობს (1.3.3) უტოლობის სამართლიანობა ■

ლ ე მ ა 1.3.2. ვთქვათ $\gamma_i=\widetilde{t}_0$, $i=1,\dots,p$, $\gamma_{p+1}<\dots<\gamma_s\le r_2$, $\rho_j\le r_2$ და ვთქვათ გარდა ამისა, შესრულებულია *თეორემა 1.2.2*-ის 1.2.4) და 1.2.5) პირობები. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_2>0$ და $\delta_2>0$, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_2]\times V^+$ შესრულებულია უტოლობა

$$\max_{t\in[t_0,r_2+\delta_2]}|\,\Delta y(t)\,|\le O(\varepsilon\delta\mu),\qquad(1.3.21)$$

მასთან,

$$\Delta y(t_0)=\varepsilon\Big\{\delta x_0-\Big[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+f_p^+\Big]\delta t_0\Big\}+o(\varepsilon\delta\mu).\qquad(1.3.22)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ და $\delta_2\in(0,\delta_1]$ იმდენად მცირეა, რომ ყოველი $(\varepsilon,\delta\mu)\in$ $\in[0,\varepsilon_2]\times V^+$ შესრულებულია თანაფარდობანი:

$$\begin{cases} t_0 \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_0 + \delta_2), \gamma_p(t_0) < \gamma_{p+1} < \gamma_{p+1}(t_0) < \gamma_{p+2} < \ldots < \gamma_s < \gamma_s(t_0) < r_2 + \delta_2, \\ \eta_j(t_0) < \widetilde{t}_0, t_0 < \eta_j(r_2 + \delta_2), j = 1, \ldots, k. \end{cases} \tag{1.3.23}$$

$\Delta y(t)$ ფუნქცია $[t_0, r_2 + \delta_2]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta} y(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j(t) h(t_0, \varepsilon\dot{\delta\varphi}, \dot{\Delta} y)(\eta_j(t)) + \sum_{i=2}^{3} W_i(t;\varepsilon\delta\mu), \tag{1.3.24}$$

სადაც

$$W_3(t;\varepsilon\delta\mu) = \sum_{j=1}^{k} A_j(t)[h(t_0, \dot{\widetilde{\varphi}}, \dot{\widetilde{y}})(\eta_j(t)) - h(\widetilde{t}_0, \dot{\widetilde{\varphi}}, \dot{\widetilde{y}})(\eta_j(t))] = \sum_{j=1}^{k} W_{3j}(t;\varepsilon\delta\mu),$$

$W_2(t;\varepsilon\delta\mu)$-ს შესახებ იხ. (1.3.7)

(1.3.24) განტოლება $[t_0, r_2 + \delta_2]$ ინტერვალზე შეიძლება განხილული იქნას როგორც წრფივი ნეიტრალური ტიპის განტოლება

$$\dot{z}(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j(t) \dot{z}(\eta_j(t)) + \sum_{i=2}^{3} W_i(t;\varepsilon\delta\mu)$$

საწყისი პირობით

$$\dot{z}(t) = \varepsilon\dot{\delta\varphi}(t), \quad t \in [\tau, t_0), \quad z(t_0) = \Delta x(t_0). \tag{1.3.25}$$

ერთადერთობის გამო $z(t) = \Delta y(t), \quad t \in [t_0, r_2 + \delta_2]$. კოშის ფორმულის თანახმად (1.3.25) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ასე

$$\Delta y(t) = \Delta y(t_0) + \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(t_0)}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t) A_j(\rho_j(\xi)) \dot{\rho}_j(\xi) \dot{\delta\varphi}(\xi) d\xi + \int_{t_0}^{t} Y(\xi;t) \sum_{i=2}^{3} W_i(\xi;\varepsilon\delta\mu) d\xi.$$

აქედან მიიღება

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(t_0)| + \varepsilon c \|Y\| \sum_{j=1}^{k} \|A_j\| (\rho_i(t_0) - t_0)\dot{\rho}_j + \|Y\| \left\{ \sum_{j=1}^{k} \int_{t_0}^{r_2+\delta_2} |W_{3j}(\xi;\varepsilon\delta\mu)| d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{t} |W_2(\xi;\varepsilon\delta\mu)| d\xi \right\} = |\Delta y(t_0)| + O(\varepsilon\delta\mu) + \|Y\| \left\{ \sum_{j=1}^{k} W_{3j}(\varepsilon\delta\mu) + W_3(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) \right\} \tag{1.3.26}$$

დავამტკიცოდ ფორმულა (1.3.22). გვაქვს

$$\Delta y(t_0) = y(t_0; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) - \widetilde{y}(t_0) = \widetilde{x}_0 + \varepsilon\delta x_0 - \left\{ \widetilde{x}_0 + \int_{\widetilde{t}_0} [\sum_{j=1}^{k} A_j(t) \dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(t)) + f(t, \widetilde{y}(\tau_1(t)), \ldots, \right.$$

$$\widetilde{y}(\tau_p(t)),\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)),...,\widetilde{\varphi}(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t)),...,\widetilde{u}(\theta_\nu(t))\big]dt\Big\} = \varepsilon\Big\{\delta x_0 - \big[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j((\widetilde{t}_0)) +$$

$$+ f_p^+\big]dt_0\Big\} + o(\varepsilon\delta\mu).$$

ახლა დავამტკიცოდ (1.3.21) უტოლობა. ამისათვის შევაფასოთ $W_{3j}(\varepsilon\delta\mu)$, $j = 1,...,k$.

ცხადია რომ

$$W_{3j}(\varepsilon\delta\mu) = \int_{\eta_j(t_0)}^{\eta_j(r_2+\delta_2)} | A_j(\rho_j(\xi)) \| h(t_0,\dot{\widetilde{\varphi}},\dot{\widetilde{y}})(\xi) - h(\widetilde{t},\dot{\widetilde{\varphi}},\dot{\widetilde{y}})(\xi) | \dot{\rho}_j(\xi)d\xi \le \int_{\widetilde{t}_0}^{t} | A_j(\rho_j(t)) \| \dot{\widetilde{\varphi}}(\xi) -$$

$$- \dot{\widetilde{y}}(\xi) | \dot{\rho}_j(\xi)d\xi \le \| A_j \| \dot{\rho}_j \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}} | \dot{\widetilde{y}}(\xi) | d\xi + O(\varepsilon\delta\mu).$$

შევაფასოდ უკანასკნელ გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალი,

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{t} | \dot{\widetilde{y}}(t) | dt \le \int_{\widetilde{t}_0}^{t} \Big[\sum_{j=1}^{k} | A_j(t) \| \dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(t)) | + | f(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y},\widetilde{u})(t) |\Big]dt \le O(\varepsilon\delta\mu).$$

მაშასადამე

$$W_{3j}(\varepsilon\delta\mu) \le O(\varepsilon\delta\mu), \quad j = 1,...,k. \tag{1.3.27}$$

სანამ შევუდგებოდეთ $W_3(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულების შეფასებას შევნიშნავთ, რომ საკმარი სად მცირე $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1]$ ფუნქციები

$$\sup_{t\in[\widetilde{t}_0,t_0]} \dot{\gamma}(t), \quad i = 1,...,s; \qquad \sup_{t\in[\gamma_{i-1}(t_0),\gamma_i(t_0)]} | W_2(t;\varepsilon\delta\mu) |, \quad i = 1,...,p, \quad \gamma_0(t_0) = t_0;$$

$$\sup_{t\in[\gamma_i,\gamma_i(t_0)]} | W_2(t;\varepsilon\delta\mu) |, \quad i = p+1,...,s,$$

შემოსაზღვრულია $[0,\varepsilon_2]\times V^+$ სიმრავლეზე.

ცხადია, რომ $i = 1,...,p$,

$$| \gamma_i(t_0) - \gamma_{i-1}(t) | \le \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} | \dot{\gamma}_i(t) - \dot{\gamma}_{i-1}(t) | dt \le O(\varepsilon\delta\mu).$$

ამრიგად ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\mu) \in [0,\varepsilon_2]\times V^+$ სამართლიანია შეფასებები

$$\int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i(t_0)} | W_2(\xi;\varepsilon\delta\mu) | d\xi \le O(\varepsilon\delta\mu), \quad i = 1,...,p, \qquad \int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)} | W_2(\xi;\varepsilon\delta\mu) | d\xi \le O(\varepsilon\delta\mu), \quad i = p+1,...,s, \tag{1.3.28}$$

$W_3(t;t_0,\varepsilon\delta\mu),\ \ t\in[t_0,r_2+\delta_2]$, შეფასებისათვის განვიხილოდ რამდენიმე შემთხვევა,

ვთქვათ $t\in[t_0,\gamma_p(t_0)]$, მაშინ

$$W_3(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)\le\sum_{i=1}^{p}\int_{\gamma_{i-1}(t_0)}^{\gamma_i(t_0)}|W_2(\xi;\varepsilon\delta\mu)|\,d\xi\le O(\varepsilon\delta\mu), \tag{1.3.29}$$

(იხ. (1.3.28))

ვთქვათ $t\in[\gamma_p(t_0),\gamma_{p+1}]$, მაშინ

$$W_3(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)\le W_3(\gamma_p(t_0);t_0,\varepsilon\delta\mu)+\int_{\gamma_p(t_0)}^{t}L_{K_1,N_1}(\xi)\Big[\sum_{i=1}^{p}|\Delta y(\tau_i(\xi))|+\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}|\delta\varphi(\tau_i(\xi))|+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}|\delta u(\theta_i(\xi))|\Big]d\xi\le O(\varepsilon\delta\mu)+\sum_{i=1}^{p}\int_{\tau_i(\gamma_p(t_0))}^{\tau_i(t)}L_{K_1,N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\,|\Delta y(\xi)|\,d\xi.$$

რადგანაც $\tau_i(\gamma_p(t_0))>\tau_i(\gamma_i(t_0))=t_0,\ \ \tau_i(t)\le t,\ \ i=1,\ldots,p.$ ამიტომ

$$W_3(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)\le O(\varepsilon\delta\mu)+\int_{t_0}^{t}L(\xi)\,|\Delta y(\xi)|\,d\xi,\qquad t\in[t_0,\gamma_{p+1}],$$

(იხ. (1.3.19), (1.3.29))

ამის შემდეგ, (1.3.26) და (1.3.22) გათვალისწინებით, ანალოგიური ხერხით (იხ. *ლემა 1.3.1* დამტკიცება) მიიღება

$$|\Delta y(t)|\le O(\varepsilon\delta\mu)+(s-p+1)\int_{t_0}^{t}L(\xi)\,|\Delta y(\xi)|\,d\xi,\qquad t\in[t_0,r_2+\delta_2].$$

აქედან გრონუოლის ლემის თანახმად გამომდინარეობს (1.3.21) ■

§1.4. *თეორემა 1.2.1 დამტკიცება*

ვთქვათ *ლემა 1.3.1-ში* $r_1=\widetilde{t}_0,\ \ r_2=\widetilde{t}_1$. მაშინ *ლემა 1.1.1* და 1.1.2) თანახმად არსებობს ისე თი რიცხვები $\varepsilon_1>0$, და $\delta_1>0$, რომ ყოველი $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_1]\times V^-$ ამონახსნი $y(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)$ გან საზღვრულია $[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]$-ზე. მასთან

$$x(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)=y(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu),\quad t\in[t_0,\widetilde{t}_1+\delta_1],$$

(იხ. (1.1.8)).

ამრიგად

$$\Delta x(t)=\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=\begin{cases}\varepsilon\delta\varphi(t), t\in[\tau,t_0),\\ y(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)-\widetilde{\varphi}(t), t\in[t_0,\widetilde{t}_0),\\ \Delta y(t), t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1+\delta_1],\end{cases} \tag{1.4.1}$$

(იხ. (1.2.1) (1.3.1)).

ლემა 1.3.1 თანახმად არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ და $\delta_2\in(0,\min(\delta_1,\widetilde{t}_1-\gamma_s))$, რომ

$$|\Delta x(t)|\le O(\varepsilon\delta\mu),\quad \forall(t;\varepsilon,\delta\mu)\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times V^-$$

$$\Delta x(\widetilde{t}_0)=\varepsilon\left\{\delta x_0-\Big[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-}\Big]\delta t_0\right\}+o(\varepsilon\delta\mu), \tag{1.4.2}$$

(იხ. (1 4.1) (1.3.3) და (1.3.4)).

$\Delta x(t)$ ფუნქცია $[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1+\delta_2]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta x}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{\Delta x}(\eta_j(t))+\sum_{i=1}^{s}\widetilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t))+\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_i}[t]\delta u(\theta_i(t))+R(t;\varepsilon\delta\mu), \tag{1.4.3}$$

სადაც

$$R(t;\varepsilon\delta\mu)=f(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\Delta x(\tau_1(t)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(t))+\Delta x(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t))+\varepsilon\delta u(\theta_1(t)),\ldots$$

$$\ldots,\widetilde{u}(\theta_\nu(t))+\varepsilon\delta u(\theta_\nu(t)))-\widetilde{f}[t]-\sum_{i=1}^{s}\widetilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t))-\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_i}[t]\delta u(\theta_i(t)) \tag{1.4.4}$$

კოშის ფორმულის ძალით, (1.4.3) განტოლების ამონახსნი $[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1+\delta_2]$ ინტერვალზე შეიძლ ება წარმოდგენილი იქნას შემდეგი ფორმულით

$$\Delta x(t)=\Phi(\widetilde{t}_0;t)\Delta x(\widetilde{t}_0)+\varepsilon\int_{\widetilde{t}_0}^{t}Y(\xi;t)\sum_{i=1}^{\nu}f_{u_i}[\xi]\delta u(\theta_i(\xi))d\xi+\sum_{i=-1}^{1}h_i(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu), \tag{1.4.5}$$

სადაც

$$\begin{cases} h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu) = \sum\limits_{j=1}^{k} \int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\Delta x}(\xi)\dot{\rho}_j(\xi)d\xi, \\ h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu) = \sum\limits_{i=p+1}^{s} \int\limits_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi, \\ h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu) = \int\limits_{\widetilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)R(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi; \end{cases} \tag{1.4.6}$$

$\Phi(\xi;t)$, $Y(\xi;t)$ მატრიცული ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.2.4) სისტემას, და (1.1.14) პირობას.

ლემა 1.1.5 და (1.4.2) ფორმულის საფუძველზე გვექნება

$$\Phi(\widetilde{t}_0;t)\Delta x(\widetilde{t}_0) = \varepsilon\Phi(\widetilde{t}_0;t)\left\{\delta x_0 - [\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) - \sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-)f_i^-]\delta t_0\right\} + o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{1.4.7}$$

გარდავქმნათ $h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულება. გვაქვს

$$\int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta x}(\xi)d\xi = \varepsilon \int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\delta\varphi}(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta x}(\xi)d\xi = \varepsilon \int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\delta\varphi}(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta x}(\xi)d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

შემდეგ

$$\int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta x}(\xi)d\xi = \int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))[\dot{y}(\xi;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu) - \dot{\widetilde{\varphi}}(\xi)]d\xi =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)[\sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(\xi)\dot{\varphi}(\eta_\alpha(\xi)) + f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(\xi) - \dot{\widetilde{\varphi}}(\xi)]d\xi =$$

$$= -\varepsilon Y(\rho_j -;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)[\sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_\alpha(\widetilde{t}_0)) - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)]\delta t_0 + o(t;\varepsilon\delta\mu) + h_{-1}^{1,j}(t;\varepsilon\delta\mu),$$

სადაც

$$h_{-1}^{1,j}(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(\xi)d\xi,$$

(იხ. *ლემა 1.1.6*)

ცხადია, რომ

$$h_{-1}^{1,j}(t;\widetilde{t}_0\varepsilon\delta\mu)=\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j-;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}[Y(\rho_j(\xi);t)-$$

$$-Y(\rho_j-;t)]A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(\xi)d\xi=\varepsilon Y(\rho_j-;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-$$

$$-\hat{\gamma}_i^{-})f_i\delta t_0+o(t;\varepsilon\delta\mu)+h_{-1}^{2,j}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu),$$

(იხ. (1.1.13) (1.3.15)).

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|h_{-1}^{2,j}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)|\le\sup_{\xi\in[t_0,\widetilde{t}_0]}|Y(\rho_j(\xi);t)-Y(\rho_j-;t)|\|A_j\|\|\dot{\rho}_j\|\times\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}|f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(t)|dt$$

ანალოგიური მსჯელობით, რომელიც ჩატარებული იყო *ლემა 1.3.1*-ის დამტკიცებისას (1.1.13) გამოსახულების მიმართ, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}|f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u(t))(t)|dt=O(\varepsilon\delta\mu).$$

ამრიგად $h_{-1}^{2,j}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)=o(t;\varepsilon\delta\mu)$.

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთ მიღებულ გამოსახულებებს $h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულებისთვის მივიღებთ

$$h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon\Big\{\sum_{j=1}^{k}Y(\rho_j-;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{\alpha=1}^{k}A_\alpha(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+$$

$$+\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-}]\delta t_0+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi\Big\}+o(t;\varepsilon\delta\mu)=$$

$$=\varepsilon\Big\{[Y(\widetilde{t}_0-;t)-\Phi(\widetilde{t}_0-;t)][\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})f_i^{-}]\delta t_0+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi\Big\}+o(t;\varepsilon\delta\mu) \qquad (1.4.8)$$

(იხ.(1.113)).

ახლა გარდავქმნათ $h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)$. გვაქვს

$$h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=p+1}^{s}\Big[\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi\Big]=\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\times\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{i=p+1}^{s}\varepsilon\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu), \qquad (1.4.9)$$

(იხ.(1.35)).

ბოლოს გარდავქმნათ $h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)$. როცა $t\in[\widetilde{t}_1-\delta_2,\widetilde{t}_2+\delta_2]$ მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად

$$h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)=\sum_{j=1}^{4}\alpha_j(t;\varepsilon\delta\mu),$$

სადაც

$$\alpha_1(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\widetilde{t}_0}^{\gamma_{p+1}(t_0)}\omega(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,\quad \alpha_2(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}\varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,$$

$$\alpha_3(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=p+1}^{s-1}\int_{\gamma_i}^{\gamma_{i+1}(t_0)}\varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,\quad \alpha_4(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_s}^{t}\omega(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,\quad \varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)=Y(\xi;t)R(t;\varepsilon\delta\mu).$$

შევაფასოდ $\alpha_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ გვაქვს (იხ.(1.4.4)),

$$|\alpha_1(t;\varepsilon\delta\mu)|\le\|Y\|\int_{\widetilde{t}_0}^{\gamma_{p+1}}|f(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\Delta x(\tau_1(t)),\ldots\widetilde{x}(\tau_p(t))+\Delta x(\tau_p(t)),\varphi(\tau_{p+1}(t)),\ldots,\varphi(\tau_s(t)),$$

$$u(\theta_1(t)),\ldots,u(\theta_\nu(t)))-f(t,\widetilde{x}(\tau_1(t)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_p(t)),\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t)),\ldots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t)),\ldots,\widetilde{u}(\theta_\nu(t)))-$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\widetilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t))-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}\widetilde{f}_{x_i}[t]\delta\varphi(\tau_i(t))-\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_i}[t]\delta u(\theta_i(t))\,|\,dt\le$$

$$\leq \| Y \| \int_{\tilde{t}_0}^{\gamma_{p+1}(t_0)} \Big\{ \Big| \int_0^1 \Big[\frac{d}{d\xi} f(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \ldots, \tilde{x}(\tau_p(t)) + \xi \Delta x(\tau_p(t)), \varphi(\tau_{p+1}(t)) +$$

$$+ \xi \varepsilon \delta\varphi(\tau_{p+1}(t)), \ldots, \tilde{\varphi}(\tau_s(t)) + \varepsilon \xi \delta\varphi(\tau_s(t)), \tilde{u}(\theta_1(t)) + \xi \varepsilon \delta u(\theta_1(t)), \ldots, \tilde{u}(\theta_\nu(t)) + \xi \varepsilon \delta\mu(\theta_\nu(t))) -$$

$$- \sum_{i=1}^{p} \tilde{f}_{x_i}[t] \Delta x(\tau_i(t)) - \varepsilon \sum_{i=p+1}^{s} \tilde{f}_{x_i}[t] \delta\varphi(\tau_i(t)) - \varepsilon \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{f}_{u_i}[t] \delta u(\theta_i(t)) \Big] d\xi \Big| \Big\} dt \leq$$

$$\leq \| Y \| \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} \Big\{ \int_0^1 \Big[\sum_{i=1}^{p} | f_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \ldots) - f_{x_i}[t] | \, | \Delta x(\tau_i(t)) | +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=p+1}^{s} | f_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \ldots) - \tilde{f}_{x_i}[t] | \, | \delta\varphi(\tau_i(t)) | + \varepsilon \sum_{i=1}^{\nu} | f_{u_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) +$$

$$+ \xi \Delta x(\tau_1(t)), \ldots) - \tilde{f}_{u_i}[t] | \, | \delta u(\theta_i(t)) | \Big] d\xi \Big\} dt \leq \| Y \| \, (O(\varepsilon \delta\mu) \sum_{i=1}^{p} \sigma_i(\varepsilon \delta\mu) +$$

$$+ \varepsilon c \sum_{i=p+1}^{s} \sigma_i(\varepsilon \delta\mu) + \varepsilon c \sigma_0(\varepsilon \delta\mu), \tag{1.4.10}$$

სადაც

$$\sigma_i(\varepsilon \delta\mu) = \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} \Big[\int_0^1 | f_{x_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \ldots) - \tilde{f}_{x_i}[t] | \, d\xi \Big] dt,$$

$$\sigma_0(\varepsilon \delta\mu) = \sum_{i=1}^{\nu} \int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_1 + \delta_2} \Big[\int_0^1 | f_{u_i}(t, \tilde{x}(\tau_1(t)) + \xi \Delta x(\tau_1(t)), \ldots) - \tilde{f}_{u_i}[t] | \, d\xi \Big] dt.$$

როცა $\varepsilon \to 0$, მაშინ $\tilde{\varphi}(t) + \varepsilon \xi \delta\varphi(t) \to \tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{u}(t) + \varepsilon \xi \delta\varphi(t) \to \tilde{u}(t)$, $\Delta x(\tau_i(t)) \to 0$, $i = 1, \ldots p$ თანაბრად $(\xi, t, \delta\mu) \in [0,1] \times [\tilde{t}_0, \tilde{t}_1 + \delta_2] \times V^-$. ამიტომ ლებეგის თეორემის თანახმად, (იხ. (1.3.19)),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_i(\varepsilon \delta\mu) = 0, \quad i = 1, \ldots, s, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \sigma_i(\varepsilon \delta\mu) = 0,$$

თანაბრად $\delta\mu \in V^-$.

ამრიგად

$$\alpha_1(t; \varepsilon \delta\mu) = o(t; \varepsilon \delta\mu). \tag{1.4.11}$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $t \in [\gamma_i(t_0), \gamma_i]$, $i = p+1, \ldots, s$, მაშინ $| \Delta x(\tau_j(t)) | \leq O(\varepsilon \delta\mu)$, $j = 1, \ldots, i-1$,

$|\Delta x(\tau_j(t))| = \varepsilon\delta\varphi(\tau_j(t)), \quad i = i+1,\dots,s.$

ამიტომ

$$\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}\omega(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi = \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\beta_i(\xi)d\xi - \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu),$$

სადაც

$$\beta_i(\xi) = f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi)) + \Delta x(\tau_1(\xi)),\dots,\widetilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\dots,\varphi(\tau_s(\xi)),$$

$$u(\theta_1(\xi)),\dots,u(\theta_\nu(\xi))) - f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi)),\dots,\widetilde{x}(\tau_{i-1}(\xi)),\widetilde{\varphi}(\tau_i(\xi)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)),\widetilde{u}(\theta_1(\xi)),\dots,$$

$$\widetilde{u}(\theta_\nu(\xi))), o(t;\varepsilon\delta\mu) = -\sum_{j=1}^{i-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi - \varepsilon\sum_{j=i+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\delta\varphi(\tau_j(\xi))d\xi -$$

$$-\varepsilon\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}\sum_{m=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi.$$

ნათელია, რომ

$$\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} Y(\xi;t)\beta_i(\xi)d\xi = \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i} Y(\xi;t)[\beta_i(\xi) - f_i^-]d\xi + \int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)f_i^- dt = \alpha_5(t;\varepsilon\delta\mu) + \alpha_6(t;\varepsilon\delta\mu)$$

შემდეგ, როცა $\xi \in [\gamma_i(t_0),\gamma_i]$ და $i = p+1,\dots,s,$ მაშინ $\tau_i(\xi) \ge \widetilde{t}_0,$ $j = 1,\dots,i-1,$ როცა $\xi \in$ $\in [\gamma_i(t_0),\gamma_i],$ მაშინ $\tau_i(\xi) \in [t_0,\widetilde{t}_0].$ ამიტომ

$$\widetilde{x}_i(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)) = x(\tau_i(\xi);\widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = y(\tau_i(\xi);\widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = \widetilde{y}(\tau_i(\xi)) + \Delta y(\tau_i(\xi)),$$

(იხ. (1.3 1)).

ამრიგად, თუ გავითვალისწინებთ $\widetilde{y}(t)$ ფუნქციის უწყვეტობას $[\widetilde{t}_0 - \delta_2, \widetilde{t}_1 + \delta_2]$ ინტერვალზე, (1.3.2) ტოლობას და $\widetilde{y}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{x}_0$ გვექნება

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\widetilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)) = \lim_{\xi\to\gamma_i}\widetilde{y}(\tau_i(\xi)) = \widetilde{x}_0.$$

თუ მივიღებთ მხედველობაში ზემოთმიღებულ თანაფარდობებს შეიძლება დავასკვნათ, რომ როცა $i = p+1,\dots,s$ და $\xi \in [\gamma_i(t_0),\gamma_i]$ მაშინ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi,\widetilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)),\dots,\widetilde{x}(\tau_i(\xi)) + \Delta x(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\dots,\varphi(\tau_s(\xi)) = \varpi_{0i}, \quad i = p+1,\dots,s.$$

მეორეს მხრივ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi)),\dots,\widetilde{x}(\tau_{i-1}(\xi)),\widetilde{\varphi}(\tau_i(\xi)),\dots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)) = \varpi_{1i}, \quad i = p+1,\dots,s.$$

ამრიგად

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_i]} |\beta_i(\xi)-f_i^-|=0, \text{ თანაბრად } \delta\mu\in V^-.$$

$Y(\xi;t)$ ფუნქციის თვისებების და $\gamma_i-\gamma_i(t_0)=-\varepsilon\dot{\gamma}_i^-\delta t_0+o(\varepsilon\delta\mu)$ ტოლობის გათვალის წინებით მივიღებთ, რომ

$$\alpha_5(t;\varepsilon\delta\mu)=o(t;\varepsilon\delta\mu),\quad \alpha_6(t;\varepsilon\delta\mu)=-\varepsilon Y(\gamma_i-;t)f_i^-\dot{\gamma}_i^-\delta t_0+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

მაშასადამე

$$\alpha_2(t;\varepsilon\delta\mu)=-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i-;t)f_i^-\dot{\gamma}_i^-\delta t_0+o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ $\alpha_i(t;\varepsilon\delta\mu)=o(t;\varepsilon\delta\mu),\quad i=3,4,$ (იხ. (1.4.10)).

