უწყვეტ გარემოთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები
(გადამუშავებული)

გ. ჯაიანი

თბილისი

2015

შესავალი. ძირითადი ჰიპოთეზები

ჩვენ განვიხილავთ *მატერიალურ ობიექტებს,* რომელთა ქვეშ გვესმის ყოველგვარი სხეული, რომელსაც შესწავლის პროცესში შეუძლია ნებისმიერად იცვალოს ფორმა და მდებარეობა სივრცეში. ასეთებს განეკუთვნებიან გაზები, სითხეები ან მყარი სხეულები, რომელთაც სივრცეში გარკვეული მოცულობა უკავიათ. დაკვირვებებიდან ცნობილია, რომ მატერიალურ ობიექტებს მოლეკულური აგებულება აქვთ. მეორე მხრივ, რაგინდ მცირე არ უნდა ავიღოთ სხეულის მოცულობის ელემენტი, ის უამრავ მოლეკულას შეიცავს. მაგალითად, ჰაერის კუბი, რომლის წიბო 0,001 მმ-ია, შეიცავს $2{,}7\cdot 10^7$ მოლეკულას. თუ ვიგულისხმებთ, რომ სხეული დაყოფილია ამგვარ ელემენტებად, ისინი შეიძლება პრაქტიკულად უსასრულო მცირეებად ჩავთვალოთ და დავახასიათოთ სიჩქარის, აჩქარების და მოლეკულებზე მოქმედი ძალების საშუალო მნიშვნელობებით. ამგვარად შეიძლება მივიღოთ წარმოდგენა *უწყვეტ გარემოზე,* როგორადაც ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ სხეულებს. მატერიალური ობიექტების უწყვეტ გარემოდ მიღება გვაძლევს საშუალებას, გამოვიყენოთ მათემატიკური ანალიზის მეთოდები.

მექანიკა არის მეცნიერება, რომელიც შეისწავლის მატერიალური ობიექტების მოძრაობასა და წონასწორობას სივრცესა და დროში. მექანიკის ის ნაწილი, რომელიც ცნობილია *თეორიული მექანიკის* სახელით, მოიცავს მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის მათემატიკური აღწერის მეთოდებს. *მექანიკური მოძრაობა* კი ეწოდება სხეულების ფარდობით გადაადგილებას.

მატერიალური ობიექტების მექანიკური მოძრაობის ძირითადი კანონებია *ნიუტონის*[*)] *კანონები*:

1. *ინერციის კანონი.* სხეული იმყოფება მოსვენებულ (უძრავ) მდგომარეობაში ან მოძრაობს თანაბრად და წრფივად, თუ გარე

[*)] ი. ნიუტონი (1643-1727).

ძალების მოქმედების შედეგად იგი არ იცვლის თავის მდგომარეობას, ე.ი. მისი სიჩქარე (ერთეული $m/s = მ/წმ$)*) მუდმივია

$$\vec{v} = const.$$

2. *ძალისა და აჩქარების პროპორციულობის კანონი.* მოძრავ სხეულზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა (ერთეული $N = ნიუტონი$)**) მისი m მასისა (ერთეული $kg = კგ$)***) და $\vec{a}$ აჩქარების (ერთეული $m/s^2 = მ/წმ^2$) ნამრავლის ტოლია:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,.$$

3. *ქმედებისა და უკუქმედების კანონი.* ორი სხეულის ერთმანეთზე ზემოქმედების ძალები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ არიან მიმართული.

რაიმე წერტილის მიმართ ძალის მომენტი ეწოდება ვექტორს, რომელიც ამ წერტილის ძალის მოდების წერტილთან შემაერთებელი ვექტორის (მის საწყის წერტილად მიღებულია წერტილი, რომლის მიმართაც ითვლება მომენტი) და ძალის ვექტორის ვექტორული ნამრავლის ტოლია.

---

*) მეტრი არის სინათლის მიერ ვაკუუმში 1/299 792 458 წამში გავლილი მანძილი. წამი არის ცეზიუმის (^{133}Cs) ატომის ძირითადი მდგომარეობის ორ ზენაზ დონეს შორის გადასვლის შესაბამისი გამოსხივების 9 192 631 770 პერიოდის ტოლი დრო. აქ და შემდგომში მითითებულია ერთეულები საერთაშორისო ერთეულთა SI სისტემაში. ამ სისტემაში ძირითად სიდიდეებად (ერთეულებად) მიღებულია სიგრძე (L), დრო (T), მასა, თერმოდინამიკური ტემპერატურა, ნივთიერების რაოდენობა, ელექტრული დენის ძალა და სინათლის ძალა. წარმოებული ერთეული (მაგალითად, სიჩქარის ერთეული) გამოისახება ძირითადი ერთეულების საშუალებით შესაბამისი მათემატიკური ფორმულით. ფიზიკური სიდიდეების ძირითად სიდიდეებად მიღებულ სიდიდეებზე დამოკიდებულების ფორმას *განზომილება* ეწოდება (მაგალითად, $\dim \vec{v} := LT^{-1}$).

**) 1 ნიუტონი არის ის ძალა, რომელიც 1 კგ მასის მქონე სხეულს ანიჭებს 1 მ/წმ^2 აჩქარებას.

***) 1 კგ მასა კილოგრამის საერთაშორისო პროტოტიპის მასის ტოლია.

სხეულზე მოქმედი ძალების, როგორც ვექტორების, გეომეტრიულ ჯამს ეწოდება სხეულზე მოქმედ ძალთა *ნაკრები (მთავარი) ვექტორი*, ხოლო მათი მომენტების, როგორც ვექტორების, გეომეტრიულ ჯამს - *ნაკრები (მთავარი) მომენტი*. ნაკრები მომენტი, საზოგადოდ, დამოკიდებულია იმ წერტილზე, რომლის მიმართაც ვიღებთ მომენტებს, ხოლო ნაკრები ვექტორი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რომელ წერტილს ავიღებთ მის საწყის წერტილად. ის თავისუფალი ვექტორია (იხ. §1.1).

ამბობენ, რომ აბსოლუტურად მყარი (ე.ი. ისეთი მყარი სხეულები, რომელთა ნებისმიერ ორ წერტილს შორის მანძილი უცვლელია, მიუხედავად იმისა, თუ როგორი ძალები მოქმედებენ მათზე) სხეული *წონასწორობის მდგომარეობაშია,* თუ მასზე მოქმედი ძალებია წონასწორობაში, ხოლო *ძალთა სისტემა წონასწორობაშია*, თუ მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

ამდენად, წონასწორობაში მყოფ სხეულზე მოქმედი ყველა გარე ძალის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლია.

დალამბერის[*)] *პრინციპის* თანახმად მოძრავ სხეულზე მოქმედი გარე ძალები წონასწორდება ინერციის ძალით.

ინერციის ძალა ფიქტიური ძალაა, რომელიც ნიუტონის მეორე კანონის თანახმად $(-m\vec{a})$-ს ტოლია.

თეორიული მექანიკის განტოლებები სრულად აღწერენ მატერიალურ წერტილთა სისტემებისა და *აბსოლუტურად მყარი სხეულების* მოძრაობას. თუ მყარი სხეულის განხილვის პროცესში მასზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილი დროებით ან მუდმივად იცვლება, მაშინ მათ *დეფორმად მყარ სხეულებს,* ხოლო სხეულის წერტილთა მდებარეობის (სხეულის მდგომარეობის) ასეთ ცვლილებას *დეფორმაციას* ვუწოდებთ. დეფორმადი მყარი სხეულების

[*)] ჟ.ლ. დალამბერი (1717-1783).

ან გაზების და სითხეების მოძრაობის დასახასიათებლად თეორიული მექანიკის განტოლებები უკვე აღარ გამოდგება. მექანიკის იმ დარგს, რომელიც დეფორმად მყარ სხეულებს, გაზებს და სითხეებს შეისწავლის, ეწოდება *უწყვეტ გარემოთა* (*სხეულთა*) *მექანიკა*.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკაში მიღებულია ე.წ. *გამყარების პრინციპი,* რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

დეფორმადი სხეულის წონასწორობისათვის მასზე მოქმედმა გარე ძალებმა უნდა დააკმაყოფილონ იმავე ფორმის აბსოლუტურად მყარი სხეულის წონასწორობის პირობები.

გამყარების პრინციპის თანახმად, დეფორმადი სხეულის წონასწორობის ქვეშ ჩვენ გვესმის ის მდგომარეობა, როცა მისი და მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილის ფორმის მქონე აბსოლუტურად მყარი სხეული წონასწორობაშია დეფორმად სხეულზე და შესაბამისად მის ნებისმიერ ნაწილზე მოდებული გარე ძალების მოქმედების პირობებში.

უწყვეტ გარემოთა მექანიკა იყოფა *ჰიდროაერომექანიკად* ან, რაც იგივეა, გაზების და სითხეების მექანიკად და *დეფორმადი მყარი სხეულების* მექანიკად.

სხეულის თვისებას, მასზე მოდებული გარე ძალების მოხსნის შემდეგ დაიბრუნოს თავისი პირვანდელი მდგომარეობა, *დრეკადობა* ეწოდება.

სხეულის თვისებას, გარე ძალების მოქმედების შედეგად განიცადოს დიდი *პლასტიკური დეფორმაცია*, ე.ი. დეფორმაცია, რომელიც გარე ძალების მოხსნის შემდეგ რჩება, *პლასტიკურობა* ეწოდება.

ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების შესაბამისად დეფორმადი მყარი სხეულების მექანიკა იყოფა *დრეკადობის და პლასტიკურობის თეორიებად.* ჩვენ ძირითადად შევისწავლით დრეკადობის თეორიის ელემენტებს (ფირფიტებისა და ღეროების თეორიების ჩათვლით), თუმცა განვიხილავთ აგრეთვე პლასტიკურობის თეორიის, სითხის მოძრაობისა და დრეკადი სხეულისა და სითხის ურთიერთქმედების მოდელებსაც.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, *დრეკადობის თეორია მექანიკის ის დარგია, რომელიც შეისწავლის მოძრავ ან წონასწორობის მდგომარეობაში მყოფ დეფორმად მყარ სხეულში დეფორმაციებს და ამასთან დაკავშირებით წარმოქმნილ შინაგან ძალებს, რომლებიც გარეშე ფიზიკური ზემოქმედების შედეგად წარმოიშვებიან და რომლებიც ცდილობენ, დააბრუნონ სხეული პირვანდელ მდგომარებაში.*

ასეთივე ამოცანები შეისწავლება მექანიკის სხვა დარგშიც — *მასალათა გამძლეობაშიც*, მაგრამ მისი უხეში მეთოდები, რომლებიც მისაღებია ცალკეული ღეროებისაგან შედგენილი სხვადასხვა კონსტრუქციების შესასწავლად, გამოუსადეგარია ფირფიტებისა და გარსების შესწავლის დროს, საერთოდ რომ არაფერი ვთქვათ ზოგად სამგანზომილებიან ამოცანებზე.

დრეკადობის თეორია მჭიდროდ არის დაკავშირებული *სამშენებლო მექანიკასთან*, რაც წარმოადგენს მექანიკის იმ დარგს, რომელიც შეისწავლის ღეროებისაგან შემდგარი სისტემების — ბრტყელი და სივრცული ფერმების, თაღების, საყრდენი კედლებისა და სხვათა სიმტკიცის, სიხისტისა და მდგრადობის გათვლის თეორიას.

პირველი ცდა იმ ტიპის ამოცანების ამოხსნისა, რომელთაც დრეკადობის თეორია შეისწავლის, ეკუთვნის იტალიელ მეცნიერს *გალილეო გალილეის* (1564-1642), რომელიც შეეცადა, ამოეხსნა ამოცანა ღეროს ღუნვისა და გაჭიმვის შესახებ.

ინგლისელმა მეცნიერმა *რობერტ ჰუკმა* (1635-1702) 1678 წელს გამოქვეყნებული ნაშრომით, რომელიც ეხებოდა მის მიერ ექსპერიმენტულად აღმოჩენილ კანონს გაჭიმვის დროს გარკვეულ საზღვრებში დატვირთვასა და დეფორმაციას შორის წრფივი დამოკიდებულების შესახებ, ფაქტობრივად საფუძველი დაუდო დრეკადი სხეულების მექანიკას (იხ. §1.12).

ინგლისელმა *თომას იუნგმა* (1773-1829) XIX საუკუნის დასაწყისში შემოიღო დრეკადობის მოდულის ცნება. მან დაადგინა აგრეთვე განსხვავება გაჭიმვა-შეკუმშვისა და ძვრის დეფორმაციებს შორის. ამ დროისათვის *ჟ. ლაგრანჟის* (1736-1813), *სოფი*

ჟერმენის (1776-1831), *ს. პუასონის* (1781-1840) და *ლ.მ. ნავიეს* (1785-1836) შრომებით ფაქტობრივად შეიქმნა ფირფიტების თეორიის საფუძვლები.

ამდენად, XVIII-XIX საუკუნეების მიჯნაზე საფუძველი ჩაეყარა დრეკადობის თეორიას, რომელმაც შემდგომი არსებითი განვითარება ჰპოვა ფრანგი მეცნიერის *ო. კოშის* (1789-1857) შრომებში. მან შემოიღო დეფორმაციისა და ძაბვის ცნებები და საგრძნობლად გაამარტივა ძირითადი განტოლებების გამოყვანა.

1828 წელს *გ. ლამესა* (1795-1870) და *ბ. კლაპეირონის* (1799-1864) შრომებით ფაქტობრივად დასრულდა დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ძირითადი აპარატის შექმნა.

დრეკადობიის თეორიის განვითარებაში თვისობრივად ახალი ნაბიჯი იქნა გადადგმული *ბ. სენ-ვენანის* (1797-1886) მიერ მისივე სახელით ცნობილ პრინციპის ჩამოყალიბებით (იხ. § 1.20).

დრეკადობის თანამედროვე თეორიის შექმნაში უცხოელ მეცნიერებთან ერთად აღსანიშნავია ქართველი მეცნიერების *ნ. მუსხელიშვილის* (1891-1976), *ი. ვეკუას* (1907-1977), *ვ. კუპრაძის* (1903-1985) და მათი მოწაფეების ღვაწლიც.

ჰიდროაერომექანიკაში ჰუკის ექსპერიმენტული კანონის როლს თამაშობს ნიუტონის ექსპერიმენტული კანონი (იხ. §1.13). განიხილავენ სითხის ორ მოდელს: იდეალურსა და ბლანტს. იდეალური სითხის განტოლებები გამოიყვანა *ლ. ეილერმა* (1707-1783), ხოლო ბლანტი სითხისა კი ლ.მ. ნავიემ და *ჯ.გ. სტოქსმა* (1819-1903) (იხ. §1.23). ჰიდრომექანიკის ამოცანების შესწავლაში დიდი როლი შეასრულეს *ნ.ე. ჟუკოვსკისა* (1847-1921) და *ს.ა. ჩაპლიგინის* (1869-1942) შრომებმა. აღსანიშნავია *ლ. პრანდტლის* (1875-1953), *თ. კარმანის* (1881-1963) და *ო. რეინოლდსის* (1842-1912) დამსახურება ბლანტი სითხის მოძრაობის შესწავლის საქმეში. გასული საუკუნის 30-იან წლებში გიოტინგენის ჰიდრომექანიკის ინსტიტუტის ლ. პრანდტლის ლაბორატორიაში უნიკალური ექსპერიმენტები ჩაატარა *ი. ნიკურაძემ* (1894-1979). თბილისში მოღვაწე ქართველმა მეც-

ნიერებმა (*დ. დოლიძე* (1908-1960) და მისი მოწაფეები) გარკვეული წვლილი შეიტანეს ჰიდროაერომექანიკის განვითარებაში.

ნაწილი I. სამგანზომილებიანი მოდელები

თავი I. ძაბვების თეორია

§1.1. მოცულობითი და ზედაპირული ძალები

მექანიკაში არჩევენ ორი სახის ძალებს: *მოცულობითს* და *ზედაპირულს,* იმისდა მიხედვით, თუ რაზე მოქმედებენ ისინი: მოცულობით თუ ზედაპირულ ელემენტზე (იხ. მაგ., [2], [36], [53]). მოცულობითი ძალის ტიპური მაგალითია სიმძიმის და ინერციის ძალები, ხოლო ზედაპირული ძალისა კი წნევა.

მოცულობითი ძალები მოქმედებენ გარემოს სხვადასხვა ელემენტის მოცულობაზე, უფრო სწორად, მასაზე. მიღებულია, რომ მოცულობის dV უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1.1.1) მოქმედ მოცულობით ძალას აქვს $\vec{\Phi} dV$ სახე, სადაც $\vec{\Phi}$ რაიმე სასრული ვექტორია*), რომლის მოდების წერტილად შეიძლება მიღებულ იქნეს dV ელემენტის ნებისმიერი შიგა $x = (x_1, x_2, x_3)$ **) წერტილი. $\vec{\Phi}$-ს ეწოდება მოცულობის ერთეულზე გათვლილი *მოცულობითი ძალა.* ე.ი. მისი ერთეულებია

$$N / m^3 = \text{ნიუტონი/მ}^3 = ((\text{კგ.მ})/\text{წმ}^2)/\text{მ}^3 = ((kg.m)/s^2)/m^3 = kg/m^2 s^2 .$$

---

*) ძალა, როგორც ვექტორი, ხასიათდება შემდეგი სამი ელემენტით: მოდების წერტილით, სიგრძითა და გეზით. ასეთ ვექტორს ბმული ვექტორი ეწოდება. აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა *სრიალა ვექტორია*, რომელიც ხასიათდება შემდეგი სამი ელემენტით: სიგრძით, გეზით და ფუძით (*ვექტორის ფუძე* ეწოდება წრფეს, რომელზედაც ვექტორია მოთავსებული).

**) ქვემოთ, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩვენ განვიხილავთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა მარჯვენა $x_1 x_2 x_3$ სისტემას, რომლის ბაზისია $\vec{e}_1 = (1,0,0), \quad \vec{e}_2 = (0,1,0), \quad \vec{e}_3 = (0,0,1).$

თუ ρ აღნიშნავს გარემოს *სიმკვრივეს*, ე.ი. მოცულობის ერთეულში მოთავსებულ მასას, მაშინ მასის ერთეულზე გათვლილი მოცულობითი ძალა, რომელსაც *მასობრივ ძალას* უწოდებენ, $\vec{\Phi}/\rho$ –ს ტოლია. $\vec{\Phi}$ დამოკიდებულია ელემენტის მდებარეობაზე გარემოში ე.ი. x წერტილის *კოორდინატებზე*, ხოლო დინამიკურ შემთხვევაში – დროზეც. მთელ V მოცულობაზე მოქმედი მოცულობითი ძალების *მთავარი (ნაკრები) ვექტორი* გამოისახება შემდეგი სამჯერადი ინტეგრალით (მისი ერთეულია N ნიუტონი)

$$\vec{\Psi} = \iiint_V \vec{\Phi} dV,$$

ხოლო ამავე მოცულობითი ძალების *მთავარი (ნაკრები) მომენტი* – ინტეგრალით (მისი ერთეულია $N \cdot m =$ ნიუტონი$\cdot$ მ)

$$\vec{M} = \iiint_V [\vec{x}, \vec{\Phi}] dV, \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

($\vec{x}$, $\vec{\Phi}$ და $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$*) ვექტორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს). ამ უკანასკნელის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე მოგვცემენ მთავარ მომენტებს მათ მიმართ.

---

*) $\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი განისაზღვრება, როგორც ვექტორი აღნიშნული $\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right]$ სიმბოლოთი, რომლის მოდული (სიგრძე) გამოითვლება

$$\left|\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right]\right| = |\vec{x}|\left|\vec{\Phi}\right| \sin\left(\vec{x}, \hat{\vec{\Phi}}\right)$$

ფორმულით, სადაც $\left(\vec{x}, \hat{\vec{\Phi}}\right)$ უმცირესი კუთხეა $\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორებს შორის, ამასთან $\vec{x}$, $\vec{\Phi}$ და $[\vec{x}, \vec{\Phi}]$ ვექტორები ქმნიან მარჯვენა სამეულს და $\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right]$ ორთოგონალურია, როგორც $\vec{x}$, ასევე $\vec{\Phi}$ ვექტორის მიმართ. ფორმალურად,

შენიშვნა. $\left[\vec{x},\vec{\Phi}\right]$ მომენტი განსაზღვრულია კოორდინატთა სისტემის O სათავის მიმართ. თუ მომენტს ავიღებთ სივრცის რაიმე სხვა O' წერტილის მიმართ, მაშინ (იხ. ნახ. 1.1.1)

$$\left[\vec{x}',\vec{\Phi}\right]=\left[\vec{x},\vec{\Phi}\right]-\left[\overrightarrow{OO'},\vec{\Phi}\right], \qquad (1.1.1)$$

რადგან

$$\vec{x}'=\vec{x}-\overrightarrow{OO'}.$$

ამდენად, ახალი ცენტრის მიმართ ვექტორის მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე მოდებული ამავე ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ.

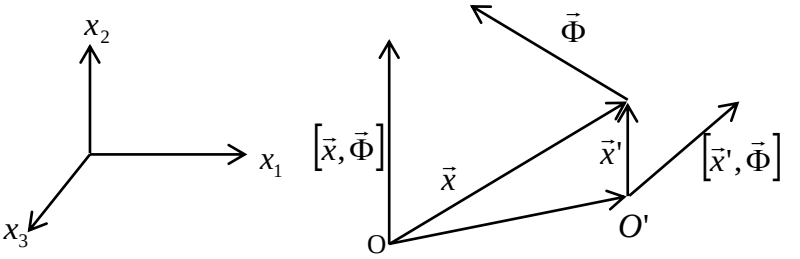
თუ $\vec{x}:=(x_1,x_2,x_3)$ და $\vec{\Phi}:=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)$ ვექტორები მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებით, მაშინ ვექტორული ნამრავლი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი "დეტერმინანტის" სახით:

$$\left[\vec{x},\vec{\Phi}\right]=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3\end{vmatrix}.$$

$\vec{x}$ და $\vec{\Phi}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი განიმარტება

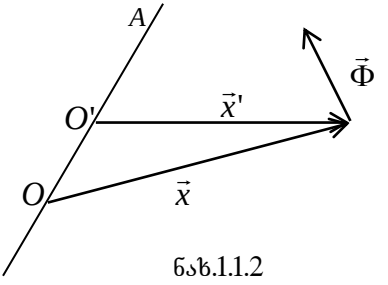
$$\left(\vec{x},\vec{\Phi}\right):=\left|\vec{x}\right|\left|\vec{\Phi}\right|\cos(\hat{\vec{x},\vec{\Phi}})=\sum_{i=1}^{3}x_i\Phi_i.$$

ტოლობით.



ნახ 1.1.1

ვექტორის მომენტი რაიმე A ღერძის მიმართ ეწოდება ამ ღერძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ვექტორის მომენტის გეგმილს ამავე ღერძზე. ადვილი მისახვედრია, რომ ღერძის მიმართ მომენტი არ არის დამოკიდებული ღერძზე ზემოაღნიშნული წერტილის შერჩევაზე. მართლაც (იხ. ნახ. 1.1.2), ვინაიდან, ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად, $\left[\overrightarrow{OO'},\vec{\Phi}\right]$ მართობულია $\overline{OO'}$-ის, რადგან ის $\overrightarrow{OO'}$ და O' წერტილში მოდებულ $\vec{\Phi}$ ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის მართობულია, ამიტომ



ნახ.1.1.2

$$\text{გეგ}_A\left[\overrightarrow{OO'},\vec{\Phi}\right]=0\,.$$

აქედან გამომდინარე (1.1.1)-დან მივიღებთ, რომ

$$\text{გეგ}_A\left[\vec{x}', \vec{\Phi}\right] = \text{გეგ}_A\left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right].$$

ვექტორების გეომეტრიულ ჯამს ამ ვექტორთა სისტემის *ნაკრები (მთავარი) ვექტორი* ეწოდება.

თავმოყრილ ვექტორთა სისტემა ეწოდება ვექტორთა ისეთ სისტემას, რომელთა ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთება. ამ წერტილს *თავმოყრის წერტილი* ეწოდება.

თავმოყრილ ვექტორების რაიმე წერტილის მიმართ მომენტების გეომეტრიულ ჯამს ეწოდება თავმოყრილ ვექტორთა ამ სისტემის *ნაკრები (მთავარი) მომენტი.*

(1.1.1) ფორმულის ძალით ადვილად დავასკვნით, რომ ახალი O' ცენტრის მიმართ ნაკრები $\vec{L}'$ მომენტი უდრის ძველი O ცენტრის მიმართ ნაკრებ $\vec{L}$ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე მოდებული ნაკრები R ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ:

$$\vec{L}' = \vec{L} - \left[\overrightarrow{OO'}, \vec{R}\right].$$

აქედან ცხადია, რომ ნაკრები მომენტი არ არის დამოკიდებული ცენტრის შერჩევაზე, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია.

ვარინიონის*) დებულება. თავმოყრილ ვექტორთა სისტემის ნაკრები მომენტი რაიმე წერტილის მიმართ უდრის ამ სისტემის ნაკრები ვექტორის მომენტს ამავე წერტილის მიმართ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნაკრები ვექტორი თავმოყრის წერტილშია მოდებული.

მიღებულია, რომ $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ზედაპირის dS უსასრულოდ მცირე ელემენტზე (იხ. ნახ. 1.1.3) მოქმედ ზედაპირულ ძალას აქვს $\vec{X}_n dS$ სახე, სადაც $\vec{X}_n$ რაიმე სასრული ვექტორია, რომლის *მოდების წერტილად* შეიძლება მიღებულ იქნეს dS

---

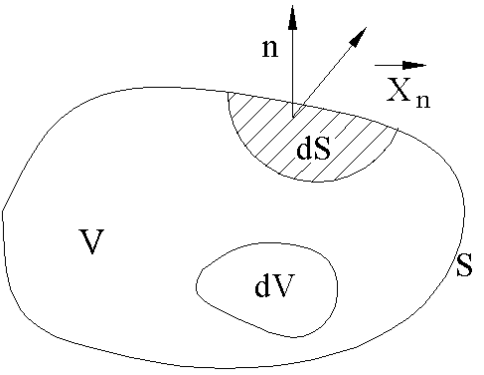
*) პ. ვარინიონი (1654 – 1722)

ელემენტის ნებისმიერი x შიგა წერტილი. $\vec{X}_n$-ს ეწოდება ფართის ერთეულზე გათვლილი ზედაპირული ძალა (მისი ერთეულია $Pa = N/m^2$ პასკალი). მთელ S ზედაპირზე მოქმედი *ზედაპირული ძალა* (მისი ერთეულია $Pa \cdot m^2 = N$ ნიუტონი) გამოისახება შემდეგი ზედაპირული ინტეგრალით

$$\vec{F} = \iint_S \vec{X}_n dS,$$

ხოლო *მთავარი მომენტი* (მისი ერთეულია $m \cdot Pa \cdot m^2 = N \cdot m$) – ინტეგრალით

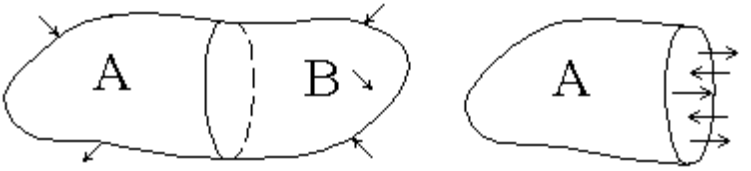
$$\vec{X} = \iint_S [\vec{x}, \vec{X}_n] dS.$$



ნახ. 1.1.3

არადეფორმირებულ სხეულში ნაწილაკების განლაგება შეესაბამება სხეულის სითბურ წონასწორობას. თუ სხეულიდან აზრობრივად გამოვყოფთ რაიმე მოცულობას, მაშინ ყველა ძალა, რომელიც მასზე მოქმედებს სხეულის სხვა ნაწილების მხრიდან, გა-

წონასწორებული იქნება; გარე ძალების მოქმედების შედეგად კი ნაწილაკების განლაგება სხეულში იცვლება, ე.ი. სხეული განიცდის დეფორმაციას, რის შედეგადაც წარმოიშობა შინაგანი ძალები, რომლებიც ცდილობენ დაუბრუნონ სხეული პირვანდელ მდგომარეობას. მათი განსაზღვრისათვის გამოიყენება ე.წ. *კვეთის მეთოდი.* ვთქვათ, გარე ძალების მოქმედებით დეფორმირებული სხეული წონასწორობაშია. აზრობრივად გავკვეთოთ ის რაიმე ზედაპირით (იხ. ნახ. 1.1.4) ორ A და B ნაწილებად. აზრობრივად ჩამოვაშოროთ B ნაწილი და მისი მოქმედება A ნაწილზე შევცვალოთ კვეთის გასწვრივ მოდებული ისეთი ძალების მოქმედებით, რომლებიც არ გამოიწვევენ A ნაწილის დეფორმირებული მდგომარეობის შეცვლას. ეს უკანასკნელი ძალები ახლა შეიძლება გავიგოთ, როგორც A ნაწილზე მოდებული გარე ზედაპირული ძალები.



ნახ. 1.1.4

თუ ვიგულისხმებთ, რომ ნახ. 1.1.3-ზე გამოსახული სხეული რაიმე სხვა სხეულებიდან აზრობრივად გამოყოფილი ნაწილია, მაშინ $\vec{X}_n dS$ -ს უწოდებენ დაძაბულობის ძალას ან ძაბვას, ხო-

ლო $\vec{X}_n$-ს – ფართის ერთეულზე გაანგარიშებულ ძაბვას ან ძაბვის ვექტორს. ე.ი. მისი ერთეულია $Pa = N / m^2$.

ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $\vec{X}_n\, dS$ გამოხატავს იმ ზედაპირულ ძალას, რომლითაც dS-ის საშუალებით S ზედაპირის გარეთ მდებარე გარემოს ნაწილი მოქმედებს მის შიგნით მდებარე ნაწილზე. მაშინ, ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, შიგა ნაწილი dS-ის საშუალებით გარე ნაწილზე იმოქმედებს $\vec{X}_{-n}\, dS = -\vec{X}_n\, dS$ ზედაპირული ძალით. ინდექსი n აღნიშნავს, რომ $\vec{X}_n = (X_{n1}, X_{n2}, X_{n3})$ ძაბვის ვექტორი მოქმედებს $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ნორმალის მქონე ფართზე. მის გეგმილს $\vec{n}$ ნორმალის მიმართულებაზე ეწოდება ძაბვის ვექტორის σ_n *ნორმალური მდგენელი,* ხოლო მოდების წერტილში გამავალ მხებ სიბრტყეზე გეგმილს – τ_n *მხები მდგენელი.*

ძაბვის ტენზორის კომპონენტების აღსანიშნავად გამოიყენება სხვადასხვა აღნიშვნა, რომლებზეც ნათელ წარმოდგენას გვაძლევენ შემდეგი მატრიცული ტოლობები:

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

§1.2. ძაბვის ვექტორის დამოკიდებულება ფართის ორიენტაციაზე

X_{ij}-თ, $i, j = 1,2,3,$ აღვნიშნოთ x_i ნორმალის მქონე ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის გეგმილი x_j ღერძზე.

ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს *კოშის* შემდეგ *ფორმულებს* (იხ., მაგალითად, [2], [36], [53])

$$X_{n\,i} = X_{ji} n_j \text{ *)}. \qquad (1.2.1)$$

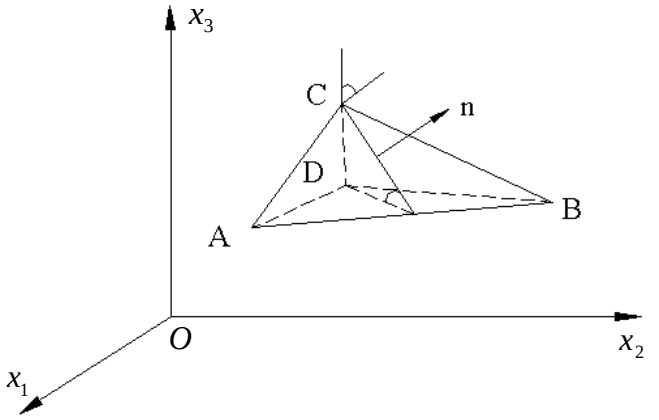
ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ, თუ ცნობილია მოცემულ წერტილზე გამავალ სამ ურთიერთმართობ ფართზე მოქმედი ძაბვები აღნიშნულ წერტილში, მაშინ შეიძლება გამოვთვალოთ ამ წერტილზე გამავალ ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორი ამავე წერტილში:

$$\vec{X}_n = X_{n\,i}\vec{e}_i = X_{j\,i}\ n_j\vec{e}_i \qquad (1.2.2)$$

მატრიცს, რომლის ელემენტებია X_{ji}, $i, j = 1,2,3,$ უწოდებენ *ძაბვის ტენზორს* (იხ. §1.4).

---

*) თუ რაიმე ინდექსი ერთწევრში მხოლოდ ორჯერ გვხვდება, ჩვენ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ხდება ჯამვა მის მიმართ ინდექსის ცვლილების სიმრავლეზე (შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ ლათინური არამთავრული ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს 1,2,3, ხოლო ბერძნული კი 1,2). იმ შემთხვევაში, როცა ასეთ ფაქტს ადგილი აქვს, მაგრამ ჯამვა არ უნდა მოხდეს, ერთ-ერთ ინდექსს ქვემოდან ან ზემოდან გავუსვამთ ხაზს. მაგალითად, $a_{ii} := \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$, $a_i^{\,i} := \sum_{i=1}^{3} a_i^{\,i}$, მაგრამ $a_{\underline{ii}} = a_{i\bar{i}}$ აღნიშნავს სამ ელემენტს: a_{11}, a_{22}, a_{33}-ს იმისდა მიხედვით, თუ რა მნიშვნელობას იღებს i.



ნახ. 1.2.1

გავავლოთ სხეულის რაიმე D წერტილში საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები და მისგან h უსასრულოდ მცირე მანძილით დაშორებული $\vec{n}$ ნორმალის მქონე სიბრტყე. მივიღებთ $ABCD$ ტეტრაედრს (იხ. ნახ. 1.2.1). *ვიგულისხმოთ, რომ მოცულობითი და ზედაპირული ძალები გარემოს წერტილის მიმართ უწყვეტი ფუნქციებია.* თუ დავუშვებთ, რომ სხეული წონასწორობაშია, მაშინ ტეტრაედრზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი ნულის ტოლი უნდა იყოს.

თუ ტეტრაედრის მოცულობას აღვნიშნავთ ΔV-თი, მასზე მოქმედი მოცულობითი ძალის x_i ღერძზე გეგმილი იქნება

$$(\Phi_i + \varepsilon_i)\Delta V ,$$

რადგან Φ_i-ის მნიშვნელობას ვიღებთ D წერტილში, ხოლო $\Phi_i(P) = \Phi_i(D) + \varepsilon_i$, სადაც P ტეტრაედრის რაიმე შიგა წერ-

ტილია და $\vec{\Phi}$-ის უწყვეტობის გამო ε_i უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა $h \to 0.$

ანალოგიურად, *ABC* ზედაპირზე მოქმედი ზედაპირული ძალის x_i ღერძზე გეგმილი იქნება

$$(X_{ni} + \varepsilon_i')\sigma\,,$$

სადაც σ არის *ABC* სამკუთხედის ფართი, ხოლო ε_i' უსასრულოდ მცირე სიდიდეა, როცა $h \to 0.$

ცხადია, *ACD, BCD* და *ABD* ზედაპირებზე, რომელთა გარე ნორმალებია შესაბამისად $-x_2$, $-x_1$ და $-x_3$, მოქმედი ზედაპირული ძალების x_i ღერძზე გეგმილების ჯამი იქნება

$$(-X_{ji} + \varepsilon_{ji})\sigma_j\,,$$

სადაც σ_1, σ_2, σ_3 შესაბამისად *BCD, ACD* და *ABD* სამკუთხედების ფართობებს აღნიშნავენ, ε_{ji}, $j,i = 1,2,3$, უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, როცა $h \to 0$. მაგრამ

$$\Delta V = \frac{1}{3}h\sigma, \quad \sigma_j = \sigma n_j.$$

უკანასკნელი ცხადია სამი პერპენდიკულარის თეორემის თანახმად (იხ. ნახ. 1.2.1).

ამრიგად,

$$(\Phi_i + \varepsilon_i)\frac{h\sigma}{3} + (X_{ni} + \varepsilon_i')\sigma + (-X_{ji} + \varepsilon_{ji})\sigma\ \ n_j = 0.$$

ამ უკანასკნელის σ-ზე გაყოფისა და h-ის ნულისაკენ მისწრაფების შემდეგ მივიღებთ (1.2.1)-ს.

§1.3. წონასწორობის განტოლებები

დავუშვათ, რომ ძაბვის ვექტორს, რომლის უწყვეტობაც ჩვენ წინა პარაგრაფში მოვითხოვეთ, სხეულის ნებისმიერ წერტილში

აქვს უწყვეტი წარმოებულები.

