ლექცია 9

3.5. განტოლება სრულ დიფერენციალებში

გავიხსენოთ რამდენიმე განსაზღვრა კალკულუსიდან.

განვიხილოთ ორი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x, y)$. x არგუმენტს მივცეთ ნაზრდი Δx, ხოლო y არგუმენტს – ნაზრდი Δy. მაშინ ფუნქცია მიიღებს $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ მნიშვნელობას და ფუნქციის ნაზრდი იქნება

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

თუკი ნაზრდს მივცემთ მხოლოდ x არგუმენტს ან მხოლოდ y არგუმენტს, მაშინ შესაბამისად მიიღება

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

კერძო ნაზრდები.

განსაზღვრა 3.5.1. თუ

$$\frac{\partial z}{\partial x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ზღვრები არსებობს, მათ ეწოდებათ შესაბამისად *კერძო წარმოებული* x-ით და y-ით.

განსაზღვრა 3.5.2 *ორი ცვლადის ფუნქციის სრული დიფერენციალი* ეწოდება კერძო წარმოებულებისა და შესაბამისი არგუმენტების ნაზრდების ნამრავლთა ჯამს[*)], ე. ი.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

განვიხილოთ შემდეგი სახის პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{3.5.1}$$

[*)] უფრო მკაცრად, *ფუნქციის დიფერენციალი* ეწოდება

$$A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$$

გამოსახულებას, თუ ფუნქციის ნაზრდის წარმოდგენა შეიძლება

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)$$

სახით, სადაც o (ო მცირე) ლანდაუს [ე. გ. ჰ. ლანდაუ (1877 – 1938) – გერმანელი მათემატიკოსი] სიმბოლოა და ნიშნავს უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეს, ვიდრე ფრჩხილებში მოთავსებული სიდიდეა. გამომდინარე კერძო წარმოებულის განმარტებიდან (იხ. განსაზღვრა 3.5.1). ადვილად დავასკვნით, რომ

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ და } B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

შევნიშნოთ, რომ დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალად მიღებულია მისი ნაზრდი, ე. ი.

$$dx = \Delta x \text{ და } dy = \Delta y$$

მაშინ, როდესაც ფუნქციის ნაზრდი მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდით განსხვავდება ფუნქციის დიფერენციალისგან.

$\frac{\partial z}{\partial x} dx$-ს და $\frac{\partial z}{\partial y} dy$-ს ეწოდებათ კერძო დიფერენციალები, შესაბამისად, x-ით და y-ით.

სადაც $M(x,y)$ და $N(x,y)$ მოცემული ფუნქციებია რაიმე Ω არეში[*]. მას x-ის და y-ის მიმართ სიმეტრიული სახე აქვს.

განსაზღვრა 3.5.3. (3.5.1) განტოლებას ეწოდება *დიფერენციალური განტოლება სრულ დიფერენციალებში,* თუ მისი მარცხენა მხარე რაიმე ფუნქციის სრული დიფერენციალია.

თუ (3.5.1) განტოლების მარცხენა მხარე რაიმე $u(x,y)$ ფუნქციის სრულ დიფერენციალს წარმოადგენს, ე. ი.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y), \tag{3.5.2}$$

მაშინ (3.5.1) განტოლება მიიღებს

$$du(x,y)=0$$

სახეს, რაც იმას ნიშნავს, რომ u მუდმივია, ე. ი. მივიღებთ (3.5.1) განტოლების

$$u(x,y)=c \tag{3.5.3}$$

ზოგად ინტეგრალს, სადაც c ნებისმიერი მუდმივია.

ისმის კითხვა: რა პირობებში იქნება (3.5.1)-ის მარცხენა მხარე რაიმე $u(x,y)$ ფუნქციის სრული დიფერენციალი და როგორ ვიპოვოთ ის?