ახლა ამოვწეროთ $h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულების საბოლოო სახე

$$h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\mu)=-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i-;t)f_i^-\dot{\gamma}_i^-\delta t_0-\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_i}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (1.4.12)$$

(1.4.5), (1.4.7), (1.4.9) და (1.4.12) გათვალისწინებით, მიიღება (1.2.2) ფორმულა, სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$ აქვს (1.2.3) სახე ■

§1.5. *თეორემა 1.2.2 დამტკიცება*

ვთქვათ *ლემა 1.3.1*-ში $r_1=\widetilde{t}_0,\quad r_2=\widetilde{t}_2$. მაშინ *ლემა 1.1.1* და *1.1.2* თანახმად არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_1>0$, და $\delta_1>0$, რომ ყოველი $(\varepsilon,\delta\mu)\in[0,\varepsilon_1]\times V^+$ ამონახსნი $y(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია $[\widetilde{t}_0-\delta_1,\widetilde{t}_1+\delta_1]$ ინტერვალზე, ხოლო $x(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)$ განსაზღვრულია $[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]$-ზე. მასთან

$$x(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu)=y(t;\widetilde{\mu}+\varepsilon\delta\mu),\qquad t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1+\delta_1],$$

(იხ. (1 1 8)).

ამრიგად

$$\Delta x(t)=\Delta x(t;\varepsilon\delta\mu)=\begin{cases}\varepsilon\delta\varphi(t), t\in[\tau,\widetilde{t}_0),\\ \varphi(t)-\widetilde{x}(t), t\in[\widetilde{t}_0,t_0),\\ \Delta y(t), t\in[t_0,\widetilde{t}_1+\delta_1).\end{cases} \qquad (1.5.1)$$

ვთქვათ $\delta \in (0,\delta_1]$ და $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1]$ რიცხვები, რომელთა არსებობა დამტკიცებულია *ლემა 1.3.2*-ში, იმდენად მცირეა, რომ ყოველი $(\varepsilon,\delta\mu) \in [0,\varepsilon_1] \times V^+$ სრულდება უტოლობა $\gamma_s(t_0) < \widetilde{t}_1 - \delta$; *ლემა 1.3.2* ძალით გვაქვს

$$|\Delta x(t)| \le O(\varepsilon\delta\mu), \quad \forall (t,\varepsilon,\delta\mu) \in [t_0,\widetilde{t}_1+\delta_2] \times [0,\varepsilon_2] \times V^+, \tag{1.5.2}$$

$$\Delta x(t_0) = \varepsilon \left\{ \delta x_0 - \Big[\sum_{j=k}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + f_p^+\Big]\delta t_0 \right\} + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.5.3}$$

(იხ. (1.5.1) (1.3.21) (1.3.22)).

$\Delta x(t)$ ფუნქცია $[t_0,\widetilde{t}_1+\delta_1]$ ინტევალზე აკმაყოფილებს (1.4.3) განტოლებას. კოშის ფორმულის თანახმად იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე

$$\Delta x(t) = \Phi(t_0;t)\Delta x(t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} Y(\xi;t) \sum_{m=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi + \sum_{i=-1}^{1} h_i(t;t_0,\varepsilon\delta\mu), \tag{1.5.4}$$

სადაც

$$h_0(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = \sum_{i=1}^{s} \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi,$$

ხოლო $h_i(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$, $i=-1,0,1$ შესახებ იხილეთ (1.4.6).

ლემა 1.1.5 და (1.5.3) ფორმულის საფუძველზე გვექნება

$$\Phi(t_0;t)\Delta x(t_0) = \varepsilon\Phi(\widetilde{t}_0;t) \left\{ \delta x_0 - \Big[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + f_p^+\Big]\delta t_0 \right\} + o(\varepsilon\delta\mu). \tag{1.5.5}$$

გარდავქმნათ $h_{-1}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულება. გვაქვს

$$\int_{\eta_j(t_0)}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\Delta x(\xi)d\xi = \varepsilon \int_{\eta_j(t_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi +$$

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\Delta x(\xi)d\xi = \varepsilon \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\Delta x(\xi)d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

შემდეგ

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi = \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))(\dot{\varphi}(\xi) - \dot{\widetilde{x}}(\xi)d\xi =$$

$$= \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\Big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\xi) - \sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(\xi)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_\alpha(\xi)) - \widetilde{f}[\xi]\Big]d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu) =$$

$$= \varepsilon Y(\rho_j+;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)\Big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_\alpha(\widetilde{t}_0))\Big]\delta t_0 - h_{-1}^{1,j}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) + o(t;\varepsilon\delta\mu),$$

სადაც

$$h_{-1}^{1,j}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\widetilde{f}[\xi]d\xi.$$

(იხ. *ლემა 1.1.6*).

ცხადია, რომ

$$h_{-1}^{1,j}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\widetilde{f}[\xi]d\xi + \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} [Y(\rho_j(\xi);t) -$$

$$- Y(\rho_j+;t)]A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)\widetilde{f}[\xi]d\xi = \varepsilon Y(\rho_j+;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)f_p^+\delta t_0 + o(t;\varepsilon\delta\mu) + h_{-1}^{2,j}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|h_{-1}^{2,j}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)| \le \sup_{\xi\in[\widetilde{t}_0,t_0]} |Y(\rho_j(\xi);t) - Y(\rho_j+;t)| \|A_j\| \|\dot{\rho}_j\| \times \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} |\widetilde{f}[\xi]|d\xi = o(t;\varepsilon\delta\mu).$$

თუ გავითვალისწინებთ ზემოთმიღებულ თანაფარდობებს $h_{-1}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულების თვის გვექნება

$$h_{-1}(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\Bigg\{\sum_{j=1}^{k} Y(\rho_j+;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)\Big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(\rho_\alpha)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_\alpha(\widetilde{t}_0)) - f_p^+\Big]\delta t_0 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t) \times A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\dot{\varphi}(\xi)d\xi\Bigg\} + o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (1.5.6)$$

ახალ გარდავქმნათ $h_0(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$. გვაქვს

$$h_0(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = \sum_{i=1}^{p} \int_{\tau_i(t_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi +$$

$$+\sum_{i=p+1}^{s}[\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi]=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\int_{t_0}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+\sum_{i=p+1}^{s}[\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{i=p+1}^{s}[\varepsilon\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\times\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (1.5.7)$$

ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის სამართლიანობაში

$$\sum_{i=1}^{p}\int_{t_0}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}\int_{\gamma_j(t_0)}^{\gamma_{j+1}(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi=$$

$$=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi,\qquad \gamma_0(t_0)=t_0. \qquad (1.5.8)$$

$h_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)$ გამოსახულება როცა $t\in[\widetilde{t}_1-\delta_2,\widetilde{t}_1+\delta_2]$, (1.3.23) უტოლობის გათვალის წინებით, შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ

$$h_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu)=\sum_{\alpha=1}^{5}\beta_\alpha(t;\varepsilon\delta\mu), \qquad (1.5.9)$$

სადაც

$$\beta_1(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}\varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,\qquad \beta_2(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}}\varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,$$

$$\beta_3(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}\varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,\qquad \beta_4(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=p+1}^{s-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}}\varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,$$

$$\beta_5(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_s(t_0)}^{t}\varpi(\xi;\varepsilon\delta\mu)d\xi,\qquad \omega(\xi;\varepsilon\delta\mu)=Y(\xi;t)R(\xi;\varepsilon\delta\mu).$$

$\beta_1(t;\varepsilon\delta\mu)$ -თვის გვექნება

$$\beta_1(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}Y(\xi;t)[f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(\xi))+\Delta x(\tau_i(\xi)),\varphi(\tau_{i+1}(\xi)),\ldots$$

$$\ldots,\varphi(\tau_s(\xi)),u(\theta_1(\xi)),\ldots,u(\theta_\nu(\xi))-f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_p(\xi)),\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\xi)),\ldots,$$

$$\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)),\widetilde{u}(\theta_1(\xi)),...,\widetilde{u}(\theta_\nu(\xi))]d\xi-\sum_{i=0}^{p-1}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}Y(\xi;t)\sum_{j=1}^{s}\widetilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi-$$

$$-\varepsilon\sum_{i=0}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}Y(\xi;t)\sum_{m=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi=\beta_{11}(t;\varepsilon\delta\mu)-\beta_{12}(t;\varepsilon\delta\mu)-\beta_{13}(t;\varepsilon\delta\mu). \quad (1.5.10)$$

როცა $\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_{i+1}(t_0)]$, მაშინ $\tau_j(\xi)\geq t_0$, $j=1,...,i$, $\tau_j(\xi)\leq t_0$, $j=i+1,...,p$, $\tau_j(\xi)\leq\widetilde{t}_0$, $j=p+1,...,s$. ამიტომ

$$|\Delta x(\tau_j(\xi))|\leq O(\varepsilon\delta\mu),\quad j=1,...,i,\quad |\Delta x(\tau_j(\xi))|=\varepsilon\,|\delta\varphi(\tau_j(\xi))|,\quad j=p+1,...,s.$$

ყოველი $i=0,...,p-1$, $\gamma_{i+1}(t_0)-\gamma_i(t_0)\to 0$, როცა $\varepsilon\to 0$. მაშასადამე

$$\beta_{12}(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \quad (1.5.11)$$

შემდეგ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_{i+1}(t_0)]}|f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),...,\widetilde{x}(\tau_i(\xi))+\Delta x(\tau_i(\xi)),\widetilde{\varphi}(\tau_{i+1}(\xi)),...$$

$$\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)),\widetilde{u}(\theta_1(\xi))+\varepsilon\delta u(\theta_1(\xi)),...,\widetilde{u}(\theta_\nu(\xi))+\varepsilon\delta u(\theta_\nu(\xi))-f_i^++f_p^+-f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi)),...,$$

$\widetilde{x}(\tau_p(t)),\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(\xi)),...\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)),\widetilde{u}(\theta_1(\xi)),...,\widetilde{u}(\theta_\nu(\xi))|=0.$ $i=0,...,p-1$, თანაბრად $\delta\mu\in V^+$.

$Y(\xi;t)$ და $\gamma_i(t)$, $i=1,...,p$, ფუნქციათა თვისებებიდან უშუალოდ მიიღება შემდეგი ტოლ ობები

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\xi\in[\gamma_i(t_0),\gamma_{i+1}(t_0)]}|Y(\xi;t)-Y(\widetilde{t}_0+;t)|=0,\quad i=0,...,p-1,\quad \text{თანაბრად}\ t\in[\widetilde{t}_1-\delta_2,\widetilde{t}_1+\delta_2],$$

$$\gamma_{i+1}(t_0)-\gamma_i(t_0)=\varepsilon(\dot{\gamma}_{i+1}^+-\dot{\gamma}_i^+)\delta t_0+o(\varepsilon\delta\mu),\quad i=0,...,p-1,\quad \dot{\gamma}_0=1.$$

ეს პირობები $\beta_{11}(t;\varepsilon\delta\mu)$ და $\beta_{13}(t;\varepsilon\delta\mu)$ გვაძლევენ

$$\beta_{11}(t;\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon Y(\widetilde{t}_0+;t)\sum_{i=0}^{p-1}(f_i^+-f_p^+)(\dot{\gamma}_{i+1}^+-\dot{\gamma}_i^+)\delta t_0+o(t;\varepsilon\delta\mu). \quad (1.5.12)$$

$$\beta_{13}(t;\varepsilon\delta\mu)=o(t;\varepsilon\delta\mu). \quad (1.5.13)$$

(1 5 10) -დან (1.5.11) - (1.5.13) გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\beta_1(t;\varepsilon\delta\mu)=\varepsilon Y(\widetilde{t}_0+;t)[\sum_{i=0}^{p}(\dot{\gamma}_{i+1}^+-\dot{\gamma}_i^+)f_i^++f_p^+]\delta t_0-$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \quad (1.5.14)$$

შემდეგ

$$\beta_2(t;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}}Y(\xi;t)[f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),...,\widetilde{x}(\tau_p(\xi))+\Delta x(\tau_p(\xi)),\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),...$$

$$...,\varphi(\tau_s(\xi)),u(\theta_1(\xi)),...,u(\theta_\nu(\xi)))-f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi)),...,\widetilde{x}(\tau_p(\xi)),\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),...,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)),$$

$$\widetilde{u}(\theta_1(\xi)),...,\widetilde{u}(\theta_\nu(\xi)))-\sum_{j=1}^{p}\widetilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))-\varepsilon\sum_{j=p+1}^{s}\widetilde{f}_{x_j}[\xi]\delta\varphi(\tau_j(\xi))-$$

$$-\varepsilon\sum_{m=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))]d\xi.$$

სტანდარტული გზით (იხ. (1.4.10)) მტკიცდება, რომ

$$|\beta_2(t;\varepsilon\delta\mu)|\le\|Y\|\left(O(\varepsilon\delta\mu)\sum_{i=1}^{p}\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)+\varepsilon c\sum_{i=p+1}^{s}\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)+\varepsilon c\sigma_0(t_0;\varepsilon\delta\mu)\right),$$

სადაც

$$\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}}\Big[\int_0^1|f_{x_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),...)-\widetilde{f}_{x_i}[t]|\,d\xi\Big]dt,$$

$$\sigma_0(t_0;\varepsilon\delta\mu)=\int_{\gamma_p(t_0)}^{\gamma_{p+1}}\sum_{m=1}^{\nu}\Big[\int_0^1|f_{u_m}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),...)-\widetilde{f}_{u_m}[t]|\,d\xi\Big]dt.$$

როცა $t\in[\gamma_p(t_0),\gamma_{p+1}]$, მაშინ $\tau_j(t)\ge t_0$, $j=1,...,p$. ამიტომ (იხ. (1.5.1)), $\Delta x(\tau_j(t))=$ $=\Delta y(\tau_j(t))$.

მაშასადამე

$$\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)\le\int_{t_0}^{\gamma_{p+1}}\Big[\int_0^1|f_{x_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta y(\tau_1(t)),...,\widetilde{x}(\tau_p(t))+\xi\Delta y(\tau_p(t)),\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t))+$$

$$+\xi\varepsilon\delta\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),...,\widetilde{\varphi}(\tau_s(t))+\xi\varepsilon\delta\varphi(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t))+\xi\varepsilon\delta u(\theta_1(t)),...,\widetilde{u}(\theta_\nu(t))+\xi\varepsilon\delta u(\theta_\nu(t)))-$$

$$-\widetilde{f}_{x_i}[t]|\,d\xi\Big]dt,$$

$$\sigma_0(t_0;\varepsilon\delta\mu)\le\int_{t_0}^{\gamma_{p+1}}\sum_{m=1}^{v}\Big[\int_0^1|\,f_{u_m}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta y(\tau_1(t)),\ldots\widetilde{x}(\tau_p(t))+\xi\Delta y(\tau_p(t)),\widetilde{\varphi}(\tau_{p+1}(t))+$$

$$+\xi\varepsilon\delta\varphi(\tau_{p+1}(\xi)),\ldots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(t))+\xi\varepsilon\delta\varphi(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t))+\xi\varepsilon\delta u(\theta_1(t)),\ldots,\widetilde{u}(\theta_v(t))+\xi\varepsilon\delta u(\theta_v(t)))-$$

$$-\widetilde{f}_{u_m}[t]\,|\,d\xi\Big]dt.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_i(t_0;\varepsilon\delta\mu)=0,\quad i=1,\ldots,s,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_0(t_0;\varepsilon\delta\mu)=0,\quad \text{თანაბრად}\quad \delta\mu\in V^+$$

ამრიგად

$$\beta_2(t;\varepsilon\delta\mu)=o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (1.5.15)$$

ახლა გარდავქმნათ $\beta_3(t;\varepsilon\delta\mu)$, გვექნება

$$\beta_3(t;\varepsilon\delta\mu)=\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\big[f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_{i-1}(\xi))+\Delta x(\tau_{i-1}(\xi)),\widetilde{\varphi}(\tau_i(\xi)),\ldots$$

$$\ldots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\xi)),u(\xi))-\widetilde{f}[\xi]\big]d\xi-\sum_{i=p+1}^{s}\Big[\sum_{j=1}^{i-1}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi+$$

$$+\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+\varepsilon\sum_{j=i+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\delta\varphi(\tau_j(\xi))d\xi-\varepsilon\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_u[\xi]\delta u(\xi)d\xi\Big].$$

თეორემა 1.2.5 საფუძველზე გვექნება

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\xi\in[\gamma_i,\gamma_i(t_0)]}|\,f(\xi,\widetilde{x}(\tau_1(\xi))+\Delta x(\tau_1(\xi)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_{i-1}(\xi))+\Delta x(\tau_{i-1}(\xi)),\varphi(\tau_i(\xi)),\ldots$$

$$\ldots,\varphi(\tau_s(\xi)),u(\theta_1(\xi)),\ldots,u(\theta_v(\xi))-\widetilde{f}[\xi]+f_i^+\,|=0,\quad i=p+1,\ldots,s,\quad \text{თანაბრად}\quad \delta\mu\in V^+.$$

შემდეგ

$$|\,\Delta x(\tau_j(\xi))\,|\le O(\varepsilon\delta\mu),\quad j=1,\ldots,i-1,\qquad \xi\in[\gamma_i,\gamma_i(t_0)],$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\xi\in[\gamma_i,\gamma_i(t_0)]}|\,Y(\xi;t)-Y(\gamma_i;t)\,|=0,\quad i=p+1,\ldots,s,\qquad t\in[\widetilde{t}_1-\delta_2,\widetilde{t}_1+\delta_2].$$

ზემოთმოყვანილ ტოლობათა თანახმად

$$\beta_3(t;\varepsilon\delta\mu)=-\varepsilon\sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i+;t)f_i^+\dot{\gamma}_i^+\delta t_0-\sum_{j=p+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \qquad (1.5.16)$$

ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება (იხ. (1.4.10)), რომ

$$\beta_i(t;\varepsilon\delta\mu) = o(t;\varepsilon\delta\mu), \quad i = 4,5. \tag{1.5.17}$$

(1.5.9) -დან (1.5.14) - (1.5.17) გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$h_1(t;t_0,\varepsilon\delta\mu) = \varepsilon\Big\{Y(\widetilde{t}_0+;t)\Big[\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{+}-\hat{\gamma}_i^{+})f_i^{+}+f_p^{+}\Big]-\sum_{i=p+1}^{s}Y(\gamma_i;t)\dot{\gamma}_i^{+}f_i^{+}\Big\}\delta t_0 -$$

$$-\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p}\int_{\gamma_i(t_0)}^{\gamma_{i+1}(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_j}[\xi]\Delta x(\tau_j(\xi))d\xi-\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i(t_0)}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{x_i}[\xi]\Delta x(\tau_i(\xi))d\xi+o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{1.5.18}$$

ბოლოს შევნიშნავთ, რომ

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi = \varepsilon\int_{\widetilde{t}_0}^{t}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi + o(t;\varepsilon\delta\mu). \tag{1.5.19}$$

(1.5.4) ტოლობიდან, (1.5.5) - (1.5.8) , (1.5.18) და (1.5.19) თანახმად, მიიღება (1.2.2) ფორმულა, სადაც $\delta x(t;\delta\mu)$ აქვს (1.2 5) სახე ■

§1.6. ამონახსნის ვარიაციის ფორმულები განტოლებისათვის უწყვეტი საწყისი პირობით

1.6.1. *ძირითადი თეორემების ფორმულირება.* ყოველ $\sigma = (t_0,\varphi,u) \in B_1 = J\times\Phi\times\Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{x}(\eta_j(t)) + f(t,x(\tau_1(t)),\ldots,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),\ldots,u(\theta_\nu(t))), \tag{1.6.1}$$

უწყვეტი საწყისი პირობით

$$x(t) = \varphi(t), \quad t\in[\tau,t_0]. \tag{1 6.2}$$

განსაზღვრება 1.6.1. $\sigma = (t_0,x,u)\in B_1$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $x(t;\sigma)$, $t\in$ $\in[\tau,t_1]$ ეწოდება $x(t;\mu)$, $t\in[\tau;t_1]$, $\mu = (t_0,\varphi(t_0),\varphi,u)$ ამონახსნს (იხ. *განსაზღვრება 1.1.2*).

შემოვიღოთ ვარიაციათა სიმრავლე

$$V_1 = \{\delta\sigma = (\delta t_0,\delta\varphi,\delta u)\in E_\sigma = R\times E_\varphi\times E_u : |\delta t_0|\le c,\ \ \|\delta\varphi\|\le c,\ \ \|\delta u\|\le c\}, \tag{1.6.3}$$

ვთქვათ $\widetilde{x}(t)$ არის $\widetilde{\sigma} = (t_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{u})\in B_1$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $[\tau,\widetilde{t}_1]$, $\widetilde{t}_1 < b$ *ლემა 1.1.2*-ის თანახმად არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_1 > 0$ და $\delta_1 > 0$, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\sigma)\in[0,\varepsilon_1]\times V_1$ ელემენტი $\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma\in B_1$ და მას შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)$, რომელიც განსაზღვრულია $[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]\subset J_1$ ინტერვალზე.

$x(t;\widetilde{\sigma})$ წარმოადგენს $\widetilde{x}(t)$ ამონახსნის გაგრძელებას $[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]$ ინტერვალზე. ამიტომ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $\widetilde{x}(t)$ განსაზღვრულია $[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]$ ინტერვალზე.

განვსაზღვროთ $\widetilde{x}(t)=x(t;\widetilde{\sigma})$ ამონახსნის ნაზრდი:

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\sigma)=x(t;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)-\widetilde{x}(t),\quad \forall(t,\varepsilon,\delta\sigma)\in[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_1]\times[0,\varepsilon_1]\times V_1 \tag{1.6.4}$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.6.1. ვთქვათ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\widetilde{f}(\omega)=f^-,\quad \omega\in(a,\widetilde{t}_0]\times O^s,\quad \omega_0=(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi}(\tau_1(\widetilde{t}_0)),\ldots,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\widetilde{t}_0))).$$

მაშინ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2>0$, $\delta_2>0$, ისეთი რომ ყოველი

$$(t,\varepsilon,\delta\sigma)\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times V_1^-,\quad V_1^-=\{\delta\sigma\in V_1:\delta t_0\ge 0\},$$

სამართლიანია ტოლობა

$$\Delta x(t;\varepsilon\delta\sigma)=\varepsilon\delta x(t;\delta\sigma)+o(t;\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.6.5}$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta\sigma)=Y(\widetilde{t}_0-;t)\big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^-\big]\delta t_0+\beta(t;\delta\sigma), \tag{1.6.6}$$

$$\beta(t;\delta\sigma)=\Phi(\widetilde{t}_0;t)\delta\varphi(\widetilde{t}_0)+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\rho_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_i(\xi);t)A_j(\rho_i(\xi))\dot{\rho}_i(\xi)\dot{\delta\varphi}(\xi)d\xi+\sum_{m=1}^{k}\int_{\widetilde{t}_0}^{t}Y(\xi;t)\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi;$$

$\Phi(\xi;t)$, $Y(\xi;t)$ მატრიცული ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.1.13) სისტემას და (1.1.14) პირობას.

თ ე ო რ ე მ ა 1.6.2. ვთქვათ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\widetilde{f}(\omega)=f^+,\quad \omega\in[\widetilde{t}_0,b)\times O^s.$$

მაშინ ყოველი $s_0\in(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1)$, არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2>0$, $\delta_2>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t,\varepsilon,\delta\sigma)\in[s_0,\widetilde{t}_1+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times V_1^+$, $V_1^+=\{\delta\sigma\in V_1:\delta t_0\ge 0\}$, ადგილი აქვს (1.6.5) ტოლობას, სადაც $\delta x(t;\delta\sigma)$ აქვს სახე

$$\delta x(t;\delta\sigma)=Y(\widetilde{t}_0+;t)\big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^+\big]\delta t_0+\beta(t;\delta\sigma), \tag{1.6.7}$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.6.3. ვთქვათ შესრულებულია *თეორემა 1.6.1* და *1.6.2* მოთხოვნები და ვთქვათ გარდა ამისა შესრულებულია პირობები:

$$\widetilde{t}_0 \notin I(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1), \quad f^- = f^+ = f .$$

მაშინ ყოველი $s_0 \in (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1)$ არსებობს რიცხვები $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_2 > 0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $(t, \varepsilon, \delta\sigma) \in [s_0, \widetilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times V_1$ ადგილი აქვს (1.6.5) ტოლობას, სადაც $\delta x(t;\delta\sigma)$ აქვს სახე

$$\delta x(t;\delta\sigma) = Y(\widetilde{t}_0;t)\Big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) - f\Big]\delta t_0 + \beta(t;\delta\sigma).$$

1.6.2. *ზოგიერთი კომენტარი.* ქვემოთმოყვანილი ჩამონათვალი უმეტესად შეეხება *თეორემა 1.6.1,* თუმცა იგივე შეიძლება ითქვას დანარჩენი თეორემების მიმართაც.

1.6.1) *თეორემა 1.6.1* მოთხოვნა შესრულებულია, თუ $\widetilde{u}(t)$ ფუნქცია უბან-უბან უწყვეტია, ხოლო f ფუნქციაზე მოთხოვნილ პირობებში t-ს მიმართ ზომადობა შეცვლილია უწყვეტობით. *თეორემა 1.6.3*-ში პირველი პირობა უზრუნველყოფს $Y(\xi;t)$ ფუნქციის უწყვეტობას $t = \widetilde{t}_0$ წერტილში, როცა $\xi \in [\widetilde{t}_0, t]$. ამიტომ ეს თეორემა წარმოადგენს *თეორემა 1.6.1* და *1.6.2* უშუალო შედეგს. რაც შეეხება *თეორემა 1.6.3* მე-2 მოთხოვნას იგი შესრულებულია, თუ $\widetilde{u}(\theta_i(t))$, $i = 1,\dots,\nu$ ფუნქციები უწყვეტია $t = \widetilde{t}_0$ წერტილში, ხოლო f აკმაყოფილებს ზემოთაღნიშნულ პირობებს.

