უშანგი გოგინავა

ფურიეს და ვეველეტ ანალიზის საფუძვლები

1. ფურიეს მწკრივები

ტრიგონომეტრიული მწკრივი განიმარტება შემდეგნაირად

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j e^{ijx} \qquad (1.1).$$

ვთქვათ $f \in L^1(T)$ და

$$c_j = c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t) e^{-ijt} dt . \qquad (1.2)$$

მაშინ (1.2)-ს უწოდებენ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტს, ხოლო (1)-ს კი f ფუნქციის ფურიეს მწკრივს ე. ი.

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j(f) e^{ijx} .$$

აღვნიშნოთ $S_n(f,x)$-ით f ფუნქციის ფურიეს მწკრივის n-ური კერძო ჯამი, ე. ი.

$$S_n(f,x) := \sum_{|j|\le n} c_j e^{ijx} .$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$S_n(f,x) = c_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j e^{ijx} + c_{-j} e^{-ijx}\right)$$

$$= c_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\left(c_j + c_{-j}\right)\cos jt + i\left(c_j - c_{-j}\right)\sin jt\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos jt + b_j \sin jt$$

სადაც

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\cos jtdt,\ b_j = \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\sin jtdt .$$

ამოცანა. დაადგინეთ რა სახე აქვს ფურიეს მწკრივს ლუწი და კენტი ფუნქციებისათვის.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ ტრიგონომეტრიული მწკრივი (1.1) კრებადია $L^1(T)$ სივრცის ნორმით, მაშინ ის წარმოადგენს $f \in L^1(T)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივს.

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ j რიცხვი და განვიხილოთ შემდეგი მიმდევრობა

$$f_n(t) := \left(f(t) - S_n(t)\right)e^{-ijt}.$$

თეორემის პირობის ძალით მოცემული მიმდევრობა კრებადია 0-კენ $L^1(T)$ სივრცის ნორმით. მეორეს მხრივ

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi}\int_T \left(f(t) - S_n(t)\right)e^{-ijt}dt + \frac{1}{2\pi}\int_T S_n(t)e^{-ijt}dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_T \left(f(t) - S_n(t)\right)e^{-ijt}dt + c_j, |n| \geq j$$,

მაშასადამე,

$$|c_j(f) - c_j| \leq \|f_n\|_1 \to 0,\ n \to \infty.$$

თეორემა (რიმან-ლებეგი). ვთქვათ $f \in L^1(T)$. მაშინ $c_j \to 0, |j| \to \infty$.

დამტკიცება. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -თვის არსებობს $p(t)$ ტრიგონომეტრიული პოლინომი ისეთი, რომ

$$\|f - p\|_1 < \varepsilon.$$

ვთქვათ $n_0 = \deg ree(p)$ და $|j| > n_0$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$c_j = \frac{1}{2\pi}\int_T \left(f(t) - p(t)\right)e^{-ijt}dt$$

და მაშასადამე

$$c_j \leq \|f - p\|_1 < \varepsilon.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ჩავწეროთ ფურიეს მწკრივების კერძო ჯამები ინტეგრალური სახით.

$$S_n(f,x) = \sum_{|j|\leq n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)e^{-ijt}dt\right)e^{ixt} = \frac{1}{\pi}\int_T f(t)\left(\frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n} e^{ij(x-t)}\right)dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_T f(t)D_n(x-t)dt$$

სადაც,

$$D_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{|j|\leq n} e^{ijt}$$

და მას უწოდებენ დირიხლეს გულს..

შევისწავლოთ დირიხლეს გულის ზოგიერთი თვისება. ადვილი დასანახია, რომ

$$D_n(t) = \frac{1}{2}e^{-\mathrm{int}}\frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{1}{2}\frac{e^{i(n+1)t} - e^{-\mathrm{int}}}{e^{it/2}\left(e^{it/2} - e^{-it/2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\sin(n + 1/2)t}{\sin t/2}.$$

მაშასადამე

$$\frac{1}{\pi}\int_T D_n(t)\,dt=1,$$

$$|D_n(t)|\le n+1/2\,.$$

რადგანაც

$$\sin x\ge \frac{2}{\pi}x,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{2}$$

მივიღებთ

$$\left|D_n(t)\right|\le \frac{\pi}{2t},\ 0<|t|<\pi\,.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$D_n^*(t):=\frac{D_{n-1}(t)+D_n(t)}{2}=\frac{\sin\big((n-1/2)t\big)+\sin\big((n+1/2)t\big)}{4\sin(t/2)}=\frac{\sin nt}{2\tan(t/2)}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$D_n(t)-D_n^*(t)=\frac{D_n(t)-D_{n-1}(t)}{2}=\frac{\cos(nt)}{2}\,.$$

მივიღებთ

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_T f(t)D_n^*(x-t)\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\cos n(x-t)\,dt=S_n^*(f,x)+A_n\,,$$

სადაც $A_n\to 0$. მაშასადამე

$$S_n(f,x)=S_n^*(f,x)+o(1)\,.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\Phi(t):=\left(\frac{1}{2\tan(t/2)}-\frac{1}{t}\right)\in L^\infty$$

ამიტომ მივიღებთ, რომ

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_T f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,dt+o(1)\,.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$|D_n^*(t)|\le \frac{n-1+1/2+n+1/2}{2}=n\,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_T D_n^*(t)\,dt=1$$

და

$$\left|D_n^*(t)\right|\le \frac{\pi}{2t},\ 0<|t|<\pi\,.$$

ცხადია, რომ

$$S_n^*(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_T f(t)D_n^*(x-t)dt=\frac{1}{\pi}\int_T \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}D_n^*(t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{[0,\pi)}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)D_n^*(t)d$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა (დინი). ვთქვათ $f\in L(T)$ და არსებობს რიცხვი A ისეთი, რომ

$$\int_{[0,\pi]}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-A\right|\frac{dt}{t}<\infty$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=A.$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ

$$S_n^*(f,x)-A=\frac{2}{\pi}\int_{[0,\pi]}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}-A\right)\left(\frac{\sin nt}{2\tan(t/2)}\right)dt$$

$$\left(\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2}-A\right)\frac{1}{2\tan(t/2)}\in L(T)$$

მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=\lim_{n\to\infty}S_n^*(f,x)=A.$$

თეორემა დამტკიცებულის.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$w_1(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_T \left|f(x+u)-f(u)\right|du\,.$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა (მარცინკიევიჩი). ვთქვათ $f\in L(T)$ და

$$\int_{[0,\pi]}w_1(f,t)\frac{dt}{t}<\infty\,.$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}S_n(f,x)=f(x)\qquad \text{თ. ყ.}$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$I(x):=\int_{[0,\pi]}\left|f(x+t)-f(x)\right|\frac{dt}{t}>0.$$

ტონელის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{1}{2\pi}\int_T I(x)\,dx=\int_{[0,2\pi]}\frac{1}{2\pi}\int_{[0,\pi]}\left|f(x+t)-f(x)\right|dx\frac{dt}{t}=\int_{[0,\pi]}w_1(f,t)\frac{dt}{t}<\infty.$$

მაშასადამე

$$I(x)<\infty \quad \text{თ.ყ.}$$

$$\int_{[0,\pi]}|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\frac{dt}{t}<\infty \quad \text{თ.ყ.}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

სავარჯიშოები

1.1 მოცემული ფუნქცია გაშალეთ ფურიეს მწკრივად მითითებულ შუალედში:

ა) $f(x)=x, x\in(-\pi,\pi)$;

ბ) $f(x)=\frac{\pi-x}{2}, x\in(0,2\pi)$;

გ) $f(x)=|x|, x\in(-\pi,\pi)$;

დ) $f(x)=x^2, x\in(-\pi,\pi)$;

ე) $f(x)=x^2, x\in(0,2\pi)$.

1.2 შეისწავლეთ კრებადობაზე შემდეგი ტრიგონომეტრიული მწკრივი

ა) $\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx+\cdots$

ბ) $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx+\cdots$

1.3 დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$|\sin x|=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{4n^2-1}.$$

1.4 შეისწავლეთ წერტილოვან და თანაბარ კრებადობაზე შემდეგი მწკრივი:

ა) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$; ბ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$.

1.5 ვთქვათ მოცემულია

$$\sum_{v=1}^{\infty}a_v\sin vx$$

მწკრივი, სადაც $a_\nu \geq a_{\nu+1}$ და $a_\nu \to 0$. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი: იმისათვის რომ მოცემული მწკრივი იყოს თანაბრად კრებადი R^1-ზე აუცილებელი და საკმარისია რომ $\nu a_\nu \to 0$.

2. უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივები

შემოვიღოთ ლებეგის კონსტანტის ცნება, რომელიც შემდეგნაირად განიმარტება

$$L_n := 2\|D_n\|_1 = \frac{1}{\pi}\int_T |D_n(t)|\,dt, \quad n \geq 0.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$|S_n(f,0)| \leq \frac{1}{\pi}\int_T |f(t)||D_n(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty L_n.$$

მაშასადამე

$$\sup_{f\in C(T),\|f\|_\infty\leq 1} |S_n(0,f)| \leq L_n, \qquad (2.1)$$

მეორეს მხრივ, თუ განვიხილავთ

$$f_n(t) = \operatorname{sgn} D_n(t)$$

მაშინ

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

და მაშასადამე

$$\sup_{f\in L_\infty(T),\|f\|_\infty\leq 1} |S_n(0,f)| = L_n.$$

უფრო მეტიც, სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\sup_{f\in C(T),\|f\|_\infty\leq 1} |S_n(0,f)| = L_n,$$

მართლაც
განვიხილოთ შემდეგი უწყვეტი ფუნქცია

$$g(t) := \begin{cases} 1, D_n(t) > 0 \\ -1, D_n(t) < 0 \\ \text{გარდა მცირე ზომის ინტერვალებისა, რომელშიც ფუნქცია} \\ \text{არის უწყვეტი და წრფივი, ამასთან ამ ინტერვალთა ზომათა} \\ \text{ჯამი არ აღემატება } \varepsilon/(2n+1) \end{cases}$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$
\begin{aligned}
\left|S_n(g)\right| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_T g(t)D_n(t)\,dt\right| \\
&\ge \frac{1}{\pi}\int_{T\setminus\{\text{ინტერვალები}\}} \left|D_n(t)\right|dt - \frac{1}{\pi}\int_{\{\text{ინტერვალები}\}} \left|D_n(t)\right|dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_T \left|D_n(t)\right|dt - \frac{2}{\pi}\int_{\{\text{ინტერვალები}\}} \left|D_n(t)\right|dt \\
&\ge \left\|D_n\right\|_1 - \frac{2}{\pi}(n+1/2)\frac{\varepsilon}{2n+1} \\
&= \left\|D_n\right\|_1 - \frac{\varepsilon}{\pi} \\
&= \left(\left\|D_n\right\|_1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left\|g\right\|_\infty
\end{aligned}
$$

მაშასადამე,
$\left\|S_n\right\| \ge \left\|D_n\right\|_1 - \varepsilon/\pi$ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ საიდანაც დავასკვნით (2.1)-ის სამართლიანობას.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. $L_n = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)$, $n \to \infty$.

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ,

$$
L_n = \frac{2}{\pi}\int_{[0,\pi]} \left|\sin((n+1/2)t)\right|\left(\frac{1}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{t}\right)dt + \frac{2}{\pi}\int_{[0,\pi]} \left|\sin((n+1/2)t)\right|\frac{dt}{t} = A_n + B_n
$$

სადაც

$$
A_n = O(1).
$$

ვთქვათ $(n+1/2)t := s$, მაშინ

$$
B_n = \frac{2}{\pi}\int_{[0,(n+1/2)\pi]} \left|\sin s\right|\frac{ds}{s} = \frac{2}{\pi}\int_{[\pi,n\pi]} \left|\sin s\right|\frac{ds}{s} + O(1) = B_n' + O(1).
$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$
\begin{aligned}
B_n' &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{[\pi k/n,\pi(k+1)/n]} \left|\sin s\right|\frac{ds}{s} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{[0,\pi]} \left|\sin(\pi k + t)\right|\frac{dt}{\pi k + t} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{[0,\pi]} \left|\sin(t)\right|\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi k + t}\right)dt,
\end{aligned}
$$

მეორეს მხრივ

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{\pi}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\le\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi k+t}\le\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

$$\sup_{f\in C(T),\|f\|_\infty\le 1}|S_n(0,f)|=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1).$$

თუ დაუშვებთ, რომ ყველა უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია $t=0$ წერტილში, მაშინ დავასკვნით, რომ

$$|S_n(f,0)|\le c_f<\infty,\ \ \forall n,\ \forall f\in C(T).$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს უკანასკნელი არ სრულდება. პირველ რიგში დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა (ბანახი-შტეინჰაუზი). ვთქვათ X ბანახის სივრცეა, ხოლო Y წრფივი ნორმირებული სივრცე. $\{T_\alpha:\alpha\in A\}$ წარმოადგენს წრფივ ოპერატორთა ოჯახს X დან Y-ში შემდეგი თვისებით

$$\|T_\alpha x\|_Y\le c_x,\ \ \forall\alpha\in A$$

მაშინ

$$\sup_{\|x\|_X\le 1}\|T_\alpha x\|_Y\le c,\ \ \forall\alpha\in A$$

დამტკიცება. დაუშვათ, რომ $\exists x_0\in X,\exists\varepsilon>0$ ისეთი, რომ

$$\|T_\alpha x\|_Y\le K,\ \ x\in B(x_0,\varepsilon).$$

მაშინ თეორემა დამტკიცებული იქნება. მართლაც, ვთქვათ $\forall x\in X$ და განვიხილოთ

$$z=\varepsilon x/\|x\|+x_0\in B(x_0,\varepsilon).$$

დაშვების ძალით

$$\|T_\alpha z\|_Y\le K.$$

მეორეს მხრივ

$$\frac{\varepsilon}{\|x\|_X}\|T_\alpha x\|_Y-\|T_\alpha x_0\|_Y\le\|T_\alpha z\|_Y\le K.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\sup_{\|x\|_X\le 1}\|T_\alpha x\|_Y\le c,\ \ \forall\alpha\in A.$$

დავუშვათ, რომ ჩვენი დაშვება არ არის სამართლიანი. დავაფიქსიროთ ბირთვი $B_0 := B(x_0, 2)$, მაშინ არსებობს $x_1 \in B_0, \alpha_1 \in A$ ასეთი, რომ

$$\| T_{\alpha_1} x_1 \|_Y > 1 .$$

ოპერატორის უწყვეტობის ძალით

$$\| T_{\alpha_1} x \| > 1, \ x \in B_1 := B(x_1, \varepsilon_1) \subset B_0, \ \varepsilon_1 < 1 .$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ k-ურ ნაბიჯზე მივიღებთ, რომ $\exists \alpha_k, \varepsilon_k$ ისეთი, რომ

$$\| T_{\alpha_k} x_k \| > k .$$

ოპერატორის უწყვეტობის ძალით

$$\| T_{\alpha_k} x \| > k, \ x \in B_k := B(x_k, \varepsilon_k) \subset B_{k-1}, \ \varepsilon_k < 1/k .$$

რადგანაც X სივრცე სრულია, ამიტომ არსებობს $x \in \bar{B}_k, \forall k$. მაშასადამე

$$\sup_k \| T_{\alpha_k} x \|_Y = \infty$$

რაც ეწინაამრდეგება თეორემის პირობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ $X = C(T), Y = R$ და

$$T_n f := S_n(f, 0).$$

უკვე დამტკიცებულის ძალით

$$| T_n f | = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1). \qquad (2.2)$$

მეორეს მხრივ, თუ დავუშვებთ, რომ ყველა უწყვეტი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია 0 წერტილში, მაშინ დავასკვნით, რომ

$$| T_n f | \le c_f < \infty, \ \forall n, \ \forall f \in C(T)$$

და მაშასადამე ბანახ-შტეინგაუზის თეორემის ძალით

$$\sup_{\|f\|_C \le 1} \| T_n f \|_Y \le c, \ \forall n$$

რაც ეწინაამღდეგება (2.2).

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

2.1. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი:

ა) $c_j \left(f + \lambda \overline{g} \right) = c_j(f) + \lambda \overline{c_{-j}(g)}$;

ბ) ვთქვათ $f_a(t) := f(t+a)$, დაამტკიცეთ, რომ $c_j(f_a) = e^{ija} c_j(f)$.

2.2. ვთქვათ $f \sim \sum c_j(f)e^{ijx}$. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(t)e^{int} \sim \sum c_{j-n}(f)e^{ijt}.$$

2.3. ვთქვათ $f \in L_1(T)$ და $F(t) := c + \int_0^t f(s)ds$. დაამტკიცეთ, რომ

$F(t) - c_0(f)t \sim c_0 + \sum_{j \neq 0} \frac{c_j(f)}{ij} e^{ijt}$, სადაც c_0-მუდმივია.

2.4 ვთქვათ f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ $f' \sim \sum_j (ij)c_j(f)e^{ijx}$.

2.5. ინტეგრად f და g ფუნქციათა ნახვევი განიმარტება შემდეგნაირად $f * g(x) := \frac{1}{2\pi}\int_T f(x-t)g(t)dt$.

დაამტკიცეთ, რომ თუ $f, g \in L_1(T)$, მაშინ $f * g \in L_1(t)$ და $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, ამასთან $c_j(f * g) = c_j(f)c_j(g)$.

2.6. დაამტკიცეთ, რომ $S_n(f, x) = f * 2D_n$.

2.7. დაამტკიცეთ, რომ $(f * g(x)) = (g * f(x))$.

2.8. ვთქვათ $f \in L_1(T)$ და $p(t) := \sum_{|j| \leq N} c_j(p)e^{ijt}$. დაამტკიცეთ, რომ $f * g(x)$ არის პოლინომი, რომლის ხარისხი $\leq N$.

2.9. ვთქვათ $f \in L_p, g \in L_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. დაამტკიცეთ შემდეგი უტოლობის სამართლიანობა $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

2.10. ვთქვათ $f, g \in L_p, 1 \leq p \leq \infty$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

2.11. ვთქვათ $1 \leq p \leq \infty$. დაამტკიცეთ რომ სამართლიანია

$$\left\| \int_T f(\bullet, t)dt \right\|_p \leq \int_T \|f(\bullet, t)\|_p dt.$$

2.12. ვთქვათ $f_\tau(t) := f(t-\tau)$. დაამტკიცეთ, რომ ასახვა

$$\Phi : T \to L_p(T)$$
$$\tau \to f_\tau$$

უწყვეტია.

2.13. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$c_n(f) = \frac{1}{4\pi}\int_T \left[f(t) - f(t-\pi/n)\right]e^{-\mathrm{int}}dt.$$

2,14. 2.12 და 2.13 ამოცანათა გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ

$$c_n(f) \to 0, n \to \infty, \forall f \in L_1(T).$$

2.15. $Lip\alpha := \left\{f \in C(T) : \left|f(t) - f(\tau)\right| \le A\left|t-\tau\right|^\alpha\right\}$. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f \in Lip\alpha$, მაშინ $c_n(f) = O\left(1/|n|^\alpha\right)$.

2. 16. ვთქვათ f აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციაა. დაამტკიცეთ, რომ

$$c_n(f) = o\left(1/|n|\right).$$

2.17. ვთქვათ $f \in C^{(k)}(T), k \ge 1$. დაამტკიცეთ, რომ $c_n(f) = o\left(1/|n|^k\right)$.

3. ფურიეს მწკრივების შეჯამებადობა

განმარტება. ვთქვათ მოცემულია ფუნქციათა მიმდევრობა $\{k_n\}$ $L_1(T)$-ში. ვიტყვით, რომ მოცემული მიმდევრობა არის შეჯამებადობის გულის მიმდევრობა $L_1(T)$-ში, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\frac{1}{\pi}\int_T k_n(t)dt = 1 \qquad \text{(s1)}$$

$$\sup_n \frac{1}{\pi}\int_T \left|k_n(t)\right|dt < \infty \qquad \text{(s2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\{\delta<|t|<\pi\}} \left|k_n(t)\right|dt = 0, \text{ ნებისმიერი } \delta \in (0,\pi) \qquad \text{(s3)}$$

ხშირ შემთხვევებში, $\{k_n\}$ მიმდევრობა დამატებით აკმაყოფილებს უფრო ძლიერ პირობას

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\{\delta<|t|<\pi\}}\left|k_n(t)\right|dt = 0, \text{ ნებისმიერი } \delta \in (0,\pi) \qquad \text{(s4)}$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა (ნორმით შეჯამებადობა). ვთქვათ $\{k_n\}$ არის შეჯამებადობის გული და $f \in L_p(T), 1 \le p \le \infty$, მაშინ $f * 2k_n \to f$ L_p-ს ნორმით, როცა $n \to \infty$.

დამტკიცება. ვთქვათ $\varepsilon > 0$. $f_\tau(t) := f(t-\tau)$ ოპერატორის L_p სივრცეში უწყვეტობიდან და $(s2)$ პირობის ძალით არსებობს $0 < \delta < \pi$ ისეთი, რომ

$$\max_{|\tau|\le\delta} \| f_\tau - f \|_p \frac{1}{\pi} \sup_n \|k_n\|_1 < \varepsilon .$$

მაშინ მინკოვსკის განზოგადოებული უტოლობისა და $(s3)$ პირობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\|(f*2k_n) - f\|_p$$

$$= \left\| \frac{1}{\pi} \int_T k_n(\tau) \left[f_\tau(t) - f(t) \right] d\tau \right\|_p$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int_T |k_n(\tau)| \| f_\tau - f \|_p \, d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\{\delta<|t|<\pi\}} \right) |k_n(\tau)| \| f_\tau - f \|_p \, d\tau$$

$$\le \max_{|\tau|\le\delta} \| f_\tau - f \|_p \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |k_n(\tau)| d\tau$$

$$+ \max_{|\tau|\le\pi} \| f_\tau - f \|_p \frac{1}{\pi} \int_{\{\delta<|t|<\pi\}} |k_n(\tau)| d\tau$$

$$< \varepsilon + \varepsilon .$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა (წერტილოვანი შეჯამებადობა). ვთქვათ $\{k_n\}$ არის შეჯამებადობის გული და $t_0 \in T$. დაუშვათ, რომ $\{k_n\}$ დამატებით აკმაყოფილებს $(s4)$ პირობას ან $f \in L_\infty$, მაშინ

ა) თუ f ფუნქცია უწყვეტია t_0 წერტილში, მაშინ $(f*2k_n)(t_0) \to f(t_0), n \to \infty$;

ბ) თუ დამატებით შეჯამებადობის გული ლუწია და t_0 წერტილში არსებობს ზღვარი

$$L := \lim_{h \to 0+} \frac{f(t_0+h) + f(t_0-h)}{2}$$

მაშინ

$$(f*2k_n)(t_0) \to L, n \to \infty .$$

დამტკიცება. ა) ვთქვათ $\varepsilon > 0$ და ავირჩიოთ $0 < \delta < \pi$ ისეთი, რომ

$$\sup_n \|k_n\|_1 \max_{|\tau|\le\delta} \left| f(t_0-\tau) - f(t_0) \right| < \varepsilon .$$

მაშინ, როცა $n \to \infty$ გვაქვს

$$(f*2k_n)(t_0) - f(t_0)$$

$$=\Bigg|\ \frac{1}{\pi}\int\limits_{\{|\tau|<\delta\}} k_n(\tau)\left[f(t_0-\tau)-f(t_0)\right]d\tau$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\{\delta<|\tau|<\pi\}} k_n(\tau)f(t_0)d\tau+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\{\delta<|\tau|<\pi\}} k_n(\tau)f(t_0-\tau)d\tau\Bigg|$$

$$\le\begin{cases}\varepsilon+o(1)+o(1)\|f\|_1\\ \varepsilon+o(1)+o(1)\|f\|_\infty\end{cases}.$$

რაც ამტკიცებს თეორემის ა) პუნქტის სამართლიანობას.

