ნაწილი II. ორგანზომილებიანი მოდელები

თავი I. დრეკადობის ორგანზომილებიანი თეორია

დრეკადობის სამგანზომილებიანი თეორიის ამოცანების ამოხსნა დიდ სირთულეებთან არის დაკავშირებული, ამიტომ არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება სასაზღვრო ამოცანების კერძო კლასებისათვის ამოხსნის მეთოდების შემუშავებას.

\$2.1. brtyeli deformacia

ვიტყვით, რომ სხეული განიცდის Ox_1x_2 *სიბრტყის პარალელურ ბრტყელ დეფორმაციას, თუ* $u_3 = 0$*, ხოლო* u_1 *და* u_2 *დამოკიდებულნი არიან მხოლოდ* x_1 *და* x_2*-ზე,* ე.ი., $(1.6.3)$, $(1.9.9)$ და $(1.12.9)$-დან მივიღებთ, რომ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\right), \quad \alpha, \beta = 1,2; \quad e_{23} = e_{31} = e_{33} = 0; \quad (2.1.1)$$

$$\overset{2}{\theta} := e_{\alpha\alpha} = u_{\alpha,\alpha}; \qquad (2.1.2)$$

$$\begin{gathered} X_{\alpha\beta} = \lambda\overset{2}{\theta}\,\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1,2; \\ X_{\alpha 3} = 0, \quad \alpha = 1,2; \quad X_{33} = \lambda\overset{2}{\theta}; \end{gathered} \qquad (2.1.3)$$

აქედან, რამდენადაც $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\alpha} = 2$,

$$\begin{aligned} X_{\alpha\alpha} = X_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} &= \lambda\overset{2}{\theta}\,\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu e_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} \\ &= 2\lambda\overset{2}{\theta} + 2\mu e_{\alpha\alpha} = 2(\lambda + \mu)\overset{2}{\theta} \end{aligned}$$

და

$$\overset{2}{\theta} = \frac{1}{2(\lambda+\mu)} X_{\alpha\alpha} =: \frac{1}{2(\lambda+\mu)} \Theta_2 . \qquad (2.1.4)$$

ამ უკანასკნელის (2.1.3) ტოლობებს შორის ბოლო ტოლობაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$X_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} X_{\alpha\alpha} = \nu\, X_{\alpha\alpha} = \nu \Theta_2 . \qquad (2.1.5)$$

წონასწორობის (1.15.1) განტოლებებიდან პირველი ორი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$X_{\alpha\beta,\beta} + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1{,}2 , \qquad (2.1.6)$$

ხოლო მესამედან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi_3 = 0 .$$

ე.ი., ბრტყელი დეფორმაციის შემთხვევაში სხეულზე მოქმედი მოცულობითი ძალის გეგმილი დეფორმაციის სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებაზე ნულის ტოლია.

(2.1.1)-(2.1.6)-ის თანახმად დეფორმაციის და ძაბვის ტენზორების კომპონენტები და მოცულობითი ძალის Φ_α კომპონენტები დამოკიდებულნი არიან მხოლოდ x_1 და x_2-ზე. ამრიგად, არც ერთი განსახილველი სიდიდე x_3-ზე არ არის დამოკიდებული.

ლამეს (1.16.1) განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\mu\,\Delta_2\, u_\alpha + (\lambda+\mu)\, \overset{2}{\theta}_{,\alpha} + \Phi_\alpha = 0, \quad \alpha = 1{,}2 ,$$

სადაც

$$\Delta_2(\cdot) := (\cdot)_{,11} + (\cdot)_{,22} \;{}^{*)}.$$

ეს უკანასკნელი, ცხადია, (2.1.3)-ის (2.1.6)-ში ჩასმითაც მიიღება.

სენ-ვენანის (1.11.4) პირობებიდან ხუთი, (2.1.1)-ის თანახმად, იგივურად კმაყოფილდება და გვრჩება მხოლოდ ერთი

---

*) რადგან ამ ნაწილში (ნაწილი II) ჩვენ მხოლოდ ლაპლასის ორგანზომილებიან Δ_2 ოპერატორთან გვექნება საქმე, სიმარტივისათვის მას ინდექსად 2-ს არ მივუწერთ.

$$e_{11,22}+e_{22,11}=2e_{12,12}\,. \qquad (2.1.7)$$

პირობა. იზოტროპული ერთგვაროვანი სხეულისათვის (2.1.7) შეიძლება შემდეგი სახითაც ჩავწეროთ

$$\Delta\, X_{\alpha\alpha}=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\Phi_{\alpha,\alpha}\,. \qquad (2.1.8)$$

მართლაც, (2.1.3)-ის პირველ ტოლობაში (2.1.4)-ის ჩასმისა და $e_{\alpha\beta}$-ს მიმართ ამოხსნის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$e_{\alpha\beta}=\frac{1}{2\mu}\left[X_{\alpha\beta}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}X_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right],\quad \alpha,\beta=1.2\,. \qquad (2.1.9)$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (2.1.7)-ში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$X_{11,22}+X_{22,11}-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\Delta\, X_{\gamma\gamma}-2\,X_{12,12}=0 \qquad (2.1.10)$$

თუ (2.1.6)-დან პირველს გავაწარმოებთ x_1-ით, ხოლო მეორეს – x_2-ით და მიღებულ შედეგებს შევკრებთ, გვექნება

$$-2X_{12,12}=X_{11,11}+X_{22,22}+\Phi_{\alpha,\alpha}\,.$$

თუ ამ უკანასკნელს შევიტანთ (2.1.10)-ში, საბოლოოდ მოვიღებთ (2.1.8)-ს, რომელსაც *ლევის განტოლება* ეწოდება.

ბრტყელი დეფორმაციის განმარტებიდან ცხადია, რომ ის გვექნება უსასრულოდ გრძელი წრფივი ღერძის მქონე პრიზმული (ცილინდრული) სხეულის შემთხვევაში, როცა მასზე მოქმედი გარე ზედაპირული ძალები და მოცულობითი ძალები დეფორმაციის სიბრტყის (ე.ი., განივი კვეთის) პარალელურია[*)]. თუ პრიზმული სხეული სასრულია, მაშინ მასში ბრტყელი დეფორმაცია აღიძვრება გარკვეული მიახლოებით. ამასთან, რაც უფრო გრძელია პრიზმა (ცილინდრი), მით უფრო ახლოა სხეულის დეფორმაცია ბრტყელ დეფორმაციასთან.

[*)] ე.ი. $0=X_{n3}=X_{3j}\;n_j$, რაც, (2.1.3)-ის თანახმად, იგივურად სრულდება, რადგან n გვერდითი ზედაპირის ნორმალია.

თუ $u_\alpha, X_{\alpha\beta}$ აკმაყოფილებენ (2.1.1), (2.1.3), (2.1.6) განტოლებებს და

$$X_{\alpha\beta} n_\beta = X_{n\alpha}, \qquad \alpha = 1,2, \tag{2.1.11}$$

სასაზღვრო პირობებს*), სადაც $X_{n\alpha}$, $\alpha = 1,2$, გარე ძაბვის ვექტორის მოცემული კომპონენტებია, მაშინ (2.1.5)-ის თანახმად პრიზმის (ცილინდრის) ბოლოებზე მოქმედებენ შესაბამისად X_{33} და $-X_{33}$-ის ტოლი ძაბვები (იხ. ნახ. 2.1.1)**). ამ ძაბვების მოდება აუცილებელია იმისათვის, რომ გვქონდეს ბრტყელი დეფორმაცია.

$2.2. brtyeli daZabuli mdgomareoba

დაძაბულ მდგომარეობას ეწოდება Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელური ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, თუ სხეულის ყოველ წერტილში

$$X_{i3} = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{2.2.1}$$

ამ შემთხვევაში, საზოგადოდ, ნულისაგან განსხვავებულია ძაბვის ტენზორის შემდეგი სამი კომპონენტი

$$X_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1,2.$$

თუ (2.2.1) დამოკიდებულებას ადგილი აქვს მხოლოდ მოცემულ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულ *წერტილში* გვაქვს *ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.*

ამ შემთხვევაში (1.2.1) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

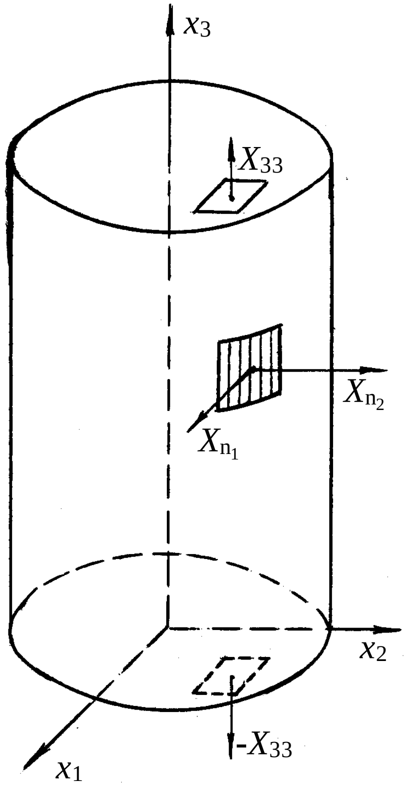
ნახ. 2.1.1

---

*) აქ გათვალისწინებულია წინა გვერდის *).

**) $X_{x_3 3} = X_{33}\cos(x_3, x_3) = X_{33}$,

$X_{(-x_3)3} = X_{33}\cos(-x_3, x_3) = -X_{33}$.



$$X_{n\alpha} = X_{\alpha\beta} n_\beta, \quad \alpha = 1,2; \quad X_{n3} = 0. \qquad (2.2.2)$$

ეს უკანასკნელი იმაზე მიგვითითებს, რომ *ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორი* Ox_1x_2 *სიბრტყის პარალელურია.*

(2.2.1)-ის თანახმად, წონასწორობის განტოლებებს (2.1.6) სახე ექნებათ, მხოლოდ განსახილველ შემთხვევაში ძაბვები, საზოგადოდ, x_3-ზეც არიან დამოკიდებულნი.

რადგან $X_{33}=0$, იზოტროპული სხეულისათვის

$$X_{33}=\lambda\ u_{i,i}+2\mu\, u_{3,3}=0.$$

აქედან განსაზღვრულ $u_{3,3}$-ს

$$u_{3,3}=e_{33}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}u_{\alpha,\alpha}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\overset{2}{\theta} \qquad (2.2.3)$$

თუ ჩავსვამთ ჰუკის (1.15.2) კანონში, მივიღებთ, რომ

$$X_{\alpha\beta}=\lambda^{*}\overset{2}{\theta}\ \delta_{\alpha\beta}+\mu\left(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha}\right),\quad \alpha,\beta=1,2\,, \quad (2.2.4)$$

სადაც

$$\lambda^{*}=\frac{2\lambda\,\mu}{\lambda+2\mu}.$$

ჰუკის კანონში $X_{\alpha 3}=0$-ის (იხ. 2.2.1) ჩასმა კი გვაძლევს, რომ

$$2e_{23}=u_{2,3}+u_{3,2}=0,\quad 2e_{13}=u_{1,3}+u_{3,1}=0\,, \quad (2.2.5)$$

როგორც ვხედავთ, (2.2.4) იმით განსხვავდება (2.1.3)-საგან, რომ λ შეცვლილია λ^{*}-ით.

თუ (2.2.4)-ს ჩავსვამთ წონასწორობის (2.1.6) განტოლებებში, რომლებიც, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სამართლიანია ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შემთხვევაშიც, მივიღებთ, რომ

$$\mu\Delta u_{\alpha}+\left(\lambda^{*}+\mu\right)\overset{2}{\theta}_{\alpha}+\Phi_{\alpha}=0,\qquad \alpha=1,2\,. \qquad (2.2.6)$$

ხოლო წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის მესამე განტოლებიდან, (2.2.1)-ის თანახმად გვექნება, რომ

$$\Phi_{3}=0\,.$$

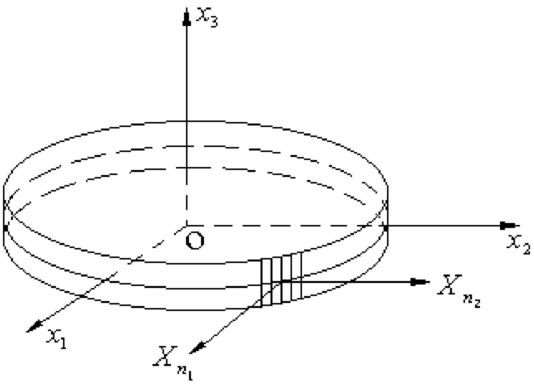
ე.ი., მოცულობითი ძალაც Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელურია.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, მიუხედავად არსებითი გამარტივებისა და იმისა, რომ ჰუკის კა-ნონსა და ლამეს განტოლებებს შესაბამისად (2.2.4) და (2.2.6) სახე აქვთ, რჩება სამგანზომილებიან ამოცანად, რამდენადაც, რო-გორც უკვე ავღნიშნეთ, განსახილველი სიდიდეები, საზოგადოდ,

x_3-ზე არიან დამოკიდებულნი. მართალია, (2.2.4)-სა და (2.2.6)-ში x_3 მხოლოდ პარამეტრის როლს თამაშობს.

$2.3. ganzogadebuli brtyeli daZabuli mdgomareoba

ფუძეების ზომებთან შედარებით მცირე სიმაღლის მქონე პრიზმას (ცილინდრს) *ფირფიტა* ეწოდება, ხოლო მის $2h$ სიმაღლეს (იხ. ნახ. 2.3.1) – *ფირფიტის სისქე*. ვიგულისხმოთ, რომ ფირფიტის შუა სიბრტყე (ე.ი. ფუძეების პარალელური და მათგან თანაბრად დაშორებული სიბრტყე) ემთხვევა Ox_1x_2-ს.



ნახ. 2.3.1

ვთქვათ, ფირფიტის ფუძეები თავისუფალია გარე ძაბვებისაგან, ხოლო გვერდით ზედაპირზე მოქმედებენ ფუძეების პარალელური და შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიულად განაწილებული გარე ძაბვები. ასევე ვგულისხმობთ, რომ ფირფიტაზე მოქმედი მოცულობითი ძალები ფუძეების პარალელური და შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიულად განაწილებულნი არიან, ე.ი.,

$$X_{i\,3}\big|_{x_3=\pm h}=0,\quad i=1,2,3, \tag{2.3.1}$$

$$X_{n3} = 0 \text{ გვერდით ზედაპირზე და } \Phi_3 = 0 . \qquad (2.3.2)$$

სენ-ვენანის პრინციპის თანახმად, ორ მსახველს შორის მოთავსებულ მცირე უბანზე მოქმედ ზედაპირულ ძალთა სისტემა შეიძლება შეიცვალოს სტატიკურად მისი ეკვივალენტური ძალით, რომელიც აღნიშნულ უბანზე მოქმედებს და ფირფიტის შუა სიბრტყეში მდებარეობს.

მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალების შუა სიბრტყისადმი სიმეტრიული განაწილების გამო, ცხადია, რომ შუა სიბრტყის წერტილები დეფორმაციის შემდეგაც შუა სიბრტყეზე დარჩებიან, ე.ი. *გადაადგილების* u_3 *კომპონენტი შუა სიბრტყეზე ნულია და ფირფიტის სისქის სიმცირის გამო, როცა* $x_3 > 0$*, ის ძალზე მცირეა. ამდენად* $u_3(x_1, x_2, x_3)$ *საერთოდ ნულის ტოლად შეიძლება ჩავთვალოთ* (მაგრამ არა მისი წარმოებული $u_{3,3}$), ხოლო u_α-ს ცვლილება სისქის გასწვრივ უმნიშვნელოა. აქედან გამომდინარე, ცხადია, რომ ფირფიტის დრეკად წონასწორობაზე წარმოდგენა შეიძლება შევიქმნათ u_α სიდიდეების სისქის მიმართ გასაშუალებული $u_{\alpha 0}$ მნიშვნელობებით:

$$u_{\alpha 0}(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) dx_3, \quad \alpha = 1,2 . \qquad (2.3.3)$$

(2.3.2)-ის თანახმად, წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის მესამე განტოლებიდან

$$X_{3j,j} = 0 . \qquad (2.3.4)$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ (2.3.1)-ს, ცხადია,

$$X_{33,3}\,|_{x_3 = \pm h} = 0 ,$$

რადგან

$$X_{31,1}\,|_{x_3 = \pm h} = X_{32,2}\,|_{x_3 = \pm h} = 0 .$$

ამრიგად, ფირფიტის ფუძეებზე X_{33} და მისი წარმოებული სისქის გასწვრივ ნულის ტოლია. სისქის სიმცირის გამო დიდი სიზუსტით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ყველგან სხეულში

$$X_{33}\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0\,. \qquad (2.3.5)$$

დაძაბულ მდგომარეობას, როცა სრულდება (2.3.1), (2.3.2), (2.3.5) *პირობები და გარე ძალები ფირფიტის შუა სიბრტყის პარალელური და სიმეტრიულია, ეწოდება განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა.*

წონასწორობის (1.15.1) განტოლებათა სისტემის პირველი ორი განტოლების x_3-ის მიმართ $-h$-დან $+h$-მდე ინტეგრებისა და მისი $2h$-ზე გაყოფის შემდეგ, რადგან, (2.3.1)-ის თანახმად,

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3},_3\, dx_3 = \frac{1}{2h} X_{\alpha 3}\Big|_{x_3=-h}^{x_3=+h} = 0\,,$$

მივიღებთ, რომ

$$X_{\alpha\beta 0},_\beta + \Phi_{\alpha 0} = 0, \qquad \alpha = 1{,}2\,, \qquad (2.3.6)$$

სადაც

$$X_{\alpha\beta 0}\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} X_{\alpha\beta}\left(x_1, x_2, x_3\right) dx_3, \quad \alpha, \beta = 1{,}2;$$

$$\Phi_{\alpha 0}\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} X_{\alpha}\left(x_1, x_2, x_3\right) dx_3, \quad \alpha = 1{,}2\,.$$

რაც შეეხება წონასწორობის (2.3.4) განტოლებას, იგი გასაშუალოების შემდეგ იგივურად კმაყოფილდება, რადგან განზოგადებული დაძაბული მდგომარეობის ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე u_α, $X_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1{,}2$, სიდიდეები ლუწი, ხოლო $X_{3\alpha}$, $\alpha = 1{,}2$, სიდიდეები კენტი ფუნქციებია x_3 ცვლადის მიმართ, ე.ი. ამ უკანასკნელთა საშუალო მნიშვნელობები ნულის ტოლია.

ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის ანალოგიურად, (2.3.5)-ის თანახმად, ჩვენს შემთხვევაშიც ექნება ადგილი (2.2.4) ტოლობას, რომელიც გასაშუალოების შემდეგ გვაძლევს, რომ

$$X_{\alpha\beta 0} = \lambda^* \overset{2}{\theta_0}\, \delta_{\alpha\beta} + \mu\left(u_{\alpha 0,\beta} + u_{\beta 0,\,\alpha}\right), \quad \alpha,\beta = 1,2 \,. \quad (2.3.7)$$

თუ (2.3.7)-ს ჩავსვამთ (2.3.6)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\lambda \Delta u_{\alpha 0} + \left(\lambda^* + \mu\right) \overset{2}{\theta}_{0,\alpha} + \Phi_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha,\beta = 1,2 \,.$$

ვთქვათ, ds წირითი ელემენტია Ox_1x_2 სიბრტყეზე. განვიხილოთ შუა სიბრტყისადმი პერპენდიკულარული $2h$ სიმაღლის მქონე მართკუთხა ფართი, რომელიც ფირფიტას ეკუთვნის და რომლის კვეთა შუა სიბრტყესთან გვაძლევს ds ელემენტს. აღნიშნულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის გეგმილის საშუალო მნიშვნელობა

$$X_{n\,\alpha 0} = X_{\alpha\beta 0} n_\beta \text{-ს}, \quad \alpha = 1,2 \,, \qquad (2.3.8)$$

ტოლია, სადაც n ფართის დადებითი ნორმალია, რომელიც, ცხადია, შუა სიბრტყის პარალელურია (ე.ი. $n_3 = 0$). მთელ ფართზე მოქმედი ზედაპირული ძალაა

$$2hX_{n\,\alpha 0}\, ds \,, \quad \alpha = 1,2 \,,$$

ხოლო სისქის ერთეულზე გაანგარიშებული ds ელემენტზე n ნორმალის მხრიდან მოქმედი ძალა $X_{n\,\alpha 0}\, ds$-ის, $\alpha = 1,2$, ტოლია.

ბრტყელი დეფორმაციისა და განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის ძირითად დამოკიდებულებათა შედარება ადვილად დაგვარწმუნებს იმაში, რომ ყველა ფორმულა ერთნაირია იმ განსხვავებით, რომ იქ, სადაც ბრტყელი დეფორმაციის დროს გვაქვს λ, განზოგადებული დაძაბული მდგომარეობის დროს გვაქვს λ^*. ამრიგად, შეიძლება დავასკვნათ, რომ ბრტყელი დეფორმაციის მდგომარეობისა და განზოგადებული ბტყელი დაძაბული მდგომარეობის შემთხვევაში დრეკადობის თეორიის ამოცანები მათემატიკურად იდენტურია.

დრეკადობის თეორიის ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანები დაისმება სამგანზომილებიანის ანალოგიურად. კონკრეტული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები შეიძლება ვნახოთ, მაგალითად, [52]-სა და [50]-ში.

თავი II. ფირფიტების და გარსების თეორია

$2.4. Txeli firfitebis Runvis klasikuri Teoria. kirxhof-liavis modeli

ჩვენს მიერ ადრე განხილული განზოგადოებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა (იხ. §2.3) იქმნება ფირფიტების გაჭიმვა-კუმშვაზე მუშაობის დროს. მაშინ როგორც მოცულობითი, ასევე გარე ზედაპირული ძალების გეგმილები შუა სიბრტყის პერპენდიკულარულ მიმართულებაზე ჩვენს მიერ ნულის ტოლად იქნა მიღებული. ამდენად იმ შემთხვევის განსახილველად, როცა ფირფიტაზე სწორედ მხოლოდ ზემო აღნიშნული მდგენელები მოქმედებენ, განზოგადოებული ბრტყელი დაძაბულობის მდგომარეობის მოდელი არ გამოდგება. ამ მოთხოვნას პასუხობს თხელი *ფირფიტების ღუნვის კლასიკური თეორია*, რომელიც ეყრდნობა *კირხჰოფ*[*]*-ლიავის*[**] შემდეგ სამ ძირითად ჰიპოთეზას:

1. *წრფივი ნორმალების ჰიპოთეზა*: დეფორმაციამდე ფირფიტის შუა სიბრტყისადმი ნორმალური წრფივი ელემენტი არ იცვლის სიგრძეს და წრფივი და შუა ზედაპირის მართობული რჩება დეფორმაციის შემდეგაც (იხ. ნახ. 2.4.1).

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ $e_{33} = 0$ და $e_{\alpha 3} = 0$, $\alpha = 1,2$.

---

[*] გ.რ. კირხჰოფი (1824-1887).
[**] ო.ე.ჰ. ლიავი (1863-1940).

2. *შუა სიბრტყის გაუჭიმვადობის ჰიპოთეზა*: შუა სიბრტყე არ მუშაობს გაჭიმვა-კუმშვაზე, იგი მხოლოდ ილუნება, ე.ი., შუა სიბრტყეში არ გვაქვს გაჭიმვის, კუმშვის და ძვრის დეფორმაციები.

მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$u_{\alpha}\left(x_1, x_2, 0\right) = 0, \quad \alpha = 1,2.$$

ამ თვისების გამო აღნიშნულ სიბრტყეს *ნეიტრალურს* უწოდებენ.

3. *შუა სიბრტყისადმი პარალელურ ფენებს შორის წნევის არარსებობის ჰიპოთეზა*: აღნიშნული წნევის სიმცირის გამო ფირფიტის ფენები ერთმანეთზე გავლენას არ ახდენენ.

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$X_{33} << X_{11}, X_{12}, X_{22}, \quad X_{33} \cong 0.$$

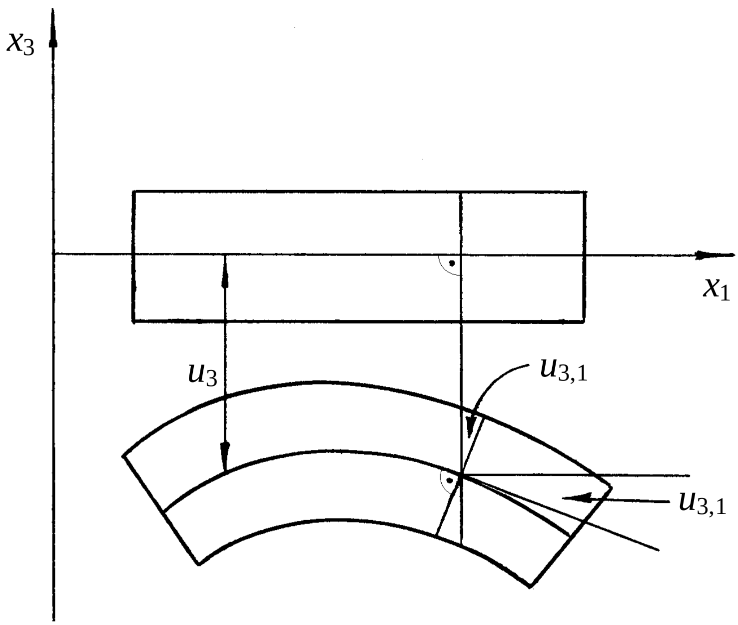
ეს ჰიპოთეზები მისაღებია ე.წ. თხელი ფირფიტებისათვის. ფირფიტას ეწოდება *თხელი*, თუ მისი ჩაღუნვა

$$u_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \leq \frac{2h}{4}$$

და

$$\frac{1}{80} < \frac{2h}{b} < \frac{1}{5},$$

სადაც $2h$ ფირფიტის სისქეა, ხოლო b არის ფირფიტის Ox_1x_2 სიბრტყეზე გეგმილის უმცირესი მახასიათებელი ზომა.



ნახ. 2.4.1

შევნიშნოთ, რომ თხელი ფირფიტების თეორია გამოდგება მაშინაც კი, როცა

$$\frac{1}{5} \le \frac{2h}{b} \le \frac{1}{3}.$$

თუ $\frac{2h}{b} > \frac{1}{3}$, მაშინ ფირფიტა გაითვლება *სქელი ფირფიტების* თეორიის საფუძველზე. თუ ჩაღუნვა $u_3 > \frac{2h}{4}$, ფირფიტა გაითვლება *მოქნილი ფირფიტების* თეორიის საფუძველზე. სქელი და მოქნილი (ან რაც იგივეა, დიდი ჩაღუნვების მქონე) ფირფიტების თეორიებს (იხ. მაგ., [58]) ჩვენ არ შევეხებით.

2.4.1. gadaadgilebebi da deformaciebi firfitebSi

კირხჰოფ-ლიავის პირველი ჰიპოთეზის თანახმად, (1.6.3)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $e_{33} = u_{3,3} = 0$. თუ ვაინტეგრებთ ამ ტოლობას, მივიღებთ, რომ $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. გარდა ამისა, იმავე ჰიპოთეზის თანახმად:

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}\right) = 0,$$

საიდანაც

$$u_{\alpha,3} = -u_{3,\alpha}. \tag{2.4.1}$$

თუ ვაინტეგრებთ მას x_3-ის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$u_\alpha = -x_3\, u_{3,\alpha} + f_\alpha\left(x_1, x_2\right), \quad \alpha = 1,2.$$

მაგრამ მეორე ჰიპოთეზის თანახმად შუა სიბრტყეზე ამ ტოლობების მარცხენა მხარე ნულის ტოლია. მარჯვენა მხარეში კი

პირველი შესაკრები, როცა $x_3 = 0$, ცხადია, ნულის ტოლია. ამდენად,

$$f_\alpha\left(x_1, x_2\right) = 0, \quad \alpha = 1{,}2 .$$

ამრიგად,

$$u_\alpha\left(x_1, x_2, x_3\right) = -x_3\, u_{3,\alpha}, \quad \alpha = 1{,}2, \qquad (2.4.2)$$

ხოლო

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}\right) = -\frac{x_3}{2}\left(u_{3,\alpha\beta} + u_{3,\beta\alpha}\right) = -x_3 u_{3,\alpha\beta}, \qquad (2.4.3)$$

$$\alpha = 1{,}2,$$

და ისინი განისაზღვრებიან u_3-ის საშუალებით.

2.4.2. Zabvebi firfitaSi

კირხჰოფ-ლიავის მესამე ჰიპოთეზის თანახმად, ჰუკის (1.12.26) კანონიდან ვიღებთ, რომ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\Theta_2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1{,}2, \qquad (2.4.4)$$

სადაც

$$\Theta_2 := X_{11} + X_{22} .$$

აქედან

$$e_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}\Theta_2 - \frac{2\nu}{E}\Theta_2,$$

ე.ი., (2.4.3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\Theta_2 = -\frac{E}{1-\nu} x_3 u_{3,\alpha\alpha} .$$

ამ უკანასკნელის (2.4.4)-ში ჩასმა გვაძლევს, რომ

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E} X_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} x_3\, u_{3,\gamma\gamma}\, \delta_{\alpha\beta},$$

კერძოდ, თუ $\beta=\alpha$ -ს,

$$e_{\alpha\underline{\alpha}}=\frac{1+\nu}{E}X_{\alpha\underline{\alpha}}+\frac{\nu}{1-\nu}x_3\,u_{3,\gamma\gamma}\,.$$

საიდანაც, რადგან $u_{3,\gamma\gamma}=u_{3,\alpha\underline{\alpha}}+u_{3,\beta\underline{\beta}}$ $(\alpha\neq\beta)$, $(2.4.3)$-ის თანახმად,

$$X_{\alpha\underline{\alpha}}=-\frac{E}{1+\nu}x_3u_{3,\alpha\underline{\alpha}}-\frac{E\nu}{1-\nu^2}x_3u_{3,\gamma\gamma}=$$

$$-\frac{E}{1-\nu^2}x_3\Big[(1-\nu)u_{3,\alpha\underline{\alpha}}+\nu u_{3,\alpha\underline{\alpha}}+\nu u_{3,\beta\underline{\beta}}\Big]\ ,$$

$$\alpha\neq\beta,\quad \alpha,\beta=1{,}2,$$

და

$$X_{\underline{\alpha}\alpha}=-\frac{Ex_3}{1-\nu^2}\Big(u_{3,\alpha\underline{\alpha}}+\nu u_{3,\beta\underline{\beta}}\Big),\quad \alpha\neq\beta,\quad \alpha,\beta=1{,}2\,. \qquad (2.4.5)$$

$(2.4.4)$ და $(2.4.3)$-დან ცხადია, რომ

$$X_{12}=-\frac{Ex_3}{1+\nu}u_{3,12}\,. \qquad (2.4.6)$$

პირველი ჰიპოთეზის გამო, ჰუკის $(1.12.26)$ კანონიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ

$$X_{\alpha 3}=\frac{E}{1+\nu}e_{\alpha 3}=0\,. \qquad (2.4.7)$$

მესამე ჰიპოთეზის თანახმად კი ჩვენ დავუშვით, რომ

$$X_{33}=0\,. \qquad (2.4.8)$$

უგულებელვყოთ მოცულობითი ძალები. მაშინ წონასწორობის $(1.15.1)$ განტოლებები მიიღებენ

$$X_{ij,j}=0,\quad i=1{,}2{,}3\,,$$

სახეს. $(2.4.7)$ და $(2.4.8)$, ერთის მხრივ, ეწინააღმდეგება წონასწორობის ამ განტოლებებს, რამდენადაც თუ თვით წონასწორო-

ბის განტოლებებს ამოვხსნით X_{i3}-ის, $i=1,2,3$ მიმართ, გავითვალისწინებთ $(2.4.5)$-ს, $(2.4.6)$-ს და იმას, რომ

$$X_{\alpha 3}\Big|_{x_3=\pm h}=0, \quad X_{33}\Big|_{x_3=\pm h}=\pm \overset{(\pm)}{q},$$

მივიღებთ, რომ (იხ. [55], გვ. 116-118)

$$X_{\alpha 3}=-\frac{E}{2\left(1-v^2\right)}\left(h^2-x_3^{\,2}\right)\left(\Delta u_3\right)_{,\alpha}, \quad \alpha=1,2, \quad (2.4.9)$$

ხოლო

$$X_{33}=\frac{\overset{(+)}{q}-\overset{(-)}{q}}{2}+\frac{E}{2\left(1-v^2\right)}\left(h^2 x_3-\frac{x_3^{\,3}}{3}\right)\Delta^2 u_3, \quad (2.4.10)$$

სადაც $\overset{(+)}{q}$ და $\overset{(-)}{q}$ შესაბამისად ფირფიტის ზედა და ქვედა ზედაპირებზე მოდებულ ძალებს აღნიშნავს; თუმცა, მეორე მხრივ, $(2.4.9)$ და $(2.4.10)$-დან გამომდინარეობს, რომ $X_{\alpha 3}$, $\alpha=1,2$, მეორე რიგის მცირე სიდიდეა h-ის მიმართ, ხოლო X_{33} კი განივი დატვირთვის ინტენსიურობის რიგისაა და შეადგენს $X_{\alpha\underline{\alpha}}$, $\alpha=1,2$, ძაბვების უმნიშვნელო ნაწილს (იხ. 2.4.3 ქვეპარაგრაფი), თუ შესაბამისად u_3-ის მესამე და მეოთხე რიგის წარმოებულები x_1 და x_2-ის მიმართ შემოსაზღვრულია.

