

ნაწილი III. ერთგანზომილებიანი მოდელები

§3.1. Reros eiler-bernulis modeli

ძელი ეწოდება სხეულს, რომლის ერთი ზომა, სიგრძე, ორ დანარჩენთან შედარებით ძალიან დიდია, დაახლოებით ხუთჯერ მაინც აღემატება მათ. შედარებით გრძელ ძელს ღერო ეწოდება. ძელი შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც ბრტყელი ფიგურის წრფის ან წირის გასწვრივ მოძრაობით მიღებული სხეული ისე, რომ ფიგურის ცენტრი (გეომეტრიული ან სიმძიმის) ყოველთვის ამ წრფეზე ან შესაბამისად წირზე რჩებოდეს, ხოლო ფიგურის სიბრტყე მისი პერპენდიკულარული იყოს. ამ ფიგურას ძელის განივი კვეთი ეწოდება, ხოლო წირს, რომლის გასწვრივაც მოძრაობა ხდება – ძელის ღერძი. ღერძის ფორმის მიხედვით ძელი შეიძლება იყოს *სწორი, მრუდი, ბრტყელი, სივრცითი* და სხვა. განივი კვეთის მიხედვით კი ძელი არის *მუდმივ-* ან *ცვლადკვეთიანი*. ძელის ღერძის პარალელური წირის ნაწილს, მოკვეთილს ორი განივი კვეთით, ბოჭკო ეწოდება (იხ. [3], გვ. 16).

ძელის ღუნვას იწვევენ განივი ძალები და წყვილძალები, რომლებიც ძელის ღერძზე გამავალ სიბრტყეში არიან მოთავსებული. ძელებს, რომლებიც ღუნვას განიცდიან, *კოჭები* ეწოდებათ (იხ. [3], გვ. 160).

თუ კოჭს აზრობრივად გაკვეთთ მისი ღერძის რაიმე წერტილში გამავალი განივკვეთით, მაშინ კვეთაში მოქმედებენ *M მღუნავი მომენტი* და *Q განივი (გადამჭრელი) ძალა*. ამასთან მღუნავი მომენტი რიცხობრივად უდრის კვეთის ცალ მხარეს მოდებულ რეაქციის, შეყურსული და უწყვეტად განაწილებული ძალების კვეთის ცენტრის მიმართ აღებული მომენტების ალგებრულ ჯამს, ხოლო განივი ძალა – კვეთის ცალ მხარეს მოდე-

ბული ძალების კვეთის სიბრტყეზე გვემილების ალგებრულ ჯამს.

იმისათვის, რომ კვეთის მიმართ მარცხენა და მარჯვენა ძალებით შედგენილი მღუნავი მომენტი ერთი და იგივე აღმოჩნდეს არა მარტო სიდიდით, არამედ ნიშნითაც, შემოვიღოთ ასეთი წესი: მარცხენა ძალის მომენტი მივიჩნიოთ დადებითად, თუ იგი კვეთს უვლის საათის ისრის მიმართულებით, მარჯვენა ძალისა კი – საწინააღმდეგოდ. ანალოგიური წესი გვექნება განივი ძალისათვის: მარცხენა განივი ძალა მივიჩნიოთ დადებითად, თუ იგი მიმართულია ზემოთ, მარჯვენა კი – თუ იგი მიმართულია ქვემოთ (იხ. ნახ. 3.1.1, სადაც დადებითი მიმართულებებია ნაჩვენები).

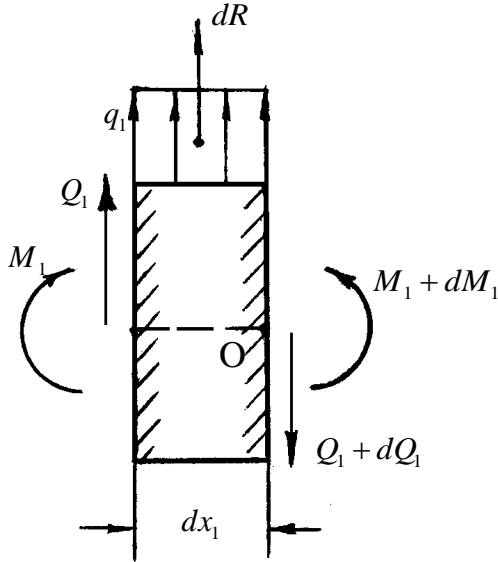


ნახ. 3.1.1

ღუნვის ზოგად შემთხვევას, როცა ძელში არსებობენ მღუნავი მომენტი და განივი ძალა, განივი ღუნვა ეწოდება, ხოლო კერძო შემთხვევას, როცა განივი ძალა ნულია, – სუფთა ღუნვა.

განვიხილოთ კოჭი, რომლის ღერძი x_1 ღერძზე მდებარეობს, დატვირთული უწყვეტად განაწილებული და შეყურსული ძალებით. დატვირთვის ინტენსიურობა q_1 მივიჩნიოთ დადებითად, როცა ის ზემოთაა მიმართული (x_3 ღერძის დადებითი მიმართულებით). შეყურსულ ძალებს შორის დატვირთვის უწყვეტი ცვლილების გამო $M_1(x_1)$ და $Q_1(x_1)$ აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციებია. ერთ-ერთ ასეთ უბანში გამოვყოთ კოჭის უსასრულოდ მც-

რე dx_1 ელემენტი (იხ. ნახ 3.1.2) და შევადგინოთ მისი წონასწორობის განტოლებები.



ნახ. 3.1.2

ელემენტზე მოქმედებს განაწილებული ტვირთი და კოჭის უკუგდებული ნაწილების რეაქციები, ე.ი. შიგა ძალები, რომლებიც მლუნავი მომენტითა და განივი ძალით წარმოადგება. რადგანაც dx_1 უსასრულოდ მცირეა, მასზე მოსული დატვირთვა შეიძლება თანაბრად განაწილებულად ჩავთვალოთ: $dR = q_1 dx_1$. თუ x_1 წერტილში გამავალ განივ კვეთში მლუნავი მომენტი და განივი ძალა M_1 და Q_1 -ია, მაშინ $x_1 + dx_1$ წერტილში გამავალ განივ კვეთში მათი მნიშვნელობები იქნებიან $M_1 + dM_1$ და

$Q_1 + dQ_1$. ძალების ვერტიკალური გეგმილების ჯამი (იხ. [3], გვ. 166)

$$Q_1 - (Q_1 + dQ_1) + q_1 dx_1 = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{dQ_1}{dx_1} = q_1. \quad (3.1.1)$$

ამდენად, განივი ძალის წარმოებული x_1 -ით სიდიდით და ნიშნით უდრის დატვირთვის ინტენსიურობას.

O წერტილის მიმართ (იხ. ნახ. 3.1.2) მომენტების ჯამი

$$M_1 - (M_1 + dM_1) + q_1 dx_1 \frac{dx_1}{2} + Q_1 dx_1 = 0,$$

საიდანაც მეორე რივის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების უკუგლების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$M_{1,1} = Q_1. \quad (3.1.2)$$

ამდენად, მღუნავი მომენტის წარმოებული x_1 -ით სიდიდით და ნიშნით უდრის განივ ძალას.

ჩავსვათ (3.1.2)-ით განსაზღვრული Q_1 -ის გამოსახულება (3.1.1)-ში, მაშინ

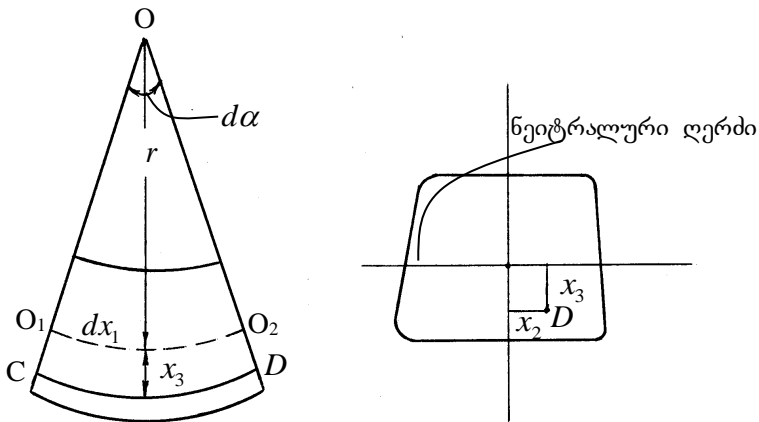
$$M_{1,11} = q_1. \quad (3.1.3)$$

შევნიშნოთ, რომ შეყურსული ძალების და მომენტების მოდების წერტილებში $M_1(x_1)$ და $Q_1(x_1)$ ფუნქციების წყვეტის გამო მათი წარმოებულები აზრს კარგავენ და ამ წერტილებში მირეზული დიფერენციალური დამოკიდებულებების გამოყენება არ შეიძლება.

ლუნვის კლასიკურ თეორიას საფუძვლად უდევს ბერნულის^{*)} (ანუ ბრტყელი კვეთის) ჰიპოთეზა, რომელიც შემდეგში მდგომა-

^{*)} დ. ბერნული (1700-1782).

რეობს: ღუნვის დროს ძელში ჩნდება ორი ზონა: გაჭიმული და შეკუმშული, რომელთა საზღვარზე მოთავსებულია *ნეიტრალური შრე*, შემდგარი ისეთი ბოჭკოებისაგან, რომლებიც სიგრძეს არ იცვლიან; განივი კვეთები ღუნვის პროცესში ბრტყელი და ძელის გაღუნული ღერძის პერპენდიკულარულნი რჩებიან; ისინი, როგორც ხისტი ფირფიტები, შემობრუნდებიან *ნეიტრალური ღერძის* (იხ. ნახ. 3.1.3) გარშემო, რომელიც ნეიტ-რალური შრისა და განივი კვეთის სიბრტყის გადაკვეთას წარმოადგენს (იხ.



[3], გვ. 171).

ნახ. 3.1.3

ორი განივი კვეთით გამოვყოთ უსასრულოდ მცირე dx_1 სიგრძის ელემენტი (იხ. ნახ. 3.1.3). O არის ბოჭკოების სიმრუდის ცენტრი, O_1O_2 ნეიტრალური შრეა, r მისი სიმრუდის რადიუსია. გაჭიმულ ზონაში აღებული ნებისმიერი CD ბოჭკოს სრული წაგრძელება

$$\Delta = |CD| - dx_1 = (r + x_3)d\alpha - r d\alpha = x_3 d\alpha,$$

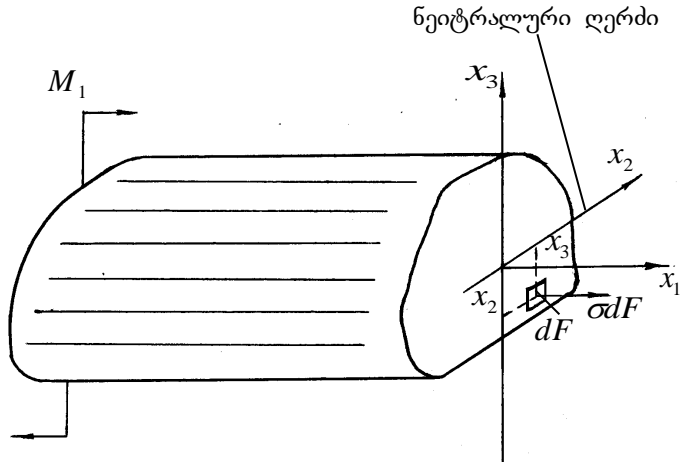
სადაც $d\alpha$ არის ელემენტის ბოლოების ურთიერთობრუნების კუთხე. ცხადია, CD ბოჭკოს ფარდობით დეფორმაციას აქვს

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{dx_1} = x_3 \frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{x_3}{r} \quad (3.1.4)$$

სახე, სადაც

$$\frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dx_1} = \frac{w_{,11}}{\left[1 + (w_{,1})^2\right]^{3/2}} \quad (3.1.5)$$

ნეიტრალური შრის სიმრუდეა, ხოლო w მისი ჩაღუნვაა.