1.6.2) *თეორემა 1.6.1*-ში ვარიაციის ფორმულა დამტკიცებულია $[\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1 + \delta_2]$ ინტერვალზე, ხოლო *თეორემა 1.6.2* და *1.6.3*-ინტერვალზე $[s_0, \widetilde{t}_1 + \delta_2]$, სადაც $s_0 > \widetilde{t}_0$ და იგი რაგინდ ახლო შეიძლება იყოს $\widetilde{t}_0$. ეს გამოწვეულია $Y(\xi;t)$ ფუნქციის ξ-ს მიმართ წყვეტილობის გამო.

1.6.3) *თეორემა 1.2.1*-გან განსხვავებით *თეორემა 1.6.1* მტკიცდება გაცილებით ნაკლებ მოთხოვნებში.

1.6.4) *თეორემა 1.2.1*-დან გამომდინარეობს *თეორემა 1.6.1*-ის ლოკალური ვარიანტი მართლაც, ვთქვათ (1.1.12) საწყისი პირობაში $x_0 = \varphi(t_0)$ ე.ი. (1.1.12) საწყისი პირობა უწყვეტია. ცხადია, რომ

$$\widetilde{x}_0 = \widetilde{\varphi}(t_0), \quad i = 1,\dots,p, \quad f_0^- = \dots = f_p^-, \quad f_i^- = 0, \quad i = p+1,\dots,s.$$

გამოვთვალოთ δx_0 :

$$\varphi(\widetilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0)+\varepsilon\delta\varphi(\widetilde{t}_0+\varepsilon\delta t_0)=\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)+\varepsilon\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\delta t_0+\varepsilon\delta\varphi(\widetilde{t}_0)+o(\varepsilon\delta\sigma)=$$

$$=\widetilde{x}_0+\varepsilon[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\delta t_0+\delta\varphi(\widetilde{t}_0)]+o(\varepsilon\delta\sigma).$$

ამრიკად $\delta x_0=\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\delta t_0+\delta\varphi(\widetilde{t}_0)$. თუ ყოველივე ზემოთმიღებულს გავითვალისწინებთ (1.2.3) ფორმულაში, მაშინ $[\widetilde{t}_1-\delta_2,\widetilde{t}_1+\delta_2]$ ინტერვალზე მივიღებთ (1.6.6) ფორმულას.

§1.7. ამონახსნის ნაზრდის შეფასება V_1^- და V_1^+ ვარიაციათა სიმრავლეების მიმართ

ყოველ $\sigma=(t_0,\varphi,u)\in B_1$ ელემენტს შევუსაბამოთ ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{y}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)h(t_0,\dot{\varphi},\dot{y})(\eta_j(t))+f(t_0,\varphi,y,u)(t), \tag{1.7.1}$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0)=\varphi(t_0),$$

(იხ. (1.1.3)).

ვთქვათ $\widetilde{y}(t)$ არის $\widetilde{\sigma}\in V_1$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. არსებობს ისეთი $\varepsilon_1>0,\ \delta_1>0$, რომ ნებისმიერი $(\varepsilon,\delta\sigma)\in[0,\varepsilon_1]\times V_1$ ელემენტი $\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma\in B_1$ და მას შეესაბამება ამონახსნი $y(t;\hat{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)$ რომელიც განსაზღვრულია $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\subset J_1$ ინტერვალზე (იხ. *ლემა 1.1.1*).

ერთადერთობის გამო $y(t;\widetilde{\sigma})$ ამონახსნი $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე წარმოადგენს $\widetilde{y}(t)$ ამონახსნის გაგრძელებას, ამიტომ ჩვენ მომავალში ვიგულისხმებთ, რომ $\widetilde{y}(t)$ ამონახსნი განსაზღვრულია $[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]$ ინტერვალზე.

განვსაზღვროთ $\widetilde{y}(t)=y(t;\widetilde{\sigma})$ ამონახსნის ნაზრდი:

$$\Delta y(t)=\Delta y(t;\varepsilon\delta\sigma)=y(t;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)-\widetilde{y}(t),$$

$$\forall(t;\varepsilon,\delta\sigma)\in[r_1-\delta_1,r_2+\delta_1]\in[0,\varepsilon_1]\times V_1 \tag{1.7.2}$$

ლ ე მ ა 1.7.1. ვთქვათ შესრულებულია *თეორემა 1.6.1* პირობა. მაშინ არსებობს $\varepsilon_2>0$, და $\delta_2>0$, რიცხვები ისეთი რომ, ყოველი $(\varepsilon,\delta\sigma)\in[0,\varepsilon_2]\times V_1^-$ სამართლიანია უტოლობა

$$\max_{t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]}|\Delta y(t)|\le O(\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.3}$$

მასთან

$$\Delta y(\widetilde{t}_0)=\varepsilon\left\{\delta\varphi(\widetilde{t}_0)+\left[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^-\right]\delta t_0\right\}+o(\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.4}$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$\begin{cases} I_1=\left\{i\in\{1,\dots,s\}:\tau_i(\widetilde{t}_0)<\widetilde{t}_0,\gamma_i(\widetilde{t}_0)>r_2\right\},\\ I_2=\left\{i\in\{1,\dots,s\}:\tau_i(\widetilde{t}_0)<\widetilde{t}_0,\gamma_i(\widetilde{t}_0)\le r_2\right\},\\ I_3=\left\{i\in\{1,\dots,s\}:\tau_i(\widetilde{t}_0)=\widetilde{t}_0\right\},\\ I_4=\left\{i\in\{1,\dots,s\}:\rho_i(\widetilde{t}_0)>r_2\right\}. \end{cases} \tag{1.7.5}$$

ვთქვათ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ და $\delta_2\in(0,\delta_1]$ რიცხვები იმდენად მცირეა, რომ ყოველი $(\varepsilon,\delta\sigma)\in[0,\varepsilon_2]\times V_1^-$ შესრულებულია შემდეგი თანაფრდობანი

$$\begin{cases}\gamma_i(t_0)>r_2+\delta_2, i\in I_1;\tau_i(\widetilde{t}_0)<t_0, i\in I_2;\eta_j(\widetilde{t}_0)<t_0, j=1,\dots,k;\\ \eta_j(r_2+\delta_2)<t_0, j\in I_4\end{cases} \tag{1.7.6}$$

$\Delta y(t)$ ფუნქცია $[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta y}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)h(\widetilde{t}_0,\varepsilon\dot{\delta\varphi},\dot{\Delta y})(\eta_j(t))+\sum_{i=1}^{2}W_i(t;\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.7}$$

სადაც

$$\begin{cases} W_1(t;\varepsilon\delta\sigma)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)[h(t_0,\dot{\varphi},\dot{\widetilde{y}}+\dot{\Delta y})(\eta_j(t))-\\ -h(\widetilde{t}_0,\dot{\varphi},\dot{\widetilde{y}}+\dot{\Delta y})(\eta_j(t))]=\sum_{j=1}^{k}W_{1j}(t;\varepsilon\delta\sigma),\\ W_2(t;\varepsilon\delta\sigma)=f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(t)-f(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y},\widetilde{u})(t). \end{cases} \tag{1.7.8}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ (1.7.7) განტოლება $[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$ ინტერვალზე შეიძლება განხილული იქნას როგორც წრფივი ნეიტრალური ტიპის განტოლება

$$\dot{z}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{z}(\eta_j(t))+\sum_{i=1}^{2}W_i(t;\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.9}$$

საწყისი პირობით

$$\dot{z}(t)=\varepsilon\dot{\delta\varphi}(t),\quad t\in[\tau,\widetilde{t}_0],\quad z(\widetilde{t}_0)=\Delta y(\widetilde{t}_0).$$

ერთადერთობის გამო $z(t)=\Delta y(t),\ t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$. კოშის ფორმულის თანახმად (1.7.9) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ასე

$$\Delta y(t)=z(t)=\Delta y(\widetilde{t}_0)+\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\delta\varphi}(\xi)\dot{\rho}_j(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{\widetilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)\Big[\sum_{i=1}^{2} W_i(\xi;\varepsilon\delta\sigma)d\xi. \qquad (1.7.10)$$

(1.7.10) გამომდინარეობს

$$|\Delta y(t)| \le |\Delta y(\widetilde{t}_0)| + \varepsilon c_0 \, \| y \| \Big(\sum_{j=1}^{k} \| A_j \| (\rho_i(\widetilde{t}_0) - \widetilde{t}_0)\Big) + \| Y \| \Big\{\sum_{j=1}^{k} \int_{\widetilde{t}_0}^{r_2+\delta_2} | W_{1j}(\xi;\varepsilon\delta\sigma) d\xi +$$

$$+\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} | W_2(\xi;\varepsilon\delta\sigma)| d\xi \Big\} = |\Delta y(\widetilde{t}_0)| + O(\varepsilon\delta\sigma) + \| Y \| \Big\{\sum_{j=1}^{k} W_{1j}(\varepsilon\delta\sigma) + W_{2j}(t,\widetilde{t}_0 \varepsilon\delta\sigma), \qquad (1.7.11)$$

სადაც

$$\| Y \| = \sup\{ | Y(\xi;t)| : (\xi,t) \in \Pi \}, \qquad \| A_j \| = \sup\{ | A_j(t)| : t \in J \}, \qquad c_0 = c\sum_{i=1}^{m} \| \delta\varphi_i \|,$$

(იხ. (1.6.4)).

დავამტკიცოთ (1.7.4) ტოლობა. ცხადია, რომ

$$\Delta y(\widetilde{t}_0) = y(\widetilde{t}_0;\widetilde{\sigma} + \varepsilon\delta\sigma) - \widetilde{y}(\widetilde{t}_0) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} \Big[\sum_{j=1}^{k} A_j(t)\dot{\varphi}(\eta_j(t)) +$$

$$+ f(t_0,\varphi,\widetilde{y} + \Delta y, u)(t)\Big]dt - \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0). \qquad (1.7.12)$$

შემდეგ

$$\varphi(t_0) - \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{\varphi}(t_0) + \varepsilon\delta\varphi(t_0) - \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0) = \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} \dot{\widetilde{\varphi}}(t)dt + \varepsilon\delta\varphi(\widetilde{t}_0) + \varepsilon[\delta\varphi(t_0) - \delta\varphi(\widetilde{t}_0)] =$$

$$= \varepsilon[\dot{\widetilde{\varphi}}(t_0)\delta t_0 + \delta\varphi(\widetilde{t}_0)] + o(\varepsilon\delta\sigma). \qquad (1.7.13)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\lim_{(\varepsilon,t)\to(0,\widetilde{t}_0-)} h(t_0,\varphi,\widetilde{y} + \Delta y)(\tau_i(t)) = \widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0)), \qquad i = 1,\dots,s$$

(იხ. (1.1.3) (1.1.4)).

ამრიგად

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{ | f(t_0,\varphi,\widetilde{y} + \Delta y, u)(t) - f^- | : t \in [t_0,\widetilde{t}_0] \} = 0 \qquad (1.7.14)$$

ეს უკანასკნელი საშუალებას გვაძლევს დავწეროთ შემდეგი ტოლობა

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} f(t_0,\varphi,\widetilde{y} + \Delta y, u)(t)dt = -\varepsilon f^- \delta t_0 + \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} [f(t_0,\varphi,\widetilde{y} + \Delta y, u)(t) - f^-]\delta t =$$

$$-\varepsilon f^- \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\sigma). \qquad (1.7.15)$$

ნათელია, რომ

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} A_j(t)\dot{\varphi}(\eta_j(t))dt = -\varepsilon A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))\delta t_0 + o(\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.16}$$

(1.7.12) -დან, (1.7.13), (1.7.15), (1.7.10) გათვალისწინებით, მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა (1.7.4).

დავამტკიცოთ (1.7.3) უტოლობა. ამიტომ შევაფასოთ $W_{1j}(\varepsilon\delta\sigma)$, $j=1,\dots,k$ გამოსახულებები. გვაქვს

$$W_{1j}(\varepsilon\delta\sigma) = \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\eta_j(r_2+\delta_2)} | A_j(\rho_j(t)) \,|\, h(t_0,\dot{\varphi},\dot{y})(t) - h(\widetilde{t}_0,\dot{\varphi},\dot{y})(t) \,|\, \dot{\rho}_j(t)dt \le$$

$$\le \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} | A_j(\rho_j(t)) \| \dot{y}(t;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)(t) - \dot{\varphi}(t) | \le \| A_j \| \dot{\rho}_j \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} | \dot{y}(t;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma) | dt + o(\varepsilon\delta\sigma),$$

სადაც $\dot{\rho}_j = \sup\{\dot{\rho}_j(t) : t \in J\}$, (იხ. (1.7.5) (1.7.6)).

შევნიშნოთ, რომ

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} | \dot{y}(t;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma) | dt \le \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} \Big[\sum_{j=1}^{k} | A_j(t) \| \dot{\varphi}(\eta_j(t)) | + f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(t) |\Big]dt = O(\varepsilon\delta\sigma),$$

(იხ. (1.6.3) (1.7.14)).

ამრიგად

$$W_{1j}(\varepsilon\delta\sigma) = O(\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.17}$$

ახლა შევაფასოდ $W_2(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)$. გვექნება

$$W_2(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma) \le \int_{\widetilde{t}_0}^{t} L_{K_1N_1}(\xi)\Big[\sum_{i=1}^{s} | h(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y)(\tau_i(\xi)) - h(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y})(\tau_i(\xi)) | + \varepsilon \,|\, \delta u(\xi) |\Big]d\xi \le$$

$$\le O(\varepsilon\delta\sigma) + \varepsilon\sum_{i\in I_1} L_{K_1N_1}(\xi)\delta\varphi(\tau_i(\xi))d\xi + \sum_{i\in I_2}\int_{\tau_i(t_0)}^{\tau_i(t)} \chi_J(\gamma_i(\xi))L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi)) \,|\, h(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y)(\xi) -$$

$$- h(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y})(\xi) \,|\, \dot{\gamma}_i(\xi)d\xi + \sum_{i\in I_3}\int_{\widetilde{t}_0}^{t} \chi_J(\gamma_i(\xi))L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi) \,|\, \Delta y(\xi) | d\xi \le O(\varepsilon\delta\sigma) +$$

$$+ \sum_{i\in I_2}\beta_i[\tau_i(\widetilde{t}_0);\widetilde{t}_0] + \sum_{i\in I_2\cup I_3}\int_{\widetilde{t}_0}^{t} \chi_J(\gamma_i(\xi))L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi) \,|\, \Delta y(\xi) | d\xi \le O(\varepsilon\delta\sigma) +$$

$$+\sum_{i\in I_2}\beta_i[\tau_i(\widetilde{t}_0);\widetilde{t}_0]+\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|d\xi,$$

(იხ. (1.3.19)).

სადაც

$$\beta[\tau_i(\widetilde{t}_0);\widetilde{t}_0]=\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\,|\,h(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y)(\xi)-h(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y})(\xi)\,|\,\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi. \qquad (1.7.18)$$

თუ $I_k\neq\varnothing$ მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ $\sum_{i\in I_k}\alpha_k=0.$ ვთქვათ $I_2\neq\varnothing$ და $i\in I_2$. გვექნება

$$\beta[\tau_i(\widetilde{t}_0);\widetilde{t}_0]=\varepsilon\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}(\xi)\,|\,\delta\varphi(\xi)d\xi+\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\,|\,y(t;\widetilde{\sigma}+$$

$$+\varepsilon\delta\sigma)(\xi)-\widetilde{\varphi}(t)\,|\,d\xi.$$

როცა $t\in[t_0,\widetilde{t}_0]$ მივიღებთ

$$|\,y(t;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)-\widetilde{\varphi}(t)\,|=|\,\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{y}(\xi;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)d\xi-\widetilde{\varphi}(t)\,|\leq\varepsilon\,|\,\delta\varphi(t_0)\,|+$$

$$+\int_{t_0}^{\widetilde{t}}|\,\dot{\widetilde{\varphi}}(t)\,|\,dt+\int_{t_0}^{\widetilde{t}}|\,\dot{y}(\xi;\widetilde{\sigma}+\varepsilon\delta\sigma)\,|d\xi=O(\varepsilon\delta\sigma). \qquad (1.7.19)$$

მაშასადამე

$$\beta[\tau_i(\widetilde{t}_0);\widetilde{t}_0]=O(\varepsilon\delta\sigma).$$

ამრიგად

$$W_2(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)\leq O(\varepsilon\delta\sigma)+\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi. \qquad (1.7.20)$$

(1.7.11) -დან, (1.7.4), (1.7.17) და (1.7.20) გათვალისწინებით, გამომდინარეობს

$$|\,\Delta y(t)\,|\leq O(\varepsilon\delta\sigma)+\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi,\qquad t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2].$$

აქედან *გრონუოლის ლემის* თანახმად მივიღებთ (1.7.3) ■

ლ ე მ ა 1.7.2. ვთქვათ შესრულებულია *თეორემა 1.6.2* პირობა. მაშინ არსებობენ $\varepsilon_2>0$, $\delta_2>0$ რიცხვები ისეთი, რომ ყოველი $(\varepsilon,\delta\sigma)\in[0,\varepsilon_2]\times V_1^{+}$ სამართლიანია უტოლ ობა

$$\max_{t\in[t_0,r_2+\delta_2]} |\Delta y(t)| \le O(\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.21}$$

მასთან

$$\Delta y(t_0)=\varepsilon\Big\{\delta\varphi(\widetilde{t}_0)+\Big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^+\Big]\delta t_0\Big\}+o(\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.22}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ და $\delta_2\in(0,\delta_1]$ იმდენად მცირეა, რომ შესრულებულია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\eta_j(t_0)<\widetilde{t}_0,\quad j=1,\dots,k;\quad \eta_j(r)<\widetilde{t}_0,\quad j\in I_4;$$

$$t_0<\eta_j(r_2+\delta_2),\quad j\notin I_4;\quad \tau_i(t_0)<\widetilde{t}_0,\quad i\in I_2.$$

$\Delta y(t)$ ფუნქცია $[t_0,r_2+\delta_2]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta}y(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)[h(t_0,\varepsilon\dot{\delta}\varphi,\dot{\Delta}y)(\eta_j(t))+\sum_{i=2}^{3}W_i(t;\varepsilon\delta\sigma), \tag{1 7.23}$$

სადაც

$$W_3(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)[h(t_0,\dot{\widetilde{\varphi}},\dot{\widetilde{y}})(\eta_j(t))-h(\widetilde{t}_0,\dot{\widetilde{\varphi}},\dot{\widetilde{y}})(\eta_j(t))]=\sum_{i=2}^{3}W_{3j}(t;\varepsilon\delta\sigma),$$

(იხ. (1.7.8)).

(1.7.23) განტოლება $[t_0,r_2+\delta_2]$ ინტერვალზე შეიძლება განხილული იქნას როგრც წრფივი ნეიტრალური ტიპის განტოლება

$$\dot{z}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{z}(\eta_j(t))+\sum_{i=2}^{3}W_i(t;\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.24}$$

საწყისი პირობით

$$\dot{z}(t)=\varepsilon\dot{\delta}\varphi(t),\quad \tau\in[\tau,t_0),\quad z(t_0)=\Delta y(t_0).$$

ერთადერთობის გამო $z(t)=\Delta y(t)$, $t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2]$. კოშის ფორმულის თანახმად (1.7.24) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ასე

$$\Delta y(t)=\Delta y(t_0)+\varepsilon\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(t_0)}^{t_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\delta}\varphi(\xi)\dot{\rho}_j(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)\sum_{i=2}^{3}W_i(t;\varepsilon\delta\sigma).$$

აქედან

$$|\Delta y(t)|\le|\Delta y(t_0)|+\varepsilon c_0\,\|Y\|\sum_{j=1}^{k}\|A_j\|(\rho_j(t_0)-t_0)+\|Y\|\Big\{\sum_{j=1}^{k}\int_{t_0}^{r_2+\delta_2}|W_{3j}(\xi;\varepsilon\delta\sigma)|\,d\xi+$$

$$\int_{t_0}^{t} | W_2(\varepsilon\delta\sigma) \,|\, d\xi \Big\} = | \Delta y(t_0) | + O(\varepsilon\delta\sigma) + \| Y \| \Big\{ \sum_{j=1}^{k} W_{3j}(\varepsilon\delta\sigma) + W_2(t; t_0, \varepsilon\delta\sigma) \Big\}. \qquad (1.7.25)$$

დავამტკიცოდ ტოლობა (1.7.22). ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\Delta y(t_0) = y(t_0; \widetilde{\sigma} + \varepsilon\delta\sigma) - \widetilde{y}(t_0) = \varphi(t_0) - \Big\{ \widetilde{\varphi}(t_0) + \int_{\widetilde{t}_0}^{t} \Big[\sum_{j=1}^{k} A_j(t) \dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(t)) +$$

$$+ f(\widetilde{t}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{y}, \widetilde{u})(t) \Big] dt \Big\}. \qquad (1.7.26)$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{t \to \widetilde{t}_0} h(\widetilde{t}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{y})(\tau_i(t)) = \widetilde{\varphi}(\tau_i(\widetilde{t}_0)), \qquad i = 1, \ldots, s.$$

ამიტომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \{ | f(\widetilde{t}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{y}, \widetilde{u})(t) - f^+ | : t \in [t_0, \widetilde{t}_0] \} = 0.$$

მაშასადამე

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} f(\widetilde{t}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{y}, \widetilde{u})(t) dt = \varepsilon f^+ \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\sigma), \qquad (1.7.27)$$

(იხ. (1.7.15)).

ნათელია, რომ

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} A_j(t) \dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(t)) dt = \varepsilon A_j(\widetilde{t}_0) \dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) \delta t_0 + o(\varepsilon\delta\sigma). \qquad (1.7.28)$$

(1.7.26) -დან, (1.7.13), (1.7.27) და (1.7.28) გათვალისწინებით, მივიღებთ ტოლობას (1.7.22).

ახლა გადავიდეთ (1.7.21) უტოლობის დამტკიცებაზე. ანალოგიურად (იხ. (1.7.17)). შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$W_{3j}(\varepsilon\delta\sigma) = O(\varepsilon\delta\sigma). \qquad (1.7.29)$$

$W_2(t; t_0, \varepsilon\delta\sigma)$ გამოსახულებისათვის გვექნება

$$W_2(t; t_0, \varepsilon\delta\sigma) \le \int_{t_0}^{t} L_{K_1 N_1}(t) \Big[\sum_{i=1}^{s} | h(t_0, \varphi, \widetilde{y} + \Delta y)(\tau_i(\xi)) - h(\widetilde{t}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{y})(\tau_i(\xi)) | +$$

$$+ \varepsilon \, | \delta u(\xi) | \Big] d\xi \le O(\varepsilon\delta\sigma) + \sum_{i \notin I_1} \int_{t_0}^{t} L_{K_1 N_1}(\xi) \, | \delta\varphi(\tau_i(\xi)) | \, d\xi +$$

$$+ \sum_{i \in I_1 \in I_2} \int_{\tau_i(t_0)}^{t} \chi(\gamma_i(\xi)) L_{K_1 N_1}(\gamma_i(\xi)) \dot{\gamma}_i(\xi) \, | h(t_0, \varphi, \widetilde{y} + \Delta y)(\xi) - h(\widetilde{t}_0, \varphi, \widetilde{y})(\xi) | \, d\xi \le$$

$$\leq O(\varepsilon\delta\sigma)+\sum_{i\in I_2\cup I_3}\beta[\tau_i(t_0);t_0]+\int_{t_0}^{t}L(\xi)\,|\,\Delta y(\xi)\,|\,d\xi,$$

(იხ. (1.7.18)).

ვთქვათ $I_2\neq\varnothing$ და $i\in I_2$

$$\beta[\tau_i(t_0);t_0]=\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{\widetilde{t}_0}L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\dot{\gamma}_i(\xi)\,|\,\delta\varphi(\xi)\,|\,d\xi+\int_{\widetilde{t}_0}^{t}L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\,|\,\varphi(\xi)-\widetilde{y}(\xi)\,|\,\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi.$$

როცა $t\in[\widetilde{t}_0,t_0]$ მივიღებთ

$$|\,\varphi(t)-\widetilde{y}(t)\,|=|\,\widetilde{\varphi}(t)+\varepsilon\delta\varphi(t)-\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)-\int_{\widetilde{t}_0}^{t}\dot{\widetilde{y}}(\xi)d\xi\,|\leq\varepsilon\,\|\,\delta\varphi\,\|+\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0}|\,\dot{\widetilde{y}}(t)\,|\,dt+$$

$$+\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0}|\,\dot{\widetilde{y}}(\xi)\,|\,d\xi=O(\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.30}$$

(იხ. (1 7.27) (1.7 28)).

მაშასადამე

$$\beta[\tau_i(t_0);t_0]\leq O(\varepsilon\delta\sigma).$$

ვთქვათ $I_3\neq\varnothing$ და $i\in I_3$,

$$\beta[\tau_i(t_0);t_0]=\int_{\tau_i(t_0)}^{t_0}L_{K_1N_1}(\gamma_i(\xi))\,|\,\varphi(\xi)-\widetilde{y}(\xi)\,|\,\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi\leq O(\varepsilon\delta\sigma).$$

ამრიგად

$$W_2(t;t_0,\varepsilon\delta\sigma)\leq O(\varepsilon\delta\sigma)+\int_{t_0}^{t}L(\xi)\,|\Delta y(\xi)\,|\,d\xi. \tag{1 7.31}$$

(1.7.25) -დან, (1.7.22), (1.7.29) და (1 7.31) გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$|\,\Delta y(t)\,|\leq O(\varepsilon\delta\sigma)+\int_{t_0}^{t}L(\xi)\,|\Delta y(\xi)\,|\,d\xi,\qquad t\in[\widetilde{t}_0,r_2+\delta_2].$$

აქედან *გრონოულის ლემის* თანახმად მივიღებთ (1.7.21) ■

§1.8. თეორემა 1.6.1 დამტკიცება.

