უ შ ა ნ გ ი გ ო გ ი ნ ა ვ ა

მ ა თ ე მ ა ტ ი კ უ რ ი ა ნ ა ლ ი ზ ი I I

პროგრამა **Maple**-ის გამოყენებით

სალექციო კურსი

თ ბ ი ლ ი ს ი 2 0 0 7

თ ა ვ ი I

ფუნქციათა მიმდევრობები და მწკრივები

1.1. ფუნქციათა მიმდევრობების წერტილოვანი და თანაბარი კრებადობა

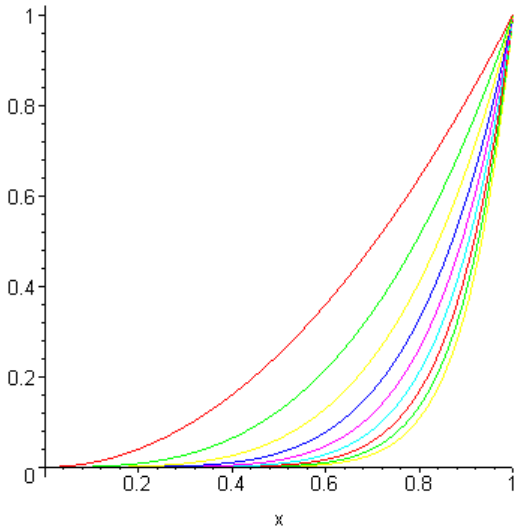
განსაზღვრება 1.1.1. ვთქვათ X ნებისმიერი ობიექტთა სიმრავლეა და $f_n: X \to \mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ X სიმრავლეზე განსაზღრული ფუნქციათა მიმდევრობაა. ვიტყვით, რომ $\{f_n: n\geq 1\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია $x\in X$ წერტილში, თუ რიცხვითი მიმდევრობა $\{f_n(x): n\geq 1\}$ არის კრებადი.

განსაზღვრება 1.1.2. ყველა იმ $x\in E\subset X$ სიმრავლეს, რომელშიც $\{f_n: n\geq 1\}$ ფუნქციათა მი-მდევრობა არის კრებადი კრებადობის სიმრავლეს უწოდებენ.

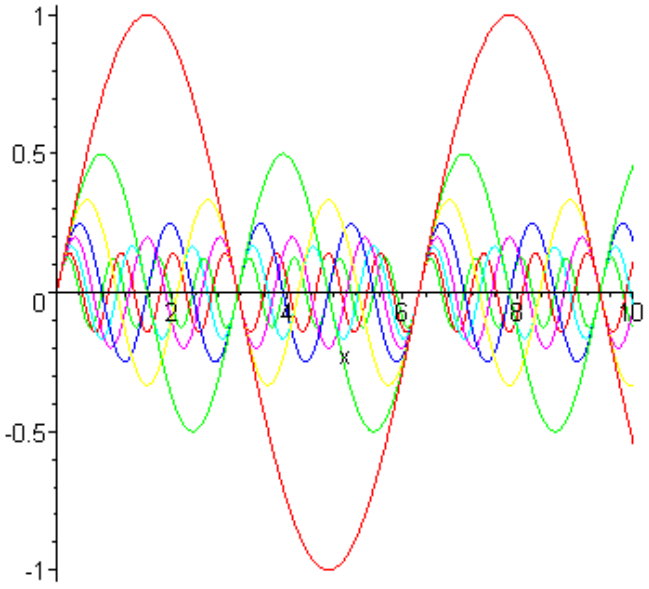
განსაზღვრება 1.1.3. $\forall x\in E$-თვის $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ უწოდებენ $\{f_n(x): n\geq 1\}$ ფუნქციათა მიმდევრობის ზღვარით ფუნქციას.

მაგალითი 1.1.1. ვთქვათ $f_n(x):=x^n$, $x\in[0,1]$, $n=1,2,\ldots$, მაშინ ცხადია, რომ

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\in[0,1),\\ 1, & \text{თუ } x=1.\end{cases}$$



მაგალითი 1.1.2. $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$, $n=1,2,...$, ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია $f(x)\equiv 0$ ფუნქციისაკენ.



მაშასადამე, ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი კრებადობის ცნება შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

განმარტება 1.1.3. $(f_n \to f,\ x\in E)$:=$(\forall \varepsilon>0,\ \forall x\in E,\ \exists N=N(\varepsilon,x),\ \forall n:\ n>N(\varepsilon,x),\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)$.

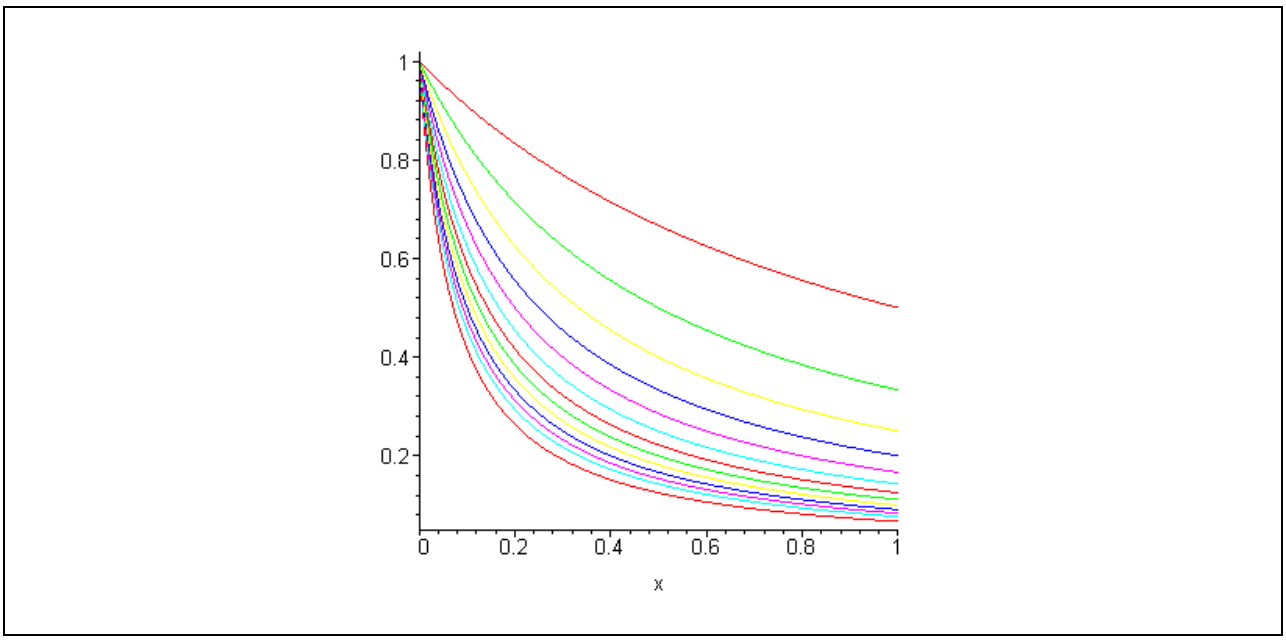
განმარტება 1.1.4. $(f_n \Rightarrow f,\ x\in E)$:=$(\forall \varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon),\ \forall n:\ n>N(\varepsilon),\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in E)$.

ფუნქციათა ოჯახი $\{f_n(x):\ n\geq 1\}$ არ არის თანაბრად კრებადი ნიშნავს, რომ $\exists \varepsilon_0>0,\ \forall n\in N,\ \exists x_n\in E,\ |f_n(x_n)-f(x_n)|\geq\varepsilon_0$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია რაღაც სიმრავლეზე, მაშინ ის კრებადია ამ სიმრავლის ყოველ წერტილში. პირიქით საზოგადოდ სამართლიანი არ არის - არსებობს ფუნქციათა მიმდევრობა, რომელიც (0,1) ინტერვალის ყველა წერილში კრებადია, მაგრამ თანაბრად კრებადი არ არის.

მაგალითი 1.1.3. $f_n(x)=1/(nx+1)$.

ადვილი დასანახია, რომ $f_n(x)\to 0$, $0<x<1$. მეორე მხრივ, ფუნქციათა ეს მიმდევრობა თანაბრად კრებადი არ არის. მართლაც, ვთქვათ $\varepsilon_0=1/2$, $x_n=1/n$; მაშინ $|f_n(x_n)|=1/2=\varepsilon_0$.



აღვნიშნოთ

$$\Delta_n(x):=|f(x)-f_n(x)|,\ \Delta_n:=\sup_{x\in E}|f(x)-f_n(x)|.$$

ცხადია, რომ

$$\Delta_n(x)\le\Delta_n.$$

დავამტკიცოთ, რომ $\{f_n: n\ge1\}$ ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბრად კრებადობა ექვივალენტურია Δ_n რიცხვითი მიმდევრობის ნულისკენ კრებადობის. მართლაც, ვთქვათ, $f_n \Rightarrow f$ E სიმრავლეზე, მაშინ $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in E$, $\exists N=N(\varepsilon)$, $\forall n$: $n>N(\varepsilon)$, $\Delta_n\le\varepsilon$. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\Delta_n\to0,\ n\to\infty.$$

პირიქით, ვთქვათ $\Delta_n\to0$, $n\to\infty$. მაშინ $\forall\varepsilon>0$, $\forall x\in E$, $\exists N=N(\varepsilon)$, $\forall n$: $n>N(\varepsilon)$, $\Delta_n<\varepsilon$ და $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$, $\forall n$: $n>N(\varepsilon)$, $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$, $\forall x\in E$. ეს კი ნიშნავს, რომ $f_n \Rightarrow f$ E სიმრავლეზე.

თეორემა 1.1.1. (კოშის კრიტერიუმი) იმისათვის რომ ფუნქციათა $\{f_n: n\ge1\}$ მიმდევრობა $\{f_n: n\ge1\}$ იყოს თანაბრად კრებადი E-ზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$, $\forall n,m$: $n,m>N(\varepsilon)$, $\forall x\in E$,

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon. \qquad (1.1.1)$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ უცილებლობა. ვთქვათ $f_n \Rightarrow f$ E სიმრავლეზე, მაშინ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n$: $n>N(\varepsilon)$, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2$, $\forall x\in E$; საიდანაც $\forall n,m$: $n,m>N(\varepsilon)$, $\forall x\in E$, მივიღებთ

$$|f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon.$$

საკმარისობა. დაფიქსირებული $x\in E$-თვის, $\{f_n(x): n\ge1\}$ მიმდევრობა წარმოადგენს რიცხვით მიმდევრობას, რომელიც კრებადია თეორემის პირობის ძალით. მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\{f_n: n\ge1\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია ყოველ $x\in E$ წერტილში. ჩვენი მიზანია დავამტკიცოთ, რომ $f_n \Rightarrow f$ E სიმრავლეზე. თუ (1.1.1)-ში გადავალთ ზღვარზე, როცა $m\to\infty$, მივიღებთ რომ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n$: $n>N(\varepsilon)$, $|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$, $\forall x\in E$.

მაშასადამე $f_n \Rightarrow f$ E სიმრავლეზე. □

1.2. ფუნქციათა მწკრივის თანაბარი კრებადობა

ვთქვათ $u_n(x)$: $X\to\mathbb{R}$, n=1,2,... ფუნქციათა მიმდევრობაა. განვიხილოთ შემდეგი მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \tag{1.2.1}$$

განმარტება 1.2.1. ვიტყვით, რომ მოცემული ფუნქციათა მწკრივი არის წერტილოვნად ან თანაბრად კრებადი, თუ (1.2.1) მწკრივის შესაბამისი კერძო ჯამებისგან

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{m} u_n(x),\ m=1,2,....$$

შედგენილი ფუნქციათა მიმდევრობა არის, შესაბამისად, წერილოვნად ან თანაბრად კრებადი.

თეორემა 1.2.1. (კოშის კრიტერიუმი). **იმისათვის, რომ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ მწკრივი იყოს თანაბრად კრებადი Eსიმრავლეზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n,m>N(\varepsilon), \forall x\in E$**

$$|u_{n+1}(x)+...+u_m(x)|<\varepsilon.$$

დამტკიცება. თეორემა 1.1.1–ის ძალით იმისათვის, რომ $\{S_n(x): \geq 1\}$ მიმდევრობა იყოს თანაბრად კრებადი აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n,m>N(\varepsilon)$

$$|S_n(x)-S_m(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right|<\varepsilon.$$

□

განმარტება 1.2.2. ვიტყვით, რომ მწკრივი $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ არის აბსოლუტურად კრებადი $E\subset X$ სიმრავლეზე, თუ $\forall x\in E$ წერტილისთვის $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)|$ მწკრივი კრებადია.

თეორემა 1.2.2. ვთქვათ $u_n(x)$, $v_n(x): X\to\mathbb{R}$, n=1,2,... და ცნობილია, რომ $|u_n(x)|\leq v_n(x)$, $\forall x\in E\subset X$, n=1,2,.... მაშინ $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ მწკრივის თანაბარი კრებადობიდან E სიმრავლეზე გამომდინარეობს $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)|$ მწკრივის თანაბარი კრებადობა.

დამტკიცება. რადგანაც

$$|u_{n+1}(x)+...+u_m(x)|\leq|u_{n+1}(x)|+...+|u_m(x)|\leq v_{n+1}(x)+...+v_m(x), \tag{1.2.2}$$

ამიტომ კოშის კრიტერიუმის ძალით $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n,m>N(\varepsilon)$

$$v_{n+1}(x)+...+v_m(x)<\varepsilon,\ \forall x\in E.$$

(1.2.2) უტოლობისა და კოშის კრიტერიუმის ძალით მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას. □

შედეგი 1.2.1 (ვაიერშტრასის ნიშანი). **ვთქვათ $\sup_{x\in E}|u_k(x)|\leq M_k$, $\forall x\in E$, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k<\infty$. მა-შინ (1.2.1) ფუნქციათა მწკრივი თანაბრად კრებადია E სიმრავლეზე.**

1.3. აბელისა და დირიხლეს ნიშანი

განმარტება 1.3.1. ვიტყვით, რომ ფუნქციათა ოჯახი F არის ერთობლივ შემოსაზღრული $E\subset X$ სიმრავლეზე, თუ $\exists M>0$, ისეთი, რომ $\forall f\in F$ ფუნქციისთვის

$$\sup_{x\in E}|f(x)|\le M<\infty.$$

განმარტება 1.3.2. ვიტყვით, რომ ფუნქციათა მიმდევრობა $b_n: X\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ არაკლებადია (არაზრდადია) $E\subset X$ სიმრავლეზე, თუ ნებისმიერი დაფიქსირებული $x\in E$-თვის რიცხვითი მიმდევრობა $\{b_n(x): n\ge 1\}$ არის არაკლებადი (არაზრდადი).

ლემა 1.3.1. (აბელის გარდაქმნა) ნებისმიერი $a_1,\ldots,a_m$, $b_1,\ldots,b_m$, ნამდვილი რიცხვებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\sum_{k=n}^{m}a_kb_k=A_mb_m-A_{n-1}b_n+\sum_{k=n}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1}),$$

სადაც $a_k=A_k-A_{k-1}$, $k=n,\ldots,m$.

დამტკიცება. ადვილი დასანახია, რომ

$$\sum_{k=n}^{m}a_kb_k=\sum_{k=n}^{m}(A_k-A_{k-1})b_k=\sum_{k=n}^{m}A_kb_k-\sum_{k=n}^{m}A_{k-1}b_k=$$

$$=\sum_{k=n}^{m}A_kb_k-\sum_{k=n-1}^{m-1}A_kb_{k+1}=\sum_{k=n}^{m-1}A_kb_k+A_mb_m-\sum_{k=n}^{m-1}A_kb_{k+1}-A_{n-1}b_n=$$

$$=A_mb_m-A_{n-1}b_n+\sum_{k=n}^{m}A_k(b_k-b_{k+1}).$$

ლემა 1.3.2. ვთქვათ $b_1,\ldots,b_m$ მონოტონური ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო $a_1,\ldots,a_m$ ნაბისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. მაშინ

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\le 4\max_{n-1\le k\le m}|A_k|\max\{|b_n|,|b_m|\}.$$

დამტკიცება. აბელის გარდაქმნის ძალით

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|\le|A_mb_m|+|A_{n-1}b_n|+\left|\sum_{k=n}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1})\right|$$

$$\le\max_{n-1\le k\le m}|A_k|\left(|b_n|+|b_m|+\sum_{k=n}^{m}|b_k-b_{k+1}|\right)$$

$$=\max_{n-1\le k\le m}|A_k|\left(|b_n|+|b_m|+|b_n-b_m|\right)$$

$$\le 4\max_{n-1\le k\le m}|A_k|\max\{|b_n|,|b_m|\}.$$ □

თეორემა 1.3.1. (აბელისა და დირიხლეს ნიშანი). ვთქვათ $a_n,b_n: X\to\mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ მოცემული ფუნქციათა მიმდევრობაა. იმისათვის, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$$

იყოს თანაბრად კრებადი $E\subset X$ საკმარისია, რომ

ა)$_1$ კერძო ჯამები იყოს ერთობლივ შემოსაზღრული E-ზე,

ბ)$_1$ მიმდევრობა $\{b_n: n\geq 1\}$ იყოს მონოტონური და $b_n \Rightarrow 0$, $n\to\infty$, E-ზე;

ან

ა)$_2$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ იყოს თანაბრად კრებადი E სიმრავლეზე,

ბ)$_2$ $\{b_n: n\geq 1\}$ მიმდევრობა იყოს მონოტუნური და ერთობლივ შემოსაზღრული E სიმრავლეზე.

დამტკიცება. ჯერ დაუშვათ, რომ სრულდება ა)$_1$ და ბ)$_1$ პირობები. რადგანაც $\{b_n: n\geq 1\}$ მონოტონურია, ამიტომ ლემა 1.3.2-ის ძალით გვაქვს

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \leq 4 \max_{n-1\leq k\leq m} |A_k(x)| \max\left\{|b_n(x)|,|b_m(x)|\right\},$$

სადაც $A_k(x) := S_k(x) - S_{n-1}(x)$.

ა)$_1$ პირობის ძალით $\exists M>0, |A_k(x)|\leq M<\infty, \forall x\in E, k=1,2,....$

ბ)$_1$ პირობის ძალით $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), \forall n,m>N(\varepsilon), \max\left\{|b_n(x)|,|b_m(x)|\right\} < \frac{\varepsilon}{4M}$. მაშინ $\forall n,m>N(\varepsilon)$,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \leq 4M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$$

თანაბრად $x\in E$. კოშის კრიტერიუმის ძალით მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ თანაბრად კრებადია E-ზე.

ვთქვათ სრულდება ა)$_2$ და ბ)$_2$ პირობები.

ბ)$_2$ პირობის ძალით

$$\max\left\{|b_n(x)|,|b_m(x)|\right\}\leq M<\infty.$$

ა)$_2$ პირობის ძალით, $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), \forall n,k>N(\varepsilon)$

$$|A_k(x)| = |S_k(x) - S_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{4M};$$

თანაბრად $x\in E$ მიმართ

$$\left|\sum_{n=n}^{m} a_n(x)b_n(x)\right| \leq 4M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon.$$

კოშის კრიტერიუმის ძალით მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

თანაბრად კრებადია. □

1. 4. ზღვარითი ფუნქციის თვისებები

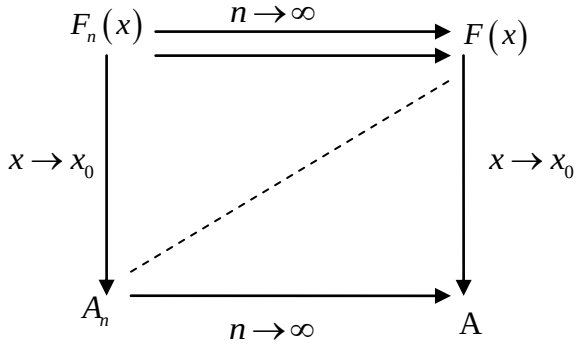
თეორემა 1.4.1 (ძირითადი) ვთქვათ $\{F_n: n\geq 1\}$, $X\subset\mathbb{R}^n$ სიმრავლეზე განსაზღრული ფუნქციათა მიმდევრობაა, რომელიც თანაბრად კრებადია $F(x)$ ფუნქციისაკენ, $\forall n\in N, \exists \lim\limits_{x\to x_0} F_n(x):=A_n$. მაშინ არსებობს

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{x\to x_0} F(x).$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to x_0} F_n(x)] = \lim_{x\to x_0}[\lim_{n\to\infty} F_n(x)].$$

ყოველივე ზემოთქმული დიაგრამის სახით შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:



დამტკიცება. რადგანაც $F_n(x)\Rightarrow F(x)$, $n\to\infty$, ამიტომ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n,m>N(\varepsilon)$, $\forall x\in X$

$$|F_n(x)-F_m(x)|<\varepsilon. \tag{1.4.1}$$

თუ ამ უკანასკნელ უტოლობაზე გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to x_0$, მივიღებთ

$$|A_n - A_m|\leq\varepsilon. \tag{1.4.2}$$

კოშის კრიტერიუმის ძალით დავასკვნით, რომ $\exists\lim\limits_{n\to\infty} A_n := A$.

დავამტკიცოთ, რომ $F(x)\to A$, $x\to x_0$. მართლაც, რადგანაც $F_m(x)\to A_m$, $x\to x_0$, ამიტომ არსებობს ისეთი $\dot{U}_X(x_0)$ მიდამო, რომ

$$\forall x\in\dot{U}_X(x_0), |F_m(x)-A_m|<\varepsilon \tag{1.4.3}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე (1.4.1)-ში, როცა $n\to\infty$, მივიღებთ

$$|F(x)-F_m(x)|\leq\varepsilon. \tag{1.4.4}$$

ამის გარდა, საკმარისად დიდი m-თვის

$$|A-A_m|\leq\varepsilon. \tag{1.4.5}$$

ამრიგად, (1.4.3)–(1.4.5)-დან მივიღებთ

$$|F(x)-A|\leq|F(x)-F_m(x)|+|F_m(x)-A_m|+|A-A_m|<3\varepsilon, \forall x\in\dot{U}_X(x_0).$$

მაშასადამე, $\forall\varepsilon>0, \exists\dot{U}_X(x_0)$, ისეთი რომ $\forall x\in\dot{U}_X(x_0)$, $|F(x)-A|<3\varepsilon$, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\exists\lim_{x\to x_0} F(x)=A. \qquad \square$$

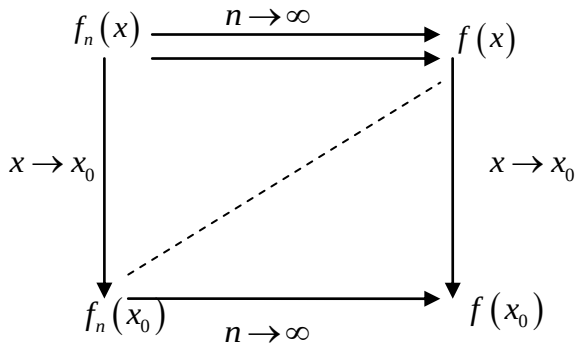
თეორემა 1.4.2. (ზღვარითი ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ). ვთქვათ მოცემულია $f_n: X\to\mathbb{R}$, $X\in\mathbb{R}^m$, $n=1,2,...$ ფუნქციათა მიმდევრობა, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) ყოველი ფიქსირებული n-თვის $f_n(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x_0\in X$ წერტილში,

ბ) $f_n\Rightarrow f$, $n\to\infty$.

მაშინ f ფუნქცია უწყვეტია $x_0\in X$ წერტილში.

დამტკიცება. თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1.4.1-დან. მართლაც,



□

შედეგი 1.4.1. *ვთქვათ მოცემულია* $u(x)$ *ფუნქციისკენ თანაბრად კრებადი* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *ფუნქციათა მწკრივი, სადაც* $u_k(x)$, $k=1,2,...$, *ფუნქციები უწყვეტია* x_0 *წერტილში. მაშინ* $u(x)$ *ფუნქცია უწყვეტია* x_0 *წერტილში.*

თეორემა 1.4.3. *(დინი) ვთქვათ* $\{f_n: n\geq 1\}$ *ფუნქციათა მიმდევრობა განსაზღვრულია* $K\subset\mathbb{R}^m$ *კომპაქტზე, მონოტონურია და წერტილოვნად კრებადია* $f\in C(K)$ *ფუნქციისაკენ, მაშინ* $f_n \Rightarrow f$, $n\to\infty$, K *-ზე.*

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ f_n მიმდევრობა არაკლებადია. მაშინ თეორემის პირობის ძალით $\forall \varepsilon>0$, $\forall x\in K$, $\exists n_x(\varepsilon)$, ისეთი რომ

$$0 \leq f(x) - f_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

რადგანაც f_{n_x} და f ფუნქციები უწყვეტია K-ზე, ამიტომ $\exists u(x)$ მიდამო, ისეთი რომ

$$0 \leq f(\xi) - f_{n_x}(\xi) < \varepsilon, \forall \xi \in u_K(x).$$

რადგანაც K კომპაქტია და $K \subset \bigcup_{x\in K} u(x)$. ამიტომ არსებობს $u(x_1),...,u(x_k)$ სასრული ქვედაფარვა, ე.ი. $K \subset \bigcup_{j=1}^{k} u(x_j)$. აღვნიშნოთ $n(\varepsilon) := \max\{n_{x_1},...,n_{x_k}\}$. თუ გავითვალისწინებთ f_n ფუნქციათა მიმდევრობის არაკლებადობას დავასკვნით, რომ $\forall n > n(\varepsilon)$ სამართლიანია

$$0 \leq f(\xi) - f_n(\xi) < \varepsilon, \forall \xi \in K.$$

□

შედეგი 1.4.2. *ვთქვათ* $u_n: K\to\mathbb{R}$, $K\subset\mathbb{R}^m$ *კომპაქტური სიმრავლეა და* $u_n(x)\geq 0$, $x\in K$, $u_n\in C(K)$. *თუ მწკრივი* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *კრებადია უწყვეტი* $u(x)$ *ფუნქციისკენ, მაშინ ეს კრებადობა თანაბარიცაა.*

თეორემა 1.4.4. *(ზღვარითი ფუნქციის ინტეგრებადობის შესახებ) ვთქვათ* $\{f_n: n\geq 1\}$ $[a,b]$ *სეგმენტზე განსაზღრული ფუნქციათა მიმდევრობაა და შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1) $f_n \in R([a,b])$;

2) $f_n \Rightarrow f$, $n\to\infty$.

მაშინ $f_n\in R([a,b])$ *და სამართლიანია ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

დამტკიცება. ვთქვათ P არის $[a,b]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილება $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)$ შერჩეული წერტილებით. განვიხილოთ ჯამი

$$F_n(P) := \sum_{i=1}^{n} f_n(\xi_i)\Delta x_i$$

და

$$F(P) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

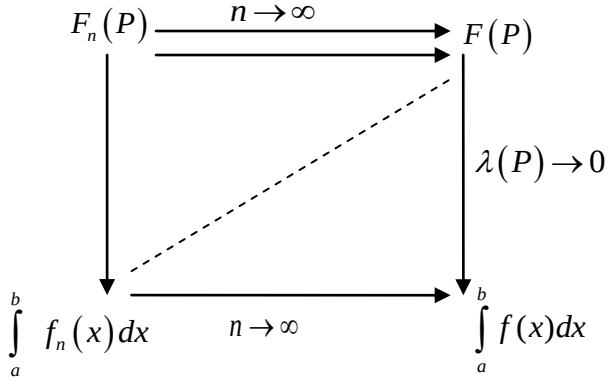
რადგანაც $f_n \Rightarrow f, n \to \infty$, ამიტომ $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall n : n > N(\varepsilon), \forall x \in [a,b]$ გვაქვს:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

$$|F_n(P) - F(P)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f_n(\xi_i)\right)\Delta x_i\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f_n(\xi_i)|\Delta x_i < \varepsilon, \forall n : n > N(\varepsilon),$$

თანაბრად P-ს მიმართ. მაშასადამე,



□

შედეგი 1.4.3. **ვთქვათ მოცემულია $u(x)$ ფუნქციისკენ თანაბრად კრებადი**

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

ფუნქციათა მწკრივი, სადაც $u_k(x) \in R([a,b])$, $k=1,2,\ldots$ .. მაშინ $u(x) \in R([a,b])$ და

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

თეორემა 1.4.5. **(ზღვარითი ფუნქციის დიფერენცირებადობის შესახებ) ვთქვათ $\{f_n: n \ge 1\}$ $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღრული, წარმოებად ფუნქციათა მიმდევრობაა, რომელთათვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:**

1) $f_n' \Rightarrow \varphi$, **$[a,b]$ სეგმენტზე , როცა $n \to \infty$;**

2) **$\{f_n: n \ge 1\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა კრებადია $[a,b]$ სეგმენტის ერთ წერტილში მაინც.**

მაშინ $f_n \Rightarrow f$, $n \to \infty$, და $f' = \varphi$.

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $\{f_n: n \ge 1\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ თეორემას სასრული ნაზრდის შესახებ, მივიღებთ

$$|f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(x_0)-f_m(x_0))|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)|\le$$
$$\le \sup_{\xi\in[x_0,x]}|f'_n(\xi)-f'_m(\xi)||x-x_0|+|f_n(x_0)-f_m(x_0)| \ . \qquad (1.4.6)$$

რადგანაც

$$f_n' \Rightarrow \varphi$$

ამიტომ $\forall\varepsilon>0,\exists N'(\varepsilon)$, ისეთი რომ

$$|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (1.4.7)$$

$\forall n,m: n,m>N(\varepsilon),\forall\xi\in[a,b]$. რადგანაც $f_n(x_0)$ კრებადია, როცა $n\to\infty$, ამიტომ კოშის კრიტერიუმის ძალით $\exists N''(\varepsilon),\forall n,m: n,m>N''(\varepsilon)$

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1.4.8)$$

თუ (1.4.8) და (1.4.7) გავითვალისწინებთ (1.4.6)-ში $\forall n,m: n,m>N(\varepsilon):=\max\{N'(\varepsilon), N''(\varepsilon)\}$ მივიღებთ

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon,\forall x\in[a,b].$$

მაშასადამე, კოშის კრიტერიუმის ძალით $\{f_n: n\ge1\}$ ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[a,b]$ სეგმენტზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F_n(h):=\frac{f_n(x+h)-f_n(x)-f_n'(x)h}{h}.$$

სასრული ნაზრდის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$|F_n(h)-F_m(h)|$$
$$=\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)-f_n'(x)h-(f_m(x+h)-f_m(x)-f_m'(x)h)}{h}\right|$$
$$=\left|\frac{(f_n-f_m)(x+h)-(f_n-f_m)(x)-(f_n-f_m)'(x)h}{h}\right|$$
$$=\left|\frac{(f_n-f_m)'(x+\theta h)h-(f_n-f_m)'(x)h}{h}\right|$$
$$\le|(f_n-f_m)'(x+\theta h)|+|(f_n-f_m)'(x)|$$

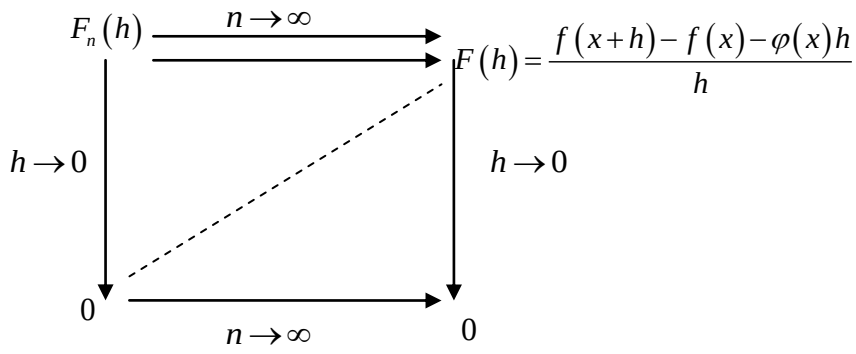
რადგანაც $f_n'\Rightarrow\varphi$ როცა $n\to\infty$, ამიტომ $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n,m: n,m>N(\varepsilon),\forall x\in[a,b]$

$$|(f_n-f_m)'(x)|<\varepsilon/2.$$

მაშასადამე,

$$|F_n(h)-F_m(h)|<\varepsilon,\forall n,m: n,m>N(\varepsilon)$$

თანაბრად h-ის მიმართ, როცა $x+h\in[a,b]$.