ვიგულისხმოთ, რომ განსახილველი სხეული წონასწორობის მდგომარეობაშია და, გამყარების პრინციპის თანახმად, დავწეროთ სხეულიდან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი V მოცულობის, რომლის S საზღვარი არ ეხება სხეულის საზღვარს, წონასწორობის

$$\iiint\limits_V \vec{\Phi} dV + \iint\limits_S \vec{X}_n \, dS = 0 \,, \tag{1.3.1}$$

$$\iiint\limits_V \left[\vec{x}, \vec{\Phi}\right] dV + \iint\limits_S \left[\vec{x}, \vec{X}_n\right] dS = 0 \tag{1.3.2}$$

პირობები.

თუ ჩავსვამთ (1.3.1)-ის მეორე შესაკრებში (1.2.2)-ს, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად (ვიგულისხმოთ, რომ S ზედაპირისთვის იგი სამართლიანია. მაგალითად, S ზედაპირი ლიპშიცისაა (იხ. დამატება 1). განსახილველი სხეულის საზღვარი კი შეიძლება იყოს არალიპშიცურიც, რადგან წონასწორობის განტოლებები გამოგვყავს არეში და არა არის ჩაკეტვაზე, რომელიც სხეულს უკავია, და ამდენად ყოველთვის მოიძებნება სხეულის ნებისმიერი შიგა წერტილის შემცველი ზემოხსენებული V არე ლიპშიცის საზღვრით), თუ $\vec{n}$ გარე ნორმალია მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \vec{X}_n \, dS &= \iint\limits_S X_{ji} \vec{e}_i n_j \, dS \\ &= \iiint\limits_V (X_{ji} \vec{e}_i)_{,j} \, dV = \iiint\limits_V X_{ji,j} \vec{e}_i \, dV. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

(1.3.1) და (1.3.3)-დან ცხადია, რომ

---

*), i-თი აღვნიშნავთ წარმოებულს x_i ცვლადის მიმართ, ხოლო ij-თი – მეორე რიგის წარმოებულს x_i და x_j ცვლადების მიმართ. მაგალითად,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv u_{,i} \,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \equiv u_{,ij} \,.$$

$$\iiint_V \left(\Phi_i + X_{ji,j}\right)\vec{e}_i\,dV = 0.$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უწყვეტობისა და V არის ნებისმიერობის გამო

$$\left(\Phi_i + X_{ji,j}\right)\vec{e}_i = 0\,. \tag{1.3.4}$$

რადგან $\vec{e}_i$, $i=1,2,3$, წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა, ამიტომ

$$\Phi_i + X_{ji,j} = 0,\ i=1,2,3. \tag{1.3.5}$$

ამ განტოლებათა სისტემას *წონასწორობის განტოლებებს* უწოდებენ.

ანალოგიურად გარდავქმნათ (1.3.2)-ის მეორე შესაკრები

$$\iint_S \left[\vec{x},\vec{X}_n\right]dS = \iint_S \left[\vec{x},X_{ji}\vec{e}_i\right]n_j\,dS = \iiint_V \left[\vec{x},X_{ji}\vec{e}_i\right]_{,j}\,dV$$
$$= \iiint_V \left[\vec{x}_{,j},X_{ji}\vec{e}_i\right]dV + \iiint_V \left[\vec{x},(X_{ji}\vec{e}_i)_{,j}\right]dV$$
$$= \iiint_V \left[\vec{e}_j,X_{ji}\vec{e}_i\right]dV + \iiint_V \left[\vec{x},X_{ji,j}\vec{e}_i\right]dV.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.3.2)-ში

$$\iiint_V \left[\vec{x},\left(\Phi_i + X_{ji,j}\right)\vec{e}_i\right]dV + \iiint_V \left[\vec{e}_j,X_{ji}\vec{e}_i\right]dV = 0\,.$$

პირველი შესაკრები (1.3.4)-ის ძალით ნულის ტოლია, ხოლო მეორე შესაკრებიდან ინტეგრალქვეშა გამოსახულების უწყვეტობისა და V-ს ნებისმიერობის გამო ვიღებთ, რომ

$$\left[\vec{e}_j,X_{ji}\,\vec{e}_i\right] = X_{ji}\left[\vec{e}_j,\vec{e}_i\right] = 0\,.$$

ჩავწეროთ ეს უკანასკნელი ცხადი ჯამის სახით და გავითვალისწინოთ, რომ $\left[\vec{e}_i,\vec{e}_j\right]=0$, თუ $i=j$, და $\left[\vec{e}_i,\vec{e}_j\right] = -\left[\vec{e}_j,\vec{e}_i\right]$, თუ $i\neq j$, მაშინ

$$X_{12}[\vec{e}_1,\vec{e}_2]+X_{13}[\vec{e}_1,\vec{e}_3]+X_{21}[\vec{e}_2,\vec{e}_1]$$
$$+X_{23}[\vec{e}_2,\vec{e}_3]+X_{31}[\vec{e}_3,\vec{e}_1]+X_{32}[\vec{e}_3,\vec{e}_2]$$
$$=(X_{12}-X_{21})[\vec{e}_1,\vec{e}_2]+(X_{23}-X_{32})[\vec{e}_2,\vec{e}_3]+(X_{31}-X_{13})[\vec{e}_3,\vec{e}_1]$$
$$=(X_{12}-X_{21})\vec{e}_3+(X_{23}-X_{32})\vec{e}_1+(X_{31}-X_{13})\vec{e}_2=0,$$

ე.ი.

$$X_{ij}=X_{ji},\quad i\neq j. \tag{1.3.6}$$

ამრიგად, *ძაბვის ტენზორი სიმეტრიულია.*

თუ გარემოს რაიმე წერტილში ავიღებთ მასზე გამავალ ორ ფართით ელემენტს შესაბამისად $\vec{n}'=(n'_1,n'_2,n'_3)$ და $\vec{n}''=(n''_1,n''_2,n''_3)$ ნორმალებით, მაშინ ერთ ფართით ელემენტზე მოქმედი $\vec{X}_{n'}$ ძაბვის ვექტორის გეგმილი მეორის ნორმალზე უდრის მეორეზე მოქმედი $\vec{X}_{n''}$ ძაბვის ვექტორის გეგმილს პირველზე:

$$\text{გეგ}_{n''}\vec{X}_{n'}=\text{გეგ}_{n'}\vec{X}_{n''}. \tag{1.3.7}$$

მართლაც, (1.2.1)-ის და (1.3.6)-ის თანახმად,

$$\text{გეგ}_{n''}\vec{X}_{n'}=(\vec{X}_{n'},n'')=X_{n'i}\,n''_i=X_{ij}\,n'_j\,n''_i. \tag{1.3.8}$$

ანალოგიურად,

$$\text{გეგ}_{n'}\vec{X}_{n''}=X_{ij}\,n_j''n_i'.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა მხარეში თუ აჯამვის ინდექსებს ადგილებს შევუცვლით და გავითვალისწინებთ (1.3.6)-ს, მივიღებთ, რომ

$$\text{გეგ}_{n'}\vec{X}_{n''}=X_{ij}\,n_i''n'_j. \tag{1.3.9}$$

(1.3.8) და (1.3.9) ტოლობების შედარებით, რადგან მათი მარჯვენა მხარეები ტოლია, ვრწმუნდებით (1.3.7)-ის სამართლიანობაში.

§1.4. კოორდინატთა სისტემის შეცვლა. ინვარიანტული კვადრატული ფორმა

ვთქვათ, ახალი $O'x^1x^2x^3$ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ღერძების ($\vec{e}^{\,i}$, $i=1,2,3,$ ორტებით) მიმმართველი კოსინუსები ძველი $Ox_1x_2x_3$ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის ($\vec{e}_j$, $j=1,2,3,$ ორტებით) მიმართ (და პირიქით), მოცემულია

$$\alpha_{ij} \equiv \alpha^i_j := (\vec{e}^{\,i}, \vec{e}_j) = \cos\left(x^i, x_j\right)^{*)}$$

ტოლობებით.

ახალ კოორდინატთა სისტემაში ძაბვები აღვნიშნოთ $\tilde{X}_{kl}$-ით, მაშინ, (1.3.8)-ის თანახმად,

$$X^{kl} \equiv \tilde{X}_{kl} := \text{გეგ}_{x^l}\tilde{\tilde{X}}_{x^k} \equiv \text{გეგ}_{\vec{e}^{\,l}}\tilde{\tilde{X}}_{\vec{e}^{\,k}} = X_{ij}\alpha^k_j\alpha^l_i\,. \qquad (1.4.1)$$

ეს ტოლობები გვაძლევენ კავშირს ძაბვებს შორის ძველ და ახალ კოორდინატთა სისტემაში.

თუ მოცემულია რაიმე წესი, რომლის მიხედვითაც ყოველ კოორდინატთა სისტემას (საზოგადოდ მრუდწირულს) ეთანადება, საზოგადოდ, წერტილზე დამოკიდებული

$$A^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$$

სიდიდე, მაშინ ამ სიდიდეს ეწოდება $p+q$ რანგის (p,q) *ტიპის ტენზორი*[*)] (იხ., მაგ., [1]), თუ ძველი სისტემიდან ახალ

---

*) $\vec{e}^{\,i} = \cos(\vec{e}^{\,i}, \vec{e}_j)\vec{e}_j = \alpha^i_j\vec{e}_j$,

$\vec{e}_i = \cos(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,j})\vec{e}^{\,j} = \cos(\vec{e}^{\,j}, \vec{e}_i)\vec{e}^{\,j} = \alpha^j_i\vec{e}^{\,j}$.

*) ორი $A := A^{i_1..i_m}_{j_1..j_n}$ და $B := B^{k_1..k_p}_{l_1..l_q}$ ტენზორის პირდაპირი ნამრავლი ეწოდება

სისტემაზე გადასვლის დროს ის გარდაიქმნება შემდეგი ფორმულებით:

$$\widetilde{A}^{k_1..k_p}_{l_1..l_q} = A^{i_1..i_p}_{j_1..j_q} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{i_1}} ... \frac{\partial x^{k_p}}{\partial x_{i_p}} \cdot \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{l_1}} ... \frac{\partial x_{j_q}}{\partial x^{l_q}} .$$

$(0,q)$ **) ტიპის ტენზორს ეწოდება *კოვარიანტული*, ხოლო $(p,0)$ ტიპის ტენზორს – *კონტრავარიანტული*. რადგანაც

$$\widetilde{A}^{k_1} := dx^{k_1} = \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} = A^{i_1} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{i_1}}, \quad A^{i_1} := dx_{i_1};$$

და

$$\widetilde{A}_{i_1} := \frac{\partial f}{\partial x^{l_1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{l_1}} = A_{j_1} \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{l_1}}, \quad A_{j_1} := \frac{\partial f}{\partial x_{j_1}},$$

სადაც, f სკალარული სიდიდეა, ცხადია, რომ ყოველი კონტრავარიანტული ინდექსის მიმართ გარდაქმნა ხდება კოორდინატების დიფერენციალების გარდაქმნის ფორმულების შესაბამისად, ხოლო ყოველი კოვარიანტული ინდექსის მიმართ – სკალარის წარმოებულების გარდაქმნის შესაბამისად.

შევნიშნოთ, რომ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატების შემთხვევაში

$$x_l = \alpha^k_l x^k + \beta_l, \; l = 1,2,3; \quad x^k = \alpha^k_l x_l - \alpha^k_l \beta_l, \; k = 1,2,3, \; (1.4.1)^*$$

სადაც $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \overrightarrow{OO'}$. ამიტომ

$$C := C^{i_1..i_m k_1..k_p}_{j_1..j_n l_1..l_q} := A^{i_1..i_m}_{j_1..j_n} \cdot B^{k_1..k_p}_{l_1..l_q}$$

ტენზორს. მოკლედ ის შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$C = A \otimes B.$$

**) $p = 0$ და $q = 0$ ნიშნავს, რომ შესაბამისი ინდექსები არ გვაქვს.

$$\frac{\partial x^k}{\partial x_l} = \alpha^{\ k}_{j}\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \alpha^{\ k}_{j}\delta_{\ jl} = \alpha^{\ k}_{l}\ ,$$

$$\frac{\partial x_l}{\partial x^k} = \alpha_{\ l}^{j}\delta_{\ jk} = \alpha_{\ l}^{k}\ .$$

აქ

$$\delta_{\ jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k; \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

კრონეკერის[*)] სიმბოლოა. ამდენად,

$$\alpha^{\ k}_{l} = \frac{\partial x^k}{\partial x_l} = \frac{\partial x_l}{\partial x^k}\ . \qquad (1.4.2)$$

ამიტომ ამ შემთხვევაში კოვარიანტული და კონტრავარიანტული ტენზორები ერთმანეთს ემთხვევა.

(1.4.2)-ის თანახმად, ცხადია, (1.4.1) შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$X^{\ kl} \equiv \widetilde{X}_{\ kl} = X_{\ ij}\frac{\partial x^k}{\partial x_j}\frac{\partial x^l}{\partial x_i} = X_{\ ij}\frac{\partial x_j}{\partial x^k}\frac{\partial x_i}{\partial x^l}\ .$$

ეს კი ტენზორის განმარტების თანახმად იმას ნიშნავს, რომ $X_{\ ij}$ მეორე რანგის ტენზორია.

საზოგადოდ, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში,

$$\frac{\partial x^{k_1}}{\partial x_{i_1}} = \alpha^{\ k_1}_{i_1}, \ldots, \frac{\partial x^{k_p}}{\partial x_{i_p}} = \alpha^{\ k_p}_{i_p}; \frac{\partial x_{j_1}}{\partial x^{l_1}} = \alpha^{\ l_1}_{j_1}, \ldots, \frac{\partial x_{j_q}}{\partial x^{l_q}} = \alpha^{\ l_q}_{j_q}.$$

კერძოდ,

$$A^i \equiv \widetilde{A}_{\ i} = \alpha^{\ i}_{j}A_j,\ A^{ij} \equiv \widetilde{A}_{\ ij} = \alpha^{\ i}_{k}\alpha_{\ l}^{j}A_{kl},$$

$$A^{ijk} \equiv \widetilde{A}_{\ ijk} = \alpha^{\ i}_{l}\alpha^{\ j}_{m}\alpha^{\ k}_{n}A_{lmn},$$

შესაბამისად, პირველი, მეორე და მესამე რანგის ტენზორის

[*)] ლ. კრონეკერი (1823-1891).

შემთხვევაში.

ზედაპირის n ნორმალის მქონე უსასრულოდ მცირე ელემენტის ფართის ერთეულზე მოქმედი ძაბვის $\vec{X}_n$ ვექტორის ნორმალური σ_n მდგენელი, (1.3.8)-ის თანახმად,

$$\sigma_n := X_{nn} = X_{ij}\, n_j n_i . \qquad (1.4.3)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := X_{ij}\xi_i\xi_j . \qquad (1.4.4)$$

$\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ მეორე რიგის მთელი რაციონალური ფუნქციაა ξ_i, $i = 1,2,3,$ ცვლადების მიმართ, ე.ი. ξ_i, $i = 1,2,3,$ ცვლადების კვადრატულ ფორმას წარმოადგენს.

ვთქვათ,

$$\vec{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

ზედაპირის განსახილველი უსასრულოდ მცირე ელემენტის ნორმალის დადებითი მიმართულების მქონე ვექტორია. მაშინ

$$n = \frac{\vec{P}}{P}, \quad \text{ე.ი.,} \quad n_i = \frac{\xi_i}{P}, \; i = 1,2,3, \qquad (1.4.5)$$

სადაც P არის $\vec{P}$ ვექტორის სიგრძე.

(1.4.3)-(1.4.5)-ის თანახმად, ცხადია,

$$\sigma_n \cdot P^2 = 2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3) . \qquad (1.4.6)$$

σ_n სიდიდე, მისი განმარტებიდან გამომდინარე, ფიზიკური სიდიდეა და ამიტომ არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. ასევე ვექტორის სიგრძის კვადრატი P^2 არ არის დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე. ამდენად, $\sigma_n \cdot P^2$ ნამრავლი არ იქნება დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე და აქედან გამომდინარე $2\Omega(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ კვადრატული ფორმა ინვარიანტულია კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნის მიმართ. საერთოდ, *გამოსახულებას (ფორმას, ინტეგრალს და სხვ.), რომელიც შედგება ისეთი სიდიდეებისგან,*

რომლებიც დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე, მაგრამ არ იცვლის თავის მნიშვნელობას და სტრუქტურას კოორდინატთა ერთი სისტემის მეორეთი შეცვლის დროს, ეწოდება ინვარიანტული (ინვარიანტული ფორმა, ინვარიანტული ინტეგრალი და სხვ.).

მართლაც, თუ $\tilde{\xi}_i \quad i=1,2,3,$ $\vec{P}$ ვექტორის კომპონენტებია ახალ კოორდინატთა სისტემაში და $\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\xi}_3)$-ით აღვნიშნავთ ახალ კოორდინატთა სისტემაში (1.4.4) წესით აგებულ კვადრატულ ფორმას, მაშინ

$$\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\xi}_3)=\Omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,, \tag{1.4.7}$$

რადგან ერთი მხრივ ადგილი აქვს (1.4.6) ტოლობას, ხოლო მეორე მხრივ

$$\sigma_n\cdot P^2=2\tilde{\Omega}(\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_2,\tilde{\xi}_3)\,.$$

თუ (1.4.7)-ს გადმოვწერთ ცხადი სახით:

$$\tilde{X}_{kl}\tilde{\xi}_k\ \tilde{\xi}_l=X_{ij}\xi_i\xi_j \tag{1.4.8}$$

და ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ ანალიზური გეომეტრიიდან ცნობილ ახალ და ძველ კოორდინატებში ვექტორის კომპონენტებს შორის კავშირის

$$\xi_l=x_l-x_l^0=\alpha_l^k(\tilde{x}_k-\tilde{x}_k^0)+\beta_l-\beta_l=\alpha_l^k\tilde{\xi}_k\,,$$

ე.ი.,

$$\xi_i=\alpha_i^l\tilde{\xi}_l,\quad \xi_j=\alpha_j^k\tilde{\xi}_k\ ^{*)} \tag{1.4.9}$$

ფორმულებს, კვლავ მივიღებთ (1.4.1)-ს.

) ეს ფორმულები, ცხადია, გამომდინარეობს (1.4.1)-დან.

§1.5. მთავარი ძაბვები. ძაბვის მთავარი მიმართულებები. ძაბვის ზედაპირი

მიმართულებას, რომლის პერპენდიკულარულ ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვა მოქმედებს, განსახილველ წერტილში *ძაბვის მთავარი მიმართულება* ეწოდება, ხოლო შესაბამის ნორმალურ ძაბვას – *მთავარი ძაბვა*. ე.ი. მთავარი ძაბვის ვექტორი ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ნორმალის პარალელურია. ამდენად

$$\vec{X}_n = \sigma\vec{n}, \quad \text{ე.ი.,} \quad X_{nj} = X_{jk}n_k = \sigma n_j, \quad j = 1,2,3, \qquad (1.5.1)$$

სადაც σ სკალარული სიდიდეა.

(1.5.1) გადმოვწეროთ შემდეგი სახით

$$(X_{jk} - \sigma\,\delta_{jk})n_k = 0\,. \qquad (1.5.2)$$

იმისათვის, რომ n_k-ს, $k = 1,2,3,$ მიმართ ერთგვაროვან ალგებრულ განტოლებათა (1.5.2) სისტემას ჰქონდეს არატრივიალური ამონახსნი, აუცილებელი და საკმარისია

$$\det\left\|X_{jk} - \sigma\,\delta_{jk}\right\| = 0\,. \qquad (1.5.3)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ უკანასკნელს მხოლოდ ნამდვილი σ^l ფესვები აქვს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ,

$$\sigma^l = \alpha^l + i\beta^l, \quad \beta^l \neq 0, \qquad (1.5.4)$$

და შესაბამისად ამისა

$$n_k^l = p_k^l + iq_k^l. \qquad (1.5.5)$$

თუ (1.5.4)-ს და (1.5.5)-ს ჩავსვამთ (1.5.2)-ში:

$$[X_{jk} - (\alpha^l + i\beta^l)\delta_{jk}](p_k^l + iq_k^l) = 0$$

და გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მივიღებთ, რომ

$$(X_{jk} - \alpha^l\delta_{jk})\,p_k^l + \beta^l\delta_{jk}q_k^l = 0, \quad j = 1,2,3,$$

$$(X_{jk} - \alpha^{l}\delta_{jk})q_k^l - \beta^{l}\delta_{jk}\,p_k^l = 0, \quad j = 1,2,3\,.$$

პირველი ტოლობა გავამრავლოთ q_j^l-ზე, მეორე – p_j^l-ზე და ავჯამოთ 1-დან 3-მდე j-ის მიმართ; პირველის პირველ ჯამში გადავსვათ j და k, გამოვიყენოთ X_{jk}-ს და δ_{jk}-ს სიმეტრიულობა*) და მიღებულს გამოვაკლოთ მეორე, მაშინ

$$\beta^{l}(\delta_{jk}\,p_j^l\,p_k^l + \delta_{jk}\,q_j^l q_k^l) = 0\,,$$

ე.ი.

$$\beta^{l}(p_k^l\,p_k^l + q_k^l q_k^l) = 0, \quad l = 1,2,3\,. \tag{1.5.6}$$

რადგანაც ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულება არაუარყოფითია და ამასთან p_k^l, q_k^l ყველა ერთდროულად არ ხდება ნული (რამდენადაც ჩვენ დავუშვით, რომ (1.5.2)-ს აქვს არატრივიალური ამონახსნი), ამიტომ

$$\beta^{l} = 0\,.$$

ე.ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა და, ამდენად, σ^{l} ნამდვილია. ამიტომ n_k^l, როგორც ნამდვილკოეფიციენტებიან *წრფივ* განტოლებათა სისტემის ამონახსნი, ასევე ნამდვილი იქნება*).

---

*) $(X_{jk} - \alpha^{l}\delta_{jk})\,p_k^l q_j^l + \beta^{l}\delta_{jk}\,q_k^l q_j^l = 0\,,$
$(X_{jk} - \alpha^{l}\delta_{jk})q_k^l\,p_j^l - \beta^{l}\delta_{jk}\,p_k^l\,p_j^l = 0\,;$
$(X_{kj} - \alpha^{l}\delta_{kj})\,p_j^l q_k^l + \beta^{l}\delta_{jk}\,q_k^l q_j^l = 0\,,$
$(X_{jk} - \alpha^{l}\delta_{jk})\,p_j^l q_k^l + \beta^{l}\delta_{jk}\,q_k^l q_j^l = 0\,.$

*) თუ სისტემის რანგი 2-ის ტოლია, მაშინ ნორმალის $n_k^l n_k^{\bar{l}} = 1$ თვისებიდან გამომდინარე ის ცალსახად განისაზღვრება (იხ. Gould Ph. L., Introduction to Linear Elasticity, Springer, 2013, გვ. 32, 33).

σ^l-ებს ეწოდებათ *ძაბვის ტენზორის მთავარი კომპონენტები*, ხოლო n_k^l-ები მათი მიმმართველი კოსინუსებია.

ვთქვათ, σ^l და σ^p (1.5.3) განტოლების ორი ერთმანეთის არატოლი ფესვია, ხოლო n_k^l და n_k^p კი n_k-ს შესაბამისი მნიშვნელობებია. მაშინ, (1.5.2)-ის თანახმად,

$$(X_{jk} - \sigma^l \delta_{jk}) n_k^l = 0, \quad j = 1,2,3,$$

$$(X_{jk} - \sigma^p \delta_{jk}) n_k^p = 0, \quad j = 1,2,3.$$

პირველი გავამრავლოთ n_j^p-ზე, ხოლო მეორე – n_j^l-ზე, პირველში გადავსვათ j და k, გამოვიყენოთ X_{jk}-ს და δ_{jk}-ს სიმეტრიულობა და მიღებულს გამოვაკლოთ მეორე:

$$(\sigma^p - \sigma^l) \delta_{jk} n_j^l n_k^p = 0.$$

აქედან, რადგან $\sigma^p \neq \sigma^l$, გამომდინარეობს, რომ

$$n_j^l n_j^p = (n^l, n^p) = 0,$$

ე.ი. ძაბვის მთავარი მიმართულებები ორთოგონალურია. თუ სამივე ფესვი ერთმანეთისგან განსხვავებულია, მაშინ გვექნება სამი ცალსახად განსაზღვრული ურთიერთმართობი მთავარი მიმართულება. თუ ორი ფესვი ერთმანეთის ტოლია $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$, მაშინ σ_3-ის შესაბამისი $\vec{n}^3$ მთავარი მიმართულება $\vec{n}^1$-ის და $\vec{n}^2$-ის ვექტორებზე გამავალი სიბრტყის ორთოგონალური იქნება. ამდენად, ამ სიბრტყეში აღებული ნებისმიერი ორი ურთიერთმართობი მიმართულება შესაბამის მთავარ მიმართულებად შეიძლება იქნეს აღებული. თუ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, მაშინ ნებისმიერი სამი ურთიერთმართობი მიმართულება შეიძლება მიღებულ იქნეს მთავარ მიმართულებად.

(1.5.3) კუბური განტოლება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0, \qquad (1.5.7)$$

სადაც

$$I_1 = X_{11} + X_{22} + X_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} X_{22} & X_{23} \\ X_{32} & X_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{vmatrix}.$$

როგორც ცნობილია, (1.5.7) კუბური განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის კავშირს აქვს შემდეგი სახე*):

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2, \qquad (1.5.8)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

კუბური განტოლების ფესვები, როგორც ნორმალური ძაბვები, დამოკიდებული არ არიან კოორდინატთა სისტემის შეცვლაზე, ამიტომ (1.5.8) ტოლობების თანახმად, მათი საშუალებით გამოსახული I_1, I_2 და I_3 სიდიდეები არაა დამოკიდებული კოორდი-

*) $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0,$ საიდანაც

$$\sigma^3 - (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\sigma^2 + (\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2)\sigma - \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0.$$

ნატთა სისტემის შეცვლაზე. მათ *ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები ეწოდებათ.*

§4-ში შემოღებული $\Omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ კვადრატული ფორმა საშუალებას გვაძლევს, მივიღოთ სხეულის რაიმე გარკვეულ წერტილში გატარებული ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტის ორიენტაციაზე ძაბვის ვექტორის დამოკიდებულების მეტად მარტივი და თვალსაჩინო გეომეტრიული სურათი.

ზოგადობის შეუზღუდავად შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ სხეულის წერტილი მდებარეობს კოორდინატთა სისტემის სათავეში.

შემდგომში ჩვენ გამოვრიცხავთ, რომ

$$\Omega(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\equiv 0,$$

რადგან ამ უკანასკნელ შემთხვევაში (1.4.4)-ის გამო

$$X_{ij}(0,0,0)=0,$$

და ამდენად განსახილველ $(0,0,0)$ წერტილში ძაბვები საერთოდ არ გვექნება.

რამდენადაც (1.4.6) ტოლობაში ვექტორის სიგრძე ნებისმიერია, ჩვენ შეგვიძლია, იგი ისე შევარჩიოთ, რომ ნებისმიერი $\vec{n}$ ნორმალის შემთხვევაში

$$\sigma_n\cdot P^2=\pm c^2, \qquad (1.5.9)$$

სადაც c ნულისგან განსხვავებული ნებისმიერი ფიქსირებული მუდმივია. იმ შემთხვევაში, როცა $\sigma_n=0$, ვიგულისხმებთ, რომ $P=+\infty$. მაშასადამე,

$$P=\sqrt{\frac{\pm c^2}{\sigma_n}}, \quad \sigma_n=\frac{\pm c^2}{P^2},$$

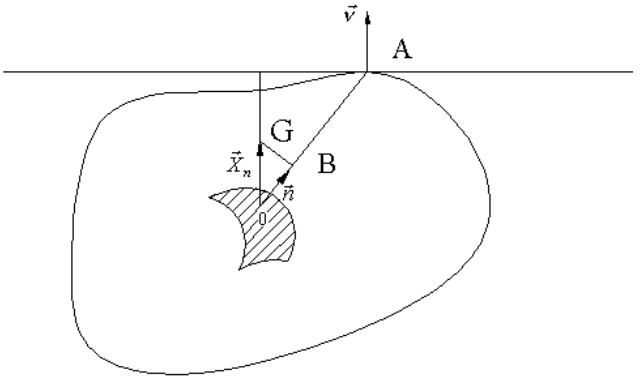
ამასთან c^2-ის წინ ნიშანი ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ $\pm c^2$ და σ_n ან ორივე დადებითი უნდა იყოს, ან ორივე უარყოფითი.

თუ განვიხილავთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში საწყისი წერტილის მქონე $\vec{P}$ ვექტორების ბოლო წერტილების წერ-

ტილთა გეომეტრიულ ადგილს, (1.5.9), (1.4.6) და (1.4.4)-ის თანახმად, მივიღებთ *მეორე რიგის ცენტრიან ზედაპირს ცენტრით კოორდინატთა სისტემის სათავეში*, რომლის განტოლებაა

$$X_{ij}\xi_i\xi_j = \pm c^2 . \qquad (1.5.10)$$

მიღებულ ზედაპირს ეწოდება მოცემული წერტილის (ჩვენს შემთხვევაში სათავის) *ძაბვის ზედაპირი.*



ნახ. 1.5.1

თუ მოცემულია ძაბვის ზედაპირი, ძაბვის ვექტორის აგება დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს. მართლაც, კოშის (1.2.1) ფორმულის და (1.4.5), (1.4.4)-ის თანახმად

$$X_{nk} = X_{jk}\, n_j = \frac{1}{P} X_{jk}\xi_j = \frac{1}{P}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_k}, \qquad (1.5.11)$$

რადგან

$$2\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_k} = \frac{\partial X_{ij}\xi_i\xi_j}{\partial \xi_k} = X_{ij}\delta_{ik}\xi_j + X_{ij}\xi_i\delta_{jk}$$
$$= X_{jk}\xi_j + X_{ik}\xi_i = X_{jk}\xi_j + X_{jk}\xi_j = 2X_{jk}\xi_j .$$

(1.5.11) ნიშნავს, რომ $\vec{X}_n$ პარალელურია $grad\,\Omega$-სი, ე.ი. (1.5.10) ზედაპირის $\vec{\nu}$ ნორმალის (იხ. ნახ. 1.5.1), რომელიც გავლებულია $\vec{P}$ ვექტორისა და ძაბვის ზედაპირის თანაკვეთის A წერტილში. რამდენადაც ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი

$$\sigma_n = OB = \frac{\pm c^2}{OA^2}, \qquad (1.5.12)$$

ამიტომ $\vec{n}$ და $\vec{\nu}$ ნორმალებზე გამავალ სიბრტყეში B წერტილიდან $\vec{n}$-ის პერპენდიკულარულად და O წერტილიდან $\vec{\nu}$-ის პარალელურად გავლებული წრფეების თანაკვეთა მოგვცემს $\vec{X}_n = \vec{OG}$ ძაბვის ვექტორის ბოლო წერტილს.

$\vec{X}_n$ ვექტორი ფართის ნორმალის გასწვრივ მიმართული იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\vec{OA}$ ვექტორი A წერტილში გავლებული მხები სიბრტყის პერპენდიკულარულია. მაგრამ ასეთ მიმართულებას, როგორც ანალიზური გეომეტრიიდანაა ცნობილი, ეწოდება *ზედაპირის მთავარი ღერძი*. ამ შემთხვევაში $\vec{n}$ ნორმალის მქონე ფართზე, ცხადია, მოქმედებს მხოლოდ ნორმალური ძაბვის ვექტორი და მის შესაბამის მიმართულებას, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მეორე მხრივ ეწოდება ძაბვის მთავარი მიმართულება. ასეთი მიმართულება ზოგად შემთხვევაში, როგორც ზემოთ ვნახეთ, აღმოჩნდა სამი ურთიერთმართობი მიმართულება.

თუ კოორდინატთა ღერძებს დავამთხვევთ ძაბვის მთავარ მიმართულებებს, ე. ი. ზედაპირის მთავარ ღერძებს, მაშინ ცხადია, $X_{ij} = 0$, $i \neq j$, და დაგვრჩება მხოლოდ ნორმალური ძაბვები.

$$\sigma_i = X_{\underline{ii}}$$

და ძაბვის ზედაპირის (1.5.10) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sigma_i \xi_i{}^2 = \pm c^2. \qquad (1.5.13)$$

იმისდა მიხედვით, თუ რა ნიშნები აქვს σ_i მთავარ ძაბვებს, გვექნება სხვადასხვა შემთხვევა.

ვთქვათ,

$$\sigma_i > 0, \quad i = 1,2,3,$$

მაშინ ცხადია, (1.5.13) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\sigma_i \xi_i^{\,2} = c^2,$$

რაც ელიფსოიდის განტოლებაა.

(1.5.12)-დან გვექნება, რომ

$$\sigma_n = \frac{c^2}{OA^2},$$

ე.ი. $(0,0,0)$ წერტილზე გამავალ ნებისმიერად ორიენტირებულ ფართზე მოქმედი ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი გამჭიმავია.

თუ

$$\sigma_i < 0, \quad i = 1,2,3,$$

მაშინ

$$\sigma_i \xi_i^{\,2} = -c^2, \text{ ე. ი. } |\sigma_i| \xi_i^{\,2} = c^2$$

და ძაბვის ზედაპირი კვლავ ელიფსოიდია, ხოლო ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი გამოითვლება

$$\sigma_n = -\frac{c^2}{OA^2}$$

ფორმულით და იგი მკუმშავი იქნება.

თუ

$$\sigma_\alpha > 0, \quad \alpha = 1,2; \quad \sigma_3 < 0,$$

მაშინ (1.5.13)-ს ექნება

$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^{\,2} - |\sigma_3| \xi_3^{\,2} = +c^2 \qquad (1.5.14)$$

ან

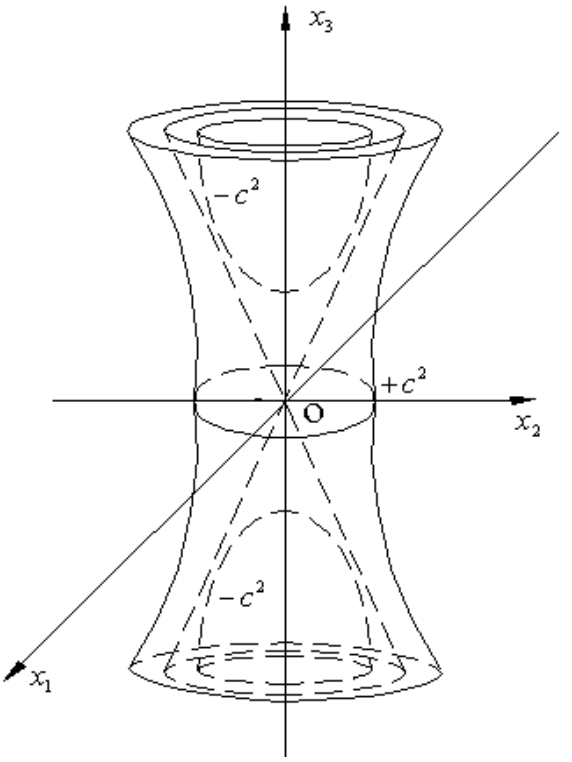
$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^{\,2} - |\sigma_3| \xi_3^{\,2} = -c^2 \qquad (1.5.15)$$

სახე.

(1.5.14) განტოლებით მოცემული ზედაპირი ცალკალთა ჰიპერბოლოიდია (იხ. ნახ. 1.5.2), ხოლო (1.5.15) განტოლებით მოცემული ზედაპირი ორკალთა ჰიპერბოლოიდია. აღნიშნული ზედაპირები ერთმანეთისგან გამოყოფილია ასიმპტოტური კონუსით:

$$\sigma_\alpha \xi_\alpha^{\,2} - |\sigma_3| \xi_3^{\,2} = 0,$$

რომელიც ნახაზზე წყვეტილი ხაზით არის მოცემული.



ნახ. 1.5.2

თუ ფართის ნორმალი ასიმპტოტური კონუსის გარეთაა მიმართული, მაშინ ის კვეთს ცალკალთა ჰიპერბოლოიდს და ნორმალური ძაბვა გამჭიმავია:

$$\sigma_n = \frac{c^2}{OA^2},$$

ხოლო თუ ნორმალი ასიმპტოტური კონუსის შიგნითაა მიმართული, მაშინ ის კვეთს ორკალთა ჰიპერბოლოიდს და ძაბვა მკუმშავია:

$$\sigma_n = -\frac{c^2}{OA^2}.$$

თუ ფართის ნორმალი ასიმპტოტურ კონუსზე მდებარეობს, მაშინ იგი ძაბვის ზედაპირს არ ჰკვეთს, $OA = +\infty$ და $\sigma_n = 0$, ე.ი. შესაბამისად ორიენტირებულ ფართზე მხოლოდ მხები ძაბვები მოქმედებენ.

შემთხვევა

$$\sigma_\alpha < 0, \quad \alpha = 1,2, \quad \sigma_3 > 0$$

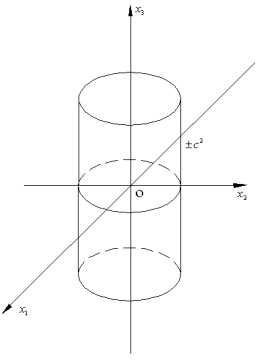
წინა შემთხვევისგან მხოლოდ იმით განსხვავდება, რომ ადგილებს იცვლიან გაჭიმვისა და კუმშვის ზონები.

ნიშნების განაწილების სხვა შემთხვევებში განხილული წინა ორი შემთხვევისგან განსხვავებით მხოლოდ საკოორდინატო ღერძები იცვლიან როლებს.