ვთქვათ *ლემა 1.1.1*-ში $r_1 = \widetilde{t}_0$, $r_2 = \widetilde{t}_1$. მაშინ *ლემა 1.1.1* და *1.1.2* თანახმად არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_1 > 0$ და $\delta_1 > 0$, რომ ყოველი $(\varepsilon, \delta\sigma) \in [0, \varepsilon_1] \times V_1^-$ ამონახსნი $y(t; \widetilde{\sigma} + \varepsilon\delta\sigma)$ განსაზღვრულია $[\widetilde{t}_0 - \delta_1, \widetilde{t}_1 + \delta_1]$ ინტერვალზე, ხოლო $x(t; \widetilde{\sigma} + \varepsilon\delta\sigma)$ განსაზ ღვრულია $[\tau, \widetilde{t}_1 + \delta_1]$ ინტერვალზე. მასთან

$$x(t; \widetilde{\sigma} + \varepsilon\delta\sigma) = y(t; \widetilde{\sigma} + \varepsilon\delta\sigma), \qquad t \in [t_0, \widetilde{t}_1 + \delta_1].$$

ამრიგად

$$\Delta x(t) = \begin{cases} \varepsilon\delta\varphi(t), t \in [\tau, t_0) \\ y(t; \widetilde{\sigma} + \varepsilon\delta\sigma) - \widetilde{\varphi}(t), t \in [t_0, \widetilde{t}_0) \\ \Delta y(t), t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1 + \delta_1]. \end{cases} \tag{1.7.32}$$

ლემა 1.7.1 და (1.7.19) თანახმად არსებობს ისეთი რიცხვები $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ და $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, რომ

$$|\Delta x(t)| \le O(\varepsilon\delta\sigma), \quad \forall (t, \varepsilon, \delta\sigma) \in [\tau, \widetilde{t}_1 + \delta_2] \times [0, \varepsilon_2] \times V_1^-, \tag{1.7.33}$$

$$\Delta x(\widetilde{t}_0) = \varepsilon\{\delta\varphi(\widetilde{t}_0) + \big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) - f^-\big]\delta t_0 + o(\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.34}$$

(იხ. (1.7.32)).

$\Delta x(t)$, $t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1 + \delta_2]$, აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta x}(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j(t)\dot{\Delta x}(\tau_j(t)) + \sum_{i=1}^{s} \widetilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_j(t)) + \varepsilon\sum_{m=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_m}[t]\delta u(\theta_m(t)) + R(t; \varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.35}$$

სადაც

$$R(t; \varepsilon\delta\sigma) = f(t, \widetilde{x}(\tau_1(t)) + \Delta x(\tau_1(t)), \ldots, \widetilde{x}(\tau_s(t)) + \Delta x(\tau_s(t)), \widetilde{u}(t) + \varepsilon\delta u(t)) -$$

$$- \widetilde{f}[t] - \sum_{i=1}^{s} \widetilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_1(t)) - \varepsilon\sum_{m=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_m}[t]\delta u(\theta_m(t)). \tag{1.7.36}$$

კოშის ფორმულის თანახმად (1.1.21) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას შემდეგი ფორმულით

$$\Delta x(t) = \Phi(\widetilde{t}_0; t)\Delta x(\widetilde{t}_0) + \varepsilon\int_{\widetilde{t}_0}^{t} Y(\xi; t)\sum_{m=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi + \sum_{i=-1}^{1} h_i(t; \widetilde{t}_0, \varepsilon\delta\sigma),$$

$$t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1 + \delta_2] \tag{1.7.37}$$

სადაც

$$
\begin{cases}
h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=\sum\limits_{j=1}^{k}\int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\Delta}x(\xi)\dot{\rho}_j(\xi)d\xi,\\
h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=\sum\limits_{i=1}^{s}\int\limits_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi,\\
h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=\sum\limits_{j=1}^{k}\int\limits_{\widetilde{t}_0}^{t}Y(\xi;t)R(\xi;\varepsilon\delta\sigma)d\xi;
\end{cases}
\tag{1.7.38}
$$

$\Phi(\xi;t)$, $Y(\xi;t)$ მატრიცული ფუნქციები აკმაყოფილებენ (1.2.4) სისტემას, ხოლო $Y(\xi;t)$ აკმაყოფილებს (1.1.14) პირობას. *ლემა 1.5* და (1.1.20) ფორმულის საფუძველზე გვექნება

$$
\Phi(\widetilde{t}_0;t)\Delta x(\widetilde{t}_0)=\varepsilon\Phi(\widetilde{t}_0;t)\left\{\delta\varphi(\widetilde{t}_0)+\left[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^-\right]\delta t_0\right\}+o(t;\varepsilon\delta\sigma),\tag{1.7.39}
$$

გარდავქმნათ $h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)$. გვაქვს

$$
\int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi=\varepsilon\int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\delta\varphi}(\xi)d\xi+
$$

$$
+\int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi=\varepsilon\int\limits_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\delta\varphi}(\xi)d\xi+
$$

$$
+o(t;\varepsilon\delta\sigma)+\int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi.
$$

შემდეგ

$$
\int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi=\int\limits_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\Big[\sum_{\alpha=1}^{k}A_\alpha(\xi)\dot{\varphi}(\eta_\alpha(\xi)+
$$

$$
+f(t_0,\varphi,\widetilde{y}+\Delta y,u)(\xi)-\dot{\varphi}(\xi)\Big]d\xi=-\varepsilon Y(\rho_j-;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)\Big[\sum_{\alpha=1}^{k}A_\alpha(\widetilde{t}_0)\times
$$

$$
\times\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_\alpha(\widetilde{t}_0))+f^--\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\Big]\delta t_0+o(t;\varepsilon\delta\sigma),
$$

(იხ. (1.7.32)).

$$
h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=\varepsilon\left[Y(\widetilde{t}_0-;t)-\Phi(\widetilde{t}_0;t)\right]\left[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^-\right]\delta t_0+o(t;\varepsilon\delta\sigma),\tag{1.7.40}
$$

(იხ. (1.7.)).

$h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)$-სთვის გვექნება

$$h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=\sum_{i\in I_1\cup I_2}\Big[\varepsilon\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\delta\varphi(\xi)\dot{\gamma}_i(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\times$$

$$\times\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi\Big]=\sum_{i\in I_1\cup I_2}[\varepsilon\alpha_i(t)+\beta_i(t)].$$

ნათელია, რომ

$$\alpha_i(t)=\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi-\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi,$$

$\beta_i(t)=o(t;\varepsilon\delta\sigma)$, (იხ. (1.7.32) (1.7.33)).

მაშასადამე

$$h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=\varepsilon\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{t_0}Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+o(t;\varepsilon\delta\sigma). \qquad (1.7.41)$$

დასასრულს შევაფასოთ $h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)$. გვაქვს (იხ. (1.7.36) (1.7.38)),

$$|h_i(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)|\le\|Y\|\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1+\delta_2}\Big|\Big[\frac{d}{d\xi}f(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(t))+\xi\Delta x(\tau_s(t)),\widetilde{u}(\theta_1(t))+$$

$$+\xi\varepsilon\delta u(\theta_1(t)),\ldots,\widetilde{u}(\theta_\nu(t))+\xi\varepsilon\delta u(\theta_\nu(t)))-\sum_{i=1}^{s}\widetilde{f}_{x_i}[t]\Delta x(\tau_i(t))-\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_i}[t]\delta u(\theta_i(t))d\xi\,|\,dt\le$$

$$\le\|Y\|\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1+\delta_2}\Big\{\int_0^1\Big[\sum_{i=1}^{s}|f_{x_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\ldots)-\widetilde{f}_{x_i}[t]|\,\Delta x(\tau_i(t))|+$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{\nu}|f_{u_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\ldots)-\widetilde{f}_{u_i}[t]\|\,\delta u(\theta_i(t))|\Big]d\xi\Big\}dt=$$

$$=O(\varepsilon\delta\sigma)\sum_{i=1}^{s}\sigma_i(\varepsilon\delta\sigma)+\varepsilon c\sigma_0(\varepsilon\delta\sigma), \qquad (1.7.42)$$

სადაც

$$\sigma_i(\varepsilon\delta\sigma)=\|Y\|\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1+\delta_2}\Big\{\int_0^1|f_{x_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\ldots)-\widetilde{f}_{x_i}[t]|\,d\xi\Big\}dt,$$

$$\sigma_0(\varepsilon\delta\sigma)=\|Y\|\sum_{i=1}^{\nu}\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1+\delta_2}\Big\{\int_0^1|f_{u_i}(t,\widetilde{x}(\tau_1(t))+\xi\Delta x(\tau_1(t)),\ldots)-\widetilde{f}_{u_i}[t]|\,d\xi\Big\}dt.$$

ლებეგის თეორემის თანახმად

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sigma_i(\varepsilon\delta\sigma)=0,\qquad i=0,\ldots,s,$$

თანახმად $\delta\sigma\in V^-$.

ამრიგად

$$h_1(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)=o(t;\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.43}$$

(1 7.37) -დან, (1.7.39) - (1.7.41) და (1.7.43) გათვალისწინებით, მივიღებთ (1.6.5), სადაც $\delta x(t;\delta\sigma)$ აქვს (1.6.6) სახე ■

§1.9. *თეორემა 1.6.2 დამტკიცება.*

ანალოგიური გზით (იხ. *თეორემა 1.6.1* დამტკიცება) *ლემა 1.7.2* და (1.7.30) ტოლობის საფუძველზე მივიღებთ

$$|\Delta x(t)|\le O(\varepsilon\delta\sigma),\quad \forall(t,\varepsilon,\delta\sigma)\in[\tau,\widetilde{t}_1+\delta_2]\times[0,\varepsilon_2]\times V_1^+, \tag{1.7.44}$$

$$\Delta x(t_0)=\varepsilon\Big\{\delta\varphi(\widetilde{t}_0)+\big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^+\big]\delta t_0+o(\varepsilon\delta\sigma). \tag{1 7.45}$$

ვთქვათ $s_0\in(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1)$ და $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1]$ იმდენად მცირეა, რომ $t_0<s_0$. ფუნქცია $\Delta x(t)$ ინტერვალზე $[t,\widetilde{t}_0+\delta_2]$ აკმაყოფილებს (1.1.21) დიფერენციალურ განტოლებას და იგი კოშის ფორმულის თანახმად შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმულით

$$\Delta x(t)=\Phi(t_0;t)\Delta x(t_0)+\varepsilon\int_{t_0}^{t}Y(\xi;t)\sum_{m=1}^{\nu}\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi+\sum_{i=-1}^{1}h_i(t;t_0,\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.46}$$

სადაც $h_i(t;t_0,\varepsilon\delta\sigma)$, $i=-1,0,1$ აქვს სახე (იხ. (1.7.38)).

ლემა 1.1.5 და (1.7.44) ტოლობის საფუძველზე გვექნება

$$\Phi(t_0;t)\Delta x(t_0)=\varepsilon\Phi(\widetilde{t}_0;t)\Big\{\delta\varphi(\widetilde{t}_0)+\big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))-f^+\big]\delta t_0+o(t;\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.47}$$

გარდავქმნათ $h_{-1}(t;t_0,\varepsilon\delta\sigma)$, გვაქვს

$$\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{t_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi=\varepsilon\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{t_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi=\varepsilon\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+o(t;\varepsilon\delta\sigma)+\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\dot{\Delta}x(\xi)d\xi.$$

შემდეგ

$$\int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\Delta\dot{x}(\xi)d\xi = \int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\rho_j(\xi);t)A_j(\rho_j(\xi))\dot{\rho}_j(\xi)\big[\dot{\varphi}(\xi) -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(\xi)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\xi)) - f(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi},\widetilde{y},\widetilde{u})(\xi)\big]d\xi = -\varepsilon Y(\rho_j+;t)A_j(\rho_j)\dot{\rho}_j(\widetilde{t}_0)\big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) -$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{k} A_\alpha(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_\alpha(\widetilde{t}_0)) + f^{+}\big]\delta t_0 + o(t;\varepsilon\delta\sigma).$$

მაშასადამე

$$h_{-1}(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma) = \varepsilon\big[Y(\widetilde{t}_0+;t) - \Phi(\widetilde{t}_0;t)\big]\big[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) - f^{+}\big]\delta t_0 + o(t;\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.48}$$

$h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma)$ -სთვის მივიღებთ

$$h_0(t;\widetilde{t}_0,\varepsilon\delta\sigma) = \sum_{i\in I_1\cup I_2}\big[\varepsilon\int_{\tau_i(t_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_{\widetilde{t}_0}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi\big] = \sum_{i\in I_3}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{t_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\times\dot{\gamma}_i(\xi)\Delta x(\xi)d\xi =$$

$$= \varepsilon\sum_{i\in I_1\cup I_2}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} Y(\gamma_i(\xi);t)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(\xi)]\dot{\gamma}_i(\xi)\delta\varphi(\xi)d\xi + o(t;\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.49}$$

(იხ. (1.7.5) და (1.7.44)).

ანალოგიური გზით მტკიცდება, რომ

$$h_1(t;t_0,\varepsilon\delta\sigma) = o(t;\varepsilon\delta\sigma), \tag{1.7.50}$$

(იხ. (1.7.42)).

ბოლოს შევნიშნავთ, რომ როცა $t\in[s_0,\widetilde{t}_1+\delta_2]$

$$\varepsilon\int_{t_0}^{t} Y(\xi;t)\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi = \varepsilon\int_{\widetilde{t}_0}^{t} Y(\xi;t)\widetilde{f}_{u_m}[\xi]\delta u(\theta_m(\xi))d\xi + o(t;\varepsilon\delta\sigma). \tag{1.7.51}$$

(1.7.46) -დან, (1.7.47) - (1.7.51) გათვალისწინებით, მივიღებთ (1.6.5), სადაც $\delta x(t;\delta\sigma)$ აქვს (1.6.7) სახე ■

თავი 2. კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანები წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით. ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები

ამ თავში შესწავლილია ოპტიმალური ამოცანები კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის დიფერენციალური განტოლებებისათვის, რომელთა მარჯვენა მხარე შეიცავს ცვლად დაგვიანებებს როგორც ფაზურ კოორდინატებსა და მის წარმოებულებში, ასევე მართვებში. ამოცანებისთვის წყვეტილი და უწყვეტი საწყისი პირობით, არაფიქსირებუ ლი საწყისი მომენტით, ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქციონალით, დამტკიცებ ულია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები. ზოგადი შედეგები დაკონკრეტებულია ამოცანებისთვის დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით, წრფივი ამოცანებისთვის, სწრაფქმედების ამოცანისათვის.

აუცილებელი პირობების დამტკიცება, ვარიაციის ფორმულების საფუძველზე, გან ხორციელებულია ექსტრემალური ამოცანების ზოგადი თეორის საფუძველზე [40].

ბოლოს, [41] ნაშრომის მიხედვით აგებულია ეკონომიკური ზრდის მათემატიკური მოდელი, რომელიც წარმოადგენს მე-2 რიგის წრფივ ნეიტრალური ტიპის სამართ დიფე რენციალურ განტოლებათა სისტემას.საჭიროა მივაღწიოთ ეკონომიკური ზრდის სასურვ ელ დონეს მინიმალურ დროში. განხილულია შესაბამისი ოპტიმალური ამოცანა მუდმივი დაგვიანებით, როგორც ფაზურ კოორდინატებსა და მის წარმოებულებში, ასევე მართვებში. დადგენილია ოპტიმალური მართვის სტრუქტურა, მიღებულია საწყის-საბო ლოო მომენტების ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობები.

§2.1. დამხმარე დებულებები

ქვემოთ მოყვანილი თეორემები, ვარიაციის ფორმულებთან ერთად წარმოადგენენ იმ მათემატიკურ აპარატს, რომლის საფუძველზეც *§2.4* და *§2.5* დამტკიცებულია ოპტიმალუ რობის აუცილებელი პირობები.

ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების მიღების საკითხი, ექსტრემალური ამოც ანების ზოგადი თეორიის მიხედვით [40], დაიყვანება კვაზი-ამოზნექილ ფილტრზე განსა ზღვრული გადასახვის კრიტიკულობის აუცილებელი პირობის მიღებაზე. თავის მხრივ

კრიტიკულობის აუცილებელი პირობიდან გამომდინარეობს ოპტიმალურობის აუცილებე ლი პირობები.

ნაშრომში განხილული ამოცანების სპეციფიკიდან და გადასახვის განსაზღვრის წესიდან გამომდინარე, ჩვენი მიზნებისათვის სავსებით საკმარისია გვქონდეს კრიტიკულო ბის აუცილებელი პირობა გადასახვებისათვის, რომლებიც განმარტებულია ამოზნექილ ფილტრზე.

შემდეგში, y ელემენტთა ევკლიდეს R^n სივრცეს აღვნიშნავთ R_y^n. ξ ელემენტთა ვექტორულ (წრფივ) სივრცეს აღვნიშნავთ E_ξ.

E_ξ სივრცის ქვესიმრავლეთა ϕ სიმრავლეს ეწოდება ფილტრი, თუ შესრულებუ ლია შემდეგი პირობები:

2.1.1) თუ $A \in \phi$, $B \in \phi$, მაშინ $A \cap B \in \phi$,

2.1.2) თუ $A \in \phi$, $A \subset B$, მაშინ $B \in \phi$,

2.1.3) $\varnothing \notin \phi$.

ვთქვათ E_ξ სივრცეში შემოღებულია ტოპოლოგია, მაშინ წერტილის მიდამოების სიმრა ვლე ქმნის ფილტრს.

E_ξ სივრცის ქვესიმრავლეთა Λ სიმრავლეს ეწოდება ფილტრის ბაზისი, თუ შესრ ულებულია პირობები:

2.1.4) ნებისმიერი $A \in \Lambda$ და $B \in \Lambda$, არსებობს $C \in \Lambda$, რომ $C \subset A \cap B$,

2.1.5) $\varnothing \notin \Lambda$.

ქვესიმრავლეთა ϕ სიმრავლე, რომელთაგან თითოეული შეიცავს რაიმე სიმრავლეს Λ-დან ქმნის ფილტრს.

ϕ ფილტრს ეწოდება ამოზნექილი, თუ არსებობს ფილტრის ბაზისი, რომელიც შედგება ამოზნექილი სიმრავლეებისგან.

განვიხილოთ $z = (y, \xi)$ ელემენტთა $E_z = R_y^m \times E_\xi$ ვექტორული სივრცე და მისი D ქვესიმრავლე.

ვთქვათ მოცემულია გადასახვა

$$P : D \to R_p^l. \tag{2.1.1}$$

განსაზღვრება 2.1.1. ვთქვათ E_z-ში მოცემულია ϕ ფილტრი. გადასახვა (2.1.1) განმარტებულია ϕ ფილტრზე, თუ არსებობს ისეთი $W \in \phi$, რომ $W \subset D$.

განსაზღვრება 2.1.2. ვთქვათ გადასახვა (2.1.1) განმარტებულია ϕ ფილრტზე. გადასახვა (2 1.1) კრიტიკულია ϕ ფილტრზე, თუ ნებისმიერი $\widetilde{z}$ წერტილისათვის, რომელიც ეკუთვნის ფილტრის ყველა ელემენტს, არსებობს ისეთი ელემენტი $W \in \phi$, რომ $W \subset D$ და $P(\widetilde{z}) \in \partial P(W)$.

ვთქვათ E_ξ სივრცეში შემოღებულია განცალებადი, ვექტორული ტოპოლოგია. იგი E_z გადააქცევს ვექტორულ (წრფივ) ტოპოლოგიურ სივრცედ.

განსაზღვრება 2.1.3. გადასახვა (2.1.1) უწყვეტია ϕ ფილტრზე, თუ არსებობს ისეთი ელემენტი $W \in \phi$, რომ $W \subset D$ და გადასახვა

$$P : W \to R_p^l$$

უწყვეტია W სიმრავლეზე E_z-დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში.

ვთქვათ $Y \subset R_y^m$ ლოკალურად ამოზნექილი ტოპოლოგიური ქვესივრცეა ე. ი. $y \in Y$ წერტილის ნებისმიერი მიდამოსათვის $V_y \subset Y$, არსებობს ამოზნექილი მიდამო $\widetilde{V}_y \subset Y$, რომელიც შედის V_y-ში.

ლ ე მ ა 2.1.1. ვთქვათ $D \subset Y \times E_\xi$ ღია სიმრავლეა $Y \times E_\xi$ სივრცის მიმართ და $\widetilde{z} = (\widetilde{y}, \widetilde{\xi}) \in D$. ვთქვათ გარდა ამისა მოცემულია ნულის ამოზნექილი და შემოსაზღვრული მიდამოები $V_0 \subset Y - \widetilde{y}$ და $V \subset E_\xi - \xi$, მაშინ არსებობს ისეთი $\varepsilon_0 > 0$, რომ

$$\widetilde{z} + \varepsilon \delta z \in D, \quad \forall (\varepsilon, \delta z) \in (0, \varepsilon_0) \times V_0 \times V, \quad \delta z = (\delta y, \delta \xi). \tag{2.1.2}$$

ეს ლემა ადვილად გამომდინარეობს D სიმრავლის ღიაობიდან და $(Y \times E_\xi) - \widetilde{z}$ სივრცის ლოკალურად ამოზნექილობიდან.

ჩვენ შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ D ღია სიმრავლეა.

განსაზღვრება 2.1.4. გადასახვა (2.1.1) დიფერენცირებადია $\widetilde{z} = (\widetilde{y}, \widetilde{\xi}) \in D$ წერტილში, თუ არსებობს წრფივი ასახვა

$$dP_{\widetilde{z}} : E_{\delta z} = E_z - \widetilde{z} \to E_{dp}^l, \tag{2.1.3}$$

რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$P(\widetilde{z}+\varepsilon\delta z)-P(\widetilde{z})=\varepsilon dP_{\widetilde{z}}(\delta z)+o(\varepsilon\delta z),\qquad \forall(\varepsilon,\delta z)\in(0,\varepsilon_0]\times V_0\times V,$$

სადაც $V_0\subset Y-\widetilde{y}$, $V_0\subset E_\xi-\widetilde{\xi}$ ნულის შემოსაზღვრული ამოზნექილი მიდამოებია $\varepsilon_0>0$ რიცხვი იმდენად მცირეა, რომ ადგილი აქვს (2.1.2);

$$\lim_{\varepsilon\to 0} o(\varepsilon\delta z)/\varepsilon=0,\ \text{თანაბრად}\ \ \delta z\in V_0\times V.$$

(2.1.3) -ს ეწოდება (2.1.1) -ის გადასახვის დიფერენციალი $\widetilde{z}$ წერტილში.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1.1. (კრიტიკულობის აუცილებელი პირობა[40]). ვთქვათ P ასახვა უწყვეტი და კრიტიკულია ამოზნექილ ϕ ფილტრზე. მაშინ ნებისმიერი $\widetilde{z}=(\widetilde{y},\widetilde{\xi})$ წერტილისათვის, რომელიც ეკუთვნის ფილტრის ყველა ელემენტს და რომელშიც P გადასახვას გააჩნია (2.1.3) დიფერენციალი. არსებობს არანულოვანი $\pi=(\pi_1,\dots,\pi_l)$ ვექტორი და ისეთი $\widetilde{W}\in\phi$, რომ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\pi dP_{\widetilde{z}}(\delta z)=\sum_{i=1}^{l}\pi_i dP_{\widetilde{z}}(\delta z)\le 0,\quad \forall\,\delta z\in cone(\widetilde{W}-\widetilde{z}),$$

სადაც $cone(M)$ აღნიშნავს $M\subset E_z$ სიმრავლეზე მოჭიმულ კონუსს.

ყოველ $\lambda=(t_0,t_1,x_0,\varphi,u)\in B_2=J^2\times O\times\Phi\times\Omega$ ელემენტს შევუსაბამოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{x}(\eta_j(t))+f(t,x(\tau_1(t)),\dots,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t))),\qquad t\in[t_0,t_1]$$

საწყისი პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\quad t\in[\tau,t_0),\quad x(t_0)=x_0.$$

$\lambda=(t_0,t_1,x_0,\varphi,u)$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი ვუწოდოთ $\mu=(t_0,x_0,\varphi,u)$ ელემენტის შესაბამის ამონახსნს განმარტებულს $[\tau,t_1]$ ინტერვალზე და ავღნიშნოთ $x(t;\lambda)$.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1.2. ვთქვათ $\widetilde{x}(t)$ არის $\lambda=(t_0,t_1,x_0,\varphi,u)\in B_2$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ არსებობს რიცხვები $\delta_i>0$, $i=0,1$, ისეთი, რომ ყოველ ელემენტი

$$\lambda\in V(\widetilde{\lambda};\delta_0,\delta_1)=([\widetilde{t}_0-\delta_0,\widetilde{t}_0+\delta_0]\cap J)\times([\widetilde{t}_1-\delta_1,\widetilde{t}_1+\delta_1]\cap J)\times(V(\widetilde{x}_0;\delta_0)\cap O)\times(V(\widetilde{\varphi};\delta_0)\cap\Phi)\times$$
$$\times(V(\widetilde{u};\delta_0)\cap\Omega)$$

შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\lambda)$. გარდა ამისა, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს რიცხვები $\delta_i(\varepsilon) \in (0,\delta_i]$, $i = 0,1$, ისეთი, რომ ნებისმიერი $\lambda \in V(\widetilde{\lambda};\delta_0(\varepsilon),\delta_1(\varepsilon))$ შესრულებულია უტოლობა.

$$|x(t_1;\widetilde{\lambda}) - x(t_1;\lambda)| \le \varepsilon.$$

აქ

$$V(x_0;\delta_0) = \{x_0 \in R^n_{x_0} :|\widetilde{x}_0 - x_0| \le \delta_0\},\quad V(\widetilde{\varphi};\delta_0) = \{\varphi \in E_\varphi :\|\widetilde{\varphi} - \varphi\| < \delta_0\},$$

$$V(\widetilde{u};\delta_0) = \{u \in E_u :\|\widetilde{u} - u\| < \delta_0\}.$$

თეორემა 2.1.2 მიიღება *თეორემა 2.3*-დან, რომელიც მოყვანილია და დამტკიცებულია ნაშრომში [3].

§2.2. ოპტიმალური ამოცანები წყვეტილი საწყისი პირობით.

2.2.1. ამოცანა ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქციონალით. განვიხილოთ ოპტიმალური ამოცანა:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^{k} A_j(t)\dot{x}(\eta_j(t)) + f(t, x(\tau_1(t)),\dots,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t))),$$

$$t \in [t_0,t_1] \subset J,\qquad u(\cdot) \in \Omega_0 \tag{2.2.1}$$

$$x(t) = \varphi(t),\quad t \in [\tau,t_0),\quad x(t_0) = x_0,\quad \varphi(\cdot) \in \Phi_0,\quad x_0 \in O, \tag{2.2.2}$$

$$q^i(t_0,t_1,x_0,x(t_1)) = 0,\qquad i = 1,\dots,l, \tag{2.2.3}$$

$$q^i(t_0,t_1,x_0,x(t_1)) \to \min, \tag{2.2.4}$$

სადაც $\Omega_0 = \Omega(J_2,U)$, $U \subset G$-ამოზნექილი სიმრავლეა; $\Phi_0 = \Phi(J_1,M)$, $M \subset O$-ამოზნექილი სიმრავლეა; სკალარული ფუნქციები $q^i(t_0,t_1,x_0,x_1)$, $i = 0,\dots,l$, უწყვეტად წარმოებადია $J^2 \times O^2$ სიმრავლეზე.