მაშასადამე $f'(x)=\varphi(x)$.

□

შედეგი 1.4.4. **ვთქვათ მოცემული ფუნქციათა მწკრივისათვის**

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

შესრულებულია შემდეგი პირობები:

ა) კრებადია $x_0\in[a,b]$ წერილში;

ბ) ფორმალური გაწარმოების შედეგად მიღებული

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$$

მწკრივი თანაბრად კრებადია.

მაშინ მოცემული მწკრივი თანაბრად კრებადია და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

§ 1.5. ხარისხოვანი მწკრივები

შემდეგი სახის მწკრივს

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (1.5.1)$$

ხარისხოვანი მწკრივი ეწოდება, სადაც $x,x_0\in\mathbb{R}$ და a_n, $n=0,1,\ldots$ ნამდვილი რიცხვებია.

ჩვენთვის ცნობილია კოშისა და ადამარის თეორემა იმის შესახებ, რომ **თუ მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

და

$$\rho \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

მაშინ

1) **მწკრივი კრებადია აბსოლუტურად, თუ $\rho<1$;**
2) **მწკრივი განშლადია, თუ $\rho>1$;**
3) **საეჭვო შემთხვევაა, როცა $\rho=1$.**

თუ მწკრივის კრებადობის კოშის ნიშანს გამოვიყენებთ (1.5.1) ხარისხოვანი მწკრივისთვის, მივიღებთ

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|a_n (x-x_0)^n\right|} = |x-x_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

და, მაშასადამე, (1.5.1) მწკრივი კრებადია იმ x-ებისთვის, რომელთათვისაც

$$|x-x_0| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

ან, რაც იგივეა,

$$|x-x_0| < 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|};$$

განშლადია, როცა

$$|x-x_0| > 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

თუ შემოვიღებთ აღვნიშნას

$$R \equiv 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad (1.5.2)$$

მაშინ ჩვენ მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1.5.1. ნებისმიერი ხარისოვანი მწკრივისათვის არსებობს არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი R, რომელიც გამოითვლება (1.5.2) ფორმულით და რომელსაც ის თვისაბა აქვს, რომ მწკრივი კრებადია იმ x-ებისთვის, რომელთათვისაც $|x-x_0|<R$ და განშლადი იქ, სადაც $|x-x_0|>R$.

R-ს უწოდებენ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსს.

იმ შემთხვევაში, როცა ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლის ყოველ წერტილში, მაშინ ამბობენ, რომ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი არის $+\infty$.

ცხადია, ნებისმიერი ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია $x=x_0$ წერტილში. თუ ხარისხოვანი მწკრივი კრებადია მხოლოდ $x=x_0$ წერტილში, მაშინ ამბობენ, ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი არის 0.

შენიშვნა. თუ $|x-x_0|=R$, მაშინ x წერტილში მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს, შეიძლება – განშლადი.

მაგალითი 1.5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n/n\right)$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია $R=1$, მაგრამ როცა $x=1$ მწკრივი განშლადია, ხოლო როცა $x=-1$ - კრებადია.

მაგალითი 1.5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n/n^2\right)$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია $R=1$, ხოლო $x=\pm 1$ წერტილში მწკრივი კრებადია.

მაგალითი 1.5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ მწკრივის კრებადობის რადიუსია $R=1$, მაგრამ როცა $x=1$ და ასევე როცა $x=-1$ მწკრივი განშლადია.

\

თეორემა 1.5.2. **(აბელის I თეორემა). თუ ხარისხოვანი მწკრივი**

$$\sum a_n(x-x_0)^n$$

კრებადია $x'\neq x_0$ წერტილში, მაშინ ის აბსოლუტურად კრებადია იმ x-ებისთვის, რომელთათვისაც $|x-x_0|<|x'-x_0|$.

დამტკიცება. რადგანაც მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x'-x_0)^n$$

კრებადია, ამიტომ $|a_n(x'-x_0)^n|\to 0$, როცა $n\to\infty$; ე.ი. მიმდევრობა $a_n(x'-x_0)^n$, n=1, 2,... შემოსაზღვრულია, ამიტომ $\exists M>0$ ისეთი, რომ

$$|a_n(x'-x_0)^n|\le M<+\infty.$$

ამრიგად,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x-x_0)^n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x-x_0}{x'-x_0}\right|^n|a_n||(x'-x_0)^n|\le M\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x-x_0}{x'-x_0}\right|^n<\infty.$$

თუ ახლა გამოვიყენებთ მწკრივის კრებადობის შედარების ნიშანს და გავითვალისწინებთ უტოლობას

$$q:=\left|\frac{x-x_0}{x'-x_0}\right|<1,$$

დავასკვნით, რომ თეორემა 1.5.2 დამტკიცებულია. □

შედეგი 1.5.1. **თუ (1.5.1) მწკრივი განშლადია $x'\in\mathbb{R}$ წერტილში, მაშინ ის განშლადია იმ x-ებისათვის, რომელთათვისაც**

$$|x-x_0|>|x_0-x'|.$$

თეორემა 1.5.3. **(ხარისხოვანი მწკრივის თანაბარი კრებადობა). თუ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსი $R>0$, მაშინ ხარისხოვანი მწკრივი თანაბრად კრებადია სიმრავლეზე**

$$\Delta_r=\{x:\ |x-x_0|\le r\},$$

სადაც $r<R$.

დამტკიცება. რადგანაც $r<R$, ე.ი. ხარისხოვანი მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია $x-x_0=r$ წერტილში; ე.ი. კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n.$$

რადგან $\forall x\in\Delta_r$ სამართლიანია უტოლობა $|x-x_0|\le r$, ამიტომ

$$|a_n(x-x_0)^n|\le|a_n|r^n.$$

ფუნქციათა მწკრივის თანაბრად კრებადობის ვაიერშტრასის ნიშნის ძალით თეორემა 1.5.3-ის სამართლიანობა დამტკიცებულია. □

თეორემა 1.5.4. **(აბელის II თეორემა). თუ ხარისხოვანი მწკრივი**

$$\sum a_n(x-x_0)^n$$

კრებადია x_0+R (x_0-R) წერტილში, მაშინ ის თანაბრად კრებადია $[x_0, x_0+R]$ ($[x_0-R, x_0]$) სეგმენტზე.

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$[x_0,x_0+R]=\{x\in x_0+tR:\ 0\le t\le 1\}.$$

მაშინ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n t^n .$$

თეორემის პირობის ძალით რიცხვითი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

კრებადია, ხოლო t^n ფუნქციათა მიმდევრობა მონოტონურია და შემოსაზღვრულია [0,1] სეგმენტზე. მაშინ აბელისა და დირიხლეს ნიშნის თანახმად მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n t^n$$

თანაბრად კრებადია. □

მაგალითი 1.5.4. ხარისხოვანი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

თეორემა 1.5.3-ის ძალით თანაბრად კრებადია $\forall [a,l] \subset (-1,1)$, ხოლო აბელის II თეორემის ძალით ის თანაბრად კრებადია [-1,l] სეგმენტზე, სადაც $l<1$. ხოლო [a,1) სიმრავლეზე, სადაც $a>-1$, მოცემული მწკრივი არ არის თანაბრად კრებადი. მართლაც, x^n ფუნქციის უწყვეტობის ძალით $\exists x$ 1-თან "ახლოს" ისეთი, რომ

$$\left| \frac{x^n}{n} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n} \right| > \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{1}{4} .$$

ვთქვათ, მოცემულია ხარისხოვანი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n . \tag{1.5.3}$$

განვიხილოთ მოცემული მწკრივის ფორმალურად გაწარმოების და ინტეგრების შედეგად მიღებული მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} , \tag{1.5.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \tag{1.5.5}$$

და დავამტკიცოთ, რომ (1.5.3)-(1.5.5) მწკრივების კრებადობის რადიუსები ერთმანეთს ემთხვევა. მართლაც ვთქვათ, (1.5.3) მწკრივის კრებადობის რადიუსი არის R,

$$R = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} ;$$

(1.5.4) მწკრივის კრებადობის რადიუსი აღვნიშნოთ R'-ით. მაშინ

$$R' = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n|a_n|} .$$

დავამტკიცოთ, რომ $R = R'$.

როგორც ვიცით $\exists \{n_k : k \geq 1\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k-1]{n_k|a_{n_k}|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} ;$$

ე.ი.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n|a_n|} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} ,$$

ან, რაც იგივეა,

$$R = 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = R' . \tag{1.5.6}$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$R' \le R. \qquad (1.5.7)$$

(1.5.6), (1.5.7)-დან გამომდინარეობს, რომ $R = R'$. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $R = R''$. □

თეორემა 1.5.5. **(ხარისხოვანი მწკრივის გაწარმოება და ინტეგრება). ვთქვათ, $R>0$ ხარისხოვანი მწკრივის კრებადობის რადიუსია და**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

მაშინ

1) **მაშინ f ფუნქციას $x\in(x_0-R, x_0+R)$ წერტილში გააჩნია ნებისმიერი რიგის წარმობული და ის გამოითვლება ფორმულით**

$$f^{(k)}(x)= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n (x - x_0)^{n-k};$$

2) **$\forall x \in (x_0-R, x_0-R)$ წერტილისთვის სამართლიანია ტოლობა**

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

განმარტება 1.5.1. **ვიტყვით, რომ f ფუნქცია ანალიზურია $x\in\mathbb{R}$ წერტილში, თუ არსებობს $R>0$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \ \forall x\in(x_0-R, x_0+R).$$

თეორემა 1.5.6. **თუ ფუნქცია f ანალიზურია x_0 წერტილში მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

დამტკიცება. მართლაც,

$$f^{(k)}(x_0) = n(n-1)\cdots 1 = n!a_k ,$$

საიდანაც

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$ □

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ ფუნქცია ანალიზურია, მაშინ ის უსასრულოდ დიფერენცირებადია. პირიქით, საზოგადოდ, სწორი არ არის - არსებობს ისეთი უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქცია, რომელიც ანალიზური არ არის. მართლაც, განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 1.5.5.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0. \end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

სადაც P_n n-ური ხარისხის პოლინომია. მაშინ

$$f^{(n)}(x) \to 0, \quad x \to 0.$$

მაშასადამე,

$$f^{(n)}(0) = 0, \text{ ხოლო } e^{-1/x^2} \neq 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია არ არის ანალიზური 0 წერტილში.

მაშინ ისმის კითხვა: რა პირობებშია უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქცია ანალიზური?

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 1.5.7. **ვთქვათ, f უსასრულოდ დიფერეცნირებადი ფუნქციაა. არსებობს ისეთი დადებითი M რიცხვი, რომ**

$$|f^{(n)}(x)|\le M,\ n=0,1,2,\dots,\ \forall x\in(x_0-h,\ x_0+h).$$

მაშინ $\forall x\in(x_0-h,\ x_0+h)$ ადგილი აქვს წარმოდგენას

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n;$$

ე.ი. f ფუნქცია ანალიზურია x_0 წერტილში.

დამტკიცება. ტეილორის ფორმულის ძალით

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),$$

სადაც

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \ \xi\in(x_0,x).$$

თეორემის პირობის ძალით

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0,$$

როცა $n\to\infty$. □

თ ა ვ ი 2

მ რ ა ვ ა ლ გ ა ნ ზ ო მ ი ლ ე ბ ი ა ნ ი ს ი ვ რ ც ი ს ზ ო გ ი ე რ თ ი ს ა კ ი თ ხ ი

2. 1. R^n სივრცე

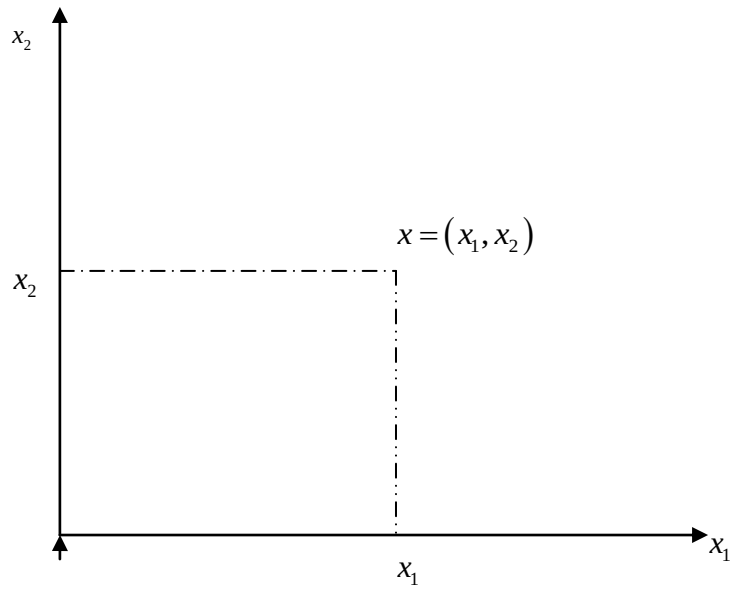
განმარტება 2. 1. 1. ვთქვათ $x_1, x_2, ..., x_n$ ნამდვილი რიცხვებია. დალაგებულ n-ეულს $(x_1, x_2, ..., x_n)$ უწოდებენ n-განზომილებიან წერტილს ან ვექტორს და აღინიშნება შემდეგნაირად

$$x := (x_1, x_2, ..., x_n), y := (y_1, y_2, ..., y_n), ...$$

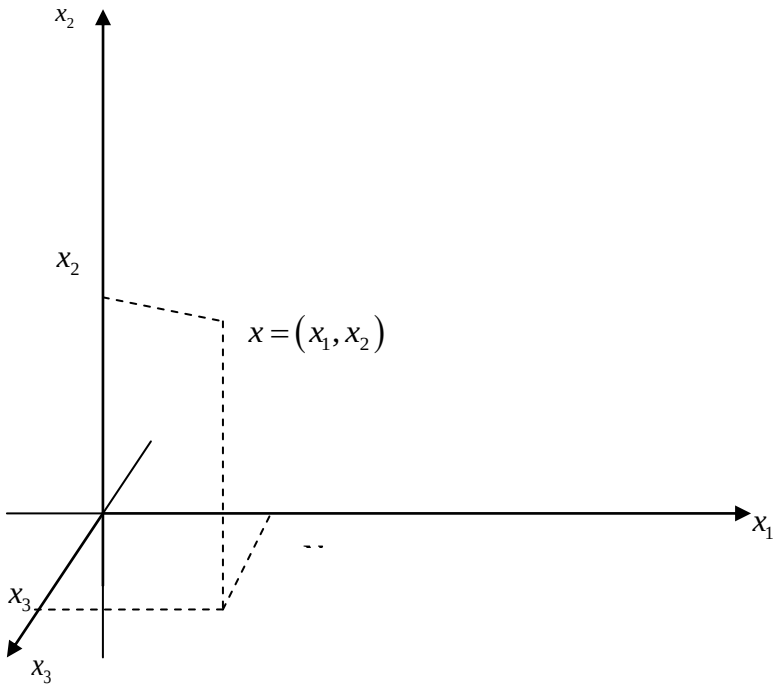
x_k-ს უწოდებენ x ვექტორის k-ურ კოორდინატს. n-განზომილებიანი წერტილების სიმრავლეს აღნიშნავენ R^n-ით, ე. ი.

$$R^n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in R, i = 1, 2, ..., n\}$$

მაგალითი 2. 1. 1. როცა $n = 2$, $R^2 := \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in R\}$ წარმოადგენს 2-განზომილებიან სიბრტყეს.



მაგალითი 2. 1. 2. როცა $n=3$, $R^3 := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in R\}$ წარმოადგენს 3-განზომილებიან სივრცეს.



განმარტება 2. 1. 2. ვთქვათ $x := (x_1, x_2, ..., x_n), y := (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$. განსაზღვროთ

1) ტოლობა

$x = y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i = y_i, i = 1, 2, ..., n$;

2) ჯამი

$$x + y := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n);$$

3) სკალარზე ნამრავლი

$$\alpha x := (\alpha x_1, ..., \alpha x_n),\ \alpha \in R;$$

4) სხვაობა $x - y := x + (-1)y$;

5) ნულოვანი ვექტორი

$$0 := (0, ..., 0).$$

მაგალითი 2. 1. 3. ვთქვათ $x := (2, -3, 1)$ და $y := (-4, 1, -2)$ არის ორი ვექტორი R^3-ის. მაშინ

$$x + y = (-2, -2, -1),$$
$$x - y = (6, -4, 3),$$
$$y - x = (-6, 4, -3),$$
$$3x = (6, -9, 3),$$

და

$$-2y = (8, -2, 4).$$

ამ ოპერაციების მომართ R^n წარმოადგენს წრფივ სივრცეს

განმარტება 2. 1. 3. ვთქვათ X ნებისმიერ ობიექტთა სიმრავლეა. ვიტყვით, რომ X არის წრფივი ანუ ვექტორული სივრცე თუ მასში განსაზღვრულია შეკრებისა და სკალარზე ნამრავლის ოპერაცია ისე, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

I. შეკრების ოპერაციის მიმართ

1) $x+y=y+x,\ \forall x,y\in X;$
2) $x+(y+z)=(x+y)+z,\ \forall x,y,z\in X;$
3) $\exists 0\in X$ ისეთი, რომ $\forall x\in X\quad x+0=x;$
4) $\forall x\in X\quad \exists -x\in X$ ისეთია, რომ $x+(-x)=0.$

II. სკალარზე ნამრავლის ოპერაციის მიმართ

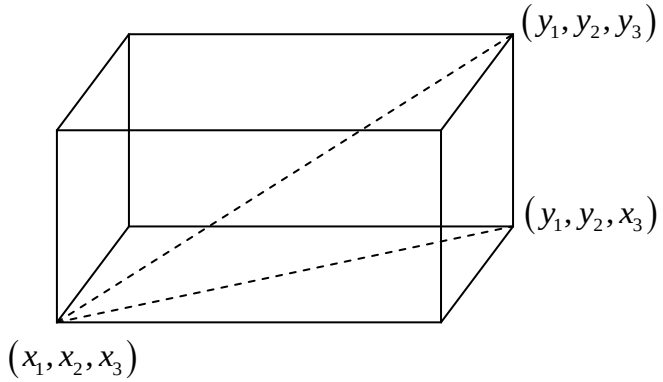
1) $\forall\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x,\ \forall\alpha,\beta\in R^1,\quad \forall x\in X;$
2) $1\cdot x=x,\ \forall x\in X;$
3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x,\ \forall\alpha,\beta\in R^1,\quad \forall x\in X;$
4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y,\ \forall\alpha\in R^1,\ \forall x,y\in X.$

2. 2. გეომეტრია R^n-ში

შეგახსენებთ, რომ თუ $x=(x_1,x_2)$ და $y=(y_1,y_2)$ არის R^2-ის ორი ვექტორი მაშინ პითაგორის თეორემის თანახმად x და y ვექტორებს შორის მანძილი გამოითვლება ფორმულით

$$d(x,y):=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}.$$

ეს ფორმულა მარტივად შეიძლება განზოგადდეს R^3-ის შემთხვევაში. მართლაც, ვთქვათ $x=(x_1,x_2,x_3)$ და $y=(y_1,y_2,y_3)$ არის R^3-ის ორი ვექტორია და $z=(y_1,y_2,x_3)$,



მაშინ პითაგორის თეორემის გამოყენებით ადვილი დასანახია რომ მანძილი x და y ვექტორებს შორის არის

$$d(x,y) := \sqrt{\left(\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}\right)^2+|y_3-x_3|^2} = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)}.$$

კერძოდ, თუ აღვნიშნავთ $\|x\|$-ით მანძილს $x=(x_1,x_2,x_3)$-დან კოორდინატთა სათავემდე $(0,0,0)$ R^3-ში მაშინ

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

მაშასადამე გვაქვს $d(x,y)=\|x-y\|$.

მაგალითი 2. 2. 1. თუ $x=(1,2,-3)$ და $y=(3,-2,1)$, მაშინ მანძილი x-დან კოორდინატთა სათავემდე არის

$$\|x\| = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{14}$$

და მანძილი x-დან y-მდე არის $\|y-x\| = \|(2,-4,4)\| = \sqrt{4+16+16} = 6$.

განმარტება 2. 2. 1. ვთქვათ $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$. x ვექტორის სიგრძე (ნორმა) აღინიშნება $\|x\|$ და განიმარტება შემდეგნაირად

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2},$$

ხოლო $x\in R^n$ და $y\in R^n$ ვექტორებს შორის მანძილი აღინიშნება $d(x,y)$-ით და განიმარტება შემდეგნაირად $d(x,y)=\|y-x\|$.

ადვილი დასანახია, რომ

$$\|x\| = d(x,0).$$

მაგალითი 2. 2. 2. თუ $x=(2,3,-1,5)$ არის წერტილი R^n-ში, მაშინ მანძილი x-დან კოორდინატთა სათავემდე არის

$$\|x\| = \sqrt{4+9+1+25} = \sqrt{39}.$$

თუ $y=(3,2,1,4)$ მაშინ მანძილი x-სა და y-ს შორის არის

$$d(x,y) = \|y-x\| = \|(1,-1,2,-1)\| = \sqrt{7}.$$

განმარტება 2. 2. 2. სტანდარტული ბაზისი R^n-ში ეწოდება შემდეგ ვექტორებს

$$e_1 := (1,0,0...,0)$$
$$e_2 := (0,1,0,...,0)$$
$$\vdots$$
$$e_n := (0,0,0,...,1).$$

მაგალითი 2. 2. 3. R^2-ში ვექტორები $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ წარმოადგენს სტანდარტულ ბაზის. თუ $x:=(x_1,x_2)$, მაშინ

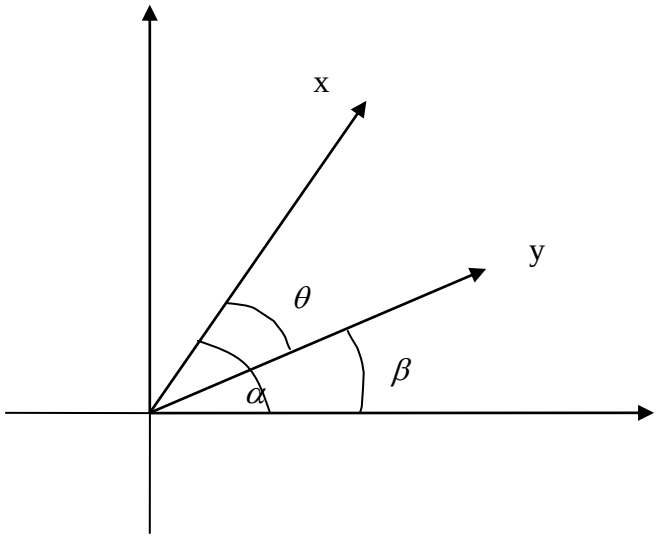
$$x=(x_1,0)+(0,x_2)=x_1(1,0)+x_2(0,1)=x_1e_1+x_2e_2,$$

საზოგადოდ, $x\in R^n$-თვის , გვაქვს

$$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n.$$

2. 3. ორ ვექტორს შორის კუთხე და სკალარული ნამრავლი

ვთქვათ, $x=(x_1,x_2)$ და $y=(y_1,y_2)$ არის R^2-ის ორი ვექტორი. α,β აღვნიშნოთ შესაბამისად კუთხეები ამ ვექტორებსა და ox_1, ox_2 ღერძების დადებით მიმართულებებს შორის. ვთქვათ, $\beta\le\alpha, \theta := \beta-\alpha.$



ადვილი დასანახია, რომ

$$\cos(\alpha)=\frac{x_1}{\|x\|},$$

$$\cos(\beta)=\frac{y_1}{\|y\|},$$

$$\sin(\alpha)=\frac{x_2}{\|x\|},$$

$$\sin(\beta)=\frac{y_2}{\|y\|}.$$

რადგანაც

$$\cos(\theta)=\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta),$$

გვაქვს,

$$\cos(\theta)=\frac{x_1y_1}{\|x\|\|y\|}+\frac{x_2y_2}{\|x\|\|y\|}=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{\|x\|\|y\|}.$$

მაგალითი 2. 3. 1. ვთქვათ θ არის უმეცლესი კუთხე $x=(2,1)$ და $y=(1,3)$ ვექტორებს შორებს. მაშინ,

$$\cos(\theta)=\frac{2\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

ანალოგიურად, R^3-ის შემთხვევაში დამტკიცდება, რომ

$$\cos(\theta)=\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\|x\|\|y\|}.$$

განმარტება 2. 3. 1. ვთქვათ $x=(x_1,x_2,...,x_n), y=(y_1,...,y_n)\in R^n$. მაშინ x და y ვექტორებს სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $<x,y>$-ით და განიმარტება შემდეგნაირად

$$<x,y>:=x_1y_1+\cdots+x_ny_n.$$

მაგალითი 2. 3. 2. ვთქვათ, $x=(1,-4,3,-2), y=(-3,5,6,1)$, მაშინ

$$<x,y>=-3-20+18-2=-7.$$

თვისებები:

$$<x,y>=<y,x>;$$

$$<x,y+z>=<x,y>+<x,z>;$$

$$<\alpha x,y>=\alpha<x,y>;$$

$$<0,x>=0;$$

$$<x,x>\geq 0;$$

$$<x,x>=0\Leftrightarrow x=0;$$

$$<x,x>=\|x\|^2.$$

კოში-შვარცის უტოლობა. ვთქვათ, $x,y\in R^n$, მაშინ

$$|<x,y>|\leq\|x\|\|y\|.$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ,

$$f(t):=<x+ty,x+ty>.$$

ზემოთ მოყვანილი თვისებების ძალით გვაქვს

$$f(t)=<x,x>+<x,ty>+<ty,x>+<ty,ty>$$

$$=<x,x>+t<x,y>+t<y,x>+t^2<y,y>$$

$$=<x,x>+2t<x,y>+t^2<y,y>\geq 0.$$

მეორეს მხრივ, იმისათვის რომ ეს უტოლობა შესრულდე ნებისმიერი t-თვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$D=<x,y>^2-<x,x><y,y>\leq 0.$$

რადანაც $<x,x>=\|x\|^2$, $<y,y>=\|y\|^2$, მივიღებთ უტოლობის დამტკიცებას.

კოში-შვარცის უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$-1 \le \frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|} \le 1.$$

განმარტება 2. 3. 2. ვთქვათ, $x, y \in R^n$, მაშინ კოთხე x და y ვექტორებს შორის განიმარტება სემდეგნაირად

$$\theta := ar\cos\left(\frac{< x, y >}{\|x\|\|y\|}\right).$$

მაგალითი 2. 3. 3. ვთქვათ, $x \in R^n$ და e_k არის სტანდარტული ბაზისი, ხოლო α_k იყოს კუთხე x ვექტორსა და k-ურ ღერძს შორის, მაშინ გვაქვს

$$\cos(\alpha_k) = \frac{< x, e_k >}{\|x\|\|e_k\|} = \frac{x_k}{\|x\|}.$$

თუ x არის ერთეულოვანი ვექტორი $(\|x\| = 1)$ მაშინ, $x_k = \cos(\alpha_k)$ და $x = (\cos(\alpha_1), ..., \cos(\alpha_k))$.

განმარტება 2. 3. 3. ვთქვათ, $x, y \in R^n$, მაშინ x და y ვექტორებს ეწოდება ორთოგონალური (პერპენდიკულარული) თუ $< x, y >= 0$ და ვწერთ $x \perp y$.

ნოლოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის ორთოგონალურია, ამასთან ასეთი თვისება გააჩნია მხოლოდ 0 ვექტორს.

მაგალითი 2. 3. 4. ვექტორები $x = (-1, -2)$ და $y = (1, 2)$ ორთოგონალურია $z = (2, -1)$ ვექტორის.

განმარტება 2. 3. 4. ვთქვათ, $x, y \in R^n$, მაშინ x და y ვექტორებს ეწოდება პარალელური თუ $x = \alpha y$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $x, y \in R^n$ პარალელურია, მაშინ

$$\cos(\theta) = \frac{< x, \alpha x >}{\|x\|\|\alpha x\|} = \frac{\alpha\|x\|^2}{|\alpha|\|x\|^2} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \pm 1,$$

მაშასადამე $\theta = 0$ ან $\theta = \pi$.

მაგალითი 2. 3. 4. ვექტორები $x = (-1, -2)$ და $y = (3, 6)$ პარალელურია $y = \frac{1}{3}x$ წრფის.

სამკუთხედის უტოლობა. ვთქვათ, $x, y \in R^n$, მაშინ

$$\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|.$$

დამტკიცება.

$$\|x+y\|^2 =< x+y, x+y >=< x,x > +2 < x,y > + < y,y >= \|x\|^2 + 2 < x,y > + \|y\|^2 .$$

რადგანაც $< x,y > \le \|x\|\|y\|$ მივიღებთ,

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\|+\|y\|\right)^2 .$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ $x \perp y$.

მაშასადამე ჩვენ ვიღებთ შემდეგ ცნობილ დებულებას

პითაგორას თეორემა. იმისათვის რომ x და y ვექტორები R^n-დან იყვნენ ორთოგონალურები აუცილებელი და საკმარისია რომ

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

2.4. ღია ბირთვი. ჩაკეტილი და ღია სიმრავლეები R^n-ში

ვთქვათ, $a \in R^n$ და r დადებითი ნამდვილი რიცხვია, მაშინ სიმრავლეს

$$\{x : \|x-a\| < r\}$$

უწოდებენ ღია ბირთვს R^n-ში ცენტრით a წერტილში და რადიუსით r, ის აღინიშნება $B(a;r)$-ით.

შენიშვნა 2. 4. 1. როცა $n=1$ ეს სიმრავლე ემთხვევა a წერტილის r მიდამოს, როცა $n=2$ - მაშინ წრეს ცენტრით a წერტილში და რადიუსით r. $B(a;r)$ სიმრავლეს ზოგჯერ უწოდებენ a წერტილის r მიდამოს R^n-ში.