ბ) რადგანაც გული ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ გვაქვს

$$(\mathrm{f}*2k_n)(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_T f(t_0-\tau)k_n(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_T \frac{f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)}{2}k_n(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{(0,\pi)} \left(f(t_0-\tau)+f(t_0+\tau)\right)k_n(\tau)d\tau$$

მაშასადამე,

$$(f*2k_n)(t_0)-L$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{(0,\pi)} \left(f(t_0-\tau)-f(t_0-0)\right)k_n(\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{(0,\pi)} \left(f(t_0+\tau)-f(t_0+0)\right)k_n(\tau)d\tau.$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემის ა) პუნქტში მოყვანილ მსჯელობას მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

$f\in L_1(T)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივების ფეიერის საშუალოები (ან $(C,1)$საშუალოები) განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\sigma_n(f,x):=\frac{S_0(f,x)+\cdots+S_n(f,x)}{n+1},n\ge 0.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sigma_n(f,x)=\sum_{|j|\le n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)c_j(f)e^{ijx}.$$

რადგანაც

$$S_n(f)=f*2D_n$$

მივიღებთ

$$\sigma_n(f,x):=\frac{f*2D_0(x)+\cdots+f*2D_n(x)}{n+1}=\frac{f*\left(2\sum_{j=0}^{n}D_j\right)(x)}{n+1}=f*2F_n$$

სადაც

$$F_n(t) := \frac{\sum_{j=0}^{n} D_j(t)}{n+1}.$$

$F_n(t)$ ფუნქციას უწოდებენ ფეიერის გულს. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ფეიერის გულის შესწავლა.

რადგანაც

$$D_j(t) = \frac{\sin((j+1/2)t)}{2\sin t/2}$$

მივიღებთ

$$F_n(t) := \frac{1}{(n+1)} \sum_{j=0}^{n} \frac{\sin((j+1/2)t)}{2\sin t/2}$$
$$= \frac{1}{2(n+1)\sin t/2} \operatorname{Im}\left(\sum_{j=0}^{n} e^{i(j+1/2)t}\right).$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{j=0}^{n} e^{i(j+1/2)t}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{i(n+3/2)t} - e^{it/2}}{e^{it}-1}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{it/2}\left(\frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}}\right)\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(e^{i(n+1)t/2}\left(\frac{e^{-i(n+1)t/2} - e^{i(n+1)t/2}}{e^{-it/2} - e^{it/2}}\right)\right) = \frac{\sin^2((n+1)t/2)}{\sin(t/2)},$$

მაშასადამე

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2.$$

რადგანაც

$$|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|, |x| \leq \frac{\pi}{2}$$

მივიღებთ

$$F_n(t) \leq \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\pi}{t}\right)^2,$$

მეორეს მხრივ

$$F_n(t) \leq \frac{\sum_{j=0}^{n} |D_j(t)|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} (j+1/2) = \frac{n+1}{2},$$

ადვილი დასანახია, რომ $\{F_n\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა აკმაყოფილებს $(s1)-(s4)$ პირობებს.

მაშასადამე სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ $f \in L_1(T), f \sim \sum c_j(f)e^{ijx}$. თუ ზღვრები $f(x_0 \pm 0)$ არსებობენ მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$\sum c_j(f)e^{ijx_0}=\left(\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right)(C,1).$$

ამასთან, თუ ფუნქცია უწყვეტია T -ზე მაშინ ადგილი აქვს თანაბრად კრებადობას.

თეორემა. ვთქვათ $f\in L_p(T),1\le p<\infty$. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sigma_n(f)-f\right\|_p=0.$$

შედეგი. ვთქვათ $f\in L_1(T)$. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ არსებობს ტრიგონომეტრიული პოლინომი P, რომლისთვისაც

$$\|f-p\|_1<\varepsilon.$$

შედეგი (ვეიერშტრასი). ვთქვათ $f\in C(T)$. მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ არსებობს ტრიგონომეტრიული პოლინომი P, რომლისთვისაც

$$\|f-p\|_C<\varepsilon.$$

შედეგი. ვთქვათ $f\in L_1(T), f\sim\sum c_j(f)e^{ijx}$. თუ $c_j(f)=0,\forall j$, მაშინ $f=0$ თ.ყ.

ვთქვათ $f\in L_1(T), f\sim\sum c_j(f)e^{ijx}$. მაშინ მოცემული მწკრივის აბელის საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად

$$f_r(x):=\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|}c_j(f)e^{ijx}, r\in(0,1).$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|}c_j(f)e^{ijx}=\frac{1}{2\pi}\int_T f(t)\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|}e^{ij(x-t)}dt=(f*P_r)(x)$$

სადაც P_r უწოდებენ პუასონის გულს და

$$\begin{aligned}P_r(t)&:=\sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|}e^{ijt}=\sum_{j=-\infty}^{-1} r^{|j|}e^{ijt}+\sum_{j=0}^{\infty} r^{|j|}e^{ijt}\\&=\sum_{j=1}^{\infty} r^{j}e^{-ijt}+\sum_{j=0}^{\infty} r^{j}e^{ijt}\\&=\frac{re^{-it}}{1-re^{-it}}+\frac{1}{1-re^{it}}\\&=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}.\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\frac{1}{2\pi}\int_T P_r(t)dt=1$$

ე.ი. პუასონის გულისთვის $(s1)$ პირობა შესრულებულია.

სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\frac{1-r}{1+r} \le P_r(t) \le \frac{1+r}{1-r}.$$

ვთქვათ $\delta = 1-r$ და $r \in (0, 1/2)$. მაშინ გვაქვს

$$P_r(t) \le \frac{1+r}{1-r} \le \frac{A\delta}{\delta^2 + t^2}.$$

ეხლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\delta = 1-r$ და $r \in (1/2, 1)$.

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \frac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(t/2)} < \frac{2\delta}{\delta^2 + 4r(\pi^{-1}t)^2}.$$

მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ რომ სამართლიანია შემდეგი შეფასებები

$$P_r(t) \le \frac{2}{\delta}, \quad p_r(t) \le \frac{A\delta}{t^2} \quad (0 < |t| \le \pi, 0 \le r < 1).$$

ადვილი დასანახია, რომ პუასონის გული აკმაყოფილებს (s1)-(s4) პირობებს და მაშასადამე სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ $f \in L_1(T),\, f \sim \sum c_j(f)e^{ijx}$. თუ ზღვრები $f(x_0 \pm 0)$ არსებობენ მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$\sum c_j(f)e^{ijx_0} = \left(\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\right)(A).$$

ამასთან, თუ ფუნქცია უწყვეტია T -ზე მაშინ ადგილი აქვს თანაბრად კრებადობას.

თეორემა. ვთქვათ $f \in L_p(T), 1 \le p < \infty$. მაშინ

$$\lim_{r \to 1-} \| f_r - f \|_p = 0.$$

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

3.1. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი კრებადი მიმდევრობა $(C,1)$ აზრითაც კრებადია.

3.2 მოიყვანეთ მაგალითი არაკრებადი მიმდევრობისა, რომელიც $(C,1)$ აზრით კრებადია.

3.2. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\sum c_j = s(C,1)$ კრებადია და $c_j = o\left(\frac{1}{j}\right)$ მაშინ $\sum c_j = s.$

3.3. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობები

$$\underline{\lim} S_n \le \underline{\lim} \sigma_n \le \overline{\lim} \sigma_n \le \overline{\lim} S_n.$$

3.4. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\lim S_n = +\infty$ მაშინ $\lim \sigma_n = +\infty$.

3.5. დაამტკიცეთ, რომ თუ დადებითი მწკრივი $(C,1)$ კრებადია $s(0 \le s \le \infty)$ რიცხვისკენ, მაშინ მოცემული მწკრივი კრებადია s -კენ.

3.6. ვთქვათ $\sum c_j = s(C,1)$. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{j\to\infty}\frac{c_j}{j}=\lim_{j\to\infty}\frac{s_j}{j}=0.$$

3.7. დაამტკიცეთ, რომ

$$\sum_{j=0}^{\infty}\cos(jt)=\frac{1}{2}(C,1).$$

3.8. დაამტკიცეთ, რომ

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sin(jt)=\frac{\cos(t/2)}{2\sin(t/2)}(C,1).$$

3.9. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$s_m=\frac{m\sigma_m-n\sigma_n}{m-n}-\frac{\sum_{j=n+2}^{m}(n-j+1)c_j}{m-n}.$$

3.10. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\sum c_j = s(C,1)$ და $c_j = O\left(\frac{1}{j}\right)$, მაშინ $\sum c_j = s.$

3.11. ვთქვათ $f\in L_1(T), f\sim\sum c_j(f)e^{ijx}.$ დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$\sum_j c_j(f)\int_T e^{ijt}dt=\int_T f(t)dt \ \ (C,1).$$

4. ორობითი ჯგუფის ცნება

N - ით აღვნიშნოთ არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე
P - თი აღვნიშნოთ დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე
R - ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე
Q - თი აღვნიშნოთ ორობით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, ე. ი. Q -ს ყოველ ელემენტს აქვს შემდეგი სახე $p/2^n, 0\le p<2^n$.

ვთქვათ G აბელის ჯგუფია, ე. ი. G -ზე განსაზღრულია შეკრების ოპერაცია + ისე რომ G -ს ნებისმიერი ელემენტებისათვის შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $x+y=y+x \quad (x,y\in G)$
2) $x+(y+z)=(x+y)+z \quad (x,y,z\in G)$
3) არსებობს ელემენტი $0\in G$ ისეთი, რომ $x+0=x \quad (x\in G)$

4) ნებისმიერი $x \in G$-თვის არსებობს ელემენტი $-x$, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ $x+(-x)=x-x=0$.

განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლე

$$G:=\{x:=(x_0,...,x_n,....):x_i=0\vee 1, i=0,1,2,,,,\}.$$

G სიმრავლეზე შემოვიღოთ შეკრების ოპერაცია შემდეგნაირად: ნებისმიერი $x=(x_0,...,x_n,....)$ და $y=(y_0,...,y_n,....)$ განსაზღროთ

$$x+y:=(|x_0-y_0|,...,|x_n-y_n|,...).$$

G-ს ნულოვანი ელემენტი არის $0:=(0,...,0,...)$, ხოლო $x=(x_0,...,x_n,....)$ ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი არის თავის თავი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ G სიმრავლე ზემოთ შემოტანილი ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს აბელის ჯგუფს. ამ ჯგუფს ორობით ან უოლშის ჯგუფს.

ვთქვათ

$$G_0:=\{x\in G: x_n\to 0, n\to\infty\}.$$

ადვილი დასანახია, რომ G_0 თვლადი სიმრავლე.

შემოვიღოთ G ჯგუფზე მეტრიკა. ნებისმიერი $x\in G$ განსაზღვროთ

$$|x|:=\sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-(k+1)},$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$|x|\geq 0 \text{ და } |x|=0 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } x=0$$

და

$$||x|-|y||\leq|x+y|\leq|x|+|y|.$$

თუ შემოვიღებთ შემდეგ ფუნქციას $d(x,y)=|x+y|$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ აკმაყოფილებს მეტრიკული სივრცის სამივე აქსიომას.

ვთქვათ $x=(x_0,...,x_n,...)$ და $y=(y_0,...,y_n,...)$. ვიტყვით, რომ $x<y$ თუ არსებობს $n\in N$ ისეთი, რომ $x_j=y_j$, $j=0,1,...,n-1$ და $x_n<y_n$. ვიტყვით, რომ $x\leq y$ თუ $x<y$ ან $x=y$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $x\leq y$, მაშინ $|x|\leq|y|$ და $x<y$ საზოგადოთ არ გამომდინარეობს, რომ $|x|<|y|$. მართლაც, $x=(x_0,...,x_{m-1},x_m=1,0,...)\in G$ განსაზღროთ $x^*:=(x_0,...,x_{m-1},0,1,1,...)$. მაშინ მივიღებთ, რომ $x^*<x$, მეორეს მხრივ $|x|=|x^*|$. ასევე ადვილი შესამოწმებელია, რომ იმ ფაცტიდან, რომ $|x|=|y|$ გამომდინარეობს, რომ $x=y$ ან თუ $x\in G_0$, მაშინ $x=y^*$.

ვთქვათ $I_0(x):=G, x\in G$, ხოლო ნებისმიერი $x\in G$ და $n\in P$ განსვზღროთ

$$I_n(x) := \{y \in G : y_i = x_i, 0 \le i < n\}.$$

$I_n(x)$ -ს უწოდებენ G ჯგუფის n -ური რანგის ორობით ინტერვალს, რომელიც შეიცავს x -ს.

მტკიცდება, რომ G ჯგუფზე არსობს ზომა μ, რომელსაც ჰაარის ზომას უწოდებენ.

მაშინ $I_n(x)$ -ის ორობითი ინტერვალისათვის სამართლიანია შემდეგი:

$$\mu(I_n(x)) = 2^{-n}$$

და

$$\mu(I_n(x) + y) = \mu(I_n(x)).$$

განმარტება. ვთქვათ f უწყვეტი ფუნქციაა განსაზღრული G ჯგუფზე. ვიტყვით, რომ f არის ჯგუფის მახასიათებელი თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$f(x+y) = f(x) f(y)$$

და

$$|f(x)| = 1.$$

G ჯგუფზე განსაზღრული ყველა მახასიათებელთა სიმრავლე აღვნიშნოთ $\hat{G}$ -თი.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $f \in \hat{G}$, მაშინ

$$f(0) = 1$$

და

$$f^2(x) = f(x+x) = f(0) = 1 \quad (x \in G).$$

მაშასადამე თუ $f \in \hat{G}$, მაშინ ის იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას 1 ან -1.

e_i -თი აღვნიშნოთ G ჯგუფის ის ელემენტი, რომლის i -ურ ადგილზე არის ერთიანი, ხოლო დანარჩენ ადგილებზე კი-0, მაშასადამე

$$e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...).$$

ადვილი დასანახია, რომ ნებისმიერი $x \in G$ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e_i.$$

ამოცანა. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f, g \in \hat{G}$ და $f(e_i) = g(e_i), i = 0, 1, ...,$ მაშინ $f = g$.

ცნობილია, რომ ნებისმიერი ნატურალური n -თვის არსებობს ერთადერთი ორობითი წარმოდგენა

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i, \quad n_i = 0 \vee 1.$$

შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციის ცნება

$$\rho_n(x) := (-1)^{x_n}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $\rho_n \in \hat{G}$.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა.

$$\hat{G}=\{\psi_n(x):=\prod_{k=0}^{\infty}\rho_k^{n_k}(x):n\in P\}.$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ $\psi_n\in\hat{G}$. დავამტკიცოთ პირიქით. ვთქვათ $f\in\hat{G}$. რადგანაც f არის უწყვეტი ფუნქცია G-ზე და $e_i\to 0$ როცა $i\to\infty$ მივიღებთ, რომ

$$f(e_i)\to f(0)=1.$$

მეორეს მხრივ, f იღებს მნიშვნოლებებს $+1$ და -1. მაშასადამე არსებობს $M\in N$ ისეთი, რომ $f(e_i)=1$ როცა $i>M$ და არსებობს მიმდევრობა $n_i=0\vee 1$ ისეთი, რომ $n_i=0, i>M$ და $f(e_i)=(-1)^{n_i}, i\in N$. განსაზღროთ

$$n:=\sum_{i=0}^{\infty} n_i 2^i.$$

განმარტების ძალით გვაქვს

$$f(e_i)=(-1)^{n_i}$$

მეორეს მხრივ

$$\psi_n(e_i)=(-1)^{n_i}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$f(e_i)=\psi_n(e_i) \text{ და } f(x)=\psi_n(x), \forall x\in G.$$

ნებისმიერი ორი $n,m\in N$ განმარტოთ

$$n\oplus m:=\sum_{k=0}^{\infty}|n_k-m_k|2^k.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\psi_n(x)\psi_m(x)=\psi_{n\oplus m}(x).$$

დავამტკიცოთ, რომ ერთობლიობა $\hat{G}$ არის ორთონორმირებული სისტემა. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ $n,m\in N$, მაშინ

$$\int_G \psi_n(x)\psi_m(x)\,d\mu(x)=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}.$$

დამტკიცება. რადგანაც

$$\psi_n(x)\psi_m(x)=\psi_{n\oplus m}(x)$$

საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$\int_G f(x)\,d\mu(x)=0$$

როცა $f \in \hat{G} \setminus \{\psi_0\}$.

მართლაც დაფიქსირებული f -თვის შევარჩიოთ $y \in G$ ისეთი, რომ $f(y) = -1$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(x+y)d\mu(x) = f(y)\int_G f(x)d\mu(x) = -\int_G f(x)d\mu(x)$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემის დამტკიცება.

სამართლიანია შემდეგი

ლემა (პელი). ვთქვათ

$$D_{2^n}(x) := \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(x).$$

მაშინ

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, x \in I_n(0) \\ 0, xG \setminus I_n(0) \end{cases}$$

სადაც $n \in N$.

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ $\psi_k(x) = 1$ როცა $x \in I_n(0)$ და $k < 2^n$ და მაშასადამე

$$D_{2^n}(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 1 = 2^n, x \in I_n(0).$$

მაშინ გვაქვს

$$\int_{I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = 2^{2n}\mu(I_n(0)) = 2^n,$$

მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $\{\psi_k\}$ ონს მივიღებთ

$$\int_G \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_G \psi_i(x)\psi_j(x)d\mu(x) = 2^n.$$

მაშადამე

$$\int_G \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = \int_{I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) + \int_{G\setminus I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = 2^n$$

და

$$\int_{G\setminus I_n(0)} \left|D_{2^n}(x)\right|^2 d\mu(x) = 0$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $D_{2^n}(x) = 0$ როცა $x \in G \setminus I_n(0)$.
ლემა დამტკიცებულია.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

4.1 გამოთვალეთ:
ა) $x+y, |x|, |x+y|$, $x = (0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,...)$, $y = (0,1,0,0,0,0,1,1,1,....)$;
ბ) $x+y, |y|, |x+y|$, $x = (0,1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,...)$, $y = (0,1,0,0,0,0,1,0,1,0,....)$;
გ) $7 \oplus 11$;
დ) $23 \oplus 42$;

4.2. იპოვეთ:
ა) $\psi_8(x)\psi_{17}(x)$;
ბ) $\psi_{21}(x)\psi_7(x)$;
გ) $\psi_{32}(x)\psi_5(x)\psi_{15}(x)$;
დ) $\psi_6(x)\psi_3(x)\psi_{13}(x)$;

4.3. გამოთვალეთ:
ა) $\psi_9(x), I_4(0,1,1,0)$-ზე;
ბ) $\psi_{14}(x), I_4(1,1,0,1)$-ზე;
გ) $\psi_{22}(x), I_5(0,0,1,1,0)$-ზე;
დ) $\psi_{45}(x), I_6(0,0,1,0,1,1)$-ზე;

4.4. ვთქვათ $x = (x_n, n \in N) \in G$,

$$x_n^* := (x_0, ..., x_{n-1}, 1-x_n, 1-x_{n+1}, ...)$$

და

$$x_n^\circ := (x_0, ..., x_{n-2}, 1-x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, ...).$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$\left|x+x_n^*\right|=2^{-n},\left|x+x_n^\circ\right|=2^{-n}, x_n^* \in I_n\left(x\right), x_n^\circ \notin I_n\left(x\right)$$

და

$$I_n\left(x\right)=\left\{y\in G:\left|x+y\right|<2^{-n}\right\}\bigcup\left\{x_n^*\right\}.$$

4.5. ვთქვათ $x, y \in G, x<y$. აღვნიშნოთ

$$\left(x,y\right):=\left\{z\in G: x<z<y\right\};$$

$$[x,y):=\left\{z\in G: x\le z<y\right\};$$

$$(x,y]:=\left\{z\in G: x<z\le y\right\}$$

$$[x,y]:=\left\{z\in G: x\le z\le y\right\}.$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$\left(x,x^*\right)=\varnothing, x\in G_0\setminus\{0\}$$

და

$$I_n\left(x\right)=\left[x,y\right],$$

სადაც

$$x=\left(x_0,...,x_{n-1},0,0,...\right), y=\left(x_0,...,x_{n-1},1,1,...\right).$$

5. მოდიფიცირებული ინტერვალი და მისი კავშირი ორობით ჯგუფთან

დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ა) $\forall x\in[0,1)$ შეიძლება ასე ჩაიწეროს

$$x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}},\ a_i=0\vee 1;\qquad (1)$$

ბ) (1) წარმოდგენა ერთადერთია თუ a_i მნიშვნელობებს შორის ნულების უსასრულო რაოდენობაა.

დამტკიცება. მოვახდინოთ [0,1) ინტერვალის დანაწილება ორ ტოლ [0,1/2) და [1/2,1) ინტერვალებად. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\left[\frac{a_0}{2},\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

სადაც $a_0=0$ როცა $x\in[0,1/2)$ და $a_0=1$ როცა $x\in[1/2,1)$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$x\in\left[\frac{a_0}{2},\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\right).$$

მოვახდინოთ $\left[\frac{a_0}{2},\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2}\right)$ ინტერვალის დანაწილება ორ ტოლ ნაწილებად. მაშინ ეს ინტერვალები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$\left[\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2^2},\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right),\ a_1=0\vee 1.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$x\in\left[\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2^2},\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right),$$

სადაც $a_1=0$ თუ $x\in\left[\frac{a_0}{2},\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2^2}\right)$ და $a_1=0$ თუ $x\in\left[\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2^2},\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)$.

თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს მივიღებთ, რომ

$$x\in\left[\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2^2}+\cdots+\frac{a_m}{2^{m+1}},\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2^2}+\cdots+\frac{a_m}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+1}}\right).$$

ვთქვათ

$$S_m:=\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2^2}+\cdots+\frac{a_m}{2^{m+1}}.$$

სუპრემუმის განმარტების ძალით

$$\sup_m S_m=x$$

რადგანაც რადგანაც $0\le S_m\le S_{m+1}\le 1$ ანალიზის ცნობილი თეორემის თანახმად

$$\sup_m S_m=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}},$$

მაშასადამე

$$x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}.$$

ბ) ეხლა დავამტკიცოთ, რომ (1) წარმოდგენა ერთადერთია თუ a_i მნიშვნელობებს შორის ნულების უსასრულო რაოდენობაა, მართლაც დაუშვათ წინაამღდეგი, ვთქვათ თეორემის პირობებში არსებობს ორნაირი წარმოდგენა, მაშინ არსებობს i_0 ისეთი, რომ

1) $a_{i_0}=0$ პირველ წარმოდგენაში

და

2) $a_{i_0}=1$ მეორე წარმოდგენაში.

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

1) $x=\frac{a_0}{2}+\cdots+\frac{a_{i_0-1}}{2^{i_0}}+\frac{a_{i_0+1}}{2^{i_0+2}}+\cdots<\frac{a_0}{2}+\cdots+\frac{a_{i_0-1}}{2^{i_0}}+\sum_{i=i_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}}<\frac{a_0}{2}+\cdots+\frac{a_{i_0-1}}{2^{i_0}}+\frac{1}{2^{i_0+1}}$.

2) $x=\frac{a_0}{2}+\cdots+\frac{a_{i_0-1}}{2^{i_0}}+\frac{1}{2^{i_0+1}}+\frac{a_{i_0+1}}{2^{i_0+2}}+\cdots\geq\frac{a_0}{2}+\cdots+\frac{a_{i_0-1}}{2^{i_0}}+\frac{1}{2^{i_0+1}}$.

მიღებული წინაამღდეგობა ამტკიცებს თეორემის ბ) პუნქტის სამართლიანობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაში როცა x რიცხვი არის ორობით რაციონალური ე. ი. $p/2^m$ სახის, მაშინ არსებობს ორნაირი (1) სახის წარმოდგენა.

ვთქვათ

$$G:=\{x:x=(x_0,x_1,...,x_n,...),x_j=0\vee 1,\ j=0,1,2...\}.$$

განვიხილოთ ასახვა $|\cdot|:G\to[0,1)$ შემდეგი ფორმულით

$$|x|:=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{2^{j+1}}.$$

მაშინ ზემოთქმულიდან გამომდინარე ეს ასახვა არ არის ბიექცია. რადგანაც ყოველ ორობით რაციონალურ რიცხვს ეთანადება ორნაირი დაშლა (ორობითი წარმოდგენა, რომელიც შეიცავს ნულების უსასრულო რაოდენობას და წარმოდგენა, რომელიც შეიცავს ნულების სასრულ რაოდენობას). ვთქვათ ორობით რაციონალურ რიცხვს შეუსაბამოთ ის დაშლა, რომელიც შეიცავს ნულების უსასრულო რაოდენობას და G_1-ით აღვნიშნოთ G სიმრავლის ის ქვესიმრავლე, რომელიც შეიცავს ნულების სასრულ რაოდენობას. ადვილი დასანახია, რომ G_1 თვლადი სიმრავლეა. მაშინ $|\cdot|$ ასახვა [0,1) ინტერვალიდან $G':=G\setminus G_1$ სიმრავლეზე იქნება ბიექცია.

