

АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ ГЕОФИЗИКИ

В. П. Г А Б У Н И Я

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЗЕМНОЙ КОРЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ
ВЗАИМНО-ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СЛОЕВ

/ Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук /

Научный руководитель — чл.-корр. АН СССР —
— А. Н. ТИХОНОВ.

г. Тбилиси
1954

*Содержание
1956 г. 28. 28. 28.*

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
ГЛАВА I - Краткий обзор результатов исследования вопроса	2
ГЛАВА II - Распределение электрического поля в земной коре для случая взаимно-перпендикулярных проводящих слоев. .	7
§1. Общие замечания	7
§2. Постановка задачи	9
§3. Единственность решения задачи.	10
§4. Решение задачи	13
ГЛАВА III. - Численное решение задачи	23
В в о д ы	37
Цитированная литература	39
Приложение	40

ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЗЕМНОЙ КОРЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЗАИМНО-ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СЛОЕВ

Г Л А В А I

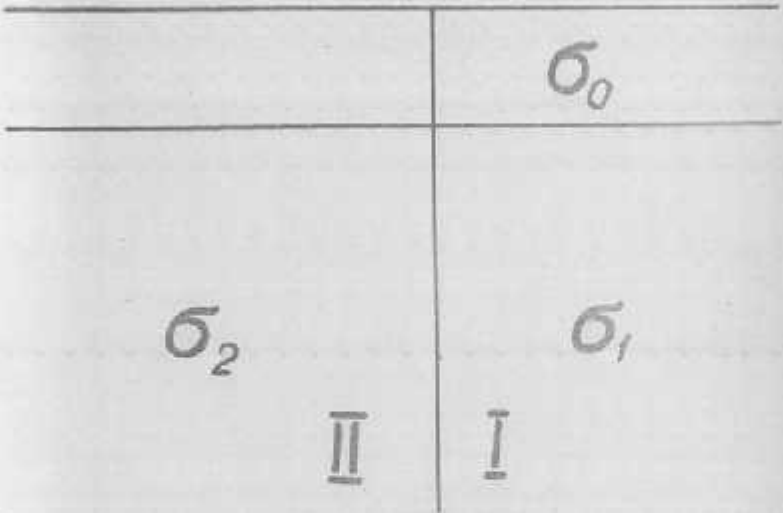
КРАТКИЙ ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОПРОСА

Одной из актуальных задач электроразведки является изучение влияния наносного слоя на электрическое поле, создаваемое прохождением тока в земной коре через точечный электрод.

А.И. Заборовский [1] приводит решение задачи по определению электрического поля, создаваемого точечным электродом на поверхности земли, при наличии нескольких горизонтальных границ раздела сред, характеризующихся различными удельными сопротивлениями.

Г.В. Мухина [3] рассматривает влияние наносного слоя на электрическое поле, создаваемое точечным электродом в случае, когда этот слой перекрывает вертикальный контакт двух сред.

Точное решение этой задачи в общем виде с учетом наносного слоя представляет большие трудности. Автор рассматривает один из частных случаев изучаемой ею задачи при котором делает следующее допущение: слой с удельной проводимостью σ^* и мощностью h заменен проводящей плоскостью с эффективной проводимостью $\sigma_0 = \sigma^* h$. В этом случае на плоскости / фиг. I / должно выполняться условие баланса тока:



фиг. 1

$$-\sigma_0 \Delta_2 U(x, y, z) = \sigma_1 \frac{\partial U}{\partial n} - \sigma_2 \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (I)$$

где U - потенциал, n - нормаль к проводящей плоскости, Δ - оператор Лапласа, σ_1 и σ_2 удельные проводимости, соответственно I и II-ой среды.

В уравнении (I) $\sigma_0 \Delta_2 U$ характеризует интенсивность тока, растекающегося на плоскости MN , а $\sigma_1 \frac{\partial U}{\partial n}$ и $\sigma_2 \frac{\partial U}{\partial n}$ - представляют собой ток, притекающий из I и II среды.

Рассмотрим один из частных случаев данной задачи.

Пусть однородная среда покрыта проводящим слоем мощностью h и удельной проводимостью σ_0 / фиг.2 /.

Изучим в этой схеме распределение электрического поля, создаваемого точечным электродом с постоянной силой тока J .

При этом примем, что наносный слой $MN M'N'$ заменен плоскостью $Z=0$, которая имеет удельную проводимость $\sigma_0' = \sigma_0 h$.

Тогда (I) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha_1 \frac{dU}{dz},$$

где $\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$

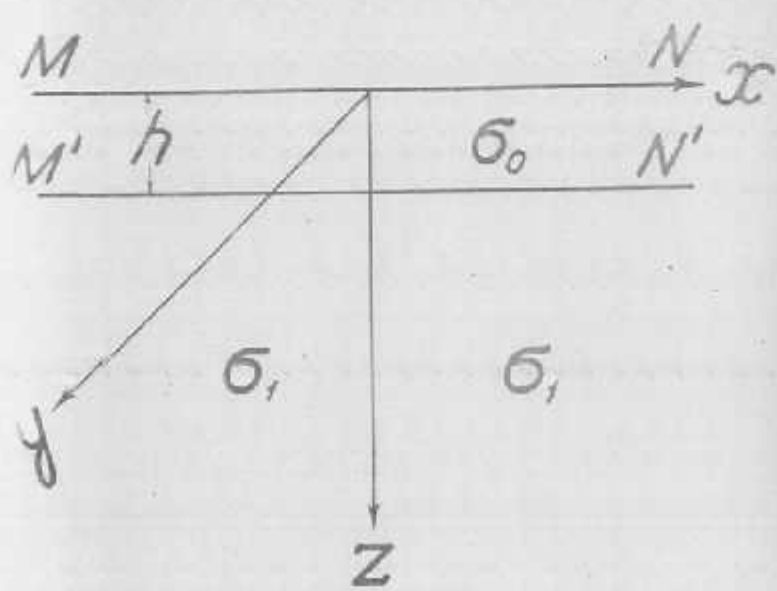
Эта задача математически может быть сформулирована следующим образом: найти потенциальную функцию $U(P, \theta)$, удовлетворяющую следующим условиям:

I. $\Delta U = 0$

II. $U(P, \theta) = 0$, при $P \rightarrow \infty$

III. $U(P, \theta)$ потенциальная функция является непрерывной до вторых производных включительно,

IV. $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial z}$, при $z = a$.



фиг. 2

Тогда, как показывает Г.В.Мухина, можно написать функции для нижнего полупространства -

$$U(x, y, z; x_1, 0, 0) = \alpha_1 \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-z')} U_0(x, y, z'; x_1, 0, 0) dz' \quad z > 0$$

и для верхнего полупространства -

$$U(x, y, z; x_1, 0, 0) = \alpha_1 \int_{-\infty}^z e^{-\alpha_1(z-z')} U_0(x, y, -z'; x_1, 0, 0) dz', \quad z < 0$$

где

$$U_0(x, y, z; x_1, 0, 0) = \frac{q}{2\pi\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}},$$

которые удовлетворяют I, II, III и IV условиям. Эти функции являются решением данной задачи.

Следует отметить, что кривая кажущегося сопротивления, рассчитанная на основе полученного результата при $\alpha_1 = 0, 1$, хорошо сходится с кривой двухслойной палетки на удвоенном и утроенном расстояниях мощности верхнего (наносного) слоя; при этом расхождение между кривыми обнаруживается лишь вблизи источника.

Вернемся теперь к рассмотрению основной задачи, излагаемой в [3].

Допустим, что контакт двух сред покрыт наносным проводящим слоем с удельной проводимостью σ_0 . Требуется определить характер электрического поля / см. фиг. I /, создаваемого точечным электродом $\Theta(x_1, 0, 0)$.

Учитывая вышесказанное упрощение, эту задачу можно сформулировать следующим образом: определить потенциальную функ-

цию $U(\rho, \theta)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $U(\rho, \theta)$ - обращается в нуль в бесконечности;
2. в точке $\theta(x_1, 0, 0)$ потенциал имеет особенность порядка $\ln \frac{1}{z}$
3. $\sigma_1 \frac{\partial U}{\partial x} = \sigma_2 \frac{\partial U}{\partial x}$ при $x=0$
4. $-\Delta_2 U = \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial z}$ для $x > 0$ при $z=0$;
5. $-\Delta U = \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial z}$ для $x < 0$ при $z=0$;

где $\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}$, $\alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$, σ_0 - "эффективная" проводимость наносного слоя.

Решение этой задачи сводится к решению интегрального уравнения, которое имеет вид:

$$F(x, y) = \lambda \iint_S \kappa(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}, \quad \kappa(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial U_1}{\partial z}(x, y, 0; \xi, \eta, 0),$$

$$f(x, y) = -c \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial U_1}{\partial z}(x, y, 0; x_1, 0, 0),$$

$$c = \frac{y}{2\pi\sigma_1}, \quad U_1(x, y, z; x_1, 0, 0) = \alpha_1 \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z')} \bar{U}_0(x, y, z'; x_1, 0, 0) dz',$$

\bar{U}_0 представляет собой решение задачи об определении потенциала в полупространстве, состоящем из двух сред, разделенных вертикальной границей раздела. $F(x, y)$ - плотность тока фиктивного источника, который помещен в S левой полуплоскости.