განმარტება 2. 4. 1. ვთქვათ $S \subset R^n$ და $a \in S$. a-ს უწოდებენ S-ს შიგა წერტილს, თუ $\exists B(a;r) \subset S$.

S სიმრავლის შიგა წერტილთა სიმრავლეს აღნიშნავენ $\operatorname{int} S$-ით.

განმარტება 2. 4. 2. $S \subset R^n$ უწოდებენ ღიას თუ ის შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისაგან, ე.ი. $S = \operatorname{int} S$

მაგალითი 2. 4. 1. R^n ღია სიმრავლეა.

მაგალითი 2. 4. 2. მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე ღია სიმრავლეა.

მაგალითი 2. 4. 3. $B(a;r)$ ღია სიმრავლეა, მართლაც

$$\forall x \in B(a;r) \Rightarrow \|x-a\| < r .$$

დავაფიქსიროთ $\delta \in (0; r-\|x-a\|)$ და დავამტკიცოთ, რომ $B(x;\delta) \subset B(a;r)$.

$$(\forall y \in B(x;\delta)) \Rightarrow (\|x-y\| < \delta) \Rightarrow$$

$$(\|y-a\| \le \|x-y\| + \|x-a\| < \delta + \|x-a\| < r - \|x-a\| + \|x-a\| = r).$$

მაგალითი 2. 4. 4. სიმრავლე $G = \{x \in R^n \,|\, \|x-a\| > r\}$ არის ღია.

ამოცანა. დავამტკიცოთ, რომ სიმრავლე $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n) \subset R^n$ ღიაა R^n-ში.

განმარტება 2. 4. 3. $a \subset R^n$ წერილის შემცველ ნებისმიერ ღია სიმრავლეს უწოდებენ a-ს მიდამოს.

თეორემა 2. 4. 1. ღია სიმრავლეების ნებისმიერი გაერთიანება ღიაა. ე.ი. (G_i ღია, $i \in \Gamma$) $\Rightarrow$ ($\bigcup\limits_{i\in\Gamma} G_i$ ღიაა).

დამტკიცება. $\left(\forall x \in \bigcup\limits_{i\in\Gamma} G_i\right) \Rightarrow \left(\exists i_0 \in \Gamma, x \in G_{i_0}\right) \Rightarrow \left(\exists B(x) \subset G_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in\Gamma} G_i\right)$.

თეორემა 2. 4. 2. ღია სიმრავლეების სასრული თანაკვეთა ღიაა, ე.ი. ($G_i, i = 1,\ldots, p$ ღიაა) $\Rightarrow$ ($\bigcap\limits_{i=1}^{p} G_i$ ღიაა).

დამტკიცება.

$$\left(\forall x \in \bigcap_{i=1}^{p} G_i\right) \Rightarrow \left(\exists B(x;\delta_i) \subset G_i, i = 1,\ldots, p\right)$$

$$\Rightarrow \left(B(x;\delta) \subset G_i, i = 1,\ldots, p, \delta = \min_{1\le i\le p} \delta_i\right) \Rightarrow \left(B(x;\delta) \subset \bigcap_{i=1}^{p} G_i\right).$$

შენიშვნა. 2. 4. 2. თეორემა 2.3.2 არ არის სამართლიანი თუ პირობაში სასრულ შევცვლით უსასრულო სიმრავლით. მართლაც, ვთქვათ, $G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ღია სიმრავლეა, მაგრამ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$, რაც არ არის ღია.

განმარტება 2. 4. 4. $F \subset R^n$ უწოდებენ ჩაკეტილს თუ მისი დამატება $R^n \setminus F$ არის ღია.

თეორემა 2. 4. 3. ა) ჩაკეტილ სიმრავლეთა ნებისმიერი თანაკვეთა ჩაკეტილია;
ბ) ჩაკეტილ სიმრავლეთა სასრული გაერთიანება ჩაკეტილია.

დამტკიცება. თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 2. 4. 1, თეორემა 2. 4. 2, ჩაკეტილი სიმრავლის განმარტებისა და ორადობის შემდეგი პრინციპებიდან:

$$R^n \setminus \left(\bigcap_{i\in\Gamma} F_i \right) = \bigcup_{i\in\Gamma} \left(R^n \setminus F_i \right);$$

$$R^n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i \right) = \bigcap_{i=1}^{p} \left(R^n \setminus F_i \right).$$

მაგალითი 2. 4. 5. სიმრავლე $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ ჩაკეტილია R^n-ში. სიმრავლე $\{x:\|x-a\|=r\}$ არის ჩაკეტილი, მართლაც

$$\{x:\|x-a\|=r\} = R^n \setminus \left(\{x:\|x-a\|>r\} \cup \{x:\|x-a\|<r\} \right).$$

თეორემა 2 4. 4. G ღია სიმრავლეა F ჩაკეტილია, მაშინ $G\setminus F$ ღიაა და $F\setminus G$ ჩაკეტილია.

დამტკიცება. $G\setminus F = G\cap\left(R^n\setminus F\right)$, $F\setminus G = F\cap\left(R^n\setminus G\right)$.

განმარტება 2 4. 5. ვთქვათ $S\subset R^n$ და $x\in R^n$. x-ს უწოდებენ S-ის დაგროვების წერტილს, თუ x-ის ნებისმიერი $B(x)$ ბირთვი შეიცავს S-ის ერთ წერტილს მაინც განსხვავებულს x-გან.

განმარტება 2 4. 6. ვთქვათ $S\subset R^n$ და $x\in R^n$. x-ს უწოდებენ S-ის შეხების წერტილს, თუ x-ის ნებისმიერი $B(x)$ ბირთვი შეიცავს S-ის ერთ წერტილს მაინც.

განმარტება 2 4. 7. თუ შეხების წერტილი x არ არის S-ის დაგროვების წერტილი, მაშინ მას უწოდებენ იზოლირებულ წერტილს.

შენიშვნა. 2 4. 3. დაგროვების წერტილი შეიძლება ეკუთვნოდეს S-ს, შეიძლება არა.

შენიშვნა. 2 4. 4. შეხების წერტილი შედგება ა) დაგროვების წერტილებისაგან;
ბ) იზოლირებული წერტილებისაგან.

თეორემა 2. 4. 5. თუ x არის S-ის დაგროვების წერტილი, მაშინ $\forall B(x)$ ბირთვი შეიცავს S-ის უსასრულო წერტილს.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო: $\exists B(x)$ ბირთვი, რომელიც შეიცავს S-ის სასრულ რაოდენობა $x_1,\ldots,x_p$ წერტილებს. ვთქვათ $r=\min\limits_{1\le i\le p}\{\|x-x_i\|\}$.

ადვილი დასანახია, რომ $B\left(x;\frac{r}{2}\right)\cap S=\varnothing$ რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას.

თეორემა 2. 4. 6. იმისათვის, რომ $F\in R^n$ იყოს ჩაკეტილი აუცილებელია და საკმარისია, რომ ის შეიცავდეს ყველა თავის დაგროვების წერტილს.

დამტკიცება. ვთქვათ F ჩაკეტილია და x არის F-ის დაგროვების წერტილი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ $x\in F$. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $x\notin F$. მაშინ $x\in R^n\setminus F$. ვინაიდან $R^n\setminus F$ არის ღია, ამიტომ $\exists B(x)\subset R^n\setminus F$, ე.ი. $B(x)\cap F=\varnothing$, რაც ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ x არის F-ის დაგროვების წერტილი. პირიქით, ვთქვათ, F შეიცავს ყველა თავის დაგროვების წერტილს. უნდა ვაჩვენოთ, რომ F ჩაკეტილია, ანუ რაც იგივეა დავამტკიცოთ, რომ $R^n\setminus F$ ღიაა. ავიღოთ $\forall x\in R^n\setminus F$, მაშინ $x\notin F$, ამიტომ $\exists B(x)$, რომელიც არ შეიცავს F-ის არც ერთ წერტილს. ე.ი. $B(x)\subset R^n\setminus F$.

განმარტება 2. 4. 8. $S\subset R^n$ სიმრავლეზე მისი დაგროვების წერტილების მიერთების ოპერაციას უწოდებენ სიმრავლის ჩაკეტვას და მას აღნიშნავენ $\overline{S}$-ით. თეორემა 2.4.6 შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

თეორემა 2. 4. 7. იმისათვის, რომ S იყოს ჩაკეტილი აუცილებელია და საკმარისია, რომ $S=\overline{S}$.

განმარტება 2. 4. 9. S სიმრავლის დაგროვების წერტილთა სიმრავლეს უწოდებენ S-ის წარმოებულს და აღნიშნავენ S'-ით.
მაშასადამე, $\overline{S}=S\cup S'$.

განმარტება 2. 4. 10. $x\in R^n$ უწოდებენ S-ის გარე წერტილს თუ ის არის $R^n\setminus S$-ის შიგა წერტილი.

განმარტება 2. 4. 11. თუ $x\in R^n$ არ არის S-ის არც შიგა და არც გარე წერტილი, მაშინ x-ს უწოდებენ S-ის საზღვრის წერტილებს.
S-ის საზღვრის წერტილთა სიმრავლე აღინიშნება ∂S-ით.

ამოცანა 2. 4. 1. დაამტკიცეთ, რომ ადგილი აქვს ჩადგმებს
$\partial(S_1\cup S_2)\subset\partial S_1\cup\partial S_2$;
$\partial(S_1\cap S_2)\subset\partial S_1\cup\partial S_2$;
$\partial(S_1\setminus S_2)\subset\partial S_1\cup\partial S_2$

ამოცანა 2. 4. 2. დაამტკიცეთ, რომ ∂S ჩაკეტილი სიმრავლეა.

2. 5. ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემა

განმარტება 2. 5. 1. $S \subset R^n$ სიმრავლეს უწოდებენ შემოსაზღრულს თუ არსებობს ბირთვი $B(x) \subset R^n$, ისეთი, რომ $S \subset B(x)$.

თეორემა 2. 5. 1. (ბოლცანო-ვეიერშტრასი) თუ $s \subset R^n$ უსასრულო და შემოსაზღრული სიმრავლეა, მაშინ მას გააჩნია ერთი დაგროვების წერტილი მაინც, ე. ი. $S' \neq \varnothing$.

დამტკიცება. $n=1$ შემთხვევაში, თეორემის სამართლიანობა ჩვენთვის ცნობილია. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $n \geq 2$.

ვინაიდან s სიმრავლე შემოსაზღრულია, ამიტომ არსებობს $B(x) \supset S$ და მაშასადამე $J_1 := \{x \in R^n : -a \leq x_k \leq a, k = 1,2,...,n\}$ ისეთი, რომ $J_1 \supset B(x) \supset S$.

თითოეული $[-a,a]$ დავყოთ ორ ტოლ ნაწილად, ე. ი.

$$[-a,a] = [-a,0] \cup [0,a].$$

მოცემული n განზომილებიანი მართკუთხედი დაიყოფა 2^n ტოლ n განზომილებიანი მართკუთხედებად, რომელთა გაერთიანება მოგვცემს მოცემულ მართკუთხედს. ვინაიდან მოცემული მართკუთხედი შეიცავს s უსასრულო წერტილს, ამიტომ 2^n მართკუთხედებიდან არსებობს ერთი მაინც მართკუთხედი, რომელიც შეიცავს s უსასრულო წერტილს და ეს მართკუთხედი აღვნიშნოთ J_2-ით. თუ ამ პროცეს გავაგრძელებთ უსასრულოთ მივიღებთ ერთმანეთში ჩადგმულ

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_m \supset \cdots$$

მართკუთხედებს, რომლებსაც ის თვისება აქვთ, რომ $s \cap J_m \neq \varnothing$, $m = 1,2,...$ ვთქვათ,

$$J_m := I_1^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$$

სადაც

$$I_k^{(m)} := [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}],\ k = 1,2,...,n, m = 1,2,....$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\left| I_k^{(m)} \right| = b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}}$$

და

$$\sup_m a_k^{(m)} = \inf_m b_k^{(m)} := t_k \quad \text{(დაამტკიცეთ).}$$

აღვნიშნოთ

$$t := (t_1, t_2, ..., t_n)$$

და დავამტკიცოთ, რომ t არის S-ის დაგროვების წერტილი. განვიხილოთ $B(t,r)$ და ვაჩვენოთ, რომ $B(t,r) \cap S$ არის უსასრულო სიმრავლე, მართლაც დაფიქცირებული r-თვის არსებობს $m(r)$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$\frac{a}{2^{m-2}} < \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

მაშინ ასეთი m-ებისათვის სამართლიანია ჩადგმა

$J_m \subset B(t,r)$ (დაამტკიცეთ!)

ვინაიდან $S \cap J_m$ უსასრულო სიმრავლეა, ამიტომ ადვილი დასანახია, რომ $S \cap B(t,r)$ იქნება უსასრულო სიმრავლე. თეორემა დამტკიცებულია.

2. 6. კანტორის თეორემა

ბოლცანო-ვეიერშტრასის თეორემის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი თეორემის სამართლიანობა

თეორემა 2. 6. 1. (კანტორი) ვთქვათ მოცემულია R^n-ის არაცარიელ სიმრავლეთა $\{Q_1, Q_2, ...\}$ თვლადი სისტემა, რომელთათვისაც

1) $Q_{k+1} \subseteq Q_k$, $k = 1, 2, ...$;

2) თითოეული Q_k ჩაკეტილია და Q_1 შემოსაზღვრულია.

მაშინ $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \neq \varnothing$.

დამტკიცება. თუ რომელიმე Q_k არის სასრული სიმრავლე მაშინ თეორემის დამტკიცება ტრივიალურია (დავასაბუთოთ!), ამიტომ ვიგულისხმოთ, რომ თითოეული Q_k უსასრულოა.

ვთქვათ $A := \{x_1, x_2, ...\}$ ისეთი, რომ $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $x_i \in Q_i$, $i = 1, 2, ...$, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $A \subset Q_1$. და ბოლცანო-ვეიერშტრასის ძალით მას გააჩნია ერთი დაგროვების წერტილი მაინც და ის აღვნიშნოთ x-ით. ადვილი დასანახია, რომ x არის თითოეული Q_k-ს დაგროვების წერტილი, მეორეს მხრივ, ვინაიდან Q_k ჩაკეტილია ამიტომ $x \in Q_k$, $k = 1, 2, ...$ და მაშასადამე $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$. თეორემა დამტკიცებულია.

2. 7. ლინდელოფისა და ჰაინე-ბორელის თეორემები

განმარტება 2. 7. 1. სიმრავლეთა ოჯახს $\{G_i, i \in \Gamma\}$ უწოდებენ S სიმრავლის დაფარვას თუ $S \subset \bigcup_{i \in \Gamma} G_i$. თუ თითოეული G_i ღია სიმრავლეა, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს ღია დაფარვა.

თეორემა 2. 7. 1. ვთქვათ $B = \{B_1, B_2, ...\}$ R^n-ში ისეთი ბირთვების სიმრავლეა, რომელთა რადიუსი და ცენტრის კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია. მაშინ $\forall x \in S \subset R^n$, სადაც S ღია სიმრავლეა, $\exists B_k \in B$ ისეთი, რომ $x \in B_k \subseteq S$.

დამტკიცება. რადგანაც S ღია სიმრავლეა, არსებობს ბირთვი $B(x,r) \subset S$. ვთქვათ $x = (x_1, ..., x_n)$ და y_k არის ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლისთვისაც

$$|y_k - x_k| < \frac{r}{4\sqrt{n}}.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$\|x - y\| < \frac{r}{4}.$$

ვთქვათ q რაციონალური რიცხვია $\left(\frac{r}{4}, \frac{r}{2}\right)$ ინტერვალიდან. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $x \in B(y,q) \subset B(x,r) \subset S$. (შეამოწმეთ!)

თეორემა 2. 7. 2. (ლინდელოფი). ვთქვათ $A \subset R^n$ და $G := \{G_i, i \in \Gamma\}$ ღია დაფარვაა A-სი. მაშინ G-დან გამოიყოფა A-ს თვლადი ქვედაფარვა.

დამტკიცება. ვთქფათ $B = \{B_1, B_2, ...\}$ თეორემა 2. 7. 1-ში ნახსენები ბირთვთა სიმრავლეა, რომელიც ცხადია, რომ თვლადია. ვთქვათ $x \in A$. მაშინ $\exists G_i$ ისეთი, რომ $x \in G_i$. თეორემა 2. 7. 1 –ის ძალით, $\exists B_k \in B$ ისეთი, რომ $x \in B_k \subset G_i$. ასეთი B_k-ები შეიძლება იყოს უსასრულო ბევრი, მაშინ ავირჩიოთ ის ბირთვი, რომლის ინდექსი არის უმცირესი და ის აღვნიშნოთ $B_{k(x)}$-ით. თუ ამ პროცესს ჩავატარებთ $\forall x \in A$, მაშინ მივიღებთ, რომ A დაიფარება თვლადი რაოდენობა ბირთვებით, მეორეს მხრივ, თითოეული ბირთვი შედის რომელიღაც G_i სიმრავლეში, მაშინ მითუმეტეს ასეთი G_i-ების გაერთიანება დაფარავს A-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. 7. 3. (ჰაინე-ბორელი) ვთქვათ A შემოსაზღრული და ჩაკეტილი სიმრავლეა. მაშინ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა.

დამტკიცება. თეორემა 2. 7. 4 –ის ძალით, მოცემული დაფარვიდან გამოიყოფა თვლადი ქვედაფარვა $\{I_1, I_2, ...\}$. ნაბისმიერი $m \geq 1$, განვიხილოთ

$$S_m := \bigcup_{k=1}^{m} I_k.$$

ცხადია, რომ S_m ღია სიმრავლეა. ვთქვათ $R^n \setminus S_m$, რომელიც ჩაკეტილი სიმრავლეა. განვიხილოდ თვლად სიმრავლეთა სისტემა

$$\{Q_1, Q_2, ...\}$$

სადაც $Q_1 = A$ და ნაბისმიერი $m > 1$

$$Q_m := A \cap \left(R^n \setminus S_m\right).$$

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $Q_{m+1} \subset Q_m$. თუ დავამტკიცებთ, რომ $\exists m_0$ ისეთი, რომ $Q_{m_0} = \varnothing$, მაშინ S_{m_0} დაფარავს A(დაამტკიცეთ!). დაუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $Q_m \neq \varnothing \ \forall m$. მაშინ კანტორის თეორემის ძალით $\bigcap_{m=1}^{\infty} Q_m \neq \varnothing$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სისტემა $\{I_1, I_2, ...\}$ არ ყოფილა A-ს დაფარვა. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

2. 8. კომპაქტური სიმრავლეები

განმარტება. 2. 8. 1. $S \subset R^n$-ში სიმრავლეს უწოდებენ კომპაქტურს, თუ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სრული ქვედაფარვა.

შენიშვნა 2. 8. 1. ჰაინე-ბორელის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული სიმრავლე R^n-ში კომპაქტურია.

თეორემა 2. 8. 1. ვთქვათ $S \subset R^n$. მაშინ შემდეგი სამი წინადადება ექვივალენტულია:
1) S არის კომპაქტური;
2) S არის შემოსაზღვრული და ჩაკეტილი;
3) S-ის ნებისმიერი უსასრულო ქვესიმრავლე შეიცავს დაგროვების წერტილს, რომელიც ეკუთვნის S-ს.

დამტკიცება. შენიშვნა 2. 8. 1-ის ძალით 2)$\Rightarrow$1). თუ დავამტკიცებთ, რომ 1) $\Rightarrow$2) $\Rightarrow$3) $\Rightarrow$2) მაშინ თეორემა დამტკიცებული იქნება.
ვთქვათ 1) შესრულებულია. დავამტკიცოთ, რომ S შემოსაზღვრულია. განვიხილოთ $B(0,k)$, $k=1,2,...$ ბირთვები. მაშინ ცხადია, რომ

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(0,k).$$

რადგანაც S კომპაქტურია, ამიტომ მოცემული ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა. რაც იმას ნიშნავს, რომ S შემოსაზღვრულია.
ახლა დავამტკიცოთ, რომ S ჩაკეტილია . ვთქვათ, S არ არის ჩაკეტილი. მაშინ არსებობს $y \notin S$ და არის S-ის დაგროვების წერტილი. ვთქვათ, $x \in S$ და შემოვიღოთ აღნიშვნა $r_x = \frac{\|x-y\|}{2}$. ვინაიდან $y \notin S$ ამიტომ თითოეული $r_x > 0$, მეორეს მხრივ, $\{B(x,r_x) : x \in S\}$ არის S-ის ღია დაფრვა. ვინაიდან S კომპაქტურია, ამიტომ ამ დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა.

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, r_k).$$

ვთქვათ, $r = \min\limits_{1\le k\le p} r_k$. დავამტკიცოთ, რომ $B(y,r) \cap B(x_k,r_k) = \varnothing$, $k=1,2,...,p$, მართლაც, თუ $x \in B(y,r)$, მაშინ $\|x-y\| < r \le r_k$. სამკუთხედის უტოლობიდან მივიღებთ

$$\|y-x_k\| \le \|y-x\| + \|x-x_k\|,$$

საიდანაც

$$\|x-x_k\| \ge \|y-x_k\| - \|y-x\| > 2r_k - r_k = r_k.$$

ე.ი. $x \notin B(x_k,r_k)$, $k=1,2,...,p$. მაშასადამე y არ ყოფილა S-ის დაგროვების წერტილი.
ახლა დავამტკიცოთ, რომ 2) $\Rightarrow$3). ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემიდან და იმ ფაქტიდან, რომ S ჩაკეტილია.
დასამტკიცებელი დარჩა, რომ 3) $\Rightarrow$ 2). ვთქვათ S არ არის შემოსაზღვრული. მაშინ ნებისმიერი $m>0$-თვის არსებობს $x_m \in S$ ისეთი, რომ $\|x_m\| > m$. ვთქვათ

$$T=\{x_1,x_2,...\}$$

უსასრულო სიმრავლეა. 3) –ის ძალით არსებობს $y\in S$, რომელიც წარმოადგენს T-ს დაგროვების წერტილს. მაგრამ ნებისმიერი $m>1+\|y\|$-თვის გვაქვს:

$$\|x_m-y\|\geq\|x_m\|-\|y\|>m-m+1=1.$$

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ S ყოფილა შემოსაზღვრული.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ S ჩაკეტილია. ვთქვათ $x\in S'$, მაშინ ნებისმიერი

$$B\left(x,\frac{1}{k}\right),\ \exists x_k\in B\left(x,\frac{1}{k}\right)\bigcap S.$$

განვიხილოთ სიმრავლე $T=\{x_1,x_2,...\}$, x არის აგრეთვე T-ს დაგროვების წერტილი, მეორეს მხრივ, 3) პირობის ძალით T-ს გააჩნია დაგროვების წერტილი, რომელიც ეკუთვნის S-ს. თეორემა იქნება დამტკიცებული, თუ ვაჩვენებთ, რომ x არის T-ს ერთადერთი დაგროვების წერტილი. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ $\exists y\neq x, y\in T\bigcap S$. სამკუთხედის უტოლობის ძალით გვაქვას

$$\|y-x\|\leq\|y-x_k\|+\|x_k-x\|<\|y-x_k\|+\frac{1}{k}.$$

ვთქვათ k_0 არის ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომ ნებისმიერი $k\geq k_0$-თვის $\frac{1}{k}<\frac{1}{2}\|y-x\|$. მაშინ

$$\|y-x\|<\|y-x_k\|+\frac{1}{2}\|y-x\|,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$0<\frac{1}{2}\|y-x\|<\|y-x_k\|,\ \forall k\geq k_0,$$

ე.ი. y არ ყოფილა T-ს დაგროვების წერტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

თავი 3

მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

3. 1. მიმდევრობები R^n-ში

ვთქვათ მოცემულია R^n-ში ვექტორთა შემდეგი მიმდევრობა

$$\left\{x_p = \left(x^{(p)}{}_1, \ldots, x^{(p)}{}_n\right) : p \geq 1\right\}.$$

ვიტყვით, რომ მოცემული მიმდევრობა კრებადია $A = (A_1, \ldots, A_n)$ ვექტორისკენ, თუ

$$\lim_{p\to\infty} \|x_p - A\| = 0,$$

ანუ სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon), \forall n : n > N(\varepsilon),\ \|x_n - A\| < \varepsilon.$

თეორემა 3. 1. 1 თუ $\{x_p : p \geq 1\}$ მიმდევრობას გააჩნია ზღვარი, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დაუშვათ წინააამღდები, ვთქვათ, $\left(\exists \lim_{p\to\infty} x_p := A\right) \wedge \left(\exists \lim_{p\to\infty} x_p := B\right)$, მაშინ სამკუთხედის უტოლობის ძალით

$$0 \leq \|A - B\| \leq \|A - x_p\| + \|x_p - B\| \to 0\ (p \to \infty),$$

რაც იმის ნიშნავს, რომ $A = B.$

თეორემა 3. 1. 2. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღრულია.

დამტკიცება.

$$\left(\exists \lim_{p\to\infty} x_p = A\right) \Rightarrow \left(\varepsilon = 1,\ \exists N,\ \forall p : p > N, \|x_p - A\| < 1\right)$$

$$r \equiv \max\left\{\|x_1\|, \ldots, \|x_N\|,\ \|A\| + 1\right\},$$

მაშინ $\forall p : p > N$ სამკუთხედის უტოლობის ძლით გვაქვს

$$\|x_p\| \leq \|x_p - A\| + \|A\| < 1 + \|A\| \leq r, \quad p > N, \tag{3.1.1}$$

როცა $p = 1, 2, \ldots, N$, გვაქვას

$$\|x_p\| \leq r. \tag{3.1.2}$$

(3.1.1) და (3.1.2)-დან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი.

თეორემა 3. 1. 3. იმისათვის, რომ $\{x_p : p \geq 1\}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი აუცილებელია და საკმარისი, რომ ნებისმიერი ქვემიმდევრობა $\{x_{p_k} : p \geq 1\}$ იყოს კრებადი.

დამტკიცება. $\left(\exists \lim_{p\to\infty} x_p = A\right) := \left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon),\ \forall p : p > N(\varepsilon), \|x_p - A\| < \varepsilon\right).$

რადგანაც $\{x_{p_k} : k \geq 1\}$ არის $\{x_p : p \geq 1\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა, ამიტომ $\exists k_0$ ისეთი, რომ $\forall k : k > k_0$, $p_k > N(\varepsilon)$, საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$\|x_{p_k} - A\| < \varepsilon, \ \forall k : k > k_0 .$$

განმარტება 3. 1. 1. ვიტყვით, რომ $\{x_p : p \geq 1\}$ მიმდევრობა არის კოშის მიმდევრობა, თუ $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, ისეთი, რომ $\forall p, q > N(\varepsilon)$

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon .$$

თეორემა 3. 1. 4. იმისათვის, რომ $\{x_p : p \geq 1\}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს კოშის მიმდევრობა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\exists \lim_{p\to\infty} x_p = A$, მაშინ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon), \ \forall p : p > N(\varepsilon) \ \|x_p - A\| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით $\forall p, q > N(\varepsilon)$-თვის გვაქვას

$$\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - A\| + \|x_q - A\| < \varepsilon .$$

პირიქით, ვთქვათ $\{x_p : p \geq 1\}$ მიმდევრობაა R^n-ში და აღვნიშნოთ $T \equiv \{x_1, x_2, ...\}$. პირველ როგში დავამტკიცოთ, რომ კოშის მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მართლაც

$$\varepsilon = 1, \ \exists N(\varepsilon), \ \forall p, q \geq N, \ \|x_p - x_q\| < 1 ,$$

მაშასადამე $\|x_p - x_N\| < 1$.

აღვნიშნოთ $r = \max\{\|x_1\|, ..., \|x_N\|\}$, მაშინ გვაქვს

$$\|x_p\| \leq \|x_p - x_N\| + \|x_N\| < 1 + r, \ \forall p : p > N ,$$

და

$$\|x_p\| \leq r, \ \ p = 1, 2, ..., N .$$

მაშასადამე, T სიმრავლე არის უსასრულო და შემოსაზღვრული სიმრავლე , ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის ძალით მას აქვს ერთი მაინც დაგროვების წერტილი და ის აღვნიშნოთ A-ით.
დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{p\to\infty} x_p = A .$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall p, q > N(\varepsilon) \ \|x_p - x_q\| < \frac{\varepsilon}{2}$. რადგანაც A არის დაგროვების წერტილი,

ამიტომ არსებობს $q_k \geq N(\varepsilon)$, $k = 1, 2, 3, ...$ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, რომლისთვისაც $x_{q_k} \in B\left(A, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. მაშინ $\forall p : p > N(\varepsilon)$ და სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\|x_p - x\| \leq \|x_p - x_{q_k}\| + \|x_{q_k} - A\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

შენიშვნა 3. 1. 1. რადგანაც

$$\left|A_k - x_k^{(p)}\right| \le \left\|A - x_p\right\| \le \left|A_1 - x_1^{(p)}\right| + \cdots + \left|A_n - x_n^{(p)}\right|,$$

ამიტომ ცხადია, რომ

$$\left(\exists \lim_{p\to\infty} x_p = A\right) \Leftrightarrow \left(\lim_{p\to\infty} x_k^{(p)} = A_k, k = 1,2,...,n\right).$$

3. 2 მრავალი ცვლადის ფუნქციის ზღვარი

ვთქვათ მოცემულია R^n და R^m წრფივი სივრცეები და წესი, რომელიც R^n-ის ყოველ ელემენტს x-ს უთანადებს R^m-ის ერდადერთ ელემენტს y. მაშინ ამ წესს უწოდებენ ფუნქციას და ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება

$$f : R^n \to R^m.$$

y-ს უწოდებენ x-ის ანასახს და ის ასე აღინიშნება $y = f(x)$. შეიძლება მოხდეს, რომ f ფუნქცია (ანუ წესი) განსაზღვრული არა მთლიან R^m-ზე, არამედ მის რაღაც A ქვესიმრავლეზე, მაშინ ეს ფუნქცია ჩაიწერება

$$f : A \to R^m,\ A \subset R^n.$$

A-ს უწოდებენ f ფუნქციის განსაზღვრის არეს დამ ას აღნიშნავენ $D(f)$-ით. ვთქვათ, $B \subset A$, მაშინ $f(B)$-ს ქვეშ გვესმის სიმრავლე იმ $f(x)$-ებისა, სადაც $x \in B$, ე.ი.

$$f(B) = \{f(x) : x \in B\}.$$

$f(B)$-ს უწოდებენ B სიმრავლის ანასახს f ფუნქციით. A განსაზღვრის არეა, მაშინ $f(A)$-ს უწოდებენ მნიშვნელობის არეს და აღნიშნავენ $E(f)$-ით

ვთქვათ $C \subset R^m$

$$f^{-1}(C) := \{x \in A : f(x) \in C\}$$

ვთქვათ,

$$f, g : A \to R^m, \quad A \subset R^n,$$

მაშინ ამ ფუნქციების ჯამი, სკალარზე ნამრავლი და სკალარული ნამრავლი განიმარტება შემდეგნაირად

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ (< f, g >)(x) =< f(x), g(x) >.$$

ვთქვათ მოცემულია $f : A \to R^m$, $A \subset R^n$ და $g : B \to R^k$, $B \subset f(A) \subset R^n$, მაშინ g და f ფუნქციათა კომპოზიცია აღინიშნება $g \circ f$ და განიმარტება შემდეგნაირად

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

$u(a)-a\in R^n$ წერტილის მიდამო

$\dot{u}(a)-a\in R^n$ წერტილის დაჩხვლეტილი მიდამო $\dot{u}(a)=u(a)\setminus\{a\}$

$u_A(a):=u(a)\cap A,$

$\dot{u}_A(a):=\dot{u}(a)\cap A.$

განმარტება 3. 2. 1. ვთქვათ მოცემულია ფუნქცია

$$f:A\to R^m,\quad A\subset R^n$$

a არის A- დაგროვების წერტილი და $b\in R^m$. ვიტყვით, რომ f ფუნქციას a წერტილში გააჩნია ზღვარი და ის არის b თუ

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\ 0<\|x-a\|<\delta,\ \|f(x)-b\|<\varepsilon$$

და ეს ფაქტი ასე ჩაიწერება

$$\exists\lim_{A\ni x\to a} f(x)=b,$$

ან კიდევ ეს განმარტება ექვივალენტურია შემდეგი განმარტებებისა:

$$\left(\exists\lim_{A\ni x\to a} f(x)=b\right):=\left(\forall\varepsilon>0,\exists\dot{u}_A(a),\forall x\in\dot{u}_A(a),\|f(x)-b\|<\varepsilon\right)$$

$$\left(\exists\lim_{A\ni x\to a} f(x)=b\right):=\left(\forall u(b),\exists\dot{u}_A(a),\ f\left(\dot{u}_A(a)\right)\subset u(b)\right).$$

თეორემა 3. 2. 1. ვთქვათ a არის A-ს დაგროვების წერტილი $\left(a\in A'\right)$ და $b\in R^m$. მაშინ

$$\exists\lim_{A\ni x\to a} f(x)=b \tag{3.2.1}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\exists\lim_{s\to\infty} f(x_s)=b \tag{3.2.2}$$

ნებისმიერი $\{x_s:s\ge1\}$ მიმდევრობისათვის $A\setminus\{a\}$-დან, რომელიც კრებადია a-კენ.