2.4.3. Zalvebi firfitebSi

განვიხილოთ

$$N_\alpha=\int_{-h}^{+h} X_{\alpha\underline{\alpha}}\,dx_3, \quad \alpha=1,2.$$

რადგანაც $(2.4.5)$ x_3-ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ

$$N_\alpha=0.$$

იმავე $(2.4.5)$-ის თანახმად *მღუნავი მომენტი*

$$M_\alpha = M_{\underline{\alpha\alpha}} := \int_{-h}^{+h} X_{\underline{\alpha\alpha}} x_3 dx_3 = -D\left(u_{3,\underline{\alpha\alpha}} + \nu u_{3,\beta\beta}\right), \tag{2.4.11}$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1,2,$$

სადაც

$$D = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$$

ე.წ. *ცილინდრული სიხისტეა.*

თუ გავითვალისწინებთ $(2.4.9)$-ს, მივიღებთ ე.წ. *გადამჭრელი* Q_α *ძალვების* შემდეგ გამოსახულებას:

$$Q_\alpha := \int_{-h}^{+h} X_{\alpha 3} dx_3 = -D\left(\Delta u_3\right)_{,\alpha}, \quad \alpha = 1,2. \tag{2.4.12}$$

რადგანაც $(2.4.6)$ x_3-ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, ამიტომ

$$S := \int_{-h}^{+h} X_{12} dx_3 = 0$$

და ე.წ. *მგრეხავი მომენტი*:

$$H := M_{21} = M_{12} = \int_{-h}^{+h} x_3 X_{12} dx_3 = -D(1-\nu) u_{3,12}. \tag{2.4.13}$$

Q_α, M_α და H სიდიდეები გათვლილია შუა სიბრტყისა და მისი პერპენდიკულარული სიბრტყის თანაკვეთის სიგრძის ერთეულზე. ცხადია, მათი საშუალებით ადვილად მივიღებთ ძაბვის ტენზორის კომპონენტების გამოსახულებებს. მართლაც, $(2.4.5)$-ის და $(2.4.11)$-ის შედარებით დავასკვნით, რომ

$$X_{\alpha\underline{\alpha}} = \frac{3M_\alpha x_3}{2h^3}, \quad \alpha = 1,2,$$

ხოლო $(2.4.6)$-ის $(2.4.13)$-თან, $(2.4.9)$-ისა და $(2.4.10)$-ის $(2.4.12)$-თან შედარებით კი შესაბამისად დავასკვნით, რომ

$$X_{12}=\frac{3Hx_3}{2h^3},\quad X_{\alpha 3}=\frac{3Q_\alpha}{4h^3}\left(h^2-x_3^2\right),$$

$$X_{33}=\frac{\overset{(+)}{q}-\overset{(-)}{q}}{2}-\frac{3Q_{\alpha,\alpha}}{4h^3}\left(h^2x_3-\frac{x_3^3}{3}\right).$$

თუ ფირფიტის შუა სიბრტყეში მდებარე წირის გარე ნორმა-ლი $\vec{n}$-ია, ხოლო $\vec{t}$ მხები, მაშინ, ანალოგიურად, $(1.4.3)$, $(1.2.1)$, $(2.4.11)$-$(2.4.13)$–ის თანახმად,

$$M_n:=\int_{-h}^{+h}X_{nn}\;x_3\,dx_3=\int_{-h}^{+h}X_{ij}\;n_i\,n_j\;x_3\,dx_3=\int_{-h}^{+h}X_{\alpha\beta}\,n_\alpha n_\beta x_3\,dx_3$$

$$=M_1n_1^2+2Hn_1n_2+M_2n_2^2\,,$$

$$M_{nt}:=\int_{-h}^{+h}X_{nt}\,x_3\,dx_3=\int_{-h}^{+h}X_{ij}\,n_it_j\,x_3\,dx_3=\int_{-h}^{+h}X_{\alpha\beta}\,n_\alpha t_\beta x_3\,dx_3$$

$$=M_1n_1t_1+H\left(n_1t_2+n_2t_1\right)+M_2n_2t_2\,,$$

$$Q_n:=\int_{-h}^{+h}X_{n3}\,dx_3=\int_{-h}^{+h}X_{i3}\;n_i\;dx_3=\int_{-h}^{+h}X_{\alpha 3}\;n_\alpha\;dx_3=Q_\alpha n_\alpha\,,$$

სადაც

$$n_i=\cos(n,x_i),\quad t_i=\cos(t,x_i),\quad i=1,2,3\,,$$

და, ცხადია, $n_3=0$, $t_3=0$.

2.4.4. gaRunuli Sua zedapiris gantoleba

აზრობრივად ამოვჭრათ შუა სიბრტყიდან უსასრულოდ მცირე ელემენტი dx_1 და dx_2 (იხ. ნახ 2.4.2) გვერდებით. მასზე მოქ-

მედი ძალვები მოცემულია ნახაზზე. ამასთან იმ წირით ელემენ-ტებთან, რომელთა ნორმალების მიმართულება ემთხვევა სა-კოორდინატო ღერძების მიმართულებებს, მითითებულია ძალვების (საკუთრივ გადამჭრელი ძალებისა და მომენტების მოქმედებით გამოწვეული მობრუნების კუთხეების) დადებითი მიმართულებები, ე.ი. ის მიმართულებები, რა მიმართულებებითაც შესაბამისი სიდიდეები დადებით მნიშვნელობებს იღებენ. მომენტებისა და მათ მიერ გამოწვეული ბრუნვის დადებითი მიმართულებების გასარ-კვევად გავიხსენოთ მომენტის განმარტება. მარჯვენა სისტემაში რაიმე O_1 წერტილის მიმართ O_2 წერტილში მოდებული $\vec{P}$ ძალის მომენტი განიმარტება, როგორც $\overrightarrow{O_1O_2}$ და $\vec{P}$ ვექტორების ისეთი ვექტორული ნამრავლი, რომ $\overrightarrow{O_1O}$, $\vec{P}$ და $[\overrightarrow{O_1O}, \vec{P}]$ ვექტორებმა შექმნან მარჯვენა სისტემა. ამასთან მო-მენტის დადებითი მიმართულების გარშემო მის მიერ გამოწ-ვეული ბრუნვის დადებით მიმართულებად (ე.ი. მობრუნების კუთხის დადებით მიმართულებად) მიღებულია საათის ისრის სა-წინააღმდეგო მიმართულება. ამრიგად, (x_3, X_{11}, M_1) სამეულის დადებითი მნიშვნელობების შესაბამისმა მიმართულებებმა უნდა შექმნან მარჯვენა სისტემა. აქედან გამომდინარე M_1 მომენტის დადებითი მიმართულების გარშემო მის მიერ გამოწვეული ბრუნ-ვის დადებითი მიმართულება (ე.ი. მობრუნების კუთხის დადებითი მიმართულება) ემთხვევა ნახ. 2.4.2-ზე მითითებულს. ანალოგიუ-რად, (x_3, X_{22}, M_2) სამეულიდან ვასკვნით, რომ M_2-ის დადები-თი მიმართულება ემთხვევა x_1 ღერძის უარყოფით მიმართულე-ბას; (x_3, X_{12}, H) სამეულიდან ვასკვნით, რომ H-ის დადებითი მიმართულება ემთხვევა x_1 ღერძის უარყოფით მიმართულებას; (x_3, X_{21}, H) სამეულიდან ვასკვნით, რომ H-ის დადებითი მი-მართულება ემთხვევა x_2 ღერძის დადებით მიმართულებას; ხო-

ლო მათ დადებით მიმართულებათა გარშემო მათ მიერვე გამოწვეულ ბრუნვათა დადებითი მიმართულებები ემთხვევა ნახაზზე მითითებულს. ელემენტი წონასწორობაშია, ამიტომ მასზე მოქმედი ძალების x_3 ღერძზე გეგმილების ალგებრული ჯამის ნულთან ტოლობის პირობიდან მივიღებთ, რომ

$$-Q_1dx_2 - Q_2dx_1 + \left(Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1$$

$$+\left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2 + qdx_1dx_2 = 0,$$

სადაც $q := \overset{(+)}{q} + \overset{(-)}{q}$ (იხ. 2.4.2 ქვეპარაგრაფი) შუა სიბრტყეზე ნორმალურად მოქმედი ზედაპირული დატვირთვის ინტენსიურობაა. აქედან მსგავსი წევრების შეერთებისა და dx_1dx_2-ზე გაყოფის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$Q_{\alpha,\alpha} = -q\,. \qquad (2.4.14)$$

თუ ახლა x_β, $\beta = 1,2$, ღერძების მიმართ მომენტებს ნულს გავუტოლებთ, მივიღებთ, რომ

$$\left(M_\alpha + \frac{\partial M_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_{\underline{\alpha}}\right)dx_\beta - M_\alpha dx_\beta + \left(H + \frac{\partial H}{\partial x_\beta}dx_{\underline{\beta}}\right)dx_\alpha$$

$$-Hdx_\alpha - \left(Q_\alpha + \underline{\frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_\alpha}dx_{\underline{\alpha}}\,dx_\beta dx_\alpha}\right) + Q_\beta dx_{\underline{\alpha}}\frac{dx_\alpha}{2}$$

$$-\underline{\left(Q_\beta + \frac{\partial Q_\beta}{\partial x_\beta}dx_{\underline{\beta}}\right)dx_{\underline{\alpha}}\frac{dx_\alpha}{2}} - \underline{qdx_\alpha dx_\beta \cdot \frac{dx_\alpha}{2}} = 0,$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha,\beta = 1,2\,.$$

საიდანაც მესამე რიგის უსასრულო მცირეების (ისინი ხაზგასმულია) უგულებელყოფით ანალოგიურად გამომდინარეობს, რომ

$$M_{\underline{\alpha},\alpha} + H_{,\beta} = Q_{\alpha}, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha,\beta = 1,2 \,. \qquad (2.4.15)$$

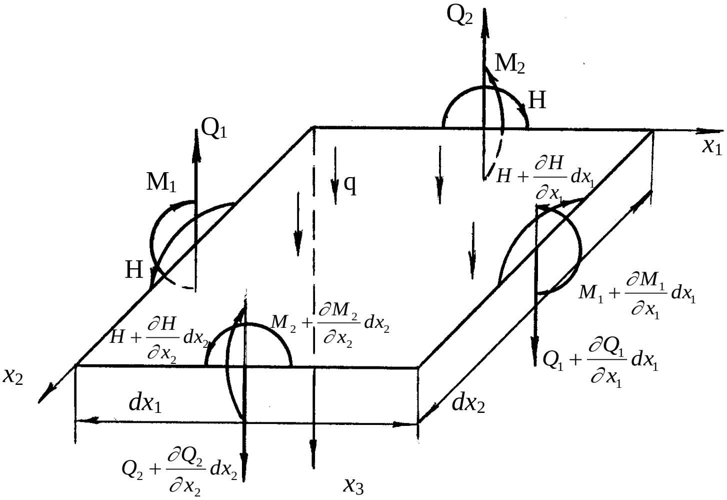
თუ (2.4.15)-ს ჩავსვამთ (2.4.14)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\left(M_{1.1} + H_{,2}\right)_{,1} + \left(M_{2,2} + H_{,1}\right)_{,2} = -q \,. \qquad (2.4.16)$$

ხოლო ამ უკანასკნელში M_{α}-სა და H-ის (2.4.11) და (2.4.13) მნიშვნელობების ჩასმა გვაძლევს

$$\Delta \Delta u_3 = \frac{q}{D} \qquad (2.4.17)$$

განტოლებას, რომელსაც *სოფი ჟერმენ-ლაგრანჟის განტოლება* ეწოდება.



ნახ. 2.4.2

შევნიშნოთ, რომ (2.4.14) და (2.4.15) ფორმულები შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის (1.15.1) განტოლებების ინტეგრებითაც (იხ. ქვემოთ (2.5.3) და (2.5.4)).

(2.4.16) განტოლება გამოიყენება *ცვლადი სისქის ფირფიტის,* რომელიც სიმეტრიულ პრიზმულ გარსს წარმოადგენს (იხ. ქვემოთ §2.6.), შემთხვევაშიც, თუ სისქე $2h$ მკვეთრად არ იცვლება (იხ. [58], გვ. 199).

თუ (2.4.11)-სა და (2.4.13)-ს, რომლებიც ასევე სამართლიანია არამკვეთრად ცვლადი სისქის ფირფიტებისათვის (ე.ი. $D(x_1, x_2)$ ფუნქციაა) ჩავსვამთ (2.4.16)-ში, მივიღებთ ცვლადი სიხისტის, რომელიც შეიძლება დრეკადი მუდმივების ცვალებადობითაც იყოს გამოწვეული, შემთხვევაში ღუნვის შემდეგ განტოლებას:

$$\begin{gathered}\left(Du_{3,11}\right)_{,11} + \left(Du_{3,22}\right)_{,22} + \nu\left(Du_{3,22}\right)_{,11} \\ + \nu\left(Du_{3,11}\right)_{,22} + 2\left[(1-\nu)Du_{3,12}\right]_{,12} = q.\end{gathered} \tag{2.4.18}$$

ღუნვის დინამიკის განტოლების მისაღებად, დალამბერის პრინციპის თანახმად, q დატვირთვას უნდა დაემატოს ინერციის ძალის გეგმილი x_3 ღერძზე. ეს იმით აიხსნება, რომ ერთი მხრივ, მოცულობითი ძალის x_3 ღერძზე გეგმილი რომ არ უგულვებელგვეყო, ის სწორედ q–ს დაემატებოდა, ხოლო მეორე მხრივ, ინერციის ძალა მოცულობით ძალებს განეკუთვნება (იხ. აგრეთვე ქვემოთ (2.6.4)).

2.4.5. ZiriTadi amocanebi firfitisaTvis

ფირფიტების თეორიაში ჩვენ ვეძებთ (2.4.18) (კერძოდ 2.4.17) განტოლების ამონახსნს (ე.ი. $u_3 \in C^4$), რომელიც შემდეგი სამი ძირითადი სასაზღვრო პირობიდან ერთ-ერთს აკმაყოფილებს:

1. *საზღვარზე მოცემულია* u_3 *ჩაღუნვა და შუა სიბრტყის შემობრუნების კუთხე* (დირიხლეს ამოცანა). ეს არის გეომეტრიული სასაზღვრო პირობა. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია (ნულოვანია), *საზღვარს ჩამაგრებულს* უწოდებენ.

2. *საზღვარზე მოცემულია ჩაღუნვა და მღუნავი მომენტი.* ეს არის ფიზიკური სასაზღვრო პირობა. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია, ამბობენ, რომ *საზღვარი სახსრულადაა დაყრდნობილი.*

3. *საზღვარზე მოცემულია გადამჭრელი ძალა, მღუნავი და მგრეხავი მომენტები* (ნეიმანის ამოცანა). ეს სასაზღვრო პირობაც ფიზიკურია. როცა სასაზღვრო პირობები ერთგვაროვანია, ამბობენ, რომ *საზღვარი თავისუფალია.*

თუ სიცხადისათვის ვიგულისხმებთ, რომ საზღვრის ნორმალი x_2 ღერძს ემთხვევა, ზემოთ ჩამოთვლილი ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები მათემატიკურად შესაბამისად ასე ჩაიწერება:

1. $u_3 = 0, \quad u_{3,2} = 0$ (ამ შემთხვევაში, (2.4.13)-ის ძალით $H = 0$);
2. $u_3 = 0, \quad M_2 = 0$;
3. $Q_2 = 0, \quad M_2 = 0, \quad H = 0$.

სამგანზომილებიან მოდელში მათ (ერთგვაროვანი პირობების შემთხვევაში) შესაბამისად ეთანადება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

1. $u_i = 0, \quad i = 1,2,3$;
2. $u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad X_{22} = 0$;
3. $X_{23} = 0, \; X_{22} = 0, \; X_{21} = 0$.

მესამე ამოცანის შემთხვევაში მეოთხე რიგის (2.4.18) (კერძოდ, 2.4.17) ელიფსური განტოლებისათვის გვაქვს სამი სასაზღვრო პირობა, რაც სასაზღვრო ამოცანას არაკორექტულს ხდის. ამიტომ გარკვეულ მოსაზრებებზე დაყრდნობით (იხ. ნახ. 2.4.3), Q_2-სა და H-ის ნაცვლად საზღვარზე სახელდება ე.წ. *განზოგადებული გადამჭრელი ძალა*

$$\tilde{Q}_2 := Q_2 + \frac{\partial H}{\partial x_1}$$

და ამ უკანასკნელ შემთხვევაში გვექნება ორი სასაზღვრო პირო-ბა.

დასასრულს შევნიშნავთ, რომ ფირფიტების ღუნვის კლასი-კურ თეორიაში არ სრულდება ჰუკის კანონი x_3 ღერძის გას-წვრივ და სასაზღვრო პირობები კმაყოფილდება ინტეგრალურად. მართლაც, ჩვენს შემთხვევაში პირველი ჰიპოთეზის თანახმად $e_{33}=0$ და ამდენად x_3 ღერძის გასწვრივ ჰუკის კანონი იღებს $u_{1},_{1}+u_{2},_{2}=0$ სახეს. საიდანაც, (2.4.1)-ის თანახმად გამომდინა-რეობს, რომ $\Delta_2 u_3=0$, რაც, საზოგადოდ, არ სრულდება, რად-გან u_3 აკმაყოფილებს (2.4.17) განტოლებას და ამდენად, საზო-გადოდ, ის ჰარმონიული ფუნქცია არაა.

უფრო დეტალურად ფირფიტების ღუნვის კლასიკურ თეო-რიას შეიძლება გავეცნოთ [55]-სა და [58]-ში.

ზოგად შემთხვევაში, როცა საზღვრის ნორმალი $\vec{n}$-ია, კირ-ხჰოფ-ლიავის მოდელის ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$1.\ u_3=0,\quad \frac{\partial u_3}{\partial n}=0;$$

$$2.\ u_3=0,\quad M_n=0;$$

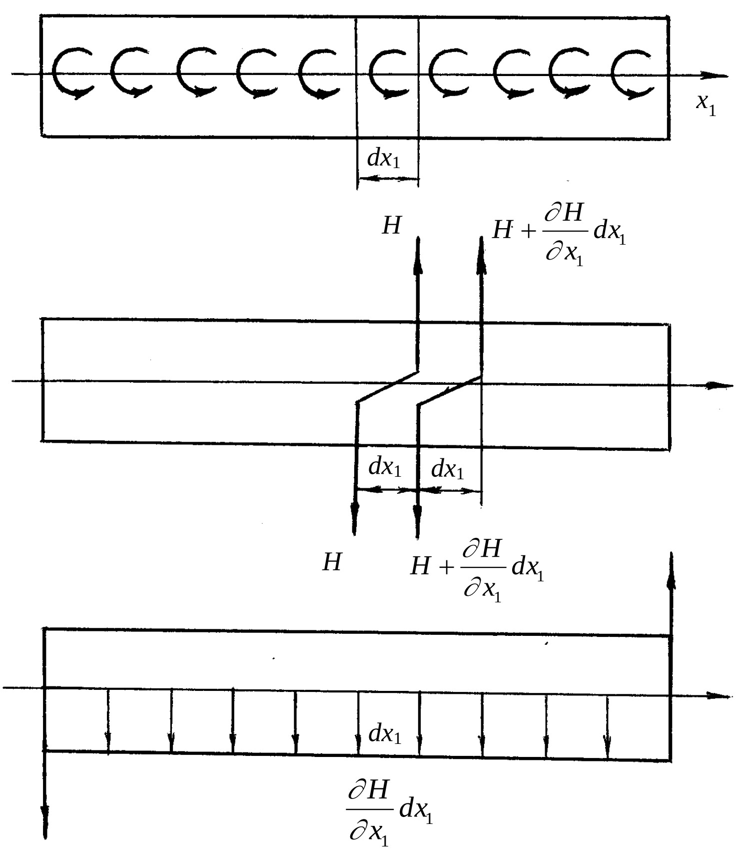
$$3.\ M_n=0,\ \tilde{Q}_n:=Q_n+\frac{\partial M_{nt}}{\partial t},$$

რომელთაც სამგანზომილებიანი მოდელის შემდეგი სასაზღვრო პირობები შეესაბამება:

$$1.\ u_i=0,\quad i=1,2,3;$$

$$2.\ X_{nn}=0,\quad u_t=0,\quad u_3=0;$$

$$3.\ X_{nn}=0,\quad X_{nt}=0,\quad X_{n3}=0.$$



ნახ. 2.4.3

კირხჰოფ-ლიავის მოდელში განიხილავენ აგრეთვე ე.წ. სრიალა ჩამაგრების

$$4.\quad \frac{\partial u_3}{\partial n}=0, \quad \tilde{Q}_n=0,$$

სასაზღვრო პირობებს, რომლებსაც სამგანზომილებიან მოდელში შეესაბამება

4. $u_n = 0, \quad X_{nt} = 0, \quad X_{n3} = 0$

სასაზღვრო პირობები.