ნახ. 3.1.4

ჰუკის

$$\sigma = E\varepsilon$$

კანონში ჩავსვათ (3.1.5), მაშინ

$$\sigma = E \frac{x_3}{r}. \quad (3.1.6)$$

წონასწორობის მოთხოვნიდან გამომდინარე, თუ ნულს გავუტოლებთ ყველა ძალის მომენტს ნეიტრალური ღერძის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$M_1 - \int_F x_3 \sigma dF = 0. \quad (3.1.7)$$

თუ (3.1.6)-ს ჩავსვამთ (3.1.7)-ში, მაშინ

$$\frac{1}{r} = \frac{M_1}{EI_2}, \quad (3.1.8)$$

სადაც

$$I_2 = \int_F x_3^2 dF$$

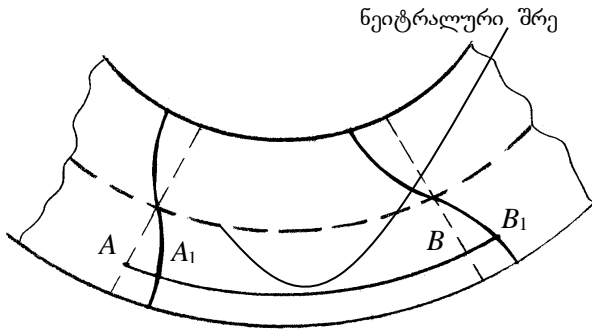
წარმოადგენს ე.წ. *ინერციის მომენტს* x_2 ღერძის მიმართ.

(3.1.7) ტოლობის დაწერისას ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ ლუნვა გამოწვეულია მხოლოდ წყვილძალით. თუ განივი ძალაც არსებობს, მაშინ კვეთში აღიძვრება მხები ძაბვები, რომლებიც კოჭის გრძივ სიბრტყეში ძვრას იწვევენ. მაქსიმალურ ძვრას ადგილი აქვს ნეიტრალურ შრესთან, შემდეგ მცირდება და განაპირა ბოჭკოებთან ისპობა. ძვრის შედეგად კოჭის ღერძი განივი კვეთის მართობი არ რჩება, თვითონ განივი კვეთი კი ცილინდრული ზედაპირის ფორმას მიიღებს, რომლის მსახველი ნეიტრალური ღერძის პარალელური იქნება (იხ. ნახ. 3.1.5). როცა აღებულ უბანში $Q_1 = const$, ყველა კვეთის გამრუდება ერთნაირია, რის გამოც AB ბოჭკო მხოლოდ “ხისტ გადაადგილებას” მიიღებს და დაიკავებს A_1B_1 მდგომარეობას, ამასთან ძვრის შედეგად ის არ დაგრძელდება. ცვლადი განივი ძალის შემთხვევაში თუმცა

დამატებითი წაგრძელება ჩნდება, მაგრამ მეტად უმნიშვნელო, რაც იმის უფლებას გვაძლევს, რომ ის უგულებელვყოთ და ნორმალური ძაბვების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ

$$\sigma = \frac{M_1 x_3}{I_2}$$

ფორმულა, რომელიც (3.1.8)-ის (3.1.6)-ში ჩასმით მიიღება.



ნახ. 3.1.5

თუ ვიგულისხმებთ, რომ w ჩაღუნვა და მისი $w_{,1}$ წარმოებული, რომელიც დეფორმაციის შედეგად გაღუნული ღეროს ღერძის მიერ x_1 ღერძთან შედგენილი კუთხის ტანგენსია, მცირე სიდიდეებია, მაშინ $w_{,1}$ აღნიშნული კუთხის ტოლად, ხოლო $1 + (w_{,1})^2$ ერთის ტოლად შეიძლება ჩავთვალოთ. ამის გათვალისწინებით, (3.1.5)-ის (3.1.8)-ში ჩასმის შემდეგ დავასკვნით, რომ

$$EI_2 w_{,11} = M_1. \quad (3.1.9)$$

(3.1.9)-ის (3.1.3)-ში ჩასმა გვაძლევს ცვლადი განივი კვეთის მქონე ღეროს (ძელის, კოჭის) ღუნვის შემდეგ განტოლებას:

$$(EI_2 w_{,11})_{,11} = q_1. \quad (3.1.10)$$

თუ ღეროს განივი კვეთა ერთეულის ტოლი სიგანისა და $2h(x_1)$ სიმაღლის (ე.ი. ღეროს სისქის) მქონე მართკუთხედი, მაშინ

$$I_2 = \int_{-h}^{+h} x_3^2 dx_3 = \frac{2h^3}{3}.$$

(3.1.10) განტოლებას უნდა დაემატოს სასაზღვრო პირობები ღეროს ბოლოებში. ასეთია შემდეგი სამი ძირითადი სასაზღვრო პირობა:

1) *ხისტად ჩამავრებული ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს არ შეუძლია ვერტიკალურად მოძრაობა და მობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$w = 0, \quad w_{,1} = 0; \quad (3.1.11)$$

2) *სახსრულად დაყრდნობილი ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს არ შეუძლია ვერტიკალური მოძრაობა, მაგრამ შეუძლია მობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$w = 0, \quad M_1 = 0; \quad (3.1.12)$$

3) *თავისუფალი ბოლო*: ამ შემთხვევაში ღეროს ბოლოს შეუძლია როგორც ვერტიკალური მოძრაობა, ასევე შემობრუნება, რაც მათემატიკურად ასე ჩაიწერება:

$$Q_1 = 0, \quad M_1 = 0. \quad (3.1.13)$$

დინამიკის ამოცანების განხილვისას, დალამბერის პრინციპის თანახმად, დატვირთვას უნდა დაემატოს x_3 ღერძის პარალელური ინერციის

$$-\rho(x_1)S(x_1) \frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2}$$

ძალა, სადაც $\rho(x_1)$ ღეროს სიმკვრივეა, ხოლო $S(x_1)$ ღეროს განივი კვეთის ფართობია. ამდენად, ღეროს დინამიკის განტოლებას, (3.1.10)-ის ძალით, აქვს

$$[E(x_1)I_2(x_1)w_{,11}]_{,11} = q_1(x_1, t) - \rho(x_1)S(x_1)\frac{\partial^2 w(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (3.1.14)$$

სახე.

ღეროს დინამიკის ამოცანების განხილვისას (3.1.11)-(3.1.13) ტიპის სასაზღვრო პირობებს უნდა დაემატოს

$$w(x_1, 0) = 0, \quad \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.1.15)$$

საწყისი პირობები.

(3.1.11)-(3.1.15) პირობები შეიძლება არაერთგვაროვანიც იყოს.

თუ $S(x_1) = 0$ ღეროს რაიმე წერტილებში, კერძოდ, ბოლოებში, მაშინ მას წამახვილებული ღერო ეწოდება.

წამახვილებული ღეროს სტატიკისა და დინამიკის ძირითადი ამოცანების დასმის თავისებურებები და თვით სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ, არაწამახვილებული ღეროების შემთხვევაშიც, გამოკვლეულია [23]-ში.

§3.2. Reroebis ierarqiuli modelebi

ვთქვათ, ღეროს უკავია R^3 სივრცის \bar{V} ნაწილი,

$$V := \left\{ (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < L, \quad h_i^{(-)}(x_1) \leq x_i \leq h_i^{(+)}(x_1), \right. \\ \left. i = 2, 3, L = \text{const} \right\},$$

$$2h_i(x_1) := h_i^{(+)} - h_i^{(-)} \geq 0, \quad h_i \in C([0, L]) \cap C^1([0, L]), \quad i = 2, 3,$$

სადაც $2h_3$ და $2h_2$ მართკუთხა განივი კვეთის მქონე ღეროს, შესაბამისად, სისქე და სიგანეა, რომელთა მაქსიმუმები არსებითად ნაკლებია ღეროს L სიგრძეზე.

დაეუშვათ, რომ

$$f(x_1, x_2, x_3) \in C^1(V),$$

და x_1 წერტილში, სადაც არც სისქე და არც სიგანე ნული არ ხდება, შემდეგნაირად განვსაზღვროთ ფუნქციისა და მისი $f_{,j}$ წარმოებულის ორმაგი მომენტი:

$$f_{n_3 n_2}(x_1) := \\ \int_{h_2^{(-)}}^{h_2^{(+)}} \int_{h_3^{(-)}}^{h_3^{(+)}} f(x_1, x_2, x_3) P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3) dx_2 dx_3, \quad (3.2.1)$$

$${}_j f_{n_3 n_2}(x_1) := \\ \int_{h_2^{(-)}}^{h_2^{(+)}} \int_{h_3^{(-)}}^{h_3^{(+)}} f_{,j}(x_1, x_2, x_3) P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3) dx_2 dx_3, \quad (3.2.2)$$

$$n_i = 0, 1, \dots, \quad i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

სადაც

$$a_i := \frac{1}{h_i}, \quad b_i := \frac{\tilde{h}_i}{h_i}, \quad 2\tilde{h}_i := h_i^{(+)} + h_i^{(-)}, \quad i = 2, 3,$$

P_{n_i} , $i = 2, 3$, ლეჟანდრის პოლინომებია. ცნობილია, რომ (იხ. დამატება 2 ან მაგალითად, [4]):

$$\int_{-1}^{+1} P_k(t) P_l(t) dt = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl},$$

ე.ი. თუ $t = a_i x_i - b_i$, $i = 2, 3$,

$$\left(k + \frac{1}{2} \right) \int_{h_i^{(-)}}^{h_i^{(+)}} P_k(a_i x_i - b_i) P_l(a_i x_i - b_i) a_i dx_i = \delta_{kl}, \quad (3.2.3)$$

$$i = 2, 3.$$

თუ ერთი მაინც, ღეროს ან სისქე, ან სიგანე ნული ხდება რაიმე $x_1 \in [0, L]$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ორმაგი მომენტი განისაზღვრება, როგორც ზღვარი იმ წერტილებიდან, სადაც $h_i > 0$, $i = 2, 3$.

ამ პარაგრაფის მიზანია აგებული იქნეს ი. ვეკუას მიერ პრიზმული გარსების შემთხვევაში აგებული იერარქიული მოდელების ანალოგიური იერარქიული მოდელები მართკუთხა კვეთის მქონე ღეროებისათვის (ეს საკითხი დაწვრილებითაა განხილული [21]-ში).

ამისათვის (1.6.3). (1.12.9) და (1.18.1) დამოკიდებულებების ორივე მხარე გავამრავლოთ $P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2) P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3)$ -ზე და შემდეგ ვაინტეგრროთ x_i -ის მიმართ $h_i^{(-)}$, $h_i^{(+)}$ $i = 2, 3$, საზღვრებში. (1.12.9)-დან უშუალოდ მივიღებთ, რომ

$$X_{ijn_2} = \lambda \delta_{ij} \theta_{n_3 n_2} + \mu e_{ijn_2}, \quad \theta_{n_3 n_2} := e_{kkn_3 n_2}, \quad (3.2.4)$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad n_2, n_3 = 0, 1, \dots$$

ხოლო (3.2.2)-ისა და (3.2.3)-ის გამოყენებით, გარკვეული გამოთვლების შემდეგ, თუ $u \in C^2(V)$, დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების ორმაგი მომენტებისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს:

$$e_{11n_3 n_2} = u_{1n_3 n_2, 1} + \sum_{i=2}^3 \left(a_{n_i}^i u_{1n_3 n_2} - \sum_{s=n_i}^{\infty} b_{n_i}^i a_i u_{1 \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2} \right), \quad (3.2.5)$$

$$e_{\ddot{u}n_3 n_2} = - \sum_{s=n_i+1}^{\infty} b_{is}^{n_i} a_i u_{i \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2}, \quad i = 2, 3, \quad (3.2.6)$$

$$2e_{23n_3 n_2} = - \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{\infty} b_{is}^{n_i} a_i u_{5-i \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2} \quad (3.2.7)$$

$$2e_{lin_3 n_2} = u_{in_3 n_2, l} + \sum_{k=2}^3 \left(a_{n_k}^k u_{in_3 n_2} - \sum_{s=n_k}^{\infty} b_{s}^k a_k u_{i \delta_{k2} n_3 + \delta_{k3} s \delta_{k2} s + \delta_{k3} n_2} \right) \quad (3.2.8)$$

$$- \sum_{s=n_i+1}^{\infty} b_{is}^{n_i} a_i u_{l \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s \delta_{i2} s + \delta_{i3} n_2},$$

$$i = 2, 3, \quad n_2, n_3 = 0, 1, \dots,$$

სადაც

$$b_s^{n_i} := \left(s + \frac{1}{2}\right) \left[h_{i,l}^{(+)} - (-1)^{s+n_i} h_{i,l}^{(-)} \right], \quad (3.2.9)$$

$$b_{is}^{n_i} := -\left(s + \frac{1}{2}\right) \left[1 - (-1)^{n_i+s} \right],$$

$$a_s^{n_i} = \begin{cases} n_i h_{i,1} \frac{1}{h_i}, & s = n_i, \\ b_s^{n_i} a_i, & s \neq n_i, \end{cases} \quad a_{is}^{n_i} = \begin{cases} 0 = b_{is}^{n_i}, & s = n_i, \\ b_{is}^{n_i} a_i, & s \neq n_i, \end{cases}$$