დამტკიცება. ვთქვათ სრულდება (3.2.1), მაშინ

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in A,\ 0<\|x-a\|<\delta,\ \|f(x)-b\|<\varepsilon.$$

ვთქვათ $\{x_s:s\ge1\}$ a-კენ კრებადი ნებისმიერი მიმდევრობაა $A\setminus\{a\}$-დან. დაფიქსირებული δ-თვის $\exists N(\delta),\ \forall s>N(\delta),\ \|x_s-a\|<\delta$ და მაშასადამე $\|f(x_s)-b\|<\varepsilon$, რაც ნიშნავს (3.2.2)-ს.

პირიქით, ვთქვათ (3.2.1) მცდარია, მაშინ

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x_\delta\in A,\ 0<\|x_\delta-a\|<\delta,\ \|f(x_\delta)-b\|>\varepsilon.$$

ვთქვათ, $\delta s=1/s$, მაშინ $\exists x_s\in A, 0<\|x_s-a\|<1/s$, ამასთან $\|f(x_s)-b\|>\varepsilon$, რაც ეწინააღმეგება (3.2.2)-ს.

თეორემა 3. 2. 2. ვთქვათ $p\in A'$ და

$$\left(\exists\lim_{A\ni x\to p} f(x)=a\right)\wedge\left(\exists\lim_{A\ni x\to p} g(x)=b\right),$$

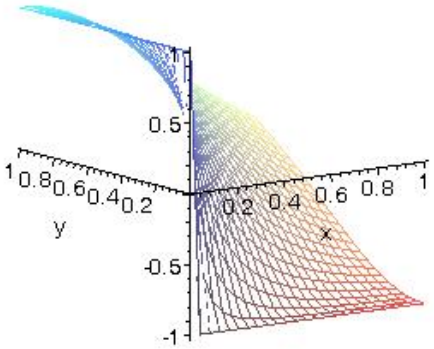
მაშინ

1) $\lim\limits_{A\ni x\to p}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$

2) $\lim\limits_{A\ni x\to p}\lambda f(x)=\lambda a$

3) $\lim\limits_{A\ni x\to p}<f(x),g(x)>=<a,b>$

4) $\lim\limits_{A\ni x\to p}\|f(x)\|=\|a\|$



დამტკიცება. 1) და 2)-ის დამტკიცება მარტივია.
დავამტკიცოთ 3) და 4). შევნიშნოთ, რომ

$$<f(x),g(x)>-<a,b>=<f(x)-a,g(x)-b>+<a,g(x$$

.

კოში-შვარცისა და სამკუთხედის უტოლობებიდან მივიღებთ

$$0<\left|<f(x),g(x)>-<a,b>\right|\le\|f(x)-a\|\cdot\|g(x)-b\|+\|a\|\cdot\|g(x)-b\|+\|b\|\cdot\|f(x)-a\|.$$

ამ უტოლობის მარჯვენა მხარე მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $x\to p$, რაც ამტკიცებს 3)-ის სამართლიანობას.
4)-ის სამართლიანობა გამომდინარეობს უშუალოდ შემდეგი უტოლობიდან

$$\left|\|f(x)\|-\|a\|\right|\le\|f(x)-a\|.$$

შენიშვნა 3. 2. 1. $f:A\to R^m$, $A\subset R^n$ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$f(x)=\left(f_1(x),...,f_n(x)\right),$$

სადაც
$f_i:A\to R^1$, $i=1,...,m$, ფუნქციებს უწოდებენ f ფუნქციის კომპონენტებს.
თუ $b=(b_1,...,b_m)$, მაშინ გვაქვს

$$\left|f_s(x)-b_s\right|\le\|f(x)-b\|\le\sum_{s=1}^{m}\left|f_s(x)-b_s\right|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\left(\exists\lim_{A\ni x\to a}f(x)=b\right)\Leftrightarrow\left(\exists\lim_{A\ni x\to a}f_i(x)=b_i,\ i=1,2,...,m\right).$$

ვთქვათ $f:R^2\to R^1$ და $(a,b)\in R^2$. განვიხილოთ ზღვრები

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y) \qquad (3.2.3)$$

$$\lim_{x\to a}[\lim_{y\to b}f(x,y)] \qquad (3.2.4)$$

$$\lim_{y\to b}[\lim_{x\to a}f(x,y)] \qquad (3.2.5)$$

(3.2.3)-ს უწოდებენ ორმაგ ზღვარს, ხოლო (2.2.4) და (2.2.5) განმეორებით ზღვრებს.

მაგალითი 3. 2. 1 არსებობს ფუნქცია, რომლისთვისაც (2.2.4) და (2.2.5) ზღვრები ერთმანეთს არ ემთხვევა.

$$f(x,y):=\begin{cases}-\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ

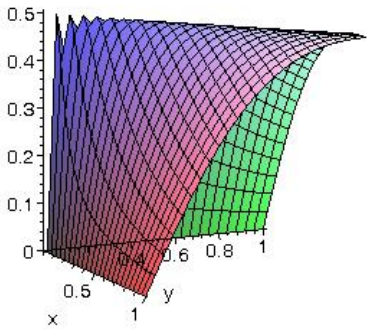
$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)]=-1$$

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]=1$$

საზოგადოდ (3.2.4) და (3.2.5) ზღვრების ტოლობა არ უზრუნველყოფს (3.2.3) ზღვრის არსებობას.

მაგალითი 2. 2. 2

$$f(x,y):=\begin{cases}-\dfrac{x\ y}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$$



ადვილი დასანახია, რომ

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)]=0$$

$$\lim_{y\to 0}[\lim_{x\to 0} f(x,y)]=0$$

მეორეს მხრივ,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\frac{1}{2}.$$

არსებობენ ფუნქციები, რომელსაც ყველა წრფის $x=\alpha t, y=\alpha t$ გასწვრივ გააჩნია ზღვარი, მაგრამ ორმაგი (3.2.3) ზღვარი არ არსებობს.

მაგალითი 3. 2. 3

$$f(x,y):=\begin{cases}-\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0,\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$$

ადვილი დასანახია, რომ

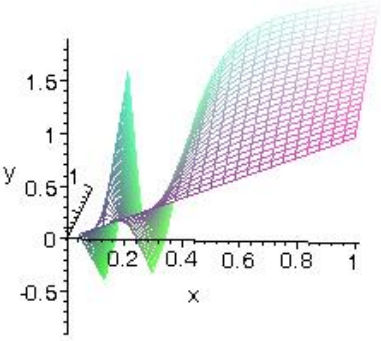
$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t,\beta t)=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^4t^4+\beta^2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta^2}=0,$$

მეორეს მხრივ,

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\frac{1}{2},$$

ე. ი. ორმაგი ზღვარი არ არსებობს.

საზოგადოდ (3.2.3) ზღვრის არსებობიდან არ გამომდინარეობს განმეორებითი ზღვრების არსებობა, მართლაც



მაგალითი 3. 2. 4.

$$f(x,y):=\begin{cases} x+y\sin(1/x), x\neq 0 \\ 0\ , \quad x=0 \end{cases},$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}[\lim_{y\to 0} f(x,y)]=0,$$

ამასთან,

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)$$

არ არსებობს.

სამართლიანია შემდეგი,

თეორემა 3. 2. 3. ვთქვათ $f(x,y)$ ფუნქცია განსაზღრულია (a,b) წერტილის შემცველ $(a-\delta_1,a+\delta_1)\times(b-\delta_2,b+\delta_2)$ მართკუთხედში, გარდა შესაძლებელია $x=a$ და $y=b$ წრფეებზე. ვთქვათ

1) $\forall y\in(b-\delta_2,b+\delta_2),\ y\neq b$

$\exists\lim_{x\to a} f(x,y):=\psi(y)$ (3.2.6)

2) $\forall x\in(a-\delta_1,a+\delta_1),\ x\neq a$

$\exists\lim_{y\to b} f(x,y):=\varphi(x)$ (3.2.7)

3) $\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} :=L$ (3.2.8)

მაშინ

$$\exists\lim_{y\to b}\psi(y)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=L$$

დამტკიცება. (3.2.8)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta_1,\eta_2:0<\eta_1<\delta_1,0<\eta_2<\delta_2$$

ისეთი, რომ

$$0<|x-a|<\eta_1,\ 0<|y-b|<\eta_2$$

$$|f(x,y)-L|<\varepsilon/2 \qquad (3.2.9)$$

დავაფიქსიროთ $y:0<|y-b|<\eta_2$ და (3.2.9)-ში გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $x\to a$, მაშინ (3.2.6)-დან მივიღებთ

$$|\psi(y)-L|\le\varepsilon/2<\varepsilon,$$

მაშასადამე

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta_2>0,\forall y:0<|y-b|<\eta_2|\psi(y)-L|<\varepsilon$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\exists \lim_{y\to b}\psi(y)=L$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\exists \lim_{x\to a}\varphi(x)=L.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

3. 3. მრავალი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციები

ვთქვათ, $f:A\to R^m, A\subset R^n$ განსაზღვრული ფუნქციაა $a\in A$.

განმარტება 3. 3. 1. ვიტყვით, რიმ f ფუნქცია უწყვეტია $a\in A$ წერტილში თუ $\forall V(f(a))$ მიდამოსთვის $\exists u_A(a)$ ისეთი, რომ $f(u_A(a))\subset V(f(a))$, ე.ი.

$$(f:A\to R^m \text{ უწყვეტია } a\in A\text{-ში}) :=$$
$$\left(\forall V(f(a)),\exists U_A(a),\ f(u_A(a))\subset V(f(a))\right).$$

ეს განმარტება ექვივალენტურია შემდეგი განმარტების

განმარტება 3. 3. 2.

$$(f:A\to R^m \text{ უწყვეტია } a\in A\text{-ში}) :=$$
$$\left(\forall \varepsilon>0\exists\delta>0,\forall x\in A,\ \|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(a)\|<\varepsilon\right).$$

შენიშვნა 3. 3. 1. თუ $a\in A'$ მაშინ ზღვრის განმარტების ძალით ზემოთ მოყვანილი უწყვეტობის განმარტება ექვივალენტურია შემდეგის

$$(f:A\to R^m \text{ უწყვეტია } a\in A\text{-ში}) :=$$
$$\left(\lim_{A\ni x\to a} f(x)=f(a)\right).$$

შენიშვნა 3. 3. 2. თუ a იზოლირებული წერტილია, მაშინ განმარტების ძალით f ფუნქცია ყოველთვის უწყვეტია, მართლაც რადგანაც a იზოლირებული წერტილია, ამიტომ არსებობს $u(a)$ ისეთი, რომ $u_A(a)=\{a\}$ და მაშასადამე $\forall V(f(a))$-თვის $f(U_A(a))=f(a)\subset V(f(a))$.

3. 4. უწყვეტ ფუნქციათა ლოკალური თვისებები

თეორემა 3. 4. 1. (ორი უწყვეტი ფუნქციის კომპოზიციის უწყვეტობის შესახებ) ვთქვათ, $f:A\to R^m, A\subset R^n, g:f(A)\to R^k$ განსაზღვრული ფუნქციებია. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა $a\in A$ წერტილში და g უწყვეტია $b=f(a)$ წერტილში, მაშინ

$$h=g\circ f$$

უწყვეტია $a\in A$ წერტილში.

დამტკიცება. ვინაიდან g უწყვეტია $b=f(a)$ წერტილში, ამიტომ $\forall V(g(b)), \exists U_{f(A)}(b)$, ისეთი, რომ $g\left(U_{f(A)}(b)\right)\subset V(g(b))$. მეორეს მხრივ, f უწყვეტია a წერილში, ამიტომ $U(b)$-თვის, $\exists W_A(a)$ ისეთი, რომ $f\left(W_A(a)\right)\subset U_{f(a)}(b)$. მაშასადამე $\forall V(h(a)), \exists W_A(a)$ ისეთი, რომ

$$h\left(W_A(a)\right)=g\left(f\left(W_A(a)\right)\right)\subset g\left(U_{f(A)}(b)\right)\subset V(g(b))=V\left(g\left(f(a)\right)\right)=V(h(a)).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. 4. 2. ვთქვათ ასახვა $f:A\to R^m, A\subset R^n$ უწყვეტია $a\in A$ წერტილში. მაშინ f შემოსაზღვრულია a-ს რომელიღაც მიდამოში.

დამტკიცება გამომდინარეობს უშუალოდ უწყვეტობის განმარტებიდან.

თეორემა 3. 4. 3. ვთქვათ ასახვა $f:A\to R^1, A\subset R^n$ უწყვეტია $a\in A$ წერტილში და $f(a)>0$, მაშინ $\exists U_A(a)$ მიდამო, რომლისთვისაც

$$f(x)>0,\ \forall x\in U_A(a).$$

დამტკიცება. მოცემული $\varepsilon=\dfrac{f(a)}{2}$-თვის არსებობს $U_A(a)$ მიდამო, ისეთი, რომ

$$\left|f(x)-f(a)\right|<\frac{f(a)}{2},\ \forall x\in U_A(a).$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$0<\frac{f(a)}{2}<f(x),\quad x\in U_A(a)$$

თეორემა 3. 4. 4. ვთქვათ $f,g:A\to R^1, A\subset R^n$ უწყვეტია $a\in A$ წერტილში, მაშინ უწყვეტია $f+g$, $f\cdot g$ და თუ $g(x)\neq 0, x\in A$, მაშინ შეფარდება $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ განსაზღვრულია A-ზე და უწყვეტია.

შენიშვნა 3. 4. 1. თუ $f=(f_i,...,f_n)$ მაშინ იმისათვის, რომ f იყოს უწყვეტი $a\in A$-ზე აუცილებელია და საკმარისი f_i იყოს უწყვეტი $a\in A$.

3.5 უწყვეტი ფუნქციის გლობალური თვისებები

განმარტება 3. 5. 1. $S \subset R^n$ სიმრავლეს უწოდებენ ბმულს თუ $\forall a,b \in S$, არსებობს უწყვეტი ფუნქცია $f=[0,1] \to S$ ისეთი, რომ $f(0)=a, f(1)=b$.

განმარტება 3. 5. 2. ღია და ბმულ სიმრავლეს არეს უწოდებენ.

მაგალითი. 3. 5. 1. დავამტკიცოთ, რომ $B(x;r)$, $r>0$, R^n-ში არეა. ის, რომ $B(x;r)$ ღიაა ჩვენ უკვე დავამტკიცეთ. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ბირთვი ბმულია. ვთქვათ, $a=(a_1,...,a_n)$, $b=(b_1,...,b_n) \in B(x;r)$. განვიხილოთ ასახვა $f:[0,1] \to R^n$, რომელიც მოცემულია წესით

$$f(t) := (f_1(t),..., f_n(t))$$

სადაც

$$f_i(t) := tb_i + (1-t)a_i .$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$f(0)=a, \quad f(1)=b.$$

დავამტკიცოთ, რომ $f([0,1]) \subset B(x;r)$, მართლაც

$$\begin{aligned}
\|f(t)-x\| &= \left(\sum_{i=1}^{n}(f_i(t)-x_i)^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(t(b_i-x_i)+(1-t)(a_i-x_i))^2\right)^{1/2} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}(t(b_i-x_i))^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}((1-t)(a_i-x_i))^2\right)^{1/2} \\
&= t\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i-x_i)^2\right)^{1/2} + (1-t)\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)_i^2\right)^{1/2} \\
&= t\|x-b\| + (1-t)\|x-a\| \\
&< tr + (1-t)r = r.
\end{aligned}$$

განმარტება 3. 5. 3. ასახვას $f: A \to R^m$, $A \subset R^n$ უწოდებენ თანაბრად უწყვეტს, თუ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,y \in A, \|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon.$

თეორემა 3. 5. 1. $\mathrm{K} \subset R^n$ კომპაქტზე უწყვეტ $f: \mathrm{K} \to R^m$ ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია.

დამტკიცება. რადგანაც f ასახვა უწყვეტია K კომპაქტზე, ამიტომ $\forall a \in \mathrm{K}, \forall \varepsilon > 0, \exists B_{\mathrm{K}}(a;r)$ ბირთვი, ისეთი რომ

$$\|f(x)-f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in B_{\mathrm{K}}(a;r), \qquad (3.3.1)$$

სადაც r დამოკიდებულია a-ზე. ადვილი დასანახია, რომ

$$\mathrm{K} \subset \bigcup B_{\mathrm{K}}\left(a;\frac{r}{2}\right).$$

რადგანაც K კომპაქტია, ამიტომ მოცემული ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა ე. ი.

$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{k=1}^{p} B_{\mathrm{K}}\left(a_k;\frac{r_k}{2}\right).$$

ვთქვათ $\delta := \min\left\{\frac{r_1}{2},...,\frac{r_p}{2}\right\}$. ვთქვათ, $x, y \in \mathrm{K}$ ისეთი, რომ $\|x-y\| < \delta$. მაშინ $\exists B_{\mathrm{K}}\left(a_k;\frac{r_k}{2}\right)$, რომლისთვისაც $x \in B_{\mathrm{K}}\left(a_k;\frac{r_k}{2}\right)$ და $\|f(x)-f(a_k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. სამკუთხედის უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\|y-a_k\| \le \|y-x\| + \|x-a_k\| < \delta + \frac{r_k}{2} \le \frac{r_k}{2} + \frac{r_k}{2} = r_k.$$

მაშასადამე $y \in B_{\mathrm{K}}(a_k, r_k)$ და აგრეთვე $\|f(y)-f(a_k)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. სამკუთხედის უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\|f(x)-f(y)\| \le \|f(x)-f(a_k)\| + \|f(x)-f(a_k)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

მაშასადამე $(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon), \forall x, y \in \mathrm{K}, \|x-y\| < \delta) \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \varepsilon.$

განმარტება 3. 5. 4. ვიტყვით, რომ $f : A \to R^m, A \subset R^n$ ფუნქცია არის შემოსაზღვული A-ზე თუ $\exists M > 0$, ისეთი რომ

$$\|f(x)\| \le M \quad \forall x \in A.$$

თეორემა 3. 5. 2. $\mathrm{K} \subset R^n$ კომპაქტზე უწყვეტი f ფუნქცია შემოსაზღრულია.

დამტკიცება. რადგანაც f ფუნქცია უწყვეტია K-ზე ამიტომ $\forall a \in \mathrm{K}, \exists U_{\mathrm{K}}(a)$, $\exists M_a$ ისეთი, რომ

$$\|f(x)\| \le M_a \quad \forall x \in U_K(a),$$

მეორეს მხრივ $\mathrm{K} \subset \bigcup U_{\mathrm{K}}(a)$. რადგანაც K კომპაქტია, ამიტომ მოცემული დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა ე. ი. $\mathrm{K} \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{\mathrm{K}}(a_i)$, მაშინ

$$\|f(x)\| \le M_{a_i}, \quad \forall x \in U_{\mathrm{K}}(a_i).$$

ვთქვათ

$$M := \max_{1 \le i \le p} M_{a_i}.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$\|f(x)\| \le M, \quad \forall x \in \mathrm{K}.$$

თეორემა 3. 5. 3 თუ $f:\mathrm{K}\to R$ უწყვეტია $\mathrm{K}\subset R^n$ კომპაქტზე, მაშინ ის აღწევს K-ზე უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს.

დამტკიცება. ვთქვათ $M:=\sup\limits_{x\in\mathrm{K}} f(x)$. დაუშვათ წინააამდეგი $f(x)<M, \forall x\in\mathrm{K}$. მაშინ უწყვეტია $M-f(x)$ ფუნქცია და ამასთან არსად არ ხდება ნულის ტოლია K-ზე, ე. ი. ფუნქცია $\dfrac{1}{M-f(x)}$ უწყვეტია. მეორეს მხრივ სუპრემუმის განმარტების ძალით $M-f(x)$ შეიძლება გავხადოთ რაგინდ გვინდა მცირე. მაშინ ფუნქცია $\dfrac{1}{M-f(x)}$ შემოუსაზღვრელია K კომპაქტზე რაც ეწინააამდეგება წინა თეორემას.

თეორემა 3. 5. 4. ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $E\subset R^m$ ბმულ სიმრავლეზე და $f(a)=A$ და $f(b)=B,\ a,b\in E$, მაშინ $\forall C\in(A,B), \exists c\in E$, ისეთი, რომ $f(c)=C.$

დამტკიცება. ვთქვათ $\Gamma:[0,1]\to E$ უწყვეტი ასახვაა ისეთი, რომ $\Gamma(0)=a, \Gamma(1)=b.$ განვიხილოთ ფუნქცია

$$f\circ\Gamma:[0,1]\to R.$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემას უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიციის უწყვეტობის შესახებ დავასკვნით, რომ $f\circ\Gamma\in C([0,1])$. რადგანაც

$$(f\circ\Gamma)(0)=f(\Gamma(0))=f(a)=A$$

$$(f\circ\Gamma)(1)=f(\Gamma(1))=f(b)=B$$

ამიტომ $\forall C\in(A,B), \exists\gamma\in(0,1)$ ისეთი, რომ

$$(f\circ\Gamma)(\gamma)=C.$$

თუ აღვნიშნავთ $\Gamma(\gamma)$-ს c-თი მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

თავი 4

მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

4. 1. მიმართული წარმოებული

ვთქვათ $f : E \to R^n$ განსაზღრული ფუნქციაა, სადაც $E \subset R^m$. დაუშვათ, რომ $x_0 \in \operatorname{int} E$.

განმარტება 4. 1. 1. f ფუნქციის მიმართული წარმოებული u ვექტორის გასწვრივ აღინიშნება $f'(x_0;u)$-თი და განიმარტება შემდეგნაირად

$$f'(x_0;u) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+ut)-f(x_0)}{t}.$$

ვთქვათ, $f := (f_1,...,f_n)$. მაშინ ადვილი დასანახია, რომ $f'(x_0;u)$ არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისი $f_k'(x_0;u),\ k=1,2,...,n$ არსებობა.

ვთქვათ $n=1$ და $u := e_k = (0,...,0,1,0,...,0)$, მაშინ გვაქვს

$$f'(x_0;e_k) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_k)-f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x_1^{(0)},...,x_{k-1}^{(0)},t+x_k^{(0)},x_{k+1}^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)-f\left(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)}{t}.$$

განმარტება 4. 1. 2. $f'(x_0;e_k)$-ს ეწოდება f ფუნქციის კერძო წარმოებული k-ური ცვლადის მიმართ და აღინიშნება $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$-ით. კერძო წარმოებულის აღსანიშნავად გამოიყენება აგრეთვე $D_k f(x_0)$ ან $f_{x_k}'(x_0)$.

მაგალითი 4. 1. 1. ვთქვათ $F(t)=f(x_0+tu)$. მაშინ ცხადია რომ $F'(0)=f'(x_0;u)$.

მაგალითი 4. 1. 2. ვთქვათ $f(x)=\|x\|^2$, მაშინ

$$F(t)=f(x_0+tu)=\|x_0+tu\|^2 =< x_0+tu, x_0+tu >=\|x_0\|^2+2t< x_0,u>+t^2\|u\|^2$$

მაშასადამე

$$f'(x_0;u)=F'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\|x_0\|^2+2t< x_0,u>+t^2\|u\|^2-\|x_0\|^2}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(2< x_0,u>+t\|u\|^2\right)=2< x_0,u>.$$

მაგალითი 4. 1. 3. არსებობს $f:R^2\to R$ ფუნქცია, რომელსაც გააჩნიათ კერძო წარმოებულები, ხოლო ყველა დანარჩენი მიმართულებით წარმოებულები არ არსებობენ, მართლაც

$$f(x,y):=\begin{cases} x+y, & x=0\vee y=0\\ 1, & sxvagan\end{cases}$$

მაშინ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(,y)-f(0,0)}{y}=1$$

მეორეს მხრივ, თუ $u=(a_1,a_2)$, $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, მაშინ

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tu)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta_1,ta_2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}=\infty.$$

ერთი ცვლადის შემთხვევაში ჩვენთვის კარგადაა ცნობილი, რომ თუ ფუნქცია წარმოებადია წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია, მრავალი ცვლადების შემთხვევაში არსებობს ფუნქცია, რომელსაც ყველა მიმართულებით გააჩნია წარმოებული, მაგრამ ფუნქცია წყვეტილია ამ წერტილში, მართლაც

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0\end{cases}$$

ვთქვათ $u=(a_1,a_2)$. მაშინ გვაქვს

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(0+tu)-f(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta_1,ta_2)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a_1^2a_2}{t^2a_1^4+a_2^2}=\frac{a_1^2}{a_2}$$

ე. ი. არსებობს წარმოებული ყველა მიმართულებით, მეორეს მხრივ, ეს ფუნქცია წყვეტილია, მართლაც

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^2)=\frac{1}{2},$$

ამასთან $f(0,0)=0.$

4. 2. ფუნქციის დიფერენციალი (სრული წარმოებული)

განმარტება 4. 2. 1. ვთქვათ $f:E\to R^n$, $E\subset R^m$, $x_0\in \operatorname{int}E$. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, თუ არსებობს წრფივი ასახვა $L_{x_0}:R^m\to R^n$ ისეთი, რომ

$$f(x_0+h)-f(x_0)=L_{x_0}(h)+\|h\|E_{x_0}(h) \qquad (4.2.1)$$

სადაც $E_{x_0}(h)\to 0,\ h\to 0.$

(4. 2. 1) ტოლობას პირველი რიგის ტეილორის ფორმულას უწოდებენ. $L_{x_0}:R^m\to R^n$ წრფივ ასახვას f ფუნქციის დიფერენციალს უწოდებენ x_0 წერტილში. f ფუნქციის დიფერენციალი x_0 წერტილში აღინიშნება $df(x_0)$-ით.

შენიშვნა 4. 2. 1. ადვილი დასანახია, რომ $L_{x_0}:=\left(L_{x_0}^{(1)},\dots,L_{x_0}^{(n)}\right)$ ასახვა იყოს წრფივი აუცილებელი და საკმარისია, რომ თითოეული $L_{x_0}^{(i)},\ i=1,\dots,n$ იყოს წრფივი, ამასთან

$$\left(E_{x_0}(h)\to 0,\ h\to 0\right)\Leftrightarrow\left(E_{x_0}^{(i)}(h)\to 0,\ h\to 0, i=1,\dots,n\right),$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ f ფუნქციის დიფერენცირებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია თოთოეული f_i კომპონენტის დიფერენცირებადობა.

შემდეგი თეორემა ამყარებს კავშირს ფუნქციის დიფერენციალსა და კერძო წარმოებულებს შორის.

თეორემა 4. 2. 1. ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში. მაშინ ნებისმიერი $h\in R^m$ ვექტორის გასწვრივ არსებობს $f'(x_0;h)$ წარმოებული და სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$df(x_0)h=f'(x_0;h).$$

დამტკიცება. დიფერენციალის განმარტების ძალით ვწერთ

$$\begin{aligned} f(x_0+th)-f(x_0)&=L_{x_0}(th)+\|th\|E_{x_0}(th)\\ &=tL_{x_0}(h)+|t|\|h\|E_{x_0}(th)\end{aligned},$$

მაშასადამე

$$f'(x_0;h)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}=L_{x_0}(h)+\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\|h\|E_{x_0}(th)=L_{x_0}(h).$$

თეორემა 4. 2. 2 ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში და $h := h_1 e_1 + \cdots + h_m e_m$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$df(x_0)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)h_m. \qquad (4.2.2)$$

დამტკიცება. რადგანაც $df(x_0)$ წრფივი ასახვაა გვაქვს

$$df(x_0)h = df(x_0)(h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n) = \sum_{k=1}^{m} h_k df(x_0)e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} h_k f'(x_0; e_k) = \sum_{k=1}^{m} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$$

შენიშვნა 4. 2. 2. განვიხილოთ ფუნქცია $\pi_i : R^m \to R^1$ განსაზღრული ტოლობით $\pi_i(x) = x_i$. მაშინ $\pi_i(x+h) - \pi_i(x) = h_i$, მეორეს მხრივ,

$$\pi_i(x+h) - \pi_i(x) = d\pi_i(x)h + \|h\| E_x(h)$$

ე. ი.

$$dx_i h = d\pi_i(x)h = h_i.$$

მაშინ (4.2.2) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$df(x)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 h + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)dx_m h$$

ან რაც იგივეა

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)dx_m.$$

შენიშვნა 4. 2. 3. ვთქვათ $\|h\| = 1$. რადგანაც $h_k = \cos(\alpha_k)$, სადაც α_k არის კუთხე h ვექტორსა და k-ურ ღერძს შორის თეორემა 4.2.1 და (4.3.2)-დან მივიღებთ

$$f'(x_0; h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\cos(\alpha_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\cos(\alpha_k). \qquad (4.2.3)$$

განმარტება 4. 2. 2. ვექტორს

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\right)$$

უწოდებენ f ფუნქციის გრადიენტს x_0 წერტილში და აღინიშნება $gradf(x_0)$-ით. მაშინ (4.2.2) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$f'(x_0;h) = df(x_0)h = \langle gradf(x_0), h \rangle .$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 2. 4. თუ $f: E \to R,\ E \subset R^m$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $x_0 \in E$ წერტილში, მაშინ ის უწყვეტია x_0-ში.