თუ ერთ-ერთი მთავარი ძაბვა ნულის ტოლია, ხოლო დანარჩენი ორი – ნულისგან განსხვავებული, მაგალითად, $\sigma_3 = 0$ და $\sigma_\alpha \neq 0, \quad \alpha = 1,2$, მაშინ ძაბვის ზედაპირები იქნებიან x_3 ღერძის პარალელური მსახველების მქონე ცილინდრული ზედაპირები. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს *ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა* (იხ. §2.2) მოცემულ წერტილში (იხ. ნახ. 1.5.3 და ნახ. 1.5.4). x_3 ღერძის პერპენდიკულარული სიბრტყით კვეთაში ვიღებთ ან ელიფსს, ან ორ ჰიპერბოლას.

თუ ერთი მთავარი ძაბვა ნულისგან განსხვავებულია, ხოლო

დანარჩენი ორი – ნულის ტოლი, მაგალითად, $\sigma_1 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_2 \neq 0$, მაშინ გვაქვს ორი პარალელური სიბრტყე (იხ. ნახ. 1.5.5). ასეთ დაძაბულ მდგომარეობას შეიძლება ვუწოდოთ *წრფივი დაძაბული მდგომარეობა* მოცემულ წერტილში.

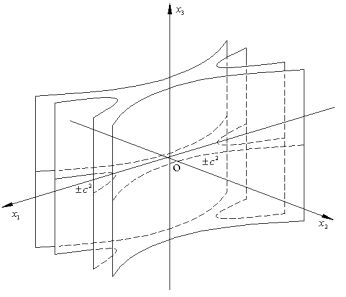


$$\sigma_\alpha > 0, \alpha = 1,2; \quad \sigma_1 \xi_1^2 + \sigma_2 \xi_1^2 = c^2$$

ან

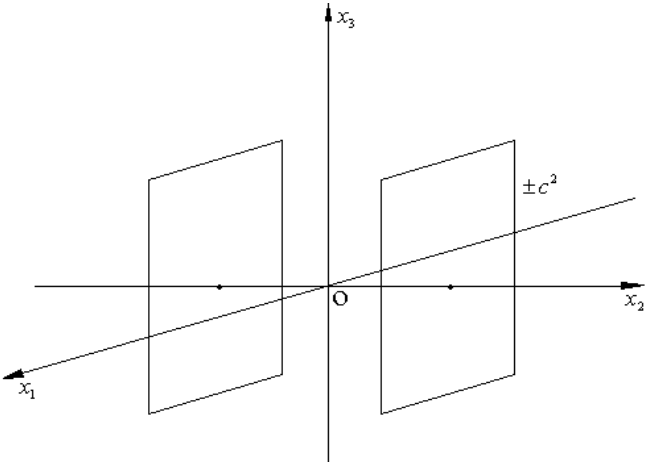
$$\sigma_\alpha < 0, \alpha = 1,2; \quad -|\sigma_1| \xi_1^2 - |\sigma_2| \xi_1^2 = -c^2$$

ნახ. 1.5.3



$$\sigma_1 > 0, \ \sigma_2 < 0; \quad \sigma_1 \xi_1^2 - |\sigma_2| \xi_2^2 = \pm c^2$$

ან



$$\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0; \quad -|\sigma_1|\xi_1^2 + \sigma_2\xi_2^2 = \pm c^2$$

ნახ. 1.5.4

$$\sigma_2\xi^2 = \pm c^2$$

ნახ. 1.5.5

მორის წრეები. დავსვათ ამოცანა გარემოს მოცემულ წერტილში ზედაპირის იმ უსასრულოდ მცირე ელემენტის n ნორმალის მოძებნის თაობაზე, რომელ უსასრულოდ მცირე ელემენტზეც მოქმედი ძაბვის ვექტორის σ_n ნორმალური და τ_n მხები მდგენელები*) იღებენ წინასწარ დასახელებულ

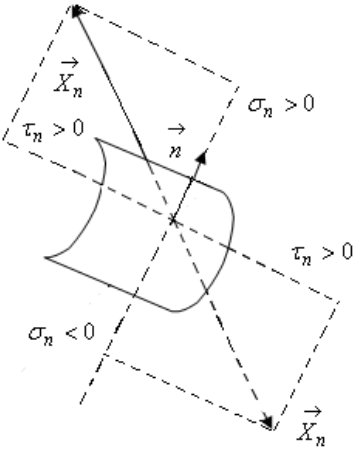
*) ცხადია $\sigma_n \in]-\infty,+\infty[$, $\tau_n \in [0,+\infty[$ (იხ. ნახ. 1.5.6)

მნიშვნელობებს (იხ. [50]). თუ საკოორდინატო ღერძებად ავიღებთ ძაბვის მთავარ ღერძებს, მაშინ

$$X_{ij} = 0, \text{ როცა } i \neq j \text{ და } X_{ii} = \sigma_i .^{**)}$$

ამდენად, ერთის მხრივ, (1.2.1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$X_{ni} = X_{ji} n_j = \sigma_i n_i, \quad i = 1,2,3; \tag{1.5.16}$$



ნახ. 1.5.6

ხოლო მეორეს მხრივ, (1.4.3)-ის ძალით,

$$\sigma_n = X_{nn} = X_{ij} n_i n_j = X_{11} n_1^2 + X_{22} n_2^2 + X_{33} n_3^2 = \sigma_i n_i^2 . \tag{1.5.17}$$

რადგან

$$\vec{X}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{\tau} ,$$

**) ვთვლით, რომ $\sigma_i, \ i = 1,2,3,$ მთავარი ძაბვები ვიცით და ისინი ერთმანეთისგან განსხვავებულია.

სადაც $\vec{\tau}$ არის $\vec{X}_n$ და $\vec{n}$ ვექტორებზე გამავალ სიბრტყეში მდებარე მხების ორტი. ამიტომ, (1.5.16)-ის თანახმად,

$$\sigma_n^2+\tau_n^2= X_n^2 = X_{ni}X_{ni} = \sum_{i=1}^{3}\sigma_i n_i \sigma_i n_i = \sigma_i^2 n_i^2 . \qquad (1.5.18)$$

ცხადია, დასმული ამოცანა დადის სამი n_i^2, $i=1,2,3$, უცნობის განსაზღვრაზე (1.5.17) და (1.5.18) განტოლებებიდან, იმის გათვალისწინებით, რომ, რადგანაც $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორია, ამიტომ

$$\sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1 . \qquad (1.5.19)$$

(1.5.19), (1.5.17), (1.5.18) განტოლებათა სისტემა n_1^2, n_2^2, n_3^2-ის მიმართ წარმოადგენს წრფივ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = (\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2) \neq 0 , \text{ თუ}$$

$$\sigma_i \neq \sigma_j , \text{ როცა } i \neq j ,$$

სისტემის დეტერმინანტით, რომელიც *ვანდერმონდის*[*)] *დეტერმინანტია*, და

$$\left(1, \sigma_n, \quad \sigma_n^2+\tau_n^2\right)^T$$

მარჯვენა მხარით (T ნიშნაკი აღნიშნავს ტრანსპონირებულს). ამასთან

[*)] შ.ო. ვანდერმონდი (1735-1796).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_n^2+\tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\sigma_2-\sigma_n)(\sigma_3-\sigma_n)(\sigma_3-\sigma_2)+\tau_n^2(\sigma_3-\sigma_2)$$

$$= (\sigma_3-\sigma_2)\left[\tau_n^2+\sigma_2\sigma_3-(\sigma_2+\sigma_3)\sigma_n+\sigma_n^2\right]$$

$$= (\sigma_3-\sigma_2)\left[\tau_n^2+\sigma_n^2-(\sigma_2+\sigma_3)\sigma_n + \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\sigma_2\sigma_3-\frac{(\sigma_2+\sigma_3)^2}{4}\right]$$

$$= (\sigma_3-\sigma_2)\left[\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2\right].$$

ანალოგიურად,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_n & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_n^2+\tau_n^2 & \sigma_3^2 \end{vmatrix} = (\sigma_1-\sigma_3) \times\left[\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2\right],$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_n \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_n^2+\tau_n^2 \end{vmatrix} = (\sigma_2-\sigma_1)$$

$$\times\left[\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\right].^{*)}$$

ამიტომ საძიებელ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$n_1^{\,2}=\frac{f_1(\sigma_n,\tau_n)}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)},\ n_2^{\,2}=-\frac{f_2(\sigma_n,\tau_n)}{(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)},$$

$$n_3^{\,2}=\frac{f_3(\sigma_n,\tau_n)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}, \qquad (1.5.20)$$

სადაც

$$f_1(\sigma_n,\tau_n):=\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2,$$

$$f_2(\sigma_n,\tau_n):=\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2,$$

$$f_3(\sigma_n,\tau_n):=\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2. \qquad (1.5.21)$$

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$. ცხადია, განხორციელებადია, ე.ი. დასაშვებია, მხოლოდ ისეთი σ_n, τ_n, რომელთათვისაც $n_i^2>0,\ \ i=1,2,3$. წინააღმდეგ შემთხვევაში (1.5.20), (1.5.21)-დან ნათელია, რომ მათი (σ_n-ის და τ_n-ის) წინასწარ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად დასახელება (როცა

*) ამ ორი ფორმულის მარჯვენა მხარეს მიმდევრობით მივიღებთ დამტკიცებული ფორმულის მარჯვენა მხრიდან, თუ მოვახდენთ ინდექსების წრიულ შეცვლას $1\to2,\ 2\to3,\ 3\to1$

$n_i = 0$-ს, i-ს მხოლოდ ერთი მნიშვნელობისათვის)*) ან, საერთოდ, დასახელება (როცა $n_i = 0$-ს, i-ს ორი მნიშვნელობისათვის**) (სამივეს ნულთან ტოლობა გამორიცხულია, რადგან $|\vec{n}| = 1$)) შეუძლებელია. ამიტომ (1.5.20)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$f_1 > 0, \quad f_2 < 0, \quad f_3 > 0. \tag{1.5.22}$$

C_k, $k = 1,2,3$, წირები, რომლებზეც $f_k = 0$, $k = 1,2,3$, $\tau_n > 0$ სიბრტყეში წარმოადგენენ შემდეგ ნახევარწრეწირებს (იხ. ნახ. 1.5.6):

C_1 არის ნახევარწრეწირი ცენტრით $O_1\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0\right)$ წერტილში და $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$-ის ტოლი რადიუსით;

C_2 არის ნახევარწრეწირი ცენტრით $O_2\left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0\right)$ წერტილში და $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$-ის ტოლი რადიუსით*);

---

*) რადგან მივიღებთ, რომ $f_i(\sigma_n, \tau_n) = 0$ განტოლება მოგვცემს ერთ-ერთის მეორით განსაზღვრის საშუალებას.

**) რადგან გვექნება ორი განტოლება $f_i(\sigma_n, \tau_n) = 0$ და $f_j(\sigma_n, \tau_n) = 0$, $i \neq j$, ორი უცნობის განსასაზღვრავად.

*) ნახევარწრეწირების $\tau_n = 0$ ღერძთან თანაკვეთის წერტილების აბსცისების მისაღებად (1.5.21), როცა $\tau_n = 0$, უნდა გავუტოლოთ 0-ს და ამოვხსნათ τ_n-ის მიმართ. ამდენად C_2 ნახევარწრეწირის

C_3 არის ნახევარწრეწირი ცენტრით $O_3\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2},0\right)$ წერტილში და $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$-ის ტოლი რადიუსით.

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$, ამიტომ C_2-ის რადიუსი $\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}>\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$ და $\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}>\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$, ე.ი. მეტია C_1 და C_2 ნახევარწრეწირების რადიუსებზე.

ნახევარწრეწირების ცენტრებში $f_k<0,\ k=1,2,3,$ რადგან იქ (1.5.21)-ის მარჯვენა მხარეებში დაგვრჩება მხოლოდ ბოლო უარყოფითი წევრები. ამიტომ $f_k>0,\ k=1,2,3$, ნახევარსიბრტყის იმ ნაწილში, რომელიც C_k-ს, k=1,2,3, გარეთ მდებარეობენ. (1.5.22)-დან ნათელია, რომ (σ_n,τ_n)-ის განხორციელებადი მნიშვნელობების *შესაბამისი აფიქსები მდებარეობენ ნახ 1.5.7-ზე მითითებულ დაშტრიხულ არეში.* C_k,

---

σ_n ღერძთან თანაკვეთის წერტილების აბსცისებს მივიღებთ, თუ მისი ცენტრის $\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}$ აბსცისას დავამატებთ და გამოვაკლებთ C_2-ის $\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$ რადიუსს. შესაბამისად, მივიღებთ $\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\sigma_1$ და $\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}=\sigma_3$. ანალოგიურად, ვაჩვენებთ, რომ C_1-ის თანაკვეთის წერტილებია σ_2 და σ_3, ხოლო C_3-ის – σ_1 და σ_2.

k=1,2,3, წრეწირების შესაბამის წრეებს *მორის*[*)] *წრეები* ეწოდება.

C_2 ნახევარწრის S_2 წვერო შეესაბამება მაქსიმალურ მხებ ძაბვას, რომელიც

$$\left(\tau_n\right)_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{-ის} \tag{1.5.23}$$

ტოლია. მისი რეალიზება ხდება

$$n_1 = \pm\left[\frac{f_1\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}\right]^{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$n_2 = 0, \quad n_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

კომპონენტებიან ნორმალის მქონე ზედაპირის უსასრულოდ მცირე ელემენტზე. მართლაც, ეს გამომდინარეობს (1.5.20), (1.5.21)-დან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$f_1\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{{\sigma_1}^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + {\sigma_3}^2}{4} + \frac{{\sigma_1}^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + {\sigma_2}^2}{4}$$

$$+ \frac{-{\sigma_2}^2 + 2\sigma_2\sigma_3 - {\sigma_3}^2}{4} = \frac{2{\sigma_1}^2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3}{4}$$

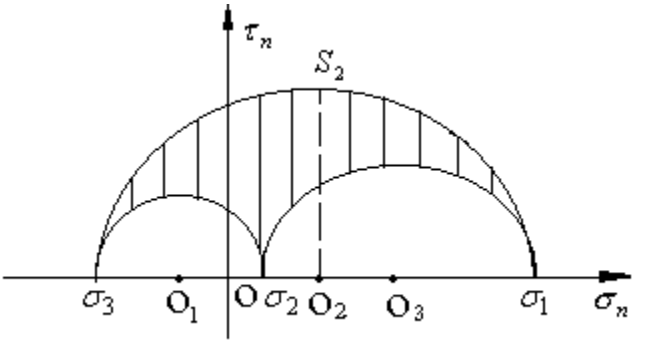
[*)] ქ.ო. მორი (1835-1918).

$$= \frac{\sigma_1(\sigma_1-\sigma_2)-\sigma_3(\sigma_1-\sigma_2)}{2} = \frac{(\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1-\sigma_2)}{2}.$$

ანალოგიურად,

$$f_2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right) = 0,$$

$$f_3\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right) = \frac{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}{2}.$$



ნახ. 1.5.7

თავი II. დეფორმაციათა თეორია

§1.6. deformaciis cneba

როგორც შესავალში აღვნიშნეთ, თუ უწყვეტი გარემოს განხილვის პროცესში მასზე გარე ძალების მოქმედების შედეგად მის წერტილებს შორის მანძილები იცვლება, სხეულის წერტილთა მდებარეობის ასეთ ცვლილებას *დეფორმაცია* ეწოდება.

აღვნიშნოთ (x_1, x_2, x_3)-ით სხეულის რაიმე წერტილის კოორდინატები დეფორმაციამდე, ხოლო (x_1^*, x_2^*, x_3^*)-ით – მისივე კოორდინატები დეფორმაციის შემდეგ.

ვთქვათ, V აღნიშნავს იმ არეს, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე. სხეულის ყოველი წერტილი, რომელსაც დეფორმაციამდე ეკავა სივრცის წერტილი კოორდინატებით $(x_1, x_2, x_3) \in V$ იკავებს სივრცის გარკვეულ წერტილს კოორდინატებით (x_1^*, x_2^*, x_3^*), ე.ი. x_i^*-ები უნდა იყვნენ x_i-ების გარკვეული ფუნქციები:

$$x_i^* = \varphi_i(x_1, x_2, x_3). \qquad (1.6.1)$$

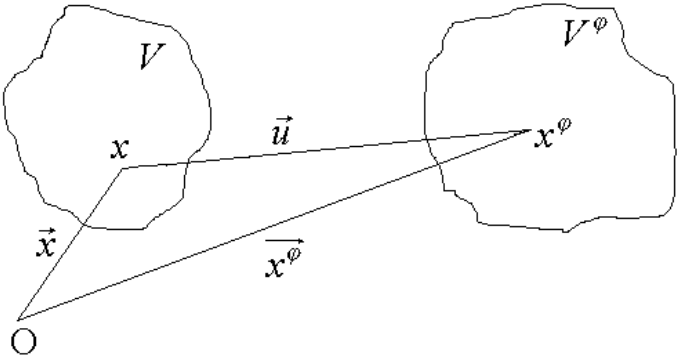
ჩვენ ვუშვებთ, რომ φ_i ფუნქციები უწყვეტია V არეში (ე. ი. დეფორმაციას თან არ სდევს სხეულის რღვევა). (x_1^*, x_2^*, x_3^*) წერტილები, რომლებიც შეესაბამებიან $(x_1, x_2, x_3) \in V$ წერტილებს, შეავსებენ გარკვეულ V^* არეს. ეს იქნება ის არე, რომელსაც სხეული დაიკავებს დეფორმაციის შემდეგ. ჩვენ ასევე ვუშვებთ, რომ (1.6.1) სისტემა იხსნება x_i-ს მიმართ და რომ ისინი x_i^* ცვლადების უწყვეტი ფუნქციებია. შემოვიღოთ აღნიშვნა $x_i^\varphi := x_i^*, \quad i = 1,2,3$ (იხ., მაგ., [12]).

(1.6.1) გეომეტრიული თვალსაზრისით წარმოადგენს V არის ასახვას $V^\varphi = V^*$ არეზე, მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ (1.6.1) სახის ყოველგვარი ასახვა არ გვაძლევს დეფორმაციას. მართლაც, თუ სხეულს გადავიტანთ სივრცეში, მისი წერტილების კოორდინატები შეიცვლება, მაგრამ მის არც ერთ ორ წერტილს შორის მანძილი არ შეიცვლება. *სხეულის წერტილების კოორდინატების ისეთ ცვლილებას, როცა არ ხდება დეფორმაცია, ეწოდება ხისტი გადაადგილება.*

როგორც ეს ნახ. 1.6.1-დან გამომდინარეობს,

$$x_i^\varphi = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) = x_i + u_i, \quad i = 1,2,3. \qquad (1.6.2)$$

$\vec{u} := (u_1, u_2, u_3)$ ვექტორს *გადაადგილების ვექტორი*, ხოლო u_i, $i = 1,2,3$, კომპონენტებს გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები, ან უბრალოდ *გადაადგილებები* ეწოდება x_i, $i = 1,2,3$, ღერძების გასწვრივ. ვთქვათ, $u \in C^1(V)$. V არეში უსასრულოდ მცირე წრფივი ელემენტის სიგრძე აღვნიშნოთ *dl*-ით, ხოლო V^{φ} არეში მისი შესაბამისი უსასრულოდ მცირე წრფივი ელემენტის სიგრძე აღვნიშნოთ dl^{φ}-თი. სხვა სიტყვებით, *dl*-ით აღნიშნულია დეფორმაციამდე უსასრულოდ მცირე მანძილით ერთმანეთისაგან დაშორებულ ორ წერტილს შორის მანძილი, ხოლო dl^{φ}-ით აღნიშნულია ამავე წერტილებს შორის მანძილი დეფორმაციის შემდეგ.



ნახ. 1.6.1

ცხადია (იხ. ნახ. 1.6.2),

$$dl^2 = dx_i dx_i$$

და, (1.6.2)-ის გათვალისწინებით,

$$\left(dl^{\varphi}\right)^2 = dx_i^{\varphi} dx_i^{\varphi} = \frac{\partial x_i^{\varphi}}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial x_i^{\varphi}}{\partial x_j} dx_k$$

$$= \varphi_{i,j} dx_j \varphi_{i,k} dx_k = (\delta_{ij} + u_{i,j})(\delta_{ik} + u_{i,k}) dx_j dx_k$$

$$= (\delta_{ij}\delta_{ik} + \delta_{ij} u_{i,k} + \delta_{ik} u_{i,j} + u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k$$

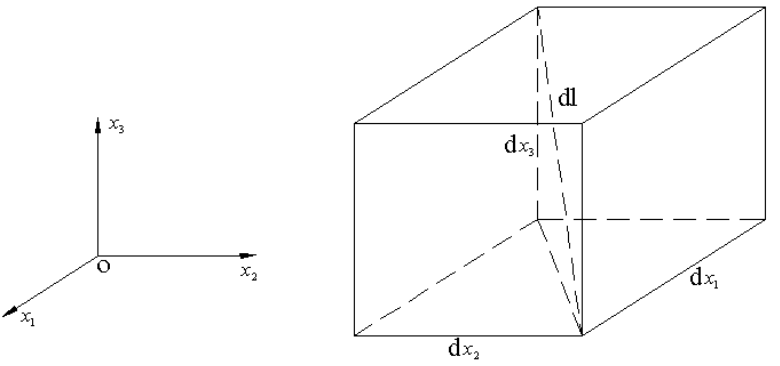
$$= (\delta_{jk} + u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j} u_{i,k}) dx_j dx_k .$$

სიგრძის კვადრატის ცვლილების გასაგებად მეორე ტოლობას წევრ-წევრად გამოვაკლოთ პირველი ტოლობა

$$\left(dl^{\varphi}\right)^2 - dl^2 = 2e_{jk} dx_j dx_k ,$$

სადაც

$$e_{jk} := \frac{1}{2}\left(u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j} u_{i,k}\right), \quad j,k = 1,2,3.$$



ნახ. 1.6.2

თუ ერთი მაინც $e_{jk} \neq 0$, მაშინ სიგრძის კვადრატი და ამდენად თვით სიგრძე იცვლება, ე.ი. ადგილი აქვს დეფორმაციას და ამიტომ e_{jk}-ს ეწოდება დეფორმაციის ტენზორი, რომელიც, ცხადია, სიმეტრიულია. დეფორმაციის ტენზორის ეს გამოსახულება შეესაბამება გეომეტრიულად არაწრფივ თეორიას. თუ კვადრატებს და ნამრავლებს უგულებელვყოფთ თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით, მაშინ მივიღებთ გეომეტრიულად წრფივი თეორიის შესაბამის შემდეგ გამოსახულებას:

$$e_{jk} = \frac{1}{2}\left(u_{j,k} + u_{k,j}\right), \quad j,k = 1,2,3. \tag{1.6.3}$$

ორივე შემთხვევაში $e_{jk} = 0, \quad j,k = 1,2,3$, ტოლობები შეესაბამება ხისტ გადაადგილებას.

ადვილი სანახავია, რომ წრფივ შემთხვევაში, თუ $u_i \in C^2(V)$, მაშინ

$$e_{ij,k} + e_{ki,j} - e_{jk,i} = \frac{1}{2}\left(u_{i,jk} + u_{j,ik} + u_{k,ij} + u_{i,kj} - u_{j,ki} - u_{k,ji}\right) = u_{i,jk},$$
$$i,j,k = 1,2,3. \tag{1.6.4}$$

ვთქვათ, ახლა

$$e_{ij} = 0, \tag{1.6.5}$$

მაშინ (1.6.4)-დან, ერთი მხრივ,

$$u_{i,jk} = 0,$$

ე.ი.

$$u_i(x) = a_i + b_{ij}x_j, \quad i = 1,2,3, \quad a_i = const, \quad b_{ij} = const.$$

მეორე მხრივ, (1.6.5)-დან

$$u_{i,j} = -u_{j,i}. \tag{1.6.6}$$

ამდენად, რადგანაც

$$u_{i,j} = \left(a_i + b_{ik}x_k\right)_{,j} = b_{ik}\delta_{kj} = b_{ij},$$

$$u_{j,i} = \left(a_j + b_{jk} x_k\right)_{,i} = b_{jk}\delta_{ki} = b_{ji},$$

(1.6.6)-დან მივიღებთ, რომ

$$b_{ij} = -b_{ji},$$

საიდანაც

$$b_{ii} = 0, \quad i = 1,2,3, \quad b_1 := b_{32} = -b_{23},$$

$$b_3 := b_{21} = -b_{12}, \quad b_2 := b_{13} = -b_{31}.$$

ამრიგად, ხისტი გადაადგილების შემთხვევაში გვექნება, რომ

$$u_1(x) = a_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3,$$
$$u_2(x) = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3,$$
$$u_3(x) = a_3 - b_2 x_1 + b_1 x_2,$$

ან ვექტორული ფორმით

$$u = \vec{a} + [\vec{b}, \vec{x}],$$

სადაც

$$\vec{a} := \left(a_1, a_2, a_3\right), \quad \vec{b} := \left(b_1, b_2, b_3\right), \quad \vec{x} := (x_1, x_2, x_3). \quad (1.6.7)$$

დეფორმაციის ზოგად (არაწრფივ) შემთხვევაში ხისტ გადაადგილებას, ე.ი. „გამყარებული“ სხეულის გადატანასა და ბრუნვას შეესაბამება

$$\overrightarrow{\varphi(x)} = \vec{a} + Q\vec{x} \qquad \forall x \in V \qquad (1.6.8)$$

ასახვა, სადაც $\vec{\varphi} := (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\vec{a}$ მუდმივი ვექტორია, რომელიც კოორდინატთა სისტემის, კერძოდ, V არის გადატანას გამოხატავს, ხოლო Q მესამე რიგის ორთოგონალური მატრიცაა +1-ის ტოლი დეტერმინანტით, რომელიც კოორდინატთა სისტემის სათავის გარშემო შემობრუნებას გამოხატავს (იხ. [12], გვ. 43).

როგორც ცნობილია, (იხ. [36], გვ. 49), ნებისმიერი ორთოგონალური Q მატრიცა (ე.ი. $Q^T Q = I$, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა) შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს, როგორც შემდეგი ნამრავლი

$$Q=\begin{Vmatrix}\cos b_3 & -\sin b_3 & 0\\ \sin b_3 & \cos b_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\cos b_2 & 0 & \sin b_2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin b_2 & 0 & \cos b_2\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos b_1 & -\sin b_1\\ 0 & \sin b_1 & \cos b_1\end{Vmatrix},$$

სადაც მატრიცები შეესაბამებიან „გამყარებულ“ სხეულთან უძრავად დაკავშირებულ x_3, x_2 და x_1 ღერძების გარშემო შესაბამისად b_3, b_2 და b_1 კუთხით მობრუნებას. მარჯვენა სისტემაში ბრუნვის დადებით მიმართულებებად მიღებულია შესაბამისად x_1-დან x_2-სკენ, x_3-დან x_1-სკენ და x_2-დან x_3-სკენ მობრუნება. მოძრაობის ფარდობითობიდან გამომდინარე, თუ სხეულს ჩავთვლით უძრავად, ხოლო კოორდინატთა სისტემას მოძრავად, მაშინ კოორდინატთა სისტემა მობრუნდება საწინააღმდეგო მიმართულებით x_1, x_2 და x_3 ღერძების გარშემო შესაბამისად $\varphi=-b_1$, $\psi=-b_2$ და $\chi=-b_3$ კუთხით. φ, ψ და χ კუთხეებს *ეილერის კუთხეები* ეწოდება (იხ. [14], გვ. 556). ცხადია,

$$Q=\begin{Vmatrix}\cos b_3\cos b_2 & \cos b_3\sin b_2\sin b_1-\sin b_3\cos b_1 & \cos b_3\sin b_2\cos b_1+\sin b_3\sin b_1\\ \sin b_3\cos b_2 & \sin b_3\sin b_2\sin b_1+\cos b_3\cos b_1 & \sin b_3\sin b_2\cos b_1-\cos b_3\sin b_1\\ -\sin b_2 & \cos b_2\sin b_1 & \cos b_2\cos b_1\end{Vmatrix}. \tag{1.6.9}$$

გეომეტრიულად წრფივ თეორიაში ბრუნვის $\vec{b}:=(b_1,b_2,b_3)$ ვექტორი უსასრულოდ მცირეა. ამიტომ, თუ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს უგულებელვყოფთ და გავითვალისწინებთ იმას, რომ $\sin b_i\approx b_i$ და $\cos b_i\approx 1$, $i=1,2,3$, (1.6.9)-დან მივიღებთ, რომ გეომეტრიულად წრფივ შემთხვევაში

$$Q=\begin{Vmatrix}1 & -b_3 & b_2\\ b_3 & 1 & -b_1\\ -b_2 & b_1 & 1\end{Vmatrix}. \tag{1.6.10}$$

(1.6.2)-ისა და (1.6.8)-ის თანახმად გვექნება

$$\overrightarrow{\varphi(x)} = \vec{x} + \vec{u} = \vec{a} + Q\vec{x}\,.$$

საიდანაც, ვინაიდან (1.6.10)-ის გამო

$$(Q-I)\vec{x} = \begin{Vmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{Vmatrix} \vec{x} = \left[\vec{b}, \vec{x}\right],$$

მივიღებთ, რომ

$$\vec{u} = \vec{a} + (Q-I)\vec{x} = \vec{a} + [\vec{b}, \vec{x}].$$

ეს კი, როგორც მოსალოდნელი იყო, (1.6.7)-ს ემთხვევა.

§1.7. afinuri asaxva

თუ (1.6.1) ასახვაში φ_i ფუნქციები წრფივია, მაშინ მას *აფინური ასახვა* ეწოდება, ე.ი. აფინური ასახვის დროს

$$x_i^* = \left(\delta_{ij} + a_{ij}\right)x_j + a_i\,, \qquad (1.7.1)$$

სადაც a_{ij}, a_i მუდმივებია. რამდენადაც ჩვენ მოვითხოვეთ, რომ (1.7.1) ამოხსნადი უნდა იყოს x_i-ს მიმართ, ამიტომ

$$\det\left\|\delta_{ij} + a_{ij}\right\| \neq 0\,.$$

აფინურ ასახვას ახასიათებს შემდეგი თვისებები:

1) *(1.7.1)-ის შებრუნებული ასახვა აფინურია.* მართლაც, თუ ამოვხსნით (1.7.1)-ს, მივიღებთ

$$x_i = \left(\delta_{ij} + b_{ij}\right)x_j^* + a_i^1\,, \qquad (1.7.2)$$

სადაც b_{ij}, a_i^1 გარკვეული მუდმივებია.

2) *რაიმე Π სიბრტყეზე მდებარე წერტილები აფინური ასახვის შემდეგ გარკვეულ Π^* სიბრტყეზე განლაგდებიან.* მართლაც, თუ $A_i x_i + B = 0$ არის Π სიბრტყის განტოლება, მაშინ მასში

(1.7.2) გამოსახულებების ჩასმით მივიღებთ $A_i^* x_i^* + B^* = 0$, სადაც A_i^* და B^* გარკვეული მუდმივებია.

3) *რაიმე Δ წრფეზე მდებარე წერტილები აფინური ასახვის შემდეგ გარკვეულ Δ^* წრფეზე განლაგდებიან.* მართლაც, Δ წრფეს თუ წარმოვიდგენთ, როგორც რაიმე ორი Π_1 და Π_2 სიბრტყეების თანაკვეთას, მაშინ წინა თვისების თანახმად Δ-ს წერტილები, რომლებიც ერთდროულად მიეკუთვნებიან Π_1 და Π_2 სიბრტყეებს, გადავლენ წერტილებში, რომლებიც ერთდროულად მიეკუთვნებიან გარკვეულ Π_1^* და Π_2^* სიბრტყეებს, რომელთა თანაკვეთა განსაზღვრავს Δ^* წრფეს.

4) *ორი აფინური ასახვის კომპოზიცია კვლავ აფინური ასახვაა.* მართლაც, თუ (1.7.1) ასახვით მიღებულ x_i^* წერტილებს ავსახავთ

$$x_i^{**} = \left(\delta_{ij} + a_{ij}^*\right) x_j^* + a_i^* \tag{1.7.3}$$

ასახვით, ე.ი. (1.7.1)-ს ჩავსვამთ (1.7.3)-ში, მივიღებთ

$$x_i^{**} = \left(\delta_{ij} + a_{ij}^{**}\right) x_j + a_i^{**} \tag{1.7.4}$$

ასახვას, სადაც a_{ij}^{**} და a_i^* გარკვეული მუდმივებია.

აფინური ასახვის უწყვეტობიდან და მისი მესამე თვისებიდან ცხადია, რომ წრფივი მონაკვეთი წრფივ მონაკვეთში აისახება, ხოლო ვექტორი – ვექტორში.

ვთქვათ,

$$\vec{P} = \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)$$

ვექტორი აისახა

$$\vec{P}^* = \left(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*\right)$$

ვექტორში. აღვნიშნოთ $\vec{P}$ ვექტორის საწყისი და ბოლო წერტი-

ლების კოორდინატები შესაბამისად $\overset{0}{x}_i$-თ და x_i-თ, მაშინ

$$\xi_i = x_i - \overset{0}{x}_i ,$$

ხოლო $\vec{P}^*$-ის კომპონენტები

$$\xi_i^* = x_i^* - \overset{0}{x}_i^* ,$$

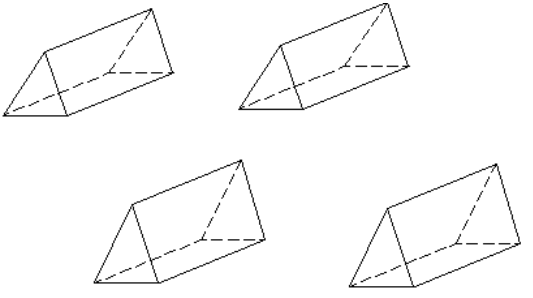
სადაც

$$x_i^* = (\delta_{ij} + a_{ij})x_j + a_i , \qquad \overset{0}{x}_i^* = (\delta_{ij} + a_{ij})\overset{0}{x}_j + a_i .$$

თუ განვიხილავთ უკანასკნელი ორი სიდიდის სხვაობას, მივიღებთ

$$\xi_i^* = x_i^* - \overset{0}{x}_i^* = (\delta_{ij} + a_{ij})(x_j - \overset{0}{x}_i) = (\delta_{ij} + a_{ij})\xi_j . \quad (1.7.5)$$

(1.7.5)-დან ცხადია, რომ ორი ტოლი ვექტორი (ე.ი. მათი შესაბამისი კომპონენტები ტოლია) აისახება ორ ტოლ ვექტორში, ხოლო ორი პარალელური ვექტორი – ორ პარალელურ ვექტორში, ამასთან მათი სიგრძეების შეფარდება არ იცვლება. ამიტომ ადვილი მისახვედრია, რომ ორი ერთნაირი და ერთნაირად ორიენტირებული ფიგურა (განლაგებული სივრცის სხვადასხვა ნაწილში) შედგენილი წრფივი მონაკვეთებისაგან აისახება ორ ერთნაირ და ერთნაირად ორიენტირებულ ფიგურაში (იხ. ნახ. 1.7.1). მაგრამ რამდენადაც ყოველი გეომეტრიული ფიგურა შეიძლება განვიხილოთ როგორც ზღვარი წრფივი მონაკვეთებისაგან შედგენილი ფიგურისა, ამიტომ აღნიშნული თვისება ვრცელდება ნებისმიერ ფიგურაზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ სხეულის სხვადასხვა ნაწილი მიუხედავად მისი გეომეტრიული მდებარეობისა ერთნაირ დეფორმაციას განიცდის. ამიტომ აფინური ასახვის შესაბამის დეფორმაციას ეწოდება *ერთგვაროვანი დეფორმაცია.*



ნახ. 1.7.1

ცხადია, (1.7.1)-ის და (1.7.5)-ის აფინურობა არ დაირღვევა, თუ კოორდინატთა ერთი წრფივი სისტემიდან გადავალთ მეორეზე. ეს გამომდინარეობს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულის წრფივობიდან (იხ. (1.4.8)).

თუ (1.7.1) ასახვაში a_{ij}, a_i, სიდიდეები იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მათი კვადრატებისა და ნამრავლების უგულვებელყოფა თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით, მაშინ მას *უსასრულოდ მცირე ასახვა ეწოდება.* (1.7.1) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$x_i^* - x_j = a_{ij} x_j + a_i \ ,$$

საიდანაც, a_{ij}-ის და a_i-ს სიმცირის გამო ნათელია, რომ უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის დროს წერტილის კოორდინატების ცვლილება უსასრულოდ მცირეა.

ორი უსასრულოდ მცირე აფინური ასახვის მიმდევრობით მოხდენის დროს (იხ. მეოთხე თვისება)

$$a_{ij}^{**} = a_{ij}^{*} + a_{ij}, \quad a_i^{**} = a_i^{*} + a_i \ ,$$

ამასთან შედეგი არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა მიმდევრობით მოვახდენთ ასახვებს. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ გვაქვს ორი მოცემული ასახვის ზედდება. ცხადია, აღნიშნული შეიძლება განზოგადდეს ზედდებათა ნებისმიერი რიცხვისათვის.