ამასთან

$$u_j(x_1, x_2, x_3) = \sum_{m_2, m_3=0}^{\infty} a_2 a_3 \left(m_2 + \frac{1}{2}\right) \left(m_3 + \frac{1}{2}\right) u_{jm_3 m_2}(x_1) P_{m_3}(a_3 x_3 - b_3) \quad (3.2.10)$$

$$\times P_{m_2}(a_2 x_2 - b_2), \quad j = 1, 2, 3,$$

და მწკრივები (3.2.5)–(3.2.8), (3.2.10)-ში თანაბრად კრებადია $\left[h_2^{(-)}, h_2^{(+)} \right] \times \left[h_3^{(-)}, h_3^{(+)} \right]$ -ზე.

მოძრაობის (1.18.1) განტოლებები კი ორმაგ მომენტებში შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\begin{aligned}
& X_{1jn_3n_2,1} + \sum_{s=0}^{n_2} \left(a_s^{n_2} X_{1jn_3s} + a_{2s}^{n_2} X_{2jn_3s} \right) \\
& + \sum_{s=0}^{n_3} \left(a_s^{n_3} X_{1jsn_2} + a_{3s}^{n_3} X_{3jsn_2} \right) \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

$$+ X_j^{n_3, n_2} = \rho \frac{\partial^2 u_{jn_3n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3, n_2 = 0, 1, \dots,$$

სადაც

$$\begin{aligned}
& X_j^{n_3, n_2} := \\
& \sum_{i=2}^3 \int_{h_i^{(-)}}^{h_i^{(+)}} \left[\sqrt{1 + \left(h_{5-i,1}^{(+)} \right)^2} X_{\nu_{5-i}^{(+)} j}^{(+)} \left(x_1, \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3}^{(+)} h_2, \delta_{i3}^{(+)} h_3 + \delta_{i3} x_3 \right) \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n_{5-i}} \sqrt{1 + \left(h_{5-i,1}^{(-)} \right)^2} \right. \\
& \quad \left. \times X_{\nu_{5-i}^{(-)} j}^{(-)} \left(x_1, \delta_{i2} x_2 + \delta_{i3}^{(-)} h_2, \delta_{i2}^{(-)} h_3 + \delta_{i3} x_3 \right) \right] \\
& \times P_{n_i} (a_i x_i - b_i) dx_i + X_{jn_3n_2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3, n_2 = 0, 1, \dots, \quad (3.2.12) \\
& X_{\nu_{ij}^{(\pm)}}^{(\pm)} \left(x_1, \delta_{i2}^{(\pm)} h_2 + \delta_{i3} x_2, \delta_{i2} x_3 + \delta_{i3}^{(\pm)} h_3 \right) = X_{kj}^{(\pm)} \nu_{ik}, \\
& \quad i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,
\end{aligned}$$

$$X_{\nu_i j}^{(\pm)} \left(x_1, \delta_{i2} h_2^{(\pm)} + \delta_{i3} x_2, \delta_{i2} x_3 + \delta_{i3} h_3^{(\pm)} \right),$$

$$i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3,$$

წარმოადგენენ $x_i = h_i^{(\pm)}(x_1)$, $i = 2, 3$, ზედაპირზე ღეროს გარედან მოქმედ ზედაპირულ ძალთა კომპონენტებს. ν_i , $i = 2, 3$, შესაბამისი გარე ნორმალებია.

(3.2.11) შეიძლება გადმოვწეროთ შემდეგი სახითაც:

$$\left(h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1j n_3 n_2} \right)_{,1} + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2} h_3^{n_3} h_i^{-1} \sum_{s=0}^{n_i-1} \left(b_s^i X_{1j \delta_{i2} n_3 + \delta_{i3} s} \delta_{i_2 s + \delta_{i_3} n_2} + b_{i s}^{n_i} X_{ij \delta_{i_2} n_3 + \delta_{i_3} s} \delta_{i_2 s + \delta_{i_3} n_2} \right) + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^{n_3, n_2 0}$$

$$= \rho h_2^{n_2} h_3^{n_3} \frac{\partial^2 u_{j n_3 n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_3 n_2 = 0, 1, \dots \quad (3.2.13)$$

ახლა დავუშვათ, რომ

$$u_{j n_3 n_2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.14)$$

თუ სრულდება ერთი მაინც შემდეგი ორი პირობიდან

$$n_i > N_i, \quad i = 2, 3.$$

ამ შემთხვევას ვუწოდებთ (N_3, N_2) მიახლოებას.

(N_3, N_2) მიახლოებაში (3.2.9)-დან მივიღებთ, რომ

$$u_j(x_1, x_2, x_3)$$

$$\cong \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{n_3=0}^{N_3} a_2 a_3 \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \left(n_3 + \frac{1}{2} \right) u_{j n_3 n_2} P_{n_2}(a_2 x_2 - b_2)$$

$$\begin{aligned}
\times P_{n_3}(a_3 x_3 - b_3) &= \sum_{n_2=0}^{N_2} \sum_{n_3=0}^{N_3} \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \left(n_3 + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2^{n_2+n_3} n_2! n_3!} \\
&\times \frac{d^{n_2} \left[(x_2 - \tilde{h}_2)^2 - h_2^2 \right]^{n_3}}{dx_2^{n_2}} \\
&\times \frac{d^{n_3} \left[(x_3 - \tilde{h}_3)^2 - h_3^2 \right]^{n_3}}{dx_3^{n_3}} v_{jn_3 n_2}(x_1),
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

სადაც

$$v_{jn_3 n_2}(x_1) := \frac{u_{jn_3 n_2}(x_1)}{h_2^{n_2+1}(x_1) h_3^{n_3+1}(x_1)},$$

რადგან

$$P_{n_i}(a_i x_i - b_i) = P_{n_i} \left(\frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right) = \frac{1}{2^{n_i} n_i!} \frac{d^{n_i} \left[\left(\frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right)^2 - 1 \right]^{n_i}}{d \left(\frac{x_i - \tilde{h}_i}{h_i} \right)^n}$$

$$\begin{aligned}
& d^{n_i} \left\{ \frac{\left[(x_i - \tilde{h}_i)^2 - 1 \right]^{n_i}}{h_i^{2n_i}} \right\} \\
&= \frac{1}{2^{n_i} n_i!} h_i^{n_i} \frac{\left[(x_i - \tilde{h}_i)^2 - 1 \right]^{n_i}}{dx_i^{n_i}} \\
&= \frac{1}{2^{n_i} n_i!} \frac{1}{h_i^{n_i}} \frac{d^{n_i} \left[(x_i - \tilde{h}_i)^2 - 1 \right]^{n_i}}{dx_i^{n_i}}.
\end{aligned}$$

(3.2.14), (3.2.15), (3.2.9)-ის გათვალისწინებით (3.2.5)-(3.2.8) და (3.2.4)-დან გამოდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}
e_{11n_3n_2} &= h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{1n_3n_2,1} \\
&- \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_3} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} n_i}{h_i} b_s^i v_{1 \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2}, \\
&\sum_{s=N_i+1}^{N_i} (\dots) = 0, \\
e_{ii n_3n_2} &= - \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} n_i}{h_i} b_{is}^i v_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2}, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 2,3, \\
2e_{23n_3n_2} &= - \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} n_i}{h_i} b_{is}^i v_{5-i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2}, \\
2e_{1in_3n_2} &= h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{in_3n_2,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} \frac{h_2^{\delta_{k2}s+\delta_{k3}n_3+1} h_3^{\delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s+1}}{h_k} b_s^k \mathbf{v}_{i \delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s \delta_{k2}s+\delta_{k3}n_2}^{n_i} \\
& - \sum_{s=n_i+1}^{N_i} \frac{h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1}}{h_i} b_{is}^{n_i} \mathbf{v}_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2}, \quad i = 2,3, \\
X_{11n_3n_2} & = (\lambda + 2\mu)e_{11n_3n_2} + \lambda \sum_{i=2}^3 e_{\ddot{i}n_3n_2} \\
& = (\lambda + 2\mu) \left(h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} \mathbf{v}_{1n_3n_2,1} \right. \\
& \left. - \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} \mathbf{v}_{1 \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2} \right) \quad (3.2.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lambda \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} h_i^{-1} b_i^{n_i} \mathbf{v}_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2}, \\
X_{\ddot{i}n_3n_2} & = \lambda (e_{11n_3n_2} + e_{5-i5-i n_3n_2}) + (\lambda + 2\mu) e_{\ddot{i}i n_3n_2} \\
& = \lambda (h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} \mathbf{v}_{1n_3n_2,1} \\
& - \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}s+\delta_{k3}n_3+1} h_3^{\delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s+1} h_k^{-1} b_s^k \mathbf{v}_{1 \delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s \delta_{k2}s+\delta_{k3}n_2} \\
& - \sum_{s=n_{5-i}+1}^{N_{5-i}} h_2^{\delta_{5-i2}s+\delta_{5-i3}n_3+1} h_3^{\delta_{5-i2}n_3+\delta_{5-i3}s+1} h_{5-i}^{-1} b_{5-i}^{n_{5-i}} \\
& \times \mathbf{v}_{5-i \delta_{5-i2}n_3+\delta_{5-i3}s \delta_{5-i2}s+\delta_{5-i3}n_2}) \\
& - (\lambda + 2\mu) \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} \mathbf{v}_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2}, \\
& \quad \quad \quad i = 2,3, \quad (3.2.17)
\end{aligned}$$

$$X_{23n_3n_2} = 2\mu e_{23n_3n_2} \quad (3.2.18)$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu \sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_{5-i} \delta_{i2n_3+\delta_{i3}s} \delta_{i2s+\delta_{i3}n_2}, \\
&X_{1in_3n_2} = 2\mu e_{1in_3n_2} = \mu \left(h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{in_3n_2,1} \right. \\
&- \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}s+\delta_{k3}n_2+1} h_3^{\delta_{k2}n_3+\delta_{k3}s+1} h_k^{-1} b_{sk}^{n_k} v_i \delta_{k2n_3+\delta_{k3}s} \delta_{k2s+\delta_{k3}n_2} \\
&- \left. \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_3+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} h_i^{-1} b_{is}^{n_i} v_1 \delta_{i2n_3+\delta_{i3}s} \delta_{i2s+\delta_{i3}n_2} \right), \quad (3.2.19) \\
& \qquad \qquad \qquad i = 2,3,
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2,3.$$

(3.2.16)-(3.2.19)-ის ჩასმა (3.2.13) სისტემის პირველ $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$ განტოლებაში ფიქსირებული $j = 1,2,3$ -სათვის გვაძლევს შემდეგ $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$ განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას $3(N_3 + 1)(N_2 + 1)$

$$v_{jrs}(x, t), \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2}, \quad j = 1,2,3,$$