განვიხილოთ [0,1) ინტერვალის მოდიფიცირებული ინტერვალი [0,1)*. მოდიფიცირებული ინტერვალი [0,1)* იმით განსხვადება ჩვეულებრივი ინტერვალისგან, რომ ყოველი ორობით რაციონალური $p/2^n$ რიცხვების გაორება ხდება, კერძოდ $p/2^n$ სახის რიცხვების ნაცვლად ვიხილავთ $\left(p/2^n\right)^-$ და $\left(p/2^n\right)^+$ სახის რიცხვებს, სადაც $\left(p/2^n\right)^-$ რიცხვს ეთანადება ის დაშლა,

რომელიც შეიცავს ნულების სასრულ რაოდენობას, ხოლო $\left(p/2^n\right)^+$ რიცხვს ეთანადება ის დაშლა, რომელიც შეიცავს ერთების სასრულ რაოდენობას.

დასკვნა: G' და [0,1) ინტერვალს შორის $|\cdot|$ არის ურთიერთცალსახა ასახვა, ხოლო იგივე $|\cdot|$ ასახვა არის ურთიერთცალსახა G და მოდიფიცირებულ [0,1)* ინტერვალს შორის.

$|\cdot|$ ასახვის შექცეული ასახვა აღვნიშნოთ ρ -თი, ე. ი. $\forall x \in G$

$$\rho(x) = (x_0, \ldots, x_n, \ldots)$$

სადაც $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ მოცემულია (1) ფორმულით.

დავადგინოთ $I_n(x)$ სიმრავლის ანასახი $|\cdot|$-ით. შევახსენებთ, რომ

$$I_n(x) = \{y \in G : y_i = x_i, 0 \le i < n\}.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $I_n(x)$ ანასახი იქნება

$$\left\{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{y_j}{2^{j+1}} : y_k = 0 \vee 1, k \ge n\right\}.$$

რადგანაც

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{y_j}{2^{j+1}} < \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \frac{1}{2^n}, y \in G'. \qquad (5.3)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{p}{2^n} := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}}$$

მაშინ (5.3)-დან მივიღებთ

$$\frac{p}{2^n} \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{y_j}{2^{j+1}} < \frac{p+1}{2^n}.$$

მაშასადამე

$I_n(x)$ სიმრავლის ანასახი $|\cdot|$-ით არის

$$\left[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right)$$

სადაც

$$p := \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^{n-j-1}.$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ ρ არის ურთიერთცალსახა ასახვა [0,1) ინტერვალიდან G' სიმრავლეზე და ρ ასახვის შექცეული ასახვა არის $|\cdot|$. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს, რომ მოცემული ასახვების გამოყენებით G'-ზე განსაზღრული ოპერაცია გადატანილი იქნეს [0,1) ინტერვალზე. ვთქვათ $x, y \in [0,1)$ მაშინ

$$x \dot{+} y := |\rho(x) + \rho(y)|$$

რომელიც ექვივალენტურია

$$x \dot{+} y = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k - y_k| 2^{-k-1}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $d(x, y) = x \dot{+} y$ არის მეტრიკა და ამასთან $x \dot{+} x = 0$.

ისმის კითხვა: $\left([0,1), \dot{+}\right)$ არის თუ არა ჯგუფი. სამწუხაროდ ამ კითხვაზე პასუხი უარყოფითია. მოცემული ოპერაციის მიმართ ასოციურობის პირობაა დარღვეული, მართლაც დავამტკიცოთ, რომ არსებობს $x, y, z \in [0,1)$ ისეთი, რომ პირობა

$$\left(x \dot{+} y\right) \dot{+} z = x \dot{+} \left(y \dot{+} z\right)$$

არ სრულდება. მართლაც, ვთქვათ $x = 1/6, z = y = 1/12$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\rho(x) = (0, 0, 1, 0, 1, ...)$$

და

$$\rho(y) = (0, 0, 0, 1, 0, 1, ...)$$

მაშასადამე

$$x \dot{+} y = |\rho(x) + \rho(y)| = |(0, 0, 1, 1, ...)| = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned}\left(x \dot{+} y\right) \dot{+} z &= \frac{1}{4} \dot{+} \frac{1}{12} = \left|\rho\left(\frac{1}{4}\right) + \rho\left(\frac{1}{12}\right)\right| \\ &= |(0, 1, 0, 0, ...) + (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, ...)| \\ &= |(0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)| \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

მეორეს მხრივ

$$x \dot{+} \left(y \dot{+} z\right) = x = \frac{1}{6}.$$

განმარტება. ვთქვათ $f:G\to R$. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია უწყვეტია $x_0\in G$ თუ

$$\lim_{h\to 0} f\left(x_0+h\right)=f\left(x_0\right).$$

განმარტება. ვთქვათ $f:[0,1)\to R$. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია w-უწყვეტია $x_0\in[0,1)$ თუ

$$\lim_{h\to 0} f\left(x_0\overset{\bullet}{+}h\right)=f\left(x_0\right).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ფუნქცია უწყვეტია კლასიკური აზრით, მაშინ ის w-უწყვეტია. პირით საზოგადოთ სწორი არ არის, w-უწყვეტი ფუნქცია ყოველთვის არ არის კლასიკური აზრით უწყვეტი.

მაგალითი. განვიხილოთ შემდეგი ფუნქცია

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, 0\le x<1/2\\ 1, 1/2\le x<1\end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ მოცემული წყვეტილია კლასიკური აზრით $x=1/2$ წერტილში, მეორეს მხრივ მოცემული ფუნქცია w-უწყვეტია $x=1/2$ წერტილში. მართლაც, როცა $h\to 0$, მაშინ $\frac{1}{2}\overset{\bullet}{+}h\in\left[\frac{1}{2},1\right)$ და $\frac{1}{2}\overset{\bullet}{+}h\notin\left[0,\frac{1}{2}\right)$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{h\to 0} f\left(\frac{1}{2}\overset{\bullet}{+}h\right)=1=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

საზოგადოთ, არსებობს ფუნქცია, რომელიც w-უწყვეტია [0,1]-ზე მაგრამ შემოსაზღრულიც არ არის.

მაგალითი.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1/2-x}, 0\le x<1/2\\ 1, 1/2\le x<1\end{cases}.$$

ანალოგიურად დავასკვნით, რომ მოცემული ფუნქცია w-უწყვეტია და ამასთან არაშემოსაზღრული ფუნქციაა.

საზოგადთ, იმ ფაქტიდან რომ ფუნქცია w-უწყვეტია [0,1]-ზე არ გამომდინარეობს, რომ მოცემული ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია. ამასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ შემდეგი ცნება.

განმარტება. $C_w([0,1))$-ით აღვნიშნოთ ყველა იმ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც თანაბრად უწყვეტია $\dot{+}$ ოპერაციის მიმართ. ანუ სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ ისეთი, რომ როცა $x\dot{+}y<\delta$ მაშინ $\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon$.

შენიშვნა. $C_w([0,1))$-ში შეიცავს ყველა იმ ფუნქციას რომელიც უწყვეტია ყველა ოროზით ირაციონალურ წერტილში, მარჯვნიდან უწყვეტია ოროზით რაციონალურ წერტილში და გააჩნია სასრული მარცხენა ზღვარი ყოველ ოროზით რაციონალურ წერტილში.

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ზემოთ მოყვანილი ასახვების მეშვეობით $\{\psi_n\}$ ონს გადატანილი იქნეს $\left([0,1),\dot{+}\right)$-ში.

ვთქვათ

$$r_n(x):=\rho_n(\rho(x)).$$

r_n ფუნქცია უწოდებენ რადემახარის ფუნქციას. ადვილი დასანახია, რომ

$$r_n(x)=(-1)^{x_n}=\begin{cases}1, x\in\left[\frac{2l}{2^{n+1}},\frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)\\ -1, x\in\left[\frac{2l+1}{2^{n+1}},\frac{2l+2}{2^{n+1}}\right)\end{cases}, l=0,1,...,2^n-1.$$

ასევე ადვილი დასანახია, რომ

$$\rho_n(x)=r_n(|x|), x\in G',$$

$$w_n(x)=\psi_n(\rho(x)),$$

$$\psi_n(x)=w_n(|x|), x\in G'.$$

$\psi_n(x)$ ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $\psi_n(x+y)=\psi_n(x)\psi_n(y)$.

დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$w_n\left(x\dot{+}y\right)=w_n(x)w_n(y)\quad\left(n\in N, x,y\in[0,1), x\dot{+}y\notin Q\right).$$

მართლაც, ადვილი დასანახია, რომ

$$r_m(x)r_m(y)=\rho_m(\rho(x))\rho_m(\rho(y))=\rho_m(\rho(x)+\rho(y))$$

მეორეს მხრივ

$$r_m\left(x\dot{+}y\right)=\rho_m\left(\rho\left|\rho(x)+\rho(y)\right|\right)$$

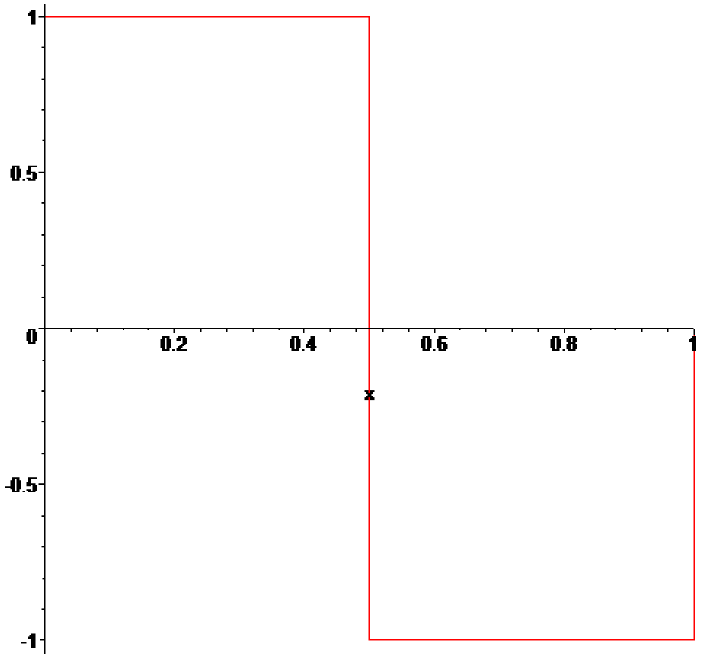
რადგანაც $\left|\rho(x)+\rho(y)\right|$ არის ოროზითი ირაციონალური, ამიტომ

$$\rho\left|\rho(x)+\rho(y)\right|=\rho(x)+\rho(y), x\dot{+}y\notin Q.$$

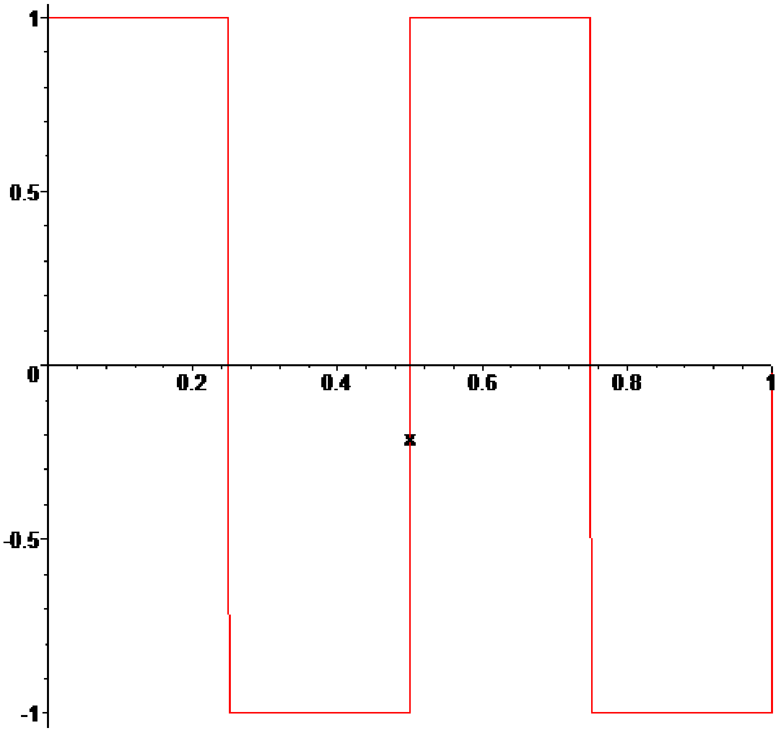
მაშასადამე მოცემული ფორმულა სამართლიანია რადემახერის ფუნქციებისათვის. ზოგად შემთხვევაში გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ყოველი უოლშის ფუნქცია წარმოადგენს რადემახერის ფუნქციათა სასრულ ნამრავლს.

პროგრამა Maple-ს მეშვეობით ავაგოთ რადემახერის ფუნქცია

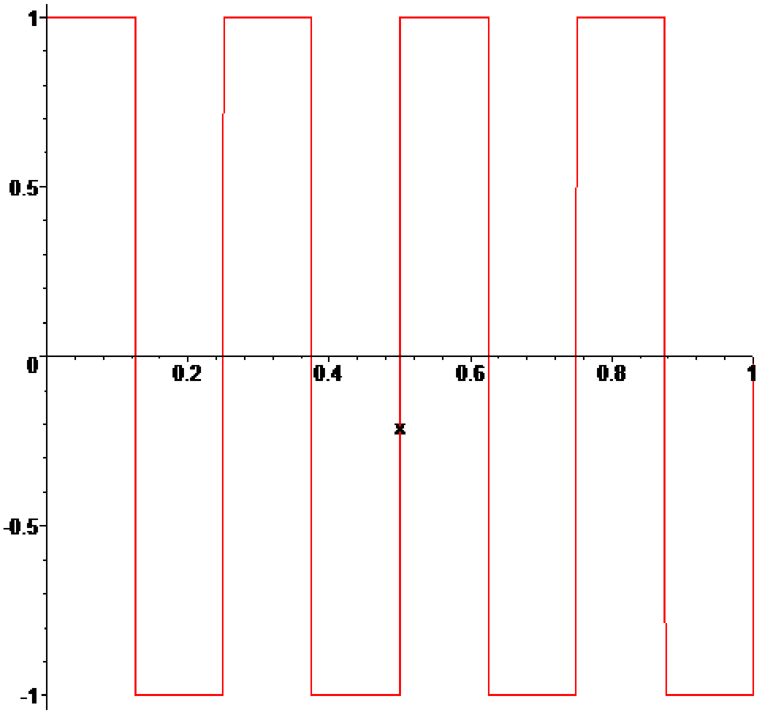
```
> r[1]:=x->piecewise(x<0,0,x<1/2,1,x<1,-1,0):
> plot(G(x,0),x=0..1);
```



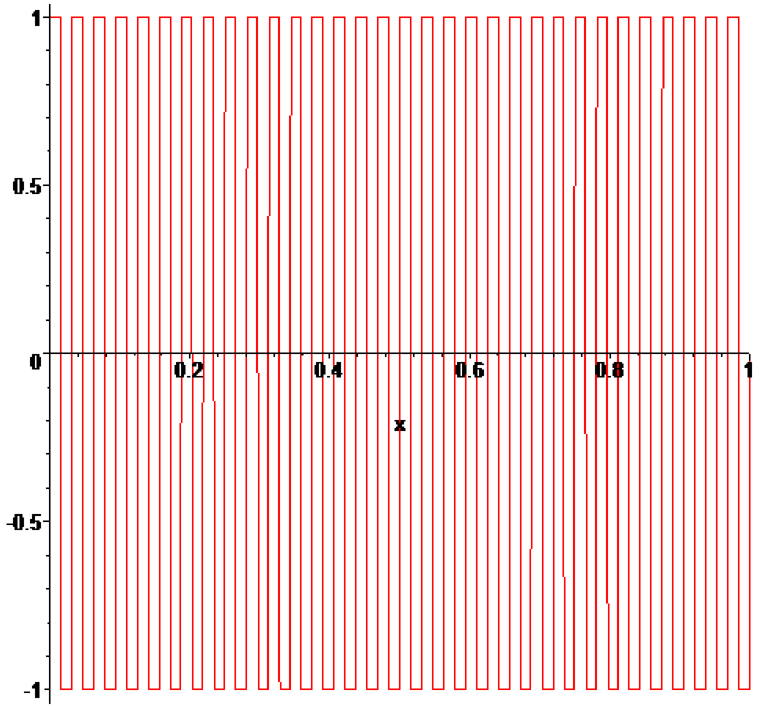

```
> plot(G(x,1),x=0..1);
```




```
> plot(G(x,2),x=0..1);
```




```
> plot(G(x,5),x=0..1);
```



ავაგოთ უოლშის ფუნქციები:

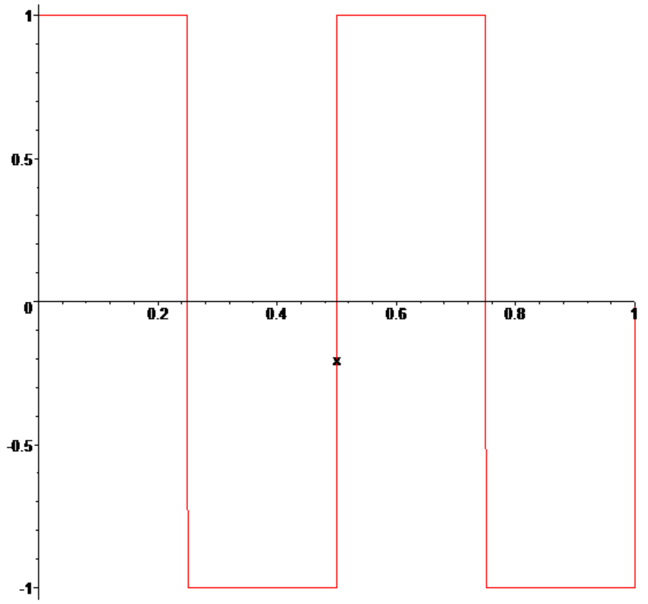
```
> r[1]:=x->piecewise(x<0,0,x<1/2,1,x<1,-1,0):
> G:=(x,n)->sum(r[1](2^n*x-k),k=0..2^n-1):
> W:=(n,m,l,s,r,q,v)-
>((G(x,0))^n)*((G(x,1))^m)*((G(x,2))^l)*((G(x,3))^s)*((G(x,
4))^r)*((G(x,5))^q)*((G(x,6))^v);
```

$$W := (n, m, l, s, r, q, v) \to G(x, 0)^n\, G(x, 1)^m\, G(x, 2)^l\, G(x, 3)^s\, G(x, 4)^r\, G(x, 5)^q\, G(x, 6)^v$$

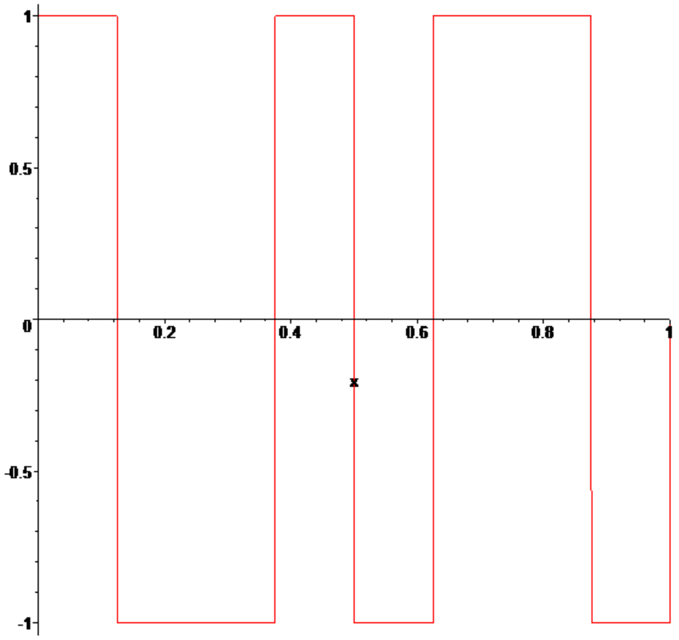
```
> w[0]:=1:
> w[1]:=W(1,0,0,0,0,0,0):
> w[2]:=W(0,1,0,0,0,0,0):
> w[3]:=W(1,1,0,0,0,0,0):
> w[4]:=W(0,0,1,0,0,0,0):
> w[5]:=W(1,0,1,0,0,0,0):
> w[6]:=W(0,1,1,0,0,0,0):
> w[7]:=W(1,1,1,0,0,0,0):
> w[8]:=W(0,0,0,1,0,0,0):
> w[9]:=W(1,0,0,1,0,0,0):
> w[10]:=W(0,1,0,1,0,0,0):
> w[11]:=W(1,1,0,1,0,0,0):
> w[12]:=W(0,0,1,1,0,0,0):
> w[13]:=W(1,0,1,1,0,0,0):
```

```
> w[14]:=W(0,1,1,1,0,0,0):
> w[15]:=W(1,1,1,1,0,0,0):
> w[16]:=W(0,0,0,0,1,0,0):
> w[17]:=W(1,0,0,0,1,0,0):
> w[18]:=W(0,1,0,0,1,0,0):
> w[19]:=W(1,1,0,0,1,0,0):
> w[20]:=W(0,0,1,0,1,0,0):
> w[21]:=W(1,0,1,0,1,0,0):
> w[22]:=W(0,1,1,0,1,0,0):
> w[23]:=W(1,1,1,0,1,0,0):
> w[24]:=W(0,0,0,1,1,0,0):
> w[25]:=W(1,0,0,1,1,0,0):
> w[26]:=W(0,1,0,1,1,0,0):
> w[27]:=W(1,1,0,1,1,0,0):
> w[28]:=W(0,0,1,1,1,0,0):
> w[29]:=W(1,0,1,1,1,0,0):
> w[30]:=W(0,1,1,1,1,0,0):
> w[31]:=W(1,1,1,1,1,0,0):
> w[32]:=W(0,0,0,0,0,1,0):
> w[33]:=W(1,0,0,0,0,1,0):
> w[34]:=W(0,1,0,0,0,1,0):
> w[35]:=W(1,1,0,0,0,1,0):
> w[36]:=W(0,0,1,0,0,1,0):
> w[37]:=W(1,0,1,0,0,1,0):
> w[38]:=W(0,1,1,0,0,1,0):
> w[39]:=W(1,1,1,0,0,1,0):
> w[40]:=W(0,0,0,1,0,1,0):
> w[41]:=W(1,0,0,1,0,1,0):
> w[42]:=W(0,1,0,1,0,1,0):
> w[43]:=W(1,1,0,1,0,1,0):
> w[44]:=W(0,0,1,1,0,1,0):
> w[45]:=W(1,0,1,1,0,1,0):
> w[46]:=W(0,1,1,1,0,1,0):
> w[47]:=W(1,1,1,1,0,1,0):
> w[48]:=W(0,0,0,0,1,1,0):
> w[49]:=W(1,0,0,0,1,1,0):
> w[50]:=W(0,1,0,0,1,1,0):
> w[51]:=W(1,1,0,0,1,1,0):
> w[52]:=W(0,0,1,0,1,1,0):
> w[53]:=W(1,0,1,0,1,1,0):
> w[54]:=W(0,1,1,0,1,1,0):
> w[55]:=W(1,1,1,0,1,1,0):
> w[56]:=W(0,0,0,1,1,1,0):
```

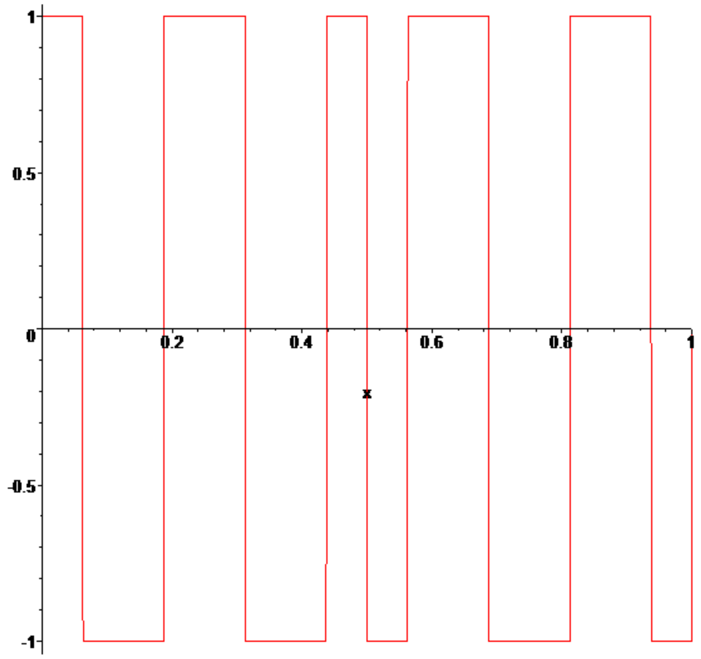
```
> w[57]:=W(1,0,0,1,1,1,0):
> w[58]:=W(0,1,0,1,1,1,0):
> w[59]:=W(1,1,0,1,1,1,0):
> w[60]:=W(0,0,1,1,1,1,0):
> w[61]:=W(1,0,1,1,1,1,0):
> w[62]:=W(0,1,1,1,1,1,0):
> w[63]:=W(1,1,1,1,1,1,0):
> w[64]:=W(0,0,0,0,0,0,1):
> plot(w[2],x=0..1);
```



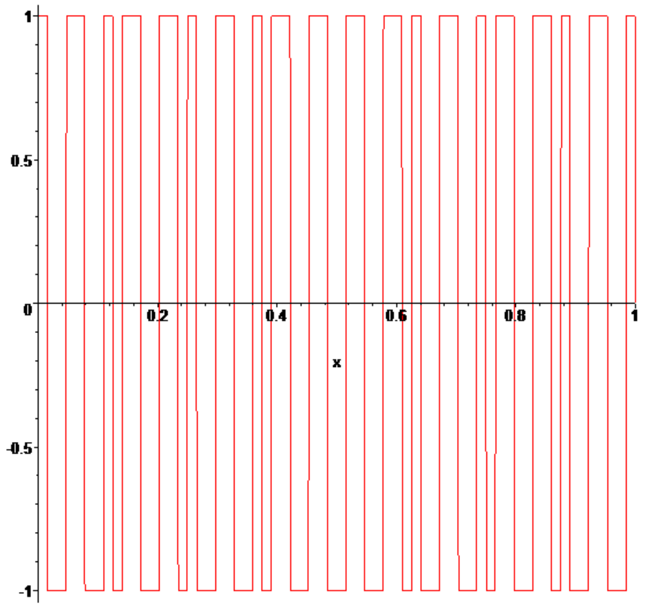

```
> plot(w[7],x=0..1);
```



```
> plot(w[13],x=0..1);
```




```
> plot(w[53],x=0..1);
```



ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

5.1. გამოთვალეთ

ა) $\frac{1}{3}\dot{+}\frac{1}{6}$;   ბ) $\frac{3}{8}\dot{+}\frac{1}{4}$;   გ) ; $\frac{5}{16}\dot{+}\frac{1}{6}$ დ) $\frac{7}{32}\dot{+}\frac{1}{3}$.