Таким образом потенциальная функция, имеющая вид:

$$U(x, y, z; x_1, 0, 0) = U_1(x, y, z; x_1, 0, 0) + \iint_S U_1(x, y, z; \xi, \tau, 0) F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

и есть искомое решение задачи.

Г.В.Мухина [4] рассматривает также случай, когда наносным слоем перекрывается вертикальная жила с проводимостью, отличной от проводимости окружающей среды. Приближенное решение этой задачи дано на основе вышеуказанного упрощения.

Г Л А В А П

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЗЕМНОЙ КОРЕ
ДЛЯ СЛУЧАЯ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СЛОЕВ

§ I. Общие замечания

Целью нашей работы является рассмотрение более общей задачи, т.е. изучение влияния наносного слоя на электрическое поле, когда этот слой перекрывает вертикальную жилу, ограниченную средами разной удельной проводимости /см. фиг.3/.

Указанная задача математически сводится к отысканию потенциальной функции, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\Delta U(x, y, z; x_1, 0, 0) = 0 \quad (2)$$

При этом

I. U - имеет одинаковый порядок с $\frac{q}{2\pi\epsilon_1} \ln \frac{1}{z}$ вблизи источника;

II. U - обращается в нуль в бесконечности;

III. при $x=0$ $U(x) = U(-x)$ $-\epsilon_0'' \Delta_{yz} U = \epsilon_1 \frac{\partial U}{\partial x} - \epsilon_2 \frac{\partial U}{\partial x}$ (3)

IV. при $z=0$

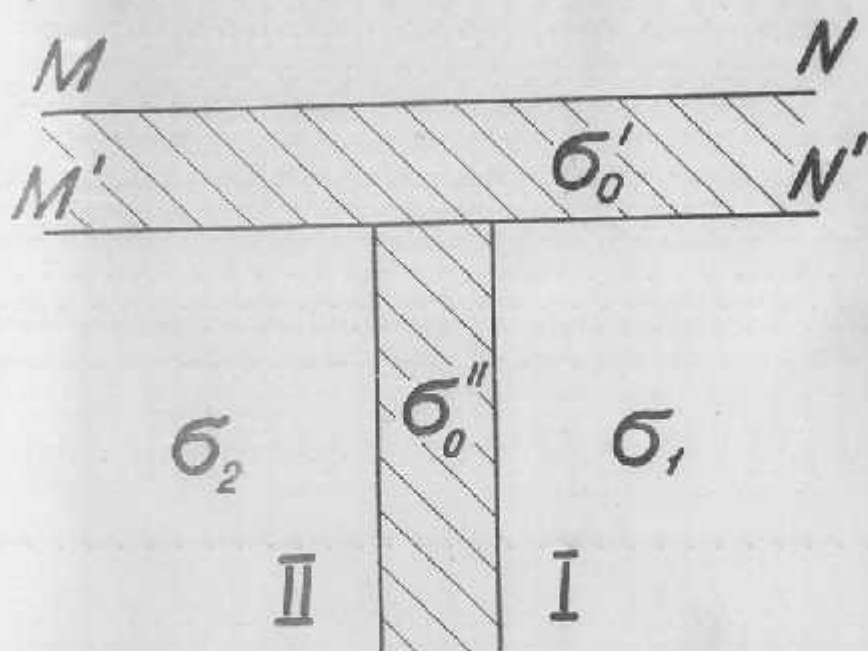
$$-\epsilon_0' \Delta_{xy} U = \epsilon_1 \frac{\partial U}{\partial z} \quad x > 0 \quad (4)$$

$$-\epsilon_0' \Delta_{xy} U = \epsilon_2 \frac{\partial U}{\partial z} \quad x < 0 \quad (5)$$

V. при $x=0, z \neq 0$ $-\epsilon_0 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \epsilon_0'' \frac{\partial U}{\partial z} + \epsilon_0' \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]$

Легко заметить, что как в этой общей, так и в предыдущих частных задачах граничные условия связывают между собой производные первого и второго порядков искомых функций (3) и (4).

На границе раздела эти последние выражения можно записать



фиг. 3

в следующем виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \beta_1 \frac{\partial U}{\partial x} - \beta_2 \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{при } x=0, \beta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \beta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \quad (\Lambda)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \quad x > 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \quad x < 0 \quad \text{при } z=0, \alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0} \quad (\text{Б})$$

Искомая функция U является изображением начальной функции следующего вида: $U(x, y, z+t) = \frac{1}{z}$

Изображением, как известно, принято считать интеграл следующего вида:

$$\alpha L \{U(t)\} = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} U_0(t) dt.$$

Для нашего случая изображение имеет вид:

$$U(x, y, z, \alpha) = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} U_0(x, y, z+t) dt = \alpha \int_x^{\infty} e^{\alpha(z-\lambda)} U_0(x, y, \lambda) d\lambda \quad (6)$$

где $z+t = \lambda$

(6) изображение удовлетворяет граничному условию:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{при } z=0 \quad \text{и уравнению Лапласа, так}$$

как

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \alpha [U - U_0(x, y, z)]$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha^2 \left[U - U_0(x, y, z) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial U_0(x, y, z)}{\partial z} \right]$$

$$\text{при } z=0 \quad \left. \frac{\partial U_0(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$$

При решении поставленной задачи изображение (6) используется нами для построения вспомогательных функций U_I , U_{II} , U_1 и U_2 , удовлетворяющих уравнению Лапласа.

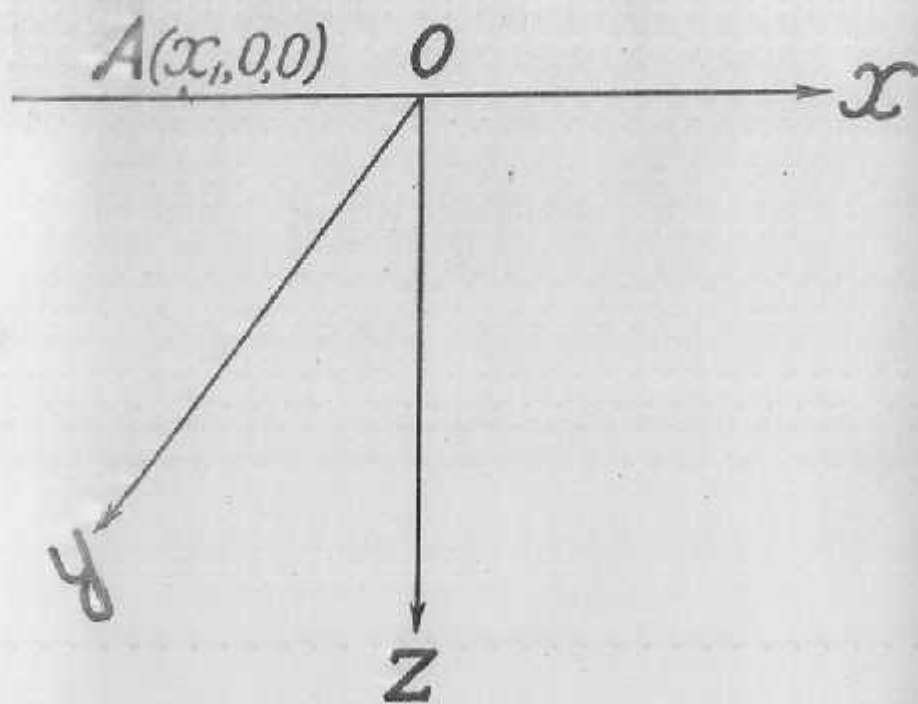
§ 2. Постановка задачи

Мы ставим себе целью: изучить распределение электрического поля в плоскости MN , создаваемого точечным электродом $A(x, 0, 0)$ в полупространстве, питаемом током силы J . При этом принимается, что полупространство имеет следующую структуру: под горизонтальным наносным слоем постоянной мощности залегает вертикальная проводящая жила, простирающаяся до бесконечности и ограниченная с обеих сторон двумя средами с удельными проводимостями σ_1 и σ_2 соответственно / см. фиг. 3 /. Наносный слой и проводящая жила также имеют различные проводимости.

Для решения этой задачи примем, что наносный слой и вертикальная жила представляют собой проводящие плоскости с удельной проводимостью σ' и σ'' соответственно.

Пусть прямоугольная координатная система ориентирована следующим образом: xoy совпадает с плоскостью MN , а плоскость yoz — с плоскостью распространения жилы /фиг. 4/. В точке $A(x_1, 0, 0)$ поместим точечный электрод, питающий ток силой J .