უცნობის მიმართ:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_j \left(h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} v_{jn_3n_2,1} \right) + \sum_{i=1}^3 \sum_{r=0}^{N_3} \sum_{s=0}^{N_2} (R_{rs}^{ij} v_{irs,1} + S_{rs}^{ij} v_{irs}) + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^0 \\
&= \rho h_2^{n_2} h_3^{n_3} \frac{\partial h_2^{n_2+1} h_3^{n_3+1} v_{jn_3n_2}}{\partial t^2}, \quad j = 1,2,3; \\
& \qquad \qquad \qquad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2,3,
\end{aligned} \quad (3.2.20)$$

სადაც

$$\Lambda_j := \begin{cases} \lambda + 2\mu, & j = 1, \\ \mu, & j = 2, 3, \end{cases}$$

$R_{rs}^{ij}(x_1)$, $S_{rs}^{ij}(x_1)$ გამოსახულია λ , μ , $h_i(x_1)$, $\tilde{h}_i(x_1)$, $i = 2, 3$ სიდიდეებით, ამასთან ზოგიერთი მათგანი ნულაა, ზოგიერთი კი, საზოგადოდ, შემოუსაზღვრავია $]0, L[-$ ზე. მართლაც, თუ $j = 1$:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \left(h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} v_{1n_3n_2,1} \right), \\ & - \left(\sum_{i=2}^3 \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2+n_2+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+n_3+1} h_i^{-1} \right. \\ & \times \left. \left[(\lambda + 2\mu) b_s^{n_i} v_{1 \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2} + \lambda b_{is}^{n_i} v_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2} \right] \right), \\ & + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2} h_3^{n_3} h_i^{-1} \sum_{s=0}^{n_i-1} \left\{ h_2^{\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2+1} h_3^{\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s+1} \right. \\ & \times \left. \left[(\lambda + 2\mu) b_s^{n_i} v_{1 \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2,1} + \mu b_{is}^{n_i} v_{i \delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s \delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2,1} \right] \right\} \\ & - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}(\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2)+\delta_{k3}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}r+\delta_{k3}(\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2)+1} h_3^{\delta_{k2}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)+\delta_{k3}r+1} h_k^{-1} \\ & \times \left[(\lambda + 2\mu) b_s^{n_i} b_r^k \right. \\ & \times \left. v_{1 \delta_{k2}(\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s)+\delta_{k3}r \delta_{k2}r+\delta_{k3}(\delta_{i2}s+\delta_{i3}n_2)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\begin{array}{cc} \lambda b_s^i & b_{kr} \\ \mu b_{is} & b_r^k \end{array} \right) \\
& \times \mathbf{V}_{i\delta_{k_2}(\delta_{i_2n_3+\delta_{i_3s}})+\delta_{k_3}r\delta_{k_2r}+\delta_{k_3}(\delta_{i_2s+\delta_{i_3n_2}})} \\
& - \mu \sum_{r=s+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i_2r}+\delta_{i_3n_2+1}} h_3^{\delta_{i_2n_3+\delta_{i_3r}+1}} h_i^{-1} b_{ir}^s b_{is}^{n_i} \mathbf{V}_{1\delta_{i_2n_3+\delta_{i_3r}}\delta_{i_2r}+\delta_{i_3n_2}} \left. \right\} \\
& + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_1^0 = \rho h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} \frac{\partial \mathbf{V}_{1n_3n_2}}{\partial t^2}; \tag{3.2.21}
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3.$$

ማ $j = 2, 3$:

$$\begin{aligned}
& \mu \left(h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} \mathbf{V}_{jn_3n_2,1} \right), \\
& - \mu \left(\sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k_2s}+\delta_{k_3n_2+n_2+1}} h_3^{\delta_{k_2n_3+\delta_{k_3s}+n_3+1}} h_k^{-1} b_s^{n_k} \mathbf{V}_j \delta_{k_2n_3+\delta_{k_3s}} \delta_{k_2s+\delta_{k_3n_2}} \right. \\
& + \left. \sum_{s=n_j+1}^{N_k} h_2^{\delta_{j_2s}+\delta_{j_3n_2+n_2+1}} h_3^{\delta_{j_2n_3+\delta_{j_3s}+n_3+1}} h_j^{-1} b_{js}^{n_j} \mathbf{V}_{1\delta_{j_2n_3+\delta_{j_3s}}\delta_{j_2s+\delta_{j_3n_2}} \right), \\
& + \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2-\delta_{i_2}} h_3^{n_3-\delta_{i_2}} \\
& \times \sum_{s=0}^{n_i-1} \mu b_s^i \left[h_2^{\delta_{i_2s}+\delta_{i_3n_2+1}} h_3^{\delta_{i_2n_3+\delta_{i_3s}+1}} \mathbf{V}_j \delta_{i_2n_3+\delta_{i_3s}} \delta_{i_2s+\delta_{i_3n_2},1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}(\delta_{i2s}+\delta_{i2n_3})+\delta_{k3}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}r+\delta_{k3}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2})+1} h_3^{\delta_{k2}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+\delta_{k3}r+1} h_k^{-1} \\
& \times b_r^k \mathbf{v}_j \delta_{k2}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+\delta_{k3}r \delta_{k2}r+\delta_{k3}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}) \\
& - \sum_{r=\delta_{j2}(\delta_{i2s}+\delta_{i2n_3})+\delta_{j3}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+1}^{N_j} h_2^{\delta_{j2}r+\delta_{j3}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2})+1} h_3^{\delta_{j2}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+\delta_{j3}r+1} h_j^{-1} \\
& \times b_{jr} \delta_{j2}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2})+\delta_{j3}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s}) \\
& \times \mathbf{v}_1 \delta_{j2}(\delta_{i2n_3}+\delta_{i3s})+\delta_{j3}r \delta_{j2}r+\delta_{j3}(\delta_{i2s}+\delta_{i3n_2}) \Big] + H_j \\
& + h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_j^0 = \rho h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} \frac{\partial \mathbf{v}_{jn_3n_2}}{\partial t^2}; \tag{3.2.22}
\end{aligned}$$

$$n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3,$$

სადაც

$$H_j := \sum_{i=2}^3 h_2^{n_2-\delta_{i2}} h_3^{n_3-\delta_{i3}} \sum_{s=0}^{n_i-1} b_{is} X_{ij\delta_{i2}n_3+\delta_{i3}s} \delta_{i2s+\delta_{i3}n_2}, \quad j = 2, 3,$$

ა.ა.

$$\begin{aligned}
H_2 & = h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} X_{22n_3s} + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} X_{32sn_2} \\
& = h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} \left[\lambda (h_2^{s+1} h_3^{n_3+1} \mathbf{v}_{1n_3s,1} \right. \\
& \left. - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_{k2}s+\delta_{k3}n_3+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}r+\delta_{k3}n_3+1} h_3^{\delta_{k2}n_3+\delta_{k3}r+1} h_k^{-1} b_r^k \mathbf{v}_1 \delta_{k2n_3+\delta_{k3}r} \delta_{k2r+\delta_{k3}s} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=n_3+1}^{N_3} h_2^{s+1} h_3^{r+1} h_3^{-1} b_{3r}^{n_3} v_{3rs} \left. - (\lambda + 2\mu) \sum_{r=s+1}^{N_2} h_2^{r+1} h_3^{n_3+1} h_2^{-1} b_{2r}^s v_{2n_3r} \right] \\
& - \mu h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} \sum_{i=2}^3 \sum_{r=\delta_{i_2} n_2 + \delta_{i_3} s + 1}^{N_k} h_2^{\delta_{i_2} r + \delta_{i_3} n_2 + 1} h_3^{\delta_{i_2} s + \delta_{i_3} r + 1} h_i^{-1} \\
& \times b_{ir}^{\delta_{i_2} n_2 + \delta_{i_3} s} v_{5-i}^{\delta_{i_2} s + \delta_{i_3} r} v_{\delta_{i_2} r + \delta_{i_3} n_2}, \\
& H_3 = h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s}^{n_2-1} X_{23n_3s} + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s}^{n_3-1} X_{33n_2} \\
& = -\mu h_2^{n_2-1} h_3^{n_3} \sum_{s=0}^{n_2-1} b_{2s} \sum_{i=2}^3 \sum_{r=\delta_{i_2} s + \delta_{i_3} n_3 + 1}^{N_i} h_2^{\delta_{i_2} r + \delta_{i_3} s + 1} h_3^{\delta_{i_2} n_3 + \delta_{i_3} r + 1} h_i^{-1} \\
& \times b_{ir}^{\delta_{i_2} s + \delta_{i_3} n_3} v_{5-i}^{\delta_{i_2} n_3 + \delta_{i_3} r} v_{\delta_{i_2} r + \delta_{i_3} s} \\
& + h_2^{n_2} h_3^{n_3-1} \sum_{s=0}^{n_3-1} b_{3s} \left[\lambda \left(h_2^{n_2+1} h_3^{s+1} v_{1sn_2,1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{k=2}^3 \sum_{r=\delta_k n_2 + \delta_{k_3} s + 1}^{N_k} h_2^{\delta_{k_2} r + \delta_{k_3} n_2 + 1} h_3^{\delta_{k_2} s + \delta_{k_3} r + 1} h_k^{-1} b_r^k v_{1}^{\delta_{k_2} n_2 + \delta_{k_3} s} v_{\delta_{k_2} s + \delta_{k_3} r} v_{\delta_{k_2} r + \delta_{k_3} n_2} \right) \right. \\
& \left. - \sum_{r=n_2+1}^{N_3} h_2^{r+1} h_3^{s+1} h_2^{-1} b_{2r}^{n_2} v_{2sr} \right] - (\lambda + 2\mu) \sum_{r=s+1}^{N_3} h_2^{n_2+1} h_3^{r+1} h_3^{-1} b_{3r}^{n_2} v_{3sr} \left. \right].
\end{aligned}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ იქ, სადაც ლეროს სისქესა და სი-
განიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია, სისტემას აქვს რიგის გა-
დაგვარება x_1 -ის შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის.

3.2.1. sawyis-sasazRvro amocanebi

განვიხილოთ (N_3, N_2) მიახლოება. დავუშვათ, რომ ღეროს $x_3 = \overset{\pm}{h}_i(x_1)$, $i = 2, 3$, ზედაპირებზე მოქმედებენ ზედაპირული ძალები (იხ. (3.2.12)), ხოლო ბოლოებზე, რომლებიც $x_1 = 0$ და $x_1 = L$ სიბრტყეების მართკუთხა ნაწილებს წარმოადგენენ, მოცემულია გადაადგილების ან ზედაპირული ძალების კომპონენტები. თუ $2h_i(0) > 0$ და $2h_i(L) > 0$, $i = 2, 3$, მაშინ ღეროს ბოლოებზე ორმაგი მომენტებისათვის სასაზღვრო პირობები შეიძლება შემდეგნაირად დაისვას.

1. სასაზღვრო პირობები გადაადგილებებში:

$$v_{jrs} = f_{jrs}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = 0, \dots, N_3, \quad s = 0, \dots, N_2, \quad (3.2.23)$$

აქ f_{jrs} ბოლოებში დასახელებული მუდმივებია. დინამიკურ შემთხვევაში მათ ემატება

$$v_{jrs} \Big|_{t=0} = \varphi_{jrs}(x_1), \quad \partial v_{jrs} / \partial t \Big|_{t=0} = \psi_{jrs}(x_1), \quad (3.2.24)$$

$$x_1 \in]0, L[, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2},$$

საწყისი პირობები, სადაც φ_{irs} , ψ_{irs} მოცემული ფუნქციებია, ხოლო f_{jrs} , საზოგადოდ, t -ზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

2. სასაზღვრო პირობები ძალებში:

$$X_{1jrs} = g_{jrs}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_2} \quad (3.2.25)$$

აქ g_{jrs} ბოლოებში დასახელებული მუდმივებია.

3. შერეული სასაზღვრო პირობები: ამ შემთხვევაში ღეროს ერთ-ერთ ბოლოში (3.2.23) პირობებია მოცემული, ხოლო მეორე ბოლოში – (3.2.25); ან j -ს რაიმე მნიშვნელობებისათვის მოცემულია (3.2.23) პირობები, ხოლო დანარჩენისათვის – (3.2.25).