5.2. ა) იპოვეთ $I_3\left(0,0,0\right)$ სიმრავლის ანასახი [0,1)-ზე;

ბ) იპოვეთ $I_3\left(0,1,0\right)$ სიმრავლის ანასახი [0,1)-ზე;

გ) იპოვეთ $I_5\left(1,0,0,1,1\right)$ სიმრავლის ანასახი [0,1)-ზე;

დ) იპოვეთ $I_4\left(0,0,0,1\right)$ სიმრავლის ანასახი [0,1)-ზე.

5.3. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$\left|x-y\right|\le x\dot{+}y, x, y\in[0,1).$$

5.4. ვთქვათ $f\left(x\right)=1_{[0,1/2)}\left(x\right)$. დაამტკიცეთ, რომ $f\in C_w$ და $f\left(\left|x\right|\right)$ არ არის უწყვეტი G-ზე.

5.5. გამოთვალეთ

ა) $d\left(\left(\frac{1}{8}\right)^+,\left(\frac{1}{8}\right)^-\right)$;

ბ) $d\left(\left(\frac{3}{16}\right)^+,\left(\frac{3}{16}\right)^-\right)$;

გ) $d\left(\left(\frac{1}{4}\right)^+,\left(\frac{1}{4}\right)^-\right)$;

დ) $d\left(\left(\frac{5}{16}\right)^+,\left(\frac{5}{16}\right)^-\right)$.

5.6. დაამტკიცეთ, რომ $d\left(\left(\frac{p}{2^m}\right)^+,\left(\frac{p}{2^m}\right)^-\right)>0$, $\left(\frac{p}{2^m}\right)^-<\left(\frac{p}{2^m}\right)^+$, $\left(\left(\frac{p}{2^m}\right)^-,\left(\frac{p}{2^m}\right)^+\right)=\varnothing$.

6.ფურიე-უოლშის მწკრივები. დირიხლეს გული

ვთქვათ $f\in L(G)$ $\left(f\in L([0,1))\right)$. მაშინ მოცემული ფუნქციის ფურიეს უოლშის n-ური კოეფიციენტი განიმარტება ტოლობით

$$\hat{f}(n):=\int_G f\psi_n d\mu \quad \left(\hat{f}(n):=\int_{[0,1)} fw_n\right).$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა (რიმან-ლებეგი). ვთქვათ $f\in L([0,1))$. მაშინ

$$\hat{f}(n)\to 0 \text{ როცა } n\to\infty.$$

დამტკიცება. რადგან უოლშის პოლინომთა სიმრავლე ყველგან მკვრივია $L([0,1))$-ში, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი ε-თვის არსებობს უოლშის პოლინომი

$$p(x):=\sum_{k=0}^{2^N-1}\alpha_k w_k(x)$$

ისეთი, რომ

$$\|f-p\|_1<\varepsilon.$$

მეორეს მხრივ უოლშის სისტემის ორთონორმირებულობის ძალით

$$\hat{p}(n)=0 \text{ როცა } n\geq 2^N,$$

მაშასადამე, როცა $n\geq 2^N$ მივიღებთ

$$\hat{f}(n)=\int_{[0,1)} fw_n=\int_{[0,1)}(f-p)w_n,$$

$$\left|\hat{f}(n)\right|\leq\|f-p\|_1<\varepsilon.$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

$f\in L(G)$ ფუნქციის ფურიე-უოლშის მწკრივი განიმარტება შემდეგნაირად

$$Sf:=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)\psi_k.$$

ანალოგიურად, $f\in L([0,1))$ ფუნქციის ფურიე-უოლშის მწკრივი განიმარტება შემდეგნაირად

$$Sf:=\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}(k)w_k.$$

Sf მწკრივის n-ური კერძო ჯამები განიმარტება შემდეგნაირად

$$S_n f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\psi_k(x).$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$S_n f(x) = \int_G f(t)\sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t)\psi_k(x)\,d\mu(t) = \int_G f(t)D_n(x+t)\,d\mu(t)$$

სადაც

$$D_n(t) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(t)$$

უწოდებენ დირიხლეს გულს.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ $n := 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r}$, $n_1 > n_2 > \cdots > n_r \ge 0$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$D_n(x) = \psi_n(x)\Big(\psi_{2^{n_1}}(x)D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_2}}(x)D_{2^{n_2}}(x) + \psi_{2^{n_3}}(x)D_{2^{n_3}}(x) + \cdots + \psi_{2^{n_r}}(x)D_{2^{n_r}}(x)\Big)$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ

$$n^{(k)} := 2^{n_{k+1}} + 2^{n_{k+2}} + \cdots + 2^{n_r},\ n^{(0)} := n.$$

რადგანაც

$$D_{2^N+n'}(x) = D_{2^N}(x) + \psi_{2^N}(x)D_{n'}(x), \quad n' < 2^N$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= D_{2^{n_1}+n^{(1)}}(x) = D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_1}}(x)D_{n^{(1)}}(x) \\
&= D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_1}}(x)D_{2^{n_2}+n^{(2)}}(x) \\
&= D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_1}}(x)\Big(D_{2^{n_2}}(x) + \psi_{2^{n_2}}(x)D_{n^{(2)}}(x)\Big) \\
&= D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_1}}(x)D_{2^{n_2}}(x) + \psi_{2^{n_2}}(x)\psi_{2^{n_1}}(x)D_{n^{(2)}}(x) \\
&= \cdots = \\
&= D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_1}}(x)D_{2^{n_2}}(x) + \psi_{2^{n_1}}(x)\psi_{2^{n_2}}(x)D_{2^{n_2}}(x) \\
&\quad + \cdots + \psi_{2^{n_1}}(x)\psi_{2^{n_2}}(x)\cdots\psi_{2^{n_{r-1}}}(x)D_{2^{n_r}}(x) \\
&= D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_1}}(x)D_{2^{n_2}}(x) + \psi_{2^{n_1}+2^{n_2}}(x)D_{2^{n_3}}(x) \\
&\quad + \cdots + \psi_{2^{n_1}+\cdots+2^{n_{r-1}}}(x)D_{2^{n_r}}(x) \\
&= \psi_n(x)\Big(\psi_n(x)D_{2^{n_1}}(x) + \psi_{2^{n_2}+\cdots+2^{n_r}}(x)D_{2^{n_2}}(x) + \psi_{2^{n_3}+\cdots+2^{n_r}}(x)D_{2^{n_3}}(x) \\
&\quad + \cdots + \psi_{2^{n_r}}(x)D_{2^{n_r}}(x)\Big).
\end{aligned}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\psi_n(x)D_{2^{n_1}}(x) = \psi_{2^{n_1}}(x)D_{2^{n_1}}(x)$$

$$\psi_{2^{n_2}+\cdots+2^{n_r}}(x)D_{2^{n_2}}(x)=\psi_{2^{n_2}}(x)D_{2^{n_2}}(x)$$
$$\cdots$$
$$\psi_{2^{n_k}+\cdots+2^{n_r}}(x)D_{2^{n_k}}(x)=\psi_{2^{n_k}}(x)D_{2^{n_k}}(x)$$

და მაშასადამე

$$D_n(x)=\psi_n(x)\Big(\psi_{2^{n_1}}(x)D_{2^{n_1}}(x)+\psi_{2^{n_2}}(x)D_{2^{n_2}}(x)+\psi_{2^{n_3}}(x)D_{n^{(2)}}(x)$$
$$+\cdots+\psi_{2^{n_r}}(x)D_{2^{n_r}}(x)\Big).$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ

$$m:=\sum_{j=0}^{\infty} m_j 2^j,\quad m_j=0,1$$

მაშინ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$D_m(x)=\psi_m(x)\sum_{j=0}^{\infty} m_j\psi_{2^j}(x)D_{2^j}(x)=\psi_m(x)\sum_{j=0}^{\infty} m_j\left(D_{2^{j+1}}(x)-D_{2^j}(x)\right).$$

თეორემა (დირიხლეს გულის ზემოდან შემოსაზღრულობა). ვთქვათ $x\in(0,1)$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$\left|D_n(x)\right|\le\min\left\{n,\frac{2}{x}\right\}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $2^{-j}\le x<2^{-j+1},\ j=0,1,...,N,\ 2^N\le n<2^{N+1}$. მაშინ ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ძალით გვაქვს

$$\left|D_n(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{j-1} n_k w_{2^k}(x)D_{2^k}(x)\right|\le\sum_{k=0}^{j-1} 2^k<2^j,$$

მეორეს მხრივ, როცა $x\in\left(0,2^{-N}\right)$ გვაქვს

$$\left|D_n(x)\right|\le n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. სამართლიანია შემდეგი $\left\|D_n\right\|_1=O\left(\log(n+1)\right)$.

თეორემა (დირიხლეს გულის ქვემოდან შემოსაზღრულობა). ვთქვათ $n=\sum_{k=0}^{m} 2^{2k},\ 2^{-2m-1}\le x<1$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$\left|D_n(x)\right|\ge\frac{1}{4x}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $2^{-j}\le x<2^{-j+1}$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\left|D_n(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{j-2} n_k 2^k-n_{j-1}2^{j-1}\right|.$$

რადგანაც $n_{j-1}+n_j=1$, ამიტომ

$$\left|D_n(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{j-2} n_k 2^k-n_{j-1}2^{j-1}\right|\geq 2^{j-2}\geq\frac{1}{4x}.$$

ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის ვარიაცია განიმარტება შემდეგნაირად

$$V(n):=\sum_{k=1}^{\infty}\left|n_k-n_{k-1}\right|+n_0 .$$

ლებეგის მუდმივი კი

$$L_n:=\left\|D_n\right\|_1.$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$\frac{V(n)}{8}\leq L_n\leq V(n).$$

დამტკიცება. რადგანაც

$$D_n(x)=\psi_n(x)\sum_{j=0}^{\infty} n_j\left(D_{2^{j+1}}(x)-D_{2^j}(x)\right)$$

აბელის გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}\left|D_n(x)\right|&=\left|\sum_{j=0}^{\infty} n_j\left(D_{2^{j+1}}(x)-D_{2^j}(x)\right)\right|\\
&=\left|\sum_{j=0}^{N-1}\left(n_j-n_{j+1}\right)\sum_{k=0}^{j}\left(D_{2^{k+1}}(x)-D_{2^k}(x)\right)+\sum_{k=0}^{N}\left(D_{2^{k+1}}(x)-D_{2^k}(x)\right)\right|\\
&=\left|\sum_{j=0}^{N-1}\left(n_j-n_{j+1}\right)\left(D_{2^{j+1}}(x)-D_1(x)\right)+\left(D_{2^{N+1}}(x)-D_1(x)\right)\right|\\
&=\left|\sum_{j=0}^{N-1}\left(n_j-n_{j+1}\right)D_{2^{j+1}}(x)+D_{2^{N+1}}(x)-n_0\right|\\
&=\left|\sum_{j=0}^{N}\left(n_j-n_{j+1}\right)D_{2^{j+1}}(x)-n_0\right|.\end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $\left\|D_{2^n}\right\|_1=1$ მივიღებთ

$$L_n\leq V(n).$$

ეხლა დავამტკიცოთ შეფასება ქვემოდან. ვთქვათ

$$n_k=\begin{cases}1 & l_j\leq k\leq m_j\\ 0, & m_j<k<l_{j+1}\end{cases}\qquad j=1,2,\ldots,s\quad .$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $m_j+1<l_{j+1}$ და

$$\left|D_n(x)\right|=\left|\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=l_j}^{m_j}\left(D_{2^{k+1}}(x)-D_{2^k}(x)\right)\right|=\left|\sum_{j=1}^{s}\left(D_{2^{m_j+1}}(x)-D_{2^{l_j}}(x)\right)\right|.$$

ვთქვათ $A_j := \left[2^{-m_j-1}, 2^{-l_j}\right), j=1,2,\ldots,s$, მაშინ პელის ლემას გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left|D_n(x)\right| = 2^{l_j} - \sum_{i=1}^{j-1} \left(2^{m_i+1} - 2^{l_i}\right) \geq 2^{l_j} - \sum_{i=1}^{j-1} \left(2^{m_i+1} - 2^{m_{i-1}+1}\right) \geq 2^{l_j} - 2^{m_{j-1}+1} \geq \frac{1}{2} 2^{l_j} .$$

მაშასადამე

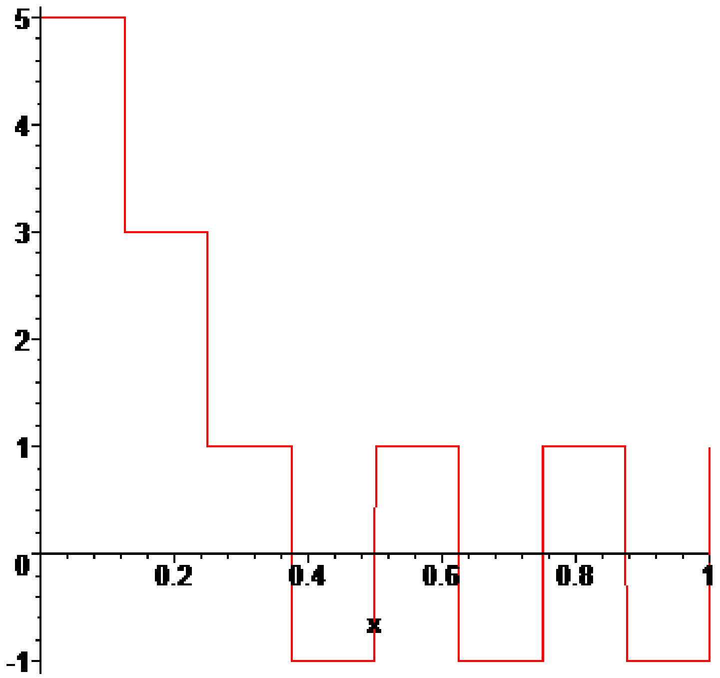
$$L_n \geq \sum_{j=1}^{s} \int_{A_j} \left|D_n\right| \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} 2^{l_j} \mu\left(A_j\right) > \frac{1}{4} s = \frac{1}{8} V(n) .$$

თეორემა დამტკიცებულია.

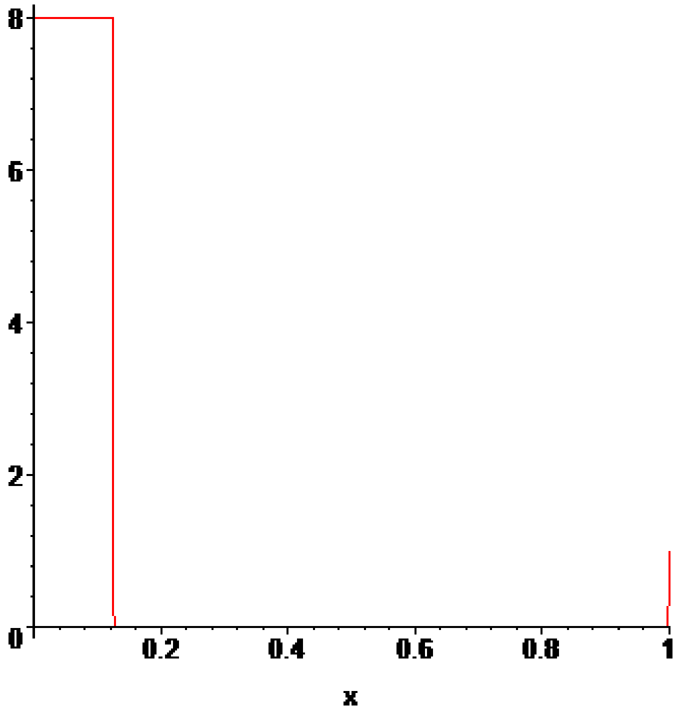
```
> H:=(x,n)->sum(w[j](x),j=0..n-1);
```

$$H := (x, n) \to \sum_{j=0}^{n-1} w_j(x)$$

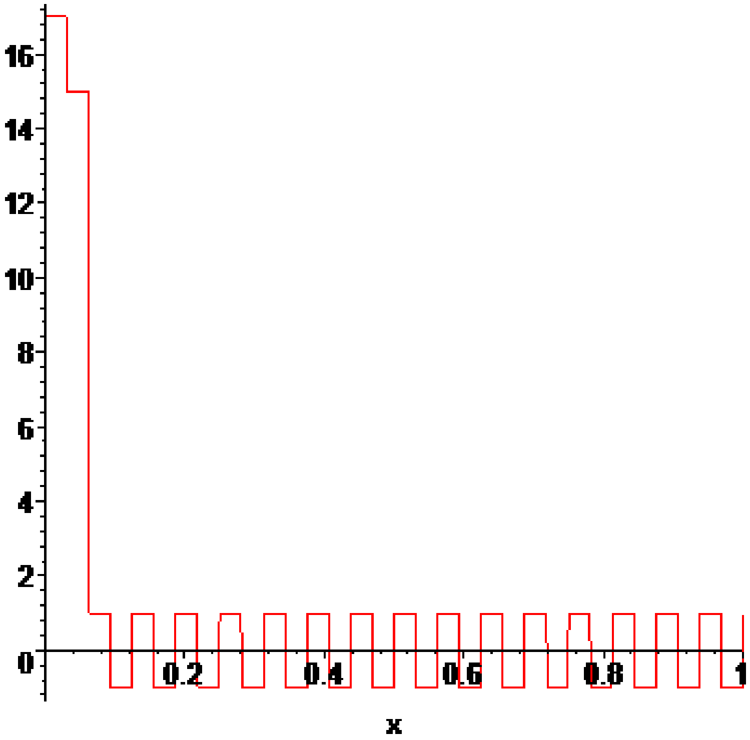
```
> plot(H(x,5),x=0..1);
```



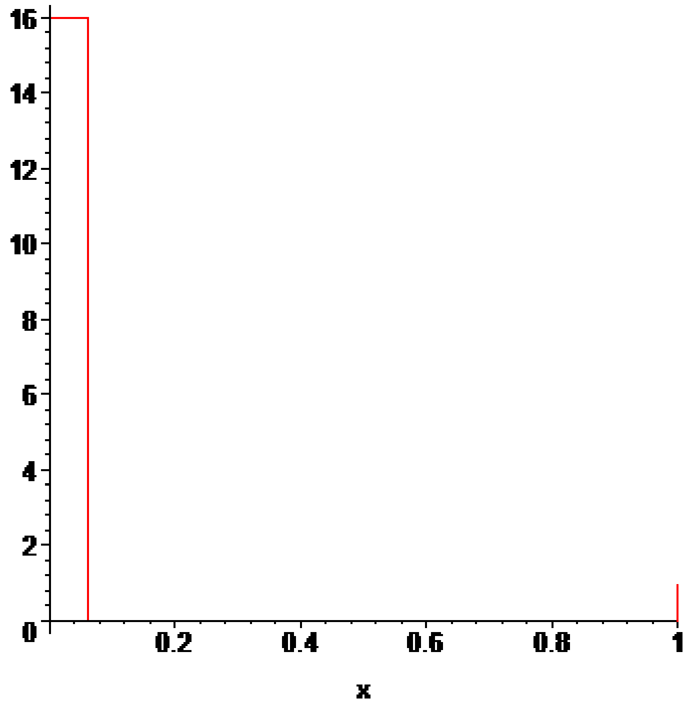

```
> plot(H(x,8),x=0..1);
```



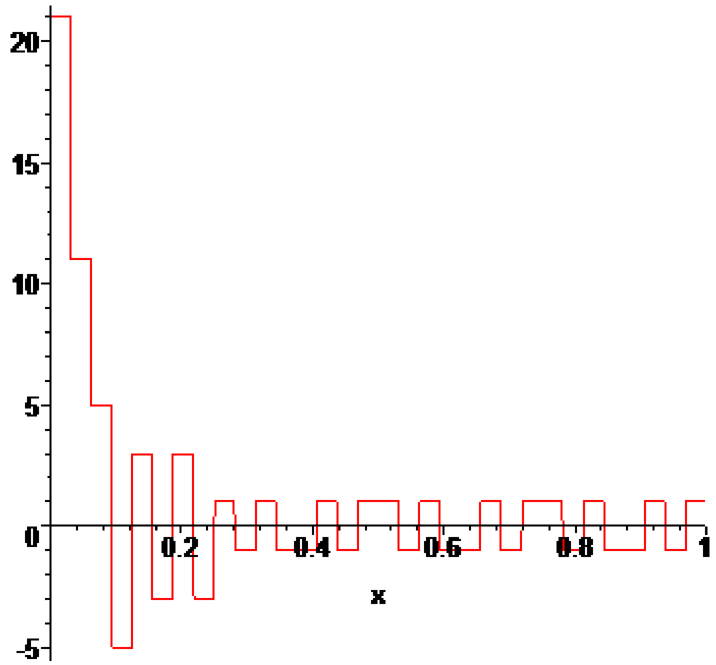

```
> plot(H(x,17),x=0..1);
```




```
> plot(H(x,16),x=0..1);
```




```
> plot(H(x,21),x=0..1);
```



6.1. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია ფორმულა

$$D_{2^n}(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \psi_{2^k}(x)\right).$$

6.2. გამოიყენეთ ამოცანა 1-ში მოცემული ფორმულა და დაამტკიცეთ, რომ

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n, x \in I_n(0) \\ 0, x \in G \setminus I_n(0) \end{cases}.$$

6.3. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა

$$D_{2^n+m}(x) = D_{2^n}(x) + \psi_{2^n}(x) D_m(x), \ \ 0 \le m < 2^n.$$

6.4. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა

$$D_{2^n-m}(x) = D_{2^n}(x) - \psi_{2^n-1}(x) D_m(x), \ \ 0 \le m < 2^n.$$

6.5. გამოთვალეთ $V(31), V(23), V(12), V(43)$.

6.6. დაამტკიცეთ, შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა

$$D_{2^n+l}(x) = \begin{cases} 2^n + l, x \in I_{n+1}(0,...,0) \\ 2^n - l, x \in I_{n+1}(0,...,0,1) \\ \psi_{2^n}(x) D_l(x), x \notin I_n(0,...,0) \end{cases}$$

7. ფურიე-უოლშის მწკრივების წერტილოვანი კრებადობა

წარმოდგენილ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით ფურიე-უოლშის მწკრივების წერტილოვან კრებადობასთან დაკავშირებულ საკითხებს. პირველ რიგში დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

ლემა. ვთქვათ $f \in L_1$ და $x \in [0,1)$. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1)\setminus I_N(x)} f(t) D_n\left(x \dot{+} t\right) dt = 0$$

ნებისმიერი ნატურალური N -ითვის.