განვიხილოთ პირველი სასაზღვრო პირობები. ვთქვათ, $u_i = 0$, $i = 1,2,3$, $(x_1, x_2) \in \partial\omega$, $|x_3| < h$, მაშინ თუ გავიხსენებთ იმას, რომ u_n-ით და u_t-თი აღნიშნულია გადაადგილების ვექტორის მდგენელები (კომპონენტები) $\partial\omega$-ზე გამავალი ცილინდრული ზედაპირისადმი (საზღვრისადმი) $\vec{n}$ ნორმალისა და Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელური $\vec{t}$ მხების მიმართულებებით, დავასკვნით, რომ ერთი მხრივ, $(2.4.2)$-ის თანახმად,

$$u_n = u_\alpha n_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} n_\alpha = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial n},$$

$$u_t = u_\alpha t_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} t_\alpha = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial t},$$

და, ამდენად,

$$u_n = 0, \ u_t = 0 \ \text{ და } \ x_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \ x_3 \frac{\partial u_3}{\partial t} = 0, \text{ როცა}$$

$$(x_1, x_2) \in \partial\omega, \ |x_3| \le h.$$

საიდანაც იმის გათვალისწინებით, რომ კირხჰოფ-ლიავის მოდელში u_3 არ არის დამოკიდებული x_3-ზე, მივიღებთ, რომ

$$\left.\frac{\partial u_3}{\partial n}\right|_{\partial\omega} = 0.$$

მეორე მხრივ კი

$$u_3\big|_{\partial\omega} = 0.$$

მეორე, მესამე და მეოთხე სასაზღვრო პირობების შემთხვევა ნათელია, რადგან იქიდან, რომ

$$X_{nn}=0,\ \ X_{nt}=0 \ \text{და}\ \ X_{n3}=0,\ \text{როცა}\ \left(x_1,x_2\right)\in\partial\omega,$$
$$\left|x_3\right|<h,$$

შესაბამისად გამომდინარეობს, რომ

$$M_n=0,\ \ M_{nt}=0 \ \text{და}\ \ Q_n=0,\ \text{როცა}\ \left(x_1,x_2\right)\in\partial\omega,$$

ხოლო, როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ,

$$u_n=0,\ \text{როცა}\ \left(x_1,x_2\right)\in\partial\omega,\ \left|x_3\right|<h,$$

ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial u_3}{\partial n}=0,\ \text{როცა}\ \left(x_1,x_2\right)\in\partial\omega.$$

დინამიკის ამოცანების განხილვისას, სასაზღვრო პირობებს საწყისი პირობებიც უნდა დაემატოს.

2.4.6. firfitis Runva drekad fuZeze

დრეკადი ფუძე ეწოდება დრეკად დეფორმირებად სხეულს, რომელსაც მთელი თავისი ქვედა პირითი ზედაპირით ეყრდნობა ფირფიტა ან ღერო (იხ. ქვემოთ ნაწ. III).

ვინკლერის[*)] ექსპერიმენტული ჰიპოთეზის თანახმად დრეკად ფუძეზე ფირფიტის ან ღეროს დაწოლით გამოწვეული *დრეკადი ფუძის რეაქციის R ინტენსიურობა* ქვედა ფუძის ჩაღუნვის (ე.ი. კირხჰოფ-ლიავის მოდელის შემთხვევაში შუა სიბრტყის u_3 ჩაღუნვის, რადგან ის x_3-ზე არ არის დამოკიდებული) პროპორციულია

$$R=ku_3,$$

სადაც k *დრეკადი ფუძის მოდულია*, გათვლილი ფართის ერთეულზე, როცა ჩაღუნვა სიგრძის ერთეულის ტოლია. k, რომ-

*) ე. ვინკლერი (1835-1888).

ლის ერთეულია $\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^3}$, დრეკადი ფუძის მასალაზეა დამოკიდებული და დგინდება ექსპერიმენტით (იხ. [58], გვ. 290).

თუ q ფირფიტის დატვირთვის ინტენსიურობაა, მაშინ, ცხადია, დრეკადი ფუძის რეაქციის გათვალისწინებით ფირფიტაზე მოქმედი მთლიანი დატვირთვის ინტენსიურობა

$$\left(q - ku_3\right)\text{-ის} \qquad (2.4.19)$$

ტოლია. ამდენად დრეკად ფუძეზე მდებარე ფირფიტის ღუნვის განტოლების მისაღებად (2.4.17) და (2.4.18) განტოლებებში q უნდა შევცვალოთ (2.4.19)-ით:

$$\Delta\Delta u_3 = \frac{q - ku_3}{D}$$

და

$$\left(Du_{3,11}\right)_{,11} + \left(Du_{3,22}\right)_{,22} + \nu\left(Du_{3,11}\right)_{,22} + \nu\left(Du_{3,22}\right)_{,11} + 2\left[(1-\nu)Du_{3,12}\right]_{,12} = q - ku_3.$$

\$2.5. raisner-mindlinis modeli

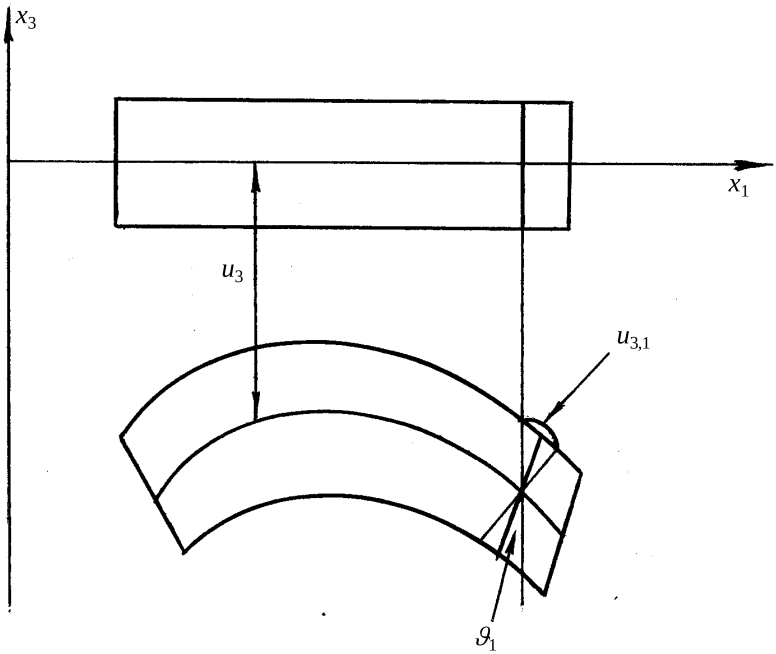
მოკლედ შევეხოთ *რაისნერ**)*-მინდლინის მოდელს* [11], [29], [31]. კირხჰოფ-ლიავის მოდელისგან განსხვავებით ეს მოდელი საშუალებას იძლევა, ფირფიტის საზღვარზე დასახელდეს სამივე ფიზიკური სიდიდე: Q_n გადამჭრელი ძალა, M_n მღუნავი მომენტი და M_{nt} მგრეხავი მომენტი. რაისნერ-მინდლინის მოდელი ემყარება შემდეგ სამ ძირითად ჰიპოთეზას:

1. *წრფივი ნორმალების ჰიპოთეზა*: დეფორმაციამდე ფირფიტის შუა სიბრტყისადმი ნორმალური წრფივი ელემენტი არ იცვლის სიგრძეს და წრფივი რჩება (იხ. ნახ. 2.5.1).

---

*) ე. რაისნერი (1913-1996).

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ $e_{33}=0$.



ნახ. 2.5.1

2. *შუა სიბრტყის გაუჭიმვადობის ჰიპოთეზა*: შუა სიბრტყე არ მუშაობს გაჭიმვა-კუმშვაზე, იგი მხოლოდ იღუნება, ე.ი. შუა სიბრტყეში არ გვაქვს გაჭიმვის, კუმშვის და ძვრის დეფორმაციები.

მათემატიკურად ეს ასე ჩაიწერება:

$$u_\alpha(x_1,x_2,0)=0, \quad \alpha=1,2 .$$

3. *შუა სიბრტყისადმი პარალელურ ფენებს შორის წნევის არარსებობის ჰიპოთეზა*: აღნიშნული წნევის სიმცირის გამო ფირფიტის ფენებს შორის წნევა უგულებელყოფილია.

მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ $X_{33}\cong 0$.

როგორც ვხედავთ, განსხვავება რაისნერ-მინდლინისა და კირხჰოფ-ლიავის ჰიპოთეზებს შორის მხოლოდ პირველ ჰიპოთეზებშია და იმაში გამოიხატება, რომ თუ კირხჰოფ-ლიავის მოდელის შემთხვევაში დეფორმაციამდე შუა სიბრტყისადმი ნორმალური ელემენტი დეფორმაციის შემდეგ შუა ზედაპირისადმი ნორმალური რჩება, რაისნერ-მინდლინის მოდელში ეს საზოგადოდ ასე არაა, ე.ი. ეს უკანასკნელი მოდელი უშვებს განივი ძვრის დეფორმაციას. ამიტომ ზოგჯერ რაისნერ-მინდლინის მოდელს უწოდებენ *ფირფიტას განივი ძვრის დეფორმაციით.*

ახლა ისე მოვიქცეთ, როგორც (2.4.2) ფორმულის გამოყვანის დროს, იმის გათვალისწინებით, რომ ახლა

$$e_{\alpha 3}=\frac{1}{2}\left(u_{\alpha},_{3}+u_{3},_{\alpha}\right)=\frac{1}{2}\varphi_{\alpha}\left(x_1,x_2\right)\not\equiv 0,\quad \alpha=1,2,$$

სადაც φ_{α} უცნობი ფუნქციებია, რომლებიც ძვრის კუთხეების ტოლია (იხ. §1.8-ის ბოლო ნაწილი). მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u_{\alpha}=-x_3\theta_{\alpha}\left(x_1,x_2\right),\quad \alpha=1,2, \qquad (2.5.1)$$

სადაც

$$\theta_{\alpha}\left(x_1,x_2\right)=u_3,_{\alpha}-\varphi_{\alpha}\left(x_1,x_2\right),\ \ \alpha=1,2,$$

წარმოადგენს $Ox_{\alpha}x_3,\quad \alpha=1,2$, სიბრტყეში შემობრუნების კუთხეს (როტაციას), რომელიც ფირფიტის ღუნვითაა გამოწვეული (იხ. ნახ. 2.5.1). რაისნერ-მინდლინის მოდელში $\vec{\theta}=:\left(\theta_1,\theta_2\right)^T$ როტაცია, საზოგადოდ, არ არის დამოკიდებული u_3 ჩაღუნვაზე. კირხჰოფ-ლიავის მოდელში კი (შეადარე (2.4.2)-ს) $\varphi_{\alpha}=0$ და, ამდენად,

$$\theta_{\alpha}=u_{3,\alpha},\quad \alpha=1,2.$$

(1.6.3) კინემატიკური ფორმულები, (2.5.1)-ის ძალით, მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$e_{\alpha\underline{\alpha}} = -x_3\theta_{\alpha,\alpha}, \quad e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\left(-\theta_\alpha + u_{3,\alpha}\right), \quad \alpha = 1,2,$$
$$e_{12} = -\frac{x_3}{2}\left(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}\right), \quad e_{33} = 0. \tag{2.5.2}$$

(2.5.2) ფორმულებს *რაისნერ-მინდლინის კინემატიკური ფორმულები* ეწოდებათ.

(1.15.1) განტოლებებიდან პირველი ორი გავამრავლოთ x_3-ზე, ვაინტეგროთ სამივე განტოლება $-h$-დან $+h$-მდე x_3-ის მიმართ, გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრება და გავითვალისწინოთ (2.4.11)-(2.4.13) აღნიშვნები, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1,2, \tag{2.5.3}$$

$$Q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0, \tag{2.5.4}$$

სადაც

$$q_\alpha := \int_{-h}^{+h} x_3\Phi_\alpha dx_3 + h\left[X_{\alpha 3}(x_1, x_2, h) - X_{\alpha 3}(x_1, x_2, -h)\right], \ \alpha = 1,2,$$

$$q_3 := \int_{-h}^{+h} \Phi_3 dx_3 + X_{33}(x_1, x_2, h) - X_{33}(x_1, x_2, -h).$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ადვილი მისახვედრია, რომ ამავე გზით შეიძლებოდა მიგვეღო (2.4.15) და (2.4.14). მართლაც, თუ $\Phi_\alpha = 0$ და $q_\alpha = 0$, $\alpha = 1,2$, ისინი გამომდინარეობენ შესაბამისად (2.5.3) და (2.5.4)-დან. პირიქით, ზემოაღნიშნულ პირობებში (2.5.3) და (2.5.4) შეიძლება მივიღოთ ისე როგორც (2.4.15) და (2.4.14) მივიღეთ §2.4-ში.

თუ (2.5.3)-დან განვსაზღვრავთ Q_α-ს და ჩავსვამთ (2.5.4)-ში, მივიღებთ, რომ

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + q_{\alpha,\alpha} + q_3 = 0.$$

თუ $2h$ სისქე მკვეთრად არ იცვლება, უკანასკნელი განტოლება და (2.5.1)-(2.5.4) დამოკიდებულებები, როცა $\Phi_\alpha = 0$ და $q_\alpha = 0$, გამოყვანილი §2.4-ში გამოყენებული მეთოდით, გამოდგება ცვლადი სისქის ფირფიტებისთვისაც. შევნიშნოთ, რომ ცვლადი სისქის ფირფიტის შემთხვევაში (1.15.1) წონასწორობის განტოლებებიდან ინტეგრების მეთოდით (2.5.3), (2.5.4) არ მიიღება, რაც ცხადია ი.ვეკუას მეთოდით ცვლადი სისქის ფირფიტებისთვის აგებული იერარქიული მოდელებიდან (იხ. ქვემოთ §2.6), რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერად ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტებისთვის.

რამდენადაც კირხჰოფ-ლიავისა და რაისნერ-მინდლინის მესამე ჰიპოთეზები ერთმანეთს ემთხვევა, ამიტომ რაისნერ-მინდლინის მოდელის შემთხვევაშიც სამართლიანია (2.4.4). თუ (2.4.4)-ში შევიტანთ (2.5.1)-ს, მივიღებთ, რომ

$$-x_3\theta_{\alpha,\alpha} = e_{\alpha\alpha} = e_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{E}\Theta_2,$$

ე.ი.

$$\Theta_2 = -\frac{E}{1-\nu}x_3\theta_{\alpha,\alpha}$$

და

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E}X_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}x_3\theta_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta},$$

საიდანაც

$$e_{\alpha\underline{\alpha}} = \frac{1+\nu}{E}X_{\alpha\underline{\alpha}} + \frac{\nu}{1-\nu}x_3\theta_{\gamma,\gamma}.$$

აქედან, რადგანაც $\theta_{\gamma,\gamma} = \theta_{\alpha,\underline{\alpha}} + \theta_{\beta,\underline{\beta}}$ $(\alpha \neq \beta)$, (2.5.1)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$-X_{\alpha\underline{\alpha}}=\frac{E}{1+\nu}x_3\theta_{\alpha,\underline{\alpha}}+\frac{E\nu}{1-\nu^2}x_3\theta_{\gamma,\gamma}$$

$$=\frac{E}{1-\nu^2}x_3\left[(1-\nu)\theta_{\alpha,\underline{\alpha}}+\nu\theta_{\alpha,\underline{\alpha}}+\nu\theta_{\beta,\underline{\beta}}\right],$$

ე.ი.

$$X_{\alpha\underline{\alpha}}=-\frac{E}{1-\nu^2}x_3\left(\theta_{\alpha,\underline{\alpha}}+\nu\theta_{\beta,\underline{\beta}}\right),\quad \alpha\neq\beta,\ \alpha,\beta=1,2. \quad (2.5.5)$$

(2.4.4) და (2.5.2)-დან ცხადია, რომ

$$X_{12}=-\frac{E}{2(1+\nu)}x_3\left(\theta_{1,2}+\theta_{2,1}\right). \quad (2.5.6)$$

ჰუკის (1.12.26) კანონიდან და (2.5.2)-დან კი გამომდინარეობს, რომ

$$X_{\alpha 3}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(-\theta_\alpha+u_{3,\alpha}\right),\quad \alpha=1,2. \quad (2.5.7)$$

თუ (2.4.11)-(2.4.13)-ის უკანასკნელის წინა ტოლობებში შესაბამისად ჩავსვამთ (2.5.5), (2.5.7), (2.5.6)-ს, მივიღებთ, რომ

$$M_\alpha=M_{\alpha\underline{\alpha}}=-D\left(\theta_{\alpha,\underline{\alpha}}+\nu\theta_{\beta,\underline{\beta}}\right),\quad \alpha\neq\beta,\quad \alpha=1,2, \quad (2.5.8)$$

$$Q_\alpha=\frac{Eh}{1+\nu}\left(-\theta_\alpha+u_{3,\alpha}\right),\quad \alpha=1,2, \quad (2.5.9)$$

$$H=M_{12}=M_{21}=-\frac{1}{2}D(1-\nu)\left(\theta_{1,2}+\theta_{2,1}\right). \quad (2.5.10)$$

ზოგჯერ (2.5.9)-ის მარჯვენა მხარე გამრავლებულია ე.წ. *ძვრის კორექტურის* $\tilde{k}$ *მამრავლზე.* $\tilde{k}$-ს *ძვრის კოეფიციენტსაც* უწოდებენ. ამ შემთხვევაში ძირითადად თვლიან, რომ $\tilde{k}=\frac{5}{6}$ ან $\tilde{k}=\frac{\pi^2}{12}$.