განსაზღვრება 2.2.1. $\lambda \in B_2 = J^2 \times O^2 \times \Phi_0 \times \Omega_0$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ მისი შესაბამისი ამონახსნი $x(t) = x(t;\lambda)$ აკმაყოფილებს (2.2 3) პირობას. დასაშვებ ელემენტთა სიმრავლე ავღნიშნოთ B_{20}.

განსაზღვრება 2.2.2. $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u}) \in B_{20}$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ არსე ბობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი $\lambda \in B_{20}$ ელემენტისათვის, რომელიც აკმაყო ფილებს პირობას

$$|\widetilde{t}_0 - t_0| + |\widetilde{t}_1 - t_1| + |\widetilde{x}_0 - x_0| + \|\widetilde{\varphi} - \varphi\| + \|\widetilde{u} - u\| \le \delta$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, \widetilde{x}(t_1)) \le q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1)),$$

სადაც $\widetilde{x}(t) = x(t;\widetilde{\lambda})$

(2.2.1) – (2.2.4) ამოცანას ეწოდება კვაზი-წრფივი ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამო ცანა წყვეტილი საწყისი პირობით. იგი მდგომარეობს ოპტიმალური ელემენტის მოძე ბნაში. ჩვენი მიზანია ოპტიმალურობის აუცილებელი პირობების მიღება.

ძირითადი შედეგების ჩამოსაყალიბებლად ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი აღნიშვნები: $\omega_{0i}, i = 0,\ldots,p;$ ω_{0i}, ω_{1i}, $i = p+1,\ldots,s;$ γ_i, ρ_j, $\gamma_i(t), \rho_j(t)$, $\hat{\gamma}_i^-, \hat{\gamma}_i^+$, $\widetilde{f}(\omega)$, $\omega = (t, x_1,\ldots,x_s)$, $\widetilde{f}_{x_i}[t]$ აღნიშვნების შესახებ იხილეთ (თავი 1, გვ.15); $\omega_{s+1} = (\widetilde{t}_1, \widetilde{x}(\tau_1(t_1)),\ldots,\widetilde{x}(\tau_s(t_1)))$, $Q = (q^0,\ldots,q^l)^*$, $\widetilde{Q}_{t_0} = Q_{t_0}(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, \widetilde{x}(\widetilde{t}_1))$.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.1. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია, $\widetilde{t}_0 > a$ და ვთქვათ შესრუ ლებულია შემდეგი პირობები:

2.2.1) $\gamma_i = \widetilde{t}_0$, $i = 1,\ldots,p;$ $\gamma_{p+1} < \ldots < \gamma_s < \widetilde{t}_1$, $\rho_j < \widetilde{t}_1$, $j = 1,\ldots,k;$

2.2.2) არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ $\gamma_1(t) \le \ldots \le \gamma_p(t)$ $t \in (\widetilde{t}_0 - \delta, \widetilde{t}_0]$

2.2.3) არსებობს სასრული ზღვრები: $\dot{\gamma}_i^-$, $i = 1,\ldots,s;$

$$\lim_{\omega \to \omega_{0i}} \widetilde{f}(\omega) = f_i^-, \quad \omega \in (\widetilde{t}_0 - \delta, \widetilde{t}_0] \times O^s, \qquad i = 0,\ldots,p;$$

$$\lim_{(\omega_1,\omega_2) \to (\omega_{0i},\omega_{1i})} [\widetilde{f}(\omega_1) - \widetilde{f}(\omega_2)] = f_i^-, \quad \omega_1, \omega_2 \in (\gamma_i - \delta, \gamma_i] \times O^s, \qquad i = p+1,\ldots,s;$$

2.2.4) არსებობს სასრული ზღვრები: $\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-))$, $j = 1,\ldots,k$,

$$\lim_{\omega \to \omega_{s+1}} \widetilde{f}(\omega) = f_{s+1}^-, \quad \omega \in (\widetilde{t}_1 - \delta, \widetilde{t}_1] \times O^s.$$

მაშინ არსებობს ისეთი არანულოვანი ვექტორი $\pi = (\pi_0, ..., \pi_l)$, $\pi_0 \le 0$ და განტოლებათა სისტემის

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) = -\sum_{i=1}^{s} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t), \\ \psi(t) = \chi(t) + \sum_{j=1}^{k} \psi(\rho_j(t)) A_j(\rho_j(t)) \dot{\rho}_j(t), \qquad t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1] \\ \chi(t) = \psi(t) = 0, t > \widetilde{t}_1 \end{cases} \tag{2.2.5}$$

ისეთი ამონახსენი $\chi(t) = (\chi_1(t), ..., \chi_n(t))$, $\psi(t) = (\psi_1(t), ..., \psi_n(t))$, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

2.2.5) გაწრფივებული ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი მართვისა და საწყისი ფუნქციისთვის

$$\sum_{j=1}^{\nu} \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \psi(t) \widetilde{f}_{u_j}[t] \widetilde{u}(\dot{\theta}_j(t)) dt \ge \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \psi(t) \widetilde{f}_{u_j}[t] u(\theta_j(t)) dt, \quad \forall u \in \Omega_0,$$

$$\sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \widetilde{\varphi}(t) dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\rho_j(t)) A_j(\rho_j(t)) \dot{\rho}_j(t) \dot{\widetilde{\varphi}}(t) dt \ge$$

$$\ge \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \varphi(t) dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\rho_j(t)) A_j(\rho_j(t)) \dot{\rho}_j(t) \dot{\varphi}(t) dt,$$

$$\forall \varphi \in \Phi_0;$$

2.2.6) უტოლობები საწყისი და საბოლოო მომენტებისათვის

$$\pi \widetilde{Q}_{t_0} \ge -\psi(\widetilde{t}_0 -)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0) \dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^-] +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i -) f_i^- \dot{\gamma}_i^- + \chi(\widetilde{t}_0) \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0), \tag{2.2.6}$$

$$\pi \widetilde{Q}_{t_1} \ge -\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1) \dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1)) + f_{s+1}^-]; \tag{2.2.7}$$

2.2.7) პირობები $\chi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციებისთვის

$$\pi \widetilde{Q}_{x_0} = -\chi(\widetilde{t}_0), \qquad \pi \widetilde{Q}_{x_1} = \psi(\widetilde{t}_1) = \chi(\widetilde{t}_1).$$

ზოგიერთი კომენტარი:

2.2.8) თუ $rank(\widetilde{Q}_{x_0},\widetilde{Q}_{x_1}) = 1+l$, მაშინ $\chi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები $[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]$ ინტერვალზე იგივურად არ უდრის ნულს.

2.2.9) თუ $\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0) = \widetilde{x}_0$, მაშინ $f_0^- = ... = f_p^-$, $f_i^- = 0$, $i = p+1,...,s$. ამიტომ 2.2.6) პირობა მარტივდება და აქვს სახე

$$\pi\widetilde{Q}_{t_0} \geq -\psi(\widetilde{t}_0-)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) - f_0^-] + \chi(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0).$$

2.2.10) პირობა 2.2.2) შესრულებულია, თუ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\dot{\gamma}_p^- < ... < \dot{\gamma}_1^-.$$

2.2.11) ნემსისებური ვარიაციის გამოყენებით, მართვის მიმართ გაწრფივებული მაქსიმუმის პრინციპიდან, მიიღება გაწრფივებული წერტილოვანი მაქსიმუმის პრინციპი.

მართლაც, გადავწეროთ გაწრფივებული მაქსიმუმის პრინციპი შემდეგი სახით

$$\sum_{j=1}^{\nu} \int_{\theta_j(\widetilde{t}_0)}^{\theta_j(\widetilde{t}_1)} \psi(\sigma_j(t))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)\widetilde{u}(t)dt \geq \sum_{j=1}^{\nu} \int_{\theta_j(\widetilde{t}_0)}^{\theta_j(\widetilde{t}_1)} \psi(\sigma_j(t))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)u(t)dt,$$

$$\forall u \in \Omega_0,$$

სადაც $\sigma_j(t)$ არის $\theta_j(t)$ ფუნქციის შექცეული.

ცხადია რომ

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sum_{j=1}^{\nu} \chi_j(t)\psi(\sigma_j(t))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)\widetilde{u}(t)dt \geq \int_{\theta_0}^{\theta_0} \sum_{j=1}^{\nu} \chi_j(t)\psi(\sigma_j(t)) \times$$

$$\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)u(t)dt, \qquad (2.2.8)$$

სადაც $\theta_0 = \min(\theta_1(\widetilde{t}_0),...,\theta_m(\widetilde{t}_0))$, $\theta_1 = \max(\theta_1(\widetilde{t}_1),...,\theta_m(\widetilde{t}_1))$;

$\chi_j(t)$ არის $[\theta_j(\widetilde{t}_0),\theta_j(\widetilde{t}_1)]$ ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია.

ვთქვათ $t' \in (\theta_0,\theta_1)$ არის

$$\sum_{j=1}^{\nu}\chi_j(t)\psi(\sigma_j(t))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)\widetilde{u}(t) \text{ და } \sum_{j=1}^{\nu}\chi_j(t)\psi(\sigma_j(t))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)$$

ფუნქციების ლებეგის წერტილი და ვთქვათ $\varepsilon > 0$ იმდენად მცირეა, რომ $[t', t'+\varepsilon] \subset [\theta_0, \theta_1]$.

ნემსისებური ვარიაციის საშუალებით შემოვიღოთ ახალი მართვა $u_\varepsilon(t)$;

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u, t \in [t', t'+\varepsilon], \\ \widetilde{u}(t), t \notin [t', t'+\varepsilon], \end{cases}$$

სადაც $u \in U$ ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია.

ცხადია, რომ $u_\varepsilon(\cdot) \in \Omega_0$ ამიტომ ადგილი აქვს (2.2.8) უტოლობას სადაც $u(t)$-ს ნაცვლად ჩასმულია $u_\varepsilon(t)$. ამ უკანასკნელში თუ ვისარგებლებთ $u_\varepsilon(t)$ ფუნქციის სტრუქტურით მივიღებთ

$$\int_{t'}^{t'+\varepsilon}\sum_{j=1}^{\nu}\chi_j(t)\psi(\sigma_j(t))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)\widetilde{u}(t)dt \geq \int_{t'}^{t'+\varepsilon}\sum_{j=1}^{\nu}\chi_j(t)\psi(\sigma_j(t))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t)]\dot{\sigma}_j(t)udt.$$

უკანასკნელი უტოლობა გავყოთ ε-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე როცა $\varepsilon \to 0$, გვექნება

$$\sum_{j=1}^{\nu}\chi_j(t')\psi(\sigma_j(t'))\widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t')]\dot{\sigma}_j(t')\widetilde{u}(t') \geq \sum_{j=1}^{\nu}\sigma_j(t')\psi(\sigma_j(t')) \times$$

$$\times \widetilde{f}_{u_j}[\sigma_j(t')]\dot{\sigma}_j(t')u, \quad \forall u \in U. \tag{2.2.9}$$

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ (2.2.9) გაწრფივებული წერტილოვანი მაქსიმუმის პრინციპი სამართლიანია თითქმის ყველა წერტილისათვის $[\theta_0, \theta_1]$ ინტერვალიდან. ადვილი შესამჩნევია, რომ საწყისი ფუნქციისთვის გაწრფივებული წერტილოვანი მაქსიმუმის პრინციპის მიღება შეუძლებელია.

2.2.12) ვთქვათ $f(t, x_1, \ldots, x_s, u_1, \ldots, u_\nu)$ ფუნქცია უწყვეტია ყველა არგუმენტის მიმართ და უწყვეტად წარმოებადია x_i, $i = 1, \ldots, s$, u_j, $j = 1, \ldots, \nu$ მიმართ. გარდა ამისა ვთქვათ $\tau_i(t)$, $i = 1, \ldots, s$ ფუნქციები უწყვეტად წარმოებადია და Ω_0 სიმრავლე შედგება უბან-უბან უწყვეტ $u(t)$ მართვებისაგან, სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტილი წერტილებით, მაშინ თეორემაში 2.2.3) და 2.2.4) მოთხოვნები შესრულებულია.

2.2.13) ვთქვათ $A_j(t)\equiv 0, \quad j=1,\dots,k,$ მაშინ გვექნება დაგვიანებულარგუმენტებიანი ოპტიმალური ამოცანა. ამ შემთხვევაში $\psi(t)\equiv\chi(t)$ და თეორემა ემთხვევა [34-36] ნაშრომში მიღებულ შედეგს, იმ განსხვავებით, რომ [34-36]-ში საწყისი ფუნქციათა კლასი შედგება უბან-უბან უწყვეტ ფუნქციებისაგან.

2.2.14) ნეიტრალური ტიპის კვაზი-წრფივი ოპტიმალური ამოცანები წყვეტილი საწყისი პირობით და მართვებში დაგვიანების გარეშე შესწავლილია [3]-ში.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.2. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_1<b$ და ვთქვათ შესრულებულია *თეორემა 2.2.1*-ის 2.2.1) პირობა და ქვემოთ ჩამოთვლილი პირობები:

2.2.15) არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ

$$\gamma_1(t)\le\dots\le\gamma_p(t),\quad t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_0+\delta);$$

2.2.16) არსებობს სასრული ზღვრები; $\dot{\gamma}_i^+,\quad i=0,\dots,p;$

$$\lim_{\omega\to\omega_{0i}}\widetilde{f}(\omega)=f_i^+,\quad \varpi\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_0+\delta)\times O^s,\quad i=1,\dots,s;$$

$$\lim_{(\omega_1,\omega_2)\to(\omega_{0i},\omega_{1i})}[\widetilde{f}(\omega_1)-\widetilde{f}(\omega_2)]=f_i^+,\quad(\omega_1,\omega_2)\in[\gamma_i,\gamma_i+\delta)\times O^s,\quad i=p+1,\dots,s;$$

2.2.17) არსებობს სასრული ზღვრები: $\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+)),\quad j=1,\dots,k,$

$$\lim_{\omega\to\omega_{s+1}}\widetilde{f}(\omega)=f_{s+1}^+,\quad \varpi\in[\widetilde{t}_1,\widetilde{t}_1+\delta)\times O^s.$$

მაშინ არსებობს ისეთი არანულოვანი ვექტორი $\pi=(\pi_0,\dots,\pi_l),\ \pi_0\le 0$ და (2 2.5) სისტემის ისეთი ამონახსნი $\chi(t)$ და $\psi(t)$, რომ შესრულებულია **2.2.5)** და **2.2.7)** პირობა. გარდა ამისა

$$\pi\widetilde{Q}_{t_0}\le-\psi(\widetilde{t}_0+)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^+-\hat{\gamma}_i^+)f_i^+]+$$

$$+\sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i+)f_i^+\dot{\gamma}_i^++\chi(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0),\qquad(2.2.10)$$

$$\pi\widetilde{Q}_{t_1}\le-\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+))+f_{s+1}^+].\qquad(2.2.11)$$

კომენტარებში მოყვანილი ყველა ჩამონათვალი, ბუნებრივი ცვლილებებით, მიესადაგება *თეორემა 2.2.2.*-ს. ავღნიშნავთ, რომ 2.2.15) პირობა შესრულე

ბულია, თუ ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\dot{\gamma}_1^+ < \ldots < \dot{\gamma}_p^+$$

(იხ. თავი 1, გვ.17)

თეორემა 2.2.1 და *2.2.2* თეორემების მარტივ შედეგს წარმოადგენს შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.3. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i = 0,1$ და შესრულებულია *თეორემა 2.2.1* და *2.2.2* მოთხოვნები და ქვემოთ მოყვანილი პირობები:

2.2.18) ფუნქციები $\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(t))$, $j = 1,\ldots,k$ უწყვეტია წერტილში $\widetilde{t}_1$;

$\widetilde{t}_0, \gamma_i \notin I(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1)$, $\quad i = p+1,\ldots,s$;

2.2.19)

$$\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-)f_i^- = \sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^+ - \hat{\gamma}_i^+)f_i^+ = f_0, \quad f_i^- \dot{\gamma}_i^- = f_i^+ \dot{\gamma}_i^+ = f_i, \quad i = p+1,\ldots,s;$$

$$f_{s+1}^- = f_{s+1}^+ = f_{s+1}$$

მაშინ არსებობენ ისეთი ვექტორი $\pi = (\pi_0,\ldots,\pi_l) \neq 0$, $\pi_0 \le 0$ და (2.2.5) სისტემის ამონახსენი $\chi(t)$, $\psi(t)$, რომ შესრულებულია **2.2.5)** და **2.2.7)** პირობა. გარდა ამისა

$$\pi \widetilde{Q}_{t_0} = -\psi(\widetilde{t}_0)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + f_0] +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i)f_i + \chi(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0), \tag{2.2.12}$$

$$\pi \widetilde{Q}_{t_1} = -\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1)) + f_{s+1}]. \tag{2.2.13}$$

შენიშვნა 2.2.1.

თუ $rank(\widetilde{Q}_{t_0}, \widetilde{Q}_{t_1}, \widetilde{Q}_{x_0}, \widetilde{Q}_{x_1}) = 1 + l$, მაშინ $\chi(t)$ და $\psi(t)$ ფუნქციები $[\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$ ინტერვალზე იგივურად არ უდრის ნულს.

ზემოთმოყვანილი თეორემები შეესაბამებიან შემთხვევებს, როცა $\widetilde{t}_0$ და $\widetilde{t}_1$ მომენტში ხდება, შესაბამისად, ვარიაცია მარცხნიდან, მარჯვნიდან და ორივე მხრიდან.

მოვიყვანოთ თეორემები, რომლებიც შეესაბამებიან შემთხვევას, როდესაც ვარიაცია $\widetilde{t}_0$ და $\widetilde{t}_1$ წერტილებში შერეულია.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.4. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i=0,1$ და შესრულებულია 2.2.1)-2.2.3) და 2.2.17) პირობები. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,..$ $...,\pi_l)\neq 0$, და (2.2 5) სისტემის ისეთი ამონახსნი $\chi(t)$, $\psi(t)$, რომ შესრულებულია **2.2.5) -2.2.7)** და (2.2.11) პირობა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.25. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i=0,1$ და შესრუ ლებულია 2.2.1)-2.2.3) და 2.2.20) პირობები. მაშინ არსებობენ ვექტორი $\pi=(\pi_0,..$ $...,\pi_l)\neq 0$, და (2.2.5) სისტემის ისეთი ამონახსნი $\chi(t)$, $\psi(t)$, რომ შესრულებულია **2.2.5) -2.2.7)** და (2.2.13) პირობა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.6. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია და შესრულებულია 2.2.1), 2.2.15), 2.2.16) და 2.2.4). პირობები. მაშინ არსებობენ ვექტორი $\pi=(\pi_0,...,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\le 0$ და (2.2.5) სისტემის ისეთი ამონახსნი $\chi(t)$, $\psi(t)$, რომ შესრულებულია **2.2.5) - 2.2.7)** და (2.2.7) და (2.2.10) პირობა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.7. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია, $\widetilde{t}_0 > a$ და შესრულ ებულია 2.2.1), 2.2.4) და 2.2.4). პირობები. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,...,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\le 0$ და (2.2 5) სისტემის ისეთი ამონახსნი $\chi(t)$, $\psi(t)$, რომ შესრულებულია **2.2.7)** და (2.2 7) და (2.2.12) პირობა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.9. ვთქვათ $\widetilde{\lambda}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i=0,1$ და შესრულებულია 2.2.1), 2.2.17) და 2.2.19) პირობები. მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,.$ $...,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\le 0$ და (2.2.5) სისტემის ისეთი ამონახსნი $\chi(t)$, $\psi(t)$, რომ შესრულებუ ლია **2.2.5), 2.2.7)** და (2.2.11) და (2.2.12) პირობა.

2.2.2. ამოცანა დამაგრებული ბოლოებით და ინტეგრალური ფუნქციონალით.

განვიხილოთ ოპტიმალური ამოცანა:

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{x}(\eta_j(t))+f(t,x(\tau_1(t)),...,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),...,u(\theta_\nu(t))),$$

$$t\in[t_0,t_1]\subset J,\qquad u\in\Omega_0, \tag{2.2.14}$$

$$x(t)=\varphi(t),\quad t\in[\tau,t_0),\quad x(t_0)=x_{00},\quad x(t_1)=x_{11},\quad \varphi\in\Phi_0, \tag{2.2.15}$$

$$I(v)=\int_{t_0}^{t_1}[\sum_{j=1}^{k}a_j^0(t)\dot{x}(\eta_j(t))+f^0(t,x(\tau_1(t)),...,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),...,u(\theta_v(t)))]dt\to\min, \tag{2.2.16}$$

სადაც $x_{ii}\in O,\quad i=0,1$ -ფიქსირებული წერტილებია, $a_j^0(t),\quad t\in J,\quad j=1,...,k$ უწყვეტი n-განზომილებიანი ვექტორული ფუნქციაა; f^0-სკალარული ფუნქცია $J\times O^s\times G^v$ სიმრავლეზე აკმაყოფილებს ყველა იმ პირობას რასაც აკმაყოფილებდა f ფუნქცია; $v=(t_0,t_1,\varphi,u)\in$ $\in B_3=J^2\times\Phi_0\times\Omega_0$.

$v=(t_0,t_1,\varphi,u)\in B_3$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი $x(t;v),\quad t\in[\tau,t_1]$ ეწოდება $\mu=(t_0,x_{00},\varphi,u)\in B$ ელემენტის შესაბამის ამონახსნს, განმარტებულს $[\tau,t_1]$ ინტერვალზე, (იხ. *განსაზღვრება 1.1.2*).

დასაშვებ ელემენტთა სიმრავლე B_{30} განიმარტება ანალოგიურად (იხ. *განსაზღვრება 2.2.1*).

განსაზღვრება 2.2.3. $\widetilde{v}=(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{\varphi},\widetilde{u})\in B_{30}$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ არსებობს რიცხვი $\delta>0$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $v\in B_{30}$ ელემენტისათვის რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$|\widetilde{t}_0-t_0|+|\widetilde{t}_1-t_1|+\|\widetilde{\varphi}-\varphi\|+\|\widetilde{u}-u\|\le\delta$$

ადგილი აქვს უტოლობას

$$I(\widetilde{v})\le I(v).$$

(2.2.14) - (2 2 16) ამოცანა სტანდარტული გზით დაიყვანება (2.2.1) - (2.2.4) სახის ამოცანაზე, ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$x^0(t)=\int_{t_0}^{t}[\sum_{j=1}^{k}a_j^0(\xi)\dot{x}(\eta_j(\xi))+f^0(\xi,x(\tau_1(\xi)),...,x(\tau_s(\xi)),u(\theta_1(\xi)),...,u(\theta_v(\xi)))]d\xi;$$

$$\overline{A}_j(t)=\begin{pmatrix}a_j^0(t)\\ A_j(t)\end{pmatrix},\qquad F=(f^0,f)^*,\quad g=(0,\varphi)^*,\quad \overline{x}=(x^0,x)^*,\quad \overline{x}_{00}=(0,x_{00})^*,$$

$$q^0(x_1^0)=x_1^0,\qquad q^i(x_1^i)=x_1^i-x_{11}^i,\quad i=1,\dots,n.$$

ახლა განვიხილოთ (2.2.14) - (2.2.16) ამოცანის ექვივალენტური ამოცანა

$$\dot{\bar{x}}(t)=\sum_{j=1}^{k}\bar{A}_j(t)\dot{\bar{x}}(\eta_j(t))+F(t,x(\tau_1(t)),\dots,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),\dots,u(\theta_\nu(t))),$$

$$t\in[t_0,t_1]\subset J,\qquad u\in\Omega_0,$$

$$\bar{x}(t)=g(t),\qquad t\in[\tau,t_0),\qquad \bar{x}(t_0)=\bar{x}_{00},\quad \varphi\in\Phi_0,$$

$$q^i(x_1^i(t_1))=0,\qquad i=1,\dots,n,\qquad q^0(x^0(t_1))\to\min.$$

ცხადია მიღებული ამოცანა წარმოადგენს (2.2.1) - (2.2.4) ამოცანის კერძო შემთხვევას R^{1+n} სივრცეში.