დამტკიცება. რადგანაც $x \dot{+} t \notin I_N(0)$ და

$$D_n\left(x \dot{+} t\right) = \psi_n\left(x \dot{+} t\right) \sum_{j=0}^{\infty} n_j w_{2^j}\left(x \dot{+} t\right) D_{2^j}\left(x \dot{+} t\right)$$

პელის ლემას გამოყენებით მივიღებთ

$$\int_{[0,1)\setminus I_N(x)} f(t) D_n\left(x \dot{+} t\right) dt$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} n_j \int_{[0,1)\setminus I_N(x)} f(t) w_n\left(x \dot{+} t\right) w_{2^j}\left(x \dot{+} t\right) D_{2^j}\left(x \dot{+} t\right) dt$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} n_j \hat{g}_j(n),$$

სადაც

$$g_j(t) := f\left(x \dot{+} t\right) w_{2^j}(t) D_{2^j}(t).$$

რადგანაც $g_j \in L_1$, ამიტომ რიმან-ლებეგის ლემის ძალით $\hat{g}_j(n) \to 0, n \to \infty$ და მაშასადამე

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1)\setminus I_N(x)} f(t) D_n\left(x \dot{+} t\right) dt = 0.$$

ლემა დამტკიცებულია.

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა (ლოკალიზაციის პრინციპი). ვთქვათ $f,g\in L_1$ და $f=g$ რაღაც $V\subset[0,1)$ ღია სიმრავლეზე. მაშინ $S_nf(x)$ და $S_ng(x)$ ერთდროულად ან კრებადია ან განშლადია ნებისმიერი $x\in V$.

დამტკიცება. ნებისმიერი ფიქსირებული $x\in V$ არსებობს ორობითი ინტერვალი $I_N(x)\subset V$. მაშინ ზემოთ დამტკიცებული ლემის ძალით

$$S_nf(x)-S_ng(x)=\int\limits_{[0,1)\setminus I_N(x)}\left(f(t)-g(t)\right)D_n\left(x\dot{+}t\right)dt\to 0$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა (დინის ნიშანი). ვთქვათ $x\in[0,1)$, $f\in L_1$. განსაზღროთ g ფუნქცია ტოლობით

$$g(t):=\frac{f(t)-f(x)}{x\dot{+}t},t\in[0,1)\setminus\{x\}.$$

თუ $g\in L_1$ მაშინ

$$S_nf(x)\to f(x),n\to\infty.$$

დამტკიცება. რადგანაც

$$\left|D_n\left(x\dot{+}t\right)\right|<\frac{2}{x\dot{+}t}\quad(t\neq x)$$

მივიღებთ

$$\left|S_nf(x)-f(x)\right|\leq\left|\int\limits_{[0,1)\setminus I_N(x)}\left(f(t)-f(x)\right)D_n\left(x\dot{+}t\right)dt\right|+2\int\limits_{I_N(x)}\left|g(t)\right|dt.$$

ზემოთ დამტკიცებული ლემის ძალით

$$\int\limits_{[0,1)\setminus I_N(x)}\left(f(t)-f(x)\right)D_n\left(x\dot{+}t\right)dt\to 0,n\to\infty,$$

მეორეს მხრივ, რადგანაც $g\in L_1$, ამიტომ

$$\int\limits_{I_N(x)}\left|g(t)\right|dt\to 0,N\to\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დინის ნიშნიდან გამომდინარეობს, რომ თუ

$$\left|f\left(x\dot{+}t\right)-f(x)\right|=O\left(\left(\log(1/t)\right)^{-1-\varepsilon}\right),\varepsilon>0,t\to 0$$

მაშინ

$$S_nf(x)\to f(x),n\to\infty$$

მაგალითი. ვთქვათ $f(t):=1_{[0,1/3)}(t)$ და დავამტკიცოთ, რომ $S_{2^n} f\left(\frac{1}{3}\right)$ განშლადია. მართლაც,

$$S_{2^{2n}} f\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^1 f(t) D_{2^{2n}}\left(t \dot{+} \frac{1}{3}\right) dt = 2^{2n} \int_{I_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)} f(t)\,dt = 2^{2n} \mu\left(I_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) \cap \left[0, \frac{1}{3}\right)\right).$$

რადგანაც

$$\rho\left(\frac{1}{3}\right) = (0,1,0,1,\ldots,0,1,\ldots)$$

ამიტომ

$$I_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{2j}}, \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{2^{2n}}\right) = \left[\frac{1-2^{-2n}}{3}, \frac{1-2^{-2n}}{3} + \frac{1}{2^{2n}}\right).$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\mu\left(I_{2n}\left(\frac{1}{3}\right) \cap \left[0, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}}\right) = \frac{1}{3 \cdot 2^{2n}}.$$

მაშასადამე

$$S_{2^{2n}} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

გამოვთვალოთ $S_{2^{2n-1}} f\left(\frac{1}{3}\right)$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$S_{2^{2n-1}} f\left(\frac{1}{3}\right) = \int_0^1 f(t) D_{2^{2n-1}}\left(t \dot{+} \frac{1}{3}\right) dt = 2^{2n-1} \int_{I_{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)} f(t)\,dt = 2^{2n-1} \mu\left(I_{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right) \cap \left[0, \frac{1}{3}\right)\right).$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$I_{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{2j}}, \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = \left[\frac{1-2^{-2n+2}}{3}, \frac{1-2^{-2n+2}}{3} + \frac{1}{2^{2n-1}}\right),$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\mu\left(I_{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right) \cap \left[0, \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-2}}\right) = \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-2}}.$$

მაშასადამე,

$$S_{2^{2n-1}} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\left|S_{2^{2n-1}} f\left(\frac{1}{3}\right) - S_{2^{2n}} f\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \frac{1}{3} \not\to 0$$

და მაშასადამე კოშის კრიტერიუმის ძალით დავასკვნით რომ $S_{2^n} f\left(\frac{1}{3}\right)$ არ არის კრებადი.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

7.1. ვთქვათ $f(t) := \begin{cases} t, 0 \le t < 1/2 \\ t^2, 1/2 \le t < 1 \end{cases}$. გამოთვალეთ

ა) $\lim_{n\to\infty} S_n f\left(\frac{1}{2}\right)$

ბ) $\lim_{n\to\infty} S_n f\left(\frac{1}{3}\right)$

გ) $\lim_{n\to\infty} S_n f\left(\frac{2}{3}\right)$

7.2. ვთქვათ $f(t) := 1_{[0,5/6)}(t)$. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობა $S_{2^n} f\left(\frac{5}{6}\right)$ განშლადია. რა შეიძლება ითქვას $\lim_{n\to\infty} S_n f\left(\frac{1}{5}\right)$?

7.3. იპოვეთ დირიხლეს ფუნქციის ორობითი წარმოებული.

8. ფეიერის საშუალოები

ვთქვათ მოცემულია რიცხვითი მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ და განსავზღროთ

$$\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k$$

სადაც $A_k := \sum_{j=1}^{k} a_j, k = 1, 2, \ldots.$

ვიტყვით, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ მწკრივი არის ფეიერის აზრით კრებადი (ან (C,1)-კრებადი) თუ კრებადია შემდეგი $\{\sigma_n\}$ მიმდევრობა. რადგანაც,

$$\left|\sigma_n - A\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left|A_k - A\right|$$

ამიტომ ადვილი დასანახია, რომ თუ მწკრივი კრებადია , მაშინ ფეიერის აზრითაც კრებადი, პირიქით საზოგადოდ სამართლიანი არ არის, მართლაც, მწკრივი $\sum(-1)^n$ არ არის კრებადი, მაგრამ ფეიერის აზრით კრებადია.

ვთქვათ $S_n f(x)$ იყოს ფურიე-უოლშის მწკრივის n-ური კერძი ჯამი, მაშინ ფურიე უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოები განიმარტება შემდეგნაირად

$$\sigma_n f(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k f(x).$$

ადვილი დასანახია, რომ $\sigma_n f(x)$ ინტეგრალური ფორმოთ ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\sigma_n f(x) = \int_0^1 f\left(x \dot{+} t\right) K_n(t)\,dt = \int_0^1 f(t) K_n\left(x \dot{+} t\right) dt$$

სადაც, $K_n(t)$ არის უოლშ-ფეიერის გული, რომელიც განიმარტება შემდეგნაირად

$$K_n(t) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k(t).$$

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს $\sigma_n f(x)$ საშუალოების კრებადობის შესწავლა, რაც დამოკიდებულია უოლშ-ფეიერის გულის შესწავლაზე. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. სამართლიანია შემდეგი

$$K_{2^n}(t) = \begin{cases} 2^{n-1} + 1/2, t \in I_n(0) \\ 2^{s-1}, t \in I_n(e_s) \\ 0, t \in I_n(e_s + e_l), s \ne l, s, l = 0,1,\dots,n-1 \end{cases}.$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით, სამართლიანია შემდეგი

$$2^n K_{2^n}(t) = \sum_{j=1}^{2^n} D_j(t) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} D_j(t) + \sum_{j=2^{n-1}+1}^{2^n} D_j(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^{n-1}} D_j(t) + \sum_{j=1}^{2^{n-1}} D_{j+2^{n-1}}(t) = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} D_j(t) + \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \left(D_{2^{n-1}}(t) + w_{2^{n-1}}(t) D_j(t)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^{n-1}} D_j(t) + 2^{n-1} D_{2^{n-1}}(t) + w_{2^{n-1}}(t) \sum_{j=1}^{2^{n-1}} D_j(t)$$

$$\left(1 + w_{2^{n-1}}(t)\right) \sum_{j=1}^{2^{n-1}} D_j(t) + 2^{n-1} D_{2^{n-1}}(t)$$

$$=\left(1+w_{2^{n-2}}(t)\right)\left(1+w_{2^{n-1}}(t)\right)\sum_{j=1}^{2^{n-2}} D_j(t)+2^{n-1}D_{2^{n-1}}(t)+\left(1+w_{2^{n-1}}(t)\right)2^{n-2}D_{2^{n-2}}(t)$$

$$=\cdots=$$

$$=2^{n-1}D_{2^{n-1}}(t)+\left(1+w_{2^{n-1}}(t)\right)2^{n-2}D_{2^{n-2}}(t)+\cdots+\left(1+w_{2^{n-1}}(t)\right)\left(1+w_{2^{n-2}}(t)\right)\cdots\left(1+w_{2^0}(t)\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{k=j+1}^{n-1}\left(1+w_{2^k}(t)\right)2^jD_{2^j}(t).$$

ვთქვათ $t\in I_n(t_0,...,t_{n-1})$ და $\sum_{j=0}^{n-1} t_j\geq 2$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $K_{2^n}(t)=0$.

ვთქვათ, $t\in I_n(0)$. მაშინ

$$K_{2^n}(t)=\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} j=\frac{2^n\left(2^n+1\right)}{2^{n+1}}=2^{n-1}+1/2.$$

ვთქვათ $t\in I_n(e_s), s=0,...,n-1$. მაშინ პელის ლემას გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\sum_{j=0}^{n-1}\prod_{k=j+1}^{n-1}\left(1+w_{2^k}(t)\right)2^jD_{2^j}(t)\neq 0$$

მხოლოდ მაშინ, როცა $j=s$ და მაშასადამე

$$2^nK_{2^n}(t)=\prod_{k=s+1}^{n-1}\left(1+w_{2^k}(t)\right)2^sD_{2^s}(t)=2^{n-s-1}\cdot 2^{2s}=2^{n+s-1}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა. ვთქვათ $n:=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_r}, n_1>n_2>\cdots>n_r$ და $n^{(k)}:=2^{n_{k+1}}+2^{n_{k+2}}+\cdots+2^{n_r}$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი

$$nK_n(t)=\sum_{j=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{j-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)2^{n_j}K_{2^{n_j}}(t)+\sum_{j=1}^{r-1}\left(\prod_{k=1}^{j-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)n^{(j)}D_{2^{n_j}}(t)$$

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ

$$nK_n(t)=\sum_{j=1}^{n} D_j(t)=\sum_{j=1}^{2^{n_1}} D_j(t)+\sum_{j=2^{n_1}+1}^{n^{(1)}+2^{n_1}} D_j(t)=\sum_{j=1}^{2^{n_1}} D_j(t)+\sum_{j=1}^{n^{(1)}} D_{j+2^{n_1}}(t)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{n_1}} D_j(t)+\sum_{j=1}^{n^{(1)}}\left(D_{2^{n_1}}(t)+w_{2^{n_1}}(t)D_j(t)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{2^{n_1}} D_j(t)+n^{(1)}D_{2^{n_1}}(t)+w_{2^{n_1}}(t)\sum_{j=1}^{n^{(1)}} D_j(t)$$

$$=2^{n_1}K_{2^{n_1}}(t)+n^{(1)}D_{2^{n_1}}(t)+w_{2^{n_1}}(t)2^{n_2}K_{2^{n_2}}(t)+n^{(2)}w_{2^{n_1}}(t)D_{2^{n_2}}(t)+w_{2^{n_1}}(t)w_{2^{n_2}}(t)\sum_{j=1}^{n^{(2)}} D_j(t)$$

$$=\cdots=$$

$$=2^{n_1}K_{2^{n_1}}(t)+n^{(1)}D_{2^{n_1}}(t)+w_{2^{n_1}}(t)2^{n_2}K_{2^{n_2}}(t)+n^{(2)}w_{2^{n_1}}(t)D_{2^{n_2}}(t)+\cdots+$$

$$+\left(\prod_{k=1}^{r-2} w_{2^{n_k}}(t)\right)2^{n_{r-1}}K_{2^{n_{r-1}}}(t)+\left(\prod_{k=1}^{r-2} w_{2^{n_k}}(t)\right)n^{(r-1)}D_{2^{n_{r-1}}}(t)+\left(\prod_{k=1}^{r-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)\sum_{j=1}^{n^{(r-1)}} D_j(t)$$

$$=\sum_{j=1}^{r-1}\left(\prod_{k=1}^{j-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)2^{n_j}K_{2^{n_j}}(t)+\sum_{j=1}^{r-1}\left(\prod_{k=1}^{j-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)n^{(j)}D_{2^{n_j}}(t)+\left(\prod_{k=1}^{r-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)\sum_{j=1}^{n^{(r-1)}} D_j(t)$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\left(\prod_{k=1}^{j-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)2^{n_j}K_{2^{n_j}}(t)+\sum_{j=1}^{r-1}\left(\prod_{k=1}^{j-1} w_{2^{n_k}}(t)\right)n^{(j)}D_{2^{n_j}}(t).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა. სამართლიანია შემდეგი

$$\sup_n \int_0^1 |K_n(t)|dt < 2.$$

დამტკიცება. ზემოთ დამტკიცებული თეორემების ძალით

$$\int_0^1 |K_{2^n}(t)|dt = \int_{I_n(0)} |K_{2^n}(t)|dt + \sum_{s=0}^{n-1} \int_{I_n(e_s)} |K_{2^n}(t)|dt$$

$$\le \frac{2^{n-1}+1/2}{2^n} + \sum_{s=0}^{n-1} 2^{s-n-1} = 1$$

მეორეს მხრივ,

$$n|K_n(t)| \le \sum_{j=1}^{r} 2^{n_j}K_{2^{n_j}}(t) + \sum_{j=1}^{r-1} n^{(j)}D_{2^{n_j}}(t)$$

და მაშასადამე

$$\int_0^1 |K_n(t)|dt \le \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{r} 2^{n_j} < 2.$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

ქვემოთ ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოების კრებადობის საკითხების შესწავლა. ჯერ შევისწავლოთ წერტილში კრებადობის საკითხი. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ $x \in [0,1)$ და $f \in L$ ფუნქცია W-უწყვეტია x წერტილში. მაშინ

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m f(x) = f(x).$$

დამტკიცება. როგორც ვიცით

$$\sigma_n f(x) = \int_0^1 f(t)K_n\left(x \dot{+} t\right)dt$$

და

$$\|K_m\|_1 \le c.$$

მაშასადამე,

$$\sigma_n f(x) - f(x) = \int\limits_{I_N(x)} \left(f(t) - f(x)\right) K_n\left(x \dot{+} t\right) dt$$

$$+ \int\limits_{[0,1)\setminus I_N(x)} \left(f(t) - f(x)\right) K_n\left(x \dot{+} t\right) dt$$

უკვე ცნობილი ფაქტის ძალით

$$\int\limits_{[0,1)\setminus I_N(x)} \left(f(t) - f(x)\right) K_n\left(x \dot{+} t\right) dt \to 0, n \to \infty .$$

მეორეს მხრივ,

$$\left|\int\limits_{I_N(x)} \left(f(t) - f(x)\right) K_n\left(x \dot{+} t\right) dt\right| \le \sup_{u \in I_N(x)} \left|f(u) - f(x)\right| \int\limits_0^1 \left|K_n\left(x \dot{+} t\right)\right| dt \le c \sup_{u \in I_N(x)} \left|f(u) - f(x)\right|$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ მოცემული ფუნქცია W-უწყვეტია x წერტილში მივიღებთ დასამტკიცებელს.

შევნიშნოთ, რომ თუ მოცემული ფუნქცია იქნებოდა C_w კლასიდან, მაშინ თუ გავიმეორებთ იგივე გზას რაც ზემოთმოყვანილ დამტკიცებაში იყო მოცემული მივიღებთ, რომ ფურიე-უოლშის მწკრივის ფეიერის საშუალოები თანაბრად კრებადია. ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით უფრო ზოგად საკითხს, კერძოდ დამტკიცებული იქნება ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოების კრებადობის სიჩქარე. ვიდრე დავიწყებდეთ ამ საკითხების შესწავლას, შემოვიღოთ ორობითი უწყვეტობის მოდულის ცნება.

განმარტება. ვთქვათ $f \in C_W\left([0,1)\right)$ და არის 1-პერიოდული ფუნქცია. მაშინ f ფუნქციის ორობითი უწყვეტობის მოდული განიმარტება შემდეგნაირად

$$\omega(f, \delta) := \sup_{0<h<\delta} \sup_x \left| f\left(x \dot{+} h\right) - f(x)\right| .$$

შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქციათა კლასი. ვიტყვით, რომ $f \in Lip\alpha$, თუ

$$\omega(f, \delta) := O\left(\delta^\alpha\right), \delta \to 0 .$$

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ $f \in C_W\left([0,1)\right)$. მაშინ სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\|\sigma_n f - f\right\|_C \le 4\omega\left(f, 2^{-s}\right) + c_2 \sum_{k=0}^{s-1} 2^{k-s} \omega\left(f, 2^{-k}\right), 2^s \le n < 2^{s+1} .$$

დამტკიცება. ვთქვათ $P := S_{2^s} f$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\sigma_n f - f = \sigma_n\left(f - P\right) + \left(P - f\right) + \left(\sigma_n P - P\right).$$

ადვილი დასანახია, რომ (იხ. სავარჯიშო)

$$\sigma_n P - P = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{2^s}\left(S_l f - S_{2^s} f\right) = \frac{2^s}{n}\left(\sigma_{2^s} P - P\right)$$

და მაშასადამე,

$$\left\|\sigma_n f - f\right\|_C = \left\|\sigma_n\left(f - P\right)\right\|_C + \left\|P - f\right\|_C + \left\|\sigma_n P - P\right\|_C$$

$$\leq \left\|\sigma_n\left(f - P\right)\right\|_C + \left\|P - f\right\|_C + \left\|\sigma_{2^s} P - P\right\|_C .$$

შევნიშნოთ, რომ

$$P(x) - f(x) = \int_0^1 \left(f\left(x \dot{+} t\right) - f(x)\right) D_{2^s}(t)\,dt = 2^s \int_{I_s(0)} \left(f\left(x \dot{+} t\right) - f(x)\right) dt$$

$$\left\|P - f\right\|_C \leq \sup_{0<t<2^{-s}} \sup_x \left| f\left(x \dot{+} t\right) - f(x)\right| = \omega\left(f, 2^{-s}\right),$$

$$\left\|\sigma_n\left(f - P\right)\right\|_C \leq \left\|\int_0^1 \left(f - P\right)(t) K_n\left(x \dot{+} t\right) dt\right\|_C \leq 2\left\|f - P\right\|_C \leq 2\omega\left(f, 2^{-s}\right).$$

ადვილი დასანახია, რომ (იხ. სავარჯიშო)

$$\left\|\sigma_{2^s}\left(S_{2^s} f\right) - S_{2^s} f\right\|_C = \left\|S_{2^s}\left(\sigma_{2^s} f\right) - S_{2^s} f\right\|_C = \left\|S_{2^s}\left(\sigma_{2^s} f - f\right)\right\|_C \leq \left\|\sigma_{2^s} f - f\right\|_C .$$

მაშასადამე მივიღებთ

$$\left\|\sigma_n f - f\right\|_C \leq c\omega\left(f, 2^{-s}\right) + \left\|\sigma_{2^s} f - f\right\|_C .$$

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს $\left\|\sigma_{2^s} f - f\right\|_C$ სიდიდის შეფასებას. როგორც ვიცით

$$\sigma_{2^s} f(x) - f(x) = \int_0^1 \left(f\left(x \dot{+} t\right) - f(x)\right) K_{2^s}(t) .$$

მაშინ ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ძალით

$$\sigma_{2^s} f(x) - f(x) = \left(2^{s-1} + 1/2\right) \int_{I_s(0)} \left(f\left(x \dot{+} t\right) - f(x)\right) dt$$

$$+ \sum_{l=0}^{s-1} 2^{l-1} \int_{I_s(e_l)} \left(f\left(x \dot{+} t\right) - f(x)\right) dt ,$$

$$\left\|\sigma_{2^s} f - f\right\|_C \leq \omega\left(f, 2^{-s}\right) + \sum_{l=0}^{s-1} 2^{l-s-1}\omega\left(f, 2^{-l}\right).$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

ადვილი დასანახია, (იხ. სავარჯიშო), რომ

$$\omega\left(f,2^{-s}\right)\to 0, s\to\infty, f\in C_W$$

და

$$\sum_{l=0}^{s-1} 2^{l-s-1}\omega\left(f,2^{-l}\right)\to 0, s\to\infty, f\in C_W .$$

მაშასადამე ზემოთდამტკიცებული თეორემიდან მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. ვთქვათ $f\in C_W\left([0,1)\right)$. მაშინ f ფუნქციის ფურიე-უოლშის მწკრივების ფეიერის საშუალოები თანაბრად კრებადია f -კენ.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ო ე ბ ი

8.1. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობის კრებადობიდან გამომდინარეობს (C,1)-კრებადობა.
8.2. დაამტკიცეთ ფეიერის საშუალოებისათვის ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულა.
8.3. დაამტკიცეთ, რომ ორობითი უწყვეტობის მოდულისათვის არ არის სამართლიანი შემდეგი ფორმულა $\omega\left(f;2\delta\right)\le c\omega\left(f;\delta\right)$.
8.4. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f\in C_W\left([0,1)\right)$, მაშინ $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega\left(f;\delta\right)=0$.
8.5. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f\in C_W\left([0,1)\right)$, მაშინ $\lim\limits_{s\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{s-1} 2^{k-s}\omega\left(f,2^{-k}\right)=0$.
8.6. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა $\sigma_{2^s}\left(S_{2^s}f\left(x\right)\right)=S_{2^s}\left(\sigma_{2^s}f\left(x\right)\right)$.
8.7. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა $\left\|S_{2^s}f\right\|_C\le\left\|f\right\|_C$, $f\in C_W\left([0,1)\right)$.
8.8. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა $S_n\left(S_m f\left(x\right)\right)=S_m\left(S_n f\left(x\right)\right)$.
8.9. დაამტკიცეთ შემდეგი ფორმულის სამართლიანობა

$$S_i\left(S_{2^s}f\left(x\right)\right)=\begin{cases}S_{2^s}f\left(x\right), i>2^s\\ S_i f\left(x\right), i\le 2^s\end{cases}.$$