დამტკიცება. ვთქვათ $h = h_1 e_1 + \cdots + h_m e_m$, მაშინ

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L_{x_0}(h) + \|h\| E_{x_0}(h) = \sum_{k=1}^{m} h_k L_{x_0}(e_k) + \|h\| E_{x_0}(h) \to 0 \ \ (h \to 0).$$

შენიშვნა 4. 2. 4. არსებობს ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია წარმოებული წერტილში ყველა მიმართულებით, მაგრამ დიფერენცირებადი არ არის.

მაგალითი 4. 1. 4 ვთქვათ $f(x_1, x_2) = x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^3$. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის მიმართული წარმოებული $u = j - 2i$ ვექტორის გასწვრივ $(-1, 2)$ წერტილში.

ამოხსნა:

$$f'((-1,2);(-2,1)) = -2\frac{\partial f}{\partial x_1}(-1,2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(-1,2)$$

და

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 6x_1 x_2^2 - 12x_1^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 6x_2^2 + 6x_2 x_1^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(-1,2) =$$

4. 3. წრფივი ასახვის მატრიცა

ვთქვათ $T: R^m \to R^n$ წრფივი ასახვაა ე. ი.

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x, y \in R^m$$

და $e_1, \ldots, e_m$ ბაზისია R^m-ში, ხოლო $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ კი ბაზისია R^n-ში. $\forall x \in R^m$ გვაქვს $x = x_1 e_1 + \cdots + x_m e_m$, მაშინ T-ს წრფივობის ძალით გვაქვს

$$T(x) = \sum_{k=1}^{m} x_k T(e_k) \qquad (4.3.1)$$

ვინაიდან $T(e_k)\in R^n$ და $\tilde{e}_1,...,\tilde{e}_n$ ბაზისია R^n-ში, ამიტომ ვწერთ

$$T(e_k)=\sum_{i=1}^{n}t_{ik}\tilde{e}_i \qquad (4.3.2)$$

თუ (4.3.2)-ს გავითვალისწინებთ (4.3.1)-ში მივიღებთ

$$T(x)=\sum_{k=1}^{m}x_k\sum_{i=1}^{n}t_{ik}\tilde{e}_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}t_{ik}x_k\right)\tilde{e}_i$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m}t_{1k}x_k,...,\sum_{k=1}^{m}t_{nk}x_k\right)=\begin{pmatrix}t_{11}&\cdots&t_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ t_{n1}&\cdots&t_{nm}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix} \qquad (4.3.3)$$

აღვნიშნოთ

$$m(T):=\begin{pmatrix}t_{11}&\cdots&t_{1m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ t_{n1}&\cdots&t_{nm}\end{pmatrix}$$

მაშინ (4.3.3) – დან მივიღებთ

$$T(x)=m(T)\times x\,.$$

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $T:R^m\to R^n$ წრფივ ასახვას ცალსახად ეთანადება $n\times m$ მატრიცი და პირიქით, ნებისმიერ $n\times m$ მატრიცს ეთანადება ერთადერთი წრფივი ასახვა. მაშასადამე, $n\times m$ მატრიცთა სიმრავლესა და $T:R^m\to R^n$ წრფივ ასახვათა სიმრავლეს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა.

თეორემა 4. 3. 1. ვთქვათ $T:R^m\to R^n$, $S:R^n\to R^p$ წრფივი ასახვებია. მაშინ

$$m(S\circ T)=m(S)\times m(T).$$

დამტკიცება.

$$(S\circ T)(x)=m(S\circ T)\times x,$$

$$(S\circ T)(x)=S(T(x))=m(s)\times T(x)=m(s)\times m(T)\times x,$$

მაშასადამე

$$m(S\circ T)=m(S)\times m(T)$$

თეორემა 4. 3. 2. ვთქვათ $T:R^m\to R^n$, $S:R^m\to R^n$ წრფივი ასახვებია. მაშინ

$$m(S+T)=m(S)+m(T).$$

დამტკიცება.

$$(S+T)(x)=m(S+T)\times x,$$

$$(S+T)(x)=S(x)+T(x)=m(s)\times x+m(T)\times x=\big(m(s)+m(T)\big)\times x,$$

მაშასადამე

$$m(S+T)=m(S)+m(T).$$

4. 4. იაკობის მატრიცა

ვთქვათ $f:E\to R^n,\ E\subset R^m$ დიფერენცირებადია $x\in E$ წერტილში. თეორემა 4. 2. 1-ის ძალით

$$df(x)e_k = f'(x;e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x),...,\frac{\partial f_n}{\partial x_k}(x)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)e_i,$$

მეორეს მხრივ

$$\begin{aligned}
&df(x)h = df(x)\left(\sum_{k=1}^{m}h_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{m}h_k df(x)e_k \\
&= \sum_{k=1}^{m}h_k\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}h_k\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\right)e_i \\
&= \left(\sum_{k=1}^{m}h_k\frac{\partial f_1}{\partial x_k},...,\sum_{k=1}^{m}h_k\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right) \\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_m\end{pmatrix} \qquad (4.4.1)
\end{aligned}$$

მატრიცას

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)\end{pmatrix}$$

უწოდებენ f ფუნქციის იაკობის მატრიცას და აღნიშნავენ $f'(x)$-ით. ე. ი.

$$df(x)h = f'(x)\times h.$$

4. 5. ჯამის, ნამრავლის, შეფარდების და კომპოზიციის დიფერენციალი

თეორემა 4. 5. 1. ვთქვათ $f,g:E\to R^n$, $E\subset R^m$ დიფერენცირებადია $x\in E$ წერტილში, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია $(\alpha f+\beta g):E\to R$ დიფერენცირებადია და სამართლიანია ტოლობა

$$d(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha d(f)(x)+\beta d(g)(x).$$

დამტკიცება.

$$\begin{aligned}
&(\alpha f+\beta g)(x+h)-(\alpha f+\beta g)(x)\\
&=\alpha\big(f(x+h)-f(x)\big)+\beta\big(g(x+h)-g(x)\big)\\
&=\alpha\Big(df(x)h+E_x^{(1)}(h)\|h\|\Big)+\beta\Big(dg(x)h+E_x^{(2)}(h)\|h\|\Big)\\
&=\big(\alpha df(x)+\beta dg(x)\big)\|h\|+\Big(E_x^{(1)}(h)+E_x^{(2)}(h)\Big)\|h\|
\end{aligned}$$

რადგანაც $E_x^{(1)}(h)+E_x^{(2)}(h)\to 0$ და ასახვა $\alpha df(x)+\beta dg(x)$ არის წრფივი დიფერენციალის განმარტების ძალით მივიღებთ თეორემის დამტკიცებას.

რადგანაც

$$d(\alpha f+\beta dg)(x)h=(\alpha f+\beta g)'(x)h$$
$$df(x)h=f'(x)\times h\ ,\qquad dg(x)h=g'(x)\times h$$

მივიღებთ, რომ

$$(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

ე.ი.

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial(\alpha f_1+\beta g_1)}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial(\alpha f_1+\beta g_1)}{\partial x_m}(x)\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial(\alpha f_n+\beta g_n)}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial(\alpha f_n+\beta g_n)}{\partial x_m}(x)
\end{pmatrix}$$
$$=\alpha\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x)\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)
\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}
\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(x)\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(x)
\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}
\alpha\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)+\beta\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \alpha\frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x)+\beta\frac{\partial g_1}{\partial x_m}(x)\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\alpha\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x)+\beta\frac{\partial g_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \alpha\frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)+\beta\frac{\partial g_n}{\partial x_m}(x)
\end{pmatrix}$$

მაშასადამე

$$\frac{\partial(\alpha f_k+\beta g_k)}{\partial x_i}(x)=\alpha\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)+\beta\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x),\ k=1,\dots,n,\ i=1,\dots,m.$$

ისევე, როგორც ერთი ცვლადის შემთხვევაში ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 5. 2. ვთქვათ $f,g:E\to R$, $E\subset R^m$ დიფერენცირებადია $x\in E$ წერტილში, მაშინ

1) დიფერენცირებადია მათი ნამრავლი და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$d(fg)(x)=g(x)df(x)+f(x)dg(x);.$$

2) თუ $g(x)\neq 0,\ x\in E,$ მაშინ დიფერენცირებადია f/g და ადგილი აქვს ტოლობას

$$d(f/g)(x)=\frac{1}{g^2(x)}\big(g(x)df(x)-f(x)dg(x)\big).$$

თეორემა 4. 5. 2- დან მივიღებთ, რომ სამართლიანია შემდეგი

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x)=f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)+g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x_i}(x)=\frac{1}{g^2(x)}\left(g(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)-f(x)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right)$$

თეორემა 4. 5. 2. (**ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ**) ვთქვათ $f:X\to Y, X\subset R^m, Y\subset R^n$, $g:Y\to R^k$. f დიფერენცირებადია $x\in X$ წერტილში, ხოლო g კი $y=f(x)$-ში. მაშინ $\varphi:=g\circ f:X\to R^k$ დიფერენცირებადია x-ში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$d(g\circ f)(x)=dg(y)\circ df(x).$$

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ f,g ფუნქციათა დიფერენცირებადობას მივიღებთ

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=g\big(f(x+h)\big)-g\big(f(x)\big)=dg(y)\big(f(x+h)-f(x)\big)$$
$$+\|f(x+h)-f(x)\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big) \qquad (4.5.1)$$

სადაც

$$E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)\to 0,\quad f(x+h)-f(x)\to 0.$$

ვინაიდან

$$f(x+h)-f(x)=df(x)h+\|h\|E_x(h),\quad E_x(h)\to 0,\ h\to 0$$

(4.5.1)-დან მივიღებთ

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=dg(y)\big(df(x)h+\|h\|E_x(h)\big)+\|f(x+h)-f(x)\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)$$
$$=dg(y)\big(df(x)h\big)+dg(y)\big(\|h\|E_x(h)\big)+\|f(x+h)-f(x)\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)$$
$$=\big(dg(y)\circ df(x)\big)(h)+\|h\|E(h),$$

სადაც

$$\|h\|E(h)=\|h\|dg(y)\big(E_x(h)\big)+\big\|f(x+h)-f(x)\big\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)$$

$$E(h)=dg(y)\big(E_x(h)\big)+\frac{\big\|f(x+h)-f(x)\big\|}{\|h\|}E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)$$

ვინაიდან

$$E_x(h)\to 0 \quad (h\to 0)$$

და

$$\big\|dg(y)\big(E_x(h)\big)\big\|\le M\big\|E_x(h)\big\|$$

მივიღებთ, რომ $E(h)$-ის პირველი წევრი მიისწრაფი ნულისკენ. მეორეს მხრივ

$$\frac{\big\|f(x+h)-f(x)\big\|}{\|h\|}\big\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)\big\|=\frac{\big\|df(x)h+\|h\|E_x(h)\big\|}{\|h\|}\big\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)\big\|$$

$$\le\left(\frac{\big\|df(x)h\big\|}{\|h\|}+\frac{\big\|E_x(h)\big\|\|h\|}{\|h\|}\right)\big\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)\big\|$$

$$\le\Big(M+\big\|E_x(h)\big\|\Big)\big\|E_y\big(f(x+h)-f(x)\big)\big\|\to 0,\ h\to 0$$

მაშასადამე ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ

$$E(h)\to 0 \quad (h\to 0)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

4. 6. მრავალი ცვლადის რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი

ვთქვათ

$$\varphi=(\varphi_1,...,\varphi_k),\quad f=(f_1,...,f_n),\quad g=(g_1,...,g_k)$$

და

$$y_1=f_1(x_1,...,x_m)$$
$$\dots$$
$$y_n=f_n(x_1,...,x_m)$$

ვინაიდან

$$m(d\varphi)=m(dg\circ df)=m(dg)\times m(df)$$

მივიღებთ

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_m}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_m}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(y)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial y_n}(y)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)\end{pmatrix},$$

ვთქვათ $k=1,\ g_1(y):=g(y),\varphi_1(x)=\varphi(x)$ მაშინ მივიღებთ

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)\ \ \cdots\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}(x)\right)=\left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(y)\ \ \cdots\ \ \frac{\partial g}{\partial y_n}(y)\right)\times\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x)\end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(y)\frac{\partial f_i}{\partial x_1},\ldots,\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(y)\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial y_i}(y)\frac{\partial f_i}{\partial x_s}(x)$$

ამ უკანასკნელს უწოდებენ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი.

4. 7. შექცეული ასახვის დიფერენციალი

ერთი ცვლადის შემთხვევაში ცნობილია, რომ თუ $f:X\to Y$ და $f^{-1}:Y\to X$ ფუნქციები უწყვეტია შესაბამისად $x_0\in X$ და $y_0=f(x_0)$ წერტილებში, ამასთან f დიფერენცირებადია x_0 წერტილში და $f'(x_0)\neq 0$ მაშინ f^{-1} დიფერენცირებადია y_0 წერტილში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\left(f'(x_0)\right)^{-1}.$$

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ანალოგიური საკითხის შესწავლას მრავალი ცვლადების შემთხვევაში. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 7. 1. ვთქვათ $f:U(x)\to V(y)$ ასახვაა $U(x)\subset R^m$ მიდამოდან $y=f(x)$ წერტილის $V(y)\subset R^m$ მიდამოში. f უწყვეტია x წერტილში და არსებობს შექცეული ასახვა $f^{-1}:V(y)\to U(x)$, რომელიც უწყვეტია $y=f(x)$ წერტილში. თუ f დიფერენცირებადია x წერტილში და ასახვა $df(x):R^m\to R^m$ შექცევადია, მაშინ მისი შექცეული ასახვა დიფერენცირებადია y წერტილში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\left(df^{-1}\right)(y)=\left(df(x)\right)^{-1}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ

$$f(x)=y,\ \ f(x+h)=y+t\Rightarrow t=f(x+h)-f(x),$$

მაშინ

$$f^{-1}(y)=x,\ \ f^{-1}(y+t)=x+h\Rightarrow h=f^{-1}(y+t)-f^{-1}(y).$$

აქ იგულისხმება, რომ $x+h\in U(x),\ \ y+t\in V(y).$

f და f^{-1} ფუნქციები, შესაბამისად უწყვეტია x და y წერტილებში, ამიტომ გვაქვს

$$t=f(x+h)-f(x)\ \ (h\to 0) \qquad (4.7.1)$$

$$h=f^{-1}(y+t)-f^{-1}(y) \qquad (t\to 0) \qquad (4.7.2)$$

f ფუნქციის x წერტილში დიფერენცირებადობის ძალით გვაქვს

$$t=f(x+h)-f(x)=df(x)h+\|h\|E_x(h),\ E_x(h)\to 0\ (h\to 0) \qquad (4.7.3).$$

ვინაიდან

$$\|df(x)h\|\le M\|h\|$$

მივიღებთ

$$\|t\|\le\|df(x)h\|+\|h\|\|E_x(h)\|\le M\|h\|+\|h\|\|E_x(h)\|=O(\|h\|) \qquad (4.7.4).$$

ეხლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\|h\|=O(\|t\|) \qquad (4.7.5)$$

(4.7.3) –დან გვაქვს

$$[df(x)]^{-1}t=[df(x)]^{-1}(df(x)h)+[df(x)]^{-1}(\|h\|E_x(h))$$

$$=h+\|h\|[df(x)]^{-1}(E_x(h))=h+\|h\|O(E_x(h))=h+o(\|h\|) \qquad (4.7.6)$$

მაშასადამე

$$\|[df(x)]^{-1}t\|\ge\|h\|-o(\|h\|) \qquad (4.7.7)$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ

$$\|[df(x)]^{-1}t\|=O(\|t\|),$$

(4.7.7)- დან მივიღებთ

$$\|h\|=O(\|t\|)$$

რაც ამტკიცებს (4.7.5)-ს.

(4.7.4) და (4.7.5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$O(\|h\|)=O(\|t\|).$$

(4.7.6)–დან მივიღებთ

$$h=[df(x)]^{-1}t+o(\|t\|)$$

და მაშასადამე (4.71) და (4.7.7) გათვალისწინებით მივიღებთ

$$f^{-1}(y+t)-f^{-1}(y)=[df(x)]^{-1}t+o(\|t\|)$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შენიშვნა 4. 7. 1. ალგებრიდან ცნობილია, რომ წრფივი ასახვის $L:R^m\to R^m$ შექცევადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $m(L)$ მატრიცა იყოს შებრუნებადი. როცა $m=1$, მაშინ $df(x):R\to R$ ასახვის შესაბამისი იაკობიანი f ფუნქციის წარმოებულის $f'(x)$-ის ტოლია და , ამასთან იმისათვის, რომ $f'(x)h$

წრფივი ფუნქცია იყოს შებრუნებადი აუცილებელი და საკმარისია, რომ $f'(x) \neq 0$.

4.8. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

განმარტება 4. 8. 1. ვთქვათ, $x, y \in R^m$, მაშინ ამ წერტილების შემაერთებელი ღია და ჩაკეტილი მონაკვეთი განიმარტება შემდეგნაირად

$$]x, y[= \{ty + (1-t)x : 0 < t < 1\}$$

$$[x, y] = \{ty + (1-t)x : 0 \le t \le 1\}$$

თეორემა 4. 8. 1. ვთქვათ, $f : G \to R^1$, $G \subset R^m$ არეში განსაზღრული ფუნქციაა და $[x, x+h] \subset G$. თუ f დიფერენცირებადია $]x, x+h[$ და უწყვეტია $[x, x+h]$, მაშინ $\exists \xi \in]x, x+h[$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(t) = f(x+th)$$

ადვილი დასანახია, რომ $F : [0,1] \to R^1$, F ფუნქცია უწყვეტია $[0,1]$ და წარმოებადია $]0,1[$-ში, მაშინ $\exists \theta \in]0,1[$ ისეთი, რომ

$$F(1) - F(0) = F'(\theta), \tag{4.8.1}$$

მეორეს მხრივ

$$F(1) = f(x+h),\ F(0) = f(x)$$

და

$$F'(t) = f'(x+th; h) = df(x+th)h,$$

თუ ყოველივე ამას გავითვალისწინებთ (4.8.1)-ში და შემოვიტანთ აღვნიშნას $\xi := x+th$ მივიღებთ

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)h. \tag{4.8.2}$$

თეორემა დამტკიცებულია.
თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტებს, რომ

$$df(\xi)h = < f'(\xi), h > = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\xi)h_m$$

(4.8.2) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$f(x_1 + h_1, ..., x_m + h_m) - f(x_1, ..., x_m) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(\xi)h_m.$$

თეორემა 4. 8. 2. ვთქვათ $f : G \to R^1$ ფუნქცია დიფერენცირებადია G არეში და $df(x) = 0,\ \forall x \in G$, მაშინ $f(x) = const$.

დამტკიცება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$df(x) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, ..., \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) = 0.$$

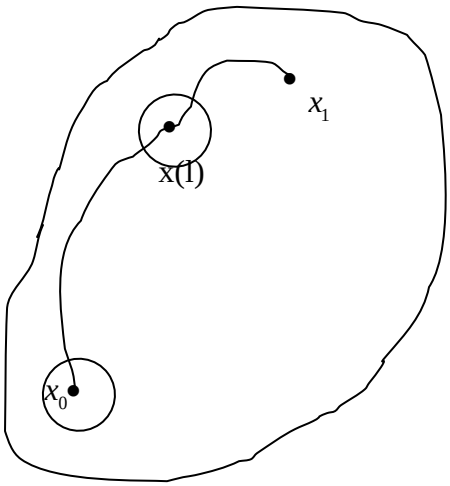
$x \in G$ და რადგანაც G ღია სიმრავლეა, ამიტომ $\exists B(x; r) \subset G$. თეორემა 4.8.1-ის ძალით ვღებულობთ

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi)(h) = 0,$$

როცა $x+h \in B(x; r)$ $([x, x+h] \subset B(x; r))$, ვინაიდან ბირთვი ბმული სიმრავლეა და $\xi \in]x, x+h[$, მაშასადამე $f(a) = const$, $\forall a \in B(x; r)$.

ვთქვათ, $x_0, x_1 \in G$. რადგანაც G ბმულია, ამიტომ $\exists x:[0,1] \to R^m$ უწყვეტია ასახვაა ისეთი, რომ $x(0) = x_0,\ x(1) = x_1, x([0,1]) \subset G$.

ვთქვათ, $B(x_0; r) \subset G$. ვინაიდან $x(t)$ უწყვეტია ამიტომ $\exists \delta > 0,\ x(t) \in B(x_0, r)$, როცა $0 \le t \le \delta$



უკვე დამტკიცებულის ძალით $f(x(t)) = f(x_0)$, როცა $0 \le t \le \delta$. აღვნიშნოთ l-ით იმ δ-ებს შორის sup, რომელთათვისაც $f(x(t)) = f(x_0),\ 0 \le t \le \delta$, მაშინ

$$f(x(t)) = f(x_0),\ 0 \le t < l.$$

ზედა ტოლობა შესრულდება მაშინაც, როცა $t = l$, მართლაც ვთქვათ $\{t_n : n \ge 1\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის l-კენ და $t_n < l$, მაშინ ვინაიდან $f(x(t_n)) = f(x)$ და გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ $f \circ x$ ფუნქცია, როგორც უწყვეტ ფუნქციათა კომპოზიცია უწყვეტია და გადავალთ ზღვარზე, როცა $n \to \infty$, მივიღებთ

$$f(x(l)) = f(x_0).$$

დავამტკიცოთ, რომ $l = 1$. დავუშვათ წინააღმდეგობა, ვთქვათ, $l < 1$, მაშინ $\exists B(x(l); r) \subset G$. უკვე დამტკიცებულის ძალით

$$f(x(t)) = f(x_0),\ \text{როცა}\ x(t) \in B(x(l); r).$$

$x(t)$-ს უწყვეტობის ძალით $\exists \Delta > 0$ ისეთი, რომ

$$x(t) \in B(x(l); r)\ \ l \le t \le l + \Delta$$

და მაშასადამე მივიღებთ, რომ $\sup \delta > l$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $l = 1$, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$f(x(l)) = f(x_1) = f(x_0)$$

და ე.ი. $f(x) = const,\ \forall x \in G$.

4. 9. ფუნქციის დიფერენცირებადობისათვის საკმარისი პირობა

როგორც ჩვენ ვნახეთ თუ ფუნქციას წერტილში გააჩნია კერძო წარმოებულები აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს ფუნქციის უწყვეტობა ამ წერტილში და მით უმეტეს დიფერენცირებადობა. ამ პარაგრაფში ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ფუნქციის კერძო წარმოებულებზე იმ საკმარისი პირობის პოვნას, რომელიც უზრუნველყოფს მოცემული ფუნქციის დიფერენცირებადობას. სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 9. 1. ვთქვათ $f:U(x_0)\to R, U(x_0)\subset R^m$ და $U(x_0)$-ზე f ფუნქციას გააჩნია კერძო წარმებულები $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),\ i=1,2,...,m$ და ეს წარმოებულები უწყვეტია x_0-ში. მაშინ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0-ში .

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$s_0=0, s_1=h_1e_1, s_2=h_1e_1+h_2e_2,...,s_m=h_1e_1+h_2e_2+\cdots+h_me_m=h.$$

მაშინ ადვილი დასანახია, რომ

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{m}\left\{f(x_0+s_k)-f(x_0+s_{k-1})\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left\{f(x_0+s_{k-1}+h_ke_k)-f(x_0+s_{k-1})\right\}.$$

ლაგრანჟის თეორემის ძალით არსებობს $\theta_k\in(0,1)$ ისეთი, რომ

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{m}D_kf(x_0+s_{k-1}+\theta_kh_ke_k)h_k.$$

რადგანაც $D_kf(x), k=1,2,...,m$ კერძო წარმოებულები უწყვეტია $x=x_0$ წერტილში, ამიტომ

$$D_kf(x_0+s_{k-1}+\theta h_ke_k)\to D_kf(x_0)\ \text{როცა}\ h\to 0,$$

$$D_kf(x_0+s_{k-1}+\theta_kh_ke_k)=D_kf(x_0)+\alpha_k(h),\ \ \alpha_k(h)\to 0, h\to 0.$$

მაშასადამე

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{m}\{D_kf(x_0)h_k+\alpha_k(h)h_k\}$$

$$\sum_{k=1}^{m}D_kf(x_0)h_k+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(h)h_k$$

$$=<gradf(x_0),h>+\|h\|E_{x_0}(h).$$

თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ დავამტკიცებთ, რომ

$$E_{x_0}(h)\to 0,\ \ h\to 0.$$

მართლაც, რადგანაც

$$\alpha_k(h)\to 0, h\to 0$$

და

$$\frac{|h_k|}{\|h\|}\le 1$$

მივიღებთ

$$\|h\|E_{x_0}(h)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(h)h_k$$

$$|E_{x_0}(h)|\le\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k(h)|\frac{|h_k|}{\|h\|}\le\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k(h)|\to 0,\ h\to 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია

შედეგი ვთქვათ $f:B(x_0)\to R^1, B(x_0)\subset R^m$ არსებობს კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \quad j=1,2,...,m, \quad \forall x\in B(x_0).$$

თუ ეს კერძო წარმოებულები უწყვეტია x_0 წერტილში მაშინ f ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მიმართული წარმოებული ნებისმიერი h ვექტორის გასწვრივ და სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$f'(x_0;h)=<gradf(x_0),h>.$$

4.10 მაღალი რიგის წარმოებულები

ვთქვათ $f:G\to R^1$ განსაზღვრული ფუნქციაა, ხოლო $G\subset R^m$ არეა და ამ ფუნქციას გააჩნია კერძო წამოებული რომელიღაც x_i ცვლადის მიმართ, ე.ი. არსებობს

$$D_i f(x)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

გაწარმოების შედეგად მიღებული ახალი ფუნქცია ისევ არის G არეზე განსაზღვრული ე.ი.

$$D_i f:G\to R^1.$$

ვთქვათ $D_i f$ ფუნქციას თავის მხრივ გააჩნია კერძო წარმოებული j-ური ცვლადის მიმართ. ფუნქციას

$$D_j(D_i f):G\to R^1$$

უწოდებენ f ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულს ჯერ i-ური, ხოლო შემდეგ j-ური ცვლადების მიმართ და ის ასე აღინიშნება

$$D_{ji}f(x) \quad \text{ან} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x).$$

თუ განსაზღვრულია კერძო წარმოებული

$$D_{i_k,...,i_1}f(x)\equiv\frac{\partial^k h}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}(x),$$

მაშინ $k+1$ რიგის კერძო წარმოებული განიმარტება შემდეგნაირად

$$\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x_{i_{k+1}}\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k h}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}\right)(x)\equiv D_{i_{k+1},i_k,...,i_1}(x).$$

თუ $f:R^2\to R^1$ ფუნქციას x წერტილში გააჩნია $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x)$ და $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, მაშინ ისინი საზოგადოდ ერთმანეთის ტოლი არ არიან. ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი

მაგალითი 4. 10. 1. ვთქვათ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{(y(x^2-y^2)+2x^2y)(x^2+y^2)-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{y[(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-2x^4+2x^2y^2]}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},\ (x,y)\neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$

მაშინ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=-1.$$

მეორეს მხრივ,

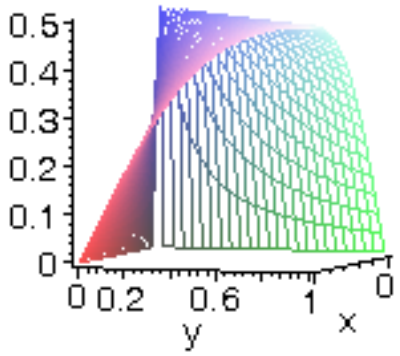
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x\left(x^4-4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=1$$

ე. ი.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$



მაშინ ისმის კითხვა თუ რა შემთხვევაში ექნება ადგილი ტოლობას. ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. 10. 1. ვთქვათ $f:G\to R$, სადაც $G\subset R^m$ არეა და $\forall x\in G$ არსებობს კერძო წარმოებულები

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \text{და} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

მაშინ იქ სადაც ეს წარმოებულები უწყვეტია ადგილი აქვს ტოლობას

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ G არის ბირთვი $B(x)$ და f არის ორი ცვლადის ფუნქცია $f(x_1,x_2)$. მაშინ უნდა დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2).$$

განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$F(h_1,h_2):=f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h_1,x_2)-f(x_1,x_2+h_2)+f(x_1,x_2),$$

აქ იგულისხმება, რომ $h=(h_1,h_2)$ აღებულია ისე, რომ $x+h\in B(x;r)$.

ადვილი დასანახია, რომ

$$F(h_1,h_2)=\varphi(1)-\varphi(0) \qquad (4.10.1)$$

სადაც

$$\varphi(t)=f(x_1+th_1,x_2+h_2)-f(x_1+th_1,x_2),$$

მაშინ ლაგრანჟის თეორემის ძალით გვაქვს

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta_1), \quad \theta_1\in(0,1).$$

მეორეს მხრივ, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\varphi'(t)=D_1 f(x_1+th_1,x_2+h_2)h_1-D_1 f(x_1+th_1,x_2)h_1$$

მაშინ (4.10.1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$F(h_1,h_2)=\big(D_1 f(x_1+\theta_1 h_1, x_2+h_2)-D_1 f(x_1+\theta_1 h_1, x_2)\big)h_1$$
$$=D_{21} f(x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_2 h_2)h_1 h_2 \qquad (4.10.2)$$

თუ განვიხილავთ ფუნქციას

$$\tilde{\varphi}(t)=f(x_1+h_1, x_2+th_2)-f(x_1, x_2+th_2)$$

და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ

$$F(h_1,h_2)=\tilde{\varphi}(1)-\tilde{\varphi}(0)$$

ანალოგიური მსჯელობის შედეგად მივიღებთ

$$F(h_1,h_2)=D_{12}\big(x_1+\tilde{\theta}_1 h_1, x_2+\tilde{\theta}_2 h_2\big)h_1 h_2 \qquad (4.10.3)$$

(4.10.2) და (4.10.3)-დან მივიღებთ

$$D_{21} f(x_1+\theta_1 h_1, x_2+\theta_2 h_2)=D_{12} f(x_1+\tilde{\theta}_1 h_1, x_2+\tilde{\theta}_2 h_2)$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $h_1, h_2 \to 0$ და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია მივიღებთ დასამტკიცებელს.