§1.8. usasrulod mcire afinuri asaxvis daSla sakuTriv deformaciad da xist gadaadgilebad

რამდენადაც ჩვენ გვაინტერესებს სხეულის დეფორმაცია, შემდეგში განვიხილავთ ვექტორის გარდაქმნის (1.7.5) ფორმულებს. მართალია, ამ შემთხვევაში წერტილის კოორდინატებს a_i მუდმივი შესაკრებების სიზუსტით განვსაზღვრავთ, მაგრამ ეს არსები-

თი არ არის, რადგანაც ისინი მხოლოდ სხეულის ხისტ გადატანას ახასიათებენ. (1.7.5) გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\delta\xi_i = a_{ij}\xi_j\,, \tag{1.8.1}$$

სადაც

$$\delta\xi_i := \xi_i^* - \xi_i$$

აღნიშნავს $\vec{\delta P} := \vec{P}^* - \vec{P}$ ვექტორული სხვაობის კომპონენტებს.

დავსვათ შემდეგი საკითხი: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს a_{ij} მუდმივები, რომ (1.8.1) ასახვას თან არ სდევდეს რაიმე დეფორმაცია, ე.ი. გვაძლევდეს მხოლოდ ხისტ გადაადგილებას?

ხისტი გადაადგილების განსაზღვრის თანახმად ეს მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სხეულის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელი ვექტორის სიგრძე არ იცვლება, ე.ი. არ იცვლება მისი კვადრატი

$$\mathrm{P}^2 = \xi_\mathrm{i}\xi_\mathrm{i}\,. \tag{1.8.2}$$

აღვნიშნოთ P-ს ნაზრდი δP-თი. თუ უგულვებელვყოფთ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეებს, დიფერენციალის განმარტების თანახმად,

$$dP = \delta P \quad \text{და} \quad d\xi_i = \delta\xi_i\,.$$

(1.8.2)-დან ცხადია, რომ

$$2PdP = 2\xi_i\, d\xi_i\ .$$

ე.ი.

$$P\delta P = \xi_i\ \delta\xi_i$$

და (1.8.1)-ის თანახმად

$$\begin{aligned} P\delta P = a_{ij}\xi_i\,\xi_j &= \frac{1}{2}a_{ij}\xi_i\,\xi_j + \frac{1}{2}a_{ji}\xi_i\,\xi_j \\ &= \frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})\xi_i\,\xi_j\,. \end{aligned} \tag{1.8.3}$$

იმისათვის, რომ შესრულდეს $\delta P = 0$ ტოლობა ნებისმიერი ξ_i-

სათვის, აუცილებელი და საკმარისია

$$a_{ij} + a_{ji} = 0. \tag{1.8.4}$$

მაშასადამე, ამ უკანასკნელ შემთხვევაში, (1.8.1) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\delta\xi_i = - p_{ij}\,\xi_j, \tag{1.8.5}$$

სადაც

$$p_{ij} := a_{ji} = -a_{ij}\ ^{*)}. \tag{1.8.6}$$

(1.8.4)-ის გამო, ცხადია, p_{ij} ცხრა სიდიდე ხასიათდება სამი დამოუკიდებელი p_i სიდიდით

$$\begin{gathered} p_{ii} = 0, \quad p_1 = p_{32} = -p_{23}, \\ p_2 = p_{13} = -p_{31}, \quad p_3 = p_{21} = -p_{12}. \end{gathered} \tag{1.8.7}$$

ამდენად, (1.8.5) გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} d\xi_1 &= -p_3\xi_2 + p_2\xi_3, \\ d\xi_2 &= p_3\xi_1 - p_1\xi_3, \\ d\xi_3 &= -p_2\xi_1 + p_1\xi_2, \end{aligned}$$

ხოლო ვექტორულად კი ასე

$$\overrightarrow{d\xi} = \left[\vec{p},\ \vec{\xi}\right],$$

რაც, როგორც ეს თეორიული მექანიკიდანაა ცნობილი, ახასიათებს უსასრულოდ მცირე ხისტ ბრუნვას. კერძოდ, p_i აღნიშნავს x_i ღერძის გარშემო შემობრუნების უსასრულოდ მცირე კუთხეს.

(1.8.6) ფორმულებით მოცემული p_{ij} სიმრავლე წარმოადგენს ე.წ. ანტისიმეტრიულ ტენზორს.

რომ მივიღოთ სხეულის იმ წერტილის კოორდინატების ასახვის ფორმულა, რომელსაც გადაადგილებამდე ეკავა

*) ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ (1.8.6) აღნიშვნა შემოღებულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა სრულდება (1.8.4).

$M(x_1, x_2, x_3)$ მდგომარეობა, საკმარისია ფორმულა (1.8.5) გამოვიყენოთ $\overrightarrow{M_0M} = (x_1 - \overset{0}{x}_1, x_2 - \overset{0}{x}_2, x_3 - \overset{0}{x}_3)$ ვექტორის მიმართ, სადაც $M_0\begin{pmatrix} \overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \overset{0}{x}_3 \end{pmatrix}$ რაიმე ფიქსირებული წერტილია:

$$\delta x_i = -p_{ij}(x_j - \overset{0}{x}_j) + a_i \ ,$$

სადაც

$$a_i = \delta \overset{0}{x}_i \ .$$

ზემოთქმულიდან გამომდინარე საკუთრივ დეფორმაციას ახასიათებენ

$$a_{ii}\ , \quad a_{32} + a_{23}, \quad a_{13} + a_{31}, \quad a_{21} + a_{12}$$

სიდიდეები. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$e_{ij} = e_{ji} := \frac{1}{2}(a_{ji} + a_{ij}) \ . \tag{1.8.8}$$

მათ *დეფორმაციის კომპონენტები* ეწოდება და წარმოადგენენ ე.წ. *დეფორმაციის სიმეტრიულ ტენზორს.*

შემოვიღოთ კიდევ ერთი აღნიშვნა

$$p_{ij} := \frac{1}{2}(a_{ji} - a_{ij}) \ .^{*)} \tag{1.8.9}$$

ამ აღნიშვნებში

$$a_{ij} = e_{ij} - p_{ij} \ . \tag{1.8.10}$$

ამრიგად (1.8.1) მიიღებს სახეს

$$\delta\xi_i = e_{ij}\xi_j - p_{ij}\xi_j \ . \tag{1.8.11}$$

---

*) ეს აღნიშვნა, თუ სრულდება (1.8.4), ემთხვევა (1.8.6)-ს.

ეს უკანასკნელი ფორმულები მიგვითითებენ იმაზე, რომ აფინური ასახვა შეიძლება დაიშალოს საკუთრივ დეფორმაციის შესაბამის

$$\delta\xi_i = e_{ij}\xi_j \qquad (1.8.12)$$

ასახვად და ხისტ გადაადგილებად, რომელიც მოიცემა (1.8.5) ასახვით, სადაც p_{ij} განსაზღვრულია (1.8.9)-ით.

დეფორმაციის e_{ij} კომპონენტებს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვთ.

ვაჩვენოთ, რომ e_{ii} წარმოადგენს x_i ღერძის პარალელური ვექტორის ფარდობით წაგრძელებას. გარკვეულობისათვის განვიხილოთ e_{11}.

მართლაც, (1.8.8)-ის თანახმად (1.8.3) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P\delta P = e_{ij}\,\xi_i\,\xi_j\,. \qquad (1.8.13)$$

თუ განვიხილავთ $\vec{P} = (\xi_1, 0, 0)$ ვექტორს, მაშინ

$$P\delta P = e_{11}\,\xi_1^2\,.$$

მაგრამ $\xi_1^2 = P^2$, ე.ი.

$$e_{11} = \frac{\delta P}{P}\ .$$

ეს სიდიდე უგანზომილებოა, როგორც $L\cdot L^{-1}$ განზომილების მქონე.

თუ დეფორმაციის ყველა კომპონენტი, გარდა e_{11}-ისა, ნულის ტოლია და ვიხილავთ საკუთრივ დეფორმაციას, ე.ი. $p_{ij} = 0$, მაშინ (1.8.12)-დან ვღებულობთ, რომ

$$\delta\xi_1 = e_{11}\xi_1, \quad \delta\xi_2 = 0, \quad \delta\xi_3 = 0\ .$$

ამრიგად, x_1 ღერძის პარალელური ვექტორი ყველა ერთნაირად წაგრძელდება $(e_{11} > 0)$ ან შეიკუმშება $(e_{11} < 0)$, ხოლო მისი პერპენდიკულარული ვექტორები არ იცვლიან არც მიმართუ-

ლებას და არც სიდიდეს. ე.ი. ჩვენ გვაქვს x_1 ღერძის გასწვრივ მარტივი გაჭიმვა $(e_{11} > 0)$ ან კუმშვა $(e_{11} < 0)$.

e_{23} -ის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად გამოვთვალოთ $\vec{P}_1 = (0, \eta_2, 0)$, $\eta_2 > 0$, და $\vec{P}_2 = (0,0,\zeta_3)$, $\zeta_3 > 0$, ვექტორებს შორის დეფორმაციამდე არსებული მართი კუთხის ცვლილება. დეფორმაციის შემდეგ ისინი აისახებიან შესაბამისად

$$\vec{P}_1^* = \left(\delta\eta_1, \eta_2 + \delta\eta_2, \delta\eta_3\right)$$

და

$$\vec{P}_2^* = (\delta\zeta_1, \delta\zeta_2, \zeta_3 + \delta\zeta_3)$$

ვექტორებში. აღვნიშნოთ მათ შორის კუთხე $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right)$-ით (თუ $\varepsilon_{23} > 0$, მაშინ კუთხე დეფორმაციის შემდეგ მცირდება, ხოლო თუ $\varepsilon_{23} < 0$, მაშინ კუთხე იზრდება). ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ცნობილი ფორმულიდან ცხადია, რომ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right) =$$

$$\frac{\delta\eta_1\delta\zeta_1 + (\eta_2 + \delta\eta_2)\delta\zeta_2 + \delta\eta_3(\zeta_3 + \delta\zeta_3)}{\sqrt{(\delta\eta_1)^2 + (\eta_2 + \delta\eta_2)^2 + (\delta\eta_3)^2}\sqrt{(\delta\zeta_1)^2 + (\delta\zeta_2)^2 + (\zeta_3 + \delta\zeta_3)^2}}.$$

საიდანაც, მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით, გვაქვს შემდეგი მიახლოებითი ტოლობა

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_{23}\right) = \sin\ \varepsilon_{23} \cong\ \varepsilon_{23} \cong \frac{\eta_2\delta\zeta_2 + \zeta_3\delta\eta_3}{\eta_2\zeta_3}, \quad (1.8.14)$$

რადგან η_2^2-თან და ζ_3^2-თან შედარებით შეიძლება შესაბამისად $\eta_2\delta\eta_2$ -ისა და $\zeta_3\delta\zeta_3$-ის უგულვებელყოფა (ან რაც იგივეა η_2–თან და ζ_3–თან შედარებით შეიძლება $\delta\eta_2$–ისა და $\delta\zeta_3$–ის უგულვებელყოფა). (1.8.11)-ის გამო

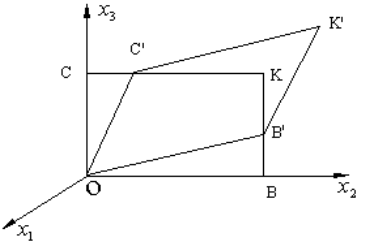
$$\delta\eta_3 = e_{32}\eta_2 - p_1\eta_2,$$
$$\delta\zeta_2 = e_{23}\zeta_3 + p_1\zeta_3.$$

თუ ამ უკანასკნელთ ჩავსვამთ (1.8.14)-ში, (1.8.8)-ის თანახმად, მივიღებთ, რომ

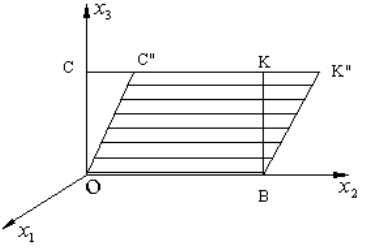
$$\varepsilon_{23} = e_{32} + e_{23} = 2e_{23}\ .$$

ამრიგად, $2e_{23}$ არის x_2 და x_3 ღერძების პარალელურ ვექტორებს შორის დეფორმაციამდე არსებული მართი კუთხის ცვლილება.

განვიხილოთ წმინდა დეფორმაცია, როცა ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ e_{23}, ხოლო დეფორმაციის დანარჩენი კომპონენტები და ბრუნვის კომპონენტები ნულის ტოლია. ვთქვათ, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ვექტორები გავლებულია კოორდინატთა სისტემის სათავიდან (სიმარტივისათვის) შესაბამისად x_2 და x_3 ღერძების პარალელურად, ხოლო $OBKC$ მათზე აგებული მართკუთხედია (იხ. ნახ. 1.8.1). დეფორმაციის შემდეგ აღნიშნული მართკუთხედი $OB'K'C'$ პარალელოგრამად იქცევა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ O წერტილი არ გადაადგილებულა, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ხისტი გადატანით ის



ნახ.1.8.1



ნახ.1.8.2

შეიძლება კვლავ პირვანდელ მდგომარეობას დავუბრუნოთ.

(1.8.12)-ის თანახმად, B წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი გადავა BK წრფეზე მდებარე B' წერტილში, ხოლო C წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი კი CK წრფეზე მდებარე C' წერტილში, ამასთან

$$BB' = \delta\xi_3 = e_{32} \cdot OB, \quad CC' = \delta\xi_2 = e_{23} \cdot OC. \quad (1.8.15)$$

რადგანაც მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით

$$\frac{BB'}{OB} = tg\angle BOB' = \angle BOB',$$

$$\frac{CC'}{OC} = tg\angle COC' = \angle COC',$$

ამიტომ, (1.8.15)-ის თანახმად,

$$\angle BOB' = \angle COC' = e_{23}$$

და კიდევ ერთხელ ვიღებთ, რომ

$$\varepsilon_{23} = \angle BOB' + \angle COC' = 2e_{23}.$$

თუ $OB'K'C'$ პარალელოგრამს საათის ისრის მიმართულებით e_{23}-ის ტოლი კუთხით ხისტად შემოვაბრუნებთ O წერტილის გარშემო, მაშინ, მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეების სიზუსტით, OB' დაემთხვევა OB-ს, რადგან

$$OB' = \frac{OB}{\cos e_{23}} = \frac{OB}{1 - \frac{e_{23}^2}{2!} + \frac{e_{23}^4}{4!} - \cdots} = OB.$$

ამავე მიზეზით, მაღალი რიგის უსასრულო მცირე სიდიდეების სიზუსტით, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ $OC = OC' = OC''$ და C'' მდებარეობს CK წრფეზე. ამდენად, $OB'K'C'$ დაიკავებს $OBK''C''$ მდებარეობას (იხ. ნახ. 1.8.2).

ამრიგად, განხილული დეფორმაცია წარმოადგენს Ox_1x_2 სიბრტყის პარალელური სიბრტყეების ძვრას Ox_2 მიმართულებით. ამასთან სიბრტყის გადაადგილება Ox_1x_2 სიბრტყემდე მანძილის პროპორციულია. CC'' სიდიდეს ეწოდება „*აბსოლუტური ძვრა*“,

ხოლო

$$\frac{CC''}{OC} = tg\angle COC'' = tg\varepsilon_{23} = \varepsilon_{23} = 2e_{23}$$

სიდიდეს – „*ფარდობითი ძვრა*“ ან ძვრის კუთხე. განხილულ დეფორმაციას ეწოდება *მარტივი, ერთგვაროვანი ძვრა.*

$1.9. deformaciis invariantuli kvadratuli forma, koordinatTa sistemis Secvla. deformaciis mTavari mimarTulebebi. deformaciis zedapiri

(1.8.13) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$P\delta P = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \qquad (1.9.1)$$

სადაც

$$2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e_{ij}\xi_i\xi_j \qquad (1.9.2)$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 ცვლადების კვადრატული ფორმაა. რადგანაც (1.9.1)-ის მარცხენა მხარეში მდგომ $P\delta P$ გამოსახულებას აქვს კოორდინატთა სისტემის ღერძების შერჩევისაგან დამოუკიდებელი აზრი, ამიტომ (1.9.1)-ის მარჯვენა მხარე, ე.ი., (1.9.2) კვადრატული ფორმა ინვარიანტული უნდა იყოს კოორდინატთა სისტემის შეცვლის მიმართ. ე.ი., თუ e'_{ij} და ξ'_i-ით აღვნიშნავთ ახალ კოორდინატთა სისტემაში დეფორმაციის ტენზორის და $\vec{P}$ ვექტორის კომპონენტებს, მაშინ

$$P\delta P = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e_{ij}\xi_i\xi_j$$

$$= e'_{ij}\,\xi_i'\xi_j', = 2F(\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3).$$

აქედან, ისევე როგორც ძაბვების თეორიაში, ვიღებთ დეფორმაციის ტენზორის ძველ და ახალ კომპონენტებს შორის იგივე კავშირს, რაც ძაბვების შემთხვევაში გვქონდა:

$$e'_{kl} = e_{ij}\alpha_i^k\alpha_j^l.$$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ მიმართულების მქონე მიმართულებას ეწოდება დეფორმაციის მთავარი მიმართულება, თუ

$$e_{ij}\, n_j = e n_i\,, \qquad (1.9.3)$$

სადაც e სკალარული სიდიდეა.

კრონეკერის სიმბოლოს გამოყენებით (1.9.3) შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ

$$(e_{ij} - e\delta_{ij})\, n_j = 0\,. \qquad (1.9.4)$$

რადგან ყველა n_j ერთდროულად ნული არ ხდება, ამიტომ:

$$\det\| e_{ij} - e\delta_{ij} \| = 0\,. \qquad (1.9.5)$$

დეფორმაციის ტენზორის მთავარი მნიშვნელობები ეწოდება (1.9.5) განტოლების ფესვებს. მათ აგრეთვე *მთავარ ფარდობით წაგრძელებებს* უწოდებენ. (1.9.5) განტოლება ჩვენს მიერ განხილული იყო 1.5 პარაგრაფში. ძაბვის თეორიის ანალოგიურად შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები: მთავარი ფარდობითი წაგრძელებების შესაბამისი მიმართულებები ურთიერთმართობია; თუ (1.9.5) განტოლების ფესვები მარტივია, მაშინ გვაქვს ურთიერთმართობი მიმართულებების ერთი სამეული; თუ (1.9.5) განტოლების ორი ფესვი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მათი შესაბამისი მიმართულებები ძევს სიბრტყეში, რომელიც მესამე მარტივი ფესვის შესაბამისი მთავარი მიმართულების პერპენდიკულარულია; ამ შემთხვევაში ნებისმიერი ორი ურთიერთმართობი მიმართულება ამ სიბრტყიდან შეიძლება მიღებულ იქნეს მთავარი მიმართულებად; თუ სამივე ფესვი ტოლია, მაშინ ნებისმიერი სამი ურთიერთმართობი მიმართულება შეიძლება მიღებულ იქნეს მთავარ მიმართულებად.

გადავწეროთ (1.9.5) კუბური განტოლება შემდეგი სახით:

$$e^3 - \theta_1 e^2 + \theta_2 e - \theta_3 = 0\,,$$

სადაც

$$\theta_1 := e_{ii}\ ,$$

$$\theta_2 := \begin{vmatrix} e_{22} & e_{23} \\ e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{13} \\ e_{31} & e_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}, \quad (1.9.6)$$

$$\theta_3 := \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}.$$

კუბური განტოლების ფესვებსა და კოეფიციენტებს შორის დამოკიდებულებების თანახმად:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ \theta_2 &= e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_3 e_2, \\ \theta_3 &= e_1 e_2 e_3. \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

როგორც მთავარი ფარდობითი წაგრძელებები, e_i-ები არ არიან დამოკიდებულნი კოორდინატთა სისტემის ღერძების შერჩევაზე. ამიტომ θ_i-ები ინვარიანტებია კოორდინატთა სისტემის ღერძების შეცვლის მიმართ.

ისევე როგორც 1.5 პარაგრაფში, ძაბვის ზედაპირის მსგავსად შეიძლება შემოვიღოთ დეფორმაციის ზედაპირის ცნებაც.

მართლაც, (1.9.1) გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$P^2 \frac{\delta P}{P} = P^2 e = 2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

სადაც $e = \frac{\delta P}{P}$ გამოხატავს $\vec{P} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ვექტორის ფარდობით წაგრძელებას. იგი არ არის დამოკიდებული ვექტორის სიგრძეზე, დამოკიდებულია მხოლოდ ვექტორის მიმართულებაზე. ამიტომ ყოველი მიმართულებისათვის ისე შეიძლება შევარჩიოთ ვექტორის სიგრძე, რომ

$$P^2 e = \pm c^2,$$

სადაც c ნებისმიერი, ნულისაგან განსხვავებული ფიქსირებული მუდმივია. მას სიგრძის განზომილება აქვს.

თუ $\vec{P}$-ს საწყის წერტილს ავიღებთ კოორდინატთა სისტემის სათავეში, მაშინ მისი ბოლო A წერტილი აღმოჩნდება

$$2F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \pm c^2$$

ან, რაც იგივეა,

$$e_{ij}\,\xi_i \xi_j = \pm c^2 \qquad (1.9.8)$$

ზედაპირზე, რომელსაც *დეფორმაციის ზედაპირი* ეწოდება.

თუ დეფორმაციის ზედაპირი აგებულია, მაშინ ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ ნებისმიერი ვექტორის მიმართულებით e ფარდობითი წაგრძელება. ამისათვის საკმარისია, სათავიდან გავავლოთ მისი პარალელური $\overrightarrow{OA}$ ზედაპირის A წერტილში გადაკვეთამდე. ამასთან იმისათვის, რომ ყოველთვის არსებობდეს გადაკვეთის A წერტილი, საჭიროა, გარკვეულნაირად შევარჩიოთ c^2-ის წინ ნიშანი. განსახილველი ვექტორის e ფარდობითი წაგრძელება შემდეგნაირად გამოისახება

$$e = \pm \frac{c^2}{OA^2}.$$

თუ საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ დეფორმაციის მთავარ მიმართულებებს, ე.ი. (1.9.8) განტოლებით მოცემულ ზედაპირის მთავარ ღერძებს, მაშინ დეფორმაციის ზედაპირის (1.9.8) განტოლება დაიყვანება

$$e_i \xi_i^{\,2} = \pm c^2$$

კანონიკურ სახეზე. ამდენად ახალ კოორდინატთა სისტემაში $e'_{ij} = 0$, როცა $i \neq j$, $e'_{ii} = e_i$.

ამრიგად, თუ საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ მთავარ მიმართულებებს, მაშინ მათ შორის მართი კუთხეები დეფორმაციის შემდეგაც მართი დარჩება. დეფორმაციის ზედაპირებს ისეთივე სახე აქვთ, როგორც ძაბვის ზედაპირებს და ამიტომ მათზე არ შევჩერდებით.

$$\theta := e_{ii} = e_1 + e_2 + e_3 \qquad (1.9.9)$$

სიდიდეს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი აქვს. თუ განვიხილავთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის წიბოები დეფორმაციის მთავარი მიმართულებების პარალელურ საკოორდინატო ღერძებზე მდებარეობენ და მათი სიგრძეები l_1, l_2 და l_3-ის ტოლია, მაშინ დეფორმაციის შემდეგ პარალელეპიპედის წიბოები კვლავ ღერძების პარალელური იქნებიან, ხოლო მათი სიგრძეები შესაბამისად

$$l_1(1+e_1),\ l_2(1+e_2),\quad l_3(1+e_3)\text{-ს}$$

გაუტოლდება. ამდენად, განსახილველი პარალელეპიპედის მოცულობა დეფორმაციამდე იყო

$$V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3,$$

ხოლო დეფორმაციის შემდეგ, მაღალი რიგის უსასრულო მცირეთა სიზუსტით, არის

$$V^* = l_1 l_2 l_3 (1+e_1)(1+e_2)(1+e_3)$$

$$\cong V(1+e_1+e_2+e_3).$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ $(1.9.9)$-ს,

$$\frac{V^* - V}{V} = e_1 + e_2 + e_3 = \theta.$$

ამრიგად, θ წარმოადგენს *მოცულობის ფარდობით გაფართოებას*, ე.ი., დეფორმაციის დროს მოცულობის ერთეულის ცვლილების ტოლია.

$110. zogadi saxis deformacia

ვთქვათ, დეფორმაციის შედეგად უწყვეტი ტანის M წერტილი (x_1, x_2, x_3) კოორდინატებით იკავებს სივრცის $M*$ წერტილს (x_1^*, x_2^*, x_3^*) კოორდინატებით.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$u_i := x_i^* - x_i \ .$$

ცხადია, u_i არის $\overrightarrow{MM*}$ ვექტორის კომპონენტები, რომლებიც გამოხატავენ დეფორმაციის შედეგად წერტილის გადაადგილებას. $\vec{u}:=(u_1, u_2, u_3)$ *ვექტორს ეწოდება გადაადგილების ვექტორი, ხოლო მის კომპონენტებს – გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები.* რადგან გარემოს სხვადასხვა წერტილი სხვადასხვაგვარად გადაადგილდება, ამიტომ გადაადგილების ვექტორი საზოგადოდ წერტილის კოორდინატების ფუნქციაა:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3) .$$

შემდგომში, თუ სხვა რამ არ იქნება თქმული, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ u_i ცალსახა, უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებსაც აქვთ მესამე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები.

წერტილის მიდამოში გარემოსგან გამოვყოთ მისი უსასრულოდ მცირე ნაწილი და დავაკვირდეთ, თუ როგორ იცვლება იგი დეფორმაციის შედეგად. ამისათვის საკმარისია ვნახოთ, თუ როგორ იცვლებიან M წერტილში საწყისი წერტილის მქონე უსას-

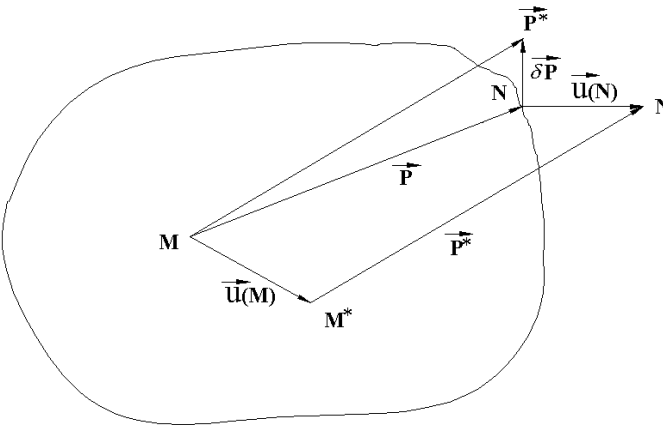
რულ

ერთი

M წ

გარდ

$\overrightarrow{\delta P}$ =



ცხადია, M^* წერტილის კოორდინატებია

$$x_i + u_i(x_1,\ x_2,\ x_3),$$

ხოლო N^*-ის, რომლის დეფორმაციამდელი კოორდინატები იყო

$$x_i + \xi_i,$$

კოორდინატებია

$$x_i + \xi_i + u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3).$$

ამიტომ $\overrightarrow{P^*}$ ვექტორის კომპონენტებია

$$\xi_i + u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3),$$

ხოლო $\overrightarrow{\delta P}$ ვექტორის კომპონენტებია

$$\delta\xi_i = u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3).$$

დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილი ტეილორის ფორმულის თანახმად,

$$u_i(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{i,j}\xi_j + \varepsilon\ ,$$

სადაც ε არის ξ_i-ის მიმართ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდე. თუ მათ უგულვებელვყოფთ მივიღებთ, რომ

$$\delta\xi_i = u_{i,j}\,\xi_j\,. \qquad (1.10.1)$$

აქ $u_{i,j}$ სიდიდეები დამოკიდებულნი არიან $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ წერტილზე და არ არიან დამოკიდებულნი ξ_i-ზე.

(1.10.1)-დან ნათელია, რომ განსახილველი ელემენტის წრფივ განზომილებებთან შედარებით მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით, ელემენტის დეფორმაცია ხასიათდება აფინური გარდაქმნით, რომლის კოეფიციენტებია

$$a_{ij} = u_{i,j}\,. \qquad (1.10.2)$$

შემდგომში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ *გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები და მათი წარმოებულები ისეთი უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია, რომელთა ნამრავლებისა და კვადრატების უგულ-*

ვებელყოფა დასაშვებია თვით ამ სიდიდეებთან შედარებით. ამ პირობებში (1.10.1) იქნება უსასრულოდ მცირე აფინური გარდაქმნა და მის მიმართ შეიძლება გამოვიყენოთ §1.8-სა და §1.9-ში მიღებული შედეგები.

(1.8.11)-ის, (1.8.8)-ის, (1.8.9)-ის და (1.10.2)-ის თანახმად,

$$\delta\xi_i = (e_{ij} - p_{ij})\,\xi_j\,, \tag{1.10.3}$$

სადაც

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})\,, \tag{1.10.4}$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j})\,. \tag{1.10.5}$$

სხეულის მდგომარეობის შეცვლის სრული სურათის მისაღებად (1.10.3)-ით გამოხატულ საკუთრივ დეფორმაციასა და უსასრულოდ მცირე ხისტ მობრუნებას უნდა დაემატოს ელემენტის ხისტი გადატანა, რომელიც თვით $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$ წერტილის გადაადგილების ტოლია, ე.ი. ამ ხისტი გადატანის კომპონენტებია $u_i\,(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

§1.7-ში განხილულ ერთგვაროვან დეფორმაციასა და ამ პარაგრაფში განხილულ დეფორმაციას შორის განსხვავება ისაა, რომ აქ დეფორმაციის კომპონენტები დამოკიდებულია განსახილველი ელემენტის მდებარეობაზე გარემოში, ე.ი. $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ კოორდინატებზე. კერძოდ, წერტილიდან წერტილზე გადასვლის დროს იცვლება დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები. იგივე უნდა ითქვას ბრუნვის კომპონენტებზე და მოცულობის ფარდობით გაფართოებაზე.

§1.11. gadaadgilebis gansazRvra deformaciis komponentebis saSualebiT. Cezaros formulebi. Tavsebadobis sen-venanis pirobebi

ამ პარაგრაფის ამოცანაა (1.10.4) სისტემის ამოხსნა. ე.ი. სამი უცნობი სიდიდის განსასაზღვრავად გვაქვს ექვსი განტოლება, რაც იმაზე მიუთითებს, რომ საჭიროა გარკვეული დამატებითი პირობები დაედოს დეფორმაციის კომპონენტებს.

ვთქვათ V არე, რომელიც გარემოს ეკავა დეფორმაციამდე, ცალსახად ბმულია; $M_0\left(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \overset{0}{x}_3\right)$ რაიმე წერტილია V არეში, $\overset{0}{x}_i$ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებია, ხოლო $\overset{0}{p}_{ij}$ ბრუნვის კომპონენტებია აღნიშნულ წერტილში; $M_1\left(\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \overset{1}{x}_3\right)$ რაიმე სხვა წერტილია არეში. ამ უკანასკნელ წერტილში ვიპოვოთ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტების გამოსახულება დეფორმაციის კომპონენტების საშუალებით. M_0M_1-ით აღვნიშნოთ M_0 და M_1 წერტილების შემაერთებელი რაიმე წირი, რომელიც V არეში მდებარეობს.

(1.10.4) და (1.10.5)-დან ცხადია, რომ

$$u_{i,j} = e_{ij} - p_{ij}\,.$$

ე.ი.

$$du_k = u_{k,l}dx_l = (e_{kl} - p_{kl})dx_l\,.$$

აქედან

$$u_k = \overset{0}{u}_k + \int\limits_{M_0M_1} e_{kl}\,dx_l - \int\limits_{M_0M_1} p_{kl}\,dx_l\,. \qquad (1.11.1)$$

გამოვთვალოთ მეორე ინტეგრალი:

$$\begin{aligned}\int\limits_{M_0M_1} p_{kl}\,dx_l &= -\int\limits_{M_0M_1} p_{kl}\,d(\overset{1}{x}_l - x_l)\\ &= \overset{0}{p}_{kl}(\overset{1}{x}_l - \overset{0}{x}_l) + \int\limits_{M_0M_1} (\overset{1}{x}_l - x_l)dp_{kl}\,.\end{aligned} \qquad (1.11.2)$$

თუ (1.10.5)-ს გავაწარმოებთ, $\frac{1}{2}u_{i,kl}$-ის დამატებისა და გამოკლების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$p_{kl,i} = \frac{1}{2}(u_{l,k} - u_{k,l})_{,i}$$

$$= \frac{1}{2}(u_{l,i} + u_{i,l})_{,k} - \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i})_{,l} = e_{li,k} - e_{ik,l}.$$

ე.ი.

$$dp_{kl} = p_{kl,i}\, dx_i = (e_{li,k} - e_{ik,l})dx_i.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.11.2)-ში, ხოლო მიღებული გამოსახულება – (1.11.1)-ში:

$$u_k = \overset{0}{u}_k + \overset{0}{p}_{kl}\left(\overset{0}{x}_l - \overset{0}{x}_l\right) + \int_{M_0M_1}\left[e_{ki} - \left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)\left(e_{li.k} - e_{ik.l}\right)\right]dx_i. \tag{1.11.3}$$

რამდენადაც u_k დამოკიდებული უნდა იყოს $\overset{1}{x}_i$-ზე, მაგრამ არ უნდა იყოს დამოკიდებული წირის შერჩევაზე, წირითი ინტეგრალის ინტეგრების წირისაგან დამოუკიდებლობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების თანახმად, უნდა შესრულდეს შემდეგი ტოლობები:

$$e_{k1,2} + e_{21,k} - e_{1k,2} - \left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)\left(e_{l1,k2} - e_{1k,l2}\right)$$

$$= e_{k2,1} + e_{12,k} - e_{2k,1} - \left(\overset{1}{x}_l - x_l\right)\left(e_{l2,k1} - e_{2k,l1}\right),$$

$$e_{k1,3}+e_{31,k}-e_{1k,3}-\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l1,k3}-e_{1k,l3}\right)$$

$$=e_{k3,1}+e_{13,k}-e_{3k,1}-\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l3,k1}-e_{3k,l1}\right),$$

$$e_{k2,3}+e_{32,k}-e_{2k,3}-\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l2,k3}-e_{2k,l3}\right)$$

$$=e_{k3,2}+e_{23,k}-e_{3k,2}-\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l3,k2}-e_{3k,l2}\right).$$

საიდანაც

$$\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l1,k2}-e_{1k,l2}\right)=\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l2,k1}-e_{2k,l1}\right),$$

$$\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l1,k3}-e_{1k,l3}\right)=\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l3,k1}-e_{3k,l1}\right),$$

$$\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l2,k3}-e_{2k,l3}\right)=\left(\overset{1}{x}_l-x_l\right)\left(e_{l3,k2}-e_{3k,l2}\right).$$

აქედან, რადგანაც უკანასკნელი ტოლობები V-დან ნებისმიერი x_l-ისა და $\overset{1}{x}_l$-სთვის უნდა შესრულდეს, ვიღებთ შემდეგ 6 პირობას:

$$e_{li,kj}-e_{ik,lj}=e_{lj,ki}-e_{jk,li}, \qquad (1.11.4)$$

სადაც

$$likj=1122,\ 1133,\ 2233,\ 1123,\ 2132,\ 2133.$$

ამ უკანასკნელ პირობებს ეწოდებათ *თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები.*

რადგან (1.11.3) გამოსახულებაში წირითი ინტეგრალი ფიგურირებს, თუ არე მრავლადბმულია, გადაადგილების ვექტორის

კომპონენტები საზოგადოდ მრავალსახა ფუნქციები იქნებიან. თუ გავატარებთ საჭირო რაოდენობის ჭრილებს ისე, რომ არე ცალადბმულად იქცეს, მათი ცალსახობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ფუნქციების მნიშვნელობები ჭრილების სხვადასხვა მხრიდან ტოლი იყოს. (1.11.3) ფორმულებს *ჩეზაროს*[*] *ფორმულები* ეწოდებათ.

[*] ე. ჩეზარო (1859-1906).

თავი III. კონსტიტუტივური დამოკიდებულებები

$1.12. drekadobis Teoriis ZiriTadi kanoni _ hukis ganzogadebuli kanoni

1.1-1.11 პარაგრაფებში თქმული მართებულია, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო, ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსთვის. იმისათვის, რომ დრეკადი სხეულის დამახასიათებელი განტოლებები მივიღოთ, დამატებით საჭიროა ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტების დამაკავშირებელი კანონი, რომელიც ექსპერიმენტულად დგინდება.

ვიდრე უშუალოდ ძირითად კანონს შევეხებოდეთ, შევნიშნოთ შემდეგი. რადგანაც, საზოგადოდ, ძაბვები და დეფორმაციები სხეულის სხვადასხვა წერტილში სხვადასხვაა, ამიტომ მათ ვიხილავთ მოცემულ წერტილში. აქამდეც ჩვენ ეს ასე გვესმოდა, მაგრამ როცა ვიხილავდით გადაადგილების ვექტორის და დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებს „მოცემული წერტილის“ ქვეშ, ჩვენ გვესმოდა წერტილი დეფორმაციამდე (ე.ი. წერტილი ლაგრანჟის ცვლადებში (იხ. ქვემოთ § 1.22)), ხოლო ძაბვების განხილვის დროს კი წერტილი დეფორმაციის შემდეგ (ე.ი. წერტილი ეილერის ცვლადებში (იხ. ქვემოთ § 1.22)).