Искомая потенциальная функция $U(x, y, z)$ должна удовлетворять следующим условиям: $\Delta U(x, y, z) = 0$, где Δ — оператор Лапласа. Если M точка, в которой определяется U , то при $M \rightarrow \infty$ $U(MA) = 0$, а в точке A потенциал U имеет порядок $\frac{1}{2\pi\sigma_0} \ln \frac{1}{r}$.



фиг. 4

Кроме того, потенциальная функция должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$I. \quad U(x) = U(-x) \quad -\epsilon_0'' \Delta_{yz} U = \epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad \text{при } x=0,$$

где $\Delta_{yz} U = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$, а $-\epsilon_0'' \Delta_{yz} U$ характеризует *дивергенцию* силу тока, протекающего вдоль плоскости $yo\bar{z}$

U_1, U_2 - суть потенциалы в средах I и II соответственно, а производная $\epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}$ и $\epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}$ - силы токов, растекающихся на проводящую плоскость.

$$II. \quad \text{При } z=0 \quad -\epsilon_0' \Delta_{xy} U = \epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \quad x > 0$$

$$III. \quad -\epsilon_0' \Delta_{xy} U = \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \quad x < 0$$

III. при $z=0$ и $x=0$

$$-\epsilon_0^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \epsilon_0'' \frac{\partial U_1}{\partial z} + \epsilon_0' \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right]$$

где ϵ_0^* - обозначает линейную проводимость вдоль оси y -ов, а квадратная скобка - разность парм выражений $\frac{\partial U}{\partial x}$, полученных в полуплоскостях, разделенных осью y .

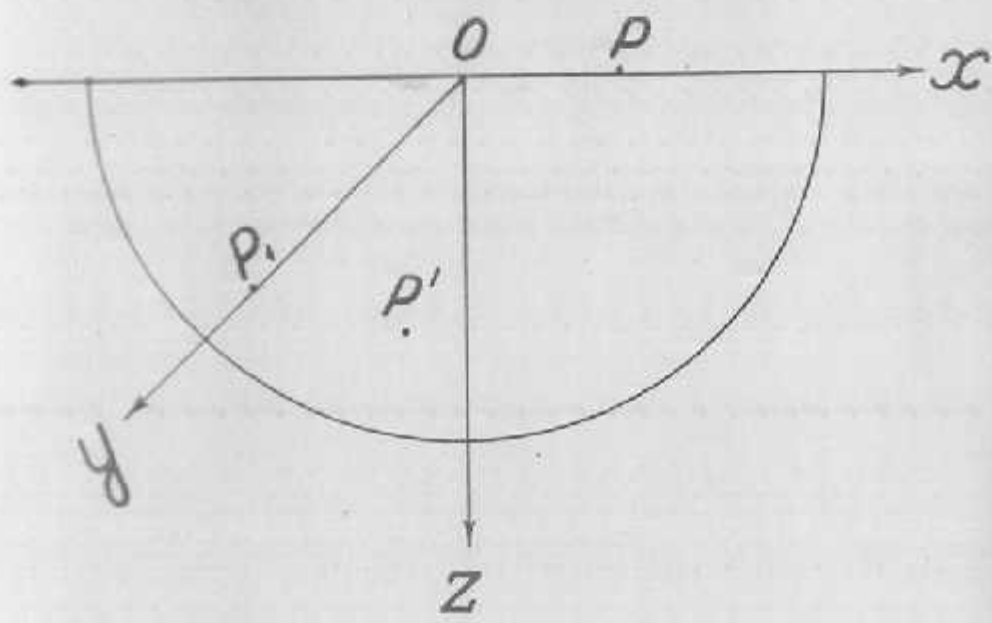
3. Единственность решения задачи

Докажем единственность решения поставленной задачи, следуя [3]. Пусть U - есть регулярное решение задачи с граничными условиями:

$$(1') \quad U(x, y, z) = U(-x, y, z) \quad \text{при } x=0$$

$$(2') \quad \epsilon_0'' \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \epsilon_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \epsilon_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} \quad \text{при } x=0$$

op 5



фиг. 5

$$(3') \quad \sigma_0' \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \quad x > 0 \quad \text{при } z=0$$

$$(4') \quad \sigma_0' \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \quad x < 0 \quad \text{при } z=0$$

$$(5') \quad -\sigma_0'' \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma_0'' \frac{\partial U}{\partial z} + \sigma_0' \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] \quad \text{при } x=0, z=0.$$

Рассмотрим область \mathcal{D} , ограниченную полусферой S и плоскостью $z=0$.

Если гармоническая функция U не равна тождественно нулю, то она должна достигать в области \mathcal{D} максимума/или минимума/.

Если радиус сферы S выбран достаточно большим, то, так как потенциал $U(z, \varphi)$ равномерно стремится к нулю, при $z \rightarrow \infty$ функция U достигает максимума на плоскости, $x=0$ или на плоскости $z=0$. Допустим, что в некоторой точке Q функция U достигает максимального значения / фиг.5/. Тогда составим функцию

$$V = U + \kappa z + \nu |x| \quad (\kappa > 0, \nu > 0),$$

которая в области \mathcal{D} должна достигать максимума.

Выберем радиус сферы настолько большой, чтобы значение U на поверхности S не превосходило $\frac{m}{2}$. Помимо этого, так можно подобрать κ и ν , чтобы и остальные члены функции V сделались на S меньше $\frac{m}{2}$. Тогда очевидно, что $\max V$ должен быть им на плоскости $z=0$ напр., в точке P . В этой точке должно выполняться условие (3')

$$\text{Но } \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} - \kappa < 0$$

в точке P

$$\Delta_{xy} U \geq 0$$

Таким образом мы пришли к противоречию. Если возьмем теперь точку P на плоскости $x=0$, то в этой точке должно выполняться условие (2'). Но, так как

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial x} - \ell < 0$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial x} + \ell > 0$$

$$\text{и } -\Delta_{yz} U \geq 0$$

мы приходим к выводу, противоречащему условию (2').

Остается выяснить возможность достижения функцией максимума на оси y , т.е. при $x=0$ и $z=0$. Тогда, на этой линии должно выполняться условие $-\sigma \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma'_0 \frac{\partial U}{\partial x} + \sigma''_0 \frac{\partial U}{\partial z}$

Если V достигает максимума в точке P_1 , лежащей на оси y , то в этой точке имеем

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \geq 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} - \ell < 0$$

$$\text{и } \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} - \kappa < 0$$

что противоречит условию (5').

Таким образом, заключаем, что задача имеет регулярное решение лишь только в том случае, когда функция U тождественно равна нулю, т.е. $U=0$. Итак, задача, поставленная в § 2, имеет единственное решение.

§4: Решение задачи

Для решения поставленной задачи примем, что $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ суть непрерывные функции в плоскости $x=0$ и $z=0$ соответственно. Тогда граничные условия, изложенные в постановке задачи, переписутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 (1^I) \quad U(x, y, z) &= U(-x, y, z) && \text{при } x=0 \\
 (2^I) \quad \sigma_0'' \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} - \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial x} && \text{при } x=0 \\
 (3^I) \quad \sigma_0' \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} &= \sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} && x > 0 \\
 (4^I) \quad \sigma_0' \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} &= \sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} && x < 0 \quad \text{при } z=0 \\
 (5^I) \quad -\sigma_0^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \sigma_0'' \frac{\partial U}{\partial z} + \sigma_0' \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] && \text{при } x=0, z=0.
 \end{aligned}$$

Условие (1^I) удовлетворяет функция \bar{U}_0 , являющаяся потенциалом в полупространстве, состоящем из двух сред, разделенных вертикальной плоскостью. Функция \bar{U}_0 представляется в виде:

$$\bar{U}_0(x, y, z; x_1, 0, 0) = U_0(x, y, z; x_1, 0, 0) + \kappa U_0(x, y, z; -x_1, 0, 0)$$

если источник тока и точка наблюдения лежат в левой полуплоскости, и

$$\bar{U}_0(x, y, z; x_1, 0, 0) = (1 + \kappa) U_0(x, y, z; x_1, 0, 0),$$

если источник расположен слева, а точка наблюдения справа от начала координат. При этом:

$$\bar{U}_0(x, y, z; x_1, 0, 0) = \frac{\gamma}{2\pi\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}} \quad \kappa = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}$$

и функции

$$U_{\bar{I}}(x, y, z; x_1, 0, 0) = \beta \int_x^{\infty} e^{\beta(x-\xi)} \bar{U}_0(\xi, y, z; x_1, 0, 0) d\xi \quad x > 0$$

$$U_{\bar{II}}(x, y, z; x_1, 0, 0) = \beta \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \bar{U}_0(-\xi, y, z; x_1, 0, 0) d\xi +$$

$$+ \frac{\beta}{2\varphi_2} \bar{U}_0(x, y, z; x_1, 0, 0) - \frac{\beta}{2\varphi_2} \bar{U}_0(-x, y, z; x_1, 0, 0) \quad x < 0$$

удовлетворяют условиям (1^I) и (2^I) , где

β - неизвестная постоянная.