თუ ღეროს ბოლოში $2h_i$, $i = 2, 3$, სიდიდეებიდან ერთი მაინც ხდება ნული, მაშინ მარცხენა მხარეები (3.2.23)-სა და (3.2.25)-ში უნდა გავიგოთ, როგორც ზღვრები $]0, L[$ ინტერვალ-დან. ზოგ შემთხვევაში (3.2.23) პირობები იცვლება შესაბამისი v_{jrs} -ების შემოსაზღვრულობით.

დასმული ამოცანების გამოსაკვლევად შეიძლება წარმატებით იქნეს გამოყენებული ცნობილი სამეცნიერო ლიტერატურა ჩვეუ-ლებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა (იხ., მაგალითად, [46]) და ჰიპერბოლურ განტოლებათა (იხ. მაგალითად, [49]) თეორია-ში. თუმცა მათი გამოყენება მოითხოვს გარკვეულ დამატებით გა-მოკვლევებს, განსაკუთრებით წამახვილებულ, ე.ი., როცა $2h_i(x_1) \geq 0$, $i = 2, 3$, $x_1 \in [0, L]$, ღეროს შემთხვევაში.

როცა $2h_i(x_1) > 0$, $i = 2, 3$, $x_1 \in [0, L]$, იმის გათვალისწი-ნებით, რომ (3.2.21), (3.2.22) სისტემა სტატიკურ შემთხვევაში შეიძლება დაყვანილ იქნეს პირველი რიგის წრფივ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე, დასმული ამოცანე-ბის ამოხსნადობა რეგულარულ (C^2) ფუნქციათა კლასში, ცნო-ბილი თეორემის (იხ. [46], გვ. 146) თანახმად, გამოძინარეობს მათი ამონახსნების ერთადერთობიდან. ამონახსნის ერთადერთო-ბის საკითხი შესწავლილია [21]-ში.

როცა $2h_i(x_1) \geq 0$, $i = 2, 3$, $x_1 \in [0, L]$, შეიძლება დაისვას შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\begin{aligned} v_{jn_3n_2}(0) &= \varphi_{jn_3n_2}^0, \text{ თუ} \\ I_0 &< +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \\ v_{jn_3n_2}(L) &= \varphi_{jn_3n_2}^L \text{ თუ} \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$I_L^{n_3, n_2} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.27)$$

$$v_{jn_3 n_2}(x_1) = O(1) \quad \text{თუ}$$

$$x_1 \rightarrow 0+, \quad I_0^{n_3, n_2} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.28)$$

$$v_{jn_3 n_2}(x_1) = O(1) \quad \text{თუ}$$

$$x_1 \rightarrow L-, \quad I_L^{n_3, n_2} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.29)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+} h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1jn_3 n_2}(x_1) = \lim_{x_1 \rightarrow 0+} \left\{ \Lambda_j h_2^{2n_2+1} h_3^{2n_3+1} v_{jn_3 n_2, 1} \right. \\ \left. - \Lambda_j \sum_{k=2}^3 \sum_{s=n_k+1}^{N_k} h_2^{\delta_{k2}s + (\delta_{k3}+1)n_2+1} h_3^{\delta_{k3}s + (\delta_{k2}+1)n_3+1} h_k^{-1} b_r^k v_j \delta_{\delta_{k2}n_3 + \delta_{k3}s} \delta_{\delta_{k2}s + \delta_{k3}n_2} \right.$$

$$\left. - \left[\delta_{j1} \lambda \sum_{i=2}^3 + \delta_{ij} (\delta_{j2} + \delta_{j3}) \mu \right] \sum_{s=n_i+1}^{N_i} h_2^{\delta_{i2}s + (\delta_{i3}+1)n_2+1} h_3^{(\delta_{i2}+1)n_3 + \delta_{i3}s+1} h_i^{-1} \right. \\ \left. \times b_{is}^{n_i} v_{\delta_{j1}i + \delta_{j2} + \delta_{j3} \delta_{i2}n_3 + \delta_{i3}s} \delta_{i2s + \delta_{i3}n_2} \right\} = \psi_{jn_3 n_2}^0,$$

$$\text{თუ} \quad I_0^{n_3, n_2} \leq +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3; \quad (3.2.30)$$

$$\lim_{x_1 \rightarrow L-} h_2^{n_2} h_3^{n_3} X_{1jn_3 n_2}(x_1) = \psi_{jn_3 n_2}^L,$$

$$\text{თუ} \quad I_L^{n_3, n_2} \leq +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad n_i = \overline{0, N_i}, \quad i = 2, 3. \quad (3.2.31)$$

აქ $\varphi_{jn_3 n_2}^0$, $\varphi_{jn_3 n_2}^L$, $\psi_{jn_3 n_2}^0$, $\psi_{jn_3 n_2}^L$ მოცემული მუდმივებია,

$$I_0^{n_3, n_2} := \int_0^\varepsilon h_2^{-2n_2-1}(\tau) h_3^{-2n_3-1}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = \text{const} > 0,$$

$$I_L^{n_3, n_2} := \int_{L-\varepsilon}^L h_2^{-2n_2-1}(\tau) h_3^{-2n_3-1}(\tau) d\tau, \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

(3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.27); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.31); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.27), (3.2.30); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.26), (3.2.29); (3.2.21), (3.2.22), (3.2.27), (3.2.28) სასაზღვრო ამოცანები ცალსახად ამოხსნადა, ხოლო (3.2.21), (3.2.22), (3.2.28), (3.2.29) სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნადა ხისტი გადაადგილების სიზუსტით (იხ. [21]). ანალოგიური დასკვნების გამოტანა შეიძლება უცნობი სიდიდეების ინდექსების მიმართ შერეული სასაზღვრო ამოცანების მიმართაც.

დინამიკურ შემთხვევაში ზემოხსენებულ სასაზღვრო პირობებს ემატება (3.2.24) საწყისი პირობები. საწყისი პირობების დასმა, სასაზღვრო პირობებისაგან განსხვავებით, ღეროს წამახვილებაზე არ არის დამოკიდებული, რადგან (3.2.21), (3.2.22) სისტემა არ არის გადავარებული t -ს მიმართ საერთოდ და, კერძოდ, როცა $t = 0$.

N_3, N_2 -ის თითოეული კონკრეტული მნიშვნელობის შემთხვევაში ვიღებთ კონკრეტულ იერარქიულ მოდელს – მიახლოებას. თითოეული მათგანი წარმოადგენს დამოუკიდებელ მათემატიკურ მოდელს, რომელსაც დამოუკიდებელი პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია. მაგალითად, $(0,0)$ მიახლოება შეესაბამება ღეროს გაჭიმვა-კუმშვის კლასიკურ მოდელს, ხოლო $(1,0)$ მიახლოება – ღეროს კლასიკური ღუნვის მოდელს კოეფიციენტების სიზუსტით.

წამახვილებული ღეროებისა და ფირფიტების კორექტულად დასმული სასაზღვრო ამოცანების მიმართების საკითხი სამგან-

ზომილებიანი მოდელის სასაზღვრო ამოცანებთან განხილულია [22]-სა და [24]-ში.

3.2.2. (0,0) miachloeba

(0,0) მიახლოებაში (3.2.21), (3.2.22) სისტემა იღებს შემდეგ სახეს:

$$\left(h_2 h_3 v_{j,i}(x_1, t)\right)_{,1} + Y_j^{0,0} = \Lambda_j^{-1} \rho h_2 h_3 \frac{\partial^2 v_j(x_1, t)}{\partial t^2}, \quad (3.2.32)$$

$$j = 1, 2, 3,$$

$$v_j(x_1, t) := \frac{u_{j \ 00}(x_1, t)}{h_2(x_1)h_3(x_1)}, \quad Y_1^{0,0} := \frac{X_1^{0,0}}{\lambda + 2\mu}, \quad Y_i^{0,0} := \frac{X_i^{0,0}}{\mu}, \quad i = 2, 3.$$

როგორც ვხედავთ, სისტემა დაიშალა სამ დამოუკიდებელ ერთი და იმავე ტიპის განტოლებად. ადვილი სანახავია, რომ სტატისტიკურ შემთხვევაში (ე.ი., (3.2.32)-ის მარჯვენა მხარეში ნულია)

$$\left(h_2 h_3 v_{j,i}(x_1, t)\right)_{,1} + Y_j^{0,0} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.33)$$

და მათ ზოგად ამონახსნს $C^2(]0, L[)$ კლასში აქვს

$$v_j(x_1) = - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{d\tau}{h_2(\tau)h_3(\tau)} \int_{x_1^0}^{\tau} Y_j^{0,0}(t) dt + c_1^j \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{d\tau}{h_2(\tau)h_3(\tau)} + c_2^j, \quad (3.2.34)$$

$$x_1^0 = \text{const} \in]0, 1[, \quad c_\alpha^j = \text{const}, \quad \alpha = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3,$$

სახე.

(3.2.26)-(3.2.31) სასაზღვრო პირობები იღებენ

$$v_j(0) = \varphi_j^0 \text{ (დირიხლეს პირობა),}$$

$$\text{თუ } I_0^{0,0} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.35)$$

$$v_j(L) = \varphi_j^L \text{ (დირიხლეს პირობა),}$$

$$\text{თუ } I_L^{0,0} < +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.36)$$

$$v_j(x_1) = O(1), \quad x \rightarrow 0+, \text{ თუ } I_0^{0,0} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.37)$$

$$v_j(x_1) = O(1), \quad x \rightarrow L-, \text{ თუ } I_L^{0,0} = +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.38)$$

$$X_{1j00}(0) = \Lambda_j h_2 h_3 v_{j,1}|_{x_1=0} = \psi_j^0 \text{ (ნეიმანის წონიანი პირობა),}$$

$$\text{თუ } I_0^{0,0} \leq +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.39)$$

$$X_{1j00}(L) = \Lambda_j h_2 h_3 v_{j,1}|_{x_1=L} = \psi_j^L \text{ (ნეიმანის წონიანი პირობა),}$$

$$\text{თუ } I_L^{0,0} \leq +\infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.40)$$

სახეს, სადაც $\varphi_j^0, \psi_j^0, \varphi_j^L, \psi_j^L$ მოცემული მუდმივებია.

ვთქვათ, $Y_{j00} \in L([0, L])$, ე.ი. ინტეგრებადია (ჯამებადია) და თუ $I_0^{0,0} = +\infty$ $\left(I_L^{0,0} = +\infty \right)$, მაშინ ის ისეთია, რომ (3.2.34)-ში იტერირებული ინტეგრალი იყოს შემოსაზღვრული, როცა $x_1 \rightarrow 0+(L-)$.

თუ $h_2^{-1}h_3^{-1}$ ლოკალურად ჯამებადია $]0, L[$ -ში, მაშინ (3.2.34)-დან გამომდინარეობს, რომ რეგულარული ამონახსნისათვის (ე.ი. $v_j \in C^2([0, L])$) მხოლოდ შემდეგი ამოცანებია კორექტული (3.2.33), (3.2.35), (3.2.36) ($v_j \in C([0, L])$);

(3.2.33), (3.2.37), (3.2.36) ($v_j \in C([0, L])$); (3.2.33), (3.2.35), (3.2.38) ($v_j \in C([0, L])$); (3.2.33), (3.2.37), (3.2.38); (3.2.33), (3.2.35), (3.2.40) ($v_j \in C([0, L])$, $h_2 h_3 v_{j,1} \in C([0, L])$); (3.2.33), (3.2.39), (3.2.36) ($v_j \in C([0, L])$, $h_2 h_3 v_{j,1} \in C([0, L])$); შერეული ამოცანები, როცა ერთ ბოლოში j -ის ზოგიერთი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ღირისლეს პირობა, ხოლო j -ის დანარჩენი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ან ნეიმანის, ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა, ხოლო მეორე ბოლოში j -ის პირველი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ან ღირისლეს, ან ნეიმანის, ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა, ხოლო j -ის დანარჩენი მნიშვნელობისათვის მოცემულია ღირისლეს (ნეიმანის და (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა დასაშვები არ არის) პირობა, როცა მეორე ბოლოში ნეიმანის პირობაა მოცემული და ღირისლეს ან (3.2.37), (3.2.38) ტიპის პირობა (ნეიმანის პირობა დასაშვები არაა), როცა მეორე ბოლოში (3.2.38), (3.2.37) ტიპის პირობაა მოცემული.