9. ჰაარის ვეველეტი

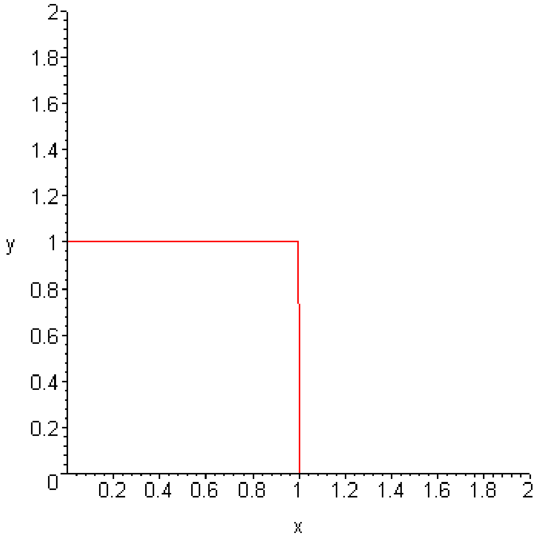
განვიხილოთ შემდეგი მართკუთხოვანი ტალღა

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\0, & x\notin[0,1)\end{cases}$$

```
> phi:=x->piecewise(x<0,0,x<1,1,0);
```

$$\phi := x \rightarrow \mathrm{piecewise}(x<0,\ 0,\ x<1,\ 1,\ 0)$$

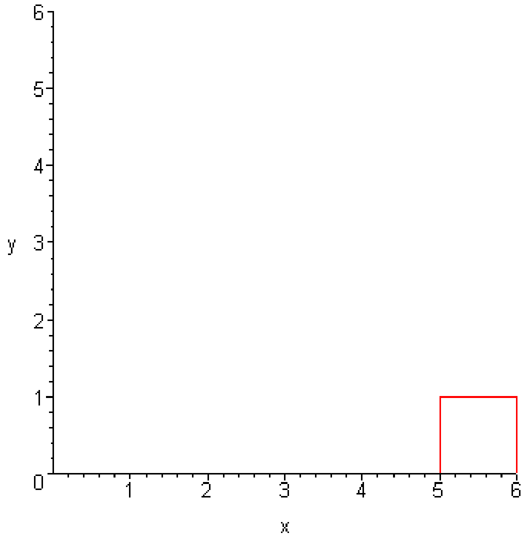
```
> plot(phi(x),x=0..2,y=0..2);
```



განვიხილოთ $\varphi_{0,n}(x), n\in Z$ ფუნქციათა სისტემა, რომელიც მიიღება $\varphi(x)$ ფუნქციის ძვრის შედეგად, ე. ი.

$$\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n),\ \ n\in Z\ .$$

```
> plot(phi(x-5),x=0..6,y=0..6);
```



შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$V_0 := clos_{L^2}\left\{\varphi(x-k), k \in Z\right\}.$$

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $\left\{\varphi(x-k): k \in Z\right\}$ სისტემა ორთონორმირებული და სრული სისტემაა V_0-ში. რადგანაც ნებისმიერი ორთონორმირებული სრული სისტემა ბაზისია , ამიტომ დავასკვნით, რომ $\left\{\varphi(x-k): k \in Z\right\}$ სისტემა ბაზისია V_0-ში ე. ი. ნაბისმიერი ფუნქცია V_0 სივრციდან წარმოიდგინება შემდეგნაირად

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi(x-k), \quad f \in V_0,$$

რაც ნიშნავს, რომ V_0 შეიცავს იმ ფუნქციებს, რომლებიც $[k, k+1), k \in Z$ სახის ინტერვალებზე მუდმივ მნიშვნელობებს იღებს.

```
> P:=(x,n)->phi(x-n);
```

$$P := (x, n) \to \phi(x-n)$$

```
> A:=(x,n)->sum(a[j]*P(x,j),j=1..n);
```

$$A := (x, n) \to \sum_{j=1}^{n} a_j \, P(x, j)$$

```
> a[1]:=-2;
```

$$a_1 := -2$$

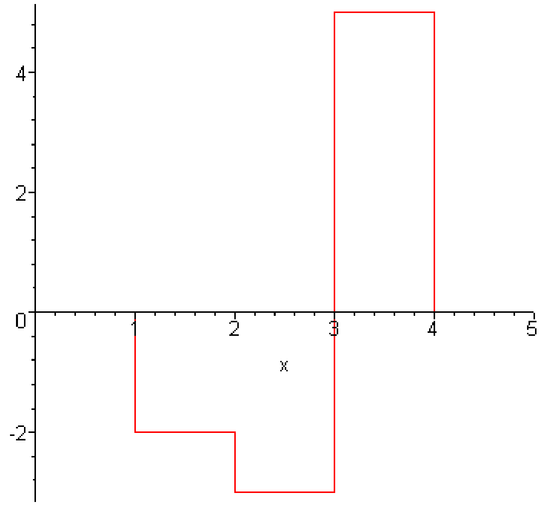
```
> a[2]:=-3;
```

$$a_2 := -3$$

```
> a[3]:=5;
```

$$a_3 := 5$$

```
> plot(A(x,3),x=0..5);
```



ადვილი დასანახია, რომ $\varphi_{0,n}(x), n \in Z$ ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებული ბაზისია V_0-ში.

განვიხილოთ $\varphi_{1,n}(x), n \in Z$ ფუნქციათა სისტემა, რომელიც მიიღება $\varphi(x)$ ფუნქციის ძვრისა და კუმშვის შედეგად, ე. ი.

$$\varphi(2x-n),\ n \in Z .$$

ადვილი დასანახია, რომ $\varphi(2x-n)$ ფუნქციის მატარებელი ორჯერ ნაკლები არის ვიდრე $\varphi_{0,n}(x)$ ფუნქციის მატარებელი. მართლაც,

$0 \le 2x-n < 1,\ n/2 \le x < (n+1)/2$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\text{supp}(\varphi(2x-n)) = \left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right].$$

$\varphi(2x-n), n \in Z$ ფუნქციათა სისტემა ორთოგონალურია, მაგრამ არ არის ნორმირებული. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $\sqrt{2}\varphi(2x-n),\ n \in Z$

ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს ორთონორმირებულ სისტემას $L^2(R)$-ში.
თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$V_1 := clos_{L^2}\{\varphi_{1,k}(x), k\in Z\},$$

სადაც

$$\varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x-k)$$

მაშინ $\varphi_{1,n}(x)$,$n\in Z$ ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებული ბაზისია V_1-ში.
ადვილი დასანახია, რომ

$$V_0 \subset V_1,$$

მართლაც

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + \varphi(2x-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}(x) = \sum_n h_n\varphi_{1,n}(x)$$

სადაც ნულისგან განსხვავებული კოეფიციენტებია მხოლოდ h_0 და h_1 და $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
ანალოგიურად, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნებს

$$\varphi_{2,k}(x) = 2\varphi(2^2x-k),$$

$$V_2 := clos\{\varphi_{2,k}(x), k\in Z\},$$

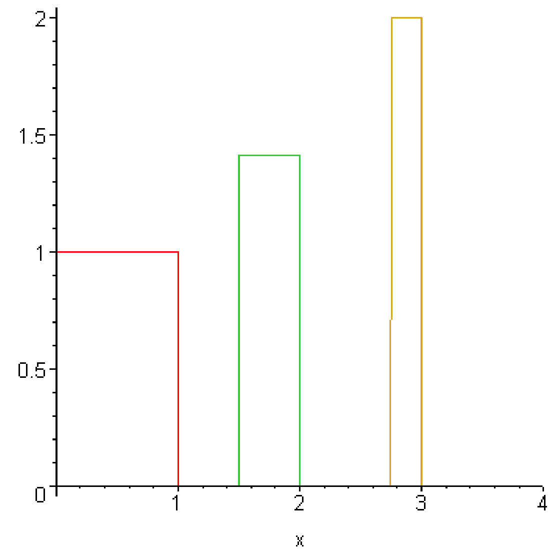
მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2,$$

$$\text{supp}(\varphi_{2,n}(x)) = \left[\frac{n}{2^2}, \frac{n+1}{2^2}\right]$$

და $\varphi_{2,n}(x), n\in N$ ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს ორთონორმირებულ ბაზის V_2-ში.
ავაგოთ $y=\varphi(x), y=\sqrt{2}\varphi(2x-3)$ და $y = 2\varphi(4x-11)$ ფუნქციის გრაფიკები

```
plot([phi(x),sqrt(2)*phi(2*x-3),2*phi(4*x-11)],x=0..4);
```



თუ გავაგრძელებთ ზემოთ მოყვანილ პროცესს, ნებისმიერი $j\in N$ ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ

$$\varphi_{j,k}(x):=2^{j/2}\varphi\left(2^{j}x-k\right)$$

ფუნქციათა ორთონორმირებული სისტემა , რომლისთვისაც

$$\operatorname{supp}(\varphi_{j,n})=\left[\frac{n}{2^{j}},\frac{n+1}{2^{j}}\right].$$

ვთქვათ

$$V_j:=clos_{L^2}\left\{\varphi_{j,k}(x),k\in Z\right\}.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_j.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოთ მივიღებთ ერთმანეთში ჩადგმულ $V_j\subset L^2(R)$ ქვესივრცეთა სისტემას, რომელთათვისაც

$$V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_j\subset\cdots.$$

ყოველ $V_j\subset L^2(R)$ სივრცეში $\left\{\varphi_{j,n}(x)\right\}$ ფუნქციათა სისტემა წარმოადგენს ორთონორმირებულ ბაზის. $\varphi_{j,n}(x), j,n\in N$ ფუნქციათა ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია წარმოადგენს უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას და რადგანაც ასეთ ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია $L^2(R)$-ში, ამიტომ დავასკვნით, რომ

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L^2(R).$$

ანალოგიურად შეიძლება განიმარტოს $V_j \subset L^2(R)$ უარყოფითი j-ებისათვის და მაშასადამე მივიღებთ, რომ

$$\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_j \subset \cdots$$

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = L^2(R),$$

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}.$$

10. ორთოგონალური პროექცია

ვთქვათ H ჰილბერტის სივრცეა და A, B მისი ორი ქვესიმრავლეა. ვიტყვით, რომ A ორთოგონალურია B-სი და ვწერთ $A \perp B$, თუ $(a,b)=0,\ \forall a \in A, \forall b \in B$.

ვთქვათ M არის H ჰილბერტის სივრცის სრული (წრფივი) ქვესივრცე და $v \in H$. ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვიპოვოთ ისეთი $w \in M$ რომ

$$v - w \perp M.$$

თუ $v \in M$, მაშინ ცხადია, რომ $w = v$. ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $v \notin M$. დაუშვათ, რომ ასეთი ელემენტი w არსებობს და x არის M-ის ელემენტი განსხვავებული w-გან. მაშინ პითაგორას თეორემის ძალით გვაქვს

$$\|v-x\|^2 = \|v-w+w-x\|^2 = \|v-w\|^2 + \|w-x\|^2,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\|v-w\|^2 \le \|w-x\|^2.$$

მაშასადამე

$$\|v-w\| = \inf_{x \in M} \|v-x\|. \qquad (1)$$

პირიქით, ვთქვათ $w \in M$ არისისეთი ელემენტი, რომლისთვისაც (1) შესრულებულია. მაშინ

$$\|v-w\|^2 \le \|v-w+tx\|^2 = \|v-w\|^2 + 2t(v-w,x) + t^2\|x\|^2$$

და ეს უკანასკნელი იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას, როცა

$$0 = t = -\frac{(v-w,x)}{\|x\|^2}$$

რაც ნიშნავს, რომ $(v-w,x)=0,\ \forall x \in M$, ე. ი. $v-w \perp M$. მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ შემდეგი ორი წინადადება ერთმანეთის ექვივალენტურია

1) $\|v-w\|=\inf_{x\in M}\|v-x\|$

2) $v-w\perp M$

ვთქვათ $m=\inf_{x\in M}\|v-x\|$. ძნელი დასანახია, რომ არსებობს (x_n) მიმდევრობა M-დან ისეთი, რომ

$$\|v-x_n\|\to m \quad (n\to\infty).$$

პირველ რიგში დავამტკიცოთ, რომ (x_n) მიმდევრობა არის კოშის მიმდევრობა. მართლაც, პარალელოგრამის წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$\|x_i-x_j\|^2=\|x_i-v+v-x_j\|^2=2\left(\|x_i-v\|^2+\|v-x_j\|^2\right)-\|2v-(x_j+x_i)\|^2.$$

რადგანაც, $\frac{1}{2}(x_i+x_j)\in M$, ამიტომ

$$\|2v-(x_j+x_i)\|^2=4\left\|v-\frac{1}{2}(x_j+x_i)\right\|^2\geq 4m^2,$$

მეორეს მხრივ,

$$\|x_i-v\|,\|x_j-v\|<m+\varepsilon.$$

მაშასადამე,

$$\|x_i-x_j\|^2=\|x_i-v+v-x_j\|^2\leq 4(m+\varepsilon)^2-4m^2=8m\varepsilon+\varepsilon^2.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (x_n) მიმდევრობა არის კოშის მიმდევრობა. რადგანაც M სივრცე არის სრული, ამიტომ არსებობს $w\in M$, ისეთი რომ

$$\|x_n-w\|\to 0,\ (n\to\infty).$$

და ბოლოს,

$$m\leq\|v-w\|\leq\|v-x_n\|+\|w-x_n\|<m+\varepsilon.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო ჩვენ ვასკვნით, რომ $\|v-w\|=m.$

11. პროექციის ოპერატორი

ნებისმიერი $j\in Z$-თვის განვიხილოთ ოპერატორი:

$$P_j: L^2(R)\to V_j,$$

$$P_j(f):=\sum_{n\in Z}(f,\varphi_{j,n})\varphi_{j,n}(x).$$

შევნიშნოთ, რომ აქ არ დგას საკითხი P_j ოპერატორის კრებადობის შესახებ, ვინაიდან ნებისმიერი დაფიქსირებული $x \in R$-თვის ჯამში

$$\sum_{n \in Z} \left(f, \varphi_{j,n}\right) \varphi_{j,n}(x)$$

მხოლოდ ერთი წევრი არის განსხვავებული ნულისგან.
განვიხილოთ ეს ოპერატორი უფრო დეტალურად. ვთქვათ, $f \in L^2(R)$. მაშინ

$$\left(f, \varphi_{0,n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x-n) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+n) \varphi(y) dy = \int_{0}^{1} f(y+n) dy = \int_{n}^{n+11} f(y) dy := f_{0n}$$

,

სადაც f_{0n} არის f ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა $[n, n+1)$ ინტერვალზე. მაშინ

$$P_0(f) := \sum_{n \in Z} \left(f, \varphi_{0,n}\right) \varphi_{0,n}(x) = \sum_{n \in Z} f_{0n} \varphi(x-n).$$

მაშასადამე $P_0(f)$ წარმოადგენს უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, რომელიც $[n, n+1)$ სახის ინტერვალებზე იღებს f ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას.
ანალოგიურად $P_1(f)$-თვის გვაქვს

$$\left(f, \varphi_{1,n}\right) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(2x-n) dx = \sqrt{2} \int_{n/2}^{(n+1)/2} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} f_{1,n},$$

$$f_{1,n} = 2 \int_{n/2}^{(n+1)/2} f(x),$$

$$P_1(f) := \sum_{n \in Z} \left(f, \varphi_{1,n}\right) \varphi_{1,n}(x) = \sum_{n \in Z} f_{1n} \varphi(2x-n).$$

მაშასადამე $P_1(f)$ წარმოადგენს უბან-უბან მუდმივ ფუნქციას, რომელიც $\left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ სახის ინტერვალებზე იღებს f ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას.

```
> phi:=x->piecewise(x<0,0,x<1,1,0);
```

$$\phi := x \to \text{piecewise}(x < 0, 0, x < 1, 1, 0)$$

```
> f:=(sin(Pi*x))/x;
```

$$f := \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

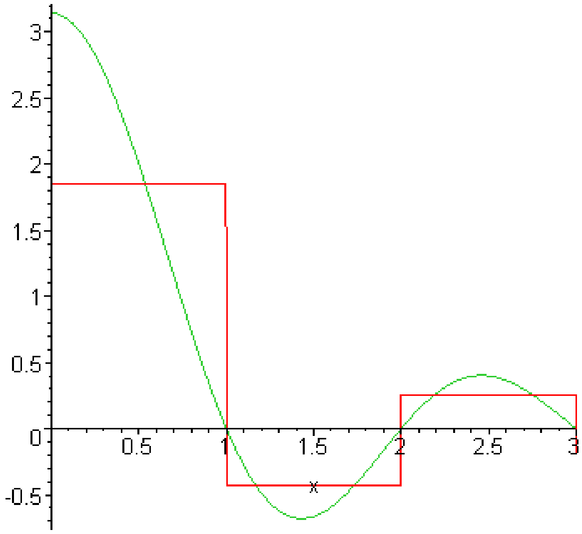
```
> g:=(n,j)->2^j*int(f,x=n/2^j..(n+1)/2^j);
```

$$g := (n, j) \to 2^j \int_{\frac{n}{2^j}}^{\frac{n+1}{2^j}} f \, dx$$

```
> p:=(k,j)->sum(g(n,j)*(phi(2^j*x-n)),n=0..k);
```

$$p := (k, j) \to \sum_{n=0}^{k} g(n, j)\, \phi(2^j x - n)$$

```
> plot([p(6,0),f],x=0..3);
```




```
> phi:=x->piecewise(x<0,0,x<1,1,0);
```

$$\phi := x \to \text{piecewise}(x < 0, 0, x < 1, 1, 0)$$

```
> f:=(sin(Pi*x))/x;
```

$$f := \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

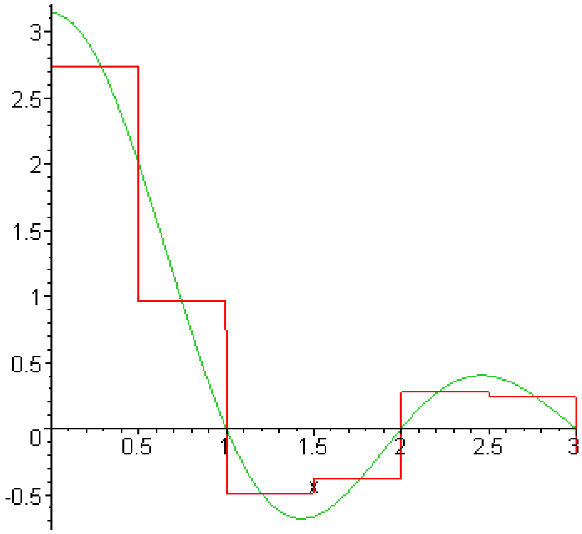
```
> g:=(n,j)->2^j*int(f,x=n/2^j..(n+1)/2^j);
```


$$g := (n, j) \to 2^j \int_{\frac{n}{2^j}}^{\frac{n+1}{2^j}} f \, dx$$


```
> p:=(k,j)->sum(g(n,j)*(phi(2^j*x-n)),n=0..k);
```


$$p := (k, j) \to \sum_{n=0}^{k} g(n, j)\, \phi(2^j x - n)$$

```
> plot([p(6,1),f],x=0..3);
```




```
> phi:=x->piecewise(x<0,0,x<1,1,0);
```

$$\phi := x \to \mathrm{piecewise}(x < 0, 0, x < 1, 1, 0)$$

```
> f:=(sin(Pi*x))/x;
```

$$f := \frac{\sin(\pi\, x)}{x}$$

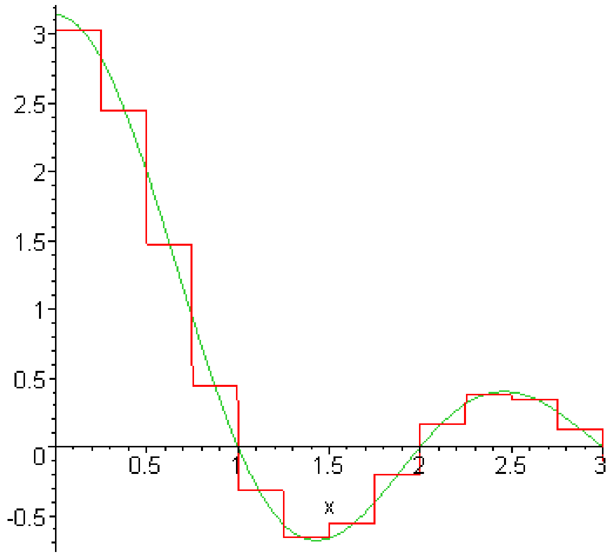
```
> g:=(n,j)->2^j*int(f,x=n/2^j..(n+1)/2^j);
```

$$g := (n, j) \to 2^j \int_{\frac{n}{2^j}}^{\frac{n+1}{2^j}} f\, dx$$

```
> p:=(k,j)->sum(g(n,j)*(phi(2^j*x-n)),n=0..k);
```

$$p := (k, j) \to \sum_{n=0}^{k} \mathrm{g}(n, j)\, \phi(2^j\, x - n)$$

```
> plot([p(12,2),f],x=0..3);
```




```
> phi:=x->piecewise(x<0,0,x<1,1,0);
```

$$\phi := x \to \text{piecewise}(x < 0, 0, x < 1, 1, 0)$$

```
> f:=(sin(Pi*x))/x;
```

$$f := \frac{\sin(\pi\, x)}{x}$$

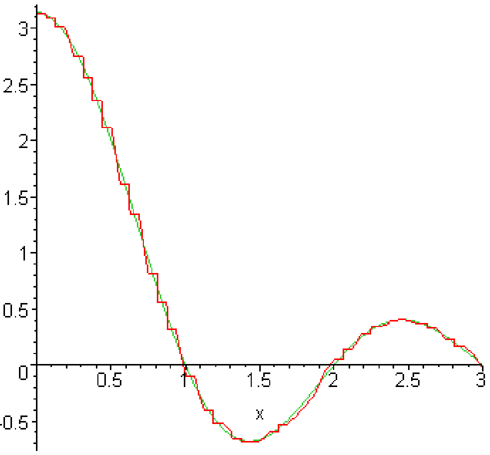
```
> g:=(n,j)->2^j*int(f,x=n/2^j..(n+1)/2^j);
```

$$g := (n, j) \to 2^j \int_{\frac{n}{2^j}}^{\frac{n+1}{2^j}} f\, dx$$

```
> p:=(k,j)->sum(g(n,j)*(phi(2^j*x-n)),n=0..k);
```

$$p := (k, j) \to \sum_{n=0}^{k} g(n, j)\, \phi(2^j\, x - n)$$

```
> plot([p(120,4),f],x=0..3);
```



განვიხილოთ სხვაობა

$$P_{j+1}(f)-P_j(f).$$

ეს სხვაობა ეკუთვნის V_{j+1} სივრცეს. დავამტკიცოთ, რომ

$$P_{j+1}(f)-P_j(f)\perp V_j .$$

ვთქვათ, $h\in V_j$. მაშინ

$$h=\sum_{s\in Z}\alpha_s\varphi_{j,s} .$$

ვინაიდან $\varphi_{j,s}\in V_j, s\in Z$ და $\left(\varphi_{j,s}\right)_{s\in Z}$ სისტემა არის ორთონორმირებული, ამიტომ

$$\left(P_j(f),h\right)=\sum_{n\in Z}\left(f,\varphi_{j,n}\right)\sum_{s\in Z}\alpha_s\left(\varphi_{j,n},\varphi_{j,s}\right)=\sum_{n\in Z}\alpha_n\left(f,\varphi_{j,n}\right). \tag{2}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\varphi_{j,s}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2s}+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2s+1} . \tag{3}$$

მაშინ (3) –ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}\left(P_{j+1}(f),h\right)&=\sum_{n\in Z}\left(f,\varphi_{j+1,n}\right)\sum_{s\in Z}\alpha_s\left(\varphi_{j+1,n},\varphi_{j,s}\right)\\&=\sum_{s\in Z}\alpha_s\sum_{n\in Z}\left(f,\varphi_{j+1,n}\right)\left(\varphi_{j+1,n},\varphi_{j,s}\right)\\&=\sum_{s\in Z}\alpha_s\sum_{n\in Z}\left(f,\varphi_{j+1,n}\right)\left(\varphi_{j+1,n},\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2s}+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2s+1}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s\in Z}\alpha_s\sum_{n\in Z}\left(f,\varphi_{j+1,n}\right)\left(\varphi_{j+1,n},\varphi_{j+1,2s}\right)\\&+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s\in Z}\alpha_s\sum_{n\in Z}\left(f,\varphi_{j+1,n}\right)\left(\varphi_{j+1,n},\varphi_{j+1,2s+1}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s\in Z}\ \alpha_s\left(f,\varphi_{j+1,2s}\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{s\in Z}\ \alpha_s\left(f,\varphi_{j+1,2s+1}\right)$$

$$=\sum_{s\in Z}\ \alpha_s\left(f,\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2s}+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,2s+1}\right)$$

$$=\sum_{s\in Z}\ \alpha_s\left(f,\varphi_{j,s}\right). \tag{4}$$

(2) და (4) –ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\left(P_{j+1}(f),h\right)-\left(P_j(f),h\right)=\left(P_{j+1}(f)-P_j(f),h\right)=0$$