მაგრამ მცირე დეფორმაციების განხილვის დროს (დრეკადობის წრფივი თეორია ემყარება მცირე შეშფოთებათა ჰიპოთეზას, რაც დეფორმაციების სიმცირეს და ამდენად, ხისტი გადაადგილების სიზუსტით, გადაადგილების სიმცირეს გულისხმობს) ეს სხვაობა არაარსებითია. მაგალითად, X_{ij}-ის მნიშვნელობა $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ და $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ წერტილებში, სადაც $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ წერტილი

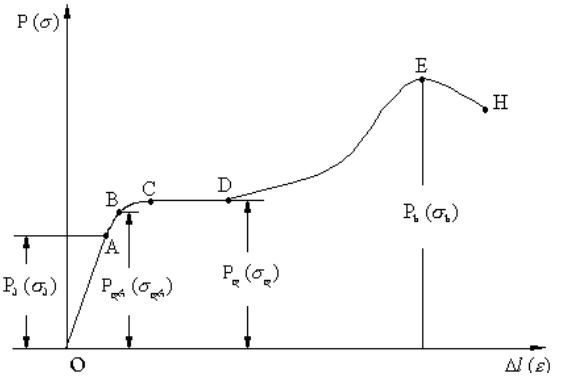
არის სხეულის დეფორმაციამდე (x_1, x_2, x_3) წერტილში მდებარე „სხეულის წერტილის“ მდებარეობა დეფორმაციის შემდეგ, ერთმანეთისგან განსხვავდება X_{ij}-სთან შედარებით მცირე სიდიდით, რამდენადაც X_{ij} სივრცითი წერტილის უწყვეტი ფუნქციებია. ამდენად დასაშვებია, X_{ij}-ის მნიშვნელობა $\left(\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \overset{*}{x}_3\right)$ წერტილში ამ სიზუსტით შევცვალოთ მისი მნიშვნელობით (x_1, x_2, x_3) წერტილში. ეს მსჯელობა მისაღებია იმ პირობით, თუ $\left(\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \overset{*}{x}_3\right)$ და (x_1, x_2, x_3) წერტილები ეკუთვნიან არეს, რომლის ჩაკეტვაც უკავია სხეულს დეფორმაციის შემდეგ.

ამის შესაბამისად, *შემდეგში, გვექნება რა ლაპარაკი არეზე, რომელიც სხეულს უკავია, ყოველთვის მხედველობაში გვექნება არე, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე, ე.ი. ყველა სიდიდეს განვიხილავთ ლაგრანჟის ცვლადებში.*

ჰუკის მიერ ჩატარებული, შესავალში ნახსენები ექსპერიმენტის ილუსტრირება მოვახდინოთ ე.წ. რბილი ფოლადის ღეროს (იხ. ქვემოთ § 3.1) გაჭიმვაზე ჩატარებული ექსპერიმენტის შედეგებით. P ძალის (ე.ი. ღეროს ბოლოზე მოქმედი დატვირთვის ტოლქმედის) ზრდის პარალელურად იზრდება ღეროს Δl წაგრძელებაც. $\Delta l = f(P)$ დამოკიდებულების ნახაზზე (იხ. ნახ. 1.12.1) მოცემულ გრაფიკს გაჭიმვის ან *ჰუკის დიაგრამა* ეწოდება (იხ. [3], გვ 35). დატვირთვის ინტენსიობის გაზრდისას მასალა ერთი მდგომარეობიდან მეორეში გადადის, რასაც დიაგრამაზე რამდენიმე უბანი შეესაბამება. წრფივი OA უბანი ჰუკის კანონს გამოსახავს. A წერტილის შესაბამის

$$\sigma_{ზ} = \frac{P_{ზ}}{F}$$

ძაბვას, სადაც F ნიმუშის კვეთის საწყისი ფართობია, მასალის პროპორციულობის ზღვარი ეწოდება. *პროპორციულობის ზღვარი* არის ის მაქსიმალური ძაბვა, რომლის ფარგლებში დეფორმაცია ძალის პროპორციულია. რბილი ფოლადისათვის $\sigma_{ზ} = 2000 \frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}$. B წერტილის ქვემოთ ხდება სუფთა დრეკადი წაგრძელება, ზემოთ კი ჩნდება ნარჩენი წაგრძელებაც.



ნახ. 1.12.1

$$\sigma_{დრ} = \frac{P_{დრ}}{F}$$

ძაბვას მასალის *დრეკადობის ზღვარი* ეწოდება. AC უბანში დიაგრამის დახრა მცირდება, CD უბანში კი ის თითქმის ჰორიზონ-

ტალური ხდება, რაც იმას ნიშნავს, რომ მასალის სიხისტე თანდათანობით კლებულობს და ბოლოს თითქმის ისპობა. დიაგრამის ჰოროზონტალური უბანი მასალის *საერთო დენადობის* მდგომარეობას გამოსახავს, როცა P ძალა არ იზრდება, მაგრამ დეფორმაცია გრძელდება. სათანადო

$$\sigma_{დ} = \frac{P_{დ}}{F}$$

ძაბვას მასალის *დენადობის ზღვარი* ეწოდება.

მასალის დენადობა აიხსნება ნარჩენი ძვრების მასიური განვითარებით. პირველად ნარჩენი ძვრები ჩნდება აქა-იქ, ცალკეულ კრისტალურ მარცვლებში, რომლებიც არახელსაყრელად არიან ორიენტირებულნი გამჭიმავი ძალის მიმართ. მათი რიცხვი და განფენილობა P ძალის ზრდასთან ერთად იზრდება და ბოლოს მოვლენა მასობრივ ხასიათს იღებს. დიდი მოცულობის კრისტალური შრეები ერთიმეორეზე დაცოცებას განიცდიან, რის გარეგნულ გამოვლინებასაც დიდი პლასტიკური (იხ. თავი VI) წაგრძელება წარმოადგენს. დიდი ნარჩენი წაგრძელების მიღების შემდეგ მასალა კვლავ იძენს წინააღმდეგობის უნარს, რაც იმას ნიშნავს, რომ წაგრძელების ზრდა P ძალის ზრდას მოითხოვს. მასალის *განმტკიცების* მდგომარეობას დიაგრამაზე აღმავალი *DE* უბანი ეთანადება. მაქსიმალურ P ძალამდე წაგრძელება ღეროს სიგრძეზე თანაბარია, შემდეგ კი ლოკალურ ხასიათს იღებს, ე.ი. გრძელდება ღეროს მხოლოდ პატარა ადგილი, სადაც ჩნდება ყელი და ხდება საბოლოო რღვევა. ყელის განივი კვეთი იმდენად სწრაფად ვიწროვდება, რომ, თუმცა იქ რეალური ძაბვა ზრდას ბოლომდე განაგრძობს, მთლიანად ძალვა (ძაბვის ინტეგრალი განივი კვეთის ფართზე) მცირდება. დიაგრამა მთავრდება დაღმავალი *EH* უბნით. ეს უბანი მასალის *ადგილობრივ დენადობას* ეთანადება. მაქსიმალური P ძალის შესაბამის

$$\sigma_{ს} = \frac{P_{ს}}{F}$$

ძაბვას მასალის *სიმტკიცის ზღვარი* ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ P ძალიდან ძაბვებზე გადასვლას საწყის F ფართობზე გაყოფით ვახდენთ, თუმცა სინამდვილეში ღეროს გაჭიმვისას განივი კვეთის ფართობი მცირდება. ამდენად ნაანგარიშები ძაბვები რეალურად შედარებით პირობით ხასიათს ატარებენ. რბილი ფოლადისათვის

$$\sigma_{ზ} = 2400\,\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}\,,\quad \sigma_{ს} = 4000\,\frac{\text{ნიუტონი}}{\text{სმ}^2}\,.$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ $\sigma = \dfrac{P}{F}$ ძაბვასა და $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ (l ღეროს სიგრძეა) ფართობით წაგრძელებას შორის დამოკიდებულების გრაფიკი ნახ. 1.12.1-ზე მოცემული დიგრამის მსგავსია, ამიტომ იქვე მივუთითეთ შესაბამისი სიდიდეები ფრჩხილებში.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად ვთვლით, რომ მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ადგილი აქვს ჰუკის შემდეგ განზოგადებულ კანონს: *სხეულის მოცემულ წერტილში ძაბვის ტენზორის კომპონენტები დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქციებია და პირიქით,* ე.ი.

$$X_{ij} = C_{kl}^{ij}\, e_{kl}\,,\quad i, j = 1,2,3, \tag{1.12.1}$$

და

$$\det\left\|C_{kl}^{ij}\right\| \neq 0.$$

(1.12.1) ტოლობებს ეწოდებათ *კონსტიტუტივური დამოკიდებულებები.*

ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების სიმეტრიულობის გამო

$$X_{ij} = C_{kl}^{ij}\, e_{kl} = C_{lk}^{ij}\, e_{lk} = C_{lk}^{ij}\, e_{kl}\,, \quad \text{ე.ი.} \quad \left(C_{kl}^{ij} - C_{lk}^{ij}\right)e_{kl} = 0\,,$$

და, (1.12.1)-ის თანახმად,

$$C_{kl}^{ij}\, e_{kl} = X_{ij} = X_{ji} = C_{kl}^{ji}\, e_{kl}\,, \quad \text{ე.ი.} \quad \left(C_{kl}^{ji} - C_{kl}^{ij}\right)e_{kl} = 0\,.$$

რადგანაც ტოლობებს ადგილი უნდა ჰქონდეთ ნებისმიერი e_{kl} - ისთვის, ამიტომ

$$C_{lk}^{ij} = C_{kl}^{ij} = C_{kl}^{ji} = C_{lk}^{ji}.$$

ბოლო ტოლობა გამომდინარეობს წინა ორი ტოლობიდან.

ამ უკანასკნელი ტოლობების თანახმად, C_{kl}^{ij} -ების რაოდენობა შეადგენს 36-ს (მართლაც, $card\left\{a_{ij}\right\} = 3^2$;

თუ $a_{ij} = a_{ji}$, მაშინ

$$card\left\{a_{ij}\right\} = 3^2 - 3 = 6;\ card\left\{a_{ijkl}\right\} = 3^2 \cdot 3^2 = 3^4;$$

თუ $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}$, მაშინ

$$card\left\{a_{ijkl}\right\} = \left(3^2 - 3\right)\cdot\left(3^2 - 3\right) = 6 \cdot 6 = 36,$$

სადაც *card* აღნიშნავს განსხვავებულ ელემენტთა რიცხვს). C_{kl}^{ij} კოეფიციენტებს *დრეკადი მუდმივები* ეწოდებათ იმ თვალსაზრისით, რომ ისინი საზოგადოდ დამოკიდებულნი არიან წერტილის კოორდინატებზე, მაგრამ არ არიან დამოკიდებულნი მოცემულ წერტილში დეფორმაციის და ძაბვის ტენზორის კომპონენტებზე. ენერგიის შენახვის კანონზე დაყრდნობით მტკიცდება, რომ დრეკადი მუდმივების რიცხვი ზოგად შემთხვევაში შეიძლება 21-ზე იქნეს დაყვანილი (იხ. [2], [51]).

სხეულს ეწოდება იზოტროპული რაიმე თვისების მიმართ, თუ აღნიშნული თვისება მოცემულ წერტილში ყველა მიმართულებით ერთნაირია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ იზოტროპული სხეულიდან რაიმე ადგილას ამოვჭრით რაიმე ფორმის მოცულობით ელემენტს, მაგალითად, კუბს, მაშინ ეს ელემენტი არ იქნება რაიმე თვისების თვალსაზრისით განსხვავებული სხეულის იმავე ადგილას ამოჭრილი იმავე ფორმის, მაგრამ სხვაგვარად ორიენტირებული ელემენტისგან. მაგალითად, ხე არ არის იზოტროპული, რადგან ის ე.წ. ბოჭკოებისგან შედგება, ხოლო ლითონი დასაშვები სიზუსტით იზოტროპულია.

სხეულს ეწოდება ერთგვაროვანი რაიმე თვისების მიმართ, თუ აღნიშნული თვისება სხეულის სხვადასხვა წერტილში ერთნაირია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ თვისების მიმართ ერთნაირია სხეულის სხვადასხვა ადგილას ამოჭრილი ერთნაირად ორიენტირებული ელემენტი.

ცხადია, სხეული შეიძლება იყოს ერთგვაროვანი იზოტროპული, არაერთგვაროვანი იზოტროპული, ერთგვაროვანი *ანიზოტროპული* (არა იზოტროპული) და არაერთგვაროვანი ანიზოტროპული.

მათემატიკურად ერთგვაროვნება დრეკადობის თვალსაზრისით იმაში გამოიხატება, რომ დრეკადი მუდმივები არ არიან დამოკიდებულნი სივრცით წერტილზე, ხოლო იზოტროპულობა – იმაში, რომ დრეკადი მუდმივები არ არიან დამოკიდებულნი კოორდინატთა სისტემის ორიენტაციაზე სხეულის მიმართ, ე.ი. (1.12.1) ფორმულები არ უნდა შეიცვალონ კოორდინატთა სისტემის ნებისმიერი გარდაქმნის დროს.

ვაჩვენოთ, რომ *იზოტროპული სხეულის ნებისმიერ წერტილში დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები ემთხვევა ძაბვის მთავარ მიმართულებებს.* მართლაც, თუ დეფორმაციის მთავარი მიმართულებებს საკოორდინატო ღერძებად მივიღებთ, მაშინ

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j ,$$

ე.ი. ჰუკის კანონის თანახმად, კერძოდ,

$$X_{32} = A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33}, \qquad (1.12.2)$$

სადაც A_i დრეკადი მუდმივებია. გადავიდეთ ახალ $Ox_1'x_2'x_3'$ კოორდინატთა სისტემაზე, რომელიც x_3 ღერძის გარშემო ძველი სისტემის 180°-ით შემობრუნებით მიიღება. x_3' ღერძი დაემთხვევა x_3-ს, ხოლო x'_α ღერძებს x_α-ს საწინააღმდეგო მიმართულებები ექნებათ. ერთი მხრივ სხეულის იზოტროპულობის გამო

$$X'_{32} = A_1 e'_{11} + A_2 e'_{22} + A_3 e'_{33} . \qquad (1.12.3)$$

მეორე მხრივ, ცხადია,

$$X'_{32} = -X_{32}, \quad e'_{ii} = e_{ii}. \tag{1.12.4}$$

(1.12.4)-ის გათვალისწინებით, (1.12.2) და (1.12.3)-დან ვასკვნით, რომ

$$A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33} = -\left(A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33}\right).$$

აქედან

$$A_1 e_{11} + A_2 e_{22} + A_3 e_{33} = 0 \tag{1.12.5}$$

და

$$A_i = 0, \qquad i = 1,2,3,$$

რადგანაც (1.12.5)-ს ადგილი აქვს დეფორმაციის ტენზორის ნებისმიერი საკმარისად მცირე კომპონენტებისთვის, ე.ი. $X_{32} = 0$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $X_{31} = X_{12} = 0$.

რამდენადაც იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში ძაბვის და დეფორმაციის მთავარი მიმართულებები ერთმანეთს ემთხვევა, მათ უბრალოდ *მთავარ ღერძებს* ვუწოდებთ.

ჰუკის კანონის თანახმად

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 e_{22} + a_3 e_{33}, \tag{1.12.6}$$

სადაც a_i დრეკადი მუდმივებია.

ვთქვათ, $Ox_1'x_2'x_3'$ ახალი კოორდინატთა სისტემაა, რომელიც ძველისგან x_1 ღერძის გარშემო 90°-ით შემობრუნებით მიიღება. ახალ კოორდინატთა სისტემაში

$$X'_{11} = a_1 e'_{11} + a_2 e'_{22} + a_3 e'_{33}.$$

მაგრამ

$$X'_{11} = X_{11}, \quad e'_{11} = e_{11}, \quad e'_{22} = e_{33}, \quad e'_{33} = e_{22}.$$

ამიტომ

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2 e_{33} + a_3 e_{22}. \tag{1.12.7}$$

(1.12.6) და (1.12.7)-დან ვასკვნით, რომ $a_2 = a_3$. ამდენად,

$$X_{11} = a_1 e_{11} + a_2\left(e_{22} + e_{33}\right) = a_2\theta + \left(a_1 - a_2\right)e_{11}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $a_2 = \lambda$, $a_1 - a_2 = 2\mu$, მაშინ

$$X_{11} = \lambda\,\theta + 2\mu\, e_{11}.$$

იზოტროპულობის გამო, ცხადია,

$$N_i := X_{i\dot{i}} = \lambda\theta + 2\mu e_{i\dot{i}} = \lambda\theta + 2\mu e_i. \qquad (1.12.8)$$

თუ გადავალთ ახალ კოორდინატთა $Ox_1'x_2'x_3'$ სისტემაზე, შესაბამისი ფორმების ინვარიანტობის გამო მივიღებთ, რომ

$$N_i\xi_i^2 = X'_{ij}\,\xi_i'\xi_j', \quad e_i\xi_i^2 = e'_{ij}\,\xi_i'\xi_j',$$

მაგრამ

$$\xi_i\xi_i = \xi_i'\xi_i' = \xi_i'\xi_j'\delta_{ij}$$

და (1.12.8), ξ_i^2-ზე გამრავლების შემდეგ, ახალ კოორდინატთა სისტემაში მიიღებს

$$X'_{ij}\,\xi_i'\xi_j' = \lambda\,\theta\xi_i'\xi_j'\delta_{ij} + 2\mu\, e'_{ij}\,\xi_i'\xi_j'$$

სახეს. საიდანაც ξ_i'-ების ნებისმიერობის გამო ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში

$$X'_{ij} = \lambda\,\theta\delta_{ij} + 2\mu\, e'_{ij}. \qquad (1.12.9)$$

ამრიგად, იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში ჰუკის განზოგადებული კანონი იღებს (1.12.9) სახეს და გვაქვს მხოლოდ 2 დრეკადი მუდმივი λ და μ. დრეკადი სიმეტრიის სხვა შემთხვევები მოყვანილია [2]-ში (იხ. გვ. 76-80).

(1.12.9)-ის გამო, იმის გათვალისწინებით, რომ $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$,

$$\Theta := X_{ii} = X_{ij}\delta_{ij} = \lambda\,\theta\delta_{ij}\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij}\delta_{ij} = 3\lambda\,\theta + 2\mu\,\theta$$

აქედან, თუ $3\lambda + 2\mu \neq 0$,

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}\Theta. \qquad (1.12.10)$$

ე.ი.

$$X_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\Theta\delta_{ij} + 2\mu\, e_{ij} \qquad (1.12.11)$$

და თუ $\mu \neq 0$,

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu} X_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)} \Theta \delta_{ij}\,. \qquad (1.12.12)$$

განვიხილოთ ისეთი დრეკადი წონასწორობა, როცა

$$X_{11} \not\equiv 0, \quad X_{22} = X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_{33} = 0\ ^{*)},$$

მაშინ (1.12.9) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} \lambda\theta + 2\mu e_{11} &= X_{11}, \quad \lambda\theta + 2\mu e_{22} = 0, \\ \lambda\theta + 2\mu e_{33} &= 0, \qquad e_{13} = e_{21} = e_{23} = 0, \end{aligned} \qquad (1.12.14)$$

ხოლო (1.12.10) – შემდეგ სახეს:

$$\theta = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} X_{11}\,. \qquad (1.12.15)$$

შევიტანოთ (1.12.15) (1.12.14)-ის პირველ ტოლობაში და განვსაზღვროთ X_{11}:

$$X_{11} = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11}\,. \qquad (1.12.16)$$

(1.12.15) და (1.12.16)-დან ცხადია:

$$\theta = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e_{11}\,.$$

ჩავსვათ ეს უკანასკნელი (1.12.14)-ის მეორე და მესამე ტოლობაში:

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11}\,. \qquad (1.12.17)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

---

*) თუ ეს პირობები სრულდება სხეულის ყოველ წერტილში (ან მოცემულ წერტილში), მაშინ ამბობენ, რომ სხეულში (ან მოცემულ წერტილში) გვაქვს X_1 ღერძის პარალელური წრფივი დაძაბული მდგომარეობა.

$$E := \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \qquad \nu := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{1.12.18}$$

E-ს ეწოდება *დრეკადობის* ან *იუნგის მოდული*, ხოლო ν-ს – *პუასონის კოეფიციენტი*. მაშინ (1.12.16) და (1.12.17) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_{11} = Ee_{11}, \tag{1.12.19}$$

$$e_{22} = e_{33} = -\nu e_{11}. \tag{1.12.20}$$

ვთქვათ, განსახილველი სხეული x_1 ღერძის პარალელური მსახველის მქონე პრიზმა ან ცილინდრია. კოშის ფორმულების თანახმად გვერდით ზედაპირზე

$$X_{ni} = 0,$$

ხოლო x_1 ღერძის დადებითი და უარყოფითი მიმართულებებით მდებარე ფუძეებზე შესაბამისად

$$X_{n2} = X_{12} = 0, \quad X_{n3} = X_{13} = 0, \quad X_{n1} = X_{11} \neq 0,$$

და

$$X_{n2} = -X_{12} = 0, \quad X_{n3} = -X_{13} = 0, \quad X_{n1} = -X_{11} \neq 0.$$

ამდენად ცილინდრზე მოქმედი გარე ძალები წარმოადგენენ მის ფუძეებზე მოდებულ თანაბრადგანაწილებულ გამჭიმავ ($X_{11} > 0$) ან მკუმშავ ($X_{11} < 0$) ძაბვებს. ჩვენ ჩავთვლით ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად, რომ როცა $X_{11} > 0$, ცილინდრი გრძივი მიმართულებით წაგრძელდება ($e_{11} > 0$), ხოლო განივი მიმართულებით შეიკუმშება ($e_{22}, e_{33} < 0$). ამ შენიშვნის საფუძველზე (1.12.19) და (1.12.20)-დან ნათელია, რომ

$$E > 0, \quad \nu > 0. \tag{1.12.21}$$

ვთქვათ, ახლა

$$X_{23} \neq 0, \quad X_{11} = X_{22} = X_{33} = X_{13} = X_{21} = 0.$$

მაშინ (1.12.12)-ის თანახმად:

$$e_{23} = \frac{1}{2\mu} X_{23}, \quad e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{13} = e_{21} = 0.$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში გვაქვს მარტივი ძვრა, $X_{23} = \mu \varepsilon_{23}$. μ *-ს ძვრის მოდული ეწოდება.*

დავუშვათ, რომ იზოტროპული სხეული ყოველმხრივ თანაბრად იკუმშება, მაშინ

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = -p, \quad X_{12} = X_{23} = X_{31} = 0.$$

(1.12.9)-ის თანახმად:

$$\lambda\theta + 2\mu e_{ii} = -p, \qquad i = 1,2,3, \tag{1.12.22}$$

თუ (1.12.22) ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ, რომ

$$(3\lambda + 2\mu)\theta = -3p.$$

აქედან

$$p = -k\theta,$$

სადაც

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \tag{1.12.23}$$

სიდიდეს ეწოდება *ყოველმხრივ შეკუმშვის მოდული.* ექსპერიმენტულად დამტკიცებულად ვთვლით, რომ როცა $p > 0$, სხეული მართლა იკუმშება, ე.ი. მცირდება მისი მოცულობა, ამდენად $k > 0$.

(1.12.18)-ის და (1.12.23)-ის თანახმად,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \tag{1.12.24}$$

რადგანაც $k > 0$, (1.12.21) და (1.12.24)-დან ცხადია, რომ

$$0 < \nu < \frac{1}{2}, \tag{1.12.25}$$

ე.ი. $\lambda > 0, \quad \mu > 0$.

(1.12.12) ფორმულები, (1.12.24)-ის გამო, შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} X_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} . \qquad (1.12.26)$$

SeniSvna 1.12.1. უწყვეტ გარემოში ძაბვების წარმოქმნის ერთ-ერთ მიზეზს წარმოადგენს არათანაბარი გათბობა. ტემპერატურის ზრდასთან ერთად ფართოვდებიან გარემოს ელემენტებიც. ჩვეულებრივ ასეთი გაფართოება არ შეიძლება თავისუფლად მოხდეს, ამდენად გათბობის შედეგად წარმოიშვებიან ძაბვები, რომელთაც, მათი წარმოშობის ბუნებიდან გამომდინარე, *ტემპერატურული ძაბვები* ეწოდებათ (იხ. [35], გვ. 73). ჩავთვალოთ, რომ ტემპერატურა ისეთ ფარგლებში იცვლება, რომ გავლენას არ ახდენს ე.წ. დრეკად მუდმივებზე. მაშინ, როგორც ეს დაკვირვებებიდანაა ცნობილი, წაგრძელებები T ტემპერატურის პროპორციულია და ერთნაირია ყველა მიმართულებით (ე.ი. ტემპერატურის ცვლილების მიზეზით ძვრის დეფორმაციას ადგილი არ აქვს). ამდენად, ჰუკის (1.12.26) კანონის ნაცვლად გვექნება

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} X_{ij} - \frac{\nu}{E} \Theta \delta_{ij} + \alpha T \delta_{ij} , \quad i, j = 1,2,3 , \qquad (1.12.27)$$

დამოკიდებულებები, სადაც α *წრფივი გაფართოების ტემპერატურული კოეფიციენტია*, რომელიც თითოეული მასალისათვის ექსპერიმენტულად დგინდება, ხოლო αT *ფარდობითი ტემპერატურული გაფართოებაა*. (1.12.27) დამოკიდებულებებს *დიუჰამელ*[*)]*-ნეიმანის*[**)] *კანონი* ეწოდება.

თუ ამოვხსნით (1.12.27) განტოლებებს X_{ij}-ს მიმართ და გავითვალისწინებთ (1.12.24)-ს, მივიღებთ, რომ

[*)] ჟ.მ.კ. დიუჰამელი (1797-1872).

[**)] კ.გ. ნეიმანი (1832-1925).

$$X_{ij} = \lambda\,\theta\,\delta_{ij} + 2\mu\,e_{ij} - \frac{\alpha\,E}{1-2\nu}T\delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3. \quad (1.12.28)$$

$1.13. idealuri da blanti siTxeebi. hidromeqanikis ZiriTadi kanoni _ niutonis ganzogadebuli kanoni

როგორც ეს უკვე შესავალში იყო აღნიშნული, ჰიდრომექანიკა ეწოდება მექანიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის ბუნებაში არსებული სითხეებისა და გაზების მოძრაობას (იხ., მაგალითად, [43]). შემდგომში საერთო ტერმინის ქვეშ „სითხეები“ ვიგულისხმებთ როგორც საკუთრივ სითხეებს, ასევე გაზებსაც. თუ სითხე ისეთია, რომ არ ეწინააღმდეგება თავისი ერთი ფენის მეორეზე სრიალს, მას *იდეალური სითხე* ეწოდება. ცხადია, იდეალური სითხის ცნება ისეთივე აბსტრაქტულია, როგორც აბსოლუტურად მყარი სხეულის ცნება. თუმცა გარკვეული აზრით წყალი და ჰაერი შეიძლება განხილულ იქნენ როგორც იდეალური სითხეები. იდეალური სითხის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ სითხის ნაწილები ერთმანეთზე მხოლოდ ნორმალური ძაბვით (*წნევით*) მოქმედებენ, ე.ი. მხები ძაბვები ნულის ტოლია:

$$\vec{X}_n = \sigma_n \vec{n}, \quad \sigma_n \neq 0, \qquad \tau_n = 0. \quad (1.13.1)$$

კერძოდ,

$$X_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2,3. \quad (1.13.2)$$

(1.13.2)-ის გათვალისწინებით კოშის (1.2.1) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ ერთი მხრივ,

$$X_{ni} = X_{ii}\,n_i, \quad i = 1,2,3. \quad (1.13.3)$$

მეორე მხრივ, (1.13.1)-ის x_i-ზე დაგეგმილებით მივიღებთ, რომ

$$X_{ni} = \sigma_n\,n_i, \quad i = 1,2,3. \quad (1.13.4)$$

თუ შევადარებთ (1.13.3)-სა და (1.13.4)-ს, დავასკვნით, რომ

$$X_{ii} = \sigma_n =: -p, \qquad i = 1,2,3. \quad (1.13.5)$$

p-ს იდეალურ სითხეში *წნევა* ეწოდება და, როგორც ვხედავთ, ის ფართის ორიენტაციაზე, ე.ი. ნორმალზე დამოკიდებული არ არის. p მხოლოდ წერტილზეა დამოკიდებული. ამრიგად, იდეალურ სითხეში

$$\vec{X}_n = -p\vec{n}\,.$$

$p\vec{n}$ ვექტორს *ჰიდროდინამიკური წნევის ვექტორს* უწოდებენ. მინუსი p-ს წინ განპირობებულია სურვილით წნევა შემოვიღოთ, როგორც დადებითი სიდიდე, რამდენადაც ისეთ სითხეებზე ჩატარებული ექსპერიმენტი, რომელთათვისაც მისაღებია იდეალური სითხის მოდელი, გვიჩვენებს რომ ტიპურ შემთხვევაში სითხე შეკუმშულ მდგომარეობაშია, ე.ი. $p > 0$ და $\vec{X}_n$ მიმართულია მოცულობის შიგნით, ე.ი. მოცულობის გარე ნორმალის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

რეალურ სითხეებში მისი ერთი ფენის მეორე ფენის მიმართ ფარდობითი მოძრაობისას ფენებს შორის წარმოიშობა ძალები, რომლებიც ამ მოძრაობას ეწინააღმდეგებიან. ასეთ ძალებს *ხახუნის ძალებს* უწოდებენ და ისინი მხებ ძაბვებს წარმოადგენენ. თუ ხახუნის ძალების სიდიდე უმნიშვნელოა, მაშინ ისინი შეიძლება უგულებელვყოთ და მივიღებთ იდეალური სითხის შემთხვევას. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში ხახუნის ძალების უგულებელყოფა არ შეიძლება. თუ სითხის მოძრაობისას გათვალისწინებულია ხახუნის ძალები, მას *ბლანტი სითხე* ეწოდება.

ნიუტონის ექსპერიმენტული კანონის თანახმად, ბლანტი სითხის x_1 ღერძის გასწვრივ მოძრაობის დროს x_1 ნორმალის მქონე ფართით ელემენტზე მოქმედი X_{12} მხები ძაბვა განისაზღვრება

$$X_{12} = \mu \mathrm{v}_{1,2} \qquad (1.13.6)$$

ტოლობით, სადაც μ-ს ეწოდება *სიბლანტის კოეფიციენტი*, რომელიც ექსპერიმენტულად დგინდება. ის მუდმივი მნიშვნელო-

ბის მქონეა გარკვეული სითხისთვის გარკვეული ტემპერატურის დროს.

დავუშვათ, რომ სითხე იზოტროპულია და ზღვრულ შემთხვევაში, როცა სიბლანტე არ გვაქვს, სრულდება იდეალური სითხის დამახასიათებელი (1.13.5) და (1.13.2) პირობები. მაშინ, (1.13.6)-ის თანახმად, სამართლიანია ნიუტონის შემდეგი განზოგადებული კანონი:

$$X_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \dot{e}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \dot{e}_{ij}, \quad i, j = 1,2,3, \qquad (1.13.7)$$

სადაც წერტილი ზემოდან აღნიშნავს დროით წარმოებულს,

$$\lambda = \lambda' - \frac{2}{3}\mu,$$

λ'-ს ეწოდება სიბლანტის მეორე კოეფიციენტი. (1.13.7) ტოლობებს ეწოდებათ ჰიდროდინამიკის კონსტიტუტივური დამოკიდებულებები. ცხადია, $\dot{e}_{ij}$ წარმოადგენს დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორს და მისი არგუმენტებია დეფორმაციამდე წერტილის კოორდინატები.

სითხეებს, რომელთათვისაც სამართლიანია (1.13.7), ეწოდებათ *ნიუტონისეული ფლუიდები* (*სითხეები*).

კონსტიტუტივურ დამოკიდებულებებს არაკუმშვადი არაწრფივი ბლანტი სითხისთვის აქვს

$$\sigma_{ij}(p, \vec{\mathrm{v}}) := -p\delta_{ij} + 2\varphi\left(I(\vec{\mathrm{v}})\right)\, \dot{e}_{ij}(\vec{\mathrm{v}}), \quad i, j = 1,2,3,$$

სახე, სადაც φ არის *სიბლანტის ფუნქცია*,

$$I(\vec{\mathrm{v}}) := \dot{e}_{ij}(\vec{\mathrm{v}})\, \dot{e}_{ij}(\vec{\mathrm{v}}).$$

ასეთ სითხეებს *არანიუტონისეული ფლუიდები* (*სითხეები*) ეწოდება.

თავი IV. დრეკადობის თეორიის სტატიკისა და დინამიკის ამოცანები

§1.14. betis*) igiveoba

ვთქვათ, რაიმე დრეკადი სხეულის ორ სხვადასხვა დაძაბულ მდგომარეობას ახასიათებენ X'_{ij}, e'_{ij} და X''_{ij}, e''_{ij} სიდიდეები. მაშინ ჰუკის განზოგადებული კანონის თანახმად:

$$X'_{ij} = C^{ij}_{kl} e'_{kl}, \tag{1.14.1}$$

$$X''_{ij} = C^{ij}_{kl} e''_{kl}. \tag{1.14.2}$$

ჩავსვათ $X'_{ij}e''_{ij}$-ში (1.14.1), გავითვალისწინოთ $C^{ij}_{kl} = C^{kl}_{ij}$ და (1.14.2), მაშინ

$$X'_{ij} e''_{ij} = C^{ij}_{kl} e'_{kl} e''_{ij} = C^{kl}_{ij} e''_{ij} e'_{kl} = X''_{kl} e'_{kl}. \tag{1.14.3}$$

ამ უკანასკნელ ტოლობას *ბეტის თვივეობა* ეწოდება. იგი გამოხატავს იმას, რომ *ერთი დაძაბული მდგომარეობის მუშაობა მეორე დაძაბული მდგომარეობის დეფორმაციაზე, მეორე დაძაბული მდგომარეობის პირველი დაძაბული მდგომარეობის დეფორმაციაზე მუშაობის ტოლია.*

§1.15. drekadi sxeulis statikis ZiriTadi sasazRvro amocanebi

ამრიგად, დრეკადი წონასწორობის განსასაზღვრავად ჩვენ მივიღეთ შემდეგი დამოკიდებულებანი:

$$X_{ij,j} + \Phi_i = 0, \qquad i = 1,2,3, \tag{1.15.1}$$

$$X_{ij} = \lambda\, u_{k,k}\delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \quad i, j = 1,2,3. \tag{1.15.2}$$

*) ე. ბეტი (1823–1892).

(1.15.1)-სა და (1.15.2)-ში დამოუკიდებელ განტოლებათა რიცხვი შეადგენს 9-ს. ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობის გამო, ამდენივეა

$$u_i,\ X_{ij} \qquad i,j=1,2,3, \tag{1.15.3}$$

უცნობთა რიცხვიც.

(1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას ეწოდება დრეკადობის თეორიის ძირითადი განტოლებათა სისტემა, რამდენადაც ის იძლევა სხეულის დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრის საშუალებას. დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრა გულისხმობს სხეულის ყოველ წერტილში გადაადგილების ვექტორის, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების მნიშვნელობათა პოვნას.

შევნიშნოთ, რომ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებები წრფივია X_{ij} და u_i უცნობების მიმართ.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ

$$u_i',\ X_{ij}' \quad \text{და} \quad u_i'',\ X_{ij}''$$

ფუნქციები (1.15.1), (1.15.2) სისტემის ამონახსნებია შესაბამისად Φ_i' და Φ_i'' მოცულობითი ძალების შემთხვევაში, მაშინ

$$u_i = u' + u_i'' ,\qquad X_{ij} = X_{ij}' + X_{ij}'' \tag{1.15.4}$$

იქნება აღნიშნული სისტემის ამონახსნი

$$\Phi_i = \Phi_i' + \Phi_i''$$

მოცულობითი ძალის შემთხვევაში.

(1.15.4)-ს ეწოდება ორი ამონახსნის ზედდების შედეგად მიღებული ამონახსნი.

ამ შემთხვევაში, (1.2.1) ფორმულების თანახმად, (1.15.4) ამონახსნის შესაბამისი ზედაპირული ძალები განისაზღვრება მოცემული ამონახსნების შესაბამისი ზედაპირული ძალების ჯამის სახით.

ვიგულისხმოთ, რომ მოცულობითი ძალები ცნობილია და განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანები:

I. ***drekadobis Teoriis pirveli ZiriTadi sasazRvro amocana:*** *განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მო-*

ცემულია სხეულის ზედაპირზე მოქმედი გარე ძაბვები, ე.ი. უნდა ვიპოვოთ ისეთი u_i, X_{ij} ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15.1), (1.15.2) განტოლებათა სისტემას V არეში, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე და

$$X_{ni}|_S = f_i, \quad i = 1,2,3, \qquad S = \partial V^{*)}, \qquad (1.15.5)$$

სასაზღვრო პირობებს, სადაც n გარე ნორმალია, ხოლო f_i ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია.