ქვემოთ მოყვანილი თეორემები, შესაბამისად მიიღებიან *თეორემებიდან 2.2.1-2.2.3.*

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.10. ვთქვათ $\widetilde{\nu}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_0>a$, და შესრულებულია 2.2.1) და 2.2.2) პირობები. გარდა ამისა ვთქვათ არსებობს სასრული ზღვრები:

$$\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-)),\quad j=1,\dots k$$

$$\lim_{\varpi\to\varpi_{i0}}\widetilde{F}(\varpi)=F_i^-,\quad \varpi\in(t_0-\delta,t_0]\times O^s,\qquad i=0,\dots,p$$

$$\lim_{(\varpi_1,\varpi_2)\to(\varpi_{0i},\varpi_{1i})}[\widetilde{F}(\varpi_1)-\widetilde{F}(\varpi_2)]=F_i^-,\quad \varpi_1,\varpi_2\in(\gamma_i-\delta,\gamma_i]\times O^s,\qquad i=p+1,\dots,s;$$

$$\lim_{\varpi\to\varpi_{s+1}}\widetilde{F}(\varpi)=F_{s+1}^-,\quad \varpi\in(\widetilde{t}_1-\delta,t_1]\times O^s.$$

მაშინ არსებობს სისტემის

$$\begin{cases}\dot{\chi}(t)=-\sum_{i=1}^{s}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t),\\ \psi(t)=\chi(t)+\sum_{j=1}^{k}\overline{\psi}(\rho_j(t))\bar{A}_j(\rho_j(t))\dot{\rho}_j(t),\qquad t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]\\ \overline{\psi}(t)=0,t>\widetilde{t}_1\end{cases}\tag{2.2.17}$$

ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t)),\chi(t)$ სადაც $\psi_0(t)\equiv const\le 0,$ რომ ადგილი აქვს შემდეგს:

$$\sum_{m=1}^{\nu}\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1}\overline{\psi}(t)\widetilde{F}_{u_m}[t]\widetilde{u}(\theta_m(t))dt\ge\sum_{m=1}^{\nu}\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1}\overline{\psi}(t)\widetilde{F}_{u_m}[t]u(\theta_m(t))dt,\quad \forall u\in\Omega_0\tag{2.2.18}$$

$$\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\rho_j(t))\overline{A}_j(\rho_j(t))\dot{\rho}_j(t)\dot{\widetilde{\varphi}}(t)dt\geq$$

$$\geq\sum_{i=p+1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\rho_j(t))\overline{A}_j(\rho_j(t))\dot{\rho}_j(t)\dot{\varphi}(t)dt,$$

$$\forall\varphi\in\Phi_0; \qquad (2\ 2.19)$$

$$-\psi(\widetilde{t}_0-)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\overline{\psi}(\widetilde{t}_0-)[-\sum_{j=1}^{k}\overline{A}_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})F_i^{-}]+\sum_{i=p+1}^{s}\overline{\psi}(\gamma_i-)F_i^{-}\dot{\gamma}_i^{-}\ +\chi(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\leq 0,$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}\overline{A}_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-))+F_{s+1}^{-}]\geq 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.11. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_1<b$ და შესრულებულია 2.2.1) და 2.2.5) პირობები. გარდა ამისა ვთქვათ არსებობს სასრული ზღვრები:

$$\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+)),\quad j=1,...,k;$$

$$\lim_{\varpi\to\varpi_{i0}}\widetilde{F}(\varpi)=F_i^{+},\quad\varpi\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_0-\delta]\times O^s,\qquad i=0,...,p;$$

$$\lim_{(\varpi_1,\varpi_2)\to(\varpi_{0i},\varpi_{1i})}[\widetilde{F}(\varpi_1)-\widetilde{F}(\varpi_2)]=F_i^{+},\quad\varpi_1,\varpi_2\in(\gamma_i-\delta,\gamma_i]\times O^s,\qquad i=p+1,...,s;$$

$$\lim_{\varpi\to\varpi_{s+1}}\widetilde{F}(\varpi)=F_{s+1}^{+},\quad\varpi\in[\widetilde{t}_1,\widetilde{t}_1+\delta)\times O^s.$$

მაშინ არსებობს (2.2.17) სისტემის ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, $\chi(t)$, სადაც $\psi(t_0)=const\leq 0$, რომ ადგილი აქვს (2.2.18) და (2.2.19). მასთან

$$-\psi(\widetilde{t}_0+)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)-\overline{\psi}(\widetilde{t}_0+)[-\sum_{j=1}^{k}\overline{A}_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})F_i^{+}]+\sum_{i=p+1}^{s}\overline{\psi}(\gamma_i+)F_i^{+}\dot{\gamma}_i^{+}\ +\chi(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\geq 0,$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}\overline{A}_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+))+F_{s+1}^{+}]\leq 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.12. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i<(a,b)$, $i=0,1$ და შესრულებულია 2.2.18) და *თეორემა 2.2.10* და *2.2.11* პირობები. გარდა ამისა, ვთქვათ

$$\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{-}-\hat{\gamma}_i^{-})F_i^{-}=\sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^{+}-\hat{\gamma}_i^{+})F_i^{+}=F_0$$

$$F_i^{-}\dot{\gamma}_i^{-}=F_i^{+}\dot{\gamma}_i^{+}=F_i,\quad F_{s+1}^{-}=F_{s+1}^{+}=F_{s+1}.$$

მაშინ არსებობს (2.2.17) სისტემის ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$, $\chi(t)$, სადაც $\psi(t_0) = const \le 0$, რომ ადგილი აქვს (2.2.18) და (2.2.19). მასთან

$+\chi(t_0)\dot{\varphi}(t_0)$

$$-\psi(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \overline{\psi}(\widetilde{t}_0+)[-\sum_{j=1}^{k} \overline{A}_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + F_0] + \sum_{i=p+1}^{s} \overline{\psi}(\gamma_i)F_i = 0;$$

$$\overline{\psi}(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} \overline{A}_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1)) + F_{s+1}] = 0.$$

2.2.3. წრფივი ამოცანა. ვთქვათ (2.2.14) - (2.2.16) ამოცანაში

$$A_j(t) = A_j = const, \quad a_j^0(t) = a_j^0 = const, \quad f(t, x_1, ..., x_s, u_1, ..., u_\nu) = \sum_{i=1}^{s} C_i x_i + \sum_{i=1}^{\nu} D_i u_i + f(t),$$

$$f^0(t, x_1, ..., x_s, u_1, ..., u_\nu) = \sum_{i=1}^{s} c_i^0 x_i + \sum_{i=1}^{\nu} d_i^0 u_i + f^0(t),$$

სადაც C_i, D_i-მუდმივი მატრიცებია შესაბამისი განზომილებით; c_i^0 და d_i^0-მუდმივი ვექტორები;

ვთქვათ $\tau_1(t) = t$, $\tau_i(t) = t - \tau_i$, $i = 2, ..., s$, $0 < \tau_2 < ... < \tau_s$; $\eta_j(t) = t - \eta_j$, $j = 1, ..., k$, $0 < \eta_1 < ... < \eta_k$; $\theta_m(t) = t - \theta_m$, $m = 1, ..., \nu$, $0 \le \theta_1 < ... < \theta_\nu$; $F(t) = (f^0(t), f(t))^*$-უწყვეტი ფუნქცია;

Ω_0-არის, პირველი გვარის წყვეტის წერტილების მქონე უბან-უბან უწყვეტ $u(t) \in U$, $t \in [a - \theta_\nu, b]$ ფუნქციათა სიმრავლე; $\overline{C}_i = (c_i^0, c_i)^*$.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.13. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_0 > a$ და შესრულებულია პირობები: $\widetilde{t}_0 + \tau_s < \widetilde{t}_1$, $\widetilde{t}_1 + \eta_k < \widetilde{t}_1$. მაშინ არსებობს სისტემის

$$\dot{\psi}(t) = -\overline{\psi}(t)\overline{C}_1 - \sum_{i=2}^{s} \overline{\psi}(t + \tau_i)\overline{C}_i + \sum_{j=1}^{k} \dot{\overline{\psi}}(t + \eta_j)\overline{A}_j, \quad t \in [\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1], \quad \overline{\psi}(t) = 0, \quad t > \widetilde{t}_1 \qquad (2\,2.20)$$

არანულოვანი უბან-უბან უწყვეტი $\overline{\psi}(t) = (\psi_0(t), \psi(t))$ ამონახსნი, სადაც $\psi_0(t) = const \le 0$, რომ ადგილი აქვს შემდეგს

2.2.21) ფუნქცია

$$\psi(t) - \sum_{j=1}^{k} \overline{A}_j(t + \eta_j)\overline{\psi}(t + \eta_j)$$

უწყვეტია $[\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1]$ ინტერვალზე;

2.2.22)

$$[\sum_{m=1}^{\nu}\chi_{[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1]}(t+\theta_m)\overline{\psi}(t+\theta_m)\overline{D}_i]\tilde{u}(t)=\max_{u\in U}[\sum_{m=1}^{\nu}\chi_{[\tilde{t}_0,\tilde{t}_1]}(t+\theta_m)\overline{\psi}(t+\theta_m)\overline{D}_i]u,$$

$$t\in[\tilde{t}_0-\theta_m,\tilde{t}_1-\theta_1];$$

2.2.23)

$$\sum_{i=2}^{s}\int_{\tilde{t}_0-\tau_i}^{\tilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\tau_i)\overline{C}_i\tilde{\varphi}(t)dt+\sum_{i=1}^{k}\int_{\tilde{t}_0-\tau_i}^{\tilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\eta_j)A_j\dot{\tilde{\varphi}}(t)dt\geq\sum_{i=2}^{s}\int_{\tilde{t}_0-\tau_i}^{\tilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\tau_i)\overline{C}_i\varphi(t)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{\tilde{t}_0-\tau_i}^{\tilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\eta_j)A_j\dot{\varphi}(t)dt,\quad\forall\varphi\in\Phi_0;$$

2.2.24)

$$-[\sum_{j=1}^{k}\overline{\psi}(\tilde{t}_0+\eta_j-)\overline{A}_j]\dot{\tilde{\varphi}}(\tilde{t}_0)+\overline{\psi}(\tilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}\overline{A}_j\dot{\tilde{\varphi}}(\tilde{t}_0-\eta_j)+\overline{C}_1x_{00}+\sum_{i=2}^{s}\overline{C}_i\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0-\tau_i)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\nu}\overline{D}_m\tilde{u}(\tilde{t}_0-\theta_m-)+\{\sum_{i=2}^{s}\overline{\psi}(\tilde{t}_0+\tau_i-)\overline{C}_i\}](x_{00}-\tilde{\varphi}(\tilde{t}_0))]+\overline{\psi}(\tilde{t}_0)F(\tilde{t}_0)\leq 0,$$

$$\overline{\psi}(\tilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}\overline{A}_j\dot{\tilde{x}}(\tilde{t}_1-\eta_j-)+\overline{C}_1x_{11}+\sum_{i=2}^{s}\overline{C}_i\tilde{x}(\tilde{t}_1-\tau_i)+\sum_{m=1}^{\nu}\overline{D}_m\tilde{u}(\tilde{t}_1-\theta_m-)+\dot{\psi}(\tilde{t}_1)]\geq 0.$$

შენიშვნა 2.2.2. თუ $\tilde{t}_0$ და $\tilde{t}_1$ მომენტების ვარიაცია ხდება მარჯვნიდან, მაშინ ცხადია *თეორემა 2.2.12* ძალაში რჩება იმ განსხვავებით, რომ 2.2.24)-ში უტოლობები შეიცვლება საწინალმდეგო უტოლობებით, ხოლო მარცხენა ზღვრები მარჯვენა ზღვრებით, თუ $\tilde{u}(t)$ ფუნქცია უწყვეტია $t=\tilde{t}_i-\theta_m$, $i=0,1$, $m=1,\dots,\nu$ წერტილებში, მაშინ 2.2.24) უტოლობები შეიცვლება ტოლობებით.

ვთქვათ $a_j^0=0$ და $f^0=1$, მაშინ მიიღება ამოცანა სწრაფქმედების აზრით ე. ი. ამოცანა სადაც ხორციელდება t_1-t_0 მინიმიზაცია.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2.14. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i \in (a,b)$, $i=0,1$ და შესრულებულია პირობები: $\widetilde{t}_0+\tau_s<\widetilde{t}_1$, $\widetilde{t}_0+\eta_k<\widetilde{t}_1$, $\eta_j = j\eta$, $\eta>0$. ვთქვათ გარდა ამისა წერტილები $\widetilde{t}_0+\tau_i$, $i=1,\dots,s$ არ ემთხვევა $\widetilde{t}_1 - j\eta \in [\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]$, $j=1,2,\dots$ სახის წერტილებს, $\widetilde{u}(t-\theta_m)$, $m=1,\dots,\nu$ და $\dot{\widetilde{x}}(t-\eta j)$, $j=1,\dots,k$ ფუნქციები უწყვეტია $\widetilde{t}_1$ წერტილში, მაშინ არსებობს სისტემის

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t)C_1 - \sum_{i=2}^{s}\psi(t+\tau_i)C_i + \sum_{j=1}^{k}\dot{\psi}(t+j\eta)A_j, \quad t\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1], \quad \psi(t)=0, \quad t>\widetilde{t}_1 \qquad (2.2.21)$$

ისეთი არანულოვანი უბან-უბან უწყვეტი ამონახსნი $\psi(t)$, რომ შესრულებულია პირო ბები:

2.2.25) ფუნქცია $\psi(t)-\sum_{j=1}^{k}\psi(t+\eta j)A_j(t+\eta j)$ უწყვეტია ინტერვალზე $[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]$;

2.2.26)

$$[\sum_{m=1}^{\nu}\chi_{[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]}(t+\theta_m)\overline{\psi}(t+\theta_m)D_m]\widetilde{u}(t) = \max_{u\in U}[\sum_{m=1}^{\nu}\chi_{[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]}(t+\theta_m)\psi(t+\theta_m)D_m]u,$$

$$t\in[\widetilde{t}_0-\theta_m,\widetilde{t}_1-\theta_1]; \qquad (2.2.22)$$

$$\sum_{i=2}^{s}\int_{\widetilde{t}_0-\tau_i}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\tau_i)C_i\widetilde{\varphi}(t)dt + \sum_{i=1}^{k}\int_{\widetilde{t}_0-\tau_i}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\eta_j)A_j\dot{\widetilde{\varphi}}(t)dt \geq \sum_{i=2}^{s}\int_{\widetilde{t}_0-\tau_i}^{\widetilde{t}_0}\psi(t+\tau_i)c_i\varphi(t)dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{\widetilde{t}_0-\tau_i}^{\widetilde{t}_0}\psi(t+\eta_j)A_j\dot{\varphi}(t)dt, \quad \forall\varphi\in\Phi_0;$$

2.2.27)

$$-[\sum_{j=1}^{k}\psi(\widetilde{t}_0+\eta j)A_j]\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) + \psi(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}A_j\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0-\eta j) + C_1x_{00} + \sum_{i=2}^{s}C_i\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-\tau_i) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\nu}D_m\widetilde{u}(\widetilde{t}_0-\theta_m)] + \sum_{i=2}^{s}\psi(\widetilde{t}_0+\tau_i)C_i(x_{00}-\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)) + \psi(\widetilde{t}_0)f(\widetilde{t}_0) = 0;$$

$$\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j\dot{\widetilde{x}}(\widetilde{t}_1-\eta_j) + C_1x_{11} + \sum_{i=2}^{s}C_i\widetilde{x}(\widetilde{t}_1-\tau_i) + \sum_{m=1}^{\nu}D_i\widetilde{u}(\widetilde{t}_1-\theta_m)] = 0.$$

§2.3. ოპტიმალური ამოცანები უწყვეტი საწყისი პირობით

2.3.1. ამოცანა ზოგადი სასაზღვრო პირობებით და ფუნქციონალით. განვიხილოთ ოპტი მალური ამოცანა:

$$\dot{x}(t)=\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\dot{x}(\eta_j(t))+f(t,x(\tau_1(t)),...,x(\tau_s(t)),u(\theta_1(t)),...,u(\theta_\nu(t))), \qquad (2.3\ 1)$$

$$t\in[t_0,t_1]\subset J, \quad u\in\Omega_0,$$

$$x(t)=\varphi(t), \quad t\in[\tau,t_0], \quad \varphi\in\Phi_0, \qquad (2.3.2)$$

$$q^i(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))=0, \quad i=1,...,l, \qquad (2.3\ 3)$$

$$q^0(t_0,t_1,x(t_0),x(t_1))\to \min. \qquad (2.3.4)$$

დასაშვებ ელემენტთა სიმრავლე $B_{30}\subset B_3=J^2\times\Phi_0\times\Omega_0$ და ოპტიმალური ელემენტი $\widetilde{\sigma}=(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{\varphi},\widetilde{u})$ განიმარტება ანალოგიურად (იხ. *განსაზღვრება 2.2.1-2.2.3*).

(2.3.1) - (2.3.4) ამოცანას ეწოდება ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანა უწყ ვეტი საწყისი პირობით. იგი მდგომარეობს ოპტიმალური ელემენტის მოძებნაში.

ჩვენი მიზანია (2.3.1) - (2 3.4) ამოცანისათვის ოპტიმალურობის აუცილებელი პირო ბების მიღება.

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.1. ვთქვათ $\widetilde{\nu}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_0>a$ და შესრულებულია პირობები:

2.3.1) არსებობს სასრული ზღვრები:

$$\lim_{\varpi\to\varpi_0}\widetilde{f}(\varpi)=f^- \qquad \omega\in(a,\widetilde{t}_0]\times O^s, \quad \varpi_0=(\widetilde{t}_0,\widetilde{\varphi}(\tau_1(\widetilde{t}_0)),...,\widetilde{\varphi}(\tau_s(\widetilde{t}_0)));$$

2.3.2) არსებობს სასრული ზღვრები: $\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-)), \quad j=1,...,k,$

$$\lim_{\varpi\to\varpi_{s+1}}\widetilde{f}(\varpi)=f^-_{s+1} \qquad \omega\in(a,\widetilde{t}_1]\times O^s, \quad \varpi_{s+1}=(\widetilde{t}_1,\widetilde{x}(\tau_1(\widetilde{t}_1)),...,\widetilde{x}(\tau_s(\widetilde{t}_1))).$$

მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,...,\pi_l)\neq0, \quad \pi_0\le0$ და (2.2.5) სისტემის ამონახსნი $\psi(t), \ \chi(t)$, რომ შესრულებულია გაწრფივებული ინტეგრალური მაქსიმუმის პრინციპი სამართი ფუნქციისათვის. (იხ. (2.2.5)). გარდა ამისა

$$[\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\chi(\widetilde{t}_0)]\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\psi(\rho_j(t))A_j(\rho_j(t))\dot{\rho}_j(t)\dot{\widetilde{\varphi}}(t)dt \ge [\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\chi(\widetilde{t}_0)]\varphi(\widetilde{t}_0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\psi(\gamma_i(t))\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\varphi(t)dt+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\psi(\rho_j(t))A_j(\rho_j(t))\dot{\rho}_j(t)\dot{\varphi}(t)dt,$$

$$\forall\varphi\in\Phi_0; \tag{2.3.5}$$

$$\pi\widetilde{Q}_{t_0}+[\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0-)]\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\ge\psi(\widetilde{t}_0-)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)+f^-)],$$

$$\pi\widetilde{Q}_{t_1}\ge-\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-))+f_{s+1}^-],$$

$$\pi\widetilde{Q}_{x_1}=\psi(\widetilde{t}_1)=\chi(\widetilde{t}_1). \tag{2.3.6}$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.2. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_1<b$ და შესრულებულია პირობები:

2.3.3) არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\varpi\to\varpi_0}\widetilde{f}(\varpi)=f^+\qquad \omega\in[\widetilde{t}_0,b]\times O^s;$$

2.2.4) არსებობს სასრული ზღვრები:

$$\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+)),\quad j=1,\dots,k,\qquad \lim_{\varpi\to\varpi_{s+1}}\widetilde{f}(\varpi)=f_{s+1}^+,\qquad \omega\in[\widetilde{t}_1,b]\times O^s.$$

მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,\dots,\pi_l)\neq0$, $\pi_0\le0$ და (2.2.5) სისტემის ამონახსნი $\psi(t)$, $\chi(t)$, რომ სამართლიანია გაწრფივებული მაქსიმუმის პრინციპი სამართი ფუნქციის მიმართ (იხ. (2.2.5)) (2.3.5) და (2.3.6). მასთან

$$\pi\widetilde{Q}_{t_0}+[\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0+)]\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\le\psi(\widetilde{t}_0+)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)+f^+)],$$

$$\pi\widetilde{Q}_{t_1}\le-\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+))+f_{s+1}^+].$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.3. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $i=0,1;$ ფუნქციები $\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(t))$, $j=1,\dots,k$, უწყვეტია $\widetilde{t}_1$ წერტილში და შესრულებულია პირობები:

$$\widetilde{t}_0\notin I(\widetilde{t}_0;\widetilde{t}_1),\qquad f^+=f^-=f,\qquad f_{s+1}^+=f_{s+1}^-=f_{s+1}.$$

მაშინ არსებობს ვექტორი $\pi=(\pi_0,\ldots,\pi_l)\neq 0$, $\pi_0\leq 0$ და (2.2.5) სისტემის ამონახსნი $\psi(t)$, $\chi(t)$, რომ სამართლიანია გაწრფივებული მაქსიმუმის პრინციპი სამართი და საწყისი ფუნქციებისთვის და (2 3.5) პირობა. მასთან

$$\pi\widetilde{Q}_{t_0}+[\pi\widetilde{Q}_{x_0}+\psi(\widetilde{t}_0)]\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)=\psi(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)+f)],$$

$$\pi\widetilde{Q}_{t_1}=-\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1))+f_{s+1}].$$

ჩვენ არ შევჩერდებით *თეორემა 2.2.4-2.2.9* ანალოგიური თეორემების ჩამოყა ლიბებაზე. დაინტერესებული მკითხველისათვის მათი ფორმულირება არავითარ სიძნე ლეს არ წარმოადგენს.

2.3.2. ამოცანა დამაგრებული მარჯვენა ბოლოთი და ინტეგრალური ფუნქციონალით.

განვიხილოთ (2.2.14) - (2.2.16) ამოცანა, სადაც (2.2.15) შეცვლილია პირობით

$$x(t)=\varphi(t),\quad t\in[\tau,t_0],\quad x(t_1)=x_{11},\quad \varphi\in\Phi_0. \tag{2.3.7}$$

სტანდარტული გზით ამოცანა (2.2.14), (2.2.15), (2.3.7) დაიყვანება (2.3.1) - (2.3.4) ამოცანის კერძო შემთხვევაზე.

ქვემოთ მოყვანილი თეორემები წარმოადგენენ *თეორემა 2.3.1-2.3.3* უშუალო შედ ეგს.

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.4. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_0>a$ და შესრულებუ ლია პირობები:

2.3.5) არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\varpi\to\varpi_0}\widetilde{F}(\varpi)=F_0^-,\quad \omega\in[a,\widetilde{t}_0]\times O^s;$$

2.3.6) არსებობს სასრული ზღვრები:

$$\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-)),\quad j=1,\ldots,k,\qquad \lim_{\varpi\to\varpi_0}\widetilde{F}(\varpi)=F_1^-,\quad \omega\in[a,\widetilde{t}_1]\times O^s.$$

მაშინ არსებობს (2.2.17) სისტემის ისეთი არანულოვანი ამონახსენი $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, $\chi(t)$, სადაც $\psi_0(t)=const\leq 0$, რომ ადგილი აქვს (2.2.18). გარდა ამისა

$$\chi(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\widetilde{\varphi}(t)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\rho_i(t))\overline{A}_j(\rho_i(t))\dot{\rho}_i(t)\dot{\widetilde{\varphi}}(t)dt \ge \chi(\widetilde{t}_0)\varphi(\widetilde{t}_0)+$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\gamma_i(t))\widetilde{F}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\varphi(t)dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(\rho_i(t))\overline{A}_j(\rho_i(t))\dot{\rho}_i(t)\dot{\varphi}(t)dt, \qquad \forall\varphi\in\Phi_0; \tag{2.3.8}$$

$$\psi_0(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}a_j^0(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+f_0^{0-}]+\psi(\widetilde{t}_0-)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+f_0^- - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)]\le 0,$$

$$\psi_0(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}a_j^0(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-))+f_1^{0-}]+\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-))+f_1^-]\ge 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.5. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_1<b$ და შესრულებულია პირობები:

2.3.7) არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{\varpi\to\varpi_0}\widetilde{F}(\varpi)=F_0^+, \quad \omega\in[\widetilde{t}_0,b)\times O^s;$$

2.3.8) არსებობს სასრული ზღვრები

$$\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+)), \quad j=1,\dots,k, \qquad \lim_{\varpi\to\varpi_0}\widetilde{F}(\varpi)=F_1^+, \quad \omega\in[\widetilde{t}_1,b)\times O^s.$$

მაშინ არსებობს (2.2.17) სისტემის ისეთი არანულოვანი ამონახსენი $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, $\chi(t)$, სადაც $\psi_0(t)=const\le 0$, რომ ადგილი აქვს (2.2.18), (2.3.8).

გარდა ამისა

$$\psi_0(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}a_j^0(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+f_0^{0+}]+\psi(\widetilde{t}_0+)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+f_0^+ - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)]\ge 0,$$

$$\psi_0(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}a_j^0(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+))+f_1^{0+}]+\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1+))+f_1^+]\le 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.6. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(t))$, $j=1,\dots,k$, ფუნქციები უწყვეტია $t=\widetilde{t}_1$ წერტილში და შესრულებულია პირობები:

$$F_0^- = F_0^+ = F_0, \qquad F_1^+ = F_1^- = F_1.$$

მაშინ არსებობს (2.2.17) სისტემის ისეთი არანულოვანი ამონახსნი $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$, $\chi(t)$, სადაც $\psi_0(t)=const\le 0$, რომ ადგილი აქვს (2.2.18), (2.3.8). გარდა ამისა

$$\psi_0(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k} a_j^0(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+f_0^0]+\psi(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0))+f_0-\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)]=0,$$

$$\psi_0(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} a_j^0(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1))+f_1^0]+\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1))+f_1\ ]=0.$$

2.3.3. წრფივი ამოცანა. ვთქვათ (2.2.14), (2.2.16), (2.3.7) ამოცანაში f^0 და f წრფივია (იხ. პუნქტი 2.2.3)-ში მოყვანილი მოთხოვნები და აღნიშვნები).

თ ე ო რ ე მ ა 2.3.7. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია, $\widetilde{t}_0>a$ და შესრულებულია პირობები: $\widetilde{t}_0+\tau_s<\widetilde{t}_1$, $\widetilde{t}_0+\eta_k<t_1$. მაშინ არსებობს (2.2.20) სისტემის არანულოვანი უბან-უბან უწყვეტი $\overline{\psi}(t)=(\psi_0(t),\psi(t))$ ამონახსნი, სადაც $\psi_0(t)=const\le 0$, რომ ადგილი აქვს 2.2.21) და 2.2.22) პირობას. გარდა ამისა

$$\chi(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0)+\sum_{i=1}^{s}\int_{\widetilde{t}_0-\tau_i}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\tau_i)\overline{C}_i\widetilde{\varphi}(t)dt+\sum_{j=1}^{k}\int_{\widetilde{t}_0-\eta_j}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\eta_j)A_j\dot{\widetilde{\varphi}}(t)dt\ge$$

$$\ge\chi(\widetilde{t}_0)\varphi(\widetilde{t}_0)+\sum_{i=1}^{s}\int_{\widetilde{t}_0-\tau_i}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\tau_i)\overline{C}_i\varphi(t)dt+\sum_{j=1}^{k}\int_{\widetilde{t}_0-\eta_j}^{\widetilde{t}_0}\overline{\psi}(t+\eta_j)A_j\dot{\varphi}(t)dt\qquad\forall\varphi\in\Phi_0;$$

$$\psi_0(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}a_j^0(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0-\eta_j)+\sum_{i=1}^{s}c_i^0\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-\tau_i)+\sum_{m=1}^{\nu}d_m^0\widetilde{u}(\widetilde{t}_0-\theta_m)+f^0(\widetilde{t}_0)]+$$

$$+\psi(\widetilde{t}_0-)[\sum_{j=1}^{k}A_j\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0-\eta_j)+\sum_{i=1}^{s}C_i\widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0-\tau_i)+\sum_{m=1}^{\nu}D_m\widetilde{u}(\widetilde{t}_0-\theta_m-)-\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)]\le 0;$$

$$\psi_0(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}a_j^0\dot{\widetilde{x}}(\widetilde{t}_1-\eta_j-)+c_1^0x_{11}+\sum_{i=2}^{s}c_i^0\widetilde{x}(\widetilde{t}_1-\tau_i)+\sum_{m=1}^{\nu}d_m^0\widetilde{u}(\widetilde{t}_1-\theta_m-)+f^0(\widetilde{t}_1)]+$$

$$+\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}A_j\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_1-\eta_j)+C_1x_{11}+\sum_{i=2}^{s}C_i\widetilde{x}(\widetilde{t}_1-\tau_i)+\sum_{m=1}^{\nu}D_m\widetilde{u}(\widetilde{t}_1-\theta_m-)+f(\widetilde{t}_1)]\ge 0.$$

ახლა განვიხილოთ ამოცანა სწრაფქმედების აზრით. ვთქვათ $a_j^0=0$, $c_i^0=0$, $d_m^0=0$, $f^0\equiv 1$, $\eta_j=j\eta$, $\eta>0$.