(3.2.33), (3.2.37), (3.2.38) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი განსაზღვრულია ხისტი გადატანის ($c_1^j = 0$; c_2^j , $j = 1, 2, 3$, ნებისმიერი მუდმივებია) სიზუსტით. ეს ასეც უნდა იყოს, რადგან ამ შემთხვევაში ღეროზე, როგორც სამგანზომილებიან სხეულზე, მოქმედებენ მხოლოდ ზედაპირული ძალები, რომლებიც შეტანილია Y_{j00} , $j = 1, 2, 3$, გამოსახულებებში. შევნიშნოთ, რომ ფიზიკური (მექანიკური) მოსაზრებებიდან გამომდინარე, ბუნებრივია, რომ ჩვენ იმ სასაზღვრო ამოცანებს, რომელთა ამონახსნები ხისტი გადაადგილების სიზუსტით განისაზღვრება, კორექტულად – “კარგად” დასმული ვუწოდოთ.

ადვილი სანახავია, რომ ორივე ბოლოში ნეიმანის პირობის დასახელება დასაშვები (შესაძლებელი) არ არის. ის შეიძლება

მხოლოდ ერთ ბოლოში დასახელდეს და ამასთან ამონახსნი სისტემა გადატანის სიზუსტით იქნება განსაზღვრული, რაც ბუნებრივია, რადგან ღეროზე მოქმედებენ მხოლოდ ზედაპირული ძალები ერთი ბოლოს ჩათვლით, ხოლო მეორე ბოლო საერთოდ განთავისუფლებულია სასაზღვრო პირობებისაგან. ხაზგასასმელია, რომ ეს თავისებურება ღეროს წამახვილებით არ არის გამოწვეული. ეს $(0,0)$ მოდელის სიუხეშიდან გამომდინარეობს, ასევე არ არიან ამოხსნადი (3.2.33), (3.2.37), (3.2.40) და (3.2.33), (3.2.38), (3.2.39) სასაზღვრო ამოცანები (რომლებიც მხოლოდ წამახვილებული ღეროსათვის წარმოიშეებიან), რადგან ამ შემთხვევებში $c_1^j = 0$ და შეუძლებელია c_2^j მუდმივით (3.2.40) და (3.2.39) პირობების დაკმაყოფილება.

$(0,0)$ მიახლოებაში დინამიკის ამოცანა დირიხლეს პირობების (იმ შემთხვევის ჩათვლით, როცა წამახვილებული ბოლო თავისუფლდება სასაზღვრო პირობისაგან) შემთხვევაში, როცა ღეროს მხოლოდ ერთ ბოლოში აქვს ხარისხოვანი წამახვილება, გამოკვეთულია [26]-ში. დინამიკის ამოცანები დანარჩენი ზემოთ მითითებული სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში შემდგომი კვლევის საგანს წარმოადგენს.

3.2.3. $(1,0)$ mიახლოება

სიმეტრიული ღეროების შემთხვევაში, ე.ი. როცა $\tilde{h}_i \equiv 0$, $i = 2,3$, $(1,0)$ მიახლოებაში (3.2.21), (3.2.22) სისტემა იღებს შემდეგ სახეს:

$$(\lambda + 2\mu)(h_2 h_3 v_{100,1})_{,1} + 3\lambda(h_2 h_3 v_{310})_{,1} + X_1^{0,0} = 0, \quad (3.2.41)$$

$$\mu(h_2 h_3^3 v_{310,1})_{,1} - 3(\lambda + 2\mu)h_2 h_3 v_{310} - \lambda h_2 h_3 v_{100,1} + h_3 X_3^{1,0} = 0, \quad (3.2.42)$$

$$\mu(h_2 h_3 v_{200,1})_{,1} + X_2^{0,0} = 0, \quad (3.2.43)$$

$$\mu(h_2 h_3^3 v_{210,1})_{,1} - 3\mu h_2 h_3 v_{210} + h_3 X_2^{1,0} = 0, \quad (3.2.44)$$

$$\mu(h_2 h_3 v_{300,1})_{,1} + 3\mu(h_2 h_3 v_{110})_{,1} + X_3^{0,0} = 0, \quad (3.2.45)$$

$$(\lambda + 2\mu)(h_2 h_3^3 v_{110,1})_{,1} - \mu h_2 h_3 v_{300,1} - 3\mu h_2 h_3 v_{110} + h_3 X_1^{1,0} = 0. \quad (3.2.46)$$

სასაზღვრო ამოცანები (3.2.43) განტოლებისათვის გამოკვლეული იყო 3.2.2 ქვეპარაგრაფში. აქედან გამომდინარე, მაგალითად, დირიხლეს პირობები v_{200} -სათვის შეიძლება დასმული იქნეს მხოლოდ მაშინ, როცა $I_0^{0,0} < +\infty$, $I_L^{0,0} < +\infty$. ანლოგიურად შეიძლება გამოკვლეულ იქნეს (3.2.44) განტოლებაც, რაც იმ დასკვნამდე მიგვიყვანს, რომ ამ განტოლებისათვის და ე.ი. v_{210} -სათვის დირიხლეს პირობები შეიძლება დასმულ იქნეს მხოლოდ მაშინ, როცა $I_0^{1,0} < \infty$, $I_L^{1,0} < \infty$. ამ შემთხვევაში

$$u_2(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{1}{4} v_{200}(x_1) + \frac{3x_3}{4} v_{210}(x_1),$$

საიდანაც

$$\lim_{x_1 \rightarrow 0+(L-)} u(x_1, x_2, x_3) \approx \frac{1}{4} v_{200} \Big|_{x_1=0(L)},$$

როცა $I_0^{1,0} < +\infty$ ($I_L^{1,0} < +\infty$), ან როცა $I_0^{0,0} < +\infty$ ($I_L^{0,0} < +\infty$),

მაგრამ v_{210} შემოსაზღვრულია, თუ $I_0^{1,0} = +\infty$ ($I_L^{1,0} = +\infty$).

(3.2.45), (3.2.46) და (3.2.41), (3.2.42) სისტემები შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$3\mu v_{110} = -\mu v_{300,1} - h_2^{-1}(x_1) h_3^{-1}(x_1) \left(\int_{x_1^0}^{x_1} X_3^{0,0}(x_1) dx_1 - C_1 \right),$$

$$C_1 = \text{const}, \quad x_1^0 \in]0, L[,$$

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)(h_2 h_3^3 v_{300,11})_{,11} &= 3 X_3^{0,0} + 3 \left(h_3 X_1^{0,0} \right)_{,1} \\ &- \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \left[h_2 h_3^3 \left(h_2^{-1} h_3^{-1} \int_{x_1^0}^{x_1} X_3^{0,0}(x_1) dx_1 - h_2^{-1} h_3^{-1} C_1 \right) \right]_{,1,11} \end{aligned}$$

და

$$3\lambda v_{310} = -(\lambda + 2\mu)v_{100,1} - h_2^{-1}(x_1) h_3^{-1}(x_1) \left(\int_{x_1^0}^{x_1} X_3^{0,0}(x_1) dx_1 - C_2 \right),$$

$$C_2 = \text{const},$$

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu)\mu(h_2 h_3^3 v_{100,11})_{,11} - 12(\lambda + \mu)\mu(h_2 h_3 v_{100,1})_{,1} \\ &= -\mu \left\{ h_2 h_3^3 \left[\left(h_2^{-1} h_3^{-1} \int_{x_1^0}^{x_1} X_1^{0,0}(x_1) dx_1 \right)_{,1} - C_2 (h_2^{-1} h_3^{-1})_{,1} \right] \right\}_{,11} \end{aligned}$$

$$+12 \frac{(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu} X_1^{0,0} + \frac{3\lambda^2}{\lambda + 2\mu} X_1^{0,0} + 3\lambda \left(h_3 X_3^{1,0} \right)_{,1}.$$

ამ სისტემების უპირატესობა ისაა, რომ მათ შორის მეორე განტოლებები მხოლოდ ერთ უცნობს შეიცავენ და მათი ამოხსნის შემდეგ პირველი განტოლებებიდან ადვილად დაითვლება V_{110} და V_{310} .

ერთი ბოლოთი ხარისხობრივად წამახვილებული ღეროს შემთხვევაში დინამიკის ამოცანები, როცა სასაზღვრო პირობები დირიხლეს ტიპისაა, გამოკვლეულია [26]-ში. სხვა ტიპის სასაზღვრო ამოცანებისა და შესაბამისი დინამიკის ამოცანების შესწავლა შემდგომი კვლევის საგანია.

ნაწილი IV. ღრეკად და თხევად გარემოთა ურთიერთქმედების ამოცანები

§4.1. transmissiis (sakontaqto) pirobebi

სითხისა და ღრეკადი სხეულის ურთიერთქმედების ამოცანები თანამედროვე აქტუალურ სამეცნიერო თემატიკას განეკუთვნებიან. მათი მნიშვნელობა განპირობებულია, მაგალითად, ნავთობის ნავთობსადენებში, სისხლის სისხლძარღვებში მოძრაობის, სანაპირო გამაგრების ამოცანების აქტუალობით. დღეისათვის მიმდინარეობს ამოცანების ინტენსიური კვლევა *ინტერფეისზე* (სხეულის თხევადი და მყარი ნაწილების გამყოფ საკონტაქტო ზედაპირზე) სხვადასხვა ტრანსმისიის ანუ საკონტაქტო პირობების შემთხვევაში. ამასთან კვლავ გრძელდება ფიზიკური თვალსაზრისით გამართლებული საკონტაქტო პირობების დადგენის პროცესი [42], [56], [18], [7-10].

სამგანზომილებიან მოდელეებში ჩვეულებრივ იყენებენ

$$\begin{aligned} [u]_I &:= u^f - u^s = 0, \\ [\sigma_{ij} n_j^s]_I &:= \sigma_{ij}^s n_j^s - \sigma_{ij}^f n_j^s = \sigma_{ij}^s n_j^s + \sigma_{ij}^f n_j^f = 0, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

საკონტაქტო პირობებს, სადაც u^s , σ_{ij}^s და u^f , σ_{ij}^f , $i, j = 1, 2, 3$, არის გადაადგილების ვექტორის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტები შესაბამისად სხეულის მყარ და თხევად ნაწილებში; n^s და n^f შესაბამისად $\partial\Omega^s$ -ის და $\partial\Omega^f$ -ის გარე ნორმალეებია, ხოლო I არის ინტერფეისის მყარ და თხევად ნაწილებს შორის.

გამოკვლეულია აგრეთვე ზოგიერთი ამოცანა შემდეგი უნილათერალური (ცალმხრივი) საკონტაქტო პირობებით [7]:

$$[u_i N_i]_I \geq 0, \quad (4.1.2)$$

$$\sigma_{ij}^s n_j^s = \sigma_{NN}^s N_i, \quad \sigma_{ij}^f n_j^f = -\sigma_{NN}^s N_i, \quad (4.1.3)$$

$$\sigma_{NN}^s \leq 0, \quad (4.1.4)$$

$$\text{და } \sigma_{NN}^s = 0, \text{ თუ } [u_i N_i]_I > 0. \quad (4.1.5)$$

(4.1.3) იმას ნიშნავს, რომ I ინტერფეისზე მხოლოდ ნორმალური დაბეჭედი მოქმედებენ (მხები კომპონენტები ნულის ტოლია, σ_{NN}^s ნორმალური კომპონენტია, N ინტერფეისის გარე ნორმალია Ω^s -ის მიმართ), რომლებიც ერთმანეთს აწონასწორებენ; (4.1.4) ნიშნავს იმას, რომ გვაქვს კუმშვა; (4.1.5) კი იმას ნიშნავს, რომ თუ მყარი და თხევადი ნაწილები ინტერფეისის რაიმე წერტილში ერთმანეთს არ ებჯინება, მაშინ ამ წერტილში ნორმალური ძალები ნულის ტოლია.