ნებისმიერი h-თვის V_j-დან, რაც იმას ნიშნავს, რომ $P_{j+1}(f)-P_j(f)\perp V_j$. ვთქვათ

$$V_{j+1}=V_j\oplus V_j^{\perp}.$$

აღვნიშნოთ $V_j^{\perp}:=W_j$. მაშინ

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j.$$

რადგანაც $P_{j+1}(f)-P_j(f)\perp V_j$, ამიტომ $P_{j+1}(f)-P_j(f)\in W_j$ და ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$P_{j+1}(f)=P_j(f)+P_j^W(f).$$

ვთქვათ $\psi\in W_0$. რადგანაც $\psi\in W_0\subset V_1$, ამიტომ ის გაიშლება $\varphi(x-n)$ ბაზისის მიმართ. ე. ი. ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\psi=\sum_k\ c_k\varphi_{1,k}.$$

რადგანაც

$$V_1=V_0\oplus W_0$$

და

$$\psi\perp V_0$$

ამიტომ

$$\left(\psi,\varphi_{0,n}\right)=0.$$

მეორეს მხრივ $\varphi_{0,n}\in V_1$ და მაშასადამე ადგილი აქვს შემდეგ გაშლას

$$\varphi_{0,n}=\sum_k\ h_k\varphi_{1,k}.$$

როგორც ვიცით $h_{2n}=h_{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ და

$$\varphi_{0,n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2n}+\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2n+1}.$$

საიდანაც გვაქვს

$$\left(\sum_k c_k\varphi_{1,k}, \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2n} + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,2n+1}\right) = 0\,,$$

$$c_{2n}\frac{1}{\sqrt{2}} + c_{2n+1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 0, n \in Z\,.$$

უკანასკნელ განტოლებას აქვს უსასრულო ამონახსნი. ავიღოთ შემდეგი ამონახსნები:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, c_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

მაშინ

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1,1}(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1)\,.$$

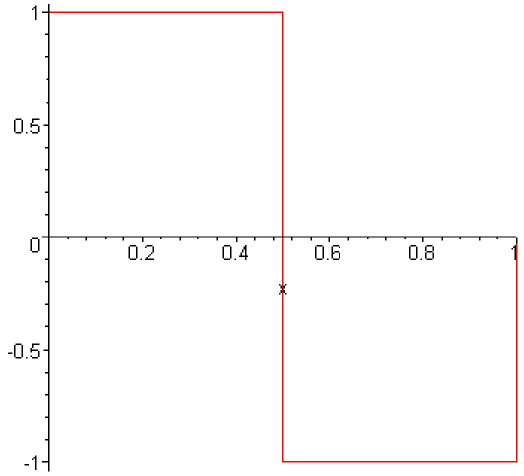
ამ ψ ფუნქცია უწოდებენ ჰაარის ვეველეტს. ძნელი დასანახია, რომ

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1/2) \\ -1, x \in [1/2,1) \\ 0,\ x \notin [0,1) \end{cases}.$$

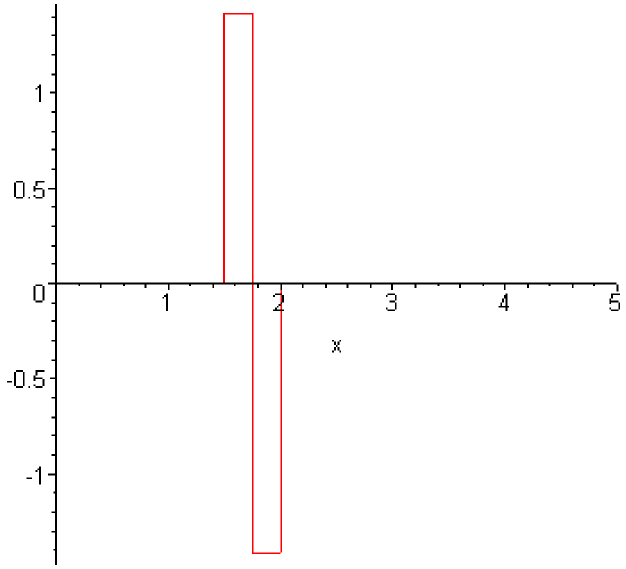
```
> psi:=x->phi(2*x)-phi(2*x-1);
```

$$\psi := x \to \phi(2\,x) - \phi(2\,x-1)$$

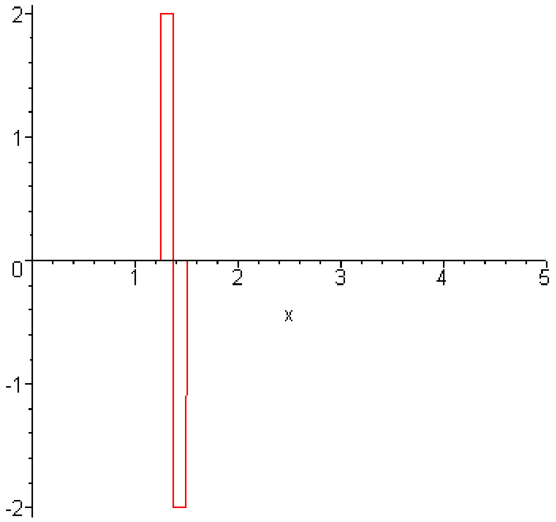
```
> plot(psi(x),x=0..1);
```




```
> plot(sqrt(2)*psi(2*x-3),x=0..5);
```




```
> plot(2*psi(4*x-5),x=0..5);
```



ადვილი დასანახია, რომ

$$\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n)=\frac{\varphi_{1,2n}}{\sqrt{2}}-\frac{\varphi_{1,2n+1}}{\sqrt{2}},\ n\in Z$$

წარმოადგენს ორთონორმირებულ სისტემას W_0-ში. გარდა ამისა $\psi_{0,n}(x)$ ორთოგონალურია $\varphi_{0,k}(x)$, მაშასადამე $(\psi_{0,n},\varphi_{0,n})_{n\in Z}$ ფუნქციათა სისტემა ორთონორმირებული სისტემაა V_1-ში. დავამტკიცოთ, რომ $(\psi_{0,n},\varphi_{0,n})_{n\in Z}$ სისტემა სრულია, მართლაც ადვილი დასანახია, რომ

$$\varphi_{1,0}=\frac{\varphi_{0,0}+\psi_{0,0}}{\sqrt{2}},\quad \varphi_{1,1}=\frac{\varphi_{0,0}-\psi_{0,0}}{\sqrt{2}}$$

რაც ამტკიცებს მოცემული სისტემის სისრულეს. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ნებისმიერი სრული ორთონორმირებული სისტემა ბაზისია დავასკვნით, რომ $\left(\psi_{0,n},\varphi_{0,n}\right)_{n\in Z}$ წარმოადგენს ახალ ბაზის V_1-ში და მაშასადამე $\left(\psi_{0,n}\right)_{n\in Z}$ სისტემა ორთონორმირებული ბაზისია W_0-ში.

მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\psi(x-n),\ n\in Z$ სისტემა ბაზისია W_0-ში. ხოლო რადგანაც $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$, ამიტომ ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ სისტემა,

$$2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right),\ n\in Z$$

ბაზისია W_j-ში.

რადგანაც $V_j=V_{j-1}\oplus W_{j-1}$, ამიტომ $V_{j+1}=V_{j-1}\oplus W_{j-1}\oplus W_j$. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j=\{0\},$$

მივიღებთ

$$V_{j+1}=\bigoplus_{i\le j} W_i,$$

მეორეს მხრივ, რადგანაც

$$clos_{L^2}\left(\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j\right)=L^2(R),$$

ამიტომ

$$L^2(R)=\oplus_{i=-\infty}^{+\infty} W_i. \qquad (5)$$

განმარტება. W_j სივრცეს უწოდებენ ჰაარის ვეველეტთა სივრცეს, ხოლო ψ ფუნქციას- კი ჰაარის ვეველეტს.

რადგანაც $\{\psi_{j,k}: k\in Z\}$ სისტემა ნებისმიერი ფიქსირებული j-თვის ორთონორმირებული ბაზისია W_j სივრცეში, ამიტომ (5)-ის ძალით $\{\psi_{j,k}: j,k\in Z\}$ სისტემა ორთონორმირებული ბაზისია $L^2(R)$-ში და ამ სისტემას უწოდებენ ჰაარის ვეველეტ ბაზის.

როგორც ვიცით, $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$, რაც ნიშნავს, რომ

$$P_{j+1}(f)=P_j(f)+P_j^W(f)=\sum_{k\in Z} a_{j,k}\varphi_{j,k}(x)+\sum_{k\in Z} d_{j,k}\psi_{j,k}(x),$$

სადაც

$$a_{j,k}:=(f,\varphi_{j,k})=\int_R f(x)\varphi_{j,k}(x)dx$$

და

$$d_{j,k}:=(f,\psi_{j,k})=\int_R f(x)\psi_{j,k}(x)dx.$$

დასკვნა. ჩვენ განვიხილეთ ფუნქცია $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ 0, & x\notin[0,1)\end{cases}$ და $L^2(R)$ სივრცის ქვესივრცეები $V_j:=clos_{L^2}\{\varphi_{j,k}(x),k\in Z\}$, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ თვისებებს:

$$\ldots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_j\subset\cdots \tag{6}$$

$$\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j}=L^2(R), \tag{7}$$

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j=\{0\}, \tag{8}$$

$$f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1} \tag{9}$$

მაშინ არსებობს $L^2(R)$ სივრცის შემდეგი ორთოგონალური დაშლა

$$L^2(R)=\oplus_{i=-\infty}^{+\infty} W_i. \tag{10}$$

თუ $\psi(x-n)$, $n\in Z$ სისტემა არის W_0 სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, მაშინ ამ სისტემის ძვრისა და კუმშვის შედეგად მიღებული

სისტემა $2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right)$, $n\in Z$ იქნება ბაზისი W_J სივრცეში და მაშასადამე (10)-ის ძალით $\left\{2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right),\ n,j\in Z\right\}$ სისტემა, რომელიც მიიღება $L^2(R)$ კლასის ერთი ფუნქციის ძვრისა და კუმშვის შედეგა წარმოადგენს $L^2(R)$ სივრცის ორთონორმირებულ ბაზის (ვეველეტს).

12. მაშტაბის ფუნქცია

განმარტება. $\varphi\in L^2(R)$ ფუნქციას ეწოდება მაშტაბის ფუნქცია, თუ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z} h_n\varphi(2x-n),$$

სადაც

$$\sum_{n\in Z} |h_n|^2<\infty .$$

ქვემოთ მოვიყვანოთ მაშტაბის ფუნქციის რამოდენიმე მაგალითი.

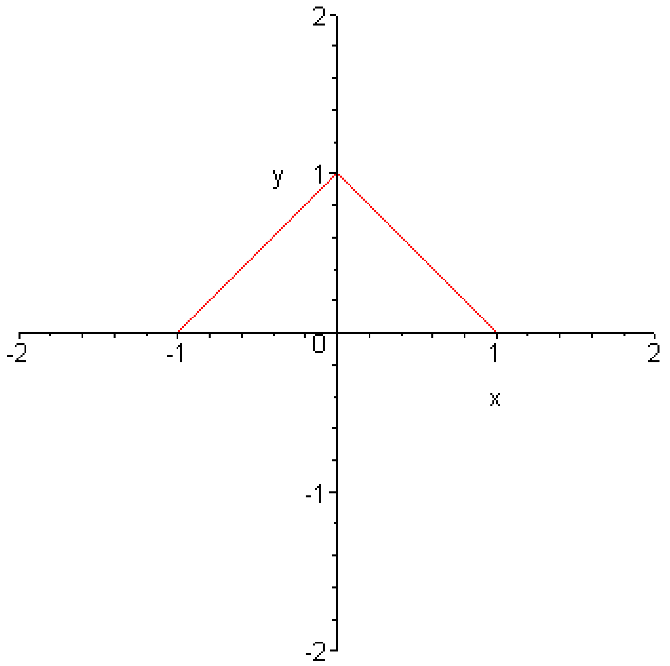
მაგალითი 1. პირველი ხარისხის B-სპლაინი:

$$\varphi(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\in[-1,1]\\ 0, & sxvagan\end{cases}$$

```
> phi:=x->piecewise(x<-1,0,x<=1,1-abs(x),0);;
```

$$\phi := x \to \mathrm{piecewise}(x < -1, 0, x \le 1, 1-|x|, 0)$$

```
> plot(phi(x),x=-2..2,y=-2..2);
```



ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\varphi(2x+1)+\varphi(2x)+\frac{1}{2}\varphi(2x-1)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ φ ფუნქცია მაშტაბის ფუნქციაა.

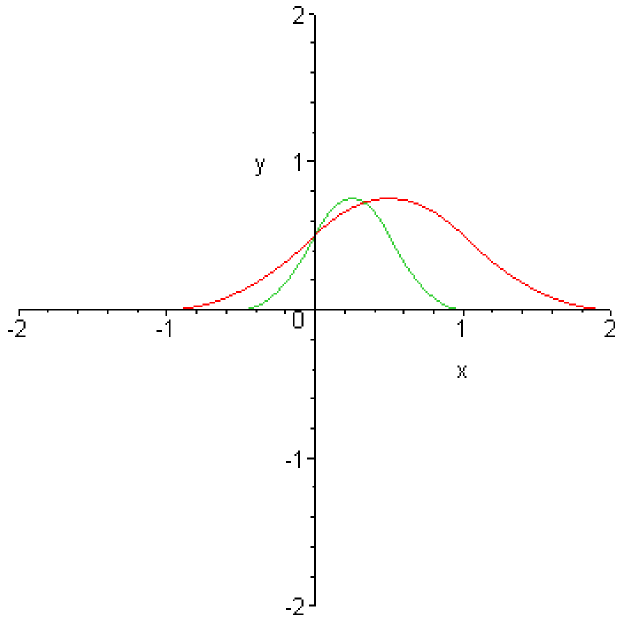
მაგალითი 2. მეორე ხარისხის B-სპლაინი:

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1)^2, & x\in[-1,0]\\ \frac{3}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & x\in[0,1]\\ \frac{1}{2}(x-2)^2, & x\in[1,2]\\ 0, & x\notin[-1,2]\end{cases}$$

```
> phi:=x->piecewise(x<-1,0,x<0,(1/2)*(x+1)^2,x<1,(3/4)-(x-
(1/2))^2,x<2,(1/2)*(x-2)^2,0);
```

$$\phi := x \to \text{piecewise}\left(x<-1, 0, x<0, \frac{1}{2}(x+1)^2, x<1, \frac{3}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2, x<2, \frac{1}{2}(x-2)^2, 0\right)$$

```
> plot([phi(x),phi(2*x)],x=-2..2,y=-2..2);
```

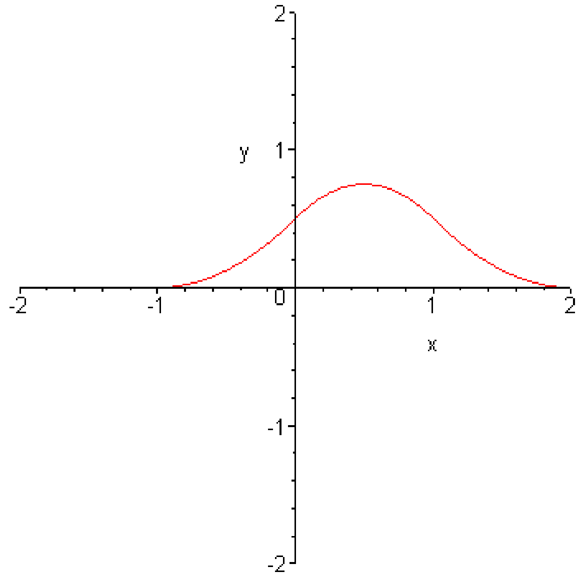


ადვილი დასანახია, რომ

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{4}\varphi_2(2x+1)+\frac{3}{4}\varphi_2(2x)+\frac{3}{4}\varphi_2(2x-1)++\frac{1}{4}\varphi_2(2x-2).$$

შევამოწმოთ მოცემული ტოლობის სამართლიანობა პროგრამა MAPLE –ის მეშვეობით გრაფიკულად, მართლაც

```
> A:=(1/4)*phi(2*x+1)+(3/4)*phi(2*x)+(3/4)*phi(2*x-
1)+(1/4)*phi(2*x-2):
> plot([A,phi(x)],x=-2..2,y=-2..2);
```



მაგალითი 3. ვთქვათ $\varphi(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ წარმოადგენს მაშტაბის ფუნქციას. მართლაც,

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{n} h_n\varphi(2x-n)$$

სადაც

$$h_0=\frac{1}{2},\ h_{2n+1}=(-1)^n\frac{2\sqrt{2}}{\pi(2n+1)},\ \ h_{2n}=0\,.$$

13. ფურიეს გარდაქმნა

განმარტება. ვთქვათ $f\in L(R)$. მაშინ f ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა განიმარტება შემდეგნაირად

$$F(f):=f(w):=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx,\ \ w\in R\,. \tag{13}$$

შევნიშნოთ, რომ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx$ ინტეგრალი გაიგება როგორც

$$\lim_{a,b\to+\infty}\int_{-a}^{b} f(x)e^{-iwx}dx\,.$$

განმარტება. ვთქვათ $f\in L(R)$. მაშინ f ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა განიმარტება როგორც

$$F^{-1}(f):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)e^{iwx}dw,\ \ . \tag{14}$$

ეს უკანასკნელი ინტეგრალი გაიგება, როგორც მთავარი მნიშვნელობა, ე. ი.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)e^{iwx}dw=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(w)e^{iwx}dw.$$

თეორემა. ვთქვათ $f\in L(R)$ და f ფუნქცია x წერტილში აკმაყოფილებს დინის პირობას. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(w)e^{iwx}dw\ \ .$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$J(A):=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt\right)e^{iwx}dw,$$

ფუბინის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$J(A):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-A}^{A} e^{iw(x-t)}dw\right)dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(x-t)}{x-t}dt$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du$$

რადგანაც

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin Au}{u}du=1,\quad A>0,$$

მივიღებთ

$$J(A)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Azdz$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{+N}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Azdz$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{|z|\geq N}\frac{f(x+z)}{z}\sin Azdz-\frac{f(x)}{\pi}\int_{|z|\geq N}\frac{1}{z}\sin Azdz\,.$$

ადვილი დასანახია, რომ მეორე და მესამე წევრი მიისწრაფის ნულისაკენ, რაც შეეხება პირველ წევრს, ის მიისწრაფის ნულისაკენ თეორემის პირობის ძალით. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ საზოგადოდ იმ ფაქტიდან, რომ $f\in L(R)$ არ გამომდინარეობს $f\in L(R)$, მართლაც

მაგალითი. ვიპოვოთ შემდეგი ფუნქციის

$$f(x)=\begin{cases}1,|x|\leq a'\\ 0,|x|>a\end{cases}$$

ფურიეს გარდაქმნა.

$$f(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx=\int_{-a}^{a} e^{-iwx}dx=\frac{e^{iwa}-e^{-iwa}}{iw}=\frac{2\sin wa}{w},$$

ხოლო ეს უკანასკნელი ინტეგრებადი არ არის.

დაამტკიცეთ:

1) $f(x)=1_{[a,b]}(x), \qquad \hat f(w)=\dfrac{e^{-iaw}-e^{-ibw}}{iw}$;

2) $f(x)=1_{[0,1]}(x), \qquad \hat f(w)=e^{-iw/2}\,\dfrac{\sin(w/2)}{w/2}$;

3) $\psi(x)=\begin{cases}-1, x\in[-a,0)\\ 1, x\in[0,a)\\ 0, x\notin[-a,a)\end{cases}, \quad \hat\psi(w)=2\dfrac{\sin^2(aw/2)}{iw/w}$;

4) $f(x)=\dfrac{\sin ax}{\pi x}, \quad \hat f(w)=1_{[-a,a]}(w)$;

5) $f(x)=\dfrac{\sin a(x-n)}{\pi(x-n)}, \quad \hat f(w)=e^{-iwn}1_{[-a,a]}(w)$;

6) $\varphi(x)=\begin{cases}1-|x|, \ x\in[-1,1]\\ 0, \ sxvagan\end{cases}, \quad \hat f(w)=\left(\dfrac{\sin w/2}{w/2}\right)^2$

7) $\varphi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+1)^2, \ x\in[-1,0]\\ \dfrac{3}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2, x\in[0,1]\\ \dfrac{1}{2}(x-2)^2, \ x\in[1,2]\\ 0, \ x\notin[-1,2]\end{cases}, \qquad \hat f(w)=e^{-iw/2}\left(\dfrac{\sin w/2}{w/2}\right)^3.$

მოვიყვანოთ ფურიეს გარდაქმნის რამოდენიმე თვისება:

1) ვთქვათ მიმდევრობა $\{f_n : n\in N\}$ კრებადია L ნორმით. მაშინ მიმდევრობა $\{\hat f_n : n\in N\}$ თანაბრად კრებადია მთელ ღერძზე.

მართლაც, რადგანაც

$$|\hat f_n(w)-\hat f_m(w)|\le \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)-f_m(x)|\,dx$$

ამიტომ დავასკვნით თვისების სამართლიანობას.

2) ვთქვათ $f\in L(R)$. მაშინ $\hat f(w)$ ფუნქცია არის შემოსაზღრული და უწყვეტი მთელ ღერძზე, რომელიც მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $|\lambda|\to\infty$.

დამტკიცება. ფუნქციის შემოსაზღრულობა გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტიდან, რომ

$$|\hat f(w)|\le \|f\|_1.$$

ვთქვათ $f(x)=1_{(a,b)}(x)$. მაშინ

$$\hat{f}(w)=\int_a^b e^{-iwx}dx=\frac{e^{-iwb}-e^{-iwa}}{iw},$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\hat{f}(w)\to 0,\ |w|\to\infty. \quad (15)$$

ვინაიდან ფურიეს გარდაქმნას გააჩნია წრფივობის თვისება, ამიტომ (15) სამართლიანია უბან-უბან მუდმივი ფუნქციებისათვის. თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ ასეთი ფუნქციათა სიმრავლე ყველგან მკვრივია $L(R)$, თვისება 1)-ის გამოყენებით დავასკვნით მოცემული თვისების სამართლიანობას.

3) ვთქვათ $f'\in C(R)\cap L(R)$ მაშინ

$$\hat{f'}(w)=iw\hat{f}(w).$$

დამტკიცება. თეორემის პირობის ძალით

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt,$$

მეორეს მხრივ თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $f\in L(R)$ დავასკვნით, რომ

$$f(x)\to 0,\ x\to\pm\infty,$$

მაშასადამე,

$$\hat{f'}(w)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iwx}dx=f(x)e^{-iwx}\Big|_{-\infty}^{\infty}+iw\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx=iw\hat{f}(w).$$

5) ვთქვათ $f^{(k)}\in C(R)\cap L(R)$ მაშინ

$$\hat{f^{(k)}}(w)=(iw)^k\hat{f}(w).$$

6) ვთქვათ $f(x),xf(x),...,x^p f(x)\in L(R)$. მაშინ $\hat{f}(w)$ წარმოებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\left(\hat{f}(w)\right)^{k}=F\left((-ix)^k f(x)\right),\ k=0,1,2,...,p.$$

ვთქვათ $f_1,f_2\in L(R)$. მაშინ f_1 და f_2 ფუნქციათა ნახვევი განიმარტება შემდეგნაირად

$$f:=f_1*f_2:=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi.$$

7) $\widehat{f_1*f_2}=\hat{f_1}\hat{f_2}$.