Легко показать, что условие (2^I) выполняется при

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 \quad , \quad \text{где} \quad \beta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0''} \quad \text{и} \quad \beta_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0''} \quad .$$

В самом деле, продифференцировав $U_{\bar{I}}$ и $U_{\bar{II}}$ получаем

$$\frac{\partial U_{\bar{I}}}{\partial x} = -\beta \bar{U}_0(x, y, z) + \beta^2 \int_x^{\infty} e^{\beta(x-\xi)} \bar{U}_0(\xi, y, z) d\xi$$

$$\frac{\partial U_{\bar{II}}}{\partial x} = \beta \bar{U}_0(-x, y, z) - \beta^2 \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \bar{U}_0(-\xi, y, z) d\xi + \frac{\beta}{2\varphi_2} \frac{\partial \bar{U}_0(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\beta}{2\varphi_2} \frac{\partial \bar{U}_0(-x, y, z)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U_{\bar{II}}}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial \bar{U}_0(-x, y, z)}{\partial x} - \beta^2 \bar{U}_0(-x, y, z) + \beta^3 \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \bar{U}_0(-\xi, y, z) d\xi + \frac{\beta}{2\varphi_2} \frac{\partial^2 \bar{U}_0(x, y, z)}{\partial x^2} - \frac{\beta}{2\varphi_2} \frac{\partial^2 \bar{U}_0(-x, y, z)}{\partial x^2}$$

Таким образом, мы убеждаемся в справедливости нашего высказывания.

Условие (3^I) выполняется функцией

$$U_1(x, y, z) = \alpha_1 \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-\zeta)} U_i(x, y, \zeta) d\zeta$$

где $\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0'}$ $U_i = U_{\bar{I}}$ при $x > 0$, и $U_i = U_{\bar{II}}$ при $x < 0$

Действительно

$$\frac{\partial U_i}{\partial z} = -\alpha_i U_i(x, y, z) + \alpha_i^2 \int_z^{\infty} e^{\alpha_i(z-\tau)} U_i(x, y, \tau) d\tau$$

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} = -\alpha_i \frac{\partial U_i}{\partial z} - \alpha_i^2 U_i(x, y, z) + \alpha_i^3 \int_z^{\infty} e^{\alpha_i(z-\tau)} U_i(x, y, \tau) d\tau$$

Очевидно, что $\left. \frac{\partial U_i(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$, так как $\left. \frac{\partial \bar{U}_0(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$

Мы будем искать решение нашей задачи в виде

$$U(x, y, z; x_1, 0, 0) = U_i(x, y, z; x_1, 0, 0) + \iint U_i(x, y, z; \xi, \tau, 0) F(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} U_i(x, y, \eta, z; 0, 0) f(\eta) d\eta \quad (C)$$

Легко показать, что функция $U(x, y, z; x_1, 0, 0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Как известно $U_0(x-t, y, z; x_1, 0, 0)$ и $\bar{U}_0(x-t, y, z; x_1, 0, 0)$ суть гармонические функции; тогда $e^{\beta t} \bar{U}_0(x-t, y, z; x_1, 0, 0)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta t} \bar{U}_0(x-t, y, z; x_1, 0, 0) dt$ суть также гармонические функции.

В последнем интегральном выражении введем обозначение $x-t = \xi$, тогда оно примет вид

$$\int_x^{\infty} e^{\beta(x-\xi)} \bar{U}_0(\xi, y, z; x_1, 0, 0) d\xi$$

Следовательно, функции $U_i(x, y, z; x_1, 0, 0)$, $U_{ii}(x, y, z; x_1, 0, 0)$, $U_i(x, y, z; x_1, 0, 0)$, $U(x, y, z; x_1, 0, 0)$ удовлетворяют уравнению Лапласа.

В функции (C) S есть левая полуплоскость $z=0$, $(\xi, \tau, 0)$ - координаты воображаемого источника с плотностью тока $F(\xi, \tau)$, а $f(\eta)$ - плотность тока воображаемого источника на оси y -ов.

Функции $F(\xi, \tau)$ и $f(\eta)$ должны быть выбраны такими,

чтобы выполнялись граничные условия (4^I) и (5^I).

Введем обозначения

$$W(x, y, z) = \iint_s U_1(x, y, z; \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

$$V(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(x, y, \tau, z) f(\tau) d\tau$$

Если примем во внимание эти обозначения и выражение (C), то (4^I) можно переписать так:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\partial U_1}{\partial z} + \alpha_1 \frac{\partial W}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{при } z=0 \quad x < 0$$

или

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial z} + (\alpha_2 - \alpha_1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U_1(x, y, \tau, z)}{\partial z} f(\tau) d\tau + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\partial U_1}{\partial z} \quad (6)$$

так как $\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial z}$, при $z=0$.

Изучим $\frac{\partial W}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$ в плоскости $z=0$ для $x < 0$.

По нашему определению $W(x, y, z)$ имеет вид:

$$W(x, y, z) = \iint_s U_1(x, y, z; \xi, \tau, 0) F(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$U_1(x, y, z; \xi, \tau, 0) = \alpha_1 \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-\tau)} U_0(x, y, \tau; \xi, \tau, 0) d\tau$$

$$U_0(x, y, \tau; \xi, \tau, 0) = \beta \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \bar{U}_0(-\xi, y, \tau; \xi, \tau, 0) d\xi + \frac{\beta}{2\beta_2} \bar{U}_0(x, y, \tau; \xi, \tau, 0) - \frac{\beta}{2\beta_2} \bar{U}_0(-x, y, \tau; \xi, \tau, 0).$$

Составим производную от U_1 и W по z , тогда:

$$(6^I) \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\alpha_1 U_{\bar{u}}(x, y, 0; \xi, \tau, 0) + \alpha_1^2 \int_0^{\infty} e^{\alpha_1(z-\tau)} U_{\bar{u}}(x, y, \tau; \xi, \tau, 0) d\tau \quad \text{при } z=0$$

$$(7^I) \frac{\partial W}{\partial z} = -\alpha_1 \iint_S U_{\bar{u}}(x, y, z; \xi, \tau, 0) F(\xi, \tau, 1) d\xi, d\tau + \\ + \alpha_1 \iint_S U_1(x, y, z; \xi, \tau, 0) F(\xi, \tau, 1) d\xi, d\tau \quad \text{при } z=0$$

Далее, вторая производная от W по z при $z=0$ будет

иметь вид

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = -\alpha_1 \iint_S F \left[\beta \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \frac{\partial U_0(-\xi, y, z)}{\partial z} \right] d\xi, d\tau, - \frac{\beta \alpha_1}{2\beta_2} \frac{\partial}{\partial z} \iint_S F U_0 d\xi, d\tau, -$$

$$- \frac{\beta \alpha_1}{2\beta_2} \kappa \frac{\partial}{\partial z} \iint_S F U_0(-x) + \frac{\beta \alpha_1}{2\beta_2} (1+\kappa) \frac{\partial}{\partial z} \iint_S F U_0(-x) d\xi, d\tau, + \alpha \iint_S F \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} d\xi, d\tau, \quad (8)$$

При этом выражение $\iint_S F(\xi, \tau, 1) U_0(x, y, z; \xi, \tau, 0) d\xi, d\tau,$

как нетрудно видеть, есть потенциал простого слоя.

Выражение

$$\iint_S F(\xi, \tau, 1) \frac{\partial U_0(-x, y, z; \xi, \tau, 0)}{\partial z}$$

есть непрерывная функция и при $z=0$ обращается в нуль.

Учитывая сказанное, уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\pi \alpha_1 \beta}{2\beta_2} F(x, y) + \alpha_1 \iint_S F(\xi, \tau, 1) \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} d\xi, d\tau, \quad (9)$$

Подставляя (9) в (6), получим:

$$\frac{\pi \alpha_1 \beta}{2\beta_2} F(x, y) = (\alpha_2 - \alpha_1) \iint_S F \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} d\xi, d\tau, + (\alpha_2 - \alpha_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) \frac{\partial U_1}{\partial z} \Big|_{z=0} d\eta + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Обозначим

$$\mathcal{K}(x, y; s, t) = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1)\beta_2}{\pi \alpha_1 \beta} \frac{\partial U_1(x, y, z; \xi, \tau, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0}$$



F-28258-

$$K(x, y, t) = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1) \beta_2}{\pi \alpha_1 \beta} \frac{\partial U_1(x, y, \eta, z; 0, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_1) \beta_2}{\pi \alpha_1 \beta} \frac{\partial U_1(x, y, z; x_1, 0, 0)}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Тогда получим следующее интегральное уравнение:

$$F(x, y) = \iint_s K(x, y, s, t) F(s, t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y, \eta) f(\eta) d\eta + \varphi(x, y)$$