თ ე ო რ ე მ ა 23.8. ვთქვათ $\widetilde{v}$ ოპტიმალური ელემენტია $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $i=0,1$ და შესრუ ლებულია პირობები: $\widetilde{t}_0+\tau_s<\widetilde{t}_1$, $\widetilde{t}_0+\eta k<\widetilde{t}_1$, $\widetilde{t}_1-\widetilde{t}_0$ არ არის η-ს ჯერადი; ფუნქციები $\widetilde{u}(t-\theta_m)$, $m=1,\ldots,\nu$ უწყვეტია წერტილებში $\widetilde{t}_i$, $i=0,1$; $\dot{\widetilde{x}}(t-\eta j)$, $j=1,\ldots,k$. უწყვეტია წერტილში $\widetilde{t}_i$, მაშინ არსებობს (2.2.21) სისტემის ისეთი უბან-უბან

უწყვეტი ამონახსნი $\psi(t)$, რომ შესრულებულია პირობები 2.2.25) და (2.2.22). გარდა ამისა

$$\psi(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k} A_j \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0 - j\eta) + \sum_{i=1}^{s} C_i \widetilde{\varphi}(\widetilde{t}_0 - \tau_i) + \sum_{m=1}^{\nu} D_m \widetilde{u}(\widetilde{t}_0 - \theta_m) + f(\widetilde{t}_0) - \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)] \geq 0$$

$$\psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} A_j \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0 - j\eta) + C_1 x_{11} + \sum_{i=1}^{s} C_i \widetilde{x}(\widetilde{t}_1 - \tau_i) + \sum_{m=1}^{\nu} D_m \widetilde{u}(\widetilde{t}_1 - \theta_m) + f(\widetilde{t}_1)] \ngeq 0.$$

§2.4. თეორემა 2.1.1 დამტკიცება

D_0 სიმრავლე. S გადასახვის დიფერენციალი წერტილში $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u})$.

შემოვიღოთ $\lambda = (t_0, t_1, x_0, \varphi, u)$ ელემენტთა ვექტორული სივრცე

$E_\lambda = R^0_{t_0} \times R^1_{t_1} \times R^n_{x_0} \times E_\varphi \times E_u = R^{2+n}_y \times E_\xi$, სადაც, $y = (t_0, t_1, x_0)^*$, $\xi = (\varphi, u)$, $\lambda = (y, \xi)$.

E_φ და E_u სივრცეში შემოღებული ნორმა (იხ. §1.1) E_λ სივრცეში განსაზღვრავს ვექტორულ, განცალებად ტოპოლოგიას.

R^{2+n}_y სივრცეში განვიხილოთ ლოკალურად ამოხნექილი ტოპოლოგიური ქვესივრცე $Y_0 = [a, \widetilde{t}_0] \times [a, \widetilde{t}_1] \times O$.

D_0 ავღნიშნოთ $\lambda \in Y_0 \times \Phi \times \Omega$ ელემენტების სიმრავლე, რომლებსაც შეესაბამება ამონახსნი $x(t;\lambda)$. ცხადია, რომ $\widetilde{\lambda} \in D_0$.

თეორემა 2.2.1 თანახმად D_0 ღია სიმრავლეა $Y_0 \times E_\xi$ ტოპოლოგიური ქვესიმრავლის მიმართ.

D_0 სიმრავლეზე განვმარტოთ გადასახვა

$$S : D_0 \to R^n_s, \tag{2.4.1}$$

ფორმულით $S(\lambda) = x(t_1; \lambda)$.

ლ ე მ ა 2.4.1. გადასახვა (2.4.1) დიფერენცირებადია $\widetilde{\lambda}$ წერტილში:

$$d\widetilde{S}_\lambda(\delta\lambda) = \delta x(\widetilde{t}_1; \delta\mu) + [\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1) \dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1 -)) + f^-_{s+1}]\delta t_1, \tag{2.4.2}$$

$$\delta\lambda = (\delta y, \delta\xi) = (\delta t_0, \delta t_1, \delta x_0, \delta\varphi, \delta u) \in E_\lambda - \widetilde{\lambda},$$

(იხ.(1.2.3)).

დამტკიცება. $Y_0 - \widetilde{y}$, $\widetilde{y} = (\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0)^*$ და $E_\xi - \widetilde{\xi}$, $\widetilde{\xi} = (\widetilde{\varphi}, \widetilde{u})$ სივრცეებში, შესაბამისად, გან ვიხილოთ ნულის მიდამოები

$$V_0 = \{\delta y = (\delta t_0, \delta t_1, \delta x_0)^* : \delta t_0 \le 0, \delta t_1 \le 0, |\delta t_i| \le c, i = 0,1, |\delta x_0| \le c\},$$

$$V = \{\delta\xi = (\delta\varphi, \delta u) : \|\delta\varphi\| \le c, \|\delta u\| \le c\}.$$

არსებობს ისეთი $\varepsilon_0 > 0$, რომ

$$\widetilde{\lambda} + \varepsilon\delta\lambda \in D_0, \forall(\varepsilon, \delta\lambda) \in [0, \varepsilon_0] \times V_0 \times V$$

და მასთან ადგილი აქვს ფორმულას (1.2.2) (იხ. *თეორემა 1.2.1* და *2.1.2*).

ამრიგად

$$x(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \widetilde{\mu} + \varepsilon\delta\mu) = \widetilde{x}(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \mu) + \varepsilon\delta x(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu) + o(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \varepsilon\delta\mu).$$

გამოვთვალოთ სხვაობა

$$S(\widetilde{\lambda} + \varepsilon\delta\lambda) - S(\widetilde{\lambda}) = x(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \widetilde{\lambda} + \varepsilon\delta\lambda) - x(\widetilde{t}_1) = x(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \widetilde{\lambda} + \varepsilon\delta\lambda) - x(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1) +$$

$$+ \widetilde{x}(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1) - \widetilde{x}(\widetilde{t}_1) = \varepsilon\delta x(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu) + o(\varepsilon\delta\mu) +$$

$$+ \int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1} [\sum_{j=1}^{k} A_j(t)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(t)) + \widetilde{f}[t]]dt, \tag{2.4.3}$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta x(\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1; \delta\mu) = \delta x(\widetilde{t}_1; \delta\mu), \quad \text{თანაბრად } \delta\lambda \in V_0 \times V,$$

$$\int_{\widetilde{t}_1}^{\widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1} [\sum_{j=1}^{k} A_j(t)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(t)) + \widetilde{f}[t]]dt = \varepsilon[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1 -)) + \widetilde{f}_{s+1}^{-}]dt_1 + o(\varepsilon\delta\lambda).$$

(2.4.3) ტოლობიდან, უკანასკნელი ტოლობების გათვალისწინებით, მიიღება ტოლობა

$$S(\widetilde{\lambda} + \varepsilon\delta\lambda) - S(\widetilde{\lambda}) = \varepsilon dS_{\widetilde{\lambda}}(\delta\lambda) + o(\varepsilon\delta\lambda) \tag{2.4.4}$$

სადაც $S_{\widetilde{\lambda}}(\delta\lambda)$ აქვს (2.4.2) სახე ■

D სიმრავლე. P გადასახვის დიფერენციალი $\widetilde{z} = (0, \widetilde{\lambda})$ წერტილში. განვიხილოთ $z = (\xi, \lambda)$ წერტილთა ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცე $E_z = R^1_\xi \times E_\lambda$.

შემოვიღოთ სიმრავლეები

$$Y = [0, \infty) \times Y_0, \qquad D = [0, \infty) \times D_0.$$

D სიმრავლეზე განვმარტოდ ასახვა

$$P : D \to R_p^{1+l}$$

ფორმულით

$$P(z) = Q(t_0, t_1, x_0, S(\lambda)) + (\xi, 0, \dots, 0)^*,$$

სადაც $Q = (q^0, \dots, q^l)^*$.

ლ ე მ ა 2.4.2. P გადასახვა დიფერენცირებადია $\widetilde{z}$ წერტილში:

$$dP_{\widetilde{z}}(\delta z) = \{\widetilde{Q}_{t_0} + \widetilde{Q}_{x_1} Y(\widetilde{t}_0-; \widetilde{t}_1)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^-] -$$

$$- \sum_{i=p+1}^{s} \widetilde{Q}_{x_1} Y(\gamma_i -; \widetilde{t}_1) f_i^- \dot{\gamma}_i^- - \widetilde{Q}_{x_1} \Phi(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\}\delta t_0 + \{\widetilde{Q}_{t_1} + \widetilde{Q}_{x_1}[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1) \times \dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1 -)) +$$

$$+ f_{s+1}^-]\}\delta t_0 + (\widetilde{Q}_{x_0} + \widetilde{Q}_{x_1}\Phi(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1))\delta x_0 + \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \widetilde{Q}_{x_1} Y(\gamma_i(t); \widetilde{t}_1)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\delta\varphi(t)dt +$$

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \widetilde{Q}_{x_1} Y(\rho_j(t); \widetilde{t}_1) A_j(\rho_j(t); \dot{\rho}_j(t)\dot{\delta\varphi}(t)dt + \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \widetilde{Q}_{x_1} Y(t; \widetilde{t}_1) \sum_{m=1}^{\nu} \widetilde{f}_{um}[t]\delta u(\theta_m(t))dt +$$

$$+ (\delta\xi, 0, \dots, 0)^*. \qquad (2.4.5)$$

დამტკიცება. ვთქვათ $V_0 \subset Y - \widetilde{y}$, $\widetilde{y} = (0, \widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0)^*$ და $V \subset E_\xi - \widetilde{\xi}$ ნულის ამოზნექილი შემოსაზღვრული მიდამოებია.

არსებობს ისეთი $\varepsilon_0 > 0$, რომ

$$\widetilde{z} + \varepsilon\delta z \in D, \quad \forall(\varepsilon, \delta z) \in [0, \varepsilon_0] \times V_0 \times V$$

და სამართლიანია (2.4.2) ფორმულა.

გვაქვს

$$P(\widetilde{z} + \varepsilon\delta z) - P(\widetilde{z}) = Q(\widetilde{t}_0 + \varepsilon\delta t_0, \widetilde{t}_1 + \varepsilon\delta t_1, \widetilde{x}_0 + \varepsilon\delta x_0, S(\widetilde{\lambda} + \varepsilon\delta\lambda)) - Q(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, S(\widetilde{\lambda})) +$$

$$+ \varepsilon(\delta\xi, 0, \dots, 0)^* = \int_0^1 \frac{d}{dv} Q^\varepsilon dv + \varepsilon(\delta\xi, 0, \dots, 0)^* = \varepsilon\{\widetilde{Q}_{t_0}\delta t_0 + \widetilde{Q}_{t_1}\delta t_1 + \widetilde{Q}_{x_0}\delta x_0 + \widetilde{Q}_{x_1} dS_{\widetilde{\lambda}}(\delta\lambda) +$$

$$+ \varepsilon(\delta\xi, 0, \dots, 0)^*\} + \varepsilon\int_0^1 \{(Q_{t_0}^\varepsilon - \widetilde{Q}_{t_0})\delta t_0 + (Q_{t_1}^\varepsilon - \widetilde{Q}_{t_1})\delta t_1 + (Q_{x_0}^\varepsilon - \widetilde{Q}_{x_0})\delta x_0 +$$

$$+ (Q_{x_1}^\varepsilon - \widetilde{Q}_{x_1}) dS_{\widetilde{\lambda}}(\delta\lambda)\} dv + o(\varepsilon\delta\lambda),$$

(იხ. (2.4.4)),

სადაც

$$Q^\varepsilon = Q = (\widetilde{t}_0 + v\varepsilon\delta t_0, \widetilde{t}_1 + v\varepsilon\delta t_1, \widetilde{x}_0 + v\varepsilon\delta x_0, S(\widetilde{\lambda}) + v(S(\widetilde{\lambda} + \varepsilon\delta\lambda) - S(\widetilde{\lambda})).$$

ცხადია, როცა $\varepsilon \to 0$, მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მიისწრაფვის ნულისკენ.

$$P(\widetilde{z} + \varepsilon\delta z) - P(\widetilde{z}) = \varepsilon\{\widetilde{Q}_{t_0}\delta t_0 + \widetilde{Q}_{t_1}\delta t_1 + \widetilde{Q}_{x_0}\delta x_0 + \widetilde{Q}_{x_1}, S_{\widetilde{\lambda}}(\delta\lambda) + (\delta\xi, 0, \dots, 0)^*\} + o(\varepsilon\delta\lambda).$$

აქედან (2.4.2) და (1.2.3) ფორმულების გათვალისწინებით მიიღება (2 4.5) ■

ამოზნექილი $\phi_{\widetilde{z}}$ ფილტრი. P გადასახვის უწყვეტობა და კრიტიკულობა $\phi_{\widetilde{z}}$ ფილტრზე. E_z სივრცეში შემოვიღოთ $\phi_{\widetilde{z}}$ ფილტრი შემდეგი ბაზისით,

$$\Lambda = \{W_{\widetilde{z}}(\delta) = ([0,\infty) \cap V(0,\delta)) \times ([a,\widetilde{t}_0] \cap V(\widetilde{t}_0,\delta)) \times ([a,\widetilde{t}_1] \cap V(\widetilde{t}_1,\delta)) \times V(\widetilde{x}_0,\delta)) \times$$

$$\times (\Phi_0 \cap V(\widetilde{\varphi},\delta) \times (\Omega_0 \cap V(\widetilde{u},\delta)) : \delta > 0\},$$

სადაც

$$V(0,\delta) \subset R^1_\xi, \quad V(\widetilde{t}_0,\delta) \subset R^1_{\widetilde{t}_0}, \quad V(\widetilde{t}_1,\delta) \subset R^1_{\widetilde{t}_1}, \quad V(\widetilde{x}_0,\delta) \subset O \subset R^n, \quad V(\widetilde{\varphi},\delta) \subset E_\varphi,$$

$$V(\widetilde{u},\delta) \subset E_u,$$

შესაბამისად, $0, \widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, \widetilde{\varphi}, \widetilde{u}$ წერტილების ამოზნექილი δ-მიდამოებია.

ფილტრი $\phi_{\widetilde{z}}$ ამოზნექილია, რადგანაც ამოზნექილია Λ ბაზისი. *თეორემა 2.1.2*-ის თანახმად არსებობს $W_{\widetilde{z}} \in \phi_{\widetilde{z}}$ ისეთი რომ $W_{\widetilde{z}} \subset D$ და მასთან გადასახვა

$$P : W_{\widetilde{z}} \to R^{1+l}_p$$

უწყვეტია E_Z-დან ინდუცირებულ ტოპოლოგიაში.

ვაჩვენოთ P გადასხვის კრიტიკულობა $\phi_{\widetilde{z}}$ ფილტრზე. წერტილი $\widetilde{z}$ ეკუთვნის $\phi_{\widetilde{z}}$ ფილტრის ყველა ელემენტს და $P(\widetilde{z}) = (q^0(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1), 0, \ldots, 0)^*$.

ნებისმიერი $z = (\xi, \lambda) \in W_{\widetilde{z}} \cap ([0,\infty) \times B_{20})$ ელემენტისათვის, სადაც $W_{\widetilde{z}} \in \phi_{\widetilde{z}}$ გვაქვს

$$P(z) = (q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1; z)), 0, \ldots, 0)^* + (\xi, 0, \ldots, 0)^*.$$

აქ იგულისხმება, რომ $x(t;z) = x(t;\lambda)$ რადგან λ და z ელემენტებს შეესაბამებათ ერთი და იგივე ამონახსნები.

ოპტიმალური ელემენტის განმარტებიდან გამომდინარეობს ისეთი $W_{\widetilde{z}}(\widetilde{\delta}) \in \phi_{\widetilde{z}}$ არსებობა, რომ ნებისმიერი $z \in W_{\widetilde{z}}(\widetilde{\delta}) \cap ([0,\infty) \times B_{20})$, ადგილი აქვს უტოლობას

$$q^0(\widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1) \le q^0(t_0, t_1, x_0, x(t_1; z)) + \xi.$$

განვიხილოთ სიმრავლე

$$L = \{(p^0, 0, \ldots, 0)^* \in R^{1+l}_p : p^0 \in R\}.$$

ცხადია, რომ სიმრავლე

$$P(W_{\widetilde{z}}(\widetilde{\delta}) \cap ([0,\infty) \times B_{20}) \subset L$$

და $P(\widetilde{z})$ არის მისი საზღვრითი (ყველაზე დაბალი წერტილი) L სივრცის მიმართ. წინააღმდეგ შემთხვევაში $\widetilde{\lambda} \in B_{20}$ ელემენტი არ იქნებოდა ოპტიმალური.

ამრიგად, $P(\widetilde{z}) \in \partial P(W_{\widetilde{z}}(\widetilde{\delta}))$ ე.ი. P ასახვა კრიტიკულია $\phi_{\widetilde{z}}$ ფილტრზე.

აუცილებელი პირობების გამოყვანა. თეორემა 2.1.1-ის ყველა მოთხოვნა შესრულებულია, ამიტომ არსებობენ არანულოვანი ვექტორი $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_l)$ და $W_{\widetilde{z}}(\hat{\delta}) \in \phi_{\widetilde{z}}$ ისეთი, რომ

$$\pi dP_{\widetilde{z}}(\delta z) \le 0, \quad \forall \delta z \in cone(W_{\widetilde{z}}(\hat{\delta}) - \widetilde{z}), \tag{2.4.6}$$

სადაც $dP_{\widetilde{z}}(\delta z)$ დიფერენციალს აქვს სახე (2.4.5).

შემოვიღოთ ფუნქციები

$$\psi(t) = \pi \widetilde{Q}_{x_1} Y(t; \widetilde{t}_1), \qquad \chi(t) = \pi \widetilde{Q}_{x_1} \Phi(t; \widetilde{t}_1). \tag{2.4.7}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\psi(\widetilde{t}_1) = \pi \widetilde{Q}_{x_1}, \qquad \chi(\widetilde{t}_1) = \pi \widetilde{Q}_{x_1}, \qquad \psi(t) = \chi(t) = 0, \quad t > \widetilde{t}_1$$

და $\psi(t)$, $\chi(t)$ არის (2.2.5) სისტემის ამონახსნი.

(2.4.6) უტოლობიდან, (2.4.5) და (2.4.7) გათვალისწინებით მიიღება

$$\begin{aligned}
&\{\pi \widetilde{Q}_{\widetilde{t}_0} + \psi(\widetilde{t}_0 -)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0 -) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0) \dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + \sum_{i=0}^{p} (\hat{\gamma}_{i+1}^{-} - \hat{\gamma}_i^{-}) f_i^{-}] - \sum_{i=p+1}^{s} \psi(\gamma_i^{-}) f_i^{-} \dot{\gamma}_i^{-} - \\
&- \chi(\widetilde{t}_0) \dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0)\} \delta t_0 + \{\pi \widetilde{Q}_{t_1} + \psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1) \times \dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1 -)) + f_{s+1}^{-}]\} \delta t_1 + (\pi \widetilde{Q}_{x_0} + \chi(\widetilde{t}_0)) \delta x_0 + \\
&+ \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \delta\varphi(t) dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\rho_j(t)) A_j(\rho_j(t)) \times \dot{\rho}_j(t) \dot{\delta\varphi}(t) dt + \\
&+ \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \psi(t) \sum_{m=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_m}[t] \delta u(\theta_m(t)) dt + \pi_0 \delta\xi \le 0,
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

$$\forall \delta z \in cone(W_{\widetilde{z}}(\hat{\delta}) - \widetilde{z}).$$

თავიდანვე შევნიშნავთ, რომ პირობა $\delta z \in cone(W_{\widetilde{z}}(\hat{\delta}) - \widetilde{z})$ ექვივალენტურია პირობების:

$$\delta\xi \in [0, \infty), \ \delta t_i \in [-\infty, 0], \quad i = 0,1, \quad \delta x_0 \in R_{x_0}^{n}, \ \delta\varphi \in cone(W_{\widetilde{\varphi}}(\hat{\delta}) - \widetilde{\varphi}), \quad \delta u \in cone(W_{\widetilde{u}}(\hat{\delta}) - \widetilde{u}),$$

სადაც $W_{\widetilde{\varphi}}(\hat{\delta}) = \Phi_0 \cap V(\widetilde{\varphi}, \hat{\delta})$, $W_{\widetilde{u}}(\hat{\delta}) = \Omega_0 \cap V(\widetilde{u}, \hat{\delta})$.

ვთქვათ $\delta t_0 = \delta t_1 = 0$, $\delta x_0 = 0$, $\delta\varphi = 0$, $\delta u = 0$, მაშინ (2.4.8) -დან მიიღება

$$\pi_0 \delta\xi \geq 0, \quad \delta\xi \in [0, \infty).$$

ამრიგად $\pi_0 \leq 0$.

თუ $\delta\xi = 0$, $\delta t_1 = 0$, $\delta x_0 = 0$, $\delta\varphi = 0, \delta u = 0$, მაშინ $\delta t_0 \in (-\infty, 0]$ გათვალისწინებით, (2.4.8) -დან მიიღება პირობა $\widetilde{t}_0$ მომენტისათვის

$$\pi \widetilde{Q}_{t_0} + \psi(\widetilde{t}_0 -)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) + \sum_{i=0}^{p}(\hat{\gamma}_{i+1}^- - \hat{\gamma}_i^-) f_i^-] - \sum_{i=p+1}^{s}\psi(\gamma_i -) f_i^- \dot{\gamma}_i^- - \chi(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) \geq 0.$$

ვთქვათ (2.4.8) უტოლობაში $\delta\xi = 0$, $\delta t_0 = 0$, $\delta x_0 = 0$, $\delta\varphi = 0$, $\delta u = 0$, მაშინ $\delta t_1 \in (-\infty, 0]$ გათვალისწინებით, მიიღება პირობა $\widetilde{t}_1$ მომენტისათვის

$$\pi \widetilde{Q}_{t_1} + \psi(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1 -)) + f_{s+1}^-] \geq 0.$$

თუ $\delta\xi = 0$, $\delta t_i = 0$, $i = 0,1$, $\delta\varphi = 0, \delta u = 0$, მაშინ $\delta x_0 \in R^n_{x_0}$ პირობის გათვალისწინებით მიიღება ტოლობა

$$\pi \widetilde{Q}_{x_0} + \chi(\widetilde{t}_0) = 0.$$

ახლა (2.4.8) ვიგულისხმოდ, რომ $\delta\xi = 0$, $\delta t_i = 0$, $i = 0,1$, $\delta x_0 = 0, \delta u = 0$, მაშინ გვექნება

$$\sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\gamma_i(t)) \widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)] \dot{\gamma}_i(t) \delta\varphi(t) dt + \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \psi(\rho_j(t)) A_j(\rho_j(t)) \times \dot{\rho}_j(t) \dot{\delta\varphi}(t) dt \leq 0,$$

$$\forall \delta\varphi \in cone(W_{\widetilde{\varphi}}(\hat{\delta}) - \widetilde{\varphi}). \tag{2.4.10}$$

მართლაც, ვთქვათ $\varphi \in \Phi_0$ ნებისმიერი ფიქსირებული ფუნქციაა. M სიმრავლის ამოზ ნექილობის გამო, $\varphi_\varepsilon = \widetilde{\varphi} + \varepsilon(\varphi - \widetilde{\varphi}) \in \Phi_0$, $\varepsilon \in [0,1]$. მეორე მხრივ, საკმარისად მცირე $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon \in W_{\widetilde{\varphi}}(\hat{\delta})$. ამრიგად $\varphi_\varepsilon - \widetilde{\varphi} = \varepsilon(\varphi - \widetilde{\varphi}) \in cone(W_{\widetilde{\varphi}}(\hat{\varepsilon}) - \widetilde{\varphi})$. აქედან გამომდინარე ობს, რომ $\varphi - \widetilde{\varphi} \in cone(W_{\widetilde{\varphi}}(\hat{\delta}) - \widetilde{\varphi})$. (2.4.10) ჩართვა დამტკიცებულია.

მაშასადამე (2.4.9) უტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი $\delta\varphi$ -თვის $\Phi_0 - \widetilde{\varphi}$ სიმრავ ლიდან. ყოველივე ეს იძლევა გაწრფივებულ ინტეგრალურ მაქსიმუმის პრინციპს საწყისი ფუნქციისათვის.

ვთქვათ $\delta\xi = 0$, $\delta t_i = 0$, $i = 0,1$, $\delta x_0 = 0, \delta\varphi = 0$, მაშინ

$$\int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \psi(t) \sum_{m=1}^{k} \widetilde{f}_{u_m}[t] \delta u(\theta_m(t)) dt \leq 0, \quad \forall \delta u \in cone(W_{\widetilde{u}}(\hat{\delta}) - \widetilde{u}). \tag{2.4.11}$$

ანალოგიურად მტკიცდება ჩართვა

$$cone(W_{\widetilde{u}}(\hat{\delta})-\widetilde{u})\supset\Omega_0-\widetilde{u}. \qquad (2.4.12)$$

(2.4.11) და (2.4.12) იძლევა გაწრფივებულ ინტეგრალურ მაქსიმუმის პრინციპს მართვისთვის ■

თეორემა 2.3.2 და *2.3.3* და ა.შ. მტკიცდება იგივე მეთოდით იმის მიხედვით, თუ როგორ ხდება $\widetilde{t}_0$ და $\widetilde{t}_1$ მომენტებში ვარიაცია, იცვლება Y სიმრავლის სტრუქტურა და ვარიაციის ფორმულის სახე. მაგალითად *თეორემა 2.12* დამტკიცებისას Y როლში უნდა ავიღოთ სიმრავლე $[0,\infty)\times[\widetilde{t}_0,b]\times[\widetilde{t}_1,b]\times O$ და უნდა ვისარგებლოთ *თეორემა 1.2.2*. *თეორემა 2.1.3* დამტკიცებისას $Y=[0,\infty)\times J^2\times O$ და უნდა ვისარგებლოთ *თეორემა 1.2.3*.