II. ***drekadobis Teoriis meore ZiriTadi sasazRvro amocana:*** *განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მოცემულია მისი საზღვრის წერტილების გადაადგილებები.* ფიზიკურად ზემოთქმული აღნიშნავს იმას, რომ ზედაპირზე მოდებული გარკვეული ძალების მოქმედების შედეგად მისი წერტილები იღებენ მოცემულ გადაადგილებებს, რის შემდეგაც ხდება საზღვრის ჩამაგრება. ე.ი. უნდა ვიპოვოთ ისეთი u_i, X_{ij} ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.15.1), (1.15.2) განტოლე-ბათა სისტემას V არეში, და

$$u_i|_S = g_i, \quad i = 1,2,3, \qquad (1.15.6)$$

სასაზღვრო პირობებს, სადაც g_i ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია.

III. ***drekadobis Teoriis mesame ZiriTadi sasazRvro amocana:*** *განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მისი საზღვრის წერტილებში მოცემულია ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელი და გადაადგილების ვექტორის მხები მდგენელები.*

IV. ***drekadobis Teoriis meoTxe ZiriTadi sasazRvro amocana:*** *განვსაზღვროთ სხეულის დრეკადი წონასწორობა, თუ მისი საზღვრის წერტილებში მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელი და ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელები.*

---

*) ვგულისხმობთ, რომ S გლუვი ზედაპირია.

ZiriTadi Sereuli sasazRvro amocana მდგომარეობს სხეულის დრეკადი წონასწორობის განვსაზღვრაში, როცა მისი საზღვრის სხვადასხვა ნაწილში სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებია მოცემული.

როგორც ადრე აღვნიშნეთ (იხ. §1.10), თუ საწინაალმდეგო არ იქნა თქმული, ვიგულისხმებთ, რომ u_i *ცალსახა ფუნქციებია, რომლებსაც არის შიგნით აქვთ მესამე რიგამდე უწყვეტი წარმოებულები. ამ პირობებში ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები იქნებიან ცალსახა ფუნქციები, რომელთა წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით არის შიგნით უწყვეტი იქნება.*

$1.16. ZiriTadi gantolebebi gadaadgilebebSi

ჩავსვათ (1.15.2) გამოსახულება (1.15.1)-ში, მივიღებთ:

$$\lambda\theta_{,j}\delta_{ij} + \mu u_{i,jj} + \mu\theta_{,i} + \Phi_i = 0, \qquad i = 1,2,3,$$

აქედან

$$\mu\Delta u_i + (\lambda + \mu)\theta_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1,2,3, \quad (1.16.1)$$

სადაც

$$\Delta(\cdot) \equiv (\cdot)_{,jj}.$$

(1.16.1) სისტემას ეწოდება *ლამეს განტოლებები.* იმ შემთხვევაში, როცა $\lambda = \mu$, ის მიღებული იყო ნავიეს მიერ.

ვთქვათ, სხეულზე მოცულობითი ძალები არ მოქმედებენ. მაშინ (1.16.1)-ის x_i-ის მიმართ გაწარმოების და i-ს მიმართ ჯამვის შემდეგ გვექნება, რომ

$$(\lambda + 2\mu)\Delta\theta = 0, \text{ ე.ი. } \Delta\theta = 0, \quad (1.16.2)$$

რადგან

$$\lambda + 2\mu > 0.$$

თუ ახლა დავუშვებთ, რომ გადაადგილების ვექტორის კომპონენტებს მეოთხე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები

აქვთ და (1.16.1)-ზე ვიმოქმედებთ Δ ოპერატორით, (1.16.2)-ის გათვალისწინების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\mu \Delta \Delta u_i + (\lambda + \mu)(\Delta \theta)_{,i} = \mu \Delta \Delta u_i = 0.$$

ამრიგად, *თუ სხეულზე მხოლოდ ზედაპირული ძალები მოქმედებენ, მაშინ მოცულობითი გაფართოება* θ *ჰარმონიული ფუნქციაა, ხოლო გადაადგილების ვექტორის* u_i *კომპონენტები ბიჰარმონიული ფუნქციებია.*

$1.17. ZiriTadi gantolebebi ZabvebSi

ძაბვებში ძირითადი განტოლებების მისაღებად საჭიროა, წონასწორობის (1.15.1) განტოლებებს დავუმატოთ ძაბვებში ჩაწერილი სენ-ვენანის (1.11.4) პირობები. ამისათვის (1.12.26) უნდა ჩავსვათ (1.11.4)-ში. ვიგულისხმოთ, რომ სხეული იზოტროპული და ერთგვაროვანია. მაშინ $likj = 2233,\ 1123$ შემთხვევებში, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ შესაბამისად მივიღებთ, რომ

$$X_{22,33} + X_{33,22} - \frac{\nu}{1+\nu}(\Theta_{,22} + \Theta_{,33}) = 2X_{23,23} \qquad (1.17.1)$$

$$X_{11,23} - \frac{\nu}{1+\nu}\Theta_{,23} = (-X_{32,1} + X_{13,2} + X_{21,3})_{,1} \qquad (1.17.2)$$

და კიდევ ოთხ მსგავს ტოლობას.

(1.17.1) და (1.17.2) ფორმულები რამდენადმე გამარტივდება, თუ გამოვიყენებთ (1.15.1)-ს. ამ უკანასკნელში მეორე განტოლება გავაწარმოოთ x_2-ით, ხოლო მესამე – x_3-ით და მიღებული შედეგები შევკრიბოთ:

$$2X_{32,23} + X_{22,22} + X_{33,33} + (X_{21,2} + X_{31,3})_{,1} = -(\Phi_{2,2} + \Phi_{3,3}). \qquad (1.17.3)$$

მაგრამ (1.15.1)-ის პირველი განტოლების თანახმად, თუ მას x_1-ით გავაწარმოებთ

$$(X_{21,2}+X_{31,3})_{,1}=-\Phi_{1,1}-X_{11,11}$$

და შევიტანთ (1.17.3)-ში, მივიღებთ:

$$2X_{32,23}=X_{11,11}-X_{22,22}-X_{33,33}-(\Phi_{1,1}+\Phi_{2,2}+\Phi_{3,3})+2\Phi_{1,1}.$$

ამ უკანასკნელის (1.17.1)-ში შეტანა მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მოგვცემს:

$$-\frac{\nu}{1+\nu}(\Theta_{,22}+\Theta_{,33})+(X_{22}+X_{33})_{,33}+(X_{22}+X_{33})_{,22}-X_{11,11}$$
$$=-\Phi_{i,i}+2\Phi_{1,1}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$X_{22}+X_{33}=\Theta-X_{11},$$

მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\frac{1}{1+\nu}\Delta\Theta-\Delta X_{11}-\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,11}=-\Phi_{i,i}+2\Phi_{1,1}. \quad (1.17.4)$$

თუ მას დავუმატებთ ორი მსგავსი

$$\frac{1}{1+\nu}\Delta\Theta-\Delta X_{j\underline{j}}-\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,j\underline{j}}=-\Phi_{i,i}+2\Phi_{j,j}, \qquad j=2,3,$$

ტოლობის ჯამს, მივიღებთ, რომ

$$\Delta\Theta=-\Phi_{i,i}\frac{1+\nu}{1-\nu}. \quad (1.17.5)$$

(1.17.5)-ის (1.17.4)-ში შეტანის შემდეგ კი გვექნება:

$$\Delta X_{11}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,11}=-\frac{\nu}{1-\nu}\Phi_{i,i}-2\Phi_{1,1}. \quad (1.17.6)$$

ანალოგიურად მივიღებთ კიდევ ორ განტოლებას:

$$\Delta X_{22}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,22}=-\frac{\nu}{1-\nu}\Phi_{i,i}-2\Phi_{2,2}, \quad (1.17.7)$$

$$\Delta X_{33}+\frac{1}{1+\nu}\Theta_{,33}=-\frac{\nu}{1-\nu}\Phi_{i,i}-2\Phi_{3,3}. \quad (1.17.8)$$

თუ (1.15.1)-ში მეორე განტოლებას გავაწარმოებთ x_3-ით, მესამეს – x_2-ით და შედეგებს შევკრებთ, მივიღებთ, რომ

$$X_{12},_{13}+X_{22},_{23}+X_{32},_{33}+X_{13},_{12}+X_{23},_{22}+X_{33},_{23}$$
$$=-\left(\Phi_{3},_{2}+\Phi_{2},_{3}\right).$$

ეს უკანასკნელი წევრ-წევრად დავუმატოთ (1.17.2)-ს, მაშინ

$$\Delta X_{32}+\frac{1}{1+\nu}\Theta,_{23}=-\left(\Phi_{3},_{2}+\Phi_{2},_{3}\right). \qquad (1.17.9)$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\Delta X_{13}+\frac{1}{1+\nu}\Theta,_{31}=-\left(\Phi_{1},_{3}+\Phi_{3},_{1}\right),$$
$$\Delta X_{21}+\frac{1}{1+\nu}\Theta,_{12}=-\left(\Phi_{2},_{1}+\Phi_{1},_{2}\right). \qquad (1.17.10)$$

(1.17.6)–(1.17.10) განტოლებებს ეწოდებათ *ბელტრამი-მიჩელის*[*)] *თავსებადობის პირობები.* მოკლედ ისინი შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$\Delta X_{ij}+\frac{1}{1+\nu}\Theta,_{ij}$$
$$=-\frac{\nu}{1+\nu}\Phi_{k,k}\delta_{ij}-\left(\Phi_{i,j}+\Phi_{j,i}\right),\ i,j=1,2,3.$$

$1.18. dinamikis amocanebi. dinamikisa da statikis ZiriTadi amocanebis amonaxsnis erTaderToba

დალამბერის პრინციპის თანახმად, დინამიკის ძირითადი განტოლებების მისაღებად საჭიროა, სტატიკის ძირითად განტოლებებში მოცულობით ძალებს დავამატოთ ინერციის ძალები. ამასთან გადაადგილების ვექტორის, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენ-

[*)] ე. ბელტრამი (1835–1900), ჯ.ჰ. მიჩელი (1863–1940).

ზორების კომპონენტები უკვე, გარდა სივრცითი წერტილის კოორდინატებისა, დამოკიდებული იქნებიან აგრეთვე დროზე.

დეფორმაციამდე (x_1, x_2, x_3) სივრცით წერტილში მყოფი მატერიალური წერტილის აჩქარების ვექტორის კომპონენტებია

$$a_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial^2 u_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial t^2}, \quad i = 1,2,3.$$

dV მოცულობაში მოთავსებულ dm მასაზე მოქმედი ინერციის ძალის კომპონენტებია

$$-a_i\, dm = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\, dm.$$

მაგრამ, რადგანაც $dm = \rho(x_1, x_2, x_3)dV$, მოცულობის ერთეულზე მოქმედი ინერციის ძალის კომპონენტებია

$$-\rho a_i = -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

თუ მას დავამატებთ მოცულობით ძალას (1.15.1)-ში, მივიღებთ, რომ

$$X_{ij,j} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1,2,3. \qquad (1.18.1)$$

ცხადია, (1.18.1) სამართლიანია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის.

ამ განტოლებებს უნდა დაემატოს ჰუკის განზოგადოებული კანონი, რომელიც უცვლელი რჩება, რადგან იგი არ შეიცავს მოცულობით ძალებს.

ლამეს (1.16.1) განტოლებები შემდეგ სახეს მიიღებენ:

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\theta_{,i} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \qquad (1.18.2)$$

მყარი დეფორმადი გარემოსათვის, ისევე როგორც ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის, მასის შენახვის კანონიდან გამომდინარე,

ადგილი აქვს უწყვეტობის შემდეგ განტოლებას (იხ. ქვემოთ §1.23, ფორმულა (1.23.10)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 .$$

მისი გაწრფივებისა ($\rho\vec{v} = (\rho_0 + \tilde{\rho})\vec{v} = \rho_0\vec{v}$, $\tilde{\rho} := \rho - \rho_0$, $\tilde{\rho} << \rho_0$) და t_0 -დან t-მდე ინტეგრების შემდეგ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -div\vec{u} \quad \forall x \in \Omega, \quad t \geq t_0 , \qquad (1.18.3)$$

სადაც ρ და ρ_0 შესაბამისად აღნიშნავენ სიმკვრივეს დეფორმირებულ და არადეფორმირებულ ($t = t_0$) მდგომარეობაში; ამასთან ვგულისხმობთ, რომ არადეფორმირებულ მდგომარეობაში გადაადგილები ნულის ტოლია. ρ_0 პრინციპში ცნობილია და უკანასკნელი ტოლობა გამოიყენება მხოლოდ დროის ნებისმიერ t მომენტში სიმკვრივის გამოსათვლელად, როცა გადაადგილების $\vec{u}$ ვექტორი განსაზღვრულია სხვა დამოკიდებულებებიდან. ფაქტობრივად, მცირე შეშფოთებათა ჰიპოთეზიდან გამომდინარე, $div\vec{u}$ მცირეა ერთეულთან შედარებით, აქედან გამომდინარე შედეგით $\rho \cong \rho_0$. ამ მიზეზით მცირე შეშფოთებათა ჰიპოთეზის პირობებში (1.18.3) დამოკიდებულება არ არის ჩართული დრეკადობის თეორიის განტოლებათა სრულ სისტემაში.

დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა. ვიპოვოთ $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.18.2) განტოლებებს (ან u_i და X_{ij} ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.18.1) განტოლებებს და ჰუკის კანონს) V არეში, რომელიც სხეულს უკავია დეფორმაციამდე,

$$X_{ni}|_S = f_i , \quad i = 1,2,3, \qquad S = \partial V ,^{*)} \qquad (1.18.4)$$

*) ვგულისხმობთ, რომ S გლუვი ზედაპირია.

სასაზღვრო პირობებს დროის ყოველ $t \geq t_0$ მომენტში და

$$u_i = \overset{0}{u}_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \overset{0}{u}_i', \quad i = 1,2,3,$$

საწყის პირობებს V არეში, დროის $t = t_0$ მომენტში. აქ f_i ფუნქციები S ზედაპირზე მოცემული ფუნქციებია, რომლებიც საზოგადოდ t-ზე არიან დამოკიდებულნი, ხოლო $\overset{0}{u}_i$, $\overset{0}{u}_i'$ ფუნქციები (x_1, x_2, x_3) სივრცითი წერტილის ფუნქციებია.

დინამიკის სხვა ამოცანები პირველი ამოცანებისაგან იმით განსხვავდებიან, რომ (1.18.4) სასაზღვრო პირობები შეცვლილია სტატიკის შესაბამისი სასაზღვრო პირობებით, სადაც მოცემული ფუნქციები საზოგადოდ დროზეა დამოკიდებული.

განვიხილოთ დრეკადი სხეულის რაიმე კონკრეტული მოძრაობა და საწყის t_0 მომენტად მივიღოთ ის მომენტი, როცა სხეული „ბუნებრივ“ წონასწორობის მდგომარეობაშია, ე.ი. მასზე არ მოქმედებენ არც მოცულობითი და არც ზედაპირული ძალები და დეფორმაციასაც არ განიცდის. $R(t)$-თი აღვნიშნოთ მუშაობა, რომელსაც ასრულებენ გარე ძალები დროის (t_0, t) შუალედში. გამოვთვალოთ აღნიშნული ძალების dR მუშაობა დროის $(t, t + dt)$ შუალედში, როცა dt უსასრულოდ მცირეა.

დეფორმაციამდე სივრცით (x_1, x_2, x_3) წერტილში მდებარე მატერიალური წერტილი t მომენტში იმყოფება სივრცის წერტილში $x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ კოორდინატებით. $(t, t + dt)$ შუალედში ამ წერტილის გადაადგილების კომპონენტებია

$$x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t + dt) - [x_i + u_i(x_1, x_2, x_3, t)]$$

$$\cong \frac{\partial u_i}{\partial t} dt =: \dot{u}_i \, dt.$$

dS ელემენტზე მოდებული გარე $X_{ni}\,dS$ ზედაპირული ძალების *მუშაობა* $(t, t+dt)$ შუალედში

$$X_{ni}\,\dot{u}_i\,dt\cdot dS\text{–ის}$$

ტოლია, ხოლო dV მოცულობაზე მოდებული $\Phi_i\,dV$ მოცულობითი ძალების *მუშაობა* კი

$$\Phi_i\;\dot{u}_i\,dt\,dV\text{-ს}$$

ტოლია.

ამრიგად,

$$dR=\left(\iint\limits_S X_{ni}\,\dot{u}_i\,dS+\iiint\limits_V \Phi_i\,\dot{u}_i\,dV\right)dt\,. \qquad (1.18.5)$$

აქედან, (1.2.1)-ის და (1.18.1)–ის თანახმად,

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt}&=\iint\limits_S X_{ij}n_j\dot{u}_i\,dS+\iiint\limits_V \Phi_i\dot{u}_i\,dV\\&=\iiint\limits_V\left(X_{ij}\dot{u}_i\right)_{,j}dV+\iiint\limits_V\Phi_i\dot{u}_i\,dV\\&=\iiint\limits_V\left(X_{ij,j}+\Phi_i\right)\dot{u}_i\,dV+\iiint\limits_V X_{ij}\dot{u}_{i,j}\,dV\\&=\iiint\limits_V\rho\ddot{u}_i\dot{u}_i\,dV+\iiint\limits_V X_{ij}\dot{e}_{ij}\,dV,\end{aligned} \qquad (1.18.6)$$

რადგანაც

$$\begin{aligned}X_{ij}\;u_{i,j}&=\frac{1}{2}X_{ij}\;u_{i,j}+\frac{1}{2}X_{ij}\;u_{i,j}=\frac{1}{2}X_{ij}\;u_{i,j}+\frac{1}{2}X_{ji}u_{j,i}\\&=X_{ij}\,\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=X_{ij}\;\;e_{ij}=:2W\,.\end{aligned} \qquad (1.18.7)$$

მაგრამ

$$\iiint\limits_V \rho\;\ddot{u}_i\,\dot{u}_i\;dV=\iiint\limits_V\frac{1}{2}\rho\,\frac{\partial\;\dot{u}_i\cdot\dot{u}_i}{\partial\;t}\,dV=\frac{dT}{dt}\,,$$

სადაც

$$T = \frac{1}{2}\iiint_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \geq 0, \qquad (1.18.8)$$

განსახილველი სხეულის კინეტიკური ენერგიაა, ე.ი. მისი ცალკეული ელემენტების ცოცხალი ძალების ჯამია. მართლაც, dm მასის ცოცხალი ძალა განმარტების თანახმად

$$\frac{1}{2} dm\, \dot{u}_i\, \dot{u}_i = \frac{1}{2} \rho\ \dot{u}_i\, \dot{u}_i\, dV \text{ -ს}$$

ტოლია.

თუ სხეული იზოტროპულია ((1.18.6) ფორმულის მისაღებად იზოტროპულობის მოთხოვნა არ იყო საჭირო), მაშინ (1.18.7) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$2W = X_{ij} e_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} e_{ij} + 2\mu e_{ij} e_{ij} = \lambda \theta^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} \geq 0. \qquad (1.18.9)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\overset{*}{e}_{ii} = e_{ii}; \quad \overset{*}{e}_{ij} = 2e_{ij}, \quad i \neq j. \qquad (1.18.10)$$

მაშინ, (1.18.9)-ის თანახმად, ცხადია,

$$X_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{ij}}$$

და

$$\iiint_V X_{ij} \dot{e}_{ij} dV = \iiint_V \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{ij}} \dot{e}_{ij} dV = \iiint_V \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{ii}} \frac{\partial \overset{*}{e}_{ii}}{\partial t} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{3} \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{ij}} \frac{\partial \overset{*}{e}_{ij}}{\partial t} dV \right] = \iiint_V \frac{\partial W}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \iiint_V W dV, \qquad (1.18.11)$$

რადგანაც, (1.18.10)-ის გამო,

$$\frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{\underline{ii}}}\dot{e}_{\underline{ii}} = \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{\underline{ii}}}\frac{\partial \overset{*}{e}_{\underline{ii}}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{\underline{i}\underline{j}}}\dot{e}_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{\underline{j}\underline{i}}}\dot{e}_{ji} = 2\frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{\underline{i}\underline{j}}}\dot{e}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \overset{*}{e}_{\underline{i}\underline{j}}}\frac{\partial \overset{*}{e}_{ij}}{\partial t}, \quad i \neq j.$$

მაშასადამე, (1.18.8)-ისა და (1.18.11)-ის თანახმად, (1.18.6) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{d}{dt}\iiint_V W\,dV. \qquad (1.18.12)$$

ვაინტეგროთ (1.18.12)-ის ორივე მხარე t_0-დან t-მდე და გავითვალისწინოთ, რომ საწყის მომენტში $T = W = 0$; მაშინ მივიღებთ გარე ზედაპირული ძალებისა და მოცულობითი ძალების მუშაობას დროის (t_0, t), შუალედში:

$$R = T + U, \qquad (1.18.13)$$

სადაც

$$U = \iiint_V W\,dV \geq 0. \qquad (1.18.14)$$

(1.18.9) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ W დამოკიდებულია მხოლოდ მოცემულ მომენტში, მოცემულ წერტილში დეფორმირებულ მდგომარეობაზე. ამდენად, U დამოკიდებულია სხეულის დეფორმირებულ მდგომარეობაზე დროის მოცემულ t მომენტში. *U-ს ეწოდება სხეულის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, იგი იმ მუშაობის ტოლია, რომელიც უნდა შეასრულონ მოცულობითმა ძალებმა და გარე ზედაპირულმა ძალებმა, რომ გამოიწვიონ დეფორმირებული (მოცემული) მდგომარეობა.* მართლაც, თუ სხეული ამ ძალებით ზემოქმედების შედეგად „ბუნებრივი“ უძრავი (მოსვენებული) მდგომარეობიდან გადავა ახალ დეფორმირებულ უძრავ (მოსვენებულ) მდგომარეობაში, მაშინ, (1.18.13) ფორმულის თანახმად,

$$R = U, \qquad (1.18.15)$$

რადგანაც უძრავ (მოსვენებულ) მდგომარეობაში $T = 0$.

(1.18.13) ფორმულა გამოხატავს *ენერგიის შენახვის კანონს: მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მუშაობა იხარჯება T კინეტიკური ენერგიისა და U დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიის შექმნაზე.*

(1.18.9) ფორმულით განსაზღვრული სიდიდე მოცულობის ერთეულზე გათვლილი დეფორმაციის პოტენციალური ენერგიაა. მართლაც, (1.18.14) ფორმულიდან ცხადია, რომ dV მოცულობაზე გაანგარიშებული პოტენციალური ენერგია WdV-ს ტოლია და აქედან ზემოთქმული ცხადია. (1.18.9)-დან ნათელია, რომ ის არაგადაგვარებული კვადრატული ფორმაა, რადგან $\lambda > 0$ და $\mu > 0$ (იხ. §1.12).

ახლა განვიხილოთ დინამიკის ძირითადი ამოცანების ამოხსნისა და ერთადერთობის საკითხი. ვთქვათ, რომელიმე მათგანი უშვებს ორ ამონახსნს ერთი და იმავე მოცულობითი ძალების, საწყის და სასაზღვრო პირობებში. მაშინ, თუ განვიხილავთ მათ სხვაობას ძირითად განტოლებათა სიწრფივისა და ერთგვაროვნების გამო u_i, X_{ij} ფუნქციების მიმართ, იგი დააკმაყოფილებს იმავე განტოლებებს მოცულობითი ძალების გარე და ერთგვაროვან საწყის და სასაზღვრო პირობებს, ე.ი.

$$u_i\,|_{t=t_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=t_o} = 0 \qquad (1.18.16)$$

და

$$X_{ni}\dot{u}_i|_S = 0, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0, \qquad (1.18.17)$$

რამდენადაც საზღვრის წერტილებში ან

$$u_i = 0, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0$$

ან

$$X_{ni} = 0, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0.$$

აქედან გამომდინარე პირველ შემთხვევაში

$$\dot{u}_i|_S = 0,$$

და ორივე შემთხვევაში

$$X_{n\,i}\ \dot{u}_i\ |_S = 0, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0. \tag{1.18.18}$$

რადგანაც ამონახსნთა სხვაობისათვის მოცულობითი ძალები და (1.18.18) ნამრავლები ნულის ტოლია, ამიტომ მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა

$$R = 0,$$

რადგან (1.18.5)-ის თანახმად, $\frac{dR}{dt} = 0$ და აქედან $R = const = 0$, ვინაიდან $R\,|_{t=t_0} = 0$, რამდენადაც „ბუნებრივი“ წონასწორობის მდგომარეობაში სხეულზე არც მოცულობითი და არც ზედაპირული ძალები არ მოქმედებენ. ამიტომ, (1.18.13) ტოლობის თანახმად,

$$T + U = 0.$$

ეს უკანასკნელი კი, (1.18.8)-ისა და (1.18.14)-ის გამო, სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$T = 0, \qquad U = 0.$$

ე.ი. (1.18.8)-ის, (1.18.14)-ისა და (1.18.9)-ის ძალით დროის ყოველ $t \geq t_0$ მომენტში

$$\dot{u}_i = 0, \qquad e_{i\,j} = 0.$$

ტოლობათა პირველი ჯგუფი გვიჩვენებს, რომ გადაადგილების ვექტორი დროზე არ არის დამოკიდებული, ე.ი. უნდა გვქონდეს სტატიკური შემთხვევა. ტოლობათა მეორე ჯგუფი კი გვიჩვენებს, რომ სხეული შეიძლება მხოლოდ ხისტად გადაადგილდეს. რადგან მისი ზოგადი ამონახსნია (იხ. §1.6)

$$u_1 = a_1 + b_2 x_3 - b_3 x_2, \quad u_2 = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3,$$

$$u_3 = a_3 + b_1 x_2 - b_2 x_1$$

ან მოკლედ, ვექტორულად –

$$\vec{u} = \vec{a} + [\vec{b}, \vec{x}], \quad \vec{x} := (x_1, x_2, x_3),$$

სადაც $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ხისტი გადატანის ვექტორია, ხოლო $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ კი უსასრულოდ მცირე ბრუნვის ვექტორია (b_i არის x_i ღერძის გარშემო შემობრუნების უსასრულოდ მცირე კუთხე). მაგრამ რადგანაც საწყის მომენტში გადაადგილება არ გვაქვს, ამიტომ არც ხისტ გადაადგილებას ექნება ადგილი.

ამრიგად, *დინამიკის ძირითად ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსნი.*

რადგანაც სტატიკის ამოცანების შემთხვევაში ადგილი აქვს (1.18.15) ტოლობას, გვექნება, რომ მხოლოდ $e_{ij} = 0$. ცხადია, თუ სასაზღვრო პირობებში მონაწილეობენ გადაადგილებები, ე.ი. მეორე, მესამე*), მეოთხე და შერეულ ამოცანებს ექნება ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო პირველი ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება ხისტი გადაადგილების სიზუსტით.

SeniSvna 1.18.1. ადვილი სანახავია, რომ ტემპერატურული ძაბვების გათვალისწინებით, შენიშვნა 1.12.1-ის თანახმად, ლამეს (1.18.2) განტოლებები შეიცვლებიან

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\theta_{,i} - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T_{,i} + \Phi_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (1.18.19)$$

$$i = 1,2,3,$$

განტოლებებით, რომელთაც *დიუჰამელ-ნეიმანის თერმოგანტოლებები* ეწოდებათ.

(1.18.19) განტოლებებს უნდა დაემატოს *სითბოგამტარობის* (რომელიც მიიღება სითბოს ნაკადის განტოლებებიდან დეფორმაციის ტენზორის დროით წარმოებულის შემთხვევაში წევრის უკუგდებით, რაც ხშირ შემთხვევაში დასაშვებია, როგორც ამას ექსპერიმენტი გვიჩვენებს (იხ. [53], გვ. 92; [35], გვ. 79))

*) თუ S ბრუნვითი ზედაპირი არაა. თუ S ბრუნვითი ზედაპირია, მესამე ამოცანას გააჩნია არატრივიალური ამონახსნები (იხ. [48], გვ. 88).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = æ\,\Delta T + \frac{\tilde{W}}{c\rho} \qquad (1.18.20)$$

განტოლება, სადაც $æ = \frac{k}{c\rho}$ *ტემპერატურული გამტარობის კოეფიციენტია*, k – *მაქსველის სითბოგამტარობის კოეფიციენტი* (ე.ი. სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც დროის ერთეულში გატარდება ერთეულის ტოლ სისქის ფენაში, როცა ზედაპირებზე ტემპერატურებს შორის სხვაობა 1°-ის, ხოლო ზედაპირის ფართობი ერთეულის ტოლია), c – *ხვედრითი სითბოტევადობა* (ე.ი. სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა მასის ერთეულის ტემპერატურის 1°-ით გაზრდისათვის), ρ – სიმკვრივე, $\tilde{W}$ – dV ელემენტარულ მოცულობაში მოთავსებული სითბური წყაროს მიერ დროის ერთეულში მოცულობის ერთეულში გამოყოფილი სითბოს რაოდენობა.

(1.18.20) განტოლება განიხილება სხეულის საზღვარზე სხვადასხვა დამატებით პირობებში. კერძოდ, სამეცნიერო ლიტერატურაში ძირითადად შემდეგი სახის სასაზღვრო პირობები გვხვდება:

– დროის ყოველ მომენტში მოცემულია ტემპერატურა,

– დროის ყოველ მომენტში მოცემულია სითბური ნაკადი, კერძოდ, სითბური ნაკადი ნულის ტოლია:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0;$$

– ზედაპირზე გამავალი სითბური ნაკადი სხეულის T ტემპერატურისა და (გარე) გარემოს T_0 ტემპერატურის სხვაობის პროპორციულია, ე.ი.

$$k\frac{\partial T}{\partial n} + H\left(T - T_0\right) = 0,$$

სადაც H სითბოს გაცემის კოეფიციენტია (ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ხდება ზედაპირიდან გამოსხივება);

– თუ სხეულის ზედაპირი ორი სხვადასხვა სითბოგამტარობის (k_1 და k_2) და ტემპერატურის (T_1 და T_2) ფენის საერთო ზედაპირია, მაშინ

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}.$$

გარდა ამისა, თუ სხეულის საზღვარზე მოცემულია ძაბვები, მაშინ (1.18.19) სისტემისათვის, (1.12.28)-ის თანახმად, გვექნება შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$X_{ni}(u) := \left[\lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \frac{\alpha E}{1-2\nu} T \delta_{ij} \right] n_j = f_i,$$

$$i = 1,2,3,$$

სადაც f_i სხეულის ზედაპირზე დროის ნებისმიერ მომენტში მოცემული ფუნქციებია.

სასაზღვრო პირობებს უნდა დაემატოს აგრეთვე

$$T\left(x_1, x_2, x_3, t_0\right) = \chi\left(x_1, x_2, x_3\right), \quad x \in \Omega,$$

და

$$u_i\left(x_1, x_2, x_3, t_0\right) = \varphi_i\left(x_1, x_2, x_3\right),$$

$$\frac{\partial u_i\left(x_1, x_2, x_3, t_0\right)}{\partial t} = \psi_i\left(x_1, x_2, x_3\right), \quad i = 1,2,3, \quad x \in \Omega,$$

საწყისი პირობები, სადაც χ, φ_i და ψ_i მოცემული ფუნქციებია.

როგორც ვხედავთ, იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში საწყის-სასაზღვრო ამოცანები T ტემპერატურისა და u_i გადაადგილებისათვის იხლიჩება ორ დამოუკიდებელ ამოცანად იმ თვალსაზრისით, რომ ჯერ დამოუკიდებლად ვპოულობთ T-ს შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნით, ხოლო შემდეგ ცნობილი T-ს საშუალებით ვპოულობთ u_i-ს იმ ტიპის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნით, რომელსაც იმ შემთხვევაში

ვიკვლევთ, როცა ტემპერატურულ ძაბვებს (ან რაც იგივეა, ტემპერატურას) არ ვითვალისწინებთ.

დრეკადობის თეორიის ძირითადი ამოცანების ამონახსნის არსებობის თეორემები დამტკიცებულია, მაგალითად, [12], [48], [59]-ში (იხ. აგრეთვე § 1.21).

$1.19. klapeironis Teorema

ვთქვათ, დრეკადი სხეული მოცულობითი ძალებისა და გარე ზედაპირული ძალების მოქმედების შედეგად იმყოფება წონასწორობის მდგომარეობაში. მაშინ აღნიშნული ძალების A მუშაობა u_i გადაადგილებაზე

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_S X_{ni}\, u_i\, dS + \iiint_V X_i\, u_i\, dV \\
&= \iint_S X_{ij}\, u_i\, n_j\, dS + \iiint_V X_i\, u_i\, dV \\
&= \iiint_V (X_{ij,j} + X_i) u_i\, dV + \iiint_V X_{ij}\, u_{i,j}\, dV \\
&= \iiint_V X_{ij}\, e_{ij}\, dV = 2\iiint_V W dV = 2U. \qquad (1.19.1)
\end{aligned}
$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა გამოხატავს *კლაპეირონის თეორემას: დეფორმირებული სხეულის პოტენციალური ენერგია სხეულზე სტატიკურად მოდებული მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალების გადაადგილებებზე მუშაობის ნახევრის ტოლია,* იმ პირობით, რომ მათ თავიდანვე ჰქონოდათ ის მნიშვნელობები, რასაც ისინი ფაქტობრივად იღებენ დრეკადი წონასწორობის დამყარების მომენტისათვის (სინამდვილეში მათი საწყისი მნიშვნელობები ნულის ტოლია).

$1.20. sen-venanis principi

დრეკადობის თეორიის ამოცანების პრაქტიკულად ამოხსნას ამარტივებს სენ-ვენანის პრინციპი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: *თუ ზედაპირის მცირე უბანზე მოქმედი ძალები სტატიკურად ნულის ექვივალენტურია* (სტატიკურად ნულის ექვივალენტურ სისტემის ქვეშ გვესმის აბსოლუტურად მყარი სხეულის სტატიკის თვალსაზრისით ნულის ეკვივალენტური სისტემა), *მაშინ ეს სისტემა მნიშვნელოვან გავლენას არ ახდენს სხეულის იმ ნაწილის დეფორმირებულ (დაძაბულ) მდგომარეობაზე, რომელიც აღნიშნულ უბანთან ახლოს არ მდებარეობს.*

სენ-ვენანის პრინციპი შეიძლება სხვაგვარადაც ჩამოვაყალიბოთ: *თუ სხეულის ზედაპირის მცირე უბანზე მოქმედი ზედაპირული ძალების სისტემას შევცვლით მისი ეკვივალენტური სხვა სისტემით, ეს გარემოება გავლენას არ მოახდენს სხეულის იმ ნაწილის დეფორმირებულ (დაძაბულ) მდგომარეობაზე, რომელიც აღნიშნულ უბანთან ახლოს არ მდებარეობს.*

ცხადია, ორივე ფორმულირება ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

$1.21. drekadobis Teoriis amocanebis amoxsnis meTodebi. amonaxsnis arsebobis Teoremebi

დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის სამ ძირითად მეთოდს განასხვავებენ:

1. *პირდაპირი მეთოდი* გულისხმობს სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას უშუალო ინტეგრებით;

2. *შებრუნებული მეთოდის* შემთხვევაში წინასწარ მოცემულია გადაადგილებები და ძაბვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ძირითად განტოლებებს და მათი საშუალებით ხდება შესაბამისი გარე ძალების განსაზღვრა;

3. *სენ-ვენანის ნახევრადშებრუნებული მეთოდით* ამოცანების ამოხსნისას წინასწარ უშვებენ, რომ გადაადგილების ვექტორისა და ძაბვის ტენზორის ზოგიერთი კომპონენტის სახე ცნობილია, რაც დანარჩენი კომპონენტების განსაზღვრისას ამარტივებს ძირითად განტოლებათა სისტემას.

სამგანზომილებიანი დრეკადობის თეორიის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნები მოცემულია, მაგალითად, [50], [48]-ში.

ვთქვათ, დრეკად სხეულს უკავია R^3-ის რაიმე Ω არე, რომლის $\partial\Omega$ საზღვარი ლიპშიცურია [54] (იხ. აგრეთვე დამატება 1, განსაზღვრა 40). ამასთან დავუშვათ, რომ $\Gamma \subset \partial\Omega$ არის დადებითი ზომის და $S := \partial\Omega \setminus \Gamma$.

განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო ამოცანა (იხ. § 1.16):

$$A\vec{u} := \mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\,grad\,div\,\vec{u} = \vec{\Phi} \quad \Omega\text{-ში}, \tag{1.21.1}$$

$$T\vec{u} = \vec{g} \quad S\text{-ზე}, \tag{1.21.2}$$

$$\vec{u} = 0 \quad \Gamma\text{-ზე}, \tag{1.21.3}$$

სადაც $\vec{\Phi} := (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$; $T\vec{u} := \big((T\vec{u})_1, (T\vec{u})_2, (T\vec{u})_3\big)$, $(T\vec{u})_k := X_{kj}(\vec{u})n_j$, $k = 1,2,3$.