აღვნიშნოთ $C^{(k)}(G)$-ით G-ზე განსაზღვრული f ფუნქციების სიმრავლე, რომლებსაც G სიმრავლეზე გააჩნიათ k-რიგამდე კერძო წარმოებულები და უწყვეტები არიან.
სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4.10.3. ვთქვათ, $f \in C^{(k)}(G)$. მაშინ $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული გაწარმოების რიგზე $\forall x \in G$.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის გამოყენებით. როცა $k=2$ ეს დებულება დამტკიცებულია. დავუშვათ სამართლიანია n-თვის და დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა $n+1$-თვის. რადგანაც

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_{i_{n+1}}\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}(x)=\frac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}(x)\right),$$

ინდუქციის დაშვების ძალით $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}$ არ არის დამოკუდებული გაწარმოების რიგზე. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ შეიძლება $x_{i_{n+1}}$ და x_{i_n} ცვლადების გადანაცვლება. მართლაც

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_1}}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_{i_{n+1}}\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right).$$

ვინაიდან

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\in C^{(2)}(G),$$

ამიტომ თეორემა 4.10.1-ის გამოყენებით ვწერთ

$$\frac{\partial^2}{\partial x_{i_{n+1}}\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n+1}}}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_{n+1}}\partial x_{i_{n-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right).$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

4.11 ტეილორის ფორმულა

ვთქვათ $f\in C^{(1)}(U(x))$, მაშინ როგორც ვიცით ადგილი აქვს ტოლობას

$$f'(x,h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i$$

თუ $f\in C^{(2)}(U(x))$, მაშინ განვსაზღროთ

$$f''(x,h)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j,$$

ანალოგიურად , თუ $f\in C^{(k)}(G)$ მაშინ

$$f^{(k)}(x,h)=\sum_{i_i=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(x)h_{i_1}\cdots h_{i_k}.$$

თეორემა 4.11.1. ვთქვათ, $f\in C^{(s)}(G)$ და $[x,x+h]\subset G$, მაშინ $\exists\xi\in]x,x+h[$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{k=1}^{s-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x;h)+\frac{1}{s!}f^{(s)}(\xi,h).$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$g(t)=f(x+th),$$

მაშინ

$$f(x+h)-f(x)=g(1)-g(0). \qquad (4.11.1)$$

რადანაც $g\in C^{(s)}([0,1])$, ამიტომ ერთი ცვლადის შემთხვევაში ტეილორის ფორმულის ძალით გვაქვს

$$g(1)-g(0)=\sum_{k=1}^{s-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}+\frac{1}{s!}g^{(s)}(\theta),\quad \text{სადაც}\quad \theta\in(0,1)$$

როგორც ვიცით

$$g'(t)=f'(x+th;h)=\sum_{j=1}^{s}D_jf(x+th)h_j,$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$g''(t)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{S}D_{ij}f(x+th)h_ih_j=f''(x+th;h),$$

ანალოგიურად

$$g^{(k)}(t)=\sum_{i_1=1}^{m}\cdots\sum_{i_k=1}^{m}D_{i_k,\ldots,i_1}f\left(x+th\right)h_{i_1}\cdots h_{i_k}=f^{(k)}(x+th;h) \qquad (4.11.2)$$

(4.11.1), (4.11.2)-დან გამომდინარეობს თეორემის დამტკიცება.

4.12 მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმები

განმატრება 4. 12. 1. ვთქვათ $f:E\to R^1$, $E\subset R^m$ განსაზღვრული ფუნქციაა და a E-ს შიგა წერტილია. ვიტყვით, რომ f ფუნქციას a წერტილში გააჩნია ლოკალური მაქსიმუმი (ლოკალური მინიმუმი) თუ $\exists U(a)\in E$ ისეთი, რომ $f(x)\le f(a)$ $(f(x)\ge f(a))$ $\forall x\in U(a)$.

თუ $f(x)<f(a)$ $(f(x)>f(a))\forall x\in U(a)$, მაშინ a-ს უწოდებენ ლოკალურ მკაცრ მაქსიმუმს (მინიმუმს).

განმატრება 4. 12. 2. ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმებს და ლოკალურ მინიმუმებს ლოკალური ექსტრემუმები ეწოდება.

თეორემა 4. 12. 1. ვთქვათ, $f:U(a)\to R, U(a)\subset R^m$ a წერტილში გააჩნია ყველა კერძო წარმოებული $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ $j=1,2,...,m$.

იმისათვის, რომ a იყოს ლოკალური ექსტრემუმის წერტილი აუცილებელია

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)=0.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x_1)=f(x_1,a_2,...,a_m)$$

მაშინ $\varphi(x_1)$ ფუნქციის $x_1=a_1$ წერტილი არის ექსტრემუმის წერტილი და უკვე ცნობილი ფაქტის ძალით $\varphi'(a_1)=0$ ან რაც იგივეა

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=0.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)=\cdots=\dfrac{\partial f}{\partial x_m}(a)=0$

შენიშვნა 4. 12. 1. a-ს უწოდებენ f ფუნქციის კრიტიკულ წერტილს თუ

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)=0.$$

შენიშვნა 4. 12. 2. წარმოებულის ნულთან ტოლობა არის მხოლოდ აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა.

თეორემა 4. 12. 2. ვთქვათ $f\in C^{(2)}(U(a))$, a კრიტკული წერტილია და

$$Q(t)\equiv\frac{1}{2}f''(a;t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)t_it_j,$$

მაშინ

1) თუ $Q(t)>0, \forall t\in R^m, t\ne 0$ მაშინ a ლოკალური მინიმუმის წერტილია;
2) თუ $Q(t)<0, \forall t\in R^m, t\ne 0$, მაშინ a ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია;
3) თუ $Q(t)$ ღებულობს როგორც დადებით ასევე უარყოფით ნიშვნელობებს, მაშინ a ექსტრემუმის წერტილი არ არის.

დამტკიცება. რადგანაც $f \in C^{(2)}\left(U(a)\right)$ ტეილორის ფორმულის ძალით

$$f(a+t)-f(a)=\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)t_i+\frac{1}{2} f''(\xi;t), \quad \xi \in (a,a+t).$$

ვინაიდან

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0, \quad i=1,2,...,m$$

მივიღებთ

$$f(a+t)-f(a)=\frac{1}{2} f''(\xi;t)=\frac{1}{2} f''(a;t)+\|t\|^2 E(t),$$

სადაც

$$\|t\|^2 E(t)=\frac{1}{2} f''(\xi;t)-\frac{1}{2} f''(a;t).$$

რადგანაც

$$\frac{1}{2} f''(a;t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)t_i t_j,$$

მივიღებთ

$$|E(t)| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi)\right| \frac{|t_i|}{\|t\|}\frac{|t_j|}{\|t\|}=o(1), \ (\|t\|\to 0) \qquad (4.12.1)$$

აღვნიშნოთ

$$S:=\{t:\|t\|=1\}.$$

ვთქვათ $Q(t)>0, \ t\in R^m, \ t\neq 0$. ვინაიდან S კომპაქტია, ხოლო $Q(t)$ უწყვეტია, ამიტომ ის აღწევს უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს S. ვთქვთ $m-$ით აღვნიშნოთ უმცირესი მნიშვნელობა, მაშინ $m>0$. რადგანაც

$$Q(ct)=c^2 Q(t), \ \forall c\in R$$

და

$$\forall t\in R^m, c=\frac{1}{\|t\|}, t\neq 0, ct\in S$$

მივიღებთ

$$c^2 Q(t)=Q(ct)\ge m>0.$$

მაშასადამე

$$Q(t)\ge m\|t\|^2>0.$$

საიდანაც ვიღებთ

$$f(a+t)-f(a)=Q(t)+\|t\|^2 E(t)\ge m\|t\|^2+\|t\|^2 E(t) \qquad (4.12.2)$$

(4.12.1)-ის ძალით $\exists \delta>0$ ისეთი, რომ

$$|E(t)|<\frac{1}{2}m \qquad 0<\|t\|<\delta$$

თუ ამ ფაქტს გავითვალისწინებთ (4.12.2)-ში მივიღებთ

$$f(a+t)-f(a)\ge m\|t\|^2-\|t\|^2\,|E(t)|\ge m\|t\|^2-\frac{m}{2}\|t\|^2=\frac{m}{2}\|t\|^2>0, \ \forall t:\|t\|<\delta.$$

მაშასადამე a არის f ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი. ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ თუ $Q(t)<0$ მაშინ a არის f ფუნქციის ლოკალური მაქიმუმის წერტილი.

ბოლოს დავამტკიცოთ, თუ $Q(t)$ არ არის განსაზღრული, მაშინ a არ არის ექსტრემუმის წერტილი. $\forall \lambda > 0$ რიცხვისათვის გვაქვს

$$f(a+\lambda t)-f(a)=Q(\lambda t)+\lambda^2\|t\|^2 E(\lambda t)$$
$$=\lambda^2 Q(t)+\lambda^2\|t\|^2 E(\lambda t)=\lambda^2\left(Q(t)+\|t\|^2 E(\lambda t)\right).$$

დაშვების ძალით $\exists t', t''$ ისეთი, რომ $Q(t')>0, Q(t'')<0$. ვინაიდან $E(y)\to 0,\ y\to 0$ ამიტომ $\exists \delta', \delta''$ ისეთი, რომ

$$\|t'\|^2\left|E(\lambda t')\right|<\frac{1}{2}Q(t') \qquad 0<\lambda<\delta'$$

$$\|t''\|^2\left|E(\lambda t'')\right|<-\frac{1}{2}Q(t'') \qquad 0<\lambda<\delta''$$

მაშასადამე გვაქვს

$$f(a+\lambda t')-f(a)=\lambda^2\left\{Q(t')+\|t'\|^2 E(\lambda t')\right\}\geq\frac{\lambda^2}{2}Q(t')>0$$

$$f(a+\lambda t'')-f(a)=\lambda^2\left\{Q(t'')+\|t''\|^2 E(\lambda t'')\right\}\leq\frac{\lambda^2}{2}Q(t'')<0$$

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $f(a+t)-f(a)$ სხვაობა a წერტილის ნებისმიერ მიდამოში იღებს როგორც დადებით, ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქციას a წერტილში არ გააჩნია ექსტრემუმის წერტილი.

შენიშვნა 4. 12. 2. ექსტრემუმის ამოცანის შესწავლა დაიყვანება შემდეგი კვადრატული ფორმის

$$A(t):=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}t_i t_j, \qquad a_{ij}=a_{ji}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

ნიშნის დადგენაზე. ამისათვის ალგებრიდან ჩვენთვის ცნობილია სილვესტრის შემდეგი თეორემა

თეორემა A. ვთქვათ მოცემულია ფორმა

$$A(t):=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}t_i t_j, \qquad a_{ij}=a_{ji}$$

და აღვნიშნოთ

$$\Delta_1:=a_{11},\ \Delta_2:=\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\ldots,\Delta_m:=\det\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1m}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mm}\end{pmatrix}.$$

მაშინ

1) როცა $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_m > 0$ კვადრატული ფორმა დადებითადაა განსაზღრული;
2) როცა $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^m \Delta_m > 0$ კვადრატული ფორმა უარყოფიდადაა განსაზღრული;

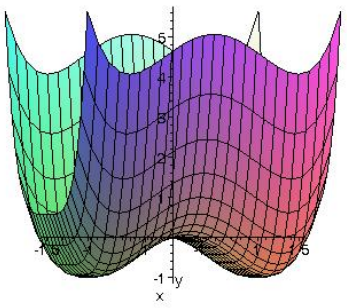
3) როცა $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \ldots, \Delta_m \geq 0$ ან $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \ldots, (-1)^m \Delta_m \geq 0$ და არსებობს $j, j = 1, \ldots, m$ ისეთი, რომ $\Delta_j = 0$, მაშინ ფორმა მკაცრად არ არის განსაზღრული , რაც იმას ნიშნავს, რომ $A(t) \geq 0$ ან $A(t) \leq 0$ შესაბამისად და $\exists t \in R^m, t \neq 0, A(t) = 0;$

4) ყველა სხვა შემთხვევაში ფორმა განსაზღრული არ არის, ანუ $\exists t', t'' \in R^m$ ისეთი, რომ $A(t') > 0, A(t'') < 0.$

შენიშვნა 4. 12. 3. იმ შემთხვევაში, როცა ფორმა ნახევრად განსაზღრულია a წერილში, მაშინ a წერტილი შეიძლება იყოს ექსტრემუმის წერტილი შეიძლება არა. ამის საილუსტრაციოთ მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი. $f : R^2 \to R$ ფუნქცია განსაზღრულია ტოლობით $f(x, y) := x^4 + y^4 - 2x^2.$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

რომლის ამონახსნი არის $(-1,0), (0,0), (1,0)$. რადგანაც



$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2 - 4, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 12y^2$$

ამიტომ კვადრატული ფორმა იღებს სემდეგ სახეს

$$A(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)t_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,0)t_1t_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0)t_2^2=8t_1^2$$

ანალოგიურად

$$A(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)t_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)t_1t_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)t_2^2=-4t_1^2$$

და

$$A(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)t_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)t_1t_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)t_2^2=8t_1^2$$

ე. ი. სამივე შემთხვევაში ფორმა ნახევრად განსაზღრულია. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $f(x,y)=\left(x^2-1\right)^2+y^4-1$, ამიტომ ცხადია, რომ $(-1,0),(1,0)$ წერტილები წარმოადგენს მკაცრი ლოკალური მინიმუმის წერტილებს. ხოლო რაც შეეხება $(0,0)$ წერტილში ფუნქციას გააჩნია ექსტრემუმის წერტილი, მართლაც

$$f(0,y)=y^4>0,\ f(x,0)=x^4-2x^2<0$$

ნულის მიდამოში.

ეხლა განვიხილოთ კერძო შემთხვევა. ვთქვათ განზომილება 2-ის ტოლია. აღვნიშნოთ

$$A:=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a),\ B:=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a),\ C:=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)$$

მაშინ კვადრატული ფორმა მიიღებს სახეს

$$Q(t):=At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2.$$

სილივესტრის თეორემის ძალით, $Q(t)$ დადებითადაა განსაზღრული, თუ

$$A>0,\ \Delta=\det\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}=AC-B^2>0.$$

მაშინ a f ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილია. თუ $A<0,\ \Delta>0,$ მაშინ a f ფუნქციის ლოკალური მაქიმუმის წერტილია. თუ $AC-B^2<0$, მაშინ a f ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი არ არის. თუ $AC-B^2=0$ მაშინ ადგილი აქვს საეჭვო შემთხვევას, მაშასადამე სამართლიანია შემდეგ

თეორემა 4. 12. 3.

1) თუ $\Delta>0$, მაშინ a f ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია , ამასთან
ა) ლოკალური მანიმუმის წერტილია, როცა $A<0$;
ბ) ლოკალური მინიმუმის წერტილია, როცა $A>0$;

2) როცა $\Delta<0$, მაშინ a f ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი არ არის;
3) თუ $\Delta=0$ მაშინ ადგილი აქვს საეჭვო შემთხვევას, ე. ი. შეიძლება იყოს ექსტრემუმის წერტილი, შეიძლება არა.

4. 13. თეორემა არაცხადი ფუნქციის შესახებ

ვთქვათ მოცემულია წრეწირის განტოლება

$$x^2+y^2-1=0 \qquad (4.13.1)$$

თუ დავაფიქსირებთ x-ს, მაშინ მოიძებნება y-ის ორი მნიშვნელობა, რომლებიც დააკმაყოფილებს (4. 13. 1) ტოლობას, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ (x_0,y_0) წერტილი აკმაყოფილებს (4. 13. 1) ტოლობას, ვიპოვოთ ამ წერტილის $U(x_0,y_0)$ მიდამო, ისეთი, რომ ნებისმიერი დაფიქსირებული $x\in U(x_0,y_0)$ არსებობდეს ერთადერთი y, რომელიც დააკმაყოფილებს (4. 13. 1) ტოლობას. ადვილი დასანახია, რომ ეს ყოველთვის შეიძლება გარდა შემთხვევებისა $(1,0),(-1,0)$. მაშასადამე, თუ (x_0,y_0) არ უდრის $(1,0),(-1,0)$, მაშინ ყოველთვის არსებობს $U(x_0,y_0)$ მიდამო და ერთადერთი ფუნქცია $y=y(x)$, ისეთი რომ (4. 13. 1) ექვივალენტურია $y=y(x)$-ის.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 13. 1. ვთქვათ $F:U(x_0,y_0)\to R$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

1) $F\in C^{(p)}\left(U(x_0,y_0)\right)$; $p\geq 1$;
2) $F(x_0,y_0)=0$;
3) $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$,

მაშინ არსებობს ორგანზომილებიანი $I:=I_x\times I_y$ (სადაც $I_x:=\{x\in R:|x-x_0|<\alpha\}, I_y:=\{y\in R:|y-y_0|<\beta\}$) ინტერვალი და ფუნქცია $f\in C^{(p)}(I_x,I_y)$ ისეთი, რომ $\forall(x,y)\in I_x\times I_y$

$$F(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; y=f(x),$$

ამასთან $\forall x\in I_x$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f'(x)=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}.$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $F_y'(x_0,y_0)>0$. რადგანაც $F\in C^{(1)}(U;R)$, ამიტომ $F_y'(x,y)>0$ სრულდება (x_0,y_0) წერტილის რაღაც მიდამოში. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ეს მიდამო არის $U(x_0,y_0)$, უფრო მეტიც, შეიძლება ვიგულისხმოთ, რომ ეს მიდამო არის ბირთვი ცენტრით (x_0,y_0)-ში და რადიუსით $r=2\beta$. რადგანაც $F_y'(x,y)>0,\forall(x,y)\in U$, $F(x_0,y)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია, როცა $y_0-\beta\le y\le y_0+\beta$ და მაშასადამე

$$F(x_0,y_0-\beta)<F(x_0,y_0)<F(x_0,y_0+\beta).$$

F ფუნქციის უწყვეტობის ძალით $\exists\alpha<\beta$, ისეთი რომ

$$F(x,y_0-\beta)<0<F(x,y_0+\beta),\ \ \forall x:|x-x_0|\le\alpha.$$

განვიხილოთ მართკუთხედი $I:=I_x\times I_y$, სადაც

$$I_x:=\{x\in R:|x-x_0|<\alpha\},\ I_y:=\{y\in R:|y-y_0|<\beta\}.$$

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\forall x\in I_x, F(x,y)$ ზრდადია როცა $y\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$ და

$$F(x,y_0-\beta)<0<F(x,y_0+\beta).$$

მაშინ მოიძებნება ერთადერთი $y\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$ ისეთი, რომ $F(x,y)=0$.

პირველ რიგში დავამტკიცოთ , რომ $f\in C(I_x;I_y)$. ნებისმიერი დაფიქსირებული $0<\varepsilon<\beta$ თუ გავიმეორებთ ზემოთ მოყვანილ მსჯელობას, მაშინ არსებობს $\delta,0<\delta<\alpha$ და $\tilde I:=\tilde I_x\times\tilde I_y$, სადაც $\tilde I_x:=\{x:|x-x_0|<\delta\},\tilde I_y:=\{y:|y-y_0|<\varepsilon\}$ და $\tilde f:\tilde I_x\to\tilde I_y$ ისეთი, რომ

$$\left(F(x,y)=0,(x,y)\in\tilde I\right)\Leftrightarrow\left(y=\tilde f(x),x\in\tilde I_x\right)$$

რადგანაც $\tilde I_x\subset I_x,\tilde I_y\subset I_y$, ამიტომ დავასკვნით, რომ $\tilde f(x)=f(x)$ და მაშასადამე

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-y_0|<\varepsilon,\quad |x-x_0|<\delta.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. თუ $\forall x\in I_x$ ჩავთლით საწყის წერტილად და გავიმეორებთ იგივე მსჯელობას, რაც ვქონდა x_0 წერტილის შემთხვევაში, მივიღებთ რომ f ფუნქცია უწყვეტია $\forall x\in I_x$ წერტილში.

ეხლა დავამტკიცოთ, რომ $f\in C^{(1)}(I_x,I_y)$. Δx ავიღოთ ისეთი, რომ $x+\Delta x\in I_x$. ვთქვათ, $y=f(x)$, $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$. მაშინ საშუალო მნიშვნელობის თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x,f(x+\Delta x))-F(x,f(x))\\&=F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)\\&=F_x'(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta x+F_y'(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)\Delta y,\end{aligned}$$

საიდანაც ვიღებთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x'\left(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y\right)}{F_y'\left(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y\right)} \qquad (4.13.2)$$

რადგანაც $f\in C\left(I_x;I_y\right)$, ამიტომ $\Delta y\to 0$ როცა $\Delta x\to 0$. თუ გამოვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ $F\in C^{(1)}\left(U;R\right)$ და (4. 13. 2)-ში ორივე მხარეზე გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x\to 0$, მივიღებთ

$$f'(x)=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

ვთქვათ $F\in C^{(2)}\left(U;R\right)$, მაშინ მივიღებთ

$$f''(x)=-\frac{\left(F_{xx}''+F_{xy}''\right)F_y'-\left(F_{yy}''+F_{xy}''\right)F_x'}{\left(F_y'\right)^2}$$

ე. ი. $f\in C^{(2)}\left(I_x,I_y\right)$. ანალოგიურად დამტკიცდება $p>2$ შემთხვევაშიც.

თეორემა 4. 13. 1-ს მსგავსად დამტკიცდება, რომ სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 13. 2. ვთქვათ $F:U\left(x_0,y_0\right)\to R$, $\left(x_0,y_0\right)=\left(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)},y_0\right)\in R^{m+1}$ წერტილის მიდამოში განსაზღრული ფუნქციაა, ისეთი რომ

1) $F\in C^{(p)}\left(U\left(x_0,y_0\right)\right);\ \ p\geq 1;$
2) $F\left(x_0,y_0\right)=0;$
3) $F_y'\left(x_0,y_0\right)\neq 0,$

მაშინ არსებობს $m+1$ განზომილებიანი $I:=I_x^m\times I_y$ (სადაც $I_x^m:=\left\{x\in R^m:|\,x_i-x_i^{(0)}\,|<\alpha_i,i=1,...,m\right\},I_y:=\left\{y\in R:|\,y-y_0\,|<\beta\right\}$) ღია მაღთკუთხედი და ფუნქცია $f\in C^{(p)}\left(I_{x\,x},I_y\right)$ ისეთი, რომ $\forall\left(x,y\right)\in I_x^m\times I_y$

$$F\left(x_1,...,x_n,y\right)=0\ \Leftrightarrow\ y=f\left(x_1,...,x_n\right),$$

ამასთან მისი კერძო წარმოებულები გამოითვლებიან ფორმულით

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(x,f\left(x\right)\right)}{F_y'\left(x,f\left(x\right)\right)}.$$

განვიხილოთ შემდეგ ფუნქციათა სისტემა

$$\begin{cases}F_1\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n\right)=0\\ \dots\\ F_n\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n\right)=0\end{cases} \qquad (4.13.3)$$

ჩვენი მიზანს წარმოადგენს (4. 13. 3) ტოლობათა სისტემიდან $y_1,...,y_n$-ების გამოსახვა $x_1,...,x_m$-ების მეშვეობით, სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ ვეძებთ შემდეგ ფუნქციონალურ დამოკიდებულებას

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,...,x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1,...,x_m) \end{cases} \qquad (4.13.4)$$

სიმარტივისათვის (4. 13. 3) ტოლობათა სისტემა აღვნიშნოთ $F(x,y)=0$, ხოლო (4. 13. 4) კი $y=f(x)$. ვთქვათ

$x_0=\left(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)}\right), y_0=\left(y_1^{(0)},...,y_m^{(0)}\right), \alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m), \beta=(\beta_1,...,\beta_n)$

მაშინ $|x-x_0|<\alpha, |y-y_0|<\beta$ ჩანაწერების ქვეშ ჩვენ გავიგებთ შემდეგს

$$|x_i-x_i^{(0)}|<\alpha_i, i=1,...,m,\ |y_i-y_i^{(0)}|<\beta_i, i=1,...,n.$$

გავიხსენოთ, რომ

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x) \qquad (4.13.5)$$

$$F_x'(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x,y) \qquad (4.13.6)$$

$$F_y'(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(x,y) \qquad (4.13.7)$$

$F_y'(x,y)$ მატრიცეს შებრუნებული მატრიცა აღვნიშნოთ $[F_y'(x,y)]^{-1}$-ით.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 4. 13. 3. ვთქვათ $F:U(x_0,y_0)\to R^n, (x_0,y_0)\in R^{m+n}$ წერტილის $U(x_0,y_0)$ მიდამოში განსაზღრული ფუნქციაა და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

1) $F\in C^{(p)}\left(U(x_0,y_0);R^n\right);\ p\geq 1;$
2) $F(x_0,y_0)=0;$
3) $F_y'(x_0,y_0)$, შებრუნებადი მატრიცაა

მაშინ არსებობს $n+m$-განზომილებიანი $I := I_x^m \times I_y^n$ (სადაც $I_x^m := \{x \in R^m : |x - x_0| < \alpha\}, I_y^n := \{y \in R^n : |y - y_0| < \beta\}$) ღია მართკუთხედი და ფუნქცია $f \in C^{(p)}(I_x^m, I_y^n)$ ისეთი, რომ $\forall (x,y) \in I_x^m \times I_y^n$ სამართლიანია

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x),$$

ამასთან $\forall x \in I_x$ ადგილი აქვს ტოლობას

$$f'(x) = -[F_y'(x, f(x))]^{-1}[F_x'(x, f(x))].$$

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციით. როცა $n=1$, თეორემის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 4. 13. 2-დან. ვთქვათ სამართლიანია $n-1$-თვის და დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა n-თვის.

რადგანაც $\det F_y'(x,y) \neq 0$, ამიტომ $F_y'(x,y)$ ბოლო სტრიქონში ერთი ელემენტი მაინც არის განსხვავებული ნულისაგან, ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ე სარის $\frac{\partial F_n}{\partial y_n}$. მაშინ თეორემა 4. 13. 2-ის ძალით არსებობს

$$\tilde{I}^{n+m} = \left(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}\right) \times I_y^1 \subset U(x_0, y_0)$$

ღია მართკუთხედი და ფუნქცია $\tilde{f} \in C^{(p)}\left(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}; I_y^1\right)$ ისეთი, რომ

$$\left(F_n(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n) = 0, \tilde{I}^{n+m}\right) \Leftrightarrow \left(y_n = \tilde{f}(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1}), (x_1,...,x_m) \in \tilde{I}_x^m, (y_1,...,y_n) \in \tilde{I}_y^{n-1}\right)$$

$$y_n^{(0)} = \tilde{f}\left(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)};y_1^{(0)},...,y_{n-1}^{(0)}\right) \tag{4.13.8}$$

თუ y_n-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (4. 13. 3) –ის პირველ $n-1$ ტოლობაში მივიღებთ

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1}) = F_1\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1},\tilde{f}(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1})\right) = 0 \\ \dots \\ \Phi_{n-1}(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1}) = F_{n-1}\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1},\tilde{f}(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1})\right) = 0 \end{cases} \tag{4.13.9}$$

ცხადია, რომ $\Phi_i \in C^{(p)}\left(\tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}; R\right), i = 1,...,n-1,$ ამასთან

$$\Phi_1\left(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)};y_1^{(0)},...,y_{n-1}^{(0)}\right) = 0.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების ძალით

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} = \frac{\partial F_k}{\partial y_i} + \frac{\partial F_k}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i}, \ (i,k = 1,...,n-1) \tag{4.13.10}$$

ცხადია, რომ

$$\Phi_n(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1}) = F_n\left(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1},\tilde{f}(x_1,...,x_m;y_1,...,y_{n-1})\right) \equiv 0$$

ამიტომ

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial y_i} = \frac{\partial F_n}{\partial y_i} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i}, \qquad (4.13.11)$$

(4. 13. 10) და (4. 13. 11)-დან მივიღებთ

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_{n-1}}, \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \\ 0 & & 0, \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (4.13.12)$$

ინდუქციის დაშვების ძალით, არსებობს

$$I^{m+n-1} = I_x^m \times I_y^{n-1} \subset \tilde{I}_x^m \times \tilde{I}_y^{n-1}$$

ღია მართკუთხედი, რომელიც შეიცავს $\left(x_1^{(0)},...,x_m^{(0)},y_1^{(0)},...,x_{n-1}^{(0)}\right) \in R^{n+m-1}$ წერტილს და ასახვა $f \in C^{(p)}\left(I_x^m, I_y^{n-1}\right)$ ისეთი, რომ $\forall x \in I_x^m$ ადგილი ა

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,...,x_m) \\ \dots \\ y_{n-1} = f_{n-1}(x_1,...,x_m) \end{cases} \qquad (4.13.13)$$

რადგანაც $I_y^{n-1} \subset \tilde{I}_y^{n-1}, I_x^m \subset \tilde{I}_x^m$, ამიტომ თუ ჩავსვამთ $y_1,...,y_{n-1}$-ის მნიშვნელობებს $y_n = \tilde{f}(x_1,...,x_m,y_1,...,y_{n-1})$-ში (4. 13. 13)-დან მივიღებთ $y_n = f(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n)$ ფუნქციას.

ადვილი დასანახია, რომ შემდეგ ფუნქციათა

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,...,x_m) \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1,...,x_m) \end{cases} \qquad (4.13.14)$$

აკმაყოფილებს (4. 13. 4) განტოლებათა სისტემას.
ბოლოს დავამტკიცოთ, რომ

$$f'(x) = -[F_y'(x, f(x))]^{-1}[F_x'(x, f(x))],$$

რაც იგივეა, რომ

$$F_y'(x, f(x))\, f'(x) + F_x'(x, f(x)) = 0,$$

მართლაც

$$F_y'(x, f(x))\, f'(x) + F_x'(x, f(x))$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x,y) \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x) + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_n}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_n}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x,y) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

4. 14. პირობითი ექსტრემუმები

ვთქვათ მოცემულია $m+n$ ცვლადის $f(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n)$ ფუნქციაა და ეს ცვლადები ერთმანეთან დაკავშირებულია დამოკიდებულებებით $F(x,y) = 0$, ან რაც იგივეა

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n)=0 \\ \dots \\ F_n(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n)=0 \end{cases} \qquad (4.14.1)$$

აღვნიშნოთ,

$$A:=\{(x,y)\in R^{n+m} : F(x,y)=0\}.$$

განმარტება 4. 14. 1. ვიტყვით რომ $(x_0,y_0)\in A$ წერტილში f ფუნქციას გააჩნია პირობითი მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ არსებობს $B(x_0,y_0)$ ბირთვი, ისეთი რომ

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\ \ (f(x,y)\ge f(x_0,y_0)), \forall (x,y)\in A\cap B(x_0,y_0).$$

ვთქვათ $f\in C^{(1)}(U(x_0,y_0);R), F\in C^{(1)}(U(x_0,y_0);R^n)$ და

$$\det F_y'(x_0,y_0)=\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}(x,y)\neq 0.$$

მაშინ თეორემა 4. 13. 3-ის ძალით

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n)=0 \\ \dots \\ F_n(x_1,...,x_m;y_1,...,y_n)=0 \end{cases}$$

ექვივალენტურია

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,...,x_m) \\ \dots \\ y_n=f_n(x_1,...,x_m) \end{cases}$$

(x_0,y_0) წერტილის მიდამოში, საიდანაც დავასკვნით, რომ

(x_0,y_0) წერტილი არის

$$f(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)$$

ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა x_0 წერტილი არის

$$\Omega(x):=\Omega(x_1,...,x_n):=f(x_1,...,x_m,f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m))$$

ფუნქციის უპირობო ექსტრემუმის წერტილი.