§2.5. თეორემა 2.3.1 დამტკიცება

განვიხილოთ ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცე

$$E_v=R^1_{t_0}\times R^1_{t_1}\times E_\varphi\times E_u=E_y^2\times E_\zeta,$$

სადაც $y=(t_0,t_1)^*$, $\zeta=(\varphi,u)$.

R_y^2 სივრცეში განვიხილოთ ლოკალურად ამოზნექილი ქვესივრცე $Y=[a,\widetilde{t}_0]\times[a,\widetilde{t}_1]$.

D_0 ავღნიშნოთ $v\in Y_0\times\Phi\times\Omega$ ელემენტების სიმრავლე, რომლებსაც შეესაბამება $x(t;v)$.

თეორემა 2.1.2 თანახმად D_0 ღია სიმრავლეა $Y_0\times E_\zeta$ ქვესივრცის მიმართ.

D_0 სიმრავლეზე განვმარტოთ გადასახვა

$$S:D_0\to R_s^n, \qquad (2.5.1)$$

შემდეგი ფორმულით $S(\lambda)=x(t_1;v)$.

ანალოგიური გზით შეიძლება დამტკიცდეს (იხ. *ლემა 2.4.1*), რომ გადასახვა (2.5.1) დიფერენცირებადია $\widetilde{v}=(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{\varphi},\widetilde{u})$ წერტილში:

$$d\widetilde{S}_{\widetilde{v}}(\delta v)=\delta x(\widetilde{t}_1;\delta\sigma)+\Big[\sum_{j=1}^{k}A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1-))+f_1^-\Big],\qquad \delta v\in E_v-\widetilde{v}, \qquad (2.5.2)$$

სადაც $\delta x(\widetilde{t}_1;\delta\sigma)$ აქვს სახე (1.6.6).

ახლა განვიხილოთ ვექტორული სივრცე

$$E_z = R^1_\xi \times E_\nu ,$$

სადაც $z = (\xi, \nu)$.

სიმრავლე $D = [0,\infty) \times D_0$ ღიაა $[0,\infty) \times Y_0 \times E_\varsigma$ სივრცის ტოპოლოგიაში.

D სიმრავლეზე განვმარტოთ გადასახვა

$$P : D \to R^{1+l}_p$$

ფორმულით

$$P(z) = Q(t_0, t_1, x(t_0), S(\nu)) + (\xi, 0, \ldots, 0)^* .$$

ლემა 2.4.2 მსგავსად, (2.5.2), (1.6.5) და (1.6.6) ფორმულების გამოყენებით, მტკიცდება, რომ

$$dP_{\widetilde{z}}(\delta z) = \{\widetilde{Q}_{t_0} + \widetilde{Q}_{x_0}\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) + \widetilde{Q}_{x_1} Y(\widetilde{t}_0 -; \widetilde{t}_1)[\dot{\widetilde{\varphi}}(\widetilde{t}_0) - \sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}(\eta_j(\widetilde{t}_0)) - f^-\}\delta t_0 + \{\widetilde{Q}_{t_1} +$$

$$+ \widetilde{Q}_{x_1}[\sum_{j=1}^{k} A_j(\widetilde{t}_1)\dot{\widetilde{x}}(\eta_j(\widetilde{t}_1 -)) + f^-_{s+1}\}\delta t_1 + \{\widetilde{Q}_{x_0} + \widetilde{Q}_{x_1}\Phi(\widetilde{t}_0; \widetilde{t}_1)\}\delta\varphi(\widetilde{t}_0) +$$

$$+ \sum_{i=p+1}^{s} \int_{\tau_i(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \widetilde{Q}_{x_1} Y(\gamma_i(t); \widetilde{t}_1)\widetilde{f}_{x_i}[\gamma_i(t)]\dot{\gamma}_i(t)\delta\varphi(t)dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \int_{\eta_j(\widetilde{t}_0)}^{\widetilde{t}_0} \widetilde{Q}_{x_1} Y(\rho_j(t); \widetilde{t}_1)A_j(\rho_j(t))\dot{\rho}_j(t)\dot{\delta\varphi}(t)dt +$$

$$+ \int_{\widetilde{t}_0}^{\widetilde{t}_1} \widetilde{Q}_{x_1} Y(t; \widetilde{t}_1)\sum_{m=1}^{\nu} \widetilde{f}_{u_m}[t]\delta u(\theta_m(t))dt. \qquad (2.5.3)$$

E_z სივრცეში შემოვიღოთ $\phi_{\widetilde{z}}$ ფილტრი ამოზნექილი ბაზისის საშუალებით

$$\Lambda = \{W_{\widetilde{z}}(\delta) = ([0,\infty) \cap V(0,\delta)) \times ([a, \widetilde{t}_0] \cap V(\widetilde{t}_0, \delta)) \times ([a, \widetilde{t}_1] \cap V(\widetilde{t}_1, \delta)) \times$$

$$\times (\Phi_0 \cap V(\widetilde{\varphi}, \delta) \times (\Omega_0 \cap V(\widetilde{u}, \delta)) : \delta > 0\}.$$

ფილტრი $\phi_{\widetilde{z}}$ ამოზნექილია, P გადასახვა უწყვეტია და კრიტიკულია ფილტრზე (იხ პუნქტი 2.4.3)).

ამის შემდეგ ანალოგიური მსჯელობით მიიღება ყველა აუცილებელი პირობა ■

§2.6. ეკონომიკური ზრდის ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური ამოცანა

ვთქვათ $Y(t)$ არის t მომენტში გამოშვებული ერთი სახის პროდუქციის რაოდე ნობა, გამოსახული ფულად ერთეულში.

$Y(t)$ ფუნქციის წარმოდგენას შემდეგი სახით

$$Y(t) = C(t) + I(t) + W(t), \qquad (2\ 6\ 1)$$

ეწოდება პროდუქციის გამოშვების ფუნდამეტალური პირობა, სადაც

$$C(t) = cY(t), \quad c \in (0,1) \qquad (2.6.2)$$

არის მოხმარების ფუნქცია ანუ პროდუქციის ის ნაწილი, რომელიც ხმარდება წარმოებას სხვადასხვა საჭიროებისათვის (ხელფასები და ა.შ.), ხოლო c - მოხმარებისადმი სწრაფვის ზღვრული კოეფიციენტია.

$I(t)$ არის ინდუცირებული ინვესტიცია ანუ გამოშვებული პროდუქციის ის ნაწი ლი, რომელიც ხმარდება წარმოების შიგა რეკონსტრუქციას (ახალი დაზგების შეძენას და ა.შ.).

$W(t)$ არის დამოუკიდებელი ინვესტიცია (კაპიტალდაბანდება), იგი უწყვეტი ფუ ნქციაა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$$I(t) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i Y(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{s} \beta_i \dot{Y}(t-\tau_i) + \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \ddot{Y}(t-\eta j) + \sum_{i=1}^{\nu} \omega_i u(t-\theta_i), \qquad (2.6.3)$$

სადაც $0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_s$, $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_\nu$. $\eta > 0$.

(2.6.3) განზოგადოებული აქსელერაცია [41] ითვალისწინებს:

1) $t-\tau_i$, $i = 2,\ldots,s$ მომენტებში გამოშვებულ პროდუქციას, შესაბამისად, $\alpha_i > 0$, $i = 1,\ldots,2$ წონებით;
2) პროდუქციის გამოშვების სიჩქარე $t-\tau_i$, $i = 2,\ldots,s$ მომენტებში, შესაბამისად, $\beta_i > 0$, $i = 1,\ldots,s$ წონებით;
3) პროდუქციის გამოშვების სიჩქარე $t-\eta j$, $j = 0,\ldots,k$ მომენტებში, შესაბამისად, $\gamma_j > 0$, $j = 0,\ldots,k$ წონებით;
4) უბან-უბან უწყვეტი $u(t) \in [u_0, u_1]$, $u_0 \geq 0$, $t \in [a-\theta_\nu, b]$, მართვის გავლენას

$t-\theta_i$, $i=1,\dots,\nu$ მომენტებში, $\varpi_i>0$, $i=1,\dots,\nu$ წონებით;

(2.6.2) და (2.6.3) გამოსახულების გათვალისწინებთ მივიღებთ

$$\ddot{Y}(t)=\sum_{j=1}^{k}a_i\ddot{Y}(t-\eta j)+\sum_{i=1}^{s}c_i\dot{Y}(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{s}e_iY(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{\nu}d_iu(t-\theta_i)+f(t), \qquad (2.6.4)$$

სადაც

$$a_i=-\frac{\gamma_i}{\gamma_0},\qquad i=1,\dots,k\qquad c_i=-\frac{\beta_i}{\gamma_i},\qquad i=1,\dots,s,$$

$$c_0=-\frac{1-c}{\gamma_0},\qquad c_0=-\frac{\alpha_i}{\gamma_0},\qquad i=2,\dots,s$$

$$d_i=-\frac{\varpi_i}{\gamma_0},\qquad i=1,\dots,\nu,\qquad f(t)=-\frac{W(t)}{\gamma_0}.$$

ამოცანა: მინიმალურ დროში მივაღწიოთ პროდუქციის გამოშვების სასურველ დონეს. დავსვათ შესაბამისი ოპტიმალური ამოცანა. (2.6.4) განტოლება გადავწეროთ ექვივალენტური სისტემის სახით

$$\begin{cases}\dot{x}^1(t)=x^2(t)\\ \dot{x}^2(t)=\sum_{j=1}^{k}a_i\dot{x}^2(t-\eta j)+\sum_{i=1}^{s}c_ix^2(t-\tau_i)+\\ +\sum_{i=1}^{s}e_ix^1(t-\tau_i)+\sum_{m=1}^{\nu}d_mu(t-\theta_m)+f(t).\end{cases} \qquad (2.6.5)$$

სადაც $x^1(t)=Y(t)$.

განვიხილოთ სასაზღვრო პირობები:

$$x^1(t)=\varphi^1(t),\quad x^2(t)=\varphi^2(t),\quad t\in[\tau,t_0),\quad x^1(t_0)=x_0^1,\quad x^2(t_0)=x_0^2,$$

$$x^1(t_1)=x_1^1,\quad x^2(t_0)=x_1^2, \qquad (2.6.6)$$

სადაც $\tau=\min(a-\tau_s,a-\eta k)$, $\varphi_1(t)$ და $\varphi_2(t)$, $t\in[\tau,t_0]$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია, x_0^i, $x_1^i>0$, $i=1,2$, მოცემული რიცხვებია.

Ω_0-მართვათა კლასად ავიღოთ $[a-\theta_m,b]$ ინტერვალზე უბან-უბან უწყვეტი $u(t)\in[u_0,u_1]$ ფუნქციები, სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტის წერტილებით.

$(t_0,t_1,u)\in J^2\times\Omega_0$ ელემენტს ეწოდება დასაშვები, თუ შესაბამისი ამონახსნი $((x^1(t),x^2(t))^*\in O=\{x\in R^2:x^i>0,i=1,2\}$, $t\in[\tau,t_1]$ აკმაყოფილებს (2.6.6) პირობებს,

ხოლო $[t_0,t_1]$ ინტერვალზე აკმაყოფილებს (2.6.5) განტოლებას, გარდა $u(t)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილებისა.

დასაშვებ $(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{u})$ ელემენტს ეწოდება ოპტიმალური, თუ $\widetilde{t}_1-\widetilde{t}_0$ მინიმალურია.

თ ე ო რ ე მ ა 2.6.1. ვთქვათ $(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{u})$ ოპტიმალური ელემენტია, $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $i=0,1$, და შესრულებულია პირობები: $\widetilde{t}_0+\tau_s<\widetilde{t}_1$, $\widetilde{t}_0+k\eta<\widetilde{t}_1$. ვთქვათ გარდა ამისა $\widetilde{t}_0+\tau_i$, $i=1,\dots,s$ წერტილები არ ემთხვევა $\widetilde{t}_1-j\eta\in[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]$, $j=1,2,\dots$ სახის წერტილებს; ფუნქციები $\dot{\tilde{x}}(t-j\eta)$, $j=1,\dots,k$ უწვეტია $\widetilde{t}_1$ წერტილში; ფუნქციები $\widetilde{u}(t-\theta_m)$, $m=1,\dots,\nu$ უწყვეტია წერტილებში $\widetilde{t}_0$, $\widetilde{t}_1$, მაშინ არსებობს სისტემის

$$\begin{cases}\dot{\psi}_1(t)=-\sum_{i=1}^{s}e_i\psi_2(t+\tau_i),\\ \dot{\psi}_2(t)=-\psi_1(t)-\sum_{i=1}^{s}c_i\psi_2(t+\tau_i)+\sum_{j=1}^{k}a_j\dot{\psi}_2(t+j\eta)\\ \psi_2(t)=0,t>\widetilde{t}_1\end{cases}\tag{2 6.7}$$

ამონახსნი $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)\neq 0$ ისეთი, რომ შესრულებულია პირობები:

2.6.1) ფუნქცია $\psi_2(t)-\sum_{j=1}^{k}a_j\psi_2(t+j\eta)$ უწყვეტია $[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]$ ინტერვალზე;

2.6.2)

$$\widetilde{u}(t)=\begin{cases}u_0,\psi(t)<0,\\ u_1,\psi(t)>0,\end{cases}$$

სადაც

$$\psi(t)=\sum_{m=1}^{k}\chi_{[\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1]}(t+\theta_m)d_m\psi_2(t+\theta_m),\quad t\in[\widetilde{t}_0-\theta_m,\widetilde{t}_1-\theta_1];$$

2.6.3) პირობა $\widetilde{t}_0$ მომენტისათვის

$$\psi_1(\widetilde{t}_0)x_0^2+\psi_2(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}a_j\dot{\widetilde{\varphi}}^2(\widetilde{t}_0-j\eta)+\sum_{i=1}^{s}c_i\dot{\widetilde{\varphi}}^2(\widetilde{t}_0-\tau_i)+\sum_{i=1}^{s}e_i\widetilde{\varphi}^1(\widetilde{t}_0-\tau_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\nu}d_m\widetilde{u}(\widetilde{t}_0-\theta_m)+f(\widetilde{t}_0)]-\sum_{j=1}^{k}a_j\psi^2(\widetilde{t}_0+j\eta)\dot{\widetilde{\varphi}}^2(\widetilde{t}_0)+\sum_{i=2}^{s}e_i\psi_1(\widetilde{t}_0+\tau_i)(x_0^1-\widetilde{\varphi}^1(\widetilde{t}_0))+$$

$$+\sum_{i=2}^{s}c_i\psi_2(\widetilde{t}_0+\tau_i)(x_0^2-\widetilde{\varphi}^2(\widetilde{t}_0))\geq 0;$$

2.6.4) პირობა $\widetilde{t}_1$ მომენტისათვის

$$\psi_1(\widetilde{t}_1)x_1^2+\psi_2(\widetilde{t}_1)[\sum_{j=1}^{k}a_j\dot{\widetilde{x}}^2(\widetilde{t}_1-j\eta)+\sum_{i=1}^{s}c_i\widetilde{x}^2(\widetilde{t}_1-\tau_i)+\sum_{i=1}^{s}e_i\widetilde{x}^1(\widetilde{t}_1-\tau_i)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\nu}d_i\widetilde{u}(\widetilde{t}_1-\theta_m)+f(\widetilde{t}_1)]\geq 0.$$

ახლა განვიხილოთ ამოცანა უწყვეტი საწყისი პირობით. ვთქვათ პირობა (2.6.6) შეცვლილია პირობით

$$x^1(t)=\varphi^1(t),\quad x^2(t)=\varphi^2(t),\quad t\in[\tau,t_0].$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.6.2. ვთქვათ $(\widetilde{t}_0,\widetilde{t}_1,\widetilde{u})$ ოპტიმალური ელემენტია, $\widetilde{t}_i\in(a,b)$, $i=0,1$, და შესრულებულია პირობები: ფუნქციები $\dot{\widetilde{x}}^2(t-j\eta)$, $j=1,\dots,k$ უწყვეტია $\widetilde{t}_1$ წერტილში; ფუნქციები $\widetilde{u}(t-\theta_m)$, $m=1,\dots,\nu$ უწყვეტია წერტილებში $\widetilde{t}_0$ და $\widetilde{t}_1$. მაშინ არსებობს (2.6.7) სისტემის ამონახსნი $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)\neq 0$ ისეთი, რომ შესრულებულია 2.6.1) 2.6.2) და 2.6.4) პირობები. გარდა ამისა

$$\psi_1(\widetilde{t}_0)\varphi^2(\widetilde{t}_0)+\psi_2(\widetilde{t}_0)[\sum_{j=1}^{k}a_j\dot{\widetilde{\varphi}}^2(\widetilde{t}_0-j\eta)+\sum_{i=1}^{s}c_i\widetilde{\varphi}^2(\widetilde{t}_0-\tau_i)+\sum_{i=1}^{s}e_i\widetilde{\varphi}^1(\widetilde{t}_0-\tau_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{\nu}d_m\widetilde{u}(\widetilde{t}_0-\theta_m)+f(\widetilde{t}_0)]-\psi_1(\widetilde{t}_0)\widetilde{\varphi}^1(\widetilde{t}_0)+\psi_2(\widetilde{t}_0)\dot{\widetilde{\varphi}}^2(\widetilde{t}_0)\geq 0.$$

თეორემა 2.6.1 და *2.6.2*, შესაბამისად, გამომდინარეობს *თეორემებიდან 2.2.14* და *2.3.7.*

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. Р.Драйвер, Топология для уравнений нейтрального типа и классическая электродинамика,дифференциалные уравнения с отклоняющимся аргументом,Киев,„Наукова думка," 1977, 113-127.
2. Дж.Хейл, Теория функционально-дифференциальных уравнений, М. Мир, 1984.
3. ნ. გორგოძე, ნეიტრალური ტიპის ოპტიმალური მართვის ამოცანები არაფიქსირებული საწყისი მომენტით, დისერტაცია ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარისხის მოსაპოვებლად, თბილისი, 2001.
4. G. Kharatishvili, T. Tadumadze and N. Gorgodze, Dynamic mathematical mo del of output the production and neutral optimal control problem , Reports of Enlaged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathema tics, v. 17, №2, 2002, 36-38.
5. Г.Л.Харатишвили, Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием, ДАН СССР, 1961,136, №1, 39-42.
6. Л.С.Понтрягин,В.Г.Болтянский,Р.В.Гамкрелидзе,Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов,М.,Наука, 1969.
7. Г.А.Каменский,Е.Д.Хвилон,Условия оптимальности для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа, Тр. семинара по теории диф. уравн. с откл. Аргумен том,1968 6, 213-222.
8. Г.А.Каменский,Е.Д.Хвилон,Необходимые условия оптимальности для систем с отклонияющимся аргументом нейтрального типа, Автоматика и телемеханика,1969,№3, 20-32.
9. Ф.П.Васильев,Условия оптимальности для некоторых классов систем, не разрешенных относительно пройзводной, ДАН СССР, 1969, 184, №6, 1267-1270.
10. T. H. Banks, G. Kent, Control of function differential equation of retarded and neutral type to target sets in function spaces, SIAM J. Control, 1972, 10, 567-593
11. С.С.Ахиев,Некоторые вопросы теории оптимального управления, Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд.физ-мат. наук, Баку, 1973
12. М.Д.Марданов,Некоторые вопросы теории оптимального управления в системах интегро-дифференциальных уравнений, Автореферат дисс. на соиск. уч. степ.канд. физ-мат. наук, Баку, 1973 .
13. Р.Габасов и Ф.М.Кириллова,Принцип максимума в теории оптимальн ого управления , Минск , Наука и Техника, 1974.
14. К.Б.Мансимов,Необхадимые условия оптимальности для систем интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтральн ого типа с подвижным правым концом

траектории, Изв. АН АЗ ССР, сер. физ. -тех и мат. наук, №6 1976 23-26.

15. С.Б.Горелик,Качественные вопросы оптимального управле ния системами с отлоняющимся аргументом нейтраль ною типа, Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ-мат. наук, Минск, 1987.
16. А.И.Арсенашвили, Т.А. Тадумадзе, Необходимые условия оптимально сти для управляемых систем нейтрального типа с переменной структурой и непрерывным услов ием преемственности, Труды ИПМ им. И. Н. Векуа ТГУ, 1988, т.27, 9-45.
17. Б.Ш.Мордухович,Методы аппроксимаций в задачах оптим изации и управления, М. Наука, 1988.
18. Т.К.Меликов,Аналог принципа Понтриагина в системах с последействием неитрального типа, Жур. Выч. Мат. и Мат. Физики, 1996, т.36, №11, 73-79.
19. Т.К.Меликов, Особые оптимальные управления в системах с последействием, Баку, ELM, 2002.
20. З.Цинцадзе,Принцип Лагража снятия ограничений и его прнменения в гладко-выпуклых задачах оптимизации, Автореферат дисертации на соиск. уч. степ. докт. физ.-мат. наук, Тбилиси 2003.
21. Т.Тадумадзе,Принцип максимума для некоторых управля емых систем нейтрального типа, Семинар ИПМ, Аннот ации Докладов, 9, 1974, 9-13.
22. N. Gorgodze, Necessary conditions of optimality in neutral type optimal probblems with nonfixed initial moment, Mem. Diff. Equat. Math. Phys. 19(2000), 150-153.
23. Г.Л.Харатишвили,Принцип максимума в экстремальных задачах с запаздываниями, Труды ТГУ, 129,серия мат. №6, 1968, 149-156.
24. A. Halanay, Optimal control for systems with time lag, J. SIAM, control, 1968, №2, 215-234.
25. Г.Л.Харатишвили,З.А.Мачаидзе,Н.И.Маркозашвилии,Т.А.Та думадзе, Абстрактная вариационная теория и ее прим енение к оптимальным задачам с запаздываниями, „Мец ниереба," Тбилиси, 1973.
26. Дж.Варга,Оптимальное управление дифференциальными и функцио-нальными уравнениями, М. Наука, 1977.
27. Г.Л.Харатишвили,Т.А.Тадумадзе, Нелинейные оптимальные систе- мы управления с переменными запаздываниями, Мат. сборник, 1978, 107 (149), №4(12), 613-633.
28. Л.А.Бекларян,Вариационая задача с запаздывающим аргу ментом и ее связь с некоторой полугруппой отображе ний отрезка в себя, ДАН СССР, 1983, т. 271, №5, 1034-1040.

29. А.В.Арутюнов,Возмущения экстремальных задач с ограни чениями и необходимые условия оптимальности, Итоги Науки и Техники, мат. анализ, т. 27, 1989, 147-230.

30. А.С.Матвеев,Задачи оптимального управления с запазд ываниями общего вида и фазовыми ограничениями, Изв естия АН СССР, серия мат. т. 52, №6, 1988, 1200-1229.

31. G. Kharatishvili and T. Tadumadze, The maximum principle in optimal con trol problems with concentred and distributed delays in control, Georgian Math. J. vol. 2, №6, 1995, 577-591.

32. Г.Л.Харатишвили и Т.А.Тадумадзе, Нелинейная задача опти мального управления с переменными запаздываниями, нефиксированным началь ным моментом и кусочно непре рывной предысторией, Тр. Мат. Инст. им. В. А. Стекл ова, 1998, 220, 236-255.

33. T. Tsintsadze, The Lagrange principle of taking restriction off and its applications to linear optimal control problems on the presence of mixed restructions and delays, Mem. Diff. Equat. Math. Phys. vol. 17, 1997, 105-128.

34. T. Tadumadze and L. Alkhazishvili, Necessary conditions of optimality for optimal problems with delays and with a discontinuous initial condition, Mem. Diff. Equat. Math. Phys. 22(2001), 154-158.

35. L. Alkhazishvili, The linearized maximum principle for optimal problems variable delays and continiuous initial cindition, Mem. Diff. Equat. Math. Phys. 29(2003), 153-155.

36. ლ. ალხაზიშვილი, გაწრფივებული მაქსიმუმის პრინციპი დაგვიანებულარგუმე ნტიანი ოპტიმალური ამოცანებისათვის არაფიქსირებული საწყისი მომენტით, დისერტაცია ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატის სამეცნიერო ხარი სხის მოსაპოვებლად, თსუ , თბილისი, 2004.

37. Р.В.Гамкрелидзе, Основы оптимального управления, Тбилиси, Изд-во ТГУ, 1977.

38. G. Kharatishvili, T. Tadumadze and N. Gorgodze, Continuous dependence and differentiability of solution with respect of the initial date and right-hand side for differential equations with devating argyment, Mem. Diff. Equat. and Math. Phys. 19(2000), 3-105.

39. N. Gorgodze, Local representations for the variation of solutions of some class neutral differential equations, Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Appled Mathematics, 2000, 15, №2, 58-61.

40. Р.В.Гамкрелидзе, Г.Л.Харатишвили, Экстремальные задачи в линейных топологических пространствах, Изв. АН СССР серия матем . 1969,33,No 4,781-839.

41. G. Kharatishvili, Dynamic mecroeconomical mathematical model of output the production based on the generalized principle of acceleration and optimal control problem, Seminars on the Mathematical Economics, IC preprint №01-2000, 1-3.

42. ИаРамишвили,Формулы вариации решения для одного класса управля емого дифференцияльного уравнения нейт рального

типа с разрывным начальным условием, Periodical Scientific Journal “Intelect” №3(14), 2002, 27-29.

43. I. Ramishvili, Formulas variation of solution for quasi-linear contolled neutral differential equation, Mem. on Diff. Equat. and Math. Phys. 20(2003),156-159.
44. I. Ramishvili, The linearized maximum principle for quasilinear neutral optimal problems with continuous initial condition and vatiable delays in control, Bulletin the Georgian Academy of Scinces, 168, №3, 2003, 451-454.
45. T. Tadumadze and I.Ramishvili, Formulas variation of solution for quasi-linear contolled neutral differential equation with discontinuous and continiuous initial condition,Simposium on differential equations and mathematical phisics dedicated to the 100th birthday anniversary of academician V. Kupradze and 90th birthday anniversary of academician N.Vekua, Abstracts,Tbilisi,Georgia, December 24-25 , 2003, http://www.rvi.acnet.ge/ 2003 Demph.
46. I. Ramishvili and T.Tadumadze, Formulas of variation for a solution of neutral differential equation with continuous initial condition, Georgian Mathematical Journal, vol. №11(2004),155-175.
47. I. Ramishvili, The linearzed maximum principle for quasi-linear neutral optimal problems with discontinuous initial condition and varible delays in control, Mem. Diff. Equat. Math. Phys. 31(2004), 145-148.
48. T. Tadumadze and L. Alkhazishvili, Formulas of variation of solution for non-linear controlled delay differential equations with discontinuous initial condition, Mem. on Diff. Equat. and Math. Phys. vol. 29, 2003, 125-150.