ჩვენ ვეძებთ (1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს *სობოლევის* $\left[H^1(\Omega)\right]^3$ სივრცეში (იხ. დამატება 1, განსაზღვრებები 53-55 და შენიშვნა 13). დავუშვათ, რომ

$$\Phi_k \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega) \text{ და } g_k \in H^{-\frac{1}{2}}(S), \quad k = 1,2,3. \tag{1.21.4}$$

(1.21.1) განტოლება გვესმის *განაწილების* აზრით. (1.21.3) პირობა გვესმის *კვალის* აზრით. (1.21.2) პირობა გვესმის $H^{-\frac{1}{2}}(S)$ აზრით, რადგან თუ $\vec{u} \in \left[H^1(\Omega)\right]^3$ და $A\vec{u} \in \left[\widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right]^3$, მაშინ $T\vec{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(S)$ ფუნქციონალი განიმარტება

$$\left\langle T\vec{u},\vec{u}^{\,*}\right\rangle_{\partial\Omega} := \int_{\Omega} X_{ij}(\vec{u})e_{ij}(\vec{u}^{\,*})dx + \left\langle \Phi,\vec{u}^{\,*}\right\rangle_{\Omega} \quad \forall \vec{u}^{\,*} \in H^1(\Omega)$$

გრინის იგივეობით, სადაც $\langle .,. \rangle_{\partial\Omega}$ აღნიშნავს L_2 -დუალობას $\left[H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right]^3$ -სა და $\left[H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right]^3$ -ს შორის, ხოლო $\langle .,. \rangle_{\Omega}$ კი – L_2 -დუალობას $\left[\widetilde{H}^{-1}(\Omega)\right]^3$ -სა $\left[H^1(\Omega)\right]^3$ -ს შორის (იხ. დამატება 1, თეორემა 23).

შემოვიღოთ

$$H^1(\Omega,\Gamma) := \left\{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \quad \Gamma\text{-ზე}\right\}$$

აღნიშვნა.

(1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანა ეკვივალენტურია შემდეგი ვარიაციული ამოცანის:

ვიპოვოთ $\vec{u} \in \left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3$ ისეთი, რომ

$$B(\vec{u},\vec{u}^{\,*}) = F(\vec{u}^{\,*}) \qquad \forall \vec{u}^{\,*} \in \left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3, \qquad (1.21.5)$$

სადაც

$$B(\vec{u},\vec{u}^{\,*}) := \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\vec{u})e_{ij}(\vec{u}^{\,*})dx,$$

$$F(\vec{u}^{\,*}) := -\left\langle \vec{\Phi},\vec{u}^{\,*}\right\rangle_{\Omega} + \left\langle \vec{g},\vec{u}^{\,*}\right\rangle_{S},$$

აქ $\langle .,. \rangle_M$ არის დუალობა $\left[H^r(M)\right]^3$ და $\left[\widetilde{H}^{-r}(M)\right]^3$ სივრცეებს შორის, სადაც $r = 1$, თუ $M \equiv \Omega$ და $r = \frac{1}{2}$, თუ $M \equiv S$.

ორივე ზემოხსენებული ამოცანა ეკვივალენტურია მინიმიზაციის შემდეგი ამოცანის:

ვიპოვოთ $\vec{u} \in \left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3$ ისეთი, რომ

$$E(\vec{u}^*) \geq E(\vec{u}) \qquad \forall \vec{u}^* \in \left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3, \tag{1.21.6}$$

სადაც

$$E(\vec{u}^*) := \frac{1}{2} B(\vec{u},\vec{u}^*) - F(\vec{u}^*). \tag{1.21.7}$$

სამართლიანია არსებობისა და ერთადერთობის შემდეგი (იხ., მაგალითად, [59], [27])

Teorema 1.21.1. თუ Ω არის არე ლიპშიცის საზღვრით, $\Gamma \neq \varnothing$ და სრულდება (1.21.4) პირობები, მაშინ (1.21.1)-(1.21.3) სასაზღვრო ამოცანას და ამდენად (1.21.5) ამოცანასა და (1.21.6), (1.21.7) მინიმიზაციის ამოცანას აქვს ერთადერთი $\vec{u} \in \left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3$ ამონახსნი და

$$\|\vec{u}\|_{\left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3} \leq C \left(\|\vec{\Phi}\|_{\left[\tilde{H}^{-1}(\Omega,\Gamma)\right]^3} + \|\vec{g}\|_{\left[H^{-1/2}(S)\right]^3} \right),$$

სადაც C არის დადებითი მუდმივი, რომელიც არ არის დამოკიდებული $\vec{u}$, $\vec{\Phi}$ და $\vec{g}$-ზე.

თეორემის დამტკიცება ემყარება *ლაქს*[*)] *– მილგრამის*[**)] *თეორემას* (იხ. დამატება 1 თეორემა 25), რამდენადაც

– F წრფივი შემოსაზღვრული ფუნქციონალია;

– $B(.,.)$ ორადწრფივი ფორმა, კორნის[***)] უტოლობის თანახმად, კოერციტიულია

$$B(\vec{u},\vec{u}) \geq \delta_2 \|\vec{u}\|^2_{\left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3} \qquad \forall \vec{u} \in H^1(\Omega,\Gamma)$$

და შემოსაზღვრული

$$B(\vec{u},\vec{u}) \leq \delta_1 \|\vec{u}\|^2_{\left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3} \|\vec{u}^*\|_{\left[H^1(\Omega,\Gamma)\right]^3},$$

სადაც δ_1 და δ_2 დადებითი მუდმივებია.

---

*) პ. ლაქსი (1926).

**) ა.ნ. მილგრამი (1911-1961).

***) ა. კორნი (1870-1945).

SeniSvna 1.21.1. თუ $\vec{g} \in \left[H^{r+\frac{1}{2}}(S) \right]^3$, $\vec{\Phi} \in \left[H^r(\Omega) \right]^3$,

Γ, $S \in C^{r+1,1}$, სადაც $r \geq 0$ მთელი რიცხვია, მაშინ

$$\vec{u} \in \left[H^{r+2}(\Omega^*) \right]^3,$$

სადაც Ω^* არის $\overline{\Omega}$-ს ისეთი ნებისმიერი ქვესიმრავლე, რომ $\overline{\Omega^*} \cap (S \cup \overline{\Gamma}) = \varnothing$. უფრო მეტიც, არსებობს ისეთი $C = C(\Omega^*) > 0$ მუდმივი, რომ

$$\left\| \vec{u} \right\|_{\left[H^{r+2}(\Omega^*) \right]^3} \leq C \left(\left\| \vec{\Phi} \right\|_{\left[H^r(\Omega^*) \right]^3} + \left\| \vec{g} \right\|_{\left[H^{r+1/2}(\Omega^*) \right]^3} \right).$$

თუ დამატებით, $\vec{g} \in [C^{1,æ}(S)]^3$, $\vec{\Phi} \in [C^{0,æ}(S)]^3$, $S \in C^{2,æ}$ მაშინ $\vec{u} \in [C^{2,æ}(\overline{\Omega}^*)]^3$, სადაც $0<æ<1$ არის *ჰიოლდერის*) მაჩვენებელი.*

თავი V. ჰიდროდინამიკის სტაციონარული და არასტაციონარული ამოცანები

§1.22. lagranJis da eileris cvladebi

უწყვეტი გარემოს მოძრაობის შესწავლის დროს არსებობს ორი მიდგომა. თუ უწყვეტი გარემოს ნაწილაკს განვიხილავთ, როგორც მოძრავ მატერიალურ წერტილს, მაშინ მთელი სხეულის მოძრაობის დასახასიათებლად აუცილებელია შემოვიღოთ გარკვეული პარამეტრები, რომლებიც სხეულის ამა თუ იმ წერტილს დაახასიათებენ.

ვთქვათ, ასეთი პარამეტრები იყოს მატერიალური წერტილის ξ_i, $i = 1,2,3$, კოორდინატები დროის რაღაც (ვთქვათ, საწყის)

*) ო.ლ. ჰიოლდერი (1859–1937).

მომენტში. მაშინ სხეულის მოძრაობის განტოლებები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$x_i = x_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right), \quad i = 1,2,3, \qquad (1.22.1)$$

სადაც $x_i = x_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right)$, $i = 1,2,3$, არის დროის t მომენტში იმ მატერიალური წერტილის კოორდინატები, რომლის კოორდინატებიც საწყის მომენტში იყო ξ_i, $i = 1,2,3$. ცხადია, სიჩქარის და აჩქარების კომპონენტებს ექნებათ

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_i &= \dot{x}_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right) = \frac{\partial x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)}{\partial t}, \qquad i = 1,2,3, \end{aligned} \qquad (1.22.2)$$

და

$$\begin{aligned} a_i &= \dot{\mathrm{v}}_i = \ddot{x}_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right) = \frac{\partial^2 x_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right)}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 u_i\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right)}{\partial t^2}, \qquad i = 1,2,3 \end{aligned} \qquad (1.22.3)$$

სახე, თუ გავითვალისწინებთ (1.6.2)-ს, სადაც x_i-ს და x_i^{φ}-ს შევცვლით შესაბამისად ξ_i-თ და x_i-თ. ასეთ მიდგომას ეწოდება *ლაგრანჟის მეთოდი*, ხოლო ξ_1, ξ_2, ξ_3 პარამეტრებს – *ლაგრანჟის ცვლადები*. ამრიგად, სხეულის მოძრაობის ლაგრანჟის ცვლადებში შესწავლა გულისხმობს მისი ცალკეული მატერიალური წერტილების მოძრაობის შესწავლას და აქედან გამომდინარე მთელი სხეულის (უწყვეტი გარემოს) მოძრაობის შესწავლას.

არსებობს მეორე მიდგომაც, როცა სხეულის მოძრაობის შესწავლა ხდება საკოორდინატო სისტემის სხვადასხვა წერტილში სხეულის ნაწილაკების მოძრაობის მახასიათებლების (სიჩქარე,

აჩქარება, ძაბვები და სხვ.) დროის განმავლობაში ცვლილებების განხილვით. სხვა სიტყვებით, დამკვირვებელი სივრცის მოცემულ წერტილში შეისწავლის დროის სხვადასხვა მომენტში მყოფ, საზოგადოდ სხვადასხვა, ნაწილაკის მოძრაობის მახასიათებლებს და ამდენად, ახდენს რა დაკვირვებას უწყვეტი გარემოს მიერ დაკავებულ ყველა წერტილში, შეისწავლის მთელი უწყვეტი გარემოს მოძრაობას. ასეთ მიდგომას ეწოდება *ეილერის მეთოდი.* ეილერის მეთოდის გამოყენებისას დრო, სიჩქარე, აჩქარება, ძაბვები და სხვა სიდიდეები განიხილება, როგორც x_1, x_2, x_3, t ცვლადების, რომელთაც *ეილერის ცვლადები* ეწოდება, ფუნქციები. შევნიშნოთ, რომ სხეულის ცალკეული ნაწილაკების გადაადგილება შეიძლება შესწავლილ იქნეს მხოლოდ ლაგრანჟის ცვლადებში. ამ შემთხვევაში ეილერის ცვლადების გამოყენება შეუძლებელია და მათზე გადასვლა მხოლოდ ფორმალური ხასიათის მქონე ოპერაციაა, რომელიც არ ცვლის მიდგომის თვალსაზრისს. თუ სიჩქარე $\vec{\mathrm{v}}(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1,2,3$, მოცემულია ეილერის ცვლადებში, მაშინ აჩქარების გამოსათვლელად იმავე წერტილში საჭიროა გადავიდეთ ლაგრანჟის ცვლადებზე

$$\mathrm{v}_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right) = \mathrm{v}_i\left[x_1\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right), x_2\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right), x_3\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right), t\right]$$

და გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი:

$$\begin{aligned} a_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right) &= \frac{d\mathrm{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial\, \mathrm{v}_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\, \mathrm{v}_i}{\partial t} + \mathrm{v}_k \frac{\partial\, \mathrm{v}_i}{\partial x_k}, \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.22.4}$$

თუ გადაადგილებები მცირე სიდიდეებია და გამოვრიცხავთ ფლუქტუაციებს, მაშინ სხეულის ცალკეული წერტილების სიჩქარეებიც მცირე სიდიდეები იქნება. თუ დავუშვებთ, რომ მათი

$\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}$ წარმოებულებიც იმავე რიგის მცირე სიდიდეებია, მაშინ $\mathrm{v}_k \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}$ სიდიდეები იქნება მეორე რიგის მცირე სიდიდეები. მათი უგულვებელყოფის შემდეგ (1.22.4)-დან მივიღებთ, რომ

$$a_i = \dot{\mathrm{v}}_i = \frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t}.$$

ეს უკანასკნელი კი ემთხვევა (1.22.3)-ს. საერთოდ, ეს შემთხვევა მეტად მნიშვნელოვანია, რადგან მცირე გადაადგილებები დამახასიათებელია დრეკადი სხეულებისათვის. ვიპოვოთ კავშირი

$$\frac{\partial u_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)}{\partial \xi_k} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)}{\partial x_k},$$

$$i,k = 1,2,3,$$

სიდიდეებს შორის. ცხადია,

$$\frac{\partial u_i(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x_1}, \quad i = 1,2,3.$$

მაგრამ

$$\xi_i = x_i - u_i, \tag{1.22.5}$$

ამიტომ

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

და

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \qquad i = 1,2,3.$$

მეორე რიგის მცირე სიდიდეების უგულვებელყოფით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_1}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_2} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \quad \text{და} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial \xi_3} \quad .$$

§1.23. navie-stoqsis gantolebebi. stoqsis da ozeenis modelebi. eileris gantolebebi

თუ საწინააღმდეგო არ იქნება თქმული, ჩავთვალოთ, რომ $\Omega(t)$ არე, რომელიც უკავია სითხეს დროის t მომენტში, არ არის დროზე დამოკიდებული (მაგალითად, წყალი მიედინება არხში ისე, რომ წყლის დონე არ იცვლება), ე.ი. $\Omega(t) = \Omega \in R^3$ (იხ. [32]).

როგორც ვიცით, (1.18.1) განტოლებები სამართლიანია ნებისმიერი (გაზი, სითხე, დეფორმადი მყარი სხეული) უწყვეტი გარემოსათვის. მას, (1.22.4)-ის თანახმად, ეილერის ცვლადებში ექნება შემდეგი სახე:

$$X_{ij,j} + \Phi_i = \rho \frac{d\mathrm{v}_i}{dt} = \rho\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t} + \mathrm{v}_k \mathrm{v}_{i,k}\right). \qquad (1.23.1)$$

ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლებების მისაღებად (1.23.1)-ში შევიტანოთ ნიუტონის განზოგადებული (1.13.7) კანონით განსაზღვრული X_{ij}:

$$\rho\left(\dot{\mathrm{v}}_i + \mathrm{v}_k \mathrm{v}_{i,k}\right) = \mu \Delta \mathrm{v}_i + (\lambda + \mu)\mathrm{v}_{k,ki} - p_{,i} + \Phi_i, \quad i = 1,2,3. \qquad (1.23.2)$$

თუ $\lambda = \mu = 0$, ე.ი. სითხე არ არის ბლანტი, (1.23.2)-დან მივიღებთ იდეალური სითხის მოძრაობის შემდეგ განტოლებებს:

$$\rho(\dot{\mathrm{v}}_i + \mathrm{v}_k \mathrm{v}_{i,k}) + p_{,i} = \Phi_i, \quad i = 1,2,3, \qquad (1.23.3)$$

რომელიც *ეილერის განტოლებების* სახელს ატარებს.

ნავიე-სტოქსის (1.23.2) განტოლებები და, კერძოდ, ეილერის (1.23.3) განტოლებები, როგორც ვხედავთ, არაწრფივი განტოლებებია. უნდა შევნიშნოთ, რომ მათი არაწრფივობა გამომდინარეობს არა ფიზიკური მოდელირებიდან, არამედ მათემატიკური მოსაზრებებიდან (იხ. (1.22.4)-ის გამოყვანა).

თუ, სიმცირის მოსაზრებიდან გამომდინარე, (1.23.2) განტოლებებში $\mathrm{v}_k \mathrm{v}_{i,k}$ სიდიდეებს უგულებელვყოფთ, მოხდება ნავიე-სტოქსის განტოლებების გაწრფივება და მივიღებთ *სტოქსის* სახელით ცნობილ შემდეგ *განტოლებებს*:

$$\rho\dot{\mathrm{v}}_i - \mu\Delta\mathrm{v}_i - (\lambda + \mu)\mathrm{v}_{k,ki} + p_{,i} = \Phi_i, \quad i = 1,2,3. \qquad (1.23.4)$$

ოზეენის[*)] სახით გაწრფივების შემთხვევაში უშვებენ, რომ სითხის დინება მცირედ განსხვავდება რაიმე მიმართულების მუდმივ v_i^0 სიჩქარიან დინებისგან, ე.ი.

$$\mathrm{v}_i = \mathrm{v}_i^0 + \mathrm{v}_i^*, \quad i = 1,2,3,$$

და შემდეგ (1.23.2) განტოლებებში, სიმცირის მოსაზრებიდან გამომდინარე, უკუაგდებენ არაწრფივ წევრებს:

$$\rho\left(\dot{\mathrm{v}}_i^* + \mathrm{v}_{\underline{k}}^0 \mathrm{v}_{i,k}^*\right) = \mu\Delta\mathrm{v}_i^* + (\lambda + \mu)\mathrm{v}_{k,ki}^* - p_{,i} + \Phi_i, \quad i = 1,2,3. \qquad (1.23.5)$$

ჰიდრომექანიკაში მოძრაობას ეწოდება სტაციონარული (დამდგარი), თუ მოძრაობის დამახასიათებელი სიდიდეები (სიჩქარე, წნევა და სხვ.), დამოკიდებულნი არიან ეილერის ცვლადებზე (რომლებიც, საზოგადოდ, დროის ფუნქციებია), ხოლო უშუალოდ

[*)] კ.ვ. ოზეენი (1879-1944).

დროზე დამოკიდებულნი არ არიან. ამის შესაბამისად (2.23.4) განტოლებები მიიღებენ

$$\mu\Delta \mathrm{v}_i + (\lambda+\mu)\mathrm{v}_{k,ki} - p_{,i} + \Phi_i = 0, \quad i = 1,2,3, \quad (1.23.6)$$

სახეს.

ნიუტონის მექანიკის ფუნდამენტურ კანონს წარმოადგენს მასის შენახვის კანონი. ის სამართლიანია ნებისმიერი უწყვეტი გარემოსათვის და მდგომარეობს იმაში, რომ სხეულიდან აზრობრივად გამოყოფილ ნებისმიერ დროში ცვალებად $\Omega(t)$ მოცულობაში, რომელიც გარემოს ერთი და იმავე ნაწილაკებისაგან შედგება, მოთავსებული მასა არ იცვლება დროთა განმავლობაში. ეს კანონი ექსპერიმენტულად დადგენილად უნდა ჩაითვალოს (იხ., მაგალითად, [57]). მათემატიკურად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\left(x_1, x_2, x_3, t\right) d\Omega = 0. \quad (1.23.7)$$

წარმოებულის განმარტების თანახმად,

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho\left(x_1, x_2, x_3, t\right) d\Omega$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{\Omega(t+\Delta t)} \rho\left(x_1, x_2, x_3, t+\Delta t\right) d\Omega - \int_{\Omega(t)} \rho\left(x_1, x_2, x_3, t\right) d\Omega}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\int_{\Omega(t+\Delta t)-\Omega(t)} \rho\left(x_1, x_2, x_3, t+\Delta t\right) d\Omega}{\Delta t} \right.$$

$$+\frac{\int_{\Omega(t)}\left[\rho(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t)-\rho(x_1,x_2,x_3,t)\right]d\Omega}{\Delta t}\Bigg\}$$

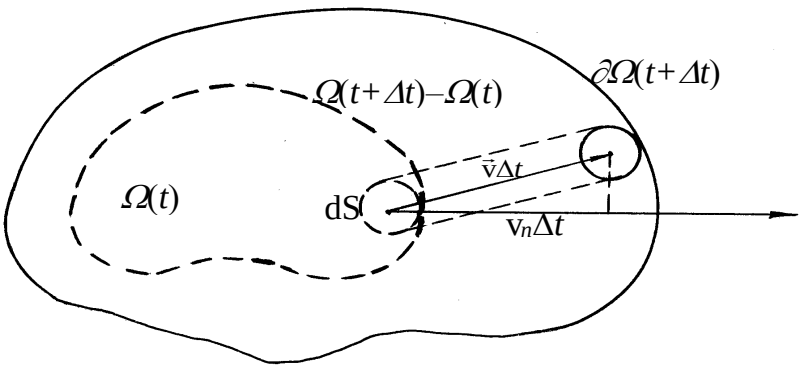
$$=\int_{\partial\Omega(t)}\rho(x_1,x_2,x_3,t)\mathrm{v}_n(x_1,x_2,x_3,t)\,dS$$

$$+\int_{\Omega(t)}\frac{\partial\rho(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t}\,dV, \qquad (1.23.8)$$

რადგან $\Omega(t+\Delta t)-\Omega(t)$ მოცულობა შედგება ელემენტარული

$$d\Omega=\mathrm{v}_n\,dS\Delta t$$

ცილინდრებისაგან (იხ. ნახ. 1.23.1) და, როცა $\Delta t\to 0$, $\partial\Omega(t+\Delta t)$ ზედაპირი მიისწრაფის $\partial\Omega(t)$ ზედაპირისაკენ, ხოლო $\rho\left(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t\right)$ სიმკვრივე – $\rho\left(x_1,x_2,x_3,t\right)$-სკენ.



მაგრამ, გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულის თანახმად,

$$\int\limits_{\partial\Omega(t)} \rho \mathrm{v}_n \, dS = \int\limits_{\partial\Omega(t)} \rho \, \mathrm{v}_i \, n_i \, dS = \int\limits_{\Omega(t)} \left(\rho \, \mathrm{v}_i\right)_{,i} d\Omega \,. \qquad (1.23.9)$$

(1.23.7)-(1.23.9)-დან, როგორც მთელი მოძრავი გარემოსათვის, ასევე მისგან აზრობრივად გამოყოფილი ნებისმიერი ნაწილისათვის, გამომდინარეობს, რომ

$$\int\limits_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho \, \mathrm{v}_i\right)_{,i} \right] d\Omega = 0 \,.$$

ამდენად,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \, \vec{\mathrm{v}}) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \text{როცა} \quad t \geq t_0 \,, \quad (1.23.10)$$

სადაც $div \, \vec{\mathrm{v}} := \mathrm{v}_{i,i}$. (1.23.10) განტოლებას ეწოდება *უწყვეტობის განტოლება ეილერის ცვლადებში*. ცხადია, რადგან

$$div(\rho \, \mathrm{v}) = \left(\rho \, \mathrm{v}_i\right)_{,i} = \rho \, \mathrm{v}_{i,i} + \rho_{,i} \, \mathrm{v}_i = \rho \, \mathrm{v}_{i,i} + \rho_{,i} \, \dot{x}_i \,,$$

ამოტომ (1.23.10) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახითაც

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div \, \vec{\mathrm{v}} = 0 \,. \qquad (1.23.11)$$

განტოლებათა სრული სისტემის მისაღებად (1.23.2)-ს უნდა დაემატოს უწყვეტობის (1.23.10) და მდგომარეობის (*ბაროტროპული* სითხის შემთხვევაში)

$$p = f(\rho) \qquad (1.23.12)$$

განტოლება, სადაც f გარკვეული ფუნქციაა.

(1.23.2), (1.23.10) და (1.23.12) განტოლებათა სისტემა შეიცავს ხუთ v_1, v_2, v_3, p და ρ უცნობს, რომლებსაც ვეძებთ

$$\vec{\mathrm{v}}(x, t_0) = \vec{\mathrm{v}}_0(x), \qquad x \in \Omega, \qquad (1.23.13)$$

საწყის*) და

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{g}(x,t) \quad \partial\Omega\text{-ზე}, \quad t \geq t_0, \qquad (1.23.14)$$

სასაზღვრო პირობებში, სადაც $\vec{\mathrm{v}}_0(x)$ და $\vec{g}(x,t)$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია.

როცა $\vec{g} = 0$, $\partial\Omega$ საზღვარი უძრავი და მყარია და შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა საზღვარზე სითხე არ სრიალებს და ეკვრის მას; ხოლო როცა $\vec{g} \neq 0$, საზღვარი მოძრაობს დასახელებული $\vec{g}$ სიჩქარით.

(2.23.14) სასაზღვრო პირობა შეიძლება შეიცვალოს

$$\mathrm{v}_n := (\vec{\mathrm{v}}, n) = \mathrm{v}_i n_i = 0, \qquad X_{n\tau} = 0 \quad \partial\Omega\text{-ზე} \qquad (1.23.15)$$

სასაზღვრო პირობებით, სადაც $X_{n\tau}$ არის $\vec{X}_n$-ის მხები კომპონენტი. (1.23.15) შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა საზღვარზე სიჩქარის v_n ნორმალური მდგენელი და ძაბვის ვექტორის $X_{n\tau}$ მხები მდგენელი ნულია (ე.ი. სითხეს საზღვრის გასწვრივ სრიალი შეუძლია). ცხადია, (1.23.15) პირობები შეიძლება არაერთგვაროვანიც იყოს.

სითხეს ეწოდება არაკუმშვადი, თუ მისი ნებისმიერი ნაწილის მოცულობა უცვლელი რჩება (მუდმივია) მოძრაობის დროს, ე.ი., მოცულობითი გაფართოების (იხ. (1.9.9)) *დროით წარმოებული*

$$div\ \vec{\mathrm{v}} = 0. \qquad (1.23.16)$$

ამდენად, თუ სითხე არაკუმშვადია, მასის შენახვის (1.23.11) კანონიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

ე.ი., ρ მუდმივია სითხის მოძრაობის ტრაექტორიების გასწვრივ. აქედან გამომდინარე, როცა სითხე ერთგვაროვანია, რაც იმას

*) სტაციონარული მოძრაობის შემთხვევაში (1.23.13) პირობები ზედმეტია, რადგან განტოლებებში არ გვექნება დროით კერძო წარმოებულები.

ნიშნავს, რომ ρ არ არის სივრცის წერტილის ფუნქცია, დავასკვნით, რომ $\rho = const$.

ვთქვათ, $\rho = const$, მაშინ (1.23.11)-ის თანახმად, სრულდება (1.23.16).

გავაწარმოოთ (1.23.2) x_i-ის მიმართ, ავჯამოთ i-ს მიმართ 1-დან 3-მდე, გამოვიყენოთ შვარცის თეორემა და გავითვალისწინოთ (1.23.16); მაშინ გვექნება, რომ

$$\Delta p = div\, \vec{\Phi} - \mathrm{v}_{k,i}\,\mathrm{v}_{i,k}\,. \qquad (1.23.17)$$

$\vec{\mathrm{v}}$ და p უცნობი სიდიდეები სხვადასხვა როლს თამაშობენ. დროის ყოველ t მომენტში, საწყისი მომენტის ჩათვლით, p წნევა შეიძლება განსაზღვრული იქნეს, როგორც (1.23.17) განტოლებისათვის ნეიმანის ამოცანის ამონახსნი. მართლაც, (1.23.16)-ის ძალით, (1.23.2) მიიღებს

$$\rho\left(\dot{\mathrm{v}}_i + \mathrm{v}_k \mathrm{v}_{i,k}\right) = \mu \Delta \mathrm{v}_i - p_{,i} + \Phi_i, \qquad i = 1,2,3, \quad (1.23.18)$$

სახეს. თუ ახლა (1.23.18)-ს გავამრავლებთ n_i-ზე, ავჯამავთ i-ს მიმართ და გავითვალისწინებთ ერთგვაროვან (1.23.14) პირობას (ე.ი.

$$\vec{\mathrm{v}} = 0 \quad \partial\Omega\text{-ზე, როცა } t \geq t_0), \qquad (1.23.19)$$

მივიღებთ

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \Phi_i n_i + \mu \Delta \mathrm{v}_i \cdot n_i \quad \partial\Omega\text{-ზე}$$

ნეიმანის პირობას.

დასმული ამოცანები გამოკვლეულია, მაგალითად, [32]-ში (იხ. აგრეთვე [15]). ნავიე-სტოქსის განტოლებების *სუსტი (ვარიაციული) ფორმულირება* შემოღებული იყო *ჟ. ლერეს*[*] მიერ. (1.23.18) განტოლება ჩავწეროთ ვექტორული ფორმით:

[*] ჟ. ლერე (1906-1998).

$$\frac{\partial\ \vec{\mathrm{v}}}{\partial\ t}+(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{v}}-\frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{\mathrm{v}}+\frac{1}{\rho}\nabla p=\frac{1}{\rho}\vec{\Phi}\,, \qquad (1.23.20)$$

სადაც

$$\nabla:=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \qquad \vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla:=\mathrm{v}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\,,$$

$H_0^1(\Omega)$-თი აღვნიშნოთ $C_0^\infty(\Omega)$-ს ჩაკეტვა $H^1(\Omega)$-ს ნორმით. (1.23.20) განტოლება გავამრავლოთ სატესტო

$$\vec{\mathrm{v}}^*\in V:=\left\{\vec{\mathrm{v}}^*\in\left[H_0^1(\Omega)\right]^3,\ div\,\vec{\mathrm{v}}^*=0\right\}, \qquad (1.23.21)$$

ვექტორზე და მიღებული გამოსახულება Ω არეზე ვაინტეგროთ. ნაწილობითი ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{v}}(t),\vec{\mathrm{v}}^*)+\frac{\mu}{\rho}\left(\vec{\mathrm{v}}_{,j}(t),\vec{\mathrm{v}}^*{}_{,j}\right)+\left(\mathrm{v}_i\mathrm{v}_{j,i},\mathrm{v}^*_j\right)=\frac{1}{\rho}\left(\vec{\Phi},\vec{\mathrm{v}}^*\right), \qquad (1.23.22)$$

რადგან $\left[L_2(\Omega)\right]^3$-ში სკალარული

$$(\vec{\mathrm{v}}(t),\vec{\mathrm{v}}^*):=\int_\Omega \mathrm{v}_i(x,t)\vec{\mathrm{v}}_i^*(x)d\Omega$$

ნამრავლი სივრცით ცვლადებზე არ არის დამოკიდებული და, (1.23.21)-ის გამო,

$$\int_\Omega(\nabla p\cdot\vec{\mathrm{v}}^*)d\Omega=\int_{\partial\Omega} p\,\mathrm{v}_i^*n_i dS-\int_\Omega p\,div\,\vec{\mathrm{v}}^*\,d\Omega=0\,.$$

შემოვიღოთ ზოგიერთი ცნება. ვთქვათ, $-\infty\le a<b\le+\infty$ და X რაიმე ბანახის სივრცეა. მოცემული s-სთვის, $1\le s<+\infty$, $L_s(]a,b[;X)$ აღნიშნავს $]a,b[$-ზე განსაზღვრულ L_s ინტეგრე-

ბად ფუნქციათა სიმრავლეს მნიშვნელობებით X-ში, რომელიც ბანახის სივრცეა

$$\left[\int_a^b \|f(t)\|_X^s \, dt\right]^{\frac{1}{s}}$$

ნორმით. $L_\infty\left(]a,b[;X\right)$ აღნიშნავს $]a,b[$-ზე განსაზღვრულ არსებითად შემოსაზღვრულ ფუნქციებს

$$ess\sup_{]a,b[}\|f(t)\|_X$$

ნორმით, სადაც $ess\sup$ (არსებითი ზედა ზღვარი) აღნიშნავს ნული ზომის სიმრავლემდე სიზუსტით $\sup$-ს $]a,b[$-ზე. სხვა სიტყვებით, $f(t)$-ს ეწოდება *არსებითად შემოსაზღვრული*, თუ არსებობს ისეთი $c = const$, რომ თითქმის ყველგან $]a,b[$-ზე

$$\|f(t)\|_X < c\,.$$

ასეთი c რიცხვების ქვედა ზღვარს $\|f(t)\|_X$-ის *არსებითი ზედა ზღვარი* ეწოდება.

ჩვენ ვეძებთ ისეთ $\vec{v}(t) \in V$ ვექტორ-ფუნქციას თითქმის ყველა $t > 0$-სთვის, რომლისთვისაც (1.23.22), (1.23.13) სრულდება განაწილების აზრით. შევნიშნოთ, რომ (1.23.19) სასაზღვრო პირობა გათვალისწინებულია $\vec{v}(t) \in \left[H_0^1(\Omega)\right]^3$ მოთხოვნაში.

L_2-თეორიაში (1.23.21), (1.23.13) *ვარიაციული ამოცანის* (იხ. [32], გვ. 343) *სუსტ ამონახსნს* ვუწოდებთ ამონახსნს, რომელიც ეკუთვნის $L_2\left(]0,T[;V\right)$-ს და $L_\infty\left(]0,T[;H\right)$-ს $\forall T > 0$, ხოლო *ძლიერ ამონახსნს* კი ისეთს, რომელიც ეკუთვნის

$L_2\left(]0,T[;V \cap \left[H^2(\Omega)\right]^3\right)$ და $L_\infty\left(]0,T[;V\right)$-ს $\forall T > 0$, სადაც

$$H := \left\{ \vec{\mathrm{v}} \in \left[L_2(\Omega) \right]^3, \quad div\, \vec{\mathrm{v}} = 0, \quad \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{n} \big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

$\Omega \in R^2$ -ისთვის ფორმულირებები ანალოგიურია.

დღევანდლამდე მიღებული შედეგების შევსებით შეიძლება დავასკვნათ შემდეგი (იხ. [32], გვ. 344):

ვთქვათ, $\Omega \in R^2$, მაშინ ამოცანა კორექტულია *ადამარის**) აზრით: სუსტი და ძლიერი ამონახსნები არსებობენ და ერთადერთნი არიან, თუ მონაცემები საკმარისად რეგულარულია, და შესაბამის სივრცეებში უწყვეტად არიან დამოკიდებულნი მონაცემებზე.

ვთქვათ, $\Omega \in R^3$, მაშინ ძლიერი ამონახსნი არსებობს და ერთადერთია რაიმე $]0, T^*[$ ინტერვალზე, სადაც T^* დამოკიდებულია მონაცემებზე (ფაქტობრივად შედეგი ლოკალურია); სუსტი ამონახსნი არსებობს $]0, +\infty[$ ინტერვალზე. სუსტი ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი ღია პრობლემაა, ისევე, როგორც ძლიერი ამონახსნის არსებობის საკითხი დროის ნებისმიერი ინტერვალისთვის (ე.ი. გლობალური ამონახსნის). ცხადია, ისევე, როგორც R^2-ში, როცა ძლიერი ამონახსნი არსებობს, ის იმდენად გლუვია, რამდენადაც ამის საშუალებას მონაცემები და არის გეომეტრია იძლევა, C^∞ რეგულარობისა და ანალიზურობის ჩათვლით.

თავი VI. პლასტიკურობის თეორია

§1.24. drekad-plastikuri da plastikuri sxeulebi

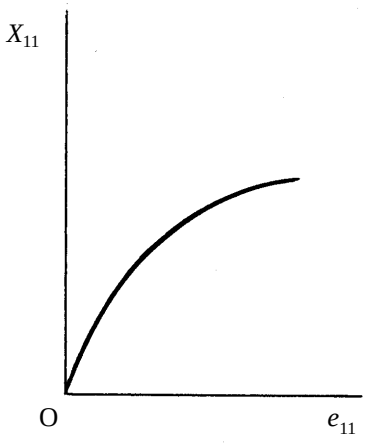
დრეკადობის თეორიისაგან განსხვავებით *პლასტიკურობის თეორია* შეისწავლის ისეთ სხეულებს, რომლებიც თავიანთი ბუნებით არ ექვემდებარებიან დრეკადობის კანონებს. სახელდობრ, თუ სხეულს მთლიანად მოვხსნით გარე დატვირთვას, ის არ

*) ჟ. ადამარი (1865-1963).

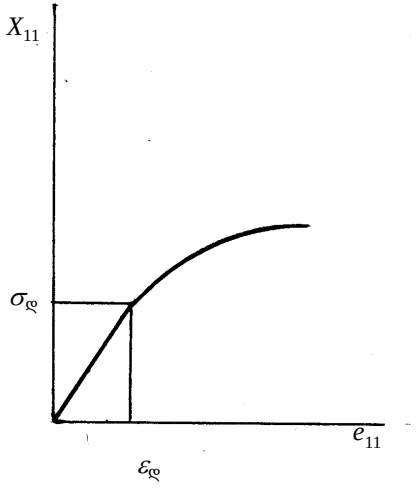
დაიბრუნებს თავის საწყის ფორმას, ე.ი. ექნება *ნარჩენი დეფორმაცია* (იხ. §12 და აგრეთვე [55]).

თუ სხეულს თავიდანვე არ აქვს დრეკადი თვისებები (იხ. ნახ. 1.24.1), მაშინ მას *პლასტიკური სხეული* ეწოდება. თუ სხეულს დატვირთვის პირველ სტადიაზე აქვს დრეკადი თვისებები (იხ. ნახ. 1.24.2), ხოლო დატვირთვის შემდეგ სტადიაზე მას უჩნდება ნარჩენი დეფორმაციები, მაშინ სხეულს *დრეკად-პლასტიკური სხეული* ეწოდება.

პლასტიკურობის მათემატიკური თეორია შეისწავლის სხეულის დეფორმირების მთელ პროცესს, ხოლო *პლასტიკურობის გამოყენებითი თეორია* შეისწავლის სხეულის მხოლოდ ზღვრულ მდგომარეობას დეფორმაციის საშუალედო ეტაპების გამოკვლევის გარეშე.