ამოვხსნათ (2.5.9) θ_α-ს მიმართ

$$\theta_\alpha = u_{3,\alpha} - \frac{1+\nu}{Eh} Q_\alpha .$$

მიღებული სიდიდე ჩავსვათ (2.5.8)-ში და (2.5.10)-ში, მაშინ ω არეში

$$M_\alpha = -D(u_{3,\alpha\underline{\alpha}} + \nu u_{3,\beta\underline{\beta}})$$

$$+ D\left[\left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_\alpha\right)_{,\underline{\alpha}} + \nu\left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_\beta\right)_{,\underline{\beta}}\right], \ \alpha \neq \beta, \ \alpha = 1,2, \qquad (2.5.11)$$

$$H = -D(1-\nu)u_{3,12}$$

$$+ \frac{1}{2} D(1-\nu)\left[\left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_1\right)_{,2} + \left(\frac{1+\nu}{Eh} Q_2\right)_{,1}\right] . \qquad (2.5.12)$$

ვიგულისხმოთ, რომ D, E, ν და h მუდმივებია. (2.5.3)-ში ჩავსვათ (2.5.11), (2.5.12) და მიღებული გამოსახულებიდან, (2.5.4)-ისა და $\frac{1}{1-\nu} - 1 = \frac{\nu}{1-\nu}$-ს გათვალისწინებით, განვსაზღვროთ Q_1 ω არეში:

$$Q_1 = -\left[D\left(u_{3,11} + \nu u_{3,22}\right)\right]_{,1} + \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\left(Q_{1,1} + \nu Q_{2,2}\right)_{,1}$$

$$-D(1-\nu)u_{3,122} + \frac{h^2}{3}\left(Q_{1,2} + Q_{2,1}\right)_{,2} + q_1 = -D\left(\Delta u_3\right)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_1$$

$$+ \frac{h^2}{3(1-\nu)} \nu Q_{1,11} + \frac{h^2}{3(1-\nu)} Q_{1,11} + \frac{2h^2}{3(1-\nu)} \nu Q_{2,21} + \frac{h^2}{3} Q_{2,12} + q_1$$

$$= -D\left(\Delta u_3\right)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_1 + \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)} Q_{1,11} + \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)} Q_{2,21} + q_1$$

$$= -D\left(\Delta u_3\right)_{,1} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_1 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)} q_{3,1} + q_1 . \qquad (2.5.13)$$

ანალოგიურად,

$$Q_2 = -D\left(\Delta u_3\right)_{,2} + \frac{h^2}{3}\Delta Q_2 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)} q_{3,2} + q_2 \ . \quad (2.5.14)$$

$(2.5.13)$-ის და $(2.5.14)$-ის $(2.5.4)$-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$q_3 - D\Delta\Delta u_3 - \frac{h^2}{3}\Delta q_3 - \frac{h^2(1+\nu)}{3(1-\nu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha} = 0 .$$

საიდანაც, $(1.12.18)$-ის თანახმად,

$$D\Delta\Delta u_3 = q_3 - \frac{2h^2}{3(1-\nu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha}$$

$$= q_3 - \frac{4h^2(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}\Delta q_3 + q_{\alpha,\alpha} .$$

აქედან, თუ დავუშვებთ, რომ ფირფიტაზე მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური, ამასთან ჰარმონიული დატვირთვა, ე.ი. $q_\alpha = 0$, $\alpha = 1,2$, და $\Delta q_3 = 0$, მივიღებთ ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის $(2.4.17)$ განტოლებას.

$(2.5.3)$, $(2.5.4)$, $(2.5.8)$-$(2.5.10)$ დამოკიდებულებები შეიცავენ შემდეგ რვა უცნობ სიდიდეს: u_3, θ_α, Q_α, $\alpha = 1,2$; $M_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta = 1,2$. ჩავსვათ $(2.5.8)$-$(2.5.10)$ გამოსახულებები $(2.5.3)$, $(2.5.4)$-ში:

$$\left[D\left(\theta_{1,1}+\nu\theta_{2,2}\right)\right]_{,1}+\frac{1}{2}\left[D(1-\nu)\left(\theta_{1,2}+\theta_{2,1}\right)\right]_{,2}$$

$$-\frac{Eh}{1+\nu}\left(\theta_1-u_{3,1}\right)-q_1=0,$$

$$\left[D\left(\theta_{2,2}+\nu\theta_{1,1}\right)\right]_{,2}+\frac{1}{2}\left[D(1-\nu)\left(\theta_{1,2}+\theta_{2,1}\right)\right]_{,1} \qquad (2.5.15)$$

$$-\frac{Eh}{1+\nu}\left(\theta_2-u_{3,2}\right)-q_2=0,$$

$$\left[\frac{Eh}{1+\nu}\left(\theta_\alpha-u_{3,\alpha}\right)\right]_{,\alpha}-q_3=0. \qquad (2.5.16)$$

(2.5.15), (2.5.16) წარმოადგენენ ω არეში მეექვსე რიგის*) ელიფსურ სიტემას θ_1, θ_2 და u_3 უცნობების მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ (2.5.3), (2.5.4), (2.5.8)-(2.5.10) და (2.5.15), (2.5.16) დამოკიდებულებები გამოყვანილია, საზოგადოდ, ცვლადი, ე.ი. $\left(x_1,x_2\right)$-ზე დამოკიდებული $D, E,$ ν და h-სთვის.

(1.12.9) ჰუკის კანონის ორივე მხარე, როცა $i=\alpha$, $j=\beta$, გავამრავლოთ x_3-ზე, მიღებული ტოლობები და (1.12.9), როცა $i=\alpha$, $j=3$, ვაინტეგროთ $-h$-დან $+h$-მდე x_3-ის მიმართ და გავითვალისწინოთ (2.5.2), მივიღებთ შემდეგ კონსტიტუტივურ დამოკიდებულებებს:

$$M_{\alpha\beta}=-\frac{2}{3}h^3\left[\lambda\theta_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\mu\left(\theta_{\beta,\alpha}+\theta_{\alpha,\beta}\right)\right],\ \alpha,\beta=1,2, \qquad (2.5.17)$$

$$Q_\alpha=2\mu h\left(u_{3,\alpha}-\theta_\alpha\right),\ \alpha=1,2.$$

(2.5.17)-ის (2.5.3)-სა და (2.5.4)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ, რომ

---

*) ე.ი. მეორე რიგის სამი განტოლებისაგან შემდგარ ელიფსურ სისტემას.

$$\frac{2}{3}\left\{h^3\left[\lambda\theta_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}+\mu\left(\theta_{\beta,\alpha}+\theta_{\alpha,\beta}\right)\right]\right\}_{,\beta}+2\mu h\left(u_{3,\alpha}-\theta_\alpha\right)-q_\alpha=0,$$

$$\alpha=1,2,$$

$$\left[2\mu h\left(u_{3,\alpha}-\theta_\alpha\right)\right]_{,\alpha}+q_3=0.$$

(1.12.18)-ის ძალით, ეს სისტემა ემთხვევა (2.5.15), (2.5.16) სისტემას. თუ λ, μ და h მუდმივებია, მაშინ ეს სისტემა შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს (იხ. [11], გვ. 3):

$$(Av)\left(x_1,x_2\right)=q\left(x_1,x_2\right),\quad \left(x_1,x_2\right)\in\omega, \qquad (2.5.18)$$

სადაც ω ფირფიტის პროექციაა $x_3=0$ სიბრტყეზე, A მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორია შემდეგი ელემენტებით

$$A_{\underline{\alpha\alpha}}:=-\frac{2}{3}h^3\mu\Delta-\frac{2}{3}h^3(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}-2\mu h,\quad \alpha=1,2,$$

$$A_{33}:=-2\mu h\Delta,\quad \Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$A_{12}=A_{21}:=-\frac{2}{3}h^3(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$A_{\alpha 3}=-A_{3\alpha}:=2\mu h\partial_\alpha,\quad \alpha=1,2,$$

$$v:=\left(\theta_1,\theta_2,u_3\right)^T,\quad q:=\left(q_1,q_2,q_3\right)^T.$$

კირხჰოფ-ლიავის მოდელისაგან განსხვავებით უკვე არ არის საჭირო განზოგადებული გადამჭრელი ძალის ხელოვნური ცნების შემოღება და საზღვარზე შეიძლება სამი ბუნებრივი პირობის დასმა, რამდენადაც (2.5.18) ელიფსური სისტემა მე-6 რიგისაა.

1. *ხისტად ჩამაგრებული ნაპირი ანუ დირიხლეს ამოცანა.* ამ ნაპირს არც გადაადგილება და არც მობრუნება არ შეუძლია:

$$u_3=0,\quad \theta_n=0,\quad \theta_t=0. \qquad (2.5.19)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.19) შეესაბამება ერთგვაროვან (1.15.6) პირობებს.

2. *რბილად ჩამაგრებული ნაპირი.* ხისტად ჩამაგრებული ნაპირისაგან განსხვავებით ნაპირს შეუძლია ტანგენციალური (მხები) მიმართულებით (ე.ი. ნორმალის გარშემო) მობრუნება. ამდენად, მგრეხავი მომენტი უნდა იღებდეს ნულოვან მნიშვნელობებს:

$$u_3 = 0, \quad \theta_n = 0, \quad M_{nt} = 0. \qquad (2.5.20)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.20) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad u_n = 0, \quad X_{nt} = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

3. *ხისტად დაყრდნობილი ნაპირი.* ამ ნაპირს შეუძლია ნორმალური მიმართულებით (ე.ი. მხების გარშემო) მობრუნება. მადენად მღუნავი მომენტი უნდა იღებდეს ნულოვან მნიშვნელობებს:

$$u_3 = 0, \quad M_n = 0, \quad \theta_t = 0. \qquad (2.5.21)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.21) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad X_{nn} = 0, \quad u_t = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

4. *რბილად დაყრდნობილი ნაპირი.* ამ ნაპირს შეუძლია ნებისმიერად მობრუნება, მაგრამ არ შეუძლია გადაადგილება (რადგან ამ მოდელში $u_\alpha = 0, \quad \alpha = 1,2$, ყოველთვის):

$$u_3 = 0, \quad M_n = 0, \quad M_{nt} = 0. \qquad (2.5.22)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.22) პირობები შეესაბამება

$$u_3 = 0, \quad X_{nn} = 0, \quad X_{nt} = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

5. *თავისუფალი ნაპირი* ანუ *ნეიმანის ამოცანა*:

$$M_n = 0, \quad M_{nt} = 0, \quad Q_n = 0. \qquad (2.5.23)$$

სამგანზომილებიან მოდელში (2.5.23) პირობები შეესაბამება

$$X_{nn} = 0, \quad X_{nt} = 0, \quad X_{n3} = 0,$$

სასაზღვრო პირობებს.

ისე, როგორც ეს ვაჩვენეთ ქვეპარაგრაფ 2.4.5-ში, ცხადია მე-4 და მე-5 სასაზღვრო პირობების შესაბამისობა მითითებულ სამგანზომილებიან სასაზღვრო პირობებთან.

იქიდან, რომ $u_t = 0$ და $u_3 = 0$ ფირფიტის გვერდით ცილინდრულ ზედაპირზე, გამომდინარეობს, რომ ცილინდრული ზედაპირის მხებ სიბრტყეში შემობრუნებას ადგილი არ ექნება, რადგან ცილინდრულ ზედაპირზე არც ვერტიკალურად (x_3-ის პარალელურად) და არც მხები მიმართულებით ცილინდრული ზედაპირის წერტილები არ გადაადგილდება, ე.ი. $\theta_t = 0$. აქედან გამომდინარეობს მე-3 სასაზღვრო პირობების შესაბამისობა მითითებულ სამგანზომილებიან სასაზღვრო პირობებთან. ანალოგიურად, მე-2 სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში $u_n = 0$ და $u_3 = 0$ პირობების ფირფიტის გვერდით ცილინდრულ ზედაპირზე შესრულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{n}$ ნორმალზე და x_3 ღერძზე გამავალი სიბრტყით ცილინდრული ზედაპირის კვეთაზე მდებარე წერტილები არ გადაადგილდებიან აღნიშნულ სიბრტყეში. ამიტომ ამ სიბრტყეში საზღვარი ვერ მობრუნდება, ე.ი. $\theta_n = 0$.

პირველი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში (1.15.6) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარეობს (იხ. ქვეპარაგრაფი 2.4.5), რომ $u_n = 0$ და $u_t = 0$ სრულდება ფირფიტის ცილინდრულ საზღვარზე. ეს კი, იმის გათვალისწინებით, რომ $u_3 = 0$ ცილინდრულ საზღვარზე, გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ მე-2 და მე-3 სასაზღვრო პირობების შემთხვევის მსგავსად დავასკვნათ, რომ $\theta_n = 0$ და $\theta_t = 0$.

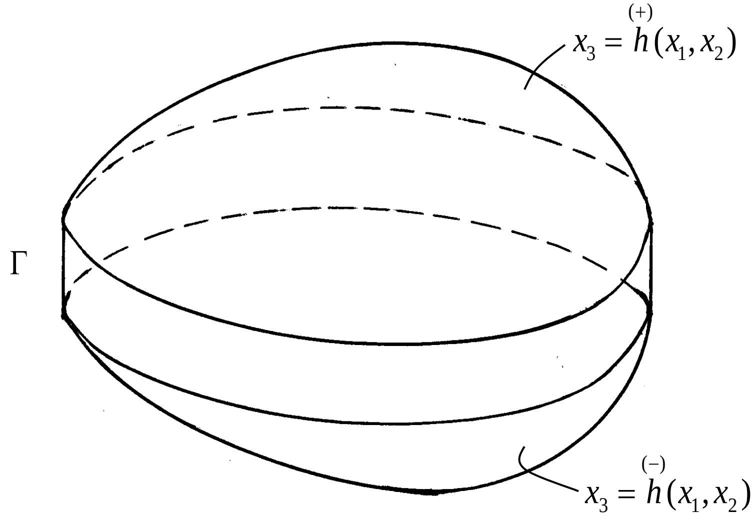
ცხადია, შეიძლება განხილულ იქნეს არაერთგვაროვანი (2.5.19)-(2.5.23) სასაზღვრო პირობებიც (ე.ი. სასაზღვრო პირობებში შემავალი სიდიდეები წინასწარ დასახელებულ, საზოგადოდ, არაიგივურად ნულოვანი ფუნქციების მნიშვნელობებს ემთხვევიან).

დინამიკის განტოლებების მისაღებად, სტატიკის განტოლებებში q_i–ის, $i=1,2,3$, უნდა დაემატოს ინერციის ძალის შესაბამისი კომპონენტები, ხოლო დინამიკის ამოცანების განხილვისას სასაზღვრო პირობებს საწყისი პირობებიც უნდა დაემატოს.

$2.6. prizmuli garsebis i.vekuas ierarqiuli modelebi

კირხჰოფ-ლიავის ჰიპოთეზებზე დაფუძნებულ ფირფიტების თეორიას, როგორც ეს §2.4-ში ვნახეთ, აქვს ის შინაგანი წინააღმდეგობა, რომ ძირითად განტოლებათა სისტემა არ არის თავსებადი ფიზიკურ სასაზღვრო პირობებთან. ამ წინააღმდეგობის თავიდან აცილების ერთი ვარიანტი წინა პარაგრაფში განვიხილეთ. ახლა გავეცნობით კიდევ ერთ ვარიანტს, რომელიც შემოგვთავაზა ი.ვეკუამ [34], [38-40]. ამასთან განვიხილავთ პრიზმულ გარსებს, რომლებიც ცვლადი სისქის ფირფიტებს, როგორც კერძო შემთხვევას, მოიცავენ.

სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია $z=\overset{(+)}{h}\left(x_1,x_2\right)$ და $z=\overset{(-)}{h}\left(x_1,x_2\right)$ ზედაპირებით, ხოლო გვერდიდან – Γ ცილინდრული ზედაპირით (იხ. ნახ. 2.6.1), რომლის მსახველი ვერტიკალური Ox_3 ღერძის პარალელურია, ეწოდება *პრიზმული გარსი.* სიმეტრიულ შემთხვევაში, ე.ი. როცა $\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)=-\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)$ პრიზმული გარსი წარმოადგენს ცვლადი სისქის ფირფიტას. $2h\left(x_1,x_2\right)=\overset{(+)}{h}\left(x_1,x_2\right)-\overset{(-)}{h}\left(x_1,x_2\right)\geq 0$ სიდიდეს ეწოდება პრიზმული *გარსის სისქე.*



ნახ. 2.6.1

პრიზმული გარსის გეგმილი Ox_1x_2 სიბრტყეზე აღვნიშნოთ ω-თი, მის საზღვარს *გარსის საზღვარი* ეწოდება.