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_1(\xi)\,f_2(x-\xi)\right|dx\right)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_1(\xi)\right|\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_2(x-\xi)\right|dx\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_1(\xi)\right|d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_2(x\xi)\right|dx<\infty\,,$$

მაშინ ტონელის თეორემის ძალით არსებობს ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)\,f_2(x-\xi)\,d\xi dx\,.$$

მაშასადამე

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iwx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)\,f_2(x-\xi)\,d\xi\right)e^{-iwx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_2(x-\xi)e^{-iwx}dx\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\eta)e^{-iw\eta}e^{-iw\xi}d\eta\right)d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)e^{-iw\xi}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\eta)e^{-iw\eta}d\eta\,.$$

8) სამართლიანია შემდეგი

$$f(ax)=\frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{w}{a}\right),\ f(x-b)=e^{-ibw}\hat{f}(w),\ e^{ix\tau}f(x)=\hat{f}(w-\tau)\,.$$

ჩვენ განვიხილეთ $f\in L(R)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა. ვთქვათ $f\in L^2(R)$, მაშინ შეიძლება მოხდეს, რომ $f\notin L(R)$. ასეთ შემთხვევაში ფურიე გარდაქმნა განიმარტება განსხვავებით. ამასთან დაკავშირებით სამართლიანია პლანშერელის შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ $f\in L^2(R)$. მაშინ

$$g_M(w):=\int_{-M}^{M}f(x)e^{-iwx}dx$$

ფუნქცია მიეკუთნება $L^2(R)$ კლასს. $g_M(f)$ ფუნქციათა მიმდევრობა $L^2(R)$-ის ნორმით კრებადია რომელიღაც $g\in L^2(R)$ ფუნქციისაკენ, ამასთან

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(w)|^2\,dw=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx\,. \qquad (16)$$

ამ g ფუნქციას უწოდებენ $f\in L^2(R)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნას. თუ $f\in L(R)$ მაშინ g ფუნქცია ემთხვევა f ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნას.

ვთქვათ $f=f_1+f_2$, მაშინ (16) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(g_1(w)+g_2(w)\right)\overline{\left(g_1(w)+g_2(w)\right)}dw=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)\overline{\left(f_1(x)+f_2(x)\right)}dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(g_1(w)\right)\overline{\left(g_1(w)\right)}+2\operatorname{Re}\left(g_1(w)\right)\overline{\left(g_2(w)\right)}+\left(g_2(w)\right)\overline{\left(g_2(w)\right)}\right)dw$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(f_1(x)\right)\overline{\left(f_1(x)\right)}+2\operatorname{Re}\left(f_1(x)\right)\overline{\left(f_2(x)\right)}+\left(f_2(x)\right)\overline{\left(f_2(x)\right)}\right)dx,$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\operatorname{Re}\left(g_1,g_2\right)=2\pi\operatorname{Re}\left(f_1,f_2\right),$$

მეორეს მხრივ, რადგანაც

$$\operatorname{Im}(u,v)=\operatorname{Re}(u,iv)$$

მივიღებთ

$$\operatorname{Im}\left(g_1,g_2\right)=2\pi\operatorname{Im}\left(f_1,f_2\right)$$

და მაშასადამე

$$\left(g_1,g_2\right)=2\pi\left(f_1,f_2\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(g_1(w)\right)\overline{\left(g_2(w)\right)}dw=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left(f_1(x)\right)\overline{\left(f_2(x)\right)}dx\quad.$$

14. მულტიანალიზი

განმარტება. ვიტყვით, რომ მოცემულია ორთოგონალური მულტიანალიზი, თუ არსებობს $L^2(R)$ სივრცის ჩაკეტილ ქვესიმრავლეთა მიმდევრობა $V_j, j\in Z$ ისეთი, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $\cdots\subset V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots$
2) $\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(R)$;
3) $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$;

4) $f(x)\in V_j \Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$;

5) არსებობს $\varphi\in V_0$ ფუნქცია, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ $\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n), n\in Z$ სისტემა წარმოადგენს ორთონორმირებულ ბაზის V_0-ში.

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს აუცილებელ და საკმარის პირობას იმისათვის, რომ $\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n), n\in Z$ იყოს ორთონორმალური ბაზისი V_0-ში. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. იმისათვის, რომ $\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n), n\in Z$ სისტემა იყოს ორთონორმალური ბაზისი V_0-ში აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\sum_{n\in Z}\left|\hat{\varphi}(w+2\pi n)\right|^2=1 \text{ თ. ყ.}$$

დამტკიცება. პლანშერელის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$(\varphi,\varphi_n)=\int_R \varphi(x)\overline{\varphi(x-n)}dx=\frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\varphi}(w)\overline{\hat{\varphi}(w-n)}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R \hat{\varphi}(w)\overline{e^{-inw}\hat{\varphi}(w)}dw=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{inw}\hat{\varphi}(w)\overline{\hat{\varphi}(w)}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{inw}\left|\hat{\varphi}(w)\right|^2dw=\frac{1}{2\pi}\left(\cdots+\int_{-2\pi}^{0}+\int_{0}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{4\pi}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{inw}\sum_{k\in Z}\left|\hat{\varphi}(w+2\pi k)\right|^2dw.$$

ვთქვათ $\sum_{n\in Z}\left|\hat{\varphi}(w+2\pi n)\right|^2=1$ თ. ყ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$(\varphi,\varphi_n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{inw}dw=\begin{cases}1, n=0\\ 0, n\neq 0\end{cases}.$$

დავამტკიცოთ პირიქით, ვთქვათ

$$(\varphi,\varphi_n)=\begin{cases}1, n=0\\ 0, n\neq 0\end{cases}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$g(w):=\sum_{k\in Z}\left|\hat{\varphi}(w+2\pi k)\right|^2,$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\hat{g}(n)=\begin{cases}1, n=0\\ 0, n\neq 0\end{cases},$$

და მაშასადამე g ფუნქციის ფურიეს მწკრივი არის

$$\sum_{n\in Z} g(n)e^{inw} = g(0) = 1$$

რაც ნიშნავს, რომ $g(w)=1$ თ. ყ. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ $\varphi(x)$ მაშტაბის ფუნქციაა. მაშინ როგორც ვიცით ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{n} h_n \varphi(2x-n),$$

სადაც

$$\sum_{n\in Z} |h_n|^2 < \infty .$$

თუ მოვახდენთ ფურიეს გარდაქმნას მივიღებთ

$$\varphi(w) = H_0\left(\frac{w}{2}\right)\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

სადაც

$$H_0(w) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} h_n e^{-inw} .$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა ვთქვათ $\varphi(x)$ მაშტაბის ფუნქციაა და $\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n), n\in Z$ ორთონორმირებული ბაზისია V_0-ში. მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$|H_0(w)|^2 + |H_0(w+\pi)|^2 = 1 \quad \text{თ. ყ.}$$

დამტკიცება. რადგანაც

$$\sum_{n\in Z} \left|\varphi(w+2\pi n)\right|^2 = 1$$

და

$$\varphi(w) = H_0\left(\frac{w}{2}\right)\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

მივიღებთ

$$\sum_{n\in Z} \left|\varphi(w+2\pi n)\right|^2 = \sum_{n\in Z} \left|H_0\left(\frac{w}{2}+\pi n\right)\varphi\left(\frac{w}{2}+\pi n\right)\right|^2 .$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $w/2=\xi$. მაშინ

$$\sum_{n\in Z} \left|\varphi(w+2\pi n)\right|^2 = \sum_{n\in Z} \left|H_0(\xi+\pi n)\varphi(\xi+\pi n)\right|^2$$

$$=\sum_{l\in Z}\left|H_0(\xi+2\pi l)\varphi(\xi+2\pi l)\right|^2+\sum_{l\in Z}\left|H_0(\xi+2\pi l+\pi)\varphi(\xi+2\pi l+\pi)\right|^2$$

$$=\sum_{l\in Z}\left|H_0(\xi+2\pi l)\varphi(\xi)\right|^2+\sum_{l\in Z}\left|H_0(\xi+\pi)\varphi(\xi+2\pi l+\pi)\right|^2$$

$$=|H_0(\xi)|^2+|H_0(\xi+\pi)|^2=1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ $\varphi\in L^2(R)$. განვიხილოთ $L^2(R)$ სივრცის ქვესიმრავლეები $V_j:=clos_{L^2}\left\{2^{j/2}\varphi(2^jx-k),k\in Z\right\}$. ვიპოვოთ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $V_j, j\in Z$ მიმდევრობა ქმნიდეს ორთოგონალურ მულტიანალიზს. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა ვთქვათ $\varphi\in L^2(R)$ მაშტაბის ფუნქციაა. იმისათვის, რომ $V_j, j\in Z$ მიმდევრობა ქმნიდეს ორთოგონალურ მულტიანალიზს აუცილებელი და საკმარისია, რომ

1) $\sum_{n\in Z}\left|\varphi(w+2\pi n)\right|^2=1$ თ. ყ.

2) არსებობდეს 2π პერიოდული $H_0(w)\in L^2(0,2\pi)$ ფუნქცია, ისეთი რომ

$$\varphi(w)=H_0\left(\frac{w}{2}\right)\varphi\left(\frac{w}{2}\right) \text{ თ. ყ. } w\in R^1;$$

3) $\lim_{k\to+\infty}\left|\varphi\left(\frac{w}{2^k}\right)\right|=1$ თ. ყ. $w\in R^1$.

15. ორთოგონალური ვეველეტი

ვთქვათ $V_j, j\in Z$ მიმდევრობა ქმნიდეს ორთოგონალურ მულტიანალიზს. მაშინ როგორც ვიცით

$$V_0\oplus W_0=V_1,\ W_0\perp V_0,$$

$$V_j\oplus W_j=V_{j+1},\ W_j\perp V_j,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$L^2(R)=\underset{j\in Z}{\oplus}W_j$$

და

$$g(x)\in W_j \Leftrightarrow g(2x)\in W_{j+1}.$$

სამართლიანის შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ $\psi\in L^2(R)$. მაშინ იმისათვის, რომ $\psi_{j,n}(x)=2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right), j,n\in Z$ სისტემა იყოს ორთონორმირებული ბაზისი W_j-ში აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z$ სისტემა იყოს ორთონორმირებული ბაზისი W_0-ში.

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ

$$\left(\psi_{j,n},\psi_{j,m}\right)=\int_R 2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right)2^{j/2}\psi\left(2^j x-m\right)dx$$

$$\left(\psi_{j,n},\psi_{j,m}\right)=\int_R \psi(x-n)\psi(x-m)dx=\left(\psi_{0,n},\psi_{0,m}\right),$$

რაც ნიშნავს იმას, რომ $\psi_{j,n}(x)=2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right), n\in Z$ სისტემა იყოს ორთონორმირებული W_j-ში აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z$ სისტემა იყოს ორთონორმირებული W_0-ში.

ეხლა დავამტკიცოთ, რომ იმისათვის, რომ $\psi_{j,n}(x)=2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right), n\in Z$ სისტემა იყოს ბაზისი W_j-ში აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z$ სისტემა იყოს ბაზისი W_0-ში, მართლაც ვთქვათ $g(x)\in W_j$, მაშინ როგორც ვიცით $g\left(2^{-j}x\right)\in W_0$ და ადგილი აქვს დაშლას

$$g\left(2^{-j}x\right)=\sum_{k\in Z} g_k\psi(x-k),$$

$$g(x)=\sum_{k\in Z} 2^{-j/2}g_k 2^{j/2}\psi\left(2^j x-k\right)=\sum_{k\in Z} 2^{-j/2}g_k\psi_{j,k}(x)$$

და მაშასადამე იმ ფაქტიდან, რომ $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z$ სისტემა არის ბაზისი W_0-ში გამომდინარეობს, რომ $\psi_{j,n}(x)=2^{j/2}\psi\left(2^j x-n\right), n\in Z$ სისტემა

არისს ბაზისი W_j-ში. ანალოგიურად დამტკიცდება პირიქით. თეორემა დამტკიცებულია.

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ იქნება აგებული $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z$ ორთონორმირებული ბაზისი W_0-ში, მაშინ $\psi_{j,n}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-n), n\in Z$ სისტემა იყოს ორთონორმირებული ბაზისი W_j-ში . ამასთან, რადგანაც

$$L^2(R)=\bigoplus_{j\in Z} W_j$$

ამიტომ $\psi_{j,n}(x)=2^{j/2}\psi(2^j x-n), n, j\in Z$ სისტემა იქნება ორთონორმირებული ბაზისი $L^2(R)$-ში (ორთოგონალური ვეველეტი). მაშასადამე, ვეველეტის აგების ამოცანა დადის W_0 სივრცეში $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z$ სახის ორთონორმირებული ბაზისის აგებაში. სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. ვთქვათ $V_j, j\in Z$ მიმდევრობა ქმნის ორთოგონალურ მულტიანალიზს. მაშინ არსებობს $\psi\in L^2(R)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $\psi(x-n), n\in Z$ სისტემა ქმნის ორთონორმირებულ ბაზის W_0-ში. ასეთი $\psi(x)$ ფუნქცია მოიცემა ტოლობით

$$\psi(w)=e^{iw/2}\overline{H_0\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}\varphi\left(\frac{w}{2}\right) \quad , \qquad (17)$$

რაც ექვივალენტურია შემდეგის

$$\psi(x)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}(-1)^{n+1}\overline{h}_{-n-1}\varphi(2x-n) \quad . \qquad (18)$$

დამტკიცება. პირველ რიგში დავამტკიცოთ, რომ (17) და (18) ტოლობები ექვივალენტურია. როგორც ვიცით

$$H_0(w)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z} h_n e^{-inw},$$

მაშინ

$$\psi(w)=e^{iw/2}\overline{H_0\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$=e^{iw/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}\bar{h}_n\overline{e^{-in(w/2+\pi)}}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{iw/2}\sum_{n\in Z}\bar{h}_n e^{in(w/2+\pi)}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{iw/2}\sum_{n\in Z}\bar{h}_n e^{inw/2}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)e^{in\pi}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{iw/2}\sum_{n\in Z}(-1)^n\bar{h}_n e^{inw/2}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}(-1)^n\bar{h}_n e^{i(n+1)w/2}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}(-1)^{n+1}\bar{h}_{-n-1}e^{-inw/2}\varphi\left(\frac{w}{2}\right),$$

მეორეს მხრივ,

$$\psi(w)=\sqrt{2}\sum_{n\in Z}(-1)^{n+1}\bar{h}_{-n-1}\varphi(2x-n)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n\in Z}(-1)^{n+1}\bar{h}_{-n-1}e^{-inw/2}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}(-1)^{n+1}\bar{h}_{-n-1}e^{-inw/2}\varphi\left(\frac{w}{2}\right).$$

რაც ამტკიცებს (17) და (18) ტოლობების ექვივალენტურობას.

დავამტკიცოთ, რომ $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z$ სისტემა ორთოგონალურია.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემის ძალით საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ

$$\sum_{n\in Z}\left|\psi(w+2\pi n)\right|^2=1 \text{ თ. ყ.}$$

მართლაც,

$$\sum_{n\in Z}\left|\psi(w+2\pi n)\right|^2=\sum_{n\in Z}\left|H_0\left(\frac{w}{2}+\pi n+\pi\right)\right|^2\left|\varphi\left(\frac{w}{2}+\pi n\right)\right|^2$$

$$=\sum_{n\in Z}\left|H_0\left(\frac{w}{2}+2\pi n+\pi\right)\right|^2\left|\varphi\left(\frac{w}{2}+2\pi n\right)\right|^2$$

$$+\sum_{n\in Z}\left|H_0\left(\frac{w}{2}+2\pi n+2\pi\right)\right|^2\left|\varphi\left(\frac{w}{2}+2\pi n+\pi\right)\right|^2$$

$$=\left|H_0\left(\frac{w}{2}+\pi\right)\right|^2\sum_{n\in Z}\left|\varphi\left(\frac{w}{2}+2\pi n\right)\right|^2$$

$$+\left|H_0\left(\frac{w}{2}\right)\right|^2\sum_{n\in Z}\left|\varphi\left(\frac{w}{2}+2\pi n+\pi\right)\right|^2$$

$$=\left|H_0\left(\frac{w}{2}+\pi\right)\right|^2+\left|H_0\left(\frac{w}{2}\right)\right|^2=1 \quad \text{თ. ყ.}$$

ეხლა დავამტკიცოთ, რომ V_0 და W_0 სივრცეები ორთოგონალურია, ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ყოველი $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n)$ ფუნქცია ორთოგონალურია V_0 სივრცის, ამ უკანასკნელის დასამტკიცებლად კი საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n)$ ფუნქცია ორთოგონალურია $\varphi_{0,0}(x)=\varphi(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი $n\in Z$. მართლაც,

$$\left(\varphi_{0,0},\psi_{0,n}\right)=\int_R \varphi(x)\psi(x-n)=\frac{1}{2\pi}\int_R \varphi(w)\psi(w)e^{inw}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R H_0\left(\frac{w}{2}\right)\varphi\left(\frac{w}{2}\right)\overline{e^{iw/2}\overline{H_0\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}\varphi\left(\frac{w}{2}\right)}e^{inw}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R H_0\left(\frac{w}{2}\right)\varphi\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2}H_0\left(\frac{w}{2}+\pi\right)\overline{\varphi\left(\frac{w}{2}\right)}e^{inw}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R H_0\left(\frac{w}{2}\right)\left|\varphi\left(\frac{w}{2}\right)\right|^2 H_0\left(\frac{w}{2}+\pi\right)e^{-iw/2}e^{inw}dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_R H_0(w)\left|\varphi(w)\right|^2 H_0(w+\pi)e^{i(2n-1)w}dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_R \sum_{n\in Z}\left|\varphi(w+2\pi n)\right|^2 H_0(w)H_0(w+\pi)e^{i(2n-1)w}dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_R H_0(w)H_0(w+\pi)e^{i(2n-1)w}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R \sum_{m\in Z} h_m e^{-imw}\sum_{k\in Z} h_k e^{-ik(w+\pi)}e^{i(2n-1)w}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R \sum_{m,k\in Z} (-1)^k h_m h_k e^{-i(m+k-2n+1)w}dw$$

$$=\sum_{k\in Z} (-1)^k h_{2n-1-k}h_k =\sum_{l\in Z} (-1)^{2n-1-l} h_{2n-1-l}h_l =-\sum_{l\in Z} (-1)^l h_{2n-1-l}h_l =0 .$$

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\{\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z\}$ სისტემა ორთონორმირებული სისტემაა და ეკუთვნის W_0 სივრცეს. მეორეს მხრივ, $\{\varphi_{0,n}(x)=\varphi(x-n), n\in Z\}$ სისტემა ორთონორმირებული ბაზისია V_0-ში, ამასთან

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 .$$

დავამტკიცოთ, რომ $\{\varphi_{0,n}, \psi_{0,k}, n,k\in Z\}$ სისტემა ბაზისია V_1-ში (საიდანაც დავასკვნით, რომ $\{\psi_{0,n}(x)=\psi(x-n), n\in Z\}$ ბაზისია W_0 სივრცეში). ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\varphi_{1,n}(x)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილი იქნას, როგორც $\{\varphi_{0,n}, \psi_{0,k}, n,k\in Z\}$ სისტემის წრფივი კომბინაცია.

განვიხილოთ შემდეგი ფუნქციები:

$$H(w) := \sqrt{2}H_0(w),\ G(w) := e^{iw}\overline{H(w+\pi)},$$

$$H(w) := \overline{H(w)},\ G(w) := e^{-iw}H(w+\pi).$$

რადგანაც

$$H(w)=\sum_{k\in Z} h_k 2^{-ikw}$$

მივიღებთ

$$G(w)=\sum_{k\in Z} (-1)^{k+1}\bar{h}_{-k-1}e^{-ikw} =\sum_{k\in Z} g_k e^{-ikw},$$

$$H(w)=\sum_{k\in Z} \bar{h}_k e^{ikw} =\sum_{k\in Z} \bar{h}_{-k}e^{-ikw} =\sum_{k\in Z} h_k e^{-ikw},$$

$$G(w)=e^{-iw}\sum_{k\in Z} (-1)^k h_k e^{-ikw} =\sum_{k\in Z} (-1)^k h_k e^{-i(k+1)w}$$

$$=\sum_{k\in Z} (-1)^{k-1} h_k e^{-ikw} =\sum_{k\in Z} g_k e^{-ikw} .$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$H\left(\frac{w}{2}\right)H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)+G\left(\frac{w}{2}\right)G\left(\frac{w}{2}+\pi\right)$$

$$=H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}+e^{iw/2}\overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}e^{-i(w/2+\pi)}H\left(\frac{w}{2}+2\pi\right)$$

$$=H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}+e^{i\pi}\overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}H\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$= H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)} - \overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}H\left(\frac{w}{2}\right) = 0 .$$

მეორეს მხრივ,

$$H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}\right)} + G\left(\frac{w}{2}\right)\overline{G\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$= H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}\right)} + e^{iw/2}\overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}e^{-iw/2}H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)$$

$$= H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}\right)} + \overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)$$

$$= \left|H\left(\frac{w}{2}\right)\right|^2 + \left|H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)\right|^2 = 2 \quad \text{თ. ყ.}$$

მაშასადამე

$$\begin{cases} H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}\right)} + G\left(\frac{w}{2}\right)\overline{G\left(\frac{w}{2}\right)} = 2 \\ H\left(\frac{w}{2}\right)\overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)} + G\left(\frac{w}{2}\right)\overline{G\left(\frac{w}{2}+\pi\right)} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} H\left(\frac{w}{2}\right)\left(\overline{H\left(\frac{w}{2}\right)} + \overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}\right) + G\left(\frac{w}{2}\right)\left(\overline{G\left(\frac{w}{2}\right)} + \overline{G\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}\right) = 2 \\ H\left(\frac{w}{2}\right)\left(\overline{H\left(\frac{w}{2}\right)} - \overline{H\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}\right) + G\left(\frac{w}{2}\right)\left(\overline{G\left(\frac{w}{2}\right)} - \overline{G\left(\frac{w}{2}+\pi\right)}\right) = 2 \end{cases},$$

რადგანაც

$$H\left(\frac{w}{2}\right) + H\left(\frac{w}{2}+\pi\right) = \sum_{k\in Z} h_k e^{-ikw/2} + \sum_{k\in Z} h_k e^{-ik(w/2+\pi)}$$

$$= \sum_{k\in Z} h_k e^{-ikw/2} + \sum_{k\in Z} (-1)^k h_k e^{-ikw/2} = 2\sum_{k\in Z} h_{2k} e^{-ikw} .$$

ანალოგიურად

$$H\left(\frac{w}{2}\right) - H\left(\frac{w}{2}+\pi\right) = 2\sum_{k\in Z} h_{2k-1} e^{-i(2k-1)w/2} ,$$

$$G\left(\frac{w}{2}\right) + G\left(\frac{w}{2}+\pi\right) = 2\sum_{k\in Z} g_{2k} e^{-ikw} ,$$

$$G\left(\frac{w}{2}\right)-G\left(\frac{w}{2}+\pi\right)=2\sum_{k\in Z} g_{2k-1}e^{-i(2k-1)w/2}.$$

მაშინ მივიღებთ

$$\begin{cases} 2H\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} h_{2k}e^{-ikw}+2G\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} g_{2k}e^{-ikw}=2 \\ 2H\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} h_{2k-1}e^{-i(2k-1)w/2}+2G\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} g_{2k-1}e^{-i(2k-1)w/2}=2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} H\left(\frac{w}{2}\right)\varphi\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} h_{2k}e^{-ikw}+G\left(\frac{w}{2}\right)\varphi\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} g_{2k}e^{-ikw}=\varphi\left(\frac{w}{2}\right) \\ \varphi\left(\frac{w}{2}\right)H\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} h_{2k-1}e^{-ikw}+\varphi\left(\frac{w}{2}\right)G\left(\frac{w}{2}\right)\sum_{k\in Z} g_{2k-1}e^{-ikw}=\varphi\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\varphi(w)\sum_{k\in Z} h_{2k}e^{-ikw}+\sqrt{2}\psi(w)\sum_{k\in Z} g_{2k}e^{-ikw}=\varphi\left(\frac{w}{2}\right) \\ \sqrt{2}\varphi(w)\sum_{k\in Z} h_{2k-1}e^{-ikw}+\sqrt{2}\psi(w)\sum_{k\in Z} g_{2k-1}e^{-ikw}=\varphi\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2} \end{cases}.$$

ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sum_{k\in Z} h_{2k}\varphi(x-k)+\sqrt{2}\sum_{k\in Z} g_{2k}\psi(x-k)=2\varphi(2x) \\ \sqrt{2}\sum_{k\in Z} h_{2k-1}\varphi(x-k)+\sqrt{2}\sum_{k\in Z} g_{2k-1}\psi(x-k)=2\varphi(2x-1) \end{cases}.$$

ეს უკანასკნელი კი ექვივალენტურია შემდეგის

$$\sum_{k\in Z} h_{2k-n}\varphi(x-k)+\sqrt{2}\sum_{k\in Z} g_{2k-n}\psi(x-k)=\sqrt{2}\varphi(2x-n).$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\{\varphi_{0,n},\psi_{0,k},n,k\in Z\}$ სისტემა ბაზისია V_1-ში. თეორემა დამტკიცებულია.