თეორემა 4. 14. 1. ვთქვათ $f \in C^{(1)}\left(U\left(x_0,y_0\right);R\right), F \in C^{(1)}\left(U\left(x_0,y_0\right);R^n\right)$ და

$$\det F_y^{'}\left(x_0,y_0\right)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}\left(x,y\right)\neq 0\,.$$

თუ $\left(x_0,y_0\right)$ არის f ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ არსებობს $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ნამდვილი რიცხვები, ისეთი რომ

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_0,y_0\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial x_1}\left(x_0,y_0\right)=0\\ \ldots\\ \frac{\partial f}{\partial x_m}\left(x_0,y_0\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial x_m}\left(x_0,y_0\right)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y_1}\left(x_0,y_0\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\left(x_0,y_0\right)=0\\ \ldots\\ \frac{\partial f}{\partial y_n}\left(x_0,y_0\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\frac{\partial F_k}{\partial y_n}\left(x_0,y_0\right)=0\end{cases}\qquad (4.14.2)$$

დამტკიცება. თუ აღვნიშნავთ

$$L\left(x,y\right):=f\left(x,y\right)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k\left(x,y\right),$$

მაშინ (4. 14. 2) ტოლობათა სისტემა ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x_i}\left(x_0,y_0\right)=0, i=1,\ldots,m\\ \frac{\partial L}{\partial y_j}\left(x_0,y_0\right)=0,\ j=1,\ldots,n\end{cases}$$

ან კიდევ (4. 14. 2) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$gradf\left(x_0,y_0\right)+\lambda_1 gradF_1\left(x_0,y_0\right)+\cdots+\lambda_n gradF_n\left(x_0,y_0\right)=0\,.$$

განვიხილოთ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_1}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f}{\partial y_1}(x_0, y_0) \\ \dots \\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_n}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f}{\partial y_n}(x_0, y_0) \end{cases} \tag{4.14.3}$$

რადგანაც $\det\left(F_y'(x_0, y_0)\right) \neq 0$, ამიტომ (4.14.3) განტოლებათა სისტემა ამოხსნადია $\lambda_1, ..., \lambda_n$-ის მიმართ და ის ერთადერთია. მაშასადამე (4. 14. 2) განტოლებათა სისტემის უკანასკნელი n ტოლობათა სისტემა ამოხსნადია. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ ეს $\lambda_1, ..., \lambda_n$-ები არიამ (4. 14. 2)-ის პირველი m ტოლობის ამონახსნებიც. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

1) $F \in C^{(1)}\left(U(x_0, y_0); R^n\right)$;
2) $F(x_0, y_0) = 0$;
3) $\det(F_y'(x_0, y_0)) \neq 0$,

ამიტომ შეიძლება გამოვიყენოთ (4. 14. 2) სისტემასათვის თეორემა არაცხადი ფუნქციის შესახებ. ამ თეორემის ძალით არსებობს $I := I_{x_0}^m \times I_{y_0}^n \subset U(x_0, y_0) \subset R^{n+m}$ ღია მართკუთხედი და $g \in C^{(1)}\left(I_{x_0}^m; I_{y_0}^n\right)$ ფუნქცია, ისეთი რომ

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, ..., x_n) := F_1\left(x_1, ..., x_m, g_1(x_1, ..., x_m), ..., g_n(x_1, ..., x_m)\right) \\ \dots \\ \Phi_n(x_1, ..., x_n) := F_n\left(x_1, ..., x_m, g_1(x_1, ..., x_m), ..., g_n(x_1, ..., x_m)\right) \end{cases} \tag{4.14.4}$$

როცა $(x_1, ..., x_m) \in I_{x_0}^m$.

ვინაიდან (4. 14. 4) ტოლოლობათა სისტემა იგივურად ნულის ტოლია $I_{x_0}^m$-ში, ამიტომ მათი წარმოებულები ნულის ტოილ იქნება. ე. ი.

$$0 = \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_r}(x_0, y_0) = \frac{\partial F_p}{\partial x_r}(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_p}{\partial y_k}(x_0, y_0) \frac{\partial g_k}{\partial x_r}(x_0), \quad p = 1, 2, ..., n \tag{4.14.5}$$

აღვნიშნოთ

$$\Omega(x) := \Omega(x_1, ..., x_n) := f\left(x_1, ..., x_m, g_1(x_1, ..., x_m), ..., g_n(x_1, ..., x_m)\right).$$

ზემოთ დამტკიცებულის ძალით x_0 არის $\Omega(x)$ ფუნქციის უპირობო ექსტრემუმის წერტილი და მაშასადამე, ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის ძალით

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial \Omega}{\partial x_m}(x_0) = 0.$$

თუ გამოვიყენებთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს, მივიღებთ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_r}(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\ \frac{\partial f}{\partial y_k}(x_0,y_0)\frac{\partial g_k}{\partial x_r}(x_0)=0,\quad r=1,\dots,n \qquad (4.14.6)$$

თუ (3. 14. 5) –ს გავამრავლებთ λ_p-ზე, ავჯამავთ p-ს მიმართ და დაუმატებთ (4. 14. 6) ტოლობას მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\sum_{p=1}^{n}\ \lambda_p\frac{\partial \Phi_p}{\partial x_r}(x_0,y_0)+\frac{\partial \Omega}{\partial x_r}(x_0)\\&\sum_{k=1}^{n}\ \left\{\sum_{p=1}^{n}\ \lambda_p\frac{\partial F_p}{\partial y_k}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial y_k}(x_0,y_0)\right\}\frac{\partial g_k}{\partial x_r}(x_0)\\&+\frac{\partial f}{\partial x_r}(x_0,y_0)+\sum_{p=1}^{n}\ \lambda_p\frac{\partial F_p}{\partial x_r}(x_0,y_0)=0,\end{aligned} \qquad (4.14.7)$$

ვინაიდან

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}(x_0,y_0)+\sum_{p=1}^{n}\ \lambda_p\frac{\partial F_p}{\partial y_k}(x_0,y_0)=0,\quad k=1,2,\dots,n$$

(4.14.7)-დან მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial f}{\partial x_r}(x_0,y_0)+\sum_{p=1}^{n}\ \lambda_p\frac{\partial F_p}{\partial x_r}(x_0,y_0)=0, r=1,\dots,m\,. \qquad (4.14.8)$$

(4. 14. 3) და (4. 14. 8) გათვალისწინებით მივიღებთ (4. 14. 2)-ს და მაშასადამე თეორემის დამტკიცებას.

პირობითი ექსტრემუმის მოძებნის ამ მეთოდს უწოდებენ ლაგრანჟის მეთოდს, კიდევ ერთხელ, ის მდგომარეობს შემდეგში. ვადგენთ ფუნქციას

$$L(x,y):=f(x,y)+\sum_{j=1}^{n}\ \lambda_j F_j(x,y),$$

ამ ფუნქციას უწოდებენ ლაგრანჟის ფუნქციას. $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n$ რიცხვების საპოვნელად ვხსნით შემდეგ განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_i}=0, i=1,\dots,m\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y_j}=0,\ j=1,\dots,n\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_k}=0, k=1,\dots,n\end{cases}.$$

თეორემა 4. 14. 2. ვთქვათ $f\in C^{(2)}(U(x_0,y_0);R), F\in C^{(2)}(U(x_0,y_0);R^n)$,

$$\det F_y'(x_0,y_0)\neq 0\,.$$

და (x_0,y_0) არის f ფუნქციის სავარაუდო პირობითი ექსტრემუმის წერტილი. განვიხილოთ ჯამი

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x_0,y_0)h_i h_j + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial y_l}(x_0,y_0)h_i \xi_l + \sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_s \partial y_l}(x_0,y_0)\xi_s \xi_l, \quad (4.14.9)$$

სადაც $\xi_k := \xi_k(h_1,...,h_m), k = 1,...,n$ წარმოადგენს შემდეგი სისტემის ამონახსნს

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y_1}\xi_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial y_n}\xi_n = -\left(\dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_1(x_0,y_0)}{\partial x_m}h_m\right) \\ \cdots \\ \dfrac{\partial F_n(x_0,y_0)}{\partial y_1}\xi_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_n(x_0,y_0)}{\partial y_n}\xi_n = -\left(\dfrac{\partial F_n(x_0,y_0)}{\partial x_1}h_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_n(x_0,y_0)}{\partial x_m}h_m\right) \end{cases} \quad (4.14.10)$$

თუ (4. 14. 19) კვადრატული ფორმა დადებითადაა განსაზღრული, მაშინ (x_0,y_0) წარმოადგენს პირობითი ლოკალური მინიმუმის წერტილს, თუ (4. 14. 9) კვადრატული ფორმა უარყოფითადაა განსაზღრული, მაშინ (x_0,y_0) წარმოადგენს პირობით ლოკალურ მაქსიმუმის წერტილს. თუ (4. 14. 9) ფორმა განსაზღრული არ არის, მაშინ (x_0,y_0) არ არის ექსტრემუმის წერტილი.

დამტკიცება. თეორემის პირობის ძალით $F(x,y)=0$ ტოლობათა სისტემა ამოხსნადია, ე. ი. არსებობს $y = g(x)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$\Phi(x) := F(x, g(x)) \equiv 0,$$

(x_0,y_0) წერტილის მიდამოში. მაშინ

$$L(x,g(x)) := f(x,g(x)) + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j F_j(x,g(x)) = f(x,g(x)) = \Omega(x).$$

მეორეს მხრივ, როგორც ვიცით იმისათვის, რომ (x_0,y_0) წერტილი იყოს f ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმის წერტილი აუცილებელი და საკმარისია, რომ x_0 იყოს $\Omega(x) = L(x,g(x))$ ფუნქციის უპირობო ექსტრემუმის წერტილი. მაშასადამე ჩვენი ამოცანა დაიყვანება შემდეგი კვადრატული ფორმის შესწავლაზე

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j}h_i h_j \quad (4.14.11)$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_k \partial x_i}\frac{\partial g_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial y_k} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_s \partial y_k}\frac{\partial g_s}{\partial x_j}\right)\frac{\partial g_k}{\partial x_i}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial y_k}\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (4.14.12)$$

თეორემის პირობის ძალით $\frac{\partial L}{\partial y_k}(x,y)=0.$ მაშასადამე

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_k\partial x_i}\frac{\partial g_k}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_s\partial y_k}\frac{\partial g_s}{\partial x_j}\frac{\partial g_k}{\partial x_i} \qquad (4.14.13)$$

(4. 14. 11) და (4. 14. 13)-და გამომდინარეობს

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_k\partial x_i}h_i\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_k}{\partial x_j}h_j\right)\\
&\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j\partial y_k}h_j\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g_k}{\partial x_i}h_i\right)\\
&+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_s\partial y_k}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_s}{\partial x_j}h_j\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g_k}{\partial x_i}h_i\right)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j+2\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_k\partial x_i}h_i\xi_k\\
&\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial x_j\partial y_k}h_j\xi_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial^2 L}{\partial y_s\partial y_k}\xi_k\xi_s
\end{aligned},$$

სადაც

$$\xi_k:=\xi_k(h_1,\dots,h_m)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_k}{\partial x_j}h_j,\ k=1,\dots,n.$$

ბოლოს დავამტკიცოთ, რომ $\xi_1,\dots,\xi_n$ არის (4. 14. 10)-ის ამოხსნა. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1,\dots,x_n):=\Phi_1(x)=F_1(x;g(x))=0\\ \dots\\ \Phi_n(x_1,\dots,x_n):=\Phi_n(x)=F_n(x;g(x))=0\end{cases},$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
&0=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_1}\\
&\dots\\
&0=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_m}=\frac{\partial F_1}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_m}\\
&\dots\\
&0=\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1}=\frac{\partial F_n}{\partial x_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_n}{\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_1}\\
&\dots\\
&0=\frac{\partial\Phi_n}{\partial x_m}=\frac{\partial F_n}{\partial x_m}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_n}{\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_m}
\end{aligned},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\xi_1+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\xi_n=\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_1}{\partial x_j}h_j+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial y_n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_n}{\partial x_j}h_j$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial y_k}\frac{\partial g_k}{\partial x_j}h_j=-\sum_{i=1}^{m}h_i\frac{\partial F_1}{\partial x_i}$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_n}{\partial y_i}\xi_i=-\sum_{i=1}^{m}h_i\frac{\partial F_n}{\partial x_i}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 4. 14. 1. ვთქვათ $f(x,y)=x^2-y^2$, $F(x,y)=2x-y-3=0$. განვიხილოთ ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L(x,y)=x^2-y^2+\lambda(2x-y-3).$$

დავწეროთ პირობითი ექსტრემუმის არსებობისათვის აუცილებელი პირობები

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=-2y-\lambda=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=2x-y-3=0\end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ $\lambda=-2, x=2, y=1.$ განვიხილოთ ფორმა

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}h\xi+\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\xi^2:=A(h,\xi),$$

მეორეს მხრივ

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=-2$$

და მაშასადამე

$$A(h,\xi)=2h^2-2\xi^2.$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ

$$\frac{\partial F}{\partial y}\xi=-\frac{\partial F}{\partial x}h,\quad \xi=2h$$

მივიღებთ

$$A(h,\xi)=2h^2-8h^2=-6h^2<0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (2,1) წერტილი პირობითი მაქსიმუმის წერტილია.

მაგალითი 4. 14. 2. ვიპოვოთ $u=x^2+y^2+2z^2$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები $x-y+z=1$ პირობით.

```
> L:=x^2+y^2+2*z^2+lambda*(x-y+z-1);
```

$$L := x^2+y^2+2z^2+\lambda\,(x-y+z-1)$$

```
> l1:=diff(L,x);
```

$$l1 := 2x+\lambda$$

```
> l2:=diff(L,y);
```

$$l2 := 2y-\lambda$$

```
> l3:=diff(L,z);
```

$$l3 := 4\,z + \lambda$$

```
> l4:=diff(L,lambda);
```

$$l4 := x - y + z - 1$$

```
>
det:=diff(L,x,x)*dx^2+diff(L,y,y)*dy^2+diff(L,z,z)*dz^2+2*diff(L
,x,y)*dx*dy+2*diff(L,x,z)*dx*dz+2*diff(L,y,z)*dy*dz;
```

$$det := 2\,dx^2 + 2\,dy^2 + 4\,dz^2$$

```
> solve({l1,l2,l3,l4},{x,y,z,lambda});
```

$$\{z = \frac{1}{5}, x = \frac{2}{5}, y = \frac{-2}{5}, \lambda = \frac{-4}{5}\}$$

```
> det;
```

$$2\,dx^2 + 2\,dy^2 + 4\,dz^2$$

რადგანაც ფორმა დადებითად არის განსაზღრული, ამიტომ $\left(\frac{2}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ პირობითი მინიმუმის ექსტრემუმის წერტილია.

მაგალითი 4. 14. 3. ვიპოვოთ $u = x^3 + y^2 - z^3 + 5$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები $x + y - z = 1$ პირობით.

```
> L:=x^3+y^2-z^3+3+lambda*(x+y-z);
```

$$L := x^3 + y^2 - z^3 + 3 + \lambda\,(x + y - z)$$

```
> l1:=diff(L,x);
```

$$l1 := 3\,x^2 + \lambda$$

```
> l2:=diff(L,y);
```

$$l2 := 2\,y + \lambda$$

```
> l3:=diff(L,z);
```

$$l3 := -3\,z^2 - \lambda$$

```
> l4:=diff(L,lambda);
```

$$l4 := x + y - z$$

```
>
A:=diff(L,x,x)*dx^2+diff(L,y,y)*dy^2+diff(L,z,z)*dz^2+2*diff(L,x
,y)*dx*dy+2*diff(L,x,z)*dx*dz+2*diff(L,y,z)*dy*dz;
```

$$A := 6\,x\,dx^2 + 2\,dy^2 - 6\,z\,dz^2$$

```
> B:=diff(l4,x)*dx+diff(l4,y)*dy+diff(l4,z)*dz;
```

$$B := dx + dy - dz$$

```
> dz:=solve(%,dz);
```

$$dz := dx + dy$$

```
> A;
```

$$6\,x\,dx^2 + 2\,dy^2 - 6\,z\,(dx+dy)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$6\,x\,dx^2 + 2\,dy^2 - 6\,z\,dx^2 - 12\,z\,dx\,dy - 6\,z\,dy^2$$

```
> A:=(%);
```

$$A := 6\,x\,dx^2 + 2\,dy^2 - 6\,z\,dx^2 - 12\,z\,dx\,dy - 6\,z\,dy^2$$

```
> A11:=6*x-6*z;
```

$$A11 := 6\,x - 6\,z$$

```
> A22:=2-6*z;
```

$$A22 := 2 - 6\,z$$

```
> A12:=-6*z;
```

$$A12 := -6\,z$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ := (6\,x - 6\,z)\,(2 - 6\,z) - 36\,z^2$$

```
> simplify(%);
```

$$12\,x - 36\,x\,z - 12\,z$$

```
> solve({l1,l2,l3,l4},{x,y,z,lambda});
```

$$\{z = 0, \lambda = 0, y = 0, x = 0\}, \{z = 0, \lambda = 0, y = 0, x = 0\}, \{z = 0, \lambda = 0, y = 0, x = 0\},$$

$$\left\{z = \frac{4}{3}, \lambda = \frac{-16}{3}, y = \frac{8}{3}, x = \frac{-4}{3}\right\}$$

```
> x:=-4/3;
```

$$x := \frac{-4}{3}$$

```
> y:=8/3;
```

$$y := \frac{8}{3}$$

```
> z:=4/3;
```

$$z := \frac{4}{3}$$

```
> determ;
```

$$32$$

```
> A11;
```

$$-16$$

ე. ი. $x = \frac{-4}{3}, y = \frac{8}{3}, z = \frac{4}{3}$ წერტილი წარმოადგენს ლოკალური მაქიმუმის წერტილს და

```
> u[max]:=x^3+y^2-z^3+3;
```

$$u_{max} := \frac{145}{27}$$

```
> x:=0;
```
$$x := 0$$
```
> y:=0;
```
$$y := 0$$
```
> z:=0;
```
$$z := 0$$
```
> determ;
```
$$0$$

ე. ი. ადგილი აქვს საეჭვო შემთხვევას.

მაგალითი 4. 14. 4. ვიპოვოთ $u = xy^2z^3$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები $x+2y+3z=6 \quad (x>0, y>0, z>0)$ პირობით.

```
> L:=x*y^2*z^3+lambda*(x+2*y+3*z-6);
```
$$L := x\,y^2\,z^3 + \lambda\,(x + 2\,y + 3\,z - 6)$$
```
> l1:=diff(L,x);
```
$$l1 := y^2\,z^3 + \lambda$$
```
> l2:=diff(L,y);
```
$$l2 := 2\,x\,y\,z^3 + 2\,\lambda$$
```
> l3:=diff(L,z);
```
$$l3 := 3\,x\,y^2\,z^2 + 3\,\lambda$$
```
> l4:=diff(L,lambda);
```
$$l4 := x + 2\,y + 3\,z - 6$$
```
>
A:=diff(L,x,x)*dx^2+diff(L,y,y)*dy^2+diff(L,z,z)*dz^2+2*diff(L,x
,y)*dx*dy+2*diff(L,x,z)*dx*dz+2*diff(L,y,z)*dy*dz;
```
$$A := 2\,x\,z^3\,dy^2 + 6\,x\,y^2\,z\,dz^2 + 4\,y\,z^3\,dx\,dy + 6\,y^2\,z^2\,dx\,dz + 12\,x\,y\,z^2\,dy\,dz$$
```
> B:=diff(l4,x)*dx+diff(l4,y)*dy+diff(l4,z)*dz;
```
$$B := dx + 2\,dy + 3\,dz$$
```
> dz:=solve(%,dz);
```
$$dz := -\frac{dx}{3} - \frac{2\,dy}{3}$$

```
> A;
```

$$2\,x\,z^3\,dy^2+6\,x\,y^2\,z\left(-\frac{dx}{3}-\frac{2\,dy}{3}\right)^2+4\,y\,z^3\,dx\,dy+6\,y^2\,z^2\,dx\left(-\frac{dx}{3}-\frac{2\,dy}{3}\right)+12\,x\,y\,z^2\,dy\left(-\frac{dx}{3}-\frac{2\,dy}{3}\right)$$

```
> simplify(%);
```

$$2\,x\,z^3\,dy^2+\frac{2\,x\,y^2\,z\,dx^2}{3}+\frac{8\,x\,y^2\,z\,dx\,dy}{3}+\frac{8\,x\,y^2\,z\,dy^2}{3}+4\,y\,z^3\,dx\,dy-2\,y^2\,z^2\,dx^2-4\,y^2\,z^2\,dx\,dy-4\,x\,y\,z^2\,dy\,dx-8\,x\,y\,z^2\,dy^2$$

```
> A:=(%);
```

$$A:=2\,x\,z^3\,dy^2+\frac{2\,x\,y^2\,z\,dx^2}{3}+\frac{8\,x\,y^2\,z\,dx\,dy}{3}+\frac{8\,x\,y^2\,z\,dy^2}{3}+4\,y\,z^3\,dx\,dy-2\,y^2\,z^2\,dx^2-4\,y^2\,z^2\,dx\,dy-4\,x\,y\,z^2\,dy\,dx-8\,x\,y\,z^2\,dy^2$$

```
> collect(%,dx^2);
```

$$\left(\frac{2}{3}x\,y^2\,z-2\,y^2\,z^2\right)dx^2+\left(\frac{8\,x\,y^2\,z\,dy}{3}-4\,y^2\,z^2\,dy-4\,x\,y\,z^2\,dy+4\,y\,z^3\,dy\right)dx+2\,x\,z^3\,dy^2+\frac{8\,x\,y^2\,z\,dy^2}{3}-8\,x\,y\,z^2\,dy^2$$

```
> collect(%,dy^2);
```

$$\left(2\,x\,z^3+\frac{8}{3}x\,y^2\,z-8\,x\,y\,z^2\right)dy^2+\left(\frac{8}{3}x\,y^2\,z-4\,y^2\,z^2-4\,x\,y\,z^2+4\,y\,z^3\right)dx\,dy+\left(\frac{2}{3}x\,y^2\,z-2\,y^2\,z^2\right)dx^2$$

```
> R:=op(%);
```

$$R:=\left(2\,x\,z^3+\frac{8}{3}x\,y^2\,z-8\,x\,y\,z^2\right)dy^2,\left(\frac{8}{3}x\,y^2\,z-4\,y^2\,z^2-4\,x\,y\,z^2+4\,y\,z^3\right)dx\,dy,\left(\frac{2}{3}x\,y^2\,z-2\,y^2\,z^2\right)dx^2$$

```
> R[1];
```

$$\left(2\,x\,z^3+\frac{8}{3}x\,y^2\,z-8\,x\,y\,z^2\right)dy^2$$

```
> A22:=R[1]/dy^2;
```

$$A22:=2\,x\,z^3+\frac{8}{3}x\,y^2\,z-8\,x\,y\,z^2$$

```
> R[2];
```

$$\left(\frac{8}{3}x\,y^2\,z-4\,y^2\,z^2-4\,x\,y\,z^2+4\,y\,z^3\right)dx\,dy$$

```
> A12:=R[2]/(dx*dy);
```

$$A12:=\frac{8}{3}x\,y^2\,z-4\,y^2\,z^2-4\,x\,y\,z^2+4\,y\,z^3$$

```
> R[3];
```

$$\left(\frac{2}{3}x\,y^2\,z-2\,y^2\,z^2\right)dx^2$$

```
> A11:=R[3]/dx^2;
```

$$A11:=\frac{2}{3}x\,y^2\,z-2\,y^2\,z^2$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ:=\left(\frac{2}{3}x\,y^2\,z-2\,y^2\,z^2\right)\left(2\,x\,z^3+\frac{8}{3}x\,y^2\,z-8\,x\,y\,z^2\right)$$
$$-\left(\frac{8}{3}x\,y^2\,z-4\,y^2\,z^2-4\,x\,y\,z^2+4\,y\,z^3\right)^2$$

```
> solve({l1,l2,l3,l4},{x,y,z,lambda});
```

$\{z=z, y=0, \lambda=0, x=6-3z\}, \{z=z, y=0, \lambda=0, x=6-3z\},$
$\{y=y, \lambda=0, z=0, x=-2y+6\}, \{y=y, \lambda=0, z=0, x=-2y+6\},$
$\{y=1, \lambda=-1, x=1, z=1\}$

```
> x:=1;
```

$$x:=1$$

```
> y:=1;
```

$$y:=1$$

```
> z:=1;
```

$$z:=1$$

```
> lambda:=-1;
```

$$\lambda:=-1$$

```
> determ;
```

$$\frac{8}{3}$$

```
> A11;
```

$$\frac{-4}{3}$$

```
> u[max]:=x*y^2*z^3;
```

$$u_{max}:=1$$

მაგალითი 4. 14. 5. ვიპოვოთ $u=x-2y+2z$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები $x^2+y^2+z^2=1$ პირობით.

```
> L:=x-2*y+2*z+lambda*(x^2+y^2+z^2-1);
```

$$L:=x-2\,y+2\,z+\lambda\,(x^2+y^2+z^2-1)$$

```
> l1:=diff(L,x);
```

$$l1 := 1 + 2\,\lambda\,x$$

```
> l2:=diff(L,y);
```

$$l2 := -2 + 2\,\lambda\,y$$

```
> l3:=diff(L,z);
```

$$l3 := 2 + 2\,\lambda\,z$$

```
> l4:=diff(L,lambda);
```

$$l4 := x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

```
>
A:=diff(L,x,x)*dx^2+diff(L,y,y)*dy^2+diff(L,z,z)*dz^2+2*diff(L,x
,y)*dx*dy+2*diff(L,x,z)*dx*dz+2*diff(L,y,z)*dy*dz;
```

$$A := 2\,\lambda\,dx^2 + 2\,\lambda\,dy^2 + 2\,\lambda\,dz^2$$

```
> B:=diff(l4,x)*dx+diff(l4,y)*dy+diff(l4,z)*dz;
```

$$B := 2\,x\,dx + 2\,y\,dy + 2\,z\,dz$$

```
> dz:=solve(%,dz);
```

$$dz := -\frac{x\,dx + y\,dy}{z}$$

```
> A;
```

$$2\,\lambda\,dx^2 + 2\,\lambda\,dy^2 + \frac{2\,\lambda\,(x\,dx + y\,dy)^2}{z^2}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{2\,\lambda\,(dx^2\,z^2 + dy^2\,z^2 + x^2\,dx^2 + 2\,x\,dx\,y\,dy + y^2\,dy^2)}{z^2}$$

```
> A:=(%);
```

$$A := \frac{2\,\lambda\,(dx^2\,z^2 + dy^2\,z^2 + x^2\,dx^2 + 2\,x\,dx\,y\,dy + y^2\,dy^2)}{z^2}$$

```
> collect(%,dx^2);
```

$$\frac{2\,\lambda\,(x^2 + z^2)\,dx^2}{z^2} + \frac{4\,\lambda\,x\,y\,dy\,dx}{z^2} + \frac{2\,\lambda\,(y^2\,dy^2 + dy^2\,z^2)}{z^2}$$

```
> collect(%,dy^2);
```

$$\frac{2\,\lambda\,(y^2 + z^2)\,dy^2}{z^2} + \frac{4\,\lambda\,x\,y\,dy\,dx}{z^2} + \frac{2\,\lambda\,(x^2 + z^2)\,dx^2}{z^2}$$

```
> R:=op(%);
```

$$R := \frac{2\,\lambda\,(y^2 + z^2)\,dy^2}{z^2}, \frac{4\,\lambda\,x\,y\,dy\,dx}{z^2}, \frac{2\,\lambda\,(x^2 + z^2)\,dx^2}{z^2}$$

```
> R[1];
```

$$\frac{2\,\lambda\,(y^2 + z^2)\,dy^2}{z^2}$$

```
> A22:=R[1]/dy^2;
```

$$A22 := \frac{2\,\lambda\,(y^2+z^2)}{z^2}$$

```
> R[2];
```

$$\frac{4\,\lambda\,x\,y\,dy\,dx}{z^2}$$

```
> A12:=R[2]/(dx*dy);
```

$$A12 := \frac{4\,\lambda\,x\,y}{z^2}$$

```
> R[3];
```

$$\frac{2\,\lambda\,(x^2+z^2)\,dx^2}{z^2}$$

```
> A11:=R[3]/dx^2;
```

$$A11 := \frac{2\,\lambda\,(x^2+z^2)}{z^2}$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ := \frac{4\,\lambda^2\,(x^2+z^2)\,(y^2+z^2)}{z^4} - \frac{16\,\lambda^2\,x^2\,y^2}{z^4}$$

```
> J:=solve({l1,l2,l3,l4},{x,y,z,lambda});
```

$$J := \{\lambda = \frac{3}{2}, z = \frac{-2}{3}, x = \frac{-1}{3}, y = \frac{2}{3}\}, \{\lambda = \frac{-3}{2}, z = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{3}, y = \frac{-2}{3}\}$$

```
> K:=J[1];
```

$$K := \{\lambda = \frac{3}{2}, z = \frac{-2}{3}, x = \frac{-1}{3}, y = \frac{2}{3}\}$$

```
> lambda1:=rhs(op(K)[1]);
```

$$\lambda 1 := \frac{3}{2}$$

```
> z1:=rhs(op(K)[2]);
```

$$z1 := \frac{-2}{3}$$

```
> x1:=rhs(op(K)[3]);
```

$$x1 := \frac{-1}{3}$$

```
> y1:=rhs(op(K)[4]);
```

$$y1 := \frac{2}{3}$$

```
>
```

```
> x:=x1;
```

$$x := \frac{-1}{3}$$

```
> y:=y1;
```

$$y := \frac{2}{3}$$

```
> z:=z1;
```

$$z := \frac{-2}{3}$$

```
> lambda:=lambda1;
```

$$\lambda := \frac{3}{2}$$

```
> determ;
```

$$\frac{27}{2}$$

```
> A11;
```

$$\frac{15}{4}$$

```
> u[min]:=x-2*y+2*z;
```

$$u_{min} := -3$$

```
> G:=J[2];
```

$$G := \{\frac{3}{2} = \frac{-3}{2}, \frac{-2}{3} = \frac{2}{3}, \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3} = \frac{-2}{3}\}$$

```
> lambda2:=rhs(op(G)[1]);
```

$$\lambda 2 := \frac{-3}{2}$$

```
> z2:=rhs(op(G)[2]);
```

$$z2 := \frac{2}{3}$$

```
> x2:=rhs(op(G)[3]);
```

$$x2 := \frac{1}{3}$$

```
> y2:=rhs(op(G)[4]);
```

$$y2 := \frac{-2}{3}$$

```
> x:=x2;
```

$$x := \frac{1}{3}$$

```
> y:=y2;
```

$$y := \frac{-2}{3}$$

```
> z:=z2;
```

$$z := \frac{2}{3}$$

```
> lambda:=lambda2;
```

$$\lambda := \frac{-3}{2}$$

```
> determ;
```

$$\frac{27}{2}$$

```
> A11;
```

$$\frac{-15}{4}$$

```
> u[max]:=x-2*y+2*z;
```

$$u_{max} := 3$$

მაგალითი 4. 14. 6. ვიპოვოთ $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(a > b > c > 0)$ პირობით.

```
> L:=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2+lambda*(x^2+y^2+z^2-1);
```