ჯერ კიდევ კოშიმ გამოიყენა ფირფიტების შესწავლის დროს გადაადგილების, დეფორმაციების და ძაბვების ხარისხოვან მწკრივად გაშლის მეთოდი. ეს მიდგომა აქვთ სხვა ავტორებსაც. ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ მწკრივად გაშლას ეყრდნობა და რომელზეც ჩვენ შევჩერდებით, ი. ვეკუას ეკუთვნის.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი $f(x) \in C^2([-1,+1])$ ფუნქცია შეიძლება გაიშალოს მწკრივად ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ (იხ. დამატება 2):

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\left(r+\frac{1}{2}\right)f_r\,P_r(x),$$

სადაც

$$P_r(x):=\frac{1}{2^r r!}\frac{d^r\left(x^2-1\right)^r}{dx^r}$$

ლეჟანდრის პოლინომია, ხოლო

$$f_r:=\int_{-1}^{+1}f(x)P_r(x)dx$$

და მას ეწოდება f-ის r-*ური მომენტი* ლეჟანდრის პოლინომების მიმართ.

როცა [-1,+1]-ის ნაცვლად გვაქვს $\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]$ და $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ -ს ფიქსირებული $\left(x_1,x_2\right)$-სთვის x_3-ის მიმართ აქვს მეორე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები, ე.ი. $f\in C^2_{x_3}\left(\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]\right)$, ცხადია

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\sum_{r=0}^{\infty}a\left(r+\frac{1}{2}\right)f_r\left(x_1,x_2\right)P_r\left(ax_3-b\right),$$

სადაც მწკრივი თანაბრად კრებადია $\left[\overset{(-)}{h},\overset{(+)}{h}\right]$ სეგმენტზე და

$$a:=\frac{1}{h},\quad b:=\frac{\overset{(-)}{h}+\overset{(+)}{h}}{2h},$$

$$f_r\left(x_1,x_2\right):=\int_{\overset{(-)}{h}}^{\overset{(+)}{h}}f\left(x_1,x_2,x_3\right)P_r\left(ax_3-b\right)dx_3. \qquad (2.6.1)$$

თუ ვექტორი $\left(u_i, X_{ij}, e_{ij}\right) \in C^2_{x_3}\left(\left[\overset{(-)}{h}, \overset{(+)}{h}\right]\right)$, მაშინ ის შეიძლება $\left[\overset{(-)}{h}, \overset{(+)}{h}\right]$ სეგმენტზე თანაბრად კრებად შემდეგ მწკრივად გავშალოთ

$$\left(u_i, X_{ij}, e_{ij}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} a\left(r+\frac{1}{2}\right)\left(u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}\right) P_r\left(ax_3 - b\right).$$

*ვაიერშტრასის**) თეორემის თანახმად x_3-ის ნებისმიერ უწყვეტ ფუნქციას შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ x_3-ის მიმართ პოლინომებით. ამიტომ N-ის შერჩევით $\left(u_i, X_{ij}, e_{ij}\right)$-ს შეიძლება ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ x_3-ის მიმართ ლეჟანდრის პოლინომების შემდეგი ჯამით:

$$\left(u_i, X_{ij}, e_{ij}\right) \cong \sum_{r=0}^{N} a\left(r+\frac{1}{2}\right)\left(u_{ir}, X_{ijr}, e_{ijr}\right) P_r\left(ax_3 - b\right). \quad (2.6.2)$$

თუ (1.12.9) დამოკიდებულებების ორივე მხარეს გავამრავლებთ $P_r\left(ax_3 - b\right)$-ზე და ვაინტეგრებთ $\overset{(-)}{h}$-დან $\overset{(+)}{h}$-მდე x_3-ის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$X_{ijr}\left(x_1, x_2\right) = \lambda\theta_r\left(x_1, x_2\right)\delta_{ij} + 2\mu e_{ijr}\left(x_1, x_2\right), \; r = 0,1,\ldots, \quad (2.6.3)$$

რაც წარმოადგენს ჰუკის კანონს, გადაწერილს მომენტებისათვის.

ანალოგიურად შეიძლება მივიღოთ წონასწორობის შემდეგი განტოლებები მომენტებისათვის (იხ. [38])

$$X_{\alpha jr,\alpha} + \sum_{s=0}^{\infty} \overset{r}{a}_{is} X_{ijs} + \overset{r}{X}_j = \rho\frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \quad (2.6.4)$$

$$r = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,3,$$

---

*) კ.თ.ვ. ვაიერშტრასი (1815-1897).

სადაც

$$\overset{r}{a}_{\alpha s} := (2s+1)\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha} - (-1)^{r+s}\overset{(-)}{h}_{,,\alpha}}{2h}, \quad s \neq r;$$

$$\overset{r}{a}_{\alpha r} := r\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha} - \overset{(-)}{h}_{,\alpha}}{2h}, \qquad \overset{r}{a}_{3s} := -(2s+1)\frac{1-(-1)^{r+s}}{2h},$$

$$\overset{r}{X}_{j} = \overset{(+)}{X}_{3j} - \overset{(+)}{X}_{\alpha j}\overset{(+)}{h}_{,\alpha} + (-1)^{r}\left[-\overset{(-)}{X}_{3j} + \overset{(-)}{X}_{\alpha j}\overset{(-)}{h}_{,\alpha}\right] + \Phi_{jr}$$

$$= Q_{\overset{(+)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,1}\right)^{2}+\left(\overset{(+)}{h}_{,2}\right)^{2}} + (-1)^{r}Q_{\overset{(-)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(-)}{h}_{,1}\right)^{2}+\left(\overset{(-)}{h}_{,2}\right)^{2}} + \Phi_{jr},$$

$Q_{\overset{(+)}{n}j}$, $Q_{\overset{(-)}{n}j}$ შესაბამისად ზედა და ქვედა პირით ზედაპირებზე მოქმედი ზედაპირული ძალებია. $\overset{(+)}{n}$ და $\overset{(-)}{n}$ შესაბამისად ზედა და ქვედა პირითი ზედაპირების გარე (გარსის მიმართ) ნორმალებია. Φ_{jr} მოცულობითი ძალის კომპონენტების r-ური მომენტებია.

დეფორმაციის ტენზორის r-ური მომენტები ასე ჩაიწერება:

$$e_{ijr} = \frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}u_{js} + \frac{1}{2}\sum_{s=r}^{\infty}\overset{r}{b}_{is}u_{is} + \overset{r}{E}_{ij}, \qquad (2.6.5)$$

$$r = 0,1,2,..., \qquad i, j = 1,2,3,$$

სადაც

$$\overset{(r)}{E}_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{ir,j} + u_{jr,i}\right), \quad \overset{r}{b}_{\alpha\underline{r}} = -(r+1)\frac{\overset{(+)}{h}_{,\alpha} - \overset{(-)}{h}_{,\alpha}}{2h},$$

$$\overset{r}{b}_{3\underline{r}} = 0, \quad \overset{r}{b}_{js} = \begin{cases} 0, & s < r, \\ -\overset{r}{a}_{js}, & s > r. \end{cases}$$

(2.6.5) ჩავსვათ (2.6.3)-ში, ხოლო მიღებული – (2.6.4)-ში. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\mu\Delta u_{jr} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \overset{r}{E}}{\partial x_j} + \overset{r}{M}_j\left(u_{ir}\right) + \overset{r}{X}_j = \rho\frac{\partial^2 u_{jr}}{\partial t^2}, \text{ სადაც}$$

$$r = 0,1,\ldots, \; i = 1,2,3, \qquad (2.6.6)$$

$$\overset{r}{E} = \overset{r}{E}_{ii}.$$

$\overset{r}{M}_j$ წრფივი ოპერატორები დამოკიდებულია ფირფიტის სისქეზე და შეიცავენ მხოლოდ პირველი რიგის წარმოებულებს.

(2.6.6) ფაქტობრივად წარმოადგენს ლამეს განტოლებებს, ჩაწერილს მომენტებისათვის.

ვიგულისხმოთ, რომ

$$u_{ir} = 0, \text{ როცა } r > N \qquad (2.6.7)$$

და (2.6.6) სისტემაში დავტოვოთ მხოლოდ პირველი N+1 განტოლება. მიღებულ განტოლებათა სისტემაში u_{jr}, საზოგადოდ, უკვე არ წარმოადგენს u_j-ს r-ურ მომენტს, განსაზღვრულს (2.6.1) ტოლობით. მიღებული სისტემა შეესაბამება N-ურ მიახლოებას.

თუ გარსის გვერდით ზედაპირზე მოცემულია ან $X_{ni} = f_i$ ძაბვები ან $u_{ni} = f_i$ გადაადგილებები, ცხადია, მათი $P_r\left(ax_3 - b\right)$-ზე გამრავლებითა და $\overset{(-)}{h}$-დან $\overset{(+)}{h}$-მდე ინტეგრებით ადვილად ვიპოვით შესაბამის მომენტებს:

$$X_{nir} = f_r\,,\ \ i = 1{,}2{,}3\,,\ \ r = \overline{0, N}\,, \tag{2.6.8}$$

$$u_{ir} = f_r \ \ \ i = 1{,}2{,}3\,,\ \ r = \overline{0, N}\,, \tag{2.6.9}$$

სადაც n გვერდითი ზედაპირის გარე ნორმალია.

დინამიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები შემდეგნაირად დაისმის: ვიპოვოთ $u_{jr} \in C^2(\omega), \quad r = 0,\ldots,N, \quad j = 1{,}2{,}3$, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.6.6) განტოლებას ω-ში, დროის ნებისმიერ $t \ge t_0$ მომენტში (2.6.8) ან (2.6.9) პირობებს გარსის საზღვარზე და

$$u_{rj}\Big|_{t=t_0} = \varphi_{rj}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{rj}}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \psi_{rj}(x_1, x_2),$$

$$(x_1, x_2) \in \omega,\ \ r = \overline{0, N}, \quad j = 1{,}2{,}3,$$

საწყის პირობებს.

ამ გზით მიღებული სისტემის ღირსშესანიშნავი თვისება იმაში მდგომარეობს, რომ იგი განტოლებათა ორ ჯგუფად იყოფა. ერთი ჯგუფის მთავარი წევრები ემთხვევა ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ძირითად განტოლებათა სისტემის ოპერატორს, ხოლო მეორე ჯგუფის მთავარი წევრები – ლაპლასის ოპერატორს. ეს იმის საშუალებას იძლევა, რომ პრიზმული გარსების გათვლისათვის გამოვიყენოთ დრეკადობის ბრტყელი თეორიისათვის და ლაპლასის ოპერატორისათვის არსებული მათემატიკური აპარატი. ცხადია, ამონახსნის სიზუსტე იზრდება N-ის ზრდასთან ერთად. თუმცა ამასთან ერთად იზრდება სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიცხვიც, რაც ართულებს მის ამოხსნას, მაგრამ პრაქტიკული მოსაზრებიდან გამომდინარე შეიძლება დავკმაყოფილდეთ ნულოვანი ($N = 0$) და პირველი ($N = 1$) მიახლოებით.

დამტკიცებულია ძირითადი ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობა და გარკვეულ პირობებში არსებობაც [34], [38-40], [16], [17], [33], [28], [5], [6], როცა $2h > 0$. შემთხვევა, როცა $2h$ გარსის საზღვარზე ან მის ნაწილზე შეიძლება ნული გახდეს,

ასეთ გარსებს წამახვილებული გარსები ეწოდება, განხილულია [44], [19-25]-ში. ი.ვეკუას ზემოაღწერილი რედუქციის მეთოდი განზოგადებულია ანიზოტროპული ფირფიტებისა [33] და გეომეტრიულად და ფიზიკურად არაწრფივი არადამრეცი გარსებისათვის [28].

SeniSvna 2.6.1. N-ური მიახლოების სასაზღვრო პირობებში მოცემული გვაქვს ძაბვის ვექტორის ან გადაადგილების ვექტორის მომენტები. საძიებელი სიდიდეების აღსანიშნავად ვიყენებთ გადაადგილების ვექტორის მომენტების აღნიშვნებს, თუმცა ეს საძიებელი სიდიდეები, საზოგადოდ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, არ არიან გადაადგილების ვექტორის მომენტები, მაგრამ მათკენ მიისწრაფვიან, როცა $N \to +\infty$. ამას იმასაც თუ დავუმატებთ, რომ რეგულარულ (არაწამახვილებულ) შემთხვევაში N–ურ მიახლოებაში დასმული ამოცანების ამონახსნები მიისწრაფვიან შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების ზუსტი ამონახსნებისაკენ [16], [17], [5], [6], ნათელი გახდება, რომ N–ურ მიახლოებაში ასეთი დასმა სავსებით მისაღებია. წამახვილებული გარსების შემთხვევაში საძიებელი ფუნქციების ვიწრო კლასებისათვის იგივე ფაქტს აქვს ადგილი [25], ხოლო ამოცანების ბუნებრივ წონიან სივრცეებში განხილვისას $N \to +\infty$ დროს შესაბამისი სამგანზომილებიანი ამოცანების დასმა სცილდება კლასიკურის ფარგლებს, რადგან ან არე არ არის ლიპშიცის, ან წერტილებში და ან წირების გასწვრივ შეყურსული ძალები იჩენს თავს [22], [24].

ნულოვან მიახლოებაში (2.6.6) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს [38]

$$\mu\Delta\left(h^{-1}u_{\beta 0}\right)+(\lambda+\mu)\left(h^{-1}u_{\gamma 0}\right)_{,\gamma\beta}+\lambda(\ln h)_{,\beta}\left(h^{-1}u_{\alpha 0}\right)_{,\alpha}$$

$$+\mu(\ln h)_{,\alpha}\left(h^{-1}u_{\alpha 0}\right)_{,\beta}+\mu(\ln h)_{,\alpha}\left(h^{-1}u_{\beta 0}\right)_{,\alpha}+\frac{\overset{0}{X}_{\beta}}{h}$$

$$=\rho\frac{\partial h^{-1}u_{\beta 0}}{\partial t^2}, \qquad \beta=1,2,$$

$$\Delta\left(h^{-1}u_{30}\right)+(\ln h)_{,\alpha}\left(h^{-1}u_{30}\right)_{,\alpha}+\frac{\overset{0}{X}_3}{\mu h}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial h^{-1}u_{30}}{\partial t^2},$$

სადაც

$$\overset{0}{X}_j=Q_{\overset{(+)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(+)}{h}_{,1}\right)^2+\left(\overset{(+)}{h}_{,2}\right)^2}+Q_{\overset{(-)}{n}j}\sqrt{1+\left(\overset{(-)}{h}_{,1}\right)^2+\left(\overset{(-)}{h}_{,2}\right)^2}$$

$$+\Phi_{j0},$$

$$Q_{\overset{(+)}{n}j}=X_{ij}\left(x_1,x_2,\overset{(+)}{h},t\right)\cos\left(\overset{(+)}{n},x_i\right),$$

$$Q_{\overset{(-)}{n}j}=X_{ij}\left(x_1,x_2,\overset{(-)}{h},t\right)\cos\left(\overset{(-)}{n},x_i\right).$$

შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში გადაადგილების ვექტორი (იხ. [39])

$$\vec{u}(x_1,x_2,x_3,t)\cong\frac{1}{2h}\vec{u}_0(x_1,x_2,t).$$

პირველ მიახლოებაში, თუ $\overset{(+)}{h}=-\overset{(-)}{h}=-h$, გადაადგილების ვექტორი [39]

$$\vec{U}(x_1,x_2,x_3,t)\cong\frac{1}{2}\vec{u}(x_1,x_2,t)+\frac{3}{2}x_3\vec{\mathrm{v}}(x_1,x_2,t),$$

სადაც

$$u_\alpha(x_1,x_2,t)=h^{-1}u_{\alpha 0}(x_1,x_2,t), \quad \mathrm{v}_\alpha(x_1,x_2,t)=h^{-2}u_{\alpha 1}(x_1,x_2,t),$$

$$u_3 = h^{-1} u_{30}(x_1, x_2, t) =: u, \quad \mathrm{v}_3 = h^{-2} u_{31}(x_1, x_2, t) =: \mathrm{v}\,.$$

ამ მიახლოებაში (2.6.6) სისტემა სტატიკის შემთხვევაში მიიღებს შემდეგ სახეს [39]

$$4\mu \frac{\partial}{\partial z}\left(h \frac{\partial u_+}{\partial \bar{z}} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (h\theta) + 6\lambda \frac{\partial h\mathrm{v}}{\partial \bar{z}} + X_+ = 0, \tag{2.6.10}$$

$$2\mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(h \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(h \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + 3\mu\left(\frac{\partial h\mathrm{v}_+}{\partial z} + \frac{\partial h\bar{\mathrm{v}}_+}{\partial \bar{z}} \right) + X = 0, \tag{2.6.11}$$

$$4\mu \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial \mathrm{v}_+}{\partial \bar{z}} \right) + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (h^3 \rho) - 2\mu h \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 3\mu h \mathrm{v}_+ + Y_+ = 0, \tag{2.6.12}$$

$$2\mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(h^3 \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial z} \right) \right] - \lambda h\theta - 3(\lambda + 2\mu) h\mathrm{v} + Y = 0, \tag{2.6.13}$$

სადაც

$$u_+ = u_1 + i u_2, \quad \mathrm{v}_+ = \mathrm{v}_1 + i \mathrm{v}_2,$$

$$\theta = \frac{\partial u_+}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_+}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

X_+ და X დამოკიდებულია მოცულობითი ძალების ნულოვან მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირულ ძალებზე, ხოლო Y_+ და Y – მოცულობითი ძალების პირველ მომენტებზე და პირით ზედაპირზე მოქმედ გარე ზედაპირული ძალებზე.