ნახ. 1.24.1



ნახ. 1.24.2

$1.25. Zabvebisa da deformaciis intensiuroba

ისევე როგორც დრეკადობის თეორიაში, პლასტიკურობის თეორიაშიც Φ_i, $i = 1,2,3$, მოცულობითი ძალებისა და X_{ni}, $i = 1,2,3$, ზედაპირული ძალების მოქმედების შედეგად გამოწვეული დაძაბული მდგომარეობა ხასიათდება ძაბვის X_{ij} სიმეტრიული ტენზორით. ისინი ერთმანეთთან არიან დაკავშირებულნი წონასწორობის (სტატიკის ამოცანების განხილვის დროს) (1.3.5) განტოლებებით, ხოლო სხეულის ზედაპირზე (1.2.1) დამოკიდებულებებით. დაძაბული მდგომარეობის დასახასიათებლად (1.5.7) ან (1.5.8) ინვარიანტებთან ერთად პლასტიკურობის თეორიაში გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ინვარიანტული სიდიდე

$$\tau_0 := \frac{1}{3}\Big\{ \big(X_{11} - X_{22}\big)^2 + \big(X_{22} - X_{33}\big)^2 + \big(X_{33} - X_{11}\big)^2 + 6\big(X_{12}^2 + X_{23}^2 + X_{31}^2\big) \Big\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.25.1}$$

რომელსაც *მზები ძაბვების ინტენსიურობა* ეწოდება.

(1.25.1)-ის ნაცვლად ხშირად იყენებენ მის ექვივალენტურ

$$\sigma_0 = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_0 \tag{1.25.2}$$

სიდიდეს, რომელსაც *ძაბვების ინტენსიურობა* ეწოდება. (1.25.1)-ში კოეფიციენტი ისეა შერჩეული, რომ მარტივი გაჭიმვის დროს (იხ. § 1.12) ძაბვების ინტენსიურობა დაემთხვეს გამჭიმავ ძაბვას. მართლაც, x_1 მიმართულებით მარტივი გაჭიმვის დროს

$$X_{11} \geq 0,\ X_{11} \neq 0,\ X_{22} = X_{33} = 0;\ X_{ij} = 0,\ \text{თუ}\ i \neq j.$$

თუ ამ სიდიდეებს ჩავსვამთ (1.25.1)-ში, ხოლო მიღებულს (1.25.2)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{X_{11}^2 + X_{11}^2} = X_{11}.$$

პლასტიკურობის თეორიაში ძალაშია აგრეთვე დრეკადობის თეორიის გეომეტრიული დამოკიდებულებები. დაძაბული სხეულის დეფორმირებულ მდგომარეობას ახასიათებს დეფორმაციის e_{ij}, $i, j = 1,2,3$, ტენზორი, რომელიც გეომეტრიულად წრფივ შემთხვევაში u_i, $i = 1,2,3$, გადაადგილებებთან დაკავშირებულია (1.6.3) ფორმულებით. e_{ij}, $i, j = 1,2,3$, უნდა აკმაყოფილებდნენ სენ-ვენანის თავსებადობის (1.11.4) პირობებს.

(1.9.6) ან (1.9.7) ინვარიანტებთან ერთად პლასტიკურობის თეორიაში გამოიყენება აგრეთვე შემდეგი ინვარიანტული სიდიდე:

$$\varepsilon_0 := \frac{\sqrt{2}}{3}\left\{ \left(e_{11}-e_{22}\right)^2 + \left(e_{22}-e_{33}\right)^2 + \left(e_{33}-e_{11}\right)^2 + 6\left(e_{12}^2+e_{23}^2+e_{31}^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.25.3}$$

რომელსაც *დეფორმაციის ინტენსიურობა* ეწოდება. (1.25.3)-ში კოეფიციენტი ისეა შერჩეული, რომ მარტივი გაჭიმვის დროს დეფორმაციის ინტენსიურობა დაემთხვეს ფარდობით წაგრძელებას გაჭიმვის მიმართულებით. მართლაც, თუ პუასონის კოეფიციენტი $\nu = \frac{1}{2}$, მაშინ x_1 მიმართულებით მარტივი გაჭიმვის დროს

$$e_{11} \geq 0, \quad e_{11} \not\equiv 0, \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{1}{2}e_{11}; \quad e_{ij}=0, \text{ თუ } i \neq j.$$

თუ ამ სიდიდეებს ჩავსვამთ (1.25.3)-ში, მივიღებთ, რომ

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(e_{11}+\frac{1}{2}e_{11}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}e_{11}-e_{11}\right)^2} = e_{11}.$$

პლასტიკური დეფორმაციის კანონები იმაზეა დამოკიდებული, იზრდება თუ მცირდება დატვირთვა. ამის შესაბამისად არსებობს ორი სახის დეფორმაცია: აქტიური და პასიური.

მარტივი გაჭიმვის ან სუფთა ძვრის შემთხვევაში ეს ცნებები ადვილი განსასხვავებელია. *აქტიური* ეწოდება დეფორმაციას, როცა ძაბვის აბსოლუტური სიდიდე იზრდება, ხოლო *პასიური* – როცა ძაბვის აბსოლუტური სიდიდე მცირდება.

რთული დაძაბული მდგომარეობის დროს პლასტიკური დეფორმაცია შეიძლება მოხდეს ძაბვების სხვადასხვა თანაფარდობის დროს. ასეთ შემთხვევაში სხეულის ელემენტის დეფორმაციას დროის მოცემულ მომენტში ეწოდება *აქტიური*, თუ ძაბვების σ_i ინტენსიურობის მნიშვნელობა მეტია ყველა მის წინა მნიშვნელობაზე, ხოლო *პასიური* – თუ ძაბვების σ_i ინტენსიურობის მნიშვნელობა ნაკლებია ერთზე მაინც მის წინა მნიშვნელობებს შორის. აქტიური დეფორმაციის დროს პლასტიკური (ე.ი. ნარჩენი) დეფორმაცია იზრდება, ხოლო პასიური დეფორმაციის დროს – მცირდება. აქტიურ დეფორმაციას ეწოდება *დატვირთვის* პროცესი, ხოლო პასიურს – *განტვირთვის* პროცესი.

პლასტიკური დეფორმაციის კანონებზე არსებით გავლენას ახდენს სხეულის დატვირთვის ხასიათიც. ამის შესაბამისად ანსხვავებენ დატვირთვის ორ სახეს: მარტივს და რთულს. *მარტივი დატვირთვა* ეწოდება დატვირთვის ისეთ პროცესს, როცა გარე ძალები მათი მოდების საწყისი მომენტიდანვე ისე იზრდებიან, რომ ინარჩუნებენ მუდმივ თანაფარდობას ერთმანეთს შორის, ე.ი. იცვლებიან საერთო პარამეტრის პროპორციულად. დატვირთვის ასეთი ცვლილება უზრუნველყოფს ნებისმიერი ფორმის მქონე სხეულის ნებისმიერ წერტილში მთავარი ძაბვებისა და მთავარი დეფორმაციების ღერძების უცვლელობას ნებისმიერი სიდიდისა და მიმართულების დატვირთვების პირობებში. *რთული დატვირთვა* ეწოდება დატვირთვის ისეთ პროცესს, როცა თუნდაც ერთი გარე ძალის ზრდის დროს დანარჩენი ძალები ამ ძალის პროპორციულად არ იზრდებიან.

$1.26. hukis gardaqmnili kanoni

ჰუკის (1.12.9) კანონში X_{ii}-ს შემცველი

$$X_{ii} = \lambda\theta + 2\mu e_{ii} \tag{1.26.1}$$

ტოლობების ორივე მხარეს გამოვაკლოთ

$$\sigma_0 := \frac{X_{ii}}{3} \tag{1.26.2}$$

საშუალო მნიშვნელობა. მაშინ

$$X_{ii} - \sigma_0 = \lambda\theta + 2\mu e_{ii} - \sigma_0, \quad i = 1,2,3. \tag{1.26.3}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varepsilon_0 := \frac{e_{ii}}{3} = \frac{\theta}{3}. \tag{1.26.4}$$

(1.26.1) ავჯამოთ i-ს მიმართ 1-დან 3-მდე, მიღებული შედეგი გავყოთ 3-ზე და გავითვალისწინოთ (1.26.2), (1.12.23), (1.12.24) და (1.26.4):

$$\sigma_0 = k\theta = \frac{E}{3(1-2\nu)}\theta = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_0 = \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_0. \tag{1.26.5}$$

(1.12.24)-ის თანახმად

$$\lambda = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}. \tag{1.26.6}$$

ჩავსვათ (1.26.3)-ის მარჯვენა მხარეში (1.26.5) და (1.26.6) გამოსახულებები და გავითვალისწინოთ (1.26.4):

$$X_{ii} - \sigma_0 = \frac{6\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon_0 + 2\mu e_{ii} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu}\varepsilon_0$$

$$= 2\mu e_{ii} + \frac{4\mu\nu - 2\mu}{1-2\nu}\varepsilon_0,$$

საიდანაც

$$X_{ii} - \sigma_0 = 2\mu\left(e_{ii} - \varepsilon_0\right), \quad i = 1,2,3. \tag{1.26.7}$$

ამ სამ დამოკიდებულებას დავამატოთ დარჩენილი სამი დამოკიდებულება ჰუკის (1.12.9) კანონიდან:

$$X_{ij} = 2\mu e_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,3. \tag{1.26.8}$$

(1.26.7), (1.26.8) ფორმულები ერთმანეთთან აკავშირებენ ძაბვის

$$X'_{ii} := X_{ii} - \sigma_0, \quad X'_{ij} = X_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,3, \tag{1.26.9}$$

ტენზორსა და დეფორმაციის

$$e'_{ii} := e_{ii} - \varepsilon_0, \quad e'_{ij} = e_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1,2,3, \tag{1.26.10}$$

ტენზორს, რომელიც შეესაბამება (1.26.9) ფორმულებით მოცემულ ძაბვის X'_{ij} ტენზორის მოქმედებით გამოწვეულ სხეულის ფორმის ცვლილებას. (1.26.10)-ისა და (1.26.4)-ის თანახმად,

$$\theta' := e'_{ii} = e_{ii} - 3\varepsilon_0 = 0.$$

ამდენად, (1.26.7), (1.26.8) დამოკიდებულებებით აღწერილი დეფორმაცია ხდება მოცულობის ცვლილების გარეშე.

თუ (1.26.7) ტოლობებს i-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის წყვილ-წყვილად ერთმანეთს გამოვაკლებთ, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} X_{11} - X_{22} &= 2\mu\left(e_{11} - e_{22}\right), \\ X_{22} - X_{33} &= 2\mu\left(e_{22} - e_{33}\right), \\ X_{33} - X_{11} &= 2\mu\left(e_{33} - e_{11}\right). \end{aligned} \tag{1.26.11}$$

(1.26.8) და (1.26.11)-დან ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \frac{X_{11} - X_{22}}{e_{11} - e_{22}} &= \frac{X_{22} - X_{33}}{e_{22} - e_{33}} = \frac{X_{33} - X_{11}}{e_{33} - e_{11}} \\ &= \frac{X_{12}}{e_{12}} = \frac{X_{23}}{e_{23}} = \frac{X_{31}}{e_{31}} = 2\mu. \end{aligned} \tag{1.26.12}$$

თუ საკოორდინატო ღერძებად მთავარ მიმართულებებს ავიღებთ, მაშინ (1.26.12) მიიღებს

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{e_1-e_2}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{e_2-e_3}=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{e_3-e_1}=2\mu \qquad (1.26.13)$$

სახეს.

თუ (1.25.3)-ში ჩავსვამთ დეფორმაციების მნიშვნელობებს, განსაზღვრულს (1.26.12)-დან და გავითვალისწინებთ (1.25.1), (1.25.2)-ს, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\varepsilon_0=\frac{\sigma_0}{3\mu}, \text{ ე.ი., } \mu=\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \qquad (1.26.14)$$

(1.26.7), (1.26.8) და (1.26.13) დამოკიდებულებებში (1.26.14)-ის ჩასმის შემდეგ გვექნება, რომ

$$X_{ii}-\sigma_0=\frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}\left(e_{ii}-\varepsilon_0\right), \quad X_{ij}=\frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}e_{ij}, \quad i\neq j, \qquad (1.26.15)$$

$$i,j=1,2,3,$$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{e_1-e_2}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{e_2-e_3}=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{e_3-e_1}=\frac{2\sigma_0}{3\varepsilon_0}. \qquad (1.26.16)$$

§1.27. plastikurobis pirobebi

პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის დროს ხშირად აუცილებელია იმის ცოდნა, თუ რა პირობებში გადადის სხეული განსახილველ წერტილში დრეკადი მდგომარეობიდან პლასტიკურ მდგომარეობაში. ამ პირობებს *პლასტიკურობის პირობები* ეწოდებათ.

წრფივი დაძაბული მდგომარეობის დროს (იხ. § 1.12) პლასტიკურობის პირობა ექსპერიმენტის საშუალებით დგინდება. ამ შემთხვევაში, მაგალითად, σ_1 მთავარი ძაბვა განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო დანარჩენი ორი $\sigma_2=\sigma_3=0$ და პლასტიკური დეფორმაციები მაშინ წარმოიშვება, როცა (იხ. ნახ. 1.24.2)

$$\sigma_1 = \sigma_д\,, \qquad (1.27.1)$$

სადაც $\sigma_д$ არის *დენადობის ზღვარი*, რომელიც მასალაზეა დამოკიდებული და მუდმივი სიდიდეა თითოეული მასალისათვის.

სუფთა ძვრის დროს (იხ. § 1.12) პლასტიკურობის პირობა კვლავ ექსპერიმენტის საშუალებით დგინდება და

$$X_{23} = \tau_д\,,$$

სადაც $\tau_д$ *დენადობის ზღვარია* სუფთა ძვრის დროს. ეს სიდიდეც მასალაზეა დამოკიდებული და მუდმივი სიდიდეა თითოეული მასალისათვის.

ბრტყელი (იხ. ქვემოთ §2.2) და მოცულობითი (ე.ი., როცა ძაბვის ტენზორის არცერთი კომპონენტი არ არის იგივურად ნულის ტოლი) დაძაბული მდგომარეობის ზოგად შემთხვევაში პლასტიკურობის პირობების დადგენა ექსპერიმენტის საშუალებით შეუძლებელია. ამიტომ ეს პირობები დგინდება ჰიპოთეტურად, შემდგომი ექსპერიმენტული შემოწმებით.

სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობის თანახმად, სხეულში პლასტიკური დეფორმაცია წარმოიშობა მაშინ, როცა მაქსიმალური მხები ძაბვა მიაღწევს სუფთა ძვრის დროს დენადობის ზღვარს, ე.ი. როცა (იხ. (1.5.23))

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_д\,. \qquad (1.27.2)$$

თუ (1.27.1)-ს (აქ იმასაც ვითვალისწინებთ, რომ ამ შემთხვევაში $\sigma_3 = 0$) ჩავსვამთ (1.27.2)-ში, მაშინ

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_д}{2} = \tau_д\,. \qquad (1.27.3)$$

(1.27.2) და (1.27.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_д\,. \qquad (1.27.4)$$

(1.27.4) გახლავთ სწორედ სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობა, რომელსაც მასალათა გამძლეობაში *სიმტკიცის მესამე თეორიასაც* უწოდებენ.

ჰუბერ) -მიზეს**) -ჰენკის***) პლასტიკურობის პირობის* თანახმად სხეულში პლასტიკური დეფორმაცია აღიძვრება მაშინ, როცა მხები ძაბვების ინტენსიურობა მიაღწევს რაღაც მნიშვნელობას, რომელიც სხეულის გვარობაზეა დამოკიდებული და მუდმივია თითოეული მასალისათვის:

$$\tau_0 = C\,. \tag{1.27.5}$$

განვსაზღვროთ ეს მუდმივი მარტივი გაჭიმვის ექსპერიმენტზე დაყრდნობით. (1.27.1)-ის თანახმად

$$\sigma_1 = \sigma_დ, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0\,.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (1.25.1)-ში, მივიღებთ მხები დაძაბულობების ინტენსიურობის შემდეგ მნიშვნელობას გაჭიმვისას პლასტიკური დეფორმაციების აღძვრის მომენტში:

$$\tau_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\sigma_დ^2 + \sigma_დ^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_დ\,. \tag{1.27.6}$$

(1.27.5)-ისა და (1.27.6)-ის შედარებით ვასკვნით, რომ

$$C = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_დ\,. \tag{1.27.7}$$

(1.25.1)-ისა და (1.27.7)-ის (1.27.5)-ში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ ჰუბერ-მიზეს-ჰენკის პლასტიკურობის პირობას შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{\big(X_{11}-X_{22}\big)^2 + \big(X_{22}-X_{33}\big)^2 + \big(X_{33}-X_{11}\big)^2 + 6\big(X_{12}^2 + X_{23}^2 + X_{31}^2\big)\Big\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_დ. \tag{1.27.8}$$

(1.27.8), თუ გავითვალისწინებთ (1.25.2)-ს, შეიძლება ჩავწეროთ

$$\sigma_0 = \sigma_დ$$

სახითაც.

---

*) მ. ტ. ჰუბერი (1872-1950).

**) რ. მიზესი (1883-1953).

***) ჰ. ჰენკი (1885-1951).

მასალათა გამძლეობაში (1.27.8) პლასტიკურობის პირობას *სიმტკიცის მეოთხე თეორიასაც* უწოდებენ.

პლასტიკურობის ორივე ეს პირობა დაახლოებით ერთნაირ შედეგს გვაძლევს.

$1.28. mcire drekad-plastikuri deformaciebis Teoria

დღეისათვის არსებობს სხვადასხვა ავტორის მიერ სხვადასხვა დროს შემოთავაზებული პლასტიკურობის მრავალი თეორია. ეს თეორიები შეიძლება ორ ჯგუფად დაიყოს.

პირველ ჯგუფს განეკუთვნებიან დრეკად-პლასტიკური თეორიები, რომლებიც ეფუძნებიან ძაბვებისა და დეფორმაციების დამაკავშირებელ განტოლებებს.

მეორე ჯგუფს განეკუთვნებიან პლასტიკური დინების თეორიები, რომლებიც ეფუძნებიან ძაბვებისა და დეფორმაციის სიჩქარეების დამაკავშირებელ განტოლებებს.

მარტივი დატვირთვისა და მცირე დეფორმაციების პირობებში პლასტიკურობის ყველა ცნობილი თეორია წარმოადგენს პლასტიკურობის ერთი ზოგადი თეორიის – მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორიის კერძო შემთხვევას. აღნიშნული ზოგადი თეორია ემყარება ექსპერიმენტების შედეგების განზოგადებით მიღებულ შემდეგ სამ კანონს.

პირველი კანონი – მოცულობის ცვლილების კანონი. მყარი სხეულის, როგორც აქტიური, ისე პასიური დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების დროს მოცულობითი დეფორმაცია ყოველთვის დრეკადია და ექვემდებარება ჰუკის (იხ. (1.26.5))

$$\sigma_0 = k\theta \qquad (1.28.1)$$

კანონს.

პლასტიკურობის თეორიაში ამოცანების გამარტივების მიზნით უშვებენ, რომ მასალა არაკუმშვადია, ე.ი. $\theta = 0$-ს. რადგან სა-

შუალო ძაბვა σ_0 არ არის ნული, ამიტომ (1.28.1)-ში უნდა დავუშვათ, რომ

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \infty .$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არაკუმშვადი მასალისათვის

$$\nu = \frac{1}{2}. \qquad (1.28.2)$$

თუ (1.28.2)-ს ჩავსვამთ (1.12.24)-ის მეორეში, მაშინ

$$\mu = \frac{E}{3}.$$

მეორე კანონი – ფორმის ცვლილების კანონი. მარტივი დატვირთვის პირობებში აღძრული დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების დროს ძაბვისა და დეფორმაციის მთავარი ღერძები ერთმანეთს ემთხვევიან და სამართლიანია (1.26.16) თანაფარდობები. ასევე სამართლიანია (1.26.15) დამოკიდებულებები. მართალია, ეს ექვსი ფორმულა სრულად დამოუკიდებელნი არ არიან. მართლაც, თუ მათგან პირველ სამს წევრ-წევრად შევკრებთ და გავითვალისწინებთ (1.26.2)-სა და (1.26.4)-ს, მივიღებთ, რომ $0 \equiv 0$-ს. ამდენად, გვაქვს ხუთი განტოლებისგან შემდგარი სისტემა ექვსი უცნობით.

მესამე კანონი – აქტიური დეფორმაციის პირობებში ძაბვების σ_0 ინტენსიურობა მოცემული მასალისათვის არის დეფორმაციის ε_0 ინტენსიურობის სავსებით გარკვეული

$$\sigma_0 = \Phi(\varepsilon_0) \qquad (1.28.3)$$

ფუნქცია.

მარტივი დატვირთვის პირობებში ჩატარებული მრავალრიცხოვანი ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებამ გვიჩვენა, რომ σ_0-სა და ε_0-ს შორის დამოკიდებულებების დიაგრამები მსგავსია. (1.28.3)-ის თანახმად ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$X_{11} = \Phi\left(e_{11}\right). \qquad (1.28.4)$$

ამრიგად, (1.28.4) დამოკიდებულება ნებისმიერი (წრფივი, ბრტყელი ან მოცულობითი) დაძაბული მდგომარეობისათვის შეიძლება დადგინდეს მარტივი გაჭიმვისათვის ჩატარებული ცდებით.

§1.29. iliuSinis Teorema gantvirTvis Sesaxeb

ვთქვათ, რაიმე სხეულისათვის, რომელზეც მოცულობითი და გარე ზედაპირული ძალები მოქმედებენ, პლასტიკურობის ამოცანა ამოხსნილია. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხეულის ყოველ წერტილში ნაპოვნია ძაბვები, დეფორმაციები და გადაადგილებები. დრეკადობის ზღვარს მიღმა სხეულის დეფორმაციის მნიშვნელოვან თავისებურებას წარმოადგენს განტვირთვის ხასიათი.

მთელი სხეულის განტვირთვა ეწოდება გარე ძალების ცვლილების ისეთ პროცესს, როცა სხეულის ყველა იმ ნაწილში, სადაც პლასტიკური დეფორმაცია მოხდა, ძაბვის σ_i ინტენსიურობა ერთდროულად იწყებს შემცირებას. ეს იმას ნიშნავს, რომ სხეული აქტიური დეფორმაციის სტადიიდან გადადის პასიური დეფორმაციის სტადიაში.

ილიუშინის[*)] *თეორემა განტვირთვის შესახებ.* სხეულის წერტილის გადაადგილებები განტვირთვის სტადიის რაიმე მომენტში განსხვავდებიან მათი მნიშვნელობებისაგან განტვირთვის დაწყების მომენტში იმ დრეკადი გადააადგილებების სიდიდით, რომლებიც აღიძვრებოდნენ სხეულში, თუ ბუნებრივ მდგომარეობაში მასზე მოდებული იქნებოდა აღნიშნულ მომენტებში სხეულზე მოქმედი გარე ძალების სხვაობის ტოლი გარეშე ძალები. იგივე სამართლიანია ძაბვებისა და დეფორმაციებისათვის.

აქედან როგორც შედეგი გამომდინარეობს *ნარჩენი ძაბვების, დეფორმაციების და გადაადგილებების შესახებ თეორემა*: თუ

[*)] ა. ა. ილიუშინი (1911-1998).

სხეულისათვის ამოხსნილია პლასტიკურობის ამოცანა და გარე ძალების მოცემულ მნიშვნელობებს შეესაბამება ჭეშმარიტი წონასწორობის მდგომარეობა და, გარდა ამისა, ამოხსნილია დრეკადობის თეორიის ამოცანა, ე.ი. იმავე გარე ძალებს შეესაბამება დრეკადი წონასწორობის ფიქტიური მდგომარეობა, მაშინ სხეულის სრული განტვირთვის შემდეგ მასში დარჩებიან ძაბვები, დეფორმაციები და გადაადგილებები, რომლებიც ჭეშმარიტ და ფიქტიურ მდგომარეობებში მათი მნიშვნელობების სხვაობების ტოლია. ამასთან იგულისხმება, რომ განტვირთვის შემდეგ ნარჩენი ძაბვები არ გადიან დრეკადობის ფარგლებიდან.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს განტვირთვის დროს ძაბვების, დეფორმაციებისა და გადაადგილებების განსაზღვრის შემდეგი სქემა:

1. პლასტიკურობის თეორიის განტოლებებიდან ვსაზღვრავთ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს, რომლებიც განტვირთვის დაწყებამდე უდიდესი დატვირთვით აღიძვრებიან.

2. დრეკადობის თეორიის განტოლებების საშუალებით ვსაზღვრავთ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს, რომლებიც განტვირთვამდე უდიდეს დატვირთვასა და განტვირთვის შემდეგ დარჩენილ დატვირთვას შორის სხვაობის ტოლი დატვირთვით აღიძვრებიან.

3. უდიდესი დატვირთვის პირობებში მიღებულ ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს ვაკლებთ განტვირთვის სიდიდის ტოლ (ე.ი. რა სიდიდითაც შემცირდა დატვირთვა) დატვირთვის შესაბამის ძაბვებს, დეფორმაციებსა და გადაადგილებებს. სწორედ ეს სხვაობები იქნებიან ძაბვების, დეფორმაციებისა და გადაადგილებების მნიშვნელობები განტვირთვის განსახილველ მომენტში.

$1.30. plastikurobis Teoriis amocanebis dasma

პლასტიკურობის თეორიაში ვეძებთ სამ x_1, x_2, x_3 ცვლადზე დამოკიდებულ შემდეგ 17 უცნობ სიდიდეს: X_{11}, X_{22}, X_{33}, X_{12}, X_{23}, X_{31} ძაბვებს, e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{23}, e_{31} დეფორმაციებს, u_1, u_2, u_3 გადაადგილებებს და ძაბვის σ_0 და დეფორმაციის ε_0 ინტენსიურობებს. ისინი უნდა განისაზღვრონ 17 განტოლებიდან. ესენია წონასწორობის სამი (1.3.5) განტოლება; ძაბვებისა და დეფორმაციების დამაკავშირებელი ექვსი (1.26.15) ფიზიკური განტოლება, რომელთაგან ხუთია დამოუკიდებელი და ამიტომ მეექვსე განტოლებად ვიღებთ (1.28.1)-ს; კოშის ექვსი (1.6.3) გეომეტრიული ფორმულა; (1.28.3) დამოკიდებულება ძაბვისა და დეფორმაციის ინტენსიურობებს შორის და დეფორმაციის ინტენსიურობის (1.25.3) გამოსახულება.

გარდა ამისა, უნდა დაკმაყოფილდეს (1.2.1) პირობები სხეულის ზედაპირზე, სადაც X_{ni}, $i = 1,2,3$, სიდიდეებია მოცემული.

პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოხსნის დროს გამოიყენება იგივე ხერხები, რაც დრეკადობის თეორიაში: ამოხსნა ძაბვებში, გადაადგილებებში და შერეული ხერხი.

დრეკადობის თეორიის მსგავსად პლასტიკურობის თეორიის ამოცანების ამოსახსნელად გამოიყენება პირდაპირი, შებრუნებული და ნახევრადშებრუნებული მეთოდები.

A

აბსოლუტურად მყარი სხეული, 10
absoluturi Zvra, 65
ადგილობრივი დენადობა, 80
afinuri asaxva, 54
anizotropuli, 83
აქტიური დეფორმაცია, 133
araerTgvarovani anizotropuli, 83
არაკუმშვადი სითხე, 126
არანიუტონისეული ფლუიდები (სითხეები), 92
არსებითად შემოსაზღვრული, 128
არსებითი ზედა ზღვარი, 129

B

ბაროტროპული სითხე, 125
ბელტრამი–მიჩელის თავსებადობის პირობები, 99
ბეტის იგივეობა, 93
blanti siTxe, 91
brtyeli daZabuli mdgomareoba, 38

C

Cezaros formulebi, 76

D

დალამბერის პრინციპი, 10
დატვირთვის პროცესი, 134
დეფორმაცია, 10, 47
დეფორმაციის ინტენსიურობა, 133
დეფორმაციის კომპონენტები, 60
დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, 106
დეფორმაციის ტენზორი, 60, 66
დეფორმაციის ზედაპირი, 68
დეფორმადი მყარი სხეულების მექანიკა, 11
დეფორმადი მყარი სხეული, 10
დეფორმირებული (მოცემული) მდგომარეობა, 106
დენადობის ზღვარი, 80, 137
დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა, 102
დიუჰამელ-ნეიმანის კანონი, 89
დიუჰამელ-ნეიმანის თერმოვანტოლებები, 109
დრეკადი მუდმივები, 82
დრეკადობა ეწოდება, 11
დრეკადობის მოდული, 87
დრეკადობის თეორია, 11
drekadobis Teoriis amocanebis amoxsnis meTodebi, 113
drekadobis Teoriis sasazRvro amocanebi, 96
drekadobis Teoriis ZiriTadi sasazRvro amocanebi, 95
დრეკადობის ზღვარი, 79
დრეკად-პლასტიკური სხეული, 130

E

ეილერის ცვლადები, 119
ეილერის განტოლებები, 121
ეილერის კუთხეები, 53
ეილერის მეთოდი, 118
ენერგიის შენახვის კანონი, 106
erTgvarovani, 83
ერთგვაროვანი დეფორმაცია, 56
ერთგვაროვანი ძვრა, 65

F

fardobiT wagrZeleba, 66
ფარდობითი ტემპერატურული გაფართოება, 89
ფარდობითი ძვრა, 65
ფორმის ცვლილების კანონი, 141

G

გადაადგილების ვექტორი, 48, 70
გამყარების პრინციპი, 11
განმტკიცების მდგომარეობა, 80
განტვირთვის პროცესი, 134

H

ჰიდროაერომექანიკა, 11
hidrodinamikuri wnevis veqtori, 91
ჰიოლდერის მაჩვენებელი., 117
ჰუბერ-მიზეს-ჰენკის პლასტიკურობის პირობა, 138
ჰუკის დიაგრამა, 78

I

idealuri siTxe, 90
ილიუშინის თეორემა განტვირთვის შესახებ, 142
ინერციის კანონი, 9
ინერციის ძალა, 10
ინვარიანტული ფორმა, 28
ინვარიანტული ინტეგრალი, 28
იუნგის მოდული, 87
izotropuli sxeuli, 82

K

კინეტიკური ენერგიაა, 104
კლაპეირონის თეორემა, 112
კონსტიტუტივური დამოკიდებულებები, 81
kontravariantuli tenzori, 26
kovariantuli tenzori, 26
კრონეკერის სიმბოლო, 27
კვეთის მეთოდი, 17

L

ლაგრანჟის ცვლადები, 78, 118
ლაგრანჟის მეთოდი, 118
ლამეს განტოლებები, 96
ლაქს – მილგრამის თეორემა, 116

M

მაქსველის სითბოგამტარობის კოეფიციენტი, 109
მარტივი დატვირთვა, 134
მარტივი ძვრა, 65
მასალათა გამძლეობა, 12
მასობრივი ძალა, 15
მატერიალურ ობიექტი, 8
მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია, 140
მექანიკა, 8
მექანიკური მოძრაობა, 8
მოცულობის ცვლილების კანონი, 140
მოცულობის ფარდობითი გაფართოება, 69
მოცულობითი ძალა, 15
მორის წრეები, 45
მთავარი მომენტი, 16
mTavari RerZebi, 84
mTavari Zabva, 29
მთელი სხეულის განტვირთვა, 142
მუშაობა, 103

მხები მდგენელი, 19
მხები ძაბვების ინტენსიურობა, 132

N

ნაკრები მომენტი, 10
ნაკრები ვექტორი, 10
ნარჩენი დეფორმაცია, 130
ნარჩენი ძაბვები, 142
ნარჩენი ძაბვების, დეფორმაციების და გადაადგილებების შესახებ თეორემა, 142
ნავიე-სტოქსის განტოლებები, 121
ნავიე-სტოქსის განტოლებების *სუსტი* (*ვარიაციული*) *ფორმულირება*, 127
ნიუტონის კანონები, 8
ნიუტონისეული ფლუიდები (*სითხეები*), 92
ნორმალური მდგენელი, 19

O

ოზეენის განტოლებები, 122

P

პასიური დეფორმაცია, 133
პლასტიკური დეფორმაცია, 11
პლასტიკური სხეული, 130
პლასტიკურობა, 11
პლასტიკურობის გამოყენებითი თეორია, 130
პლასტიკურობის პირობები, 137
პლასტიკურობის თეორია, 11, 130
პროპორციულობის ზღვარი, 79
პუასონის კოეფიციენტი, 87

Q

ქმედებისა და უკუქმედების კანონი, 9

R

რთული დატვირთვა, 134

S

სამშენებლო მექანიკა, 12
სენ-ვენანის პლასტიკურობის პირობის, 138
sen-venanis principi, 112
სიბლანტის ფუნქცია, 92
სიბლანტის კოეფიციენტი, 92
სიმკვრივე, 15
სიმტკიცის მეოთხე თეორია, 139
სიმტკიცის ზღვარი, 81
siTbogamtarobis gantoleba, 109
სობოლევის სივრცე, 114
სტოქსის განტოლებები, 122
სუსტი ამონახსნი, 129
სხეულის დეფორმაციის პოტენციალური ენერგია, 106
სხეულის დრეკადი წონასწორობა, 95

T

თავსებადობის სენ-ვენანის პირობები, 76
ტემპერატურული გამტარობის კოეფიციენტი, 109
temperaturuli Zabvebi, 89
თეორიული მექანიკა, 8

U

უსასრულოდ მცირე ასახვა, 57
უწყვეტ გარემოთა (სხეულთა) მექანიკა, 11
უწყვეტი გარემო, 8
უწყვეტობის განტოლება ეილერის ცვლადებში, 125

V

განდერმონდის დეტერმინანტი, 42

W

wneva, 90, 91
wonasworobis gantolebebi, 23
წონასწორობის მდგომარეობა, 10
wrfivi daZabuli mdgomareoba, 39
წრფივი გაფართოების ტემპერატურული კოეფიციენტი, 89

X

xaxunis Zala, 91

ხისტი გადაადგილება, 48
ხვედრითი სითბოტევადობა, 109

Y

ყოველმხრივ შეკუმშვის მოდული, 88

Z

Zabvis mTavari mimarTuleba, 29
ძაბვის ტენზორი, 20, 24
ძაბვის ტენზორის ინვარიანტები, 32
ძაბვის ტენზორის მთავარი კომპონენტები, 30
Zabvis zedapiri, 33
ძალის მომენტი, 9
ძალისა და აჩქარების პროპორციულობის კანონი, 9
ზედაპირის მთავარი ღერძი, 35
ზედაპირული ძალა, 15, 16
ZiriTadi Sereuli sasazRvro amocana, 96
ძლიერი ამონახსნი, 129
ძვრის კუთხე, 65
ძვრის მოდული, 88

w i n a s i t y v a o b a 3
nawili I. samganzomilebiani modelebi.....11
Tavi I. Zabvebis Teoria 11
$1.2. Zabvis veqtoris damokidebuleba farTis orientaciaze.....18
$1.3. wonasworobis gantolebebi 21
$1.4. koordinatTa sistemis Secvla. invariantuli kvadratuli forma 25
$1.5. mTavari Zabvebi. Zabvis mTavari mimarTulebebi. Zabvis zedapiri 30
nax. 1.5.3.....40
nax. 1.5.4.....41
Tavi II. deformaciaTa Teoria.....49

$1.6. deformaciis cneba 49
$1.7. afinuri asaxva 56
$1.8. usasrulod mcire afinuri asaxvis daSla sakuTriv deformaciad da xist gadaadgilebad.....59
$1.9. deformaciis invariantuli kvadratuli forma, koordinatTa sistemis Secvla. deformaciis mTavari mimarTulebebi. deformaciis zedapiri 67
$110. zogadi saxis deformacia 72
$1.11. gadaadgilebis gansazRvra deformaciis komponentebis saSualebiT. Cezaros formulebi. Tavsebadobis sen-venanis pirobebi. 74
Tavi III. konstitutivuri damokidebulebebi 79
$1.12. drekadobis Teoriis ZiriTadi kanoni _ hukis ganzogadebuli kanoni.....79
$1.13. idealuri da blanti siTxeebi. hidromeqanikis ZiriTadi kanoni _ niutonis ganzogadebuli kanoni.....92
Tavi IV. drekadobis Teoriis statikisa da dinamikis amocanebi.....95
$1.14. betis igiveoba.....95
$1.15. drekadi sxeulis statikis ZiriTadi sasazRvro amocanebi 95
$1.16. ZiriTadi gantolebebi gadaadgilebebSi 98
$1.17. ZiriTadi gantolebebi ZabvebSi 99
$1.18. dinamikis amocanebi. dinamikisa da statikis ZiriTadi amocanebis amonaxsnis erTaderToba.....101
$1.19. klapeironis Teorema 113
$1.20. sen-venanis principi 114
$1.21. drekadobis Teoriis amocanebis amoxsnis meTodebi. amonaxsnis arsebobis Teoremebi 114
Tavi V. hidrodinamikis stacionaruli da arastacionaruli amocanebi 118
$1.22. lagranJis da eileris cvladebi 118
$1.23. navie-stoqsis gantolebebi. stoqsis da ozeenis modelebi. eileris gantolebebi.....122
Tavi VI. plastikurobis Teoria.....131
$1.24. drekad-plastikuri da plastikuri sxeulebi 131
$1.25. Zabvebisa da deformaciis intensiuroba.....133
$1.26. hukis gardaqmnili kanoni.....136
$1.30. plastikurobis Teoriis amocanebis dasma 144