Чтобы определить плотность тока воображаемого источника на оси y -ов, выражение (С) подставим в (5^I), получим:

$$-\epsilon_0^* \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = \epsilon_0'' \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \epsilon_0' \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \right]$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 2a \frac{\partial V}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial z} + \iint_s \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial U_1}{\partial x} + b \frac{\partial U_1}{\partial z} \right]_{\substack{x=0 \\ z=0}} F d\xi_1 d\zeta_1 + \varphi^*(y),$$

где

$$a = \frac{\epsilon_0'}{\epsilon_0^*} \quad b = \frac{\epsilon_0''}{\epsilon_0^*}$$

$$\varphi^*(y) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}(0, y, 0) + \frac{\epsilon_0''}{\epsilon_0^*} \frac{\partial U_1}{\partial z}(0, y, 0) + \frac{\epsilon_0'}{\epsilon_0^*} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x} \right]_{\substack{x=0 \\ z=0}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right) f(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2a \frac{\partial U_1}{\partial x} + b \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) f(\eta) d\eta +$$

$$+ \iint_s F(\xi_1, \zeta_1) K'(y, \xi_1, \zeta_1) d\xi_1 d\zeta_1 + \varphi^*(y), \quad (12)$$

где

$$K'(y, \xi_1, \zeta_1) = \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 2a \frac{\partial U_1}{\partial x} + b \frac{\partial U_1}{\partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ z=0}}$$

Как известно

$$U_1(x, y-\eta, z; a, 0) = \alpha_1 \beta \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z)} dz \int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} U_0(\xi, y-\eta, z) d\xi,$$

откуда можно получить:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} - \alpha_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\alpha_1 \beta \int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} \frac{\partial U_0}{\partial z}(\xi, y-\eta, z) d\xi$$

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial U_1}{\partial x} = -\alpha_1 \beta \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z)} \frac{\partial U_0}{\partial x}(x, y-\eta, z) dz$$

Принимая во внимание последние выражения, из (12) получим:

$$\begin{aligned} & -\alpha_1 \beta \int_{-\infty}^\infty f(\eta) d\eta \left[\int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} \frac{\partial U_0}{\partial z}(\xi, y-\eta, z) d\xi + \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z)} \frac{\partial U_0}{\partial x}(x, y-\eta, z) dz \right] = \\ & = \int_{-\infty}^\infty \left(a_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) f(\eta) d\eta + \iint_S \kappa'(y, \xi, z) d\xi dz + \Psi^*(y) \dots \dots (13) \end{aligned}$$

Исследуем $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ вблизи источника $N(0, \eta, 0)$. Известно, что

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\alpha \beta \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z)} dz \left[U_0(x, y-\eta, z) + \beta \int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} U_0(\xi, y-\eta, z) d\xi \right],$$

где второе слагаемое есть непрерывная функция; около источника $z=0$ и $y=\eta$ $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ можно представить в виде:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \alpha_1^2 \beta \ln \sqrt{(y-\eta)^2 + x^2} + \Psi(x, y-\eta),$$

где $\Psi(x, y-\eta)$ непрерывная функция. Выражение

$\ln \sqrt{(y-\eta)^2 + x^2}$ умножим на $f(\eta) d\eta$ и проинтегрируем в интервале $(-\infty, \infty)$ тогда получим логарифмический потенциал простого слоя.

Введем обозначение:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 z} \frac{\partial U_0}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 z} U_0 dz$$

т.е.

$$J = \frac{\partial N}{\partial x} + \Omega,$$

где N - логарифмический потенциал простого слоя, а Ω непрерывная функция. Таким образом J при $x=0$ имеет такой же разрыв, как и нормальная производная логарифмического потенциала.

$$\lim_{\substack{x=0 \\ z=0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-\eta)} \frac{\partial U_0}{\partial x} dz = -\alpha_1 \pi f(y) \quad (14)$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ z=0}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_x^{\infty} e^{\beta(x-\eta)} \frac{\partial U_0}{\partial z} dz = -\beta \pi f(y) \quad (15)$$

Принимая во внимание (14) и (15), из (13) получим

$$\pi \alpha_1 \beta (\alpha_1 + \beta) f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(y, \eta) f(\eta) d\eta + \iint_S K_1(y, \xi, z) F(\xi, z) d\xi dz + \varphi_1(y),$$

где

$$K_1(y, \eta) = \frac{1}{\pi \beta \alpha_1 (\alpha_1 + \beta)} \left(a_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + b_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right)_{\substack{x=0 \\ z=0}}$$

Итак, получим следующую систему интегральных уравнений

$$F(x, y) = \iint_S K(x, y; s, t) F(s, t) ds dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x, y-t) f(t) dt + \Psi(x, y) \dots (16)$$

$$f(y) = \iint_S K_1(y; s, t) F(s, t) ds dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_1(y-t) f(t) dt + \Psi_1(y) \dots (17)$$

Докажем, что система интегральных уравнений (16) и (17) имеет единственное решение. Допустим, что неоднородная система интегральных уравнений имеет два решения: F_1, f_1 и F_2, f_2 , удовлетворяющие условиям (4^I) и (5^I). С помощью этих решений можно составить потенциальную функцию $U(x, y, z; x_1, 0, 0)$, которая имеет вид (C).

Разность функций $F_1 - F_2 = F$ и $f_1 - f_2 = f$ удовлетворяет условиям (4^I) и (5^I) и однородной системе интегральных уравнений, но построив потенциальную функцию с помощью (C), получим:

$$U(x, y, z; x_1, 0, 0) = U_1(x, y, z; x_1, 0, 0) \dots (18)$$

так как

$$\iint_S U_1(x, y, z; \xi, \zeta, 0) F(\xi, \zeta) d\xi, d\zeta + \int_{-\infty}^0 U_1(x, y-\eta, z; 0, 0) d\eta f(\eta) = 0$$

(18) противоречит единственности решения задачи, т.е. единственности потенциальной функции.

Таким образом, рассматриваемая система (16) и (17) имеет единственное решение.

Легко можно показать, что

$$\text{при } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ следует } F(x, y) \equiv 0$$

$$\bar{U}_0(x, y, z; x_1, 0, 0) = U_0(x, y, z; x_1, 0, 0)$$

а (17) примет вид

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(y-r) f(r) dr + \varphi_1(y)$$

Полученное уравнение соответствует интегральному уравнению (15), данному Г.В.Мухиной [4].

ГЛАВА III

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Как известно, функции

$$U(x, y, z) = \alpha_1 \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-z)} U_i(x, y, z) dz \quad \begin{array}{l} \text{при } z > 0 \\ i = \bar{I}, \bar{II} \end{array}$$

$$U(x, y, z) = \alpha_1 \int_{-\infty}^z e^{-\alpha_1(z-z)} U_i(x, y, z) dz, \quad \text{при } z < 0$$

где

$$U_{\bar{I}} = \beta \int_x^{\infty} e^{\beta(x-\xi)} U_0(-\xi, y, z) d\xi + U_0(x, y, z) - U_0(-x, y, z) \quad x > 0$$

$$U_{\bar{II}} = \beta \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} U_0(\xi, y, z) d\xi \quad \text{где } x < 0$$

суть решения задачи при $\alpha_1 = \alpha_2$.

При помощи этих функций можно для различных значений α и β вычислить $\frac{\partial U}{\partial x}$. В самом деле

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha_1 \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-z)} dz \left[-\beta U_0(-x, y, z) + \frac{\partial U_0}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial U_0}{\partial x}(-x, y, z) \right] +$$

$$+ \alpha_1 \beta^2 \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-z)} dz \int_x^{\infty} e^{\beta(x-\xi)} U_0 d\xi \quad x > 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha_1 \int_z^{\infty} e^{\alpha_1(z-z)} dz \left[\beta U_0(x, y, z) - \beta^2 \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} U_0(\xi, y, z) d\xi \right] \quad x < 0$$

так как

$$\beta^2 \int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} U_0(-\xi, y, z) d\xi = \beta U_0(-x, y, z) - \beta \int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} \frac{\partial U_0(-\xi, y, z)}{\partial \xi} d\xi$$

$$\beta^2 \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} U_0(\xi, y, z) d\xi = -\beta U_0(x, y, z) + \beta \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \frac{\partial U_0(\xi, y, z)}{\partial \xi} d\xi$$

получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z)} dz \left[\beta \int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} \frac{\partial U_0(-\xi)}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U_0(x)}{\partial x} - \frac{\partial U_0(-x)}{\partial x} \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha \beta \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z)} dz \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \frac{\partial U_0(\xi)}{\partial \xi} d\xi.$$

Известно, что :

$$\frac{\partial U_0(x)}{\partial x} = \frac{-c(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad \text{где} \quad c = \frac{y}{2\pi b_1}$$

$$\frac{\partial U_0(-x)}{\partial x} = \frac{-c(x+x_1)}{[(x+x_1)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

при $z=0$ $y=0$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha_1 c \left[\int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} dz \beta \int_x^\infty e^{\beta(x-\xi)} \frac{\xi+x_1}{[(\xi+x_1)^2 + z^2]^{3/2}} d\xi + \int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} \frac{(x-x_1)}{[(x-x_1)^2 + z^2]^{3/2}} dz - \int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} \frac{(x+x_1)}{[(x+x_1)^2 + z^2]^{3/2}} dz \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha \beta c \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} (\xi-x_1) d\xi \int_0^\infty \frac{dz}{[(\xi-x_1)^2 + z^2]^{3/2}}$$

Обозначим через

$$a = (\xi + x_1) \alpha_1$$

$$a_1 = (x - x_1) \alpha_1 \quad \Theta(a) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{[t^2 + a^2]^{3/2}}$$

$$a_2 = (x + x_1) \alpha_1,$$

тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha_1 c \left\{ \beta e^{\beta(x-x_1)} \int_{\alpha_1(x+x_1)}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{\alpha_1} a} a \Theta(a) da + \alpha_1 a_1 \Theta(a_1) - \alpha_1 a_2 \Theta(a_2) \right\} \quad x > 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\alpha_1 c \beta e^{-\beta(x-x_1)} \int_{-\infty}^{\alpha_1(x-x_1)} e^{\frac{\beta}{\alpha_1} a} a \Theta(a) da \quad x < 0 \quad (20)$$

Вычислим функции $\frac{\partial U}{\partial x}$ по формулам (19) и (20) в случае, когда параметры имеют значения $\alpha = 1:10$, $\beta = 1:5$, $c = 1$.