(2.6.10)-(2.6.13) განტოლებათა სისტემა ორ ჯგუფად იყოფა: (2.6.10) და (2.6.13) დამოკიდებულია მხოლოდ u_+-ზე და v-ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის გაჭიმვა-კუმშვას, ხოლო (2.6.11) და (2.6.12) დამოკიდებულია მხოლოდ u-ზე და v_+-ზე და ამდენად ახასიათებს გარსის ღუნვას.

SeniSvna 2.6.2. სიმეტრიული $\left(\overset{(+)}{h}(x_1,x_2) = -\overset{(-)}{h}(x_1,x_2) \geq 0\right)$ პრიზმული გარსის ფორმის მქონე სამგანზომილებიანი სხეულის

$$u_i(x_1,x_2,x_3), \quad i=1,2,3,$$

გადაადგილებები შეიძლება დავშალოთ ორ-ორ შესაკრებად

$$u_i(x_1,x_2,x_3,t) = u_i^c(x_1,x_2,x_3,t) + u_i^b(x_1,x_2,x_3,t), \quad i=1,2,3,$$

რომელთაგან

$$u_\alpha^c(x_1,x_2,x_3,t) := \frac{1}{2}\left[u_\alpha(x_1,x_2,x_3,t) + u_\alpha(x_1,x_2,-x_3,t)\right],$$

$$\alpha = 1,2,$$

რომელიც x_3-ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა და

$$u_3^c(x_1,x_2,x_3,t) := \frac{1}{2}\left[u_3(x_1,x_2,x_3,t) - u_3(x_1,x_2,-x_3,t)\right],$$

$$(x_1,x_2,x_3) \in \Omega,$$

რომელიც x_3-ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას (მართლაც, შუა სიბრტყე იჭიმება ან იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, 0, t) = u_\alpha(x_1, x_2, 0, t) \not\equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

და არ ილუნება, რადგან

$$u_3(x_1, x_2, 0, t) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega),$$

ხოლო

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2}\left[u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) - u_\alpha(x_1, x_2, -x_3, t)\right],$$
$$\alpha = 1,2,$$

რომელიც x_3-ის მიმართ კენტი ფუნქციაა და

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2}\left[u_3(x_1, x_2, x_3, t) + u_3(x_1, x_2, -x_3, t)\right],$$
$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega,$$

რომელიც x_3-ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა, შეესაბამება ღუნვას (მართლაც, შუა სიბრტყე არც იჭიმება და არც იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, 0, t) \equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega),$$

მაგრამ ილუნება, რადგან

$$u_3^b(x_1, x_2, 0, t) = u_3(x_1, x_2, 0, t) \not\equiv 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega).$$

ზემოაღნიშნულის შესაბამისად, თუ

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^{\infty} u_{ir}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad i = 1,2,3,$$

მაშინ, იმის გათვალისწინებით, რომ x_3-ის მიმართ P_r კენტი ფუნქციაა კენტი r-სათვის და ლუწი ფუნქციაა ლუწი $r \geq 0$-სათვის, დავასკვნით, რომ

$$u_{\alpha r}, \ r \text{ ლუწია}; \quad u_{3r}, \ r \text{ კენტია}, \tag{2.6.14}$$

შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას. მართლაც,

$$u_\alpha^c(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{r=0}^{\infty}u_{\alpha r}(x_1,x_2,t)P_r\left(\frac{x_3}{h}\right),\qquad \alpha=1,2,$$

(r ლუწია)

ლუწია x_3-ის მიმართ,

$$u_3^c(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{r=1}^{\infty}u_{3r}(x_1,x_2,t)P_r\left(\frac{x_3}{h}\right)$$

(r კენტია)

კი კენტია. ხოლო

$$u_{\alpha r}\,,\ r\ \text{კენტია;}\quad u_{3r}\,,\ r\ \text{ლუწია,} \tag{2.6.15}$$

შეესაბამება ლუნვას. მართლაც,

$$u_\alpha^b=\sum_{r=1}^{\infty}u_{\alpha r}(x_1,x_2,t)P_r\left(\frac{x_3}{h}\right),\qquad \alpha=1,2,$$

(r კენტია)

კენტია x_3-ის მიმართ,

$$u_3^b(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{r=0}^{\infty}u_{3r}(x_1,x_2,t)P_r\left(\frac{x_3}{h}\right)$$

(r ლუწია)

კი ლუწია.

(2.6.6) სისტემა შეიძლება გადავწეროთ დივერგენტული ფორმით ცხადი სახით ამოწერილი უმცროსი კოეფიციენტებით [20]. N-ურ მიახლოებაში მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\mu\left[\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha r,j}\right)_{,\alpha}+\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{jr,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]+\lambda\delta_{\alpha j}\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma r,\gamma}\right)_{,\alpha}$$

$$+\sum_{s=r+1}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha jks}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{ks}\right)_{,\alpha}$$

$$+\sum_{s=0}^{r-1} \overset{r}{a}_{is}\left[\lambda\delta_{ij} h^{r+s+1} \overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s,\gamma} + \mu h^{r+s+1}\left(\overset{N}{\mathrm{v}}_{is,j} + \overset{N}{\mathrm{v}}_{js,i}\right) + \sum_{l=s+1}^{N} \overset{s}{B}_{ijkl}\, h^{r+s+1} \overset{N}{\mathrm{v}}_{kl}\right]$$

$$+h^r \overset{r}{X}_j = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} \overset{N}{\mathrm{v}}_{jr}}{\partial t^2}, \quad j=1,2,3, \quad r=\overline{0,N}\,, \qquad (2.6.16)$$

სადაც

$$\overset{N}{\mathrm{v}}_{ir} := \frac{\overset{N}{u}_{ir}}{h^{r+1}}\,,$$

N ნიშნაკი აღნიშნავს N-ურ მიახლოებას. $\overset{N}{\mathrm{v}}_{ir}$-ს ეწოდება წონითი მომენტი N-ურ მიახლოებაში. შევნიშნოთ, რომ (2.6.6) სისტემის შესაბამის უსასრულო სისტემას იგივე (2.6.16) სახე აქვს, მხოლოდ ჯამებში N უსასრულობით უნდა შევცვალოთ და უცნობ სიდიდეებს N ნიშნაკი მოვაშოროთ; ე.ი. მივიღებთ სისტემას v_{ir}-ების, ან, რაც იგივეა, u_{ir}-ების, $i=1,2,3$, $r=0,1,\cdots$, მიმართ, რომლებიც u_i-ს ფურიე-ლეჟანდრის კოეფიციენტებია.

რადგან სიმეტრიულ პრიზმულ გარსს ვიხილავთ, ამიტომ

$$\overset{(+)}{h}(x_1,x_2) + \overset{(-)}{h}(x_1,x_2) \equiv 0, \quad (x_1,x_2)\in\omega\,. \qquad (2.6.17)$$

(2.6.17)-ის თანახმად, ადვილი სანახავია, რომ

$$\overset{r}{b}_{ks} = \tag{2.6.18}$$

$$\begin{cases} 0, \quad \text{თუ} \quad \underline{\text{ან}} \quad s < r; \quad \underline{\text{ან}} \quad k = \alpha, \quad r+s \quad \text{კენტია}, \quad s > r; \\ \underline{\text{ან}} \quad k = 3, \quad r+s \quad \text{ლუწია}, \quad s > r; \quad \underline{\text{ან}} \quad k = 3, \quad r = s; \\ -(2s+1)h_{,\alpha}h^{-1}, \quad \text{თუ} \quad k = \alpha, \quad r+s \quad \text{ლუწია}, \quad s > r; \\ (2s+1)h^{-1}, \quad \text{თუ} \quad k = 3, \quad r+s \quad \text{კენტია}, \quad s > r; \\ -(r+1)h_{,\alpha}h^{-1}, \quad \text{თუ} \quad k = \alpha, \quad r = s; \end{cases}$$

$$\overset{r}{a}_{is} = \tag{2.6.19}$$

$$\begin{cases} 0, \quad \text{თუ} \quad \text{ან} \quad i = \alpha, \quad r+s \quad \text{კენტია}, \quad s \neq r; \quad \text{ან} \quad i = 3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r+s \quad \text{ლუწია}; \\ (2s+1)h_{,\alpha}h^{-1}, \quad \text{თუ} \quad i = \alpha, \quad r+s \quad \text{ლუწია}, \; s \neq r; \\ -(2s+1)h^{-1}, \quad \text{თუ} \quad i = 3, \quad r+s \quad \text{კენტია}; \\ rh_{,\alpha}h^{-1}, \quad \text{თუ} \quad i = \alpha, \quad r = s; \end{cases}$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha\beta\gamma s} = \lambda\delta_{\alpha\beta}\overset{r}{b}_{\gamma s} + \mu\delta_{\gamma\beta}\overset{r}{b}_{\alpha s} + \mu\delta_{\alpha\gamma}\overset{r}{b}_{\beta s} \tag{2.6.20}$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \text{თუ} \quad \text{ან} \quad s < r; \quad \text{ან} \quad r+s \quad \text{კენტია}, \quad s > r; \\ -(r+1)h^{-1}\left[\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma} + \mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha} + \mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}\right], \quad \text{თუ} \quad r = s; \\ -(2s+1)h^{-1}\left[\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma} + \mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha} + \mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}\right], \quad \text{თუ} \quad r+s \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ლუწია}, \quad s > r; \end{cases}$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha\beta 3s} = \lambda\delta_{\alpha\beta}\overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{\text{ან}} \quad s < r; \\ & \underline{\text{ან}} \quad r+s \quad \text{ლუწია}, \quad s \geq r; \\ \lambda(2s+1)h^{-1}\delta_{\alpha\beta}, & \text{თუ} \quad r+s \\ & \text{კენტია}, \quad s > r; \end{cases} \tag{2.6.21}$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha 3\gamma\ s} = \mu\delta_{\alpha\gamma}\overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{\text{ან}} \quad s < r; \\ & \underline{\text{ან}} \quad r+s \quad \text{ლუწია}, \quad s \geq r; \\ (2s+1)\mu h^{-1}\delta_{\alpha\gamma}, & \text{თუ} \quad r+s \\ & \text{კენტია}, \quad s > r; \end{cases} \tag{2.6.22}$$

$$\overset{r}{B}_{\alpha 33s} = \mu\overset{r}{b}_{\alpha s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{\text{ან}} \quad s < r; \\ & \underline{\text{ან}} \quad r+s \quad \text{კენტია}, \quad s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{,\alpha}, & \text{თუ} \quad r = s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{,\alpha}, & \text{თუ} \quad r+s \\ & \text{ლუწია}, \quad s > r; \end{cases} \tag{2.6.23}$$

$$\overset{r}{B}_{3\beta\gamma s} = \mu\delta_{\gamma\beta}\overset{r}{b}_{3s} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \underline{\text{ან}} \quad s < r; \\ & \underline{\text{ან}} \quad r+s \ \text{ლუწია}, \quad s \geq r; \\ (2s+1)\mu h^{-1}\delta_{\gamma\beta}, & \text{თუ} \quad r+s \\ & \text{კენტია}, \quad s > r; \end{cases} \tag{2.6.24}$$

$$\overset{r}{B}_{3\beta 3s}=\mu \overset{r}{b}_{\beta s}=\begin{cases}0, & \text{თუ} \ \underline{\text{ან}} \ \ s<r; \\ & \underline{\text{ან}} \ \ r+s \ \ \text{კენტია}, \ \ s>r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{,\beta}, & \text{თუ} \ \ r=s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{,\beta}, & \text{თუ} \ \ r+s \\ & \text{ლუწია}, \ \ s>r; \end{cases} \tag{2.6.25}$$

$$\overset{r}{B}_{33\gamma s}=\lambda \overset{r}{b}_{\gamma s}=\begin{cases}0, & \text{თუ} \ \underline{\text{ან}} \ \ s<r; \\ & \underline{\text{ან}} \ \ r+s \ \ \text{კენტია}, \ \ s>r; \\ -(r+1)\lambda h^{-1}h_{,\gamma}, & \text{თუ} \ \ r=s; \\ -(2s+1)\lambda h^{-1}h_{,\gamma}, & \text{თუ} \ \ r+s \\ & \text{ლუწია}, \ \ s>r; \end{cases} \tag{2.6.26}$$

$$\overset{r}{B}_{333s}=\lambda \overset{r}{b}_{3s}+\mu \overset{r}{b}_{3s}+\mu \overset{r}{b}_{3s}=(\lambda+2\mu)\overset{r}{b}_{3s}$$
$$=\begin{cases}0, \ \ \text{თუ} \ \underline{\text{ან}} \ \ s<r; \ \ \underline{\text{ან}} \ \ r+s \ \ \text{ლუწია}, \ \ s\geq r; \\ (2s+1)(\lambda+2\mu)h^{-1}, \ \ \text{თუ} \ \ r+s \ \ \text{კენტია}, \ \ s>r. \end{cases} \tag{2.6.27}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.6.18)-(2.6.27)-ს, ადვილი მისახვედრია, რომ (2.6.16) სისტემა დაიშლება ორ დამოუკიდებელ სისტემად (2.6.14) და (2.6.15) უცნობი ფუნქციების მიმართ. მართლაც, თუ $r=0,2,4,\cdots$, $r\leq N$, $j=\beta$, $\beta=1,2$, მაშინ

$$\mu\left[\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha r,\beta}\right)_{,\alpha}+\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta r,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]+\lambda\delta_{\alpha\beta}\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma r,\gamma}\right)_{,\alpha}$$

$$+\sum_{s=r+2}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha\beta\gamma s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=r+1}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha\beta 3s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s}\right)_{,\alpha}$$

(s ლუწია) (s კენტია)

$$+\sum_{s=0}^{r-1}\overset{r}{a}_{\alpha s}\left[\lambda\delta_{\alpha\beta}h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s,\gamma}+\mu h^{r+s+1}\left(\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha s,\beta}+\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta s,\alpha}\right)\right.$$

(s ლუწია)

$$\left.+\sum_{l=s+2}^{N}\overset{s}{B}_{\alpha\beta\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+1}^{\infty}\overset{s}{B}_{\alpha\beta 3l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]+\sum_{s=1}^{r-1}\overset{r}{a}_{3s}\left[\mu h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\beta}\right.$$

(l ლუწია) (l კენტია) (s კენტია)

$$\left.+\sum_{l=s+1}^{N}\overset{s}{B}_{3\beta\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+2}^{\infty}\overset{s}{B}_{3\beta 3l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]+h^{r}\overset{r}{X}_{\beta}$$

(l ლუწია) (l კენტია)

$$=\rho h^{r}\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta r}}{\partial t^{2}}, \qquad (2.6.28)$$

თუ $r=0,2,4\ldots,\ r\le N,\ j=3$, მაშინ

$$\mu\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3r,\alpha}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=r+1}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha 3\gamma s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=r+2}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha 33s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s}\right)_{,\alpha}$$

(s კენტია) (s ლუწია)

$$+\sum_{s=0}^{r-1}\overset{r}{a}_{\alpha s}\left[\mu h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\alpha}+\sum_{l=s+1}^{N}\overset{s}{B}_{\alpha 3\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+2}^{N}\overset{s}{B}_{\alpha 33l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]$$

(s ლუწია) (l კენტია) (l ლუწია)

$$+\sum_{s=1}^{r-1}\overset{r}{a}_{3s}\left[\lambda h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s,\gamma}+\sum_{l=s+2}^{N}\overset{s}{B}_{33\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+1}^{N}\overset{s}{B}_{333l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]$$

(s კენტია) (l კენტია) (l ლუწია)

$$+h^{r}\overset{r}{X}_{3}=\rho h^{r}\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3r}}{\partial t^{2}}, \qquad (2.6.29)$$

თუ $r=1,3,\ldots,\ r\le N\,,\ \ j=\beta,\ \ \beta=1,2$, მაშინ

$$\mu\left[\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha r,\beta}\right)_{,\alpha}+\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta r,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]+\lambda\delta_{\alpha\beta}\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma r,\gamma}\right)_{,\alpha}$$

$$+\sum_{s=r+2}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha\beta\gamma s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=r+1}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha\beta 3s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s}\right)_{,\alpha}$$

(s კენტია) (s ლუწია)

$$+\sum_{s=1}^{r-1}\overset{r}{a}_{\alpha s}\left[\lambda\delta_{\alpha\beta}h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s,\gamma}+\mu h^{r+s+1}\left(\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha s,\beta}+\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta s,\alpha}\right)\right.$$

(s კენტია)

$$\left.+\sum_{l=s+2}^{N}\overset{s}{B}_{\alpha\beta\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+1}^{N}\overset{s}{B}_{\alpha\beta 3l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]+\sum_{s=0}^{r-1}\overset{r}{a}_{3s}\left[\mu h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\beta}\right.$$

(l კენტია) (l ლუწია) (s ლუწია)

$$+\sum_{l=s+1}^{N}\overset{s}{B}_{3\beta\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+2}^{N}\overset{s}{B}_{3\beta 3l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\Bigg]+h^{r}\overset{r}{X}_{\beta}$$

(l კენტია) (l ლუწია)

$$=\rho h^{r}\,\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta r}}{\partial t^{2}}, \tag{2.6.30}$$

თუ $r=1,3,\ldots,\ r\le N,\ \ j=3$, მაშინ

$$\mu\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3r,\alpha}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=r+1}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha 3\gamma s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s}\right)_{,\alpha}+\sum_{s=r+2}^{N}\left(\overset{r}{B}_{\alpha 33s}\,h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s}\right)_{,\alpha}$$

(s ლუწია) (s კენტია)

$$+\sum_{s=1}^{r-1}\overset{r}{a}_{\alpha s}\left[\mu h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\alpha}+\sum_{l=s+1}^{N}\overset{s}{B}_{\alpha 3\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+2}^{N}\overset{s}{B}_{\alpha 33l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]$$

(s კენტია) (l ლუწია) (l კენტია)

$$+\sum_{s=0}^{r-1}\overset{r}{a}_{3s}\left[\lambda h^{r+s+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s,\gamma}+\sum_{l=s+2}^{N}\overset{s}{B}_{33\gamma l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+1}^{N}\overset{s}{B}_{333l}\,h^{r+l+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]$$

(s ლუწია) (l ლუწია) (l კენტია)

$$+h^{r}\overset{r}{X}_{3}=\rho h^{r}\,\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3r}}{\partial t^{2}}, \tag{2.6.31}$$

ამრიგად, (2.6.28), (2.6.31) სისტემა, რომელიც მხოლოდ (2.6.14) უცნობებს შეიცავს, გაჭიმვა-კუმშვას შეესაბამება, ხოლო (2.6.30), (2.6.29) სისტემა, რომელიც მხოლოდ (2.6.15) უცნობებს შეიცავს, ღუნვას შეესაბამება.