განიხილავენ აგრეთვე საკონტაქტო პირობებს სამგანზომილებიან სითხესა და ღრეკად გარსს ან ფირფიტას შორის. ვთქვათ, სითხე იწვევს ფირფიტის ღუნვას. თუ განვიხილავთ ღუნვას კირხჰოფ-ლიავის მოდელის საფუძველზე, მაშინ, რამდენადაც ყველა გეომეტრიული და ფიზიკური სიდიდე გამოისახება ჩალუნვით, საკონტაქტო პირობებად შეიძლება გამოვიყენოთ (4.1.1) ან (4.1.2)-(4.1.5) პირობები. საკონტაქტო პირობების მოდელირება შემდეგნაირადაც შეიძლება. ვთქვათ, ფირფიტის შუა სიბრტყე მდებარეობს Ox_1x_2 სიბრტყეზე და სითხის ნაკადი იწვევს ფირფიტის ღუნვას. მაშინ ფირფიტის დატვირთვის ინტენსიობისათვის გვექნება

$$q \equiv q_3(x_1, x_2, t) = \sigma_{N3}^f \left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t \right) + \sigma_{N3}^f \left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t \right), \quad (4.1.6)$$

$$\begin{aligned}
q_\beta(x_1, x_2, t) &= \sigma_{N\beta}^f \left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t \right) \\
&= \sigma_{N\beta}^f \left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t \right) = 0, \quad \beta = 1, 2,
\end{aligned}$$

გამოსახულებები, ხოლო სითხის (v_1, v_2, v_3) სიჩქარის მნიშვნელობა ფირფიტის პირით ზედაპირებზე და ფირფიტის w ჩაღუნვა შემდეგი ტოლობებით იქნებიან დაკავშირებულნი:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} &= v_3 \left(x_1 - h^{(+)}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\
&\quad \left. - h^{(+)}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), h^{(+)}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right) \\
&= v_3 \left(x_1 - h^{(-)}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\
&\quad \left. - h^{(-)}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), h^{(-)}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right), \quad (4.1.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t) &= -h^{(+)}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_\alpha \partial t} \\
&= v_\alpha \left(x_1 - h^{(+)}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\
&\quad \left. - h^{(+)}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), h^{(+)}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right), \quad (4.1.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_\alpha(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t) &= -\overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_\alpha \partial t} \\ &= v_\alpha \left(x_1 - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,1}(x_1, x_2, t), x_2 \right. \\ &\quad \left. - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) w_{,2}(x_1, x_2, t), \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2, t), t \right), \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

((4.1.7)-ში მეორე ტოლობა სამართლიანია იმის გამო, რომ $w \equiv u_3$ ჩაღუნვა არ არის დამოკიდებული x_3 -ზე), სადაც ω

არის ფირფიტის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე, $x_3 = \overset{(\pm)}{h}(x_1, x_2)$ არის ფირფიტის ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირები. როგორც ვხედავთ (4.1.6)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობებში ყველა ფუნქცია დროის ყველა მომენტში დამოკიდებულია $(x_1, x_2) \in \omega$ წერტილებზე და ამდენად საკონტაქტო პირობები ფაქტობრივად ჩაწერილი გვაქვს ω არეში.

თუ ფირფიტა საკმარისად თხელია, (4.1.6)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობები შეიძლება კიდევ უფრო გავამარტივოთ შემდეგ დაშვებებზე დაყრდნობით:

- 1) ჩავთვალოთ, რომ სითხეს უკავია $\overline{(\Omega^f \cup \Omega^s)} \setminus \omega$ არე;
- 2) ჩავთვალოთ, რომ დრეკად ნაწილს უკავია ω არე (მისი გეომეტრია სისქის გასწვრივ გათვალისწინებულია ღუნვის განტოლების კოეფიციენტებში);
- 3) მცირე სიდიდეების უკუგლების შემდეგ (4.1.7)-(4.1.9) საკონტაქტო პირობები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial t} = v_3(x_1, x_2, 0, t), \quad v_\alpha(x_1, x_2, 0, t) = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\alpha = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \omega;$$

4) $h^{(\pm)}(x_1, x_2)$ -ის უგულებელყოფისა და იმის გათვალისწინებით, რომ სიბრტყის ω ნაწილის ნორმალებია x_3 და $-x_3$, (4.1.6) მიიღებს

$$q(x_1, x_2, 0, t) = \sigma_{33}^f(x_1, x_2, 0+, t) - \sigma_{33}^f(x_1, x_2, 0-, t) \quad (4.1.11)$$

სახეს.

იდეალური სითხის შემთხვევაში

$$\sigma_N^f = -p(x_1, x_2, x_3, t)\vec{N},$$

სადაც $p(x_1, x_2, x_3, t)$ წნევაა. ამიტომ

$$\sigma_{N3}^f = -p \cos(\vec{N}, x_3)$$

და (4.1.6) საკონტაქტო პირობა მიიღებს

$$q(x_1, x_2, t) = -p \left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2), t \right) \cos \left(\vec{N} \left(x_1, x_2, h^{(+)}(x_1, x_2) \right), x_3 \right) - p \left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2), t \right) \cos \left(\vec{N} \left(x_1, x_2, h^{(-)}(x_1, x_2) \right), x_3 \right), \quad (4.1.12)$$

$$(x_1, x_2) \in \omega,$$

სახეს.

თუ კუთხე \vec{N} -სა და x_3 ღერძს შორის მცირეა, მაშინ (4.1.11) შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\begin{aligned}
 q(x_1, x_2, t) = & -p \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2), t \right) \\
 & + p \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}(x_1, x_2), t \right), \quad (x_1, x_2) \in \omega,
 \end{aligned}
 \tag{4.1.13}$$

ზოგიერთი საკონტაქტო ამოცანა (4.1.10), (4.1.11) და (4.1.10), (4.1.12) საკონტაქტო პირობებში გამოკვლეულია [8-10]-ში.

თუ სითხეში ჩადებულია დრეკადი ფირფიტა ან ღერო, მაშინ შესაბამისად N -ური (იხ. §2.6) და (N_3, N_2) (იხ. §3.2) იერარქიული მოდულების გამოყენების დროს (4.1.1)-(4.1.5) საკონტაქტო პირობებში u^s და σ_{ij}^s სიდიდეების ნაცვლად უნდა ჩავსვათ მათი N -ური და (N_3, N_2) მიახლოებითი მნიშვნელობები.

$N = 0$ და $(0,0)$ მიახლოებაში (4.1.1) პირობებს შეიძლება სხვა სახეც მიეცეს.

მაგალითად, $N = 0$ მიახლოებაში (4.1.1) პირობები შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს:

$$\begin{aligned}
 (2h)^{-1} u_{i0}^s = u_i^f(x_1, x_2, 0+, t) = u_i^f(x_1, x_2, 0-, t) = u_i^f(x_1, x_2, 0, t), \\
 i = 1, 2, 3,
 \end{aligned}$$

და, მუდმივი სისქის შემთხვევაში,

$$\begin{aligned}
 q_\beta & := \sigma_{3\beta}^f \left(x_1, x_2, \overset{(+)}{h}, t \right) - \sigma_{3\beta}^f \left(x_1, x_2, \overset{(-)}{h}, t \right) \\
 & = 2\rho h \frac{\partial^2 u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \\
 & - \left\{ \Phi_{\beta 0}^s + 2h \left[\mu \Delta u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t) + (\lambda + \mu) u_{\gamma, \gamma \beta}^f(x_1, x_2, 0, t) \right] \right\}, \\
 & \beta = 1, 2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3 &:= \sigma_{33}^f(x_1, x_2, h^{(+)}, t) - \sigma_{33}^f(x_1, x_2, h^{(-)}, t) \\
&= 2\rho h \frac{\partial^2 u_3^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \\
&\quad - \left[\Phi_{30}^s + 2\mu h \Delta u_3^f(x_1, x_2, 0, t) \right], \quad (x_1, x_2) \in \omega,
\end{aligned}$$

ხოლო ცვლადი სისქის შემთხვევაში

$$\begin{aligned}
&\sigma_{i\beta}^f(x_1, x_2, h^{(+)}, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} \\
&+ \sigma_{i\beta}^f(x_1, x_2, h^{(-)}, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} \\
&= 2\rho h \frac{\partial^2 u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \\
&- \left\{ \Phi_{\beta 0}^s + 2h \left[\mu \Delta u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t) + (\lambda + \mu) \left(u_\gamma^f(x_1, x_2, 0, t) \right)_{,\gamma\beta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda (\ln h)_{,\beta} \left(u_\alpha^f \right)_{,\alpha} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mu (\ln h)_{,\alpha} \left(u_\alpha^f(x_1, x_2, 0, t) \right)_{,\beta} + \mu (\ln h)_{,\alpha} \left(u_\beta^f(x_1, x_2, 0, t) \right)_{,\alpha} \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{i3}^f(x_1, x_2, h, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} \\ & + \sigma_{i3}^f(x_1, x_2, h, t) \cos(n, x_i) \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} \\ & = 2\rho h \frac{\partial^2 u_3^f(x_1, x_2, 0, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$- \left\{ \Phi_{30}^s + 2\mu h \left[\Delta u_3^f(x_1, x_2, 0, t) + (\ln h)_{,\alpha} \left(u_3^f(x_1, x_2, 0, t) \right)_{,\alpha} \right] \right\},$$

$$(x_1, x_2) \in \omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

$(0,0)$ მახლოებაში (4.1.1) პირობები შემდეგი სახით ჩაიწერება (იხ. (3.2.12)):

$$(4h_2 h_3)^{-1} u_{i00}^s = u_i^f(x_1, 0, 0, t), \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^3 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \left[\sqrt{1 + \left(h_{5-i,1}^{(+)} \right)^2} \right. \\
& \times \int_{h_i(x_1)^{(-)}}^{h_i(x_1)^{(+)}} \sigma_{kj}^f(x_1, \delta_{5-i,2} h_2 + \delta_{5-i,3} x_2, \delta_{5-i,2} x_3 + \delta_{5-i,3} h_3^{(+)} \\
& \times \cos(v_{5-i}, x_k) dx_i - (-1)^{n_{5-i}} \sqrt{1 + \left(h_{5-i,1}^{(-)} \right)^2} \\
& \times \int_{h_i(x_1)^{(-)}}^{h_i(x_1)^{(+)}} \sigma_{kj}^f(x_1, \delta_{5-i,2} h_2 + \delta_{5-i,3} x_2, \delta_{5-i,2} x_3 + \delta_{5-i,3} h_3^{(-)} \\
& \times \cos(v_{5-i}, x_k) dx_i \left. \right] = 4\rho h_2 h_3 \frac{\partial^2 u_j^f(x_1, 0, 0, t)}{\partial t^2} \\
& - \left\{ \Phi_{j00}^s + 4A_j [h_2 h_3 u_{j,1}^f(x_1, 0, 0, t)]_{,1} \right\}, \quad j = 1, 2, 3, \quad x_1 \in]0, L[.
\end{aligned}$$

სტატიკურ შემთხვევაში უკანასკნელი სამი დიფერენციალური ტოლობის x_1 -ის მიმართ ინტეგრებით თითოეულისათვის ორი უცნობი მუდმივის შემცველ ინტეგრალურ დამოკიდებულებას მივიღებთ $]0, L[$ -ზე.

ამოცანები ასეთი საკონტაქტო პირობებით ჯერ-ჯერობით გამოკვლეული არ არის.

(4.1.1)-(4.1.5) საკონტაქტო პირობები გამოიყენება აგრეთვე დრეკადი სხეულების ურთიერთქმედების ინტერფეისზე (იხ. [56], თავი 6).

§4.2. drekadi da Txevadi nawilebisagan Semdgari sxeulis rxeva

განვიხილოთ მყარი დრეკადი ნაწილისა და თხევადი ნაწილისაგან შემდგარი სხეულის (კომპოზიციური გარემოს) წერტილების მცირე გადაადგილებები დრეკადობის წრფივი და სითხეების მოსვენებული მდგომარეობის მიმართ გაწრფივებული თეორიის საფუძველზე. ვთვლით, რომ მყარი და თხევადი ნაწილები სივრცეში პერიოდულადაა განაწილებული (მცირე პერიოდით). მყარი ნაწილი (ფაზა) შეიძლება იყოს ბმული, რომელიც შედგება ერთი მყარი სხეულისაგან არხებით, სადაც სითხე მოძრაობს, ან არაბმული, ე.ი. სითხეში ჩადებულია მყარი ნაწილაკები. დავუშვათ, რომ სითხე ბაროტროპულია [56].