В эти формулы входит интеграл $\int_{\alpha_1(x_1)}^{\infty} e^{-2a} a \Theta(a) da$, который можно вычислить с точностью 0,004, если верхний предел интеграла ∞ заменить величиной 5. В самом деле, разность

$$|B - B_0| \leq 91.507 \int_5^{\infty} e^{-2a} a da,$$

где $B = \int_{\alpha_1}^{\infty} e^{-2a} a \Theta(a) da$, $B_0 = \int_0^5 e^{-2a} a \Theta(a) da$,

численный коэффициент 91.507 есть максимум функции $\Theta(a)$ в интервале $(0, 1, \infty)$, как видно из таблицы I.

Принимая, что интеграл

$$\int_5^{\infty} e^{-2a} a da = \left[\frac{a e^{-2a}}{-2} \right]_5^{\infty} - \frac{1}{2} \int_5^{\infty} e^{-2a} da = \frac{5e^{-10}}{2} = 2.25 e^{-10}$$

имеем $|B - B_0| = 0,004$

Пользуясь этим замечанием, выражения (19) и (20) можно переписать так:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -0.1 \left\{ 0.2 e^{0.2(x-1)} \int_{0.1(x+1)}^5 e^{-2a} a \theta(a) da + 0.1 a_1 \theta(a_1) - 0.1 a_2 \theta(a_2) \right\} \quad x > 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0,02 e^{-0.2(x-1)} \int_{-5}^{0.1(x-1)} e^{2a} a \theta(a) da \quad x < 0 \quad (22)$$

Вычислим значение $\frac{\partial U}{\partial x}$ в точках -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 вдоль оси x . При вычислении интеграла $\int_{0.1(x+1)}^5 e^{-2a} a \theta(a) da$ в точках $(x=0, 1, 2, 3, 5)$ и $\int_{-5}^{0.1(x-1)} e^{2a} a \theta(a) da$ - в точках $(x=0, -1, -2, -3)$ мы пользовались формулой Симпсона, которая имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6m} [y_0 + 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 + \dots + y_m]$$

Результаты вычисления значений подынтегрального выражения сведены в таблице 2.

Таблица I

a	$\Omega_1 - N_1$	$\frac{1}{a}$	$\frac{\pi}{2a}$	$\theta(a)$
0.1		20		
0.2	2.6958	5.00	7.8540	21.1728
0.3	1.6754	3.333	5.2354	8.7714
0.4	1.1780	2.5	3.9270	4.6260
0.5	0.8866	2.0	3.1416	2.7853
0.6	0.6980	1.666	2.6169	1.8266
0.7	0.5670	1.429	2.2446	1.2726
0.8	0.4715	1.25	1.9635	0.9258
0.9	0.3993	1.111	1.7451	0.6968
1.0	0.3430	1.000	1.5708	0.5388
1.0	0.3430	1.0	1.5708	0.539
1.4	0.2080	0.7143	1.1220	0.2334
1.8	0.1400	0.5555	0.8727	0.1222
2.2	0.1000	0.3545	0.7139	0.0714
2.6	0.0759	0.3846	0.6041	0.0455
3.0	0.0472	0.3333	0.5184	0.0313
3.4	0.0472	0.2941	0.4620	0.0218
3.8	0.0386	0.2632	0.4134	0.01596
4.2	0.0322	0.2331	0.3740	0.01204
4.6	0.0273	0.2174	0.3415	0.00932
5.0	0.0233	0.2000	0.3114	0.007

Таблица 2.

a	$a e^{-2a}$	$a e^{-2a} \theta(a)$
0.1	0.08187	7.4917
0.2	0.13406	2.8384
0.3	0.16464	1.4444
0.4	0.17772	0.8226
0.5	0.18395	0.51124
0.6	0.18072	0.3301
0.7	0.17262	0.2197
0.8	0.16152	0.1495
0.9	0.16152	0.1495
1.0	0.13530	0.0728
1.4	0.0851	0.0199
1.8	0.0499	0.0110
2.2	0.0268	0.0019
2.6	0.0078	0.0003
3.0	0.0072	0.0001

Заметим, что подынтегральная функция вида $a e^{-2a} \theta(a)$ позволяет применить формулу Симпсона, которая для интеграла

$$J(x) = \int_{a_1(x+1)}^5 e^{-2a} a \theta(a) da \quad \text{дает значения приведенные в таблице 3.}$$

Таблица № 3.

x	$J(x)$
0	0.9953
1	0.5026
2	0.3137

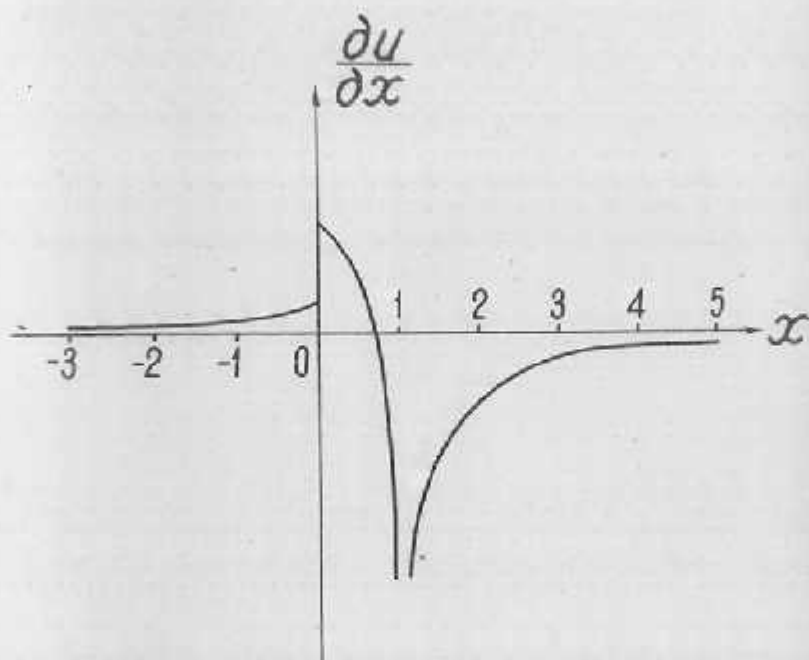


рис. 6

3	0.1980
4	0.1293
5	0.0810
6	0.0314

Учитывая данные таблицы 3, по формулам (21) и (22) вычислены функции $\frac{\partial U}{\partial x}$ и построена соответствующая кривая, изображенная на фиг.6.

Г.В.Мухиной [3] рассматривалось влияние поверхностного наносного слоя на электрическое поле, создаваемое точечным электродом в случае, когда этот слой перекрывает вертикальный контакт двух сред. Для этого случая

$$\frac{\partial U}{\partial x} = c \frac{\partial U_1}{\partial x} + \iint_{S'} \frac{\partial U}{\partial x} \left[f(\xi, \eta) + \lambda \iint_{c'} \kappa(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1) f(\xi_1, \eta_1) d\xi_1 d\eta_1 + \dots \right] d\xi d\eta \quad (23)$$

где

$$c = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_1}; \quad U_1(x_1, 0, 0; x, y, z) = \alpha_1 \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z')} \bar{U}_0(x_1, 0, 0; x, y, z') dz' \quad (24)$$

(23) формула выражает распределение потенциала на поверхности $z=0$.