ძირითადი სისტემის ასეთ გახლეჩას ადგილი არ აქვს არასიმეტრიული პრიზმული გარსების შემთხვევაში, ისევე როგორც ზოგადი გარსების შემთხვევაში, თუნდაც ეს უკანასკნელნი სი-

მეტრიულები იყვნენ.

(2.6.19)-(2.6.21), (2.6.24), (2.6.25)-ის გათვალისწინებით, (2.6.28) და (2.6.30) შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად

$$\left[\mu\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha r,\beta}\right)_{,\alpha}+\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta r,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]+\lambda\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma r,\gamma}\right)_{,\beta}$$

$$+\sum_{s=r+2}^{N}\left\{\left[-(2s+1)h^{r+s}\left(\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma}+\mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha}+\mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}\right)\right]\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s}\right\}_{,\alpha}$$

(s ლუწია)

$$+\sum_{s=r+1}^{N}\lambda(2s+1)\left(h^{r+s}\mathrm{v}_{3s}\right)_{,\beta}$$

(s კენტია)

$$+\sum_{s=0}^{r-1}(2s+1)h_{,\alpha}\left\{h^{r+s}\left[\lambda\delta_{\alpha\beta}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s,\gamma}+\mu\left(\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha s,\beta}+\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta s,\alpha}\right)\right]\right.$$

(s ლუწია)

$$+\sum_{l=s+2}^{N}\left[-(2l+1)h^{r+l-1}\left(\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma}+\mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha}+\mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}\right)\right]\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}$$

(l ლუწია)

$$\left.+\sum_{l=s+1}^{N}\lambda(2l+1)h^{r+l-1}\delta_{\alpha\beta}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right\}$$

(l კენტია)

$$+\sum_{s=1}^{r-1}\left\{-(2s+1)\left[\mu h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\beta}\right.\right.$$

(s კენტია)

$$\left.\left.+\sum_{l=s+1}^{N}(2l+1)\mu h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta l}-\sum_{l=s+1}^{N}(2l+1)\mu h_{,\beta}h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right\}\right]$$

(l ლუწია) (l კენტია)

$$+h^{r}\overset{r}{X}_{\beta}=\rho\, h^{r}\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta r}}{\partial t^{2}}, \qquad (2.6.32)$$

$$r=0,2\cdots,\ \ r\le N,\ \beta=1,2,$$

და

$$\left[\mu\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha r,\beta}\right)_{,\alpha}+\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta r,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]+\lambda\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma r,\gamma}\right)_{,\beta}$$

$$+\sum_{s=r+2}^{N}\left\{\left[-(2s+1)h^{r+s}\left(\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma}+\mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha}+\mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}\right)\right]\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s}\right\}_{,\alpha}$$

(s კენტია)

$$+\sum_{s=r+1}^{N}\lambda(2s+1)\left(h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s}\right)_{,\beta}$$

(s ლუწია)

$$+\sum_{s=1}^{r-1}(2s+1)h_{,\alpha}\left\{h^{r+s}\left[\lambda\delta_{\alpha\beta}\overset{N}{v}_{\gamma s,\gamma}+\mu\left(\overset{N}{v}_{\alpha s,\beta}+\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta s,\alpha}\right)\right]\right.$$

(s კენტია)

$$+\sum_{l=s+2}^{N}\Big[-(2l+1)h^{r+l-1}\Big(\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma}+\mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha}+\mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}\Big)\Big]\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}$$

(l კენტია)

$$\left.+\sum_{l=s+1}^{N}\lambda(2l+1)h^{r+l-1}\delta_{\alpha\beta}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right\}$$

(l ლუწია)

$$+\sum_{s=0}^{r-1}\Big\{-(2s+1)\Big[\mu h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\beta}$$

(s ლუწია)

$$\left.\left.+\sum_{l=s+1}^{N}(2l+1)\mu h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta\, l}-\sum_{l=s+2}^{N}(2l+1)\mu h_{,\beta}h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]\right\}$$

(l კენტია) (l ლუწია)

$$+h^{r}\overset{r}{X}_{\beta}=\rho\ h^{r}\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\beta\, r}}{\partial t^{2}}, \qquad (2.6.33)$$

$$r=1,3\cdots,\qquad r\le N,\quad \beta=1,2,$$

სახით.

(2.6.19), (2.6.22), (2.6.23), (2.6.26), (2.6.27)-ის გათვალისწინებით, (2.6.29) და (2.6.31) შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად

$$\mu\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3r,\alpha}\right)_{,\alpha}$$

$$+\sum_{s=r+1}^{N}(2s+1)\mu\left(h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha s}\right)_{,\alpha}-\sum_{s=r+2}^{N}(2s+1)\mu\left(h_{,\alpha}h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s}\right)_{,\alpha}$$

(s კენტია) (s ლუწია)

$$+\sum_{s=0}^{r-1}(2s+1)h_{,\alpha}\left[\mu h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\alpha}\right.$$

(s კენტია)

$$\left.+\sum_{l=s+1}^{N}(2l+1)\mu h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha l}-\sum_{l=s+2}^{N}(2l+1)\mu h_{,\alpha}h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]$$

(l კენტია) (l ლუწია)

$$-\sum_{s=1}^{r-1}(2s+1)\left[\lambda h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma s,\gamma}\right.$$

(s კენტია)

$$\left.-\sum_{l=s+2}^{N}(2l+1)\lambda h_{,\gamma}h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+1}^{N}(2l+1)(\lambda+2\mu)h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\right]$$

(l კენტია) (l ლუწია)

$$+h^{r}\overset{r}{X}_{3}=\rho h^{r}\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3r}}{\partial t^{2}},\ r=0,2,4,\cdots,\quad r\le N, \tag{2.6.34}$$

და

$$\mu\left(h^{2r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3r,\alpha}\right)_{,\alpha}$$

$$+\sum_{s=r+1}^{N}(2s+1)\mu\left(h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha s}\right)_{,\alpha}-\sum_{s=r+2}^{N}(2s+1)\mu\left(h_{,\alpha}h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s}\right)_{,\alpha}$$

(s ლუწია) (s კენტია)

$$+\sum_{s=1}^{r-1}(2s+1)h_{,\alpha}\left[\mu h^{r+s}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3s,\alpha}\right.$$

(s კენტია)

$$+\sum_{l=s+1}^{N}(2l+1)\mu h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\alpha l}-\sum_{l=s+2}^{N}(2l+1)\mu h_{,\alpha}h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\Bigg]$$

(l ლუწია) (l კენტია)

$$-\sum_{s=0}^{r-1}(2s+1)\Bigg[\lambda h^{r+s}\mathrm{v}_{\gamma s,\gamma}$$

(s ლუწია)

$$-\sum_{l=s+2}^{N}(2l+1)\lambda h_{,\gamma}h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{\gamma l}+\sum_{l=s+1}^{N}(2l+1)(\lambda+2\mu)h^{r+l-1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3l}\Bigg]$$

(l ლუწია) (l კენტია)

$$+h^{r}\overset{r}{X}_{3}=\rho h^{r}\frac{\partial^{2}h^{r+1}\overset{N}{\mathrm{v}}_{3\,r}}{\partial t^{2}},\quad r=1,3,\cdots,\qquad r\leq N,\qquad (2.6.35)$$

სახით.

ვთქვათ, $N=1$.

თუ $r=0$, მაშინ (2.6.32) და (2.6.34)-დან ცხადია, რომ შესაბამისად

$$\mu\left[\left(h\overset{1}{\mathrm{v}}_{\alpha 0,\beta}\right)_{,\alpha}+\left(h\overset{1}{\mathrm{v}}_{\beta 0,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]+\lambda\left(h\overset{1}{\mathrm{v}}_{\gamma 0,\gamma}\right)_{,\beta}$$
$$+3\lambda\left(h\overset{1}{\mathrm{v}}_{31}\right)_{,\beta}+\overset{0}{X}_{\beta}=\rho\frac{\partial^{2}h\overset{1}{\mathrm{v}}_{\beta 0}}{\partial t^{2}},\quad \beta=1,2,\qquad (2.6.36)$$

და

$$\mu\left(h\overset{1}{\mathrm{v}}_{30,\alpha}\right)_{,\alpha}+3\mu\left(h\overset{1}{\mathrm{v}}_{\alpha 1}\right)_{,\alpha}+\overset{0}{X}_{3}=\rho\frac{\partial^{2}h\overset{1}{\mathrm{v}}_{30}}{\partial t^{2}}.\qquad (2.6.37)$$

თუ $r=1$, მაშინ (2.6.33) და (2.6.35)-დან გამომდინარეობს, რომ შესაბამისად

$$\mu\left[\left(h^3\overset{1}{\mathrm{v}}_{\alpha1,\beta}\right)_{,\alpha}+\left(h^3\overset{1}{\mathrm{v}}_{\beta1,\alpha}\right)_{,\alpha}\right]+\lambda\left(h^3\overset{1}{\mathrm{v}}_{\gamma1,\gamma}\right)_{,\beta}$$

$$-\left(\mu h\overset{1}{\mathrm{v}}_{30,\beta}+3\mu h\overset{1}{\mathrm{v}}_{\beta1}\right)+h\overset{1}{X}_{\beta}=\rho h\frac{\partial^2 h^2\overset{1}{\mathrm{v}}_{\beta1}}{\partial t^2},\quad \beta=1,2, \tag{2.6.38}$$

და

$$\mu\left(h^3\overset{1}{\mathrm{v}}_{31,\alpha}\right)_{,\alpha}-\lambda h\overset{1}{\mathrm{v}}_{\gamma0,\gamma}-3(\lambda+2\mu)h\overset{1}{\mathrm{v}}_{31}$$

$$+h\overset{1}{X}_{3}=\rho h\frac{\partial^2 h^2\overset{1}{\mathrm{v}}_{31}}{\partial t^2}. \tag{2.6.39}$$

მარტივი გარდაქმნებით დავრწმუნდებით, რომ (2.6.10)-(2.6.13) ემთხვევა შესაბამისად (2.6.36)-(2.6.39)-ს სტატიკურ შემთხვევაში, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ (2.6.10)-(2.6.13)-ში

$$u_\alpha\equiv\overset{1}{\mathrm{v}}_{\alpha0},\ \mathrm{v}_\alpha\equiv\overset{1}{\mathrm{v}}_{\alpha1},\ \alpha=1,2;\ u\equiv\overset{1}{\mathrm{v}}_{30},\ \mathrm{v}\equiv\overset{1}{\mathrm{v}}_{31}.$$

კიდევ ერთხელ ხაზი გავუსვათ იმას, რომ (2.6.36), (2.6.39) სისტემა შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას, ხოლო (2.6.37), (2.6.38) სისტემა – ღუნვას.

ვთქვათ, ახლა ფირფიტა მუდმივი სისქისაა, ე.ი.

$$\overset{(+)}{h}(x_1,x_2)=-\overset{(-)}{h}(x_1,x_2)=h(x_1,x_2)=const.$$

მაშინ (2.6.37), (2.6.38) სისტემა, რომელიც ღუნვას ახასიათებს, სტატიკის შემთხვევაში შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\mu\Delta\overset{1}{\mathrm{v}}_{30}+3\mu\left(\overset{1}{\mathrm{v}}_{11,1}+\overset{1}{\mathrm{v}}_{21.2}\right)+h^{-1}\overset{0}{X}_{3}=0, \tag{2.6.40}$$

$$\mu\Delta \overset{1}{\mathrm{v}}_{11} + (\lambda+\mu)\left(\overset{1}{\mathrm{v}}_{11,1} + \overset{1}{\mathrm{v}}_{21,2}\right)_{,1}$$

$$-\mu h^{-2}\overset{1}{\mathrm{v}}_{30,1} - 3\mu h^{-2}\overset{1}{\mathrm{v}}_{11} + h^{-2}\overset{1}{X}_1 = 0. \tag{2.6.41}$$

$$\mu\Delta \overset{1}{\mathrm{v}}_{21} + (\lambda+\mu)\left(\overset{1}{\mathrm{v}}_{11,1} + \overset{1}{\mathrm{v}}_{21,2}\right)_{,12}$$

$$-\mu h^{-2}\overset{1}{\mathrm{v}}_{30,2} - 3\mu h^{-2}\overset{1}{\mathrm{v}}_{21} + h^{-2}\overset{1}{X}_2 = 0. \tag{2.6.42}$$

(2.6.41) და (2.6.42) გავაწარმოოთ შესაბამისად x_1-ით და x_2-ით და შევკრიბოთ:

$$(\lambda+2\mu)\Delta\left(\overset{1}{\mathrm{v}}_{11,1} + \overset{1}{\mathrm{v}}_{21,2}\right) - \mu h^{-2}\Delta\overset{1}{\mathrm{v}}_{30}$$

$$-3\mu h^{-2}\left(\overset{1}{\mathrm{v}}_{11,1} + \overset{1}{\mathrm{v}}_{21,2}\right) + h^{-2}\left(\overset{1}{X}_{1,1} + \overset{1}{X}_{2,1}\right) = 0. \tag{2.6.43}$$

(2.6.40)-დან განვსაზღვროთ

$$\overset{1}{\mathrm{v}}_{11,1} + \overset{1}{\mathrm{v}}_{21,2} = -\frac{1}{3}\Delta\overset{1}{\mathrm{v}}_{30} - \frac{1}{3\mu}h^{-1}\overset{0}{X}_3$$

და ჩავსვათ (2.6.43)-ში, სადაც ჩავთვალოთ, რომ $\Phi_j \equiv 0$, $j = 1,2,3$; $\underset{n\ \alpha}{Q_{(\pm)}} \equiv 0$, $\alpha = 1,2$; და, ამდენად (იხ. 2.6.4),

$$\overset{1}{X}_\alpha = 0,\ \ \alpha = 1,2,\ \ \overset{0}{X}_3 = \underset{n\ 3}{Q_{(+)}} + \underset{n\ 3}{Q_{(-)}} = \overset{(+)}{q} + \overset{(-)}{q} = q,$$

მაშინ

$$-\frac{\lambda+2\mu}{3}\Delta\Delta\overset{1}{\mathrm{v}}_{30} - \frac{\lambda+2\mu}{3\mu}h^{-1}\Delta q + h^{-3}q = 0.$$

აქედან, თუ q დატვირთვა ჰარმონიულია, ე.ი. $\Delta q = 0$, მივიღებთ, რომ

$$\Delta\Delta u_3 = \frac{q}{D'}, \qquad (2.6.44)$$

სადაც

$$u_3 := \frac{1}{2}\overset{1}{\mathrm{v}}_{30}$$

ჩაღუნვაა, ხოლო

$$D' = \frac{2}{3}(\lambda + 2\mu)h^3 = \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}D. \qquad (2.6.45)$$

როგორც ვხედავთ, (2.6.44) დაემთხვა ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.6.17) განტოლებას, თუ D'-ს შევცვლით D ცილინდრული სიხისტით. D' და D, (2.6.45)-ის თანახმად ერთმანეთისგან

$$\frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma}$$

მამრავლით განსხვავდებიან. ამრიგად, მუდმივი სისქის ფირფიტის შემთხვევაში $N = 1$ მიახლოებაში ღუნვის (2.6.44) განტოლება და მისი შესაბამისი მათემატიკური მოდელი თვისობრივად არ განსხვავდება ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის (2.6.17) განტოლებისა და შესაბამისად ღუნვის კლასიკური თეორიისაგან. მათ შორის განსხვავება მხოლოდ რაოდენობრივია, ამასთან, გარკვეული აზრით, ეს სხვაობა მცირეა. მართლაც, თუ $\sigma = 0{,}3$, მაშინ $D' \cong 1{,}2D$, რაც მეორეს მხრივ იმას ნიშნავს, რომ $N = 1$ მოდელით გათვლილი ფირფიტები უფრო ხისტია, ვიდრე კირხჰოფ-ლიავის მოდელით, ე.ი. კლასიკური ღუნვის თეორიით გათვლილი ფირფიტები. ცხადია, იგივე მიმართებაშია $N = 1$ მიახლოების ღუნვის მოდელი რაისნერ-მინდლინის მოდელთან, რადგან ეს უკანასკნელი კერძო შემთხვევაში ზუსტად ემთხვევა კირხჰოფ-ლიავის მოდელს (იხ. §2.5).