$$L := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

```
> 0<c;
```

$$0 < c$$

```
> c<b;
```

$$c < b$$

```
> b<a;
```

$$b < a$$

```
> l1:=diff(L,x);
```

$$l1 := \frac{2\,x}{a^2} + 2\,\lambda\,x$$

```
> l2:=diff(L,y);
```

$$l2 := \frac{2\,y}{b^2} + 2\,\lambda\,y$$

```
> l3:=diff(L,z);
```

$$l3 := \frac{2\,z}{c^2} + 2\,\lambda\,z$$

```
> l4:=diff(L,lambda);
```

$$l4 := x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

```
>
>
A:=diff(L,x,x)*dx^2+diff(L,y,y)*dy^2+diff(L,z,z)*dz^2+2*diff(L,x
,y)*dx*dy+2*diff(L,x,z)*dx*dz+2*diff(L,y,z)*dy*dz;
```

$$A := \left(\frac{2}{a^2} + 2\,\lambda\right) dx^2 + \left(\frac{2}{b^2} + 2\,\lambda\right) dy^2 + \left(\frac{2}{c^2} + 2\,\lambda\right) dz^2$$

```
> B:=diff(l4,x)*dx+diff(l4,y)*dy+diff(l4,z)*dz;
```

$$B := 2\,x\,dx + 2\,y\,dy + 2\,z\,dz$$

```
> J:=solve({l1,l2,l3,l4},{x,y,z,lambda});
```

$$J := \{z = 0, y = 0, \lambda = -\frac{1}{a^2}, x = 1\}, \{z = 0, y = 0, \lambda = -\frac{1}{a^2}, x = -1\},$$

$$\{z = 0, x = 0, \lambda = -\frac{1}{b^2}, y = 1\}, \{z = 0, x = 0, \lambda = -\frac{1}{b^2}, y = -1\},$$

$$\{y = 0, x = 0, \lambda = -\frac{1}{c^2}, z = 1\}, \{y = 0, x = 0, \lambda = -\frac{1}{c^2}, z = -1\}$$

```
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> y:=1;
```

$$y := 1$$

```
> z:=0;
```

$$z := 0$$

```
> lambda:=-1/(b^2);
```

$$\lambda := -\frac{1}{b^2}$$

```
> A;
```

$$\left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) dx^2 + \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}\right) dz^2$$

```
> T:=op(%);
```

$$T := \left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) dx^2, \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}\right) dz^2$$

```
> A11:=T[1]/dx^2;
>
```

$$A11 := \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}$$

```
> A22:=T[2]/dz^2;
```

$$A22 := \frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}$$

```
> A12:=0;
```

$$A12 := 0$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ := \left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right)\left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}\right)$$

```
> sign(%);
```

$$-1$$

```
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> y:=-1;
```

$$y := -1$$

```
> z:=0;
```

$$z := 0$$

```
> lambda:=-1/(b^2);
```

$$\lambda := -\frac{1}{b^2}$$

```
> A;
```

$$\left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) dx^2 + \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}\right) dz^2$$

```
> T:=op(%);
```

$$T := \left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) dx^2, \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}\right) dz^2$$

```
> A11:=T[1]/dx^2;
>
```

$$A11 := \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}$$

```
> A22:=T[2]/dz^2;
```

$$A22 := \frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}$$

```
> A12:=0;
```

$$A12 := 0$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ := \left(\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right)\left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{b^2}\right)$$

```
> sign(%);
```

$$-1$$

```
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> y:=0;
```

$$y := 0$$

```
> z:=1;
```

$$z := 1$$

```
> lambda:=-1/(c^2);
```

$$\lambda := -\frac{1}{c^2}$$

```
> A;
```

$$\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}\right)dx^2+\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)dy^2$$

```
> T:=op(%);
```

$$T := \left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}\right)dx^2, \left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)dy^2$$

```
> A11:=T[1]/dx^2;
>
```

$$A11 := \frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}$$

```
> A22:=T[2]/dy^2;
```

$$A22 := \frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}$$

```
> A12:=0;
```

$$A12 := 0$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ := \left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}\right)\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

```
> A11;
```

$$\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}$$

```
> sign(%);
```

$$-1$$

```
> u[max]:=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2;
```

$$u_{max} := \frac{1}{c^2}$$

```
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> y:=0;
```

$$y := 0$$

```
> z:=-1;
```

$$z := -1$$

```
> lambda:=-1/(c^2);
```

$$\lambda := -\frac{1}{c^2}$$

```
> A;
```

$$\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}\right)dx^2+\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)dy^2$$

```
> T:=op(%);
```

$$T:=\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}\right)dx^2,\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)dy^2$$

```
> A11:=T[1]/dx^2;
>
```

$$A11:=\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}$$

```
> A22:=T[2]/dy^2;
```

$$A22:=\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}$$

```
> A12:=0;
```

$$A12:=0$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ:=\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}\right)\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right)$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

```
> A11;
```

$$\frac{2}{a^2}-\frac{2}{c^2}$$

```
> sign(%);
```

$$-1$$

```
> u[max]:=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2;
```

$$u_{max}:=\frac{1}{c^2}$$

```
> x:=1;
```

$$x:=1$$

```
> y:=0;
```

$$y:=0$$

```
> z:=0;
```

$$z:=0$$

```
> lambda:=-1/(a^2);
```

$$\lambda:=-\frac{1}{a^2}$$

```
> A;
```

$$\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{a^2}\right)dy^2+\left(\frac{2}{c^2}-\frac{2}{a^2}\right)dz^2$$

```
> T:=op(%);
```

$$T := \left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}\right) dy^2, \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}\right) dz^2$$

```
> A11:=T[1]/dy^2;
>
```

$$A11 := \frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}$$

```
> A22:=T[2]/dz^2;
```

$$A22 := \frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}$$

```
> A12:=0;
```

$$A12 := 0$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ := \left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}\right)\left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}\right)$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

```
> A11;
```

$$\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

```
> u[min]:=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2;
```

$$u_{min} := \frac{1}{a^2}$$

```
> x:=-1;
```

$$x := -1$$

```
> y:=0;
```

$$y := 0$$

```
> z:=0;
```

$$z := 0$$

```
> lambda:=-1/(a^2);
```

$$\lambda := -\frac{1}{a^2}$$

```
> A;
```

$$\left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}\right) dy^2 + \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}\right) dz^2$$

```
> T:=op(%);
```

$$T := \left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}\right) dy^2, \left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}\right) dz^2$$

```
> A11:=T[1]/dy^2;
>
```

$$A11 := \frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}$$

```
> A22:=T[2]/dz^2;
```

$$A22 := \frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}$$

```
> A12:=0;
```

$$A12 := 0$$

```
> determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$determ := \left(\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}\right)\left(\frac{2}{c^2} - \frac{2}{a^2}\right)$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

```
> A11;
```

$$\frac{2}{b^2} - \frac{2}{a^2}$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

```
> u[min]:=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2;
```

$$u_{min} := \frac{1}{a^2}$$

მაგალითი 4. 14. 7. ვიპოვოთ $z = f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები, თუ $z^3 - xyz + y^2 = 16$.

```
> Eq:=z^3-x*y*z+y^2-16=0;
```

$$Eq := z^3 - x\,y\,z + y^2 - 16 = 0$$

```
> implicitdiff(Eq,z,x);
```

$$\frac{y\,z}{3\,z^2 - x\,y}$$

```
> implicitdiff(Eq,z,y);
```

$$-\frac{-x\,z + 2\,y}{3\,z^2 - x\,y}$$

```
> solve({%=0,%%=0},{x,y});
```

$$\{x = 0, y = 0\}$$

```
> A11:=implicitdiff(Eq,z,x$2);
```

$$A11 := -\frac{2\,y^3\,z\,x}{27\,z^6 - 27\,z^4\,x\,y + 9\,z^2\,x^2\,y^2 - x^3\,y^3}$$

```
> A12:=implicitdiff(Eq,z,x,y);
```

$$A12 := -\frac{6\,z^3\,y\,x - 6\,z^2\,y^2 - 9\,z^5 + z\,x^2\,y^2 - 2\,x\,y^3}{27\,z^6 - 27\,z^4\,x\,y + 9\,z^2\,x^2\,y^2 - x^3\,y^3}$$

```
> A22:=implicitdiff(Eq,z,y$2);
```

$$A22 := -\frac{-24\,z^2\,x\,y + 24\,y^2\,z + 2\,x^3\,z\,y - 2\,x^2\,y^2 + 18\,z^4}{27\,z^6 - 27\,z^4\,x\,y + 9\,z^2\,x^2\,y^2 - x^3\,y^3}$$

```
>
```

```
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> y:=0;
```

$$y := 0$$

```
> Eq;
```

$$z^3 - 16 = 0$$

```
> solve(Eq,z);
```

$$2\,2^{(1/3)}, -2^{(1/3)} + \sqrt{3}\,2^{(1/3)}\,I, -2^{(1/3)} - \sqrt{3}\,2^{(1/3)}\,I$$

```
> z:=2*2^(1/3);
```

$$z := 2\,2^{(1/3)}$$

```
> A11;
```

$$0$$

```
> A12;
```

$$\frac{2^{(2/3)}}{12}$$

```
> A22;
```

$$-\frac{2^{(1/3)}}{12}$$

```
> Determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$Determ := -\frac{2^{(1/3)}}{72}$$

ე. ი. ექსტრემუმის წერტილი არა აქვს.

მაგალითი 4. 14. 7. ვიპოვოთ $z = f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები, თუ $z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16$.

```
> Eq:=z^3-x*y*z+y^2+4*x^2=16;
```

$$Eq := z^3 - x\,y\,z + y^2 + 4\,x^2 = 16$$

```
> implicitdiff(Eq,z,x);
```

$$\frac{-y\,z+8\,x}{-3\,z^2+x\,y}$$

```
> implicitdiff(Eq,z,y);
```

$$-\frac{x\,z-2\,y}{-3\,z^2+x\,y}$$

```
> solve({%=0,%%=0},{x,y});
```

$$\{y=0,\,x=0\}$$

```
> A11:=implicitdiff(Eq,z,x$2);
```

$$A11 := -\frac{2\,(48\,y\,z^2\,x-192\,z\,x^2-y^3\,z\,x+4\,x^2\,y^2-36\,z^4)}{-27\,z^6+27\,z^4\,y\,x-9\,z^2\,x^2\,y^2+x^3\,y^3}$$

```
> A22:=implicitdiff(Eq,z,y$2);
```

$$A22 := \frac{2\,(-12\,y\,z^2\,x+12\,z\,y^2+x^3\,z\,y-x^2\,y^2+9\,z^4)}{-27\,z^6+27\,z^4\,y\,x-9\,z^2\,x^2\,y^2+x^3\,y^3}$$

```
> A12:=implicitdiff(Eq,z,x,y);
```

$$A12 := -\frac{-6\,y\,z^3\,x+6\,y^2\,z^2+24\,x^2\,z^2-96\,x\,y\,z+9\,z^5-z\,x^2\,y^2+2\,x\,y^3+8\,x^3\,y}{-27\,z^6+27\,z^4\,y\,x-9\,z^2\,x^2\,y^2+x^3\,y^3}$$

```
> Determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$Determ := -4\,(48\,y\,z^2\,x-192\,z\,x^2-y^3\,z\,x+4\,x^2\,y^2-36\,z^4)\,(-12\,y\,z^2\,x+12\,z\,y^2+x^3\,z\,y-x^2\,y^2+9\,z^4)\,/\,(-27\,z^6+27\,z^4\,y\,x-9\,z^2\,x^2\,y^2+x^3\,y^3)^2 - \frac{(-6\,y\,z^3\,x+6\,y^2\,z^2+24\,x^2\,z^2-96\,x\,y\,z+9\,z^5-z\,x^2\,y^2+2\,x\,y^3+8\,x^3\,y)^2}{(-27\,z^6+27\,z^4\,y\,x-9\,z^2\,x^2\,y^2+x^3\,y^3)^2}$$

```
>
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> y:=0;
```

$$y := 0$$

```
> Eq;
```

$$z^3 = 16$$

```
> solve(Eq,z);
```

$$2\,2^{(1/3)}, -2^{(1/3)}+\sqrt{3}\,2^{(1/3)}\,I, -2^{(1/3)}-\sqrt{3}\,2^{(1/3)}\,I$$

```
> z:=2*2^(1/3);
```

$$z := 2\,2^{(1/3)}$$

```
> A22;
```

$$-\frac{2^{(1/3)}}{12}$$

```
> simplify(%);
```

$$-\frac{2^{(1/3)}}{12}$$

```
> A11;
```

$$-\frac{2^{(1/3)}}{3}$$

```
> A12;
```

$$\frac{2^{(2/3)}}{12}$$

```
> Determ;
```

$$\frac{2^{(2/3)}}{36}-\frac{2^{(1/3)}}{72}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{2^{(2/3)}}{36}-\frac{2^{(1/3)}}{72}$$

```
> combine(%);
```

$$\frac{2^{(2/3)}}{36}-\frac{2^{(1/3)}}{72}$$

```
> evalf(%);
```

$$0.02659557020$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

> ე. ი. $(0,0)$ წერტილი ლოკალური მაქიმუმის წერტილია.

მაგალითი 4. 14. 8 ვიპოვოთ $z=f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები, თუ $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z=2$.

```
> Eq:=x^2+y^2+z^2-x*z-y*z+2*x+2*y+2*z-2=0;
```

$$Eq := x^2+y^2+z^2-x\,z-y\,z+2\,x+2\,y+2\,z-2=0$$

```
> implicitdiff(Eq,z,x);
```

$$-\frac{2\,x-z+2}{2\,z-x-y+2}$$

```
> implicitdiff(Eq,z,y);
```

$$-\frac{2\,y-z+2}{2\,z-x-y+2}$$

```
> solve({%=0,%%=0},{x,y});
```

$$\{x=\frac{z}{2}-1,\ y=\frac{z}{2}-1\}$$

```
> A11:=implicitdiff(Eq,z,x$2);
```

$$A11 := -(24 + 12x - 12y + 6x^2 + 2y^2 - 6xz - 6yz + 12z + 6z^2) \,/\, (12zxy - 24xz - 3x^2y - 3xy^2 + 12xy + 8 + 24z - 12x - 12y - x^3 + 6x^2 - y^3 + 6y^2 - 12z^2x - 12z^2y + 6zx^2 + 6zy^2 - 24yz + 8z^3 + 24z^2)$$

```
> A22:=implicitdiff(Eq,z,y$2);
```

$$A22 := -(24 - 12x + 12y + 2x^2 + 6y^2 - 6xz - 6yz + 12z + 6z^2) \,/\, (12zxy - 24xz - 3x^2y - 3xy^2 + 12xy + 8 + 24z - 12x - 12y - x^3 + 6x^2 - y^3 + 6y^2 - 12z^2x - 12z^2y + 6zx^2 + 6zy^2 - 24yz + 8z^3 + 24z^2)$$

```
> A12:=implicitdiff(Eq,z,x,y);
```

$$A12 := -(16 + 8x + 8y - 2x^2 - 2y^2 + 2xz + 2yz - 4z - 2z^2 + 4xy) \,/\, (12zxy - 24xz - 3x^2y - 3xy^2 + 12xy + 8 + 24z - 12x - 12y - x^3 + 6x^2 - y^3 + 6y^2 - 12z^2x - 12z^2y + 6zx^2 + 6zy^2 - 24yz + 8z^3 + 24z^2)$$

```
> Determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$Determ := (24 + 12x - 12y + 6x^2 + 2y^2 - 6xz - 6yz + 12z + 6z^2)(24 - 12x + 12y + 2x^2 + 6y^2 - 6xz - 6yz + 12z + 6z^2) \,/\, (12zxy - 24xz - 3x^2y - 3xy^2 + 12xy + 8 + 24z - 12x - 12y - x^3 + 6x^2 - y^3 + 6y^2 - 12z^2x - 12z^2y + 6zx^2 + 6zy^2 - 24yz + 8z^3 + 24z^2)^2 - (16 + 8x + 8y - 2x^2 - 2y^2 + 2xz + 2yz - 4z - 2z^2 + 4xy)^2 \,/\, (12zxy - 24xz - 3x^2y - 3xy^2 + 12xy + 8 + 24z - 12x - 12y - x^3 + 6x^2 - y^3 + 6y^2 - 12z^2x - 12z^2y + 6zx^2 + 6zy^2 - 24yz + 8z^3 + 24z^2)^2$$

```
>
> x:=z/2-1;
```

$$x := \frac{z}{2} - 1$$

```
>
> y:=z/2-1;
```

$$y := \frac{z}{2} - 1$$

```
> solve(Eq,z);
```

$$-4 + 2\sqrt{6}, -4 - 2\sqrt{6}$$

```
> z:=-4+2*6^(1/2);
```

$$z := -4 + 2\sqrt{6}$$

```
> x;
```

$$-3 + \sqrt{6}$$

```
> y;
```

$$-3 + \sqrt{6}$$

```
> A11;
```

$$-(-24+24\sqrt{6}+8(-3+\sqrt{6})^2-12(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})+6(-4+2\sqrt{6})^2)\Big/(24(-4+2\sqrt{6})(-3+\sqrt{6})^2-48(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-8(-3+\sqrt{6})^3+24(-3+\sqrt{6})^2-16+24\sqrt{6}-24(-4+2\sqrt{6})^2(-3+\sqrt{6})+8(-4+2\sqrt{6})^3+24(-4+2\sqrt{6})^2)$$

```
> A22;
```

$$-(-24+24\sqrt{6}+8(-3+\sqrt{6})^2-12(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})+6(-4+2\sqrt{6})^2)\Big/(24(-4+2\sqrt{6})(-3+\sqrt{6})^2-48(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-8(-3+\sqrt{6})^3+24(-3+\sqrt{6})^2-16+24\sqrt{6}-24(-4+2\sqrt{6})^2(-3+\sqrt{6})+8(-4+2\sqrt{6})^3+24(-4+2\sqrt{6})^2)$$

```
> A12;
```

$$-(-16+8\sqrt{6}+4(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-2(-4+2\sqrt{6})^2)\Big/(24(-4+2\sqrt{6})(-3+\sqrt{6})^2-48(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-8(-3+\sqrt{6})^3+24(-3+\sqrt{6})^2-16+24\sqrt{6}-24(-4+2\sqrt{6})^2(-3+\sqrt{6})+8(-4+2\sqrt{6})^3+24(-4+2\sqrt{6})^2)$$

```
> Determ;
```

$$(-24+24\sqrt{6}+8(-3+\sqrt{6})^2-12(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})+6(-4+2\sqrt{6})^2)^2\Big/(24(-4+2\sqrt{6})(-3+\sqrt{6})^2-48(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-8(-3+\sqrt{6})^3+24(-3+\sqrt{6})^2-16+24\sqrt{6}-24(-4+2\sqrt{6})^2(-3+\sqrt{6})+8(-4+2\sqrt{6})^3+24(-4+2\sqrt{6})^2)^2-(-16+8\sqrt{6}+4(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-2(-4+2\sqrt{6})^2)^2\Big/(24(-4+2\sqrt{6})(-3+\sqrt{6})^2-48(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-8(-3+\sqrt{6})^3+24(-3+\sqrt{6})^2-16+24\sqrt{6}-24(-4+2\sqrt{6})^2(-3+\sqrt{6})+8(-4+2\sqrt{6})^3+24(-4+2\sqrt{6})^2)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{6}$$

```
> sign(%);
```

$$1$$

```
> A11;
```

$$-(-24+24\sqrt{6}+8(-3+\sqrt{6})^2-12(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})+6(-4+2\sqrt{6})^2)\Big/(24(-4+2\sqrt{6})(-3+\sqrt{6})^2-48(-3+\sqrt{6})(-4+2\sqrt{6})-8(-3+\sqrt{6})^3+24(-3+\sqrt{6})^2-16+24\sqrt{6}-24(-4+2\sqrt{6})^2(-3+\sqrt{6})+8(-4+2\sqrt{6})^3+24(-4+2\sqrt{6})^2)$$

```
> simplify(%);
```

$$-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

```
> z:=-4-2*6^(1/2);
```

$$z := -4-2\sqrt{6}$$

```
> A12;
```

$$-(-16-8\sqrt{6}+4(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})-2(-4-2\sqrt{6})^2)/(24(-4-2\sqrt{6})(-3-\sqrt{6})^2-48(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})-8(-3-\sqrt{6})^3+24(-3-\sqrt{6})^2-16-24\sqrt{6}-24(-4-2\sqrt{6})^2(-3-\sqrt{6})+8(-4-2\sqrt{6})^3+24(-4-2\sqrt{6})^2)$$

```
> simplify(%);
```

$$0$$

```
> A22;
```

$$-(-24-24\sqrt{6}+8(-3-\sqrt{6})^2-12(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})+6(-4-2\sqrt{6})^2)/(24(-4-2\sqrt{6})(-3-\sqrt{6})^2-48(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})-8(-3-\sqrt{6})^3+24(-3-\sqrt{6})^2-16-24\sqrt{6}-24(-4-2\sqrt{6})^2(-3-\sqrt{6})+8(-4-2\sqrt{6})^3+24(-4-2\sqrt{6})^2)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\sqrt{6}}{6}$$

```
> Determ;
```

$$(-24-24\sqrt{6}+8(-3-\sqrt{6})^2-12(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})+6(-4-2\sqrt{6})^2)^2/(24(-4-2\sqrt{6})(-3-\sqrt{6})^2-48(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})-8(-3-\sqrt{6})^3+24(-3-\sqrt{6})^2-16-24\sqrt{6}-24(-4-2\sqrt{6})^2(-3-\sqrt{6})+8(-4-2\sqrt{6})^3+24(-4-2\sqrt{6})^2)^2-(-16-8\sqrt{6}+4(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})-2(-4-2\sqrt{6})^2)^2/(24(-4-2\sqrt{6})(-3-\sqrt{6})^2-48(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})-8(-3-\sqrt{6})^3+24(-3-\sqrt{6})^2-16-24\sqrt{6}-24(-4-2\sqrt{6})^2(-3-\sqrt{6})+8(-4-2\sqrt{6})^3+24(-4-2\sqrt{6})^2)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{1}{6}$$

```
> A11;
```

$$-(-24-24\sqrt{6}+8(-3-\sqrt{6})^2-12(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})+6(-4-2\sqrt{6})^2)/(24(-4-2\sqrt{6})(-3-\sqrt{6})^2-48(-3-\sqrt{6})(-4-2\sqrt{6})-8(-3-\sqrt{6})^3+24(-3-\sqrt{6})^2-16-24\sqrt{6}-24(-4-2\sqrt{6})^2(-3-\sqrt{6})+8(-4-2\sqrt{6})^3+24(-4-2\sqrt{6})^2)$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{\sqrt{6}}{6}$$

```
> cat("in point x=-3+6^(1/2),y=-3+6^(1/2),z=-4+2*6^(1/2),min");
```

"in point x=-3+6^(1/2),y=-3+6^(1/2),z=-4+2*6^(1/2),min"

```
>
> cat("in point x=-3+6^(1/2),y=-3+6^(1/2),z=-4-2*6^(1/2),max");
```

"in point x=-3+6^(1/2),y=-3+6^(1/2),z=-4-2*6^(1/2),max"

>

მაგალითი 4. 14. 9 ვიპოვოთ $z = f(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები, თუ $\left(x^2+y^2-z^2\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

```
> Eq:=(x^2+y^2-z^2)^2=a^2*(x^2+y^2+z^2);
```

$$Eq := \left(x^2+y^2-z^2\right)^2 = a^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

```
> implicitdiff(Eq,z,x);
```

$$-\frac{2x^3+2y^2x-2z^2x-a^2x}{-2x^2z-2y^2z+2z^3-a^2z}$$

```
> implicitdiff(Eq,z,y);
```

$$-\frac{2x^2y+2y^3-2z^2y-a^2y}{-2x^2z-2y^2z+2z^3-a^2z}$$

```
> solve({%=0,%%=0},{x,y});
```

$$\{y=0, x=0\}, \{y=0, x=\mathrm{RootOf}(2\_Z^2-2z^2-a^2, label=\_L1)\},$$
$$\{x=0, y=\mathrm{RootOf}(2\_Z^2-2z^2-a^2, label=\_L2)\},$$
$$\{y=y, x=\mathrm{RootOf}(2\_Z^2+2y^2-2z^2-a^2)\}$$

```
> A11:=implicitdiff(Eq,z,x$2);
```

$$A11 := -(-4x^2z^4a^2-72x^2z^4y^2-8y^2z^4a^2+72x^4z^2y^2-4z^2x^4a^2+48x^2z^2y^4$$
$$+4y^4z^2a^2-2y^2z^2a^4+2y^2x^2a^4+4y^4x^2a^2+8x^4y^2a^2+24y^2z^6-24y^4z^4$$
$$+4z^6a^2+2z^4a^4-a^6z^2+32x^2z^6+32x^6z^2-48x^4z^4+8y^6z^2+12x^2z^2a^4$$
$$-8y^6x^2-a^6x^2-24x^6y^2+4x^6a^2-24x^4y^4+2x^4a^4-8x^8-8z^8)/(24x^2z^5a^2$$
$$-8x^6z^3-a^6z^3-24x^2z^3y^2a^2-12x^4z^3a^2-6y^2z^3a^4-24x^2z^7+24x^4z^5$$
$$-24y^2z^7+24y^4z^5-8y^6z^3-12z^7a^2+6z^5a^4+48x^2z^5y^2-24x^2z^3y^4$$
$$-6x^2z^3a^4-24x^4z^3y^2-12y^4z^3a^2+24y^2z^5a^2+8z^9)$$

```
> simplify(%);
```

$$-(4x^2z^4a^2+72x^2z^4y^2+8y^2z^4a^2-72x^4z^2y^2+4z^2x^4a^2-48x^2z^2y^4-4y^4z^2a^2$$
$$+2y^2z^2a^4-2y^2x^2a^4-4y^4x^2a^2-8x^4y^2a^2-24y^2z^6+24y^4z^4-4z^6a^2$$
$$-2z^4a^4+a^6z^2-32x^2z^6-32x^6z^2+48x^4z^4-8y^6z^2-12x^2z^2a^4+8y^6x^2$$
$$+a^6x^2+24x^6y^2-4x^6a^2+24x^4y^4-2x^4a^4+8x^8+8z^8)/(z^3(-24x^2z^2a^2$$
$$+8x^6+a^6+24x^2y^2a^2+12x^4a^2+6y^2a^4+24x^2z^4-24x^4z^2+24y^2z^4$$
$$-24y^4z^2+8y^6+12z^4a^2-6z^2a^4-48x^2z^2y^2+24x^2y^4+6x^2a^4+24x^4y^2$$
$$+12y^4a^2-24y^2z^2a^2-8z^6))$$

```
> A22:=implicitdiff(Eq,z,y$2);
```

$$A22 := -(-8x^2z^4a^2 - 72x^2z^4y^2 - 4y^2z^4a^2 - 8y^8 + 48x^4z^2y^2 + 4z^2x^4a^2 + 72x^2z^2y^4 - 4y^4z^2a^2 + 12y^2z^2a^4 + 2y^2x^2a^4 + 8y^4x^2a^2 + 4x^4y^2a^2 + 32y^2z^6 - 48y^4z^4 + 4z^6a^2 + 2z^4a^4 - a^6z^2 + 24x^2z^6 + 8x^6z^2 - 24x^4z^4 + 32y^6z^2 - 2x^2z^2a^4 - 24y^6x^2 + 2a^4y^4 - a^6y^2 + 4a^2y^6 - 8x^6y^2 - 24x^4y^4 - 8z^8) / (24x^2z^5a^2 - 8x^6z^3 - a^6z^3 - 24x^2z^3y^2a^2 - 12x^4z^3a^2 - 6y^2z^3a^4 - 24x^2z^7 + 24x^4z^5 - 24y^2z^7 + 24y^4z^5 - 8y^6z^3 - 12z^7a^2 + 6z^5a^4 + 48x^2z^5y^2 - 24x^2z^3y^4 - 6x^2z^3a^4 - 24x^4z^3y^2 - 12y^4z^3a^2 + 24y^2z^5a^2 + 8z^9)$$

```
> A12:=implicitdiff(Eq,z,x,y);
```

$$A12 := -(-8x^7y - 24x^5y^3 - 24x^3y^5 - 8y^7x + 4x^5a^2y + 8x^3y^3a^2 + 2x^3ya^4 + 4y^5xa^2 + 2y^3xa^4 - a^6xy + 4z^4xya^2 - 8x^3yz^2a^2 - 8y^3xz^2a^2 + 14yz^2a^4x + 24x^5yz^2 + 48x^3y^3z^2 - 24x^3z^4y + 24y^5xz^2 - 24y^3xz^4 + 8z^6xy) / (24x^2z^5a^2 - 8x^6z^3 - a^6z^3 - 24x^2z^3y^2a^2 - 12x^4z^3a^2 - 6y^2z^3a^4 - 24x^2z^7 + 24x^4z^5 - 24y^2z^7 + 24y^4z^5 - 8y^6z^3 - 12z^7a^2 + 6z^5a^4 + 48x^2z^5y^2 - 24x^2z^3y^4 - 6x^2z^3a^4 - 24x^4z^3y^2 - 12y^4z^3a^2 + 24y^2z^5a^2 + 8z^9)$$

```
> x:=0;
```

$$x := 0$$

```
> y:=0;
```

$$y := 0$$

```
> solve(Eq,z);
```

$$0, 0, -a, a$$

```
> A11;
```

$$-\frac{4z^6a^2 + 2z^4a^4 - a^6z^2 - 8z^8}{-a^6z^3 - 12z^7a^2 + 6z^5a^4 + 8z^9}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{2z^2 + a^2}{z(2z^2 - a^2)}$$

```
> A12;
```

$$0$$

```
> A22;
```

$$-\frac{4z^6a^2 + 2z^4a^4 - a^6z^2 - 8z^8}{-a^6z^3 - 12z^7a^2 + 6z^5a^4 + 8z^9}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{2z^2 + a^2}{z(2z^2 - a^2)}$$

```
> Determ:=A11*A22-A12^2;
```

$$Determ := \frac{(4z^6a^2 + 2z^4a^4 - a^6z^2 - 8z^8)^2}{(-a^6z^3 - 12z^7a^2 + 6z^5a^4 + 8z^9)^2}$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{(2z^2+a^2)^2}{z^2(2z^2-a^2)^2}$$

```
> z:=-a;
```

$$z := -a$$

```
> A11;
```

$$-\frac{3}{a}$$

```
> A12;
```

$$0$$

```
> A22;
```

$$-\frac{3}{a}$$

```
> Determ;
```

$$\frac{9}{a^2}$$

```
>
> cat("in point x=0,y=0,z=-a,max");
```

"in point x=0,y=0,z=-a,max"

```
> z:=a;
```

$$z := a$$

```
> A11;
```

$$\frac{3}{a}$$

```
> A12;
```

$$0$$

```
> A22;
```

$$\frac{3}{a}$$

```
> Determ;
```

$$\frac{9}{a^2}$$

```
> cat("in point x=0,y=0,z=a,min");
```

"in point x=0,y=0,z=a,min"