Производная $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ имеет вид

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \alpha_1 \int_z^\infty e^{\alpha_1(z-z')} (1+\kappa) \frac{x-x_1}{[(x-x_1)^2 + y^2 + z'^2]^{3/2}} dz'$$

$$a f(x, y) = c \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial U_1}{\partial z} (x_1, 0, 0; x, y, 0)$$

Из (24) получим

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\alpha_1 \bar{U}_0(x_1, 0, 0; x, y, 0) + \alpha_1^2 \int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} \bar{U}_0(x_1, 0, 0; x, y, z) dz \quad (25)$$

подставляя (25) в значение $f(x, y)$, получим

$$f(x, y) = c \frac{\lambda}{2\pi} \left[-\alpha_1 (1+\kappa) \frac{1}{[(x-x_1)^2 + y^2]^{1/2}} + \alpha_1^2 (1+\kappa) \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha_1 z}}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}} dz \right]$$

Значение $\frac{\partial U_1}{\partial x}$ при $y=0$ и $z=0$ имеет вид

$$\frac{\partial U_1(x_1, 0, 0; x, 0, 0)}{\partial x} = \alpha_1 (1+\kappa) (x-x_1) \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha_1 z}}{[(x-x_1)^2 + z^2]^{3/2}} dz \quad (26)$$

Обозначим через $a = \alpha_1 (x-x_1)$, тогда (26) примет вид

$$\frac{\partial U_1(x_1, 0, 0; x, 0, 0)}{\partial x} = \alpha_1 (1+\kappa) (x-x_1) \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{[a^2 + t^2]^{3/2}} dt$$

или

$$\frac{\partial U_1(x_1, 0, 0; x, 0, 0)}{\partial x} = \alpha_1 (1+\kappa) (x-x_1) \theta(a) \quad (27)$$

В формуле (23) второе слагаемое имеет вид

$$\iint_{S'} \alpha_1 (1+\kappa) (\xi-x_1) \theta(a) \left[-\alpha_1 (1+\kappa) \frac{1}{[(\xi-x_1)^2 + \eta^2]^{1/2}} + \alpha_1^2 (1+\kappa) \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha_1 z}}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + \eta^2 + z^2}} dz \right] d\xi d\eta \quad (28)$$

где

$$a^2 = \alpha_1^2 [(\xi-x_1)^2 + \eta^2]$$

(28) можно переписать в следующем виде:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \alpha_1^2 (1+\kappa)^2 (\xi-x_1) \theta(a) \left[-\frac{1}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + \eta^2}} + \alpha_1 \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha_1 z}}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + \eta^2 + z^2}} dz \right] d\xi d\eta,$$

то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_1^2 (1+\kappa)^2 (\xi-x_1) \theta(a) \left[-\frac{\alpha_1}{a} + \alpha_1 \theta_1(a) \right] d\xi d\eta,$$

где

$$\alpha_1^2 = \alpha_1^2 [(\xi-x_1)^2 + \eta^2], \quad \theta(a_1) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 z} \frac{\alpha_1 dz}{\sqrt{a_1^2 + \alpha_1^2 z^2}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{a_1^2 + t^2}}$$

Ясно, что с точностью до первого порядка формула (23) примет следующий вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \alpha_1 (1+\kappa) \theta(a) (x-x_1) + \iint \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\pi\alpha_1} \alpha_1^2 (1+\kappa)^2 (\xi-x_1) \theta(a_1) \left[-\frac{1}{a_1} + \theta_1(a_1) \right] d\xi d\eta \quad (29)$$

где $a = \alpha_1 (x-x_1)$ $\alpha_1^2 = \alpha_1^2 [(\xi-x_1)^2 + \eta^2]$

Формула (29) дает распределение потенциала на поверхности $\tilde{z} = 0$ с точностью до первого порядка при следующей структуре: вертикальный контакт двух сред перекрыт наносным слоем и электрическое поле создано точечным электродом в точке /1, 0, 0/. Нами проведены вычисления $\frac{\partial U}{\partial x}$ при следующих значениях величин, характеризующих эту структуру:

$$\alpha_1 = 0,1; \quad \alpha_2 = 0,11; \quad \kappa = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} = 0,0476; \quad (1+\kappa)^2 = 1,0864; \quad \epsilon = 1;$$

Результаты вычислений даны в приложении, причем, в табл. I-II даны значения величины a_1 , а в таблицах III, IV, V... до XIX включительно - значения функции

$$\frac{e^{-t}}{\sqrt{a_1^2 + t^2}}$$

В таблицах XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX даны значения интеграла

$$\Theta_1(a_1) = \int_0^s \frac{e^{-t} dt}{\sqrt{a_1^2 + t^2}}$$

для разных значений a_1 .

В таблицах XXI, XXII, XXIII и XXIV даны значения функций $\Theta_1(a)$, $\frac{1}{a} - \Theta_1(a)$, $\Theta(a)$ и $\Theta(a) \left[\frac{1}{a} - \Theta_1(a) \right]$ соответственно.

В таблице XXV даны значения интеграла

$$\int_0^{-10} \int_0^{-8} \Theta(a_1) \left[\frac{1}{a_1} - \Theta_1(a_1) \right] d\xi d\eta$$

В таблице XXVI последняя графа дает значения $\frac{\partial U}{\partial x}$ при $z=0$ по формуле (29).

Допустим, что разность $\alpha_2 - \alpha_1$ есть бесконечно малая первого порядка, тогда для $F(x, y)$ получим, что

$$F(x, y) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi\alpha_1} \left. \frac{\partial U_1(x, y, z; \alpha_1, \beta, 0)}{\partial z} \right|_{z=0}$$

$$F(x, y) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi\alpha_1} (-\alpha_1 \beta) \left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} e^{\beta(\xi-x_1)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + y^2}} + e^{-\beta(x+x_1)} \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \int_{-\infty}^x e^{\beta(\xi+x_1)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi+x_1)^2 + y^2}} - \right. \\ \left. - \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + y^2 + z^2}} - \alpha_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (30)$$

Так как в выражении 30 коэффициенты при втором и четвертом слагаемых бесконечно малые второго порядка, то ими можно пренебречь. Тогда

$$F(x, y) = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \beta \left[e^{-\beta(x-x_1)} \int_{-\infty}^x e^{\beta(\xi-x_1)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + y^2}} - \alpha_1 \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + y^2}} \right]$$

Для $F(x, 0)$ имеем

$$F(x,0) = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\pi} \beta \left[-e^{\alpha_1(x-x_1)} E_i \left[-\beta(x+x_1) \right] - \alpha_1 \int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-\infty}^x e^{\beta(x-\xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + z^2}} \right] \quad (31)$$

В интеграле

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-x_1)^2 + z^2}}$$

бесконечно большие пределы при вычислении можно заменить конечными; при этом действительное значение интеграла будет отличаться от его приближенного значения не более чем на 0,05. В самом деле ^{вычислим} разность интегралов B и B_1 , где

$$B = \alpha_1 \beta \int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-\infty}^{\beta \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)^2 + z^2}} \quad \text{и} \quad B_1 = \alpha_1 \beta \int_0^{10} e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-10}^{\beta \xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-1)^2 + z^2}}$$

Абсолютное значение разности равно

$$|B - B_1| \leq \left| \int_0^\infty e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-\infty}^{\beta \xi} d\xi - \int_0^{10} e^{-\alpha_1 z} dz \int_{-10}^{\beta \xi} d\xi \right| = \frac{1}{\alpha_1 \beta} e^{-10(\alpha_1 + \beta)}$$

Принимая, что $\alpha_1 = 0.1$ $\beta = 0.2$, тогда последнее выражение дает $|B - B_1| = 0,05$.

Для вычисления значения функции $F(x,y)$ воспользуемся методом механической кубатуры, которая получается с помощью формулы двойного интерполирования. При этом мы опускаем все члены, заключающие разности Δ^{3+0} , Δ^{0+3} , Δ^{4+0} , Δ^{3+1} , Δ^{0+4} , так как в эти разности входят значения функций и вне области интегрирования

$$\text{Если} \quad dx = h du \quad dy = k dv$$

то получим

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} = \int_{x_0}^{x_0+2h} \int_{y_0}^{y_0+2k} z \, dx \, dy = hK \int_0^2 \int_0^2 & \left\{ z_{00} + u \Delta^{1+0} z_{00} + v \Delta^{0+1} z_{00} + \right. \\
 + \frac{1}{2} \left[u(u-1) \Delta^{2+0} z_{00} + 2uv \Delta^{1+1} z_{00} + v(v-1) \Delta^{0+2} z_{00} + \frac{1}{6} \left[3u(u-1)v \Delta^{2+1} z_{00} + \right. \right. \\
 \left. \left. + 3uv(v-1) \Delta^{1+2} z_{00} \right] + \frac{1}{24} \left[6u(u-1)v(v-1) \Delta^{2+2} z_{00} \right] \right\} du \, dv
 \end{aligned}$$

Проинтегрировав и заменив двойные разности с их значениями, мы найдем:

$$\mathcal{J} = \frac{hK}{9} \left[z_{00} + z_{02} + z_{22} + z_{20} + 4(z_{01} + z_{12} + z_{21} + z_{10}) + 16z_{11} \right]$$

Это и есть формула, соответствующая формуле Симпсона.