მყარ ნაწილში გვექნება დრეკადობის წრფივი თეორიის შემდეგი დამოკიდებულებები (იხ. თავი IV):

$$\rho^s \frac{\partial^2 u_i^s}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^s + \Phi_i^s, \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_{ij}^s = a_{ijkl}^s e_{kl}(\vec{u}^s), \quad e_{kl}(\vec{u}^s) = \frac{1}{2}(u_{k,l}^s + u_{l,k}^s), \quad (4.2.2)$$

სადაც ნიშნაკი s მიუთითებს მყარ ნაწილზე, a_{ijkl}^s კოეფიციენტებს სიმარტივისათვის ჩავთვლით მუდმივებად, რომლებიც აკმაყოფილებენ სიმეტრიის

$$a_{ijkl}^s = a_{jikl}^s = a_{klij}^s = a_{jilk}^s \quad (4.2.3)$$

(ცხადია, პირველი ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს მესამე) და დადებითად განსაზღვრულობის

$$a_{ijkl}^s e_{ij} e_{kl} \geq \delta e_{ij} e_{ij}, \quad \delta = const > 0, \quad e_{ij} = e_{ji} \quad (4.2.4)$$

პირობებს, $\vec{u}^s := (u_1^s, u_2^s, u_3^s)$.

თხევად ნაწილში გვექნება სითხეების გაწრფივებული

თეორიის შემდეგი დამოკიდებულებები (იხ. თავი V)

$$\rho^f \frac{\partial^2 u_i^f}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}^f + \Phi_i^f, \quad (4.2.5)$$

$$\sigma_{ij}^f = -\delta_{ij} p + (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{il}) e_{kl} \left(\frac{\partial \bar{u}^f}{\partial t} \right), \quad (4.2.6)$$

სადაც ნიშნაკი f მიუთითებს თხევად ნაწილზე, λ და μ სიბლანტის კოეფიციენტებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ

$$\mu > 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} > -\frac{2}{3} \alpha; \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.2.7)$$

პირობებს, $\bar{u}^f := (u_1^f, u_2^f, u_3^f)$.

შეგნიშნოთ, რომ სითხის მოძრაობის განტოლებები ჩვეულებრივ ჩაწერილია სიჩქარის

$$\bar{v}^f = \frac{\partial \bar{u}^f}{\partial t} \quad (4.2.8)$$

ვექტორის მიმართ, მაგრამ აქ ჩვენ, (4.2.1) განტოლებებთან შეთანხმების მიზნით, ისინი ჩავწერეთ u^f -ის მიმართ.

სითხისა და მყარი სხეულის ρ^f და ρ^s სიმკვრივეები წონასწორობის მდგომარეობაში სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ მუდმივებად.

სითხის ბაროტროპულობის კანონს განვიხილავთ

$$p = c^2 \tilde{\rho}^f \quad (4.2.9)$$

სახით, სადაც $c > 0$ ბგერის გავრცელების სიჩქარეა, ხოლო $\tilde{\rho}^f$ სითხის სიმკვრივის შეშფოთებაა. გარდა ამისა, რადგანაც

$$\frac{\partial \tilde{\rho}^f + \rho^f}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\rho}^f}{\partial t}$$

და $\tilde{\rho}^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}}$ შეიძლება უგულებელვყოთ წრფივ მიახლოებაში, მასის შენახვის (ე.ი. უწყვეტობის) განტოლება მიიღებს

$$\frac{\partial \tilde{\rho}^f}{\partial t} + \rho^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0$$

სახეს, საიდანაც ინტეგრების შემდეგ, იმის გათვალისწინებით, რომ $\tilde{\rho}^f = 0$, თუ $\bar{\mathbf{u}} = 0$, მივიღებთ, რომ

$$\tilde{\rho}^f + \rho^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0. \quad (4.2.10)$$

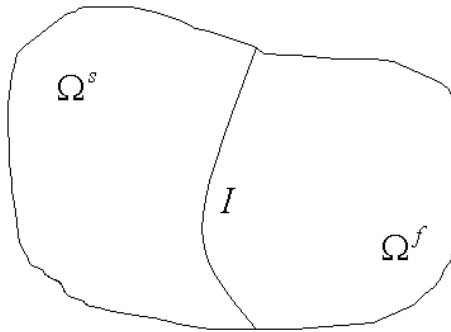
ამდენად (4.2.9) მიიღებს

$$p = -c^2 \rho^f \operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.2.11)$$

სახეს.

(4.2.11)-ის (4.2.6)-ში ჩასმის შემდეგ მივდივართ იმ დასკვნამდე, რომ σ_{ij}^f დამოკიდებულია როგორც გადაადგილების $\bar{\mathbf{u}}^f$

ვექტორზე, ასევე სიჩქარის $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^f}{\partial t}$ ვექტორზე.



ნახ. 4.2.1

I ინტერფეისზე (იხ. ნახ. 4.2.1) ვიხილავთ გადაადგილებებისა და დაბჯების უწყვეტობის

$$[u_i] = 0, \quad [\sigma_{ij} n_j] = 0 \quad (4.2.12)$$

პირობას, სადაც კვადრატული ფრჩხილები, ჩვეულებისამებრ, შესაბამისი სიდიდეების ნახტომს აღნიშნავს.

ჩვენ განვიხილავთ ერთგვაროვან (თუმცა არაერთგვაროვანი პირობების განხილვაც შეიძლებოდა)

$$\bar{u}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0 \quad (4.2.13)$$

სასაზღვრო და

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, 0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}(x_1, x_2, x_3, 0)}{\partial t} = 0, \quad (4.2.14)$$

$$x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

საწყის პირობებს, სადაც $\Omega := \Omega^s \cup \Omega^f \cup I$.

(4.2.1), (4.2.5), (4.2.12)-(4.2.14) ამოცანის ვარიაციულ ფორმულირებას აქვს შემდეგი სახე:

ვეძებთ \bar{u} ვექტორს, როგორც t -ს ფუნქციას მნიშვნელობებით $[H_0^1(\Omega)]^3$ -ში, ისეთს, რომ

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} w_i dx + \int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx = \int_{\Omega} \Phi_i w_i dx \quad \forall w_i \in H_0^1(\Omega), \quad (4.2.15)$$

$$\bar{u}(0) = \frac{d\bar{u}(0)}{dt} = 0, \quad (4.2.16)$$

სადაც

$$u_i := \begin{cases} u_i^s, & x \in \Omega^s; \\ u_i^f, & x \in \Omega^f, \end{cases} \quad \rho := \begin{cases} \rho^s, & x \in \Omega^s; \\ \rho^f, & x \in \Omega^f, \end{cases} \quad \sigma_{ij} := \begin{cases} \sigma_{ij}^s, & x \in \Omega^s; \\ \sigma_{ij}^f, & x \in \Omega^f, \end{cases}$$

$$\Phi_i := \begin{cases} \Phi_i^s, & x \in \Omega^s; \\ \Phi_i^f, & x \in \Omega^f. \end{cases} \quad (4.2.17)$$

სობოლევის^{*)} $[H_0^1(\Omega)]^3$ სივრცე არის ისეთი Ω -ზე განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქციების სიმრავლე, რომელთა კომპონენტები $u_i \in H_0^1(\Omega)$, ე.ი. კვადრატში ჯამებადია, მათი განზოგადებული ან განაწილების აზრით წარმოებულებიც ასევე კვადრატში ჯამებადია და მათი კვალები $\partial\Omega$ -ზე ნულის ტოლია (იხ. დამატება 1 და §1.21).

(4.2.15)-ის მისაღებად (4.2.1) და (4.2.5) უნდა ჩავწეროთ, (4.2.17)-ის გამოყენებით, ერთიანი სახით Ω -ზე; ამ უკანასკნელის ორივე მხარე გავამრავლოთ $w_i \in H_0^1(\Omega)$ -ზე; მიღებული ვანტეგრით Ω -ზე და σ_{ij} -ის შემცველ წვევრში მოვახდინოთ ნაწილობითი ინტეგრება, იმის გათვალისწინებით, რომ w_i ფუნქციების კვალი $\partial\Omega$ -ზე ნულის ტოლია. e_{ij} -ის სიმეტრიულობის გამო ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\bar{u})e_{ij}(\bar{w}) &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\bar{u})(w_{i,j} + w_{j,i}) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\bar{u})w_{i,j} + \frac{1}{2}\sigma_{ji}(\bar{u})w_{i,j} = \sigma_{ij}(\bar{u})w_{i,j} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

და, ამდენად, (4.2.15)-ში $w_{i,j}$ -ის ნაცვლად შეიძლება $e_{ij}(\bar{w})$ ჩავსვათ.

^{*)} ს.ლ. სობოლევი (1908-1988).

თუ (4.2.11)-ს ჩავსვამთ (4.2.6)-ში, მაშინ σ_{ij} ცალსახად განისაზღვრება \bar{u} -სა და მისი წარმოებულების საშუალებით. თუ მხედველობაში მივიღებთ (4.2.18)-ს, ადვილი სანახავია, რომ

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} w_{i,j} dx \equiv a(\bar{u}, \bar{w}) + b\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{w}\right), \quad (4.2.19)$$

სადაც

$$a(\bar{u}, \bar{w}) := \int_{\Omega} a_{ijkl}(x) e_{kl}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{w}) dx,$$

$$b(\bar{v}, \bar{w}) := \int_{\Omega} b_{ijkl}(x) e_{kl}(\bar{v}) e_{ij}(\bar{w}) dx,$$

$$a_{ijkl}(x) := \begin{cases} a_{ijkl}^s, & \text{თუ } x \in \Omega^s; \\ a_{ijkl}^f = \rho^f c^2 \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{თუ } x \in \Omega^f, \end{cases}$$

$$b_{ijkl}(x) := \begin{cases} b_{ijkl}^s \equiv 0, & \text{თუ } x \in \Omega^s; \\ b_{ijkl}^f = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu \delta_{ij} \delta_{kl}, & \text{თუ } x \in \Omega^f, \end{cases}$$

რადგანაც

$$\begin{aligned} \delta_{ij} p c^2 \rho^f \operatorname{div} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \delta_{ij} p c^2 \rho^f \operatorname{div} \bar{v} = \delta_{ij} p c^2 \rho^f v_{k,k} \\ &= \delta_{ij} p c^2 \rho^f e_{kk}(\bar{v}) = \delta_{ij} \delta_{kl} p c^2 \rho^f e_{kl}(\bar{v}). \end{aligned}$$

SeniSvna 4.2.1. ცხადია, a და b არ არიან $H_0^1(\Omega)$ -ზე კოერციტიულები. თუმცა მათი ჯამი კოერციტიულია, ე.ი. $\exists \gamma = \text{const} > 0$ ისეთი, რომ

$$a(\bar{u}, \bar{u}) + b(\bar{u}, \bar{u}) \geq \gamma \|\bar{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (4.2.20)$$

მართლაც, (4.2.7) და (4.2.4)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$a(\bar{u}, \bar{u}) + b(\bar{u}, \bar{u}) \geq \delta \int_{\Omega} e_{ij}(\bar{u}) e_{ij}(\bar{u}) dx$$

და ამის შემდეგ (4.2.20) შეიძლება ისე დამტკიცდეს როგორც ლემა 1.2 [56]-ის VI თავში.

SeniSvna 4.2.2. (4.2.3), (4.2.4) და (4.2.7) პირობებში (4.2.15) საწყის-სასაზღვრო ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ისეთი, რომ

$$\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \in L_2(0, T; [H_0^1(\Omega)]^3).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ როგორც t -ს ფუნქციები

$$\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \in [L_2(0, T)]^3$$

და ყოველი მათგანი ფიქსირებული $t \in [0, T]$ -სთვის იღებს მნიშვნელობებს, რომლებიც $[H_0^1(\Omega)]^3$ -ს ეკუთვნიან.