Она позволяет воспользоваться положением:

" Если дана прямоугольная сетка значения функций двух переменных, то к каждой строке или к каждому столбцу можно применить любую формулу квадратур с равно отстоящими ординатами, как например, формулы Симпсона и Уэддла. Затем к полученным таким образом для строк / или столбцов / результатам можно опять применить ту же формулу " [7] .

В таблице 4 даны значения функций

$$e^{-0.1\zeta} e^{-0.2\xi} \frac{1}{\sqrt{(\xi-1)^2 + \zeta^2}}$$

прямоугольной сетки. Пользуясь вышеуказанным положением, мы

вычислили значения интеграла

$$J(x) = \int_0^{10} e^{-0.1z} dz \int_{-10}^x e^{0.2(x-\xi)} \frac{d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + z^2}}$$

при	$x = 0$	1	2	3
	$J(x) = 2,3928$	3.6268	2.4482	1.7299

Пользуясь формулой (31), вычислим значение функции $F(x, 0)$ в точках $x=0, -1, -2, -3, \dots$ для таких значений α_1 и α_2 , для которых величина $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\pi} \cdot 0,2$ была бы бесконечно малой первого порядка.

Тогда получим

при	$x = 0$	-1	-2	-3
	$F(x, 0) = -0,4597$	-0,3397	-0,3092	-0,290

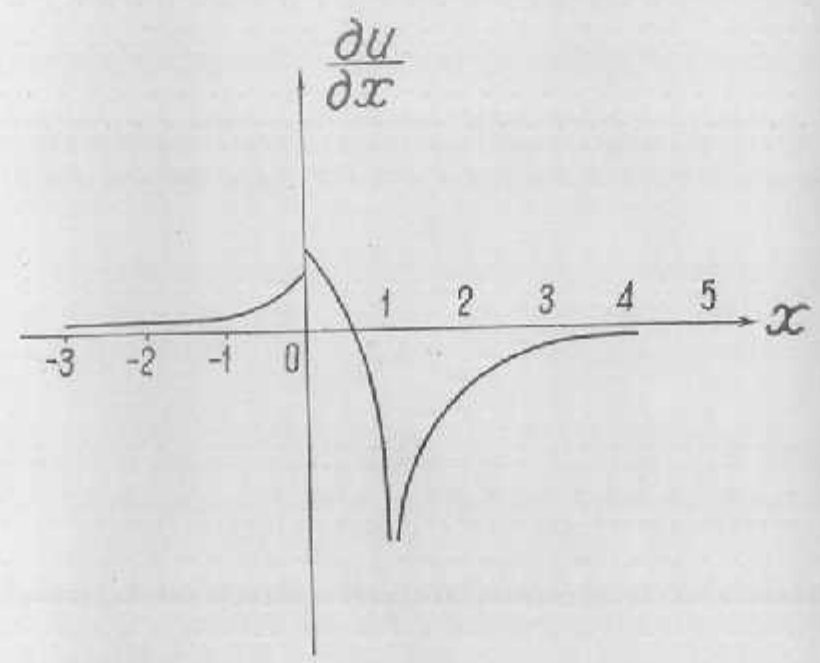
Пользуясь формулой (C) можно построить кривую для следующих значений параметров: $\alpha_1 = 1:10$, $\beta = 1:5$ и $\alpha_1 - \alpha_2$ есть бесконечно малая первого порядка. Сопоставляя эту кривую с кривой $\frac{\partial U}{\partial x}$ которая вычисляется при $\alpha_1 = \alpha_2 = 1:10$ и $\beta = 1:5$, мы убедимся, что они хорошо совпадают между собой на больших расстояниях от вертикальной жилы / см. фиг. 5/, а по мере приближения к ней разность между значениями этих кривых растет, достигая наибольшей величины над жилой.

ξ
 η

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1.0000	0.6399	0.3616	0.2342	0.1626	0.1189	0.0902	0.0738	0.0557	0.0449	0.0366
1	0.4093	0.3313	0.2370	0.1682	0.1241	0.0921	0.0710	0.0543	0.0446	0.0361	0.0295
2	0.2234	0.1918	0.1522	0.1170	0.0899	0.0697	0.0548	0.0437	0.0352	0.0287	0.0236
3	0.1371	0.1204	0.1005	0.0813	0.0632	0.0520	0.0418	0.0338	0.0253	0.0226	0.0187
4	0.0898	0.0797	0.0683	0.0571	0.0470	0.0385	0.0316	0.0259	0.0214	0.0177	0.0148
5	0.0613	0.0547	0.0475	0.0406	0.0342	0.0286	0.0238	0.0198	0.0165	0.0138	0.0116
6	0.0430	0.0385	0.0339	0.0293	0.0250	0.0212	0.0179	0.0151	0.0127	0.0107	0.0091
7	0.0308	0.0277	0.0239	0.0214	0.0185	0.0158	0.0135	0.0115	0.0098	0.0083	0.0075
8	0.0224	0.0202	0.0179	0.0158	0.0137	0.0126	0.0102	0.0088	0.0075	0.0064	0.0055
9	0.0165	0.0149	0.0133	0.0117	0.0103	0.0090	0.0078	0.0067	0.0058	0.0050	0.0043
10	0.0123	0.0111	0.0099	0.0088	0.0077	0.0068	0.0061	0.0052	0.0045	0.0039	0.0033
X=0	1.6098	1.1765	0.8448	0.6581	0.5078	0.4032	0.3189	0.2566	0.2073	0.1730	0.1414
X=-1	0.8115	0.7020	0.5874	0.4599	0.3772	0.2934	0.2311	0.1968	0.1581	0.1364	0.1253
X=-2	0.5129	0.4502	0.3832	0.3201	0.2579	0.2142	0.1756	0.1450	0.1175	0.1001	0.0820
X=-3	0.6300	0.2879	0.2287	0.2119	0.1871	0.1457	0.1210	0.1001	0.0894	0.0743	0.0596

59

об. 7



фиг. 7

ВЫВОДЫ

I. Определение электрического поля на плоскости при наличии наносного слоя, перекрывающего вертикальную жилу, ограниченную средами с различными электропроводимостями, сводится к отысканию потенциальной функции U , удовлетворяющей условиям:

$$1. \Delta U = 0$$

$$2. U(AM) \rightarrow 0$$

$$3. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{для } x > 0 \quad \left| \quad z = 0 \right.$$

$$4. \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{для } x < 0 \quad \left| \quad z = 0 \right.$$

$$5. -\epsilon^* \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \epsilon_0' \frac{\partial U}{\partial z} + \epsilon_0'' \left[\frac{\partial U}{\partial x} \right] \quad x=0 \quad z=0$$

2. Функции: U_1 , $U_{\bar{1}}$, $U_{\bar{2}}$ и U - гармонические функции.

3. Задача нахождения потенциальной функции, удовлетворяющей условиям (1), (2), (3), (4), (5), имеет единственное решение.

4. Вышеприведенная задача сводится к решению системы интегральных уравнений (16) и (17), имеющей единственное решение.

5. Графики $\frac{\partial U}{\partial x}$, рассчитанные при $\alpha_1 - \alpha_2$ бесконечно малой и при $\alpha_1 = \alpha_2$, хорошо совпадают между собой на больших расстояниях от источника тока; над самой же жилой между ними имеет место расхождение.

Считаю своим приятным долгом отметить, что тема диссертации была мне выбрана членом-корреспондентом АН СССР А.Н.Тихоновым, который руководил мною при ее разработке, за что приношу ему глубокую благодарность.

С чувством благодарности отмечаю также большую помощь, оказанную мне дирекцией Института геофизики АН Грузинской ССР и коллективом отдела физики земной коры при выполнении настоящей работы.

-:-:-:-

В.Табуня

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. ЗАБОРОВСКИЙ, А.И. - Электроразведка. Гостоптехиздат, 1943.
2. БУРСИАН, В.В. - Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке, ч. I, ОНТИ, 1932.
3. МУХИНА, Г.В. - Известия Академии Наук, серия географическая и геофизическая, том XIV, №4, 1950, 302 стр. "Об экранирующем влиянии проводящих слоев".
4. МУХИНА, Г.В. - Известия Академии Наук, серия географическая и геофизическая, том XIV, №5, 1950г. 392 ст. "Об экранирующем влиянии проводящих слоев".
5. КРАЕВ, А.П. - Основы геоэлектрики. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, 1951.
6. АЛЫПИН, Л.М. - Прикладная геофизика. Сборник статей. Гостоптехиздат, 1945, стр. 40.
7. СКАРБОРО, Дж. - Численные методы математического анализа. ГТТИ, 1934.
8. ЯНКЕ, Е. и ЭНДЕ, Ф. - Таблицы функций с формулами и кривыми. Огиз. Гостехиздат, 1948.
9. СЕГАЛ, Б.И. и СЕМЕНДЯЕВ, К.А. - Пятизначные математические таблицы. Издательство Академии Наук СССР. 1948.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦЫ ЧИСЛЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ДАЮЩИХ
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