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 3.5.4. თუ $M(x,y)$ და $N(x,y)$ ფუნქციები უწყვეტია

$$\Omega:=\{(x,y):\ a<x<b,\quad c<y<d\}$$

მართკუთხედზე და ამავე მართკუთხედზე აქვთ უწყვეტი $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ და $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ კერძო წარმოებულები, მაშინ იმის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომ

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy \tag{3.5.4}$$

დიფერენციალური გამოსახულება წარმოადგენდეს რაიმე $u(x,y)\in C^2(\Omega)$[**] ფუნქციის სრულ დიფერენციალს, ისაა, რომ Ω მართკუთხედის ყველა წერტილში ადგილი ჰქონდეს

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.5.5}$$

ტოლობას.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ (3.5.5) პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, სრულდება (3.5.2). $u(x,y)$ ფუნქციის დიფერენციალი შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

თუ ამ უკანასკნელს (3.5.2)-ს შევადარებთ, დავასკვნით, რომ

$$M=\frac{\partial u}{\partial x},\quad N=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.5.6}$$

თუ ამათგან პირველს y-ით, ხოლო მეორეს x-ით გავაწარმოებთ, გვექნება, რომ

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

რადგან $u(x,y)\in C^2(\Omega)$, მისი მეორე რიგის შერეული წარმოებულები უწყვეტია და, ამდენად, შვარცის თეორემის (დამტკიცების გარეშე) თანახმად, მარჯვენა მხარეში შერეული წარმო-

[*] არე ეწოდება ისეთ Ω სიმრავლეს, რომლის ყველა წერტილისთვის მოიძებნება ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად მოთავსდება Ω-ში და მისი ნებისმიერი ორი წერტილი შეიძლება შევაერთოთ წირით, რომელიც მთლიანად Ω-ს ეკუთვნის.

[**] $C^2(\Omega)$-თი აღნიშნულია ისეთ ფუნქციათა კლასი, რომლებსაც მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები აქვთ. ანალოგიურად განიმარტება ფუნქციათა $C^m(\Omega)$ კლასი ნებისმიერი მთელი m-სთვის. $C^0(\Omega)\equiv C(\Omega)$ უწყვეტ ფუნქციათა კლასს აღნიშნავს.

ებულები ერთმანეთის ტოლია. ამიტომ მარცხენა მხარეებიც ტოლი იქნება, ე. ი. შესრულდება (3.5.5) პირობა.

დავუშვათ, რომ (3.5.5) პირობა სრულდება და დავამტკიცოთ, რომ შეიძლება ისეთი $u(x,y)$ ფუნქციიის აგება, რომლის სრული დიფერენციალი (3.5.4) იქნება. თუ ასეთი $u(x,y)$ ფუნქცია არსებობს, მაშინ შესრულდება (3.5.6) ტოლობები.

(3.5.6)-ის პირველი განტოლებიდან x-ის მიმართ ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+c_1(y)\,,\quad a<x_0<b\,, \tag{3.5.7}$$

სადაც x_0 ნებისმიერი ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $c_1(y)$ y-ის ნებისმიერი ფუნქციაა.

(3.5.7)-ში $c_1(y)\in C^1(]c,d[)$ ფუნქცია ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ დავაკმაყოფილოთ (3.5.6)-ის მეორე განტოლებაც. ამისთვის (3.5.7) ტოლობის ორივე მხარე y-ით გავაწარმოოთ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+c'_1(y)\,.$$

აქედან, ვინაიდან უნდა შესრულდეს

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)\,,$$

გვექნება, რომ

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+c'_1(y)=N(x,y)\,.$$

რადგან 3.5.4 თეორემის პირობებში Ω-ში მდებარე ნებისმიერი ჩაკეტილი (ე.ი., გვერდების ჩათვლით) მართკუთხედისთვის (ღერძების პარალელური გვერდებით) სრულდება მარცხენა მხარეში ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ y-ით გაწარმოების პირობები*), გვექნება

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}M(t,y)dt+c'_1(y)=N(x,y)\,.$$

ეს უკანასკნელი, (3.5.5) პირობის თანახმად, შეიძლება შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt+c'_1(y)=N(x,y)\,. \tag{3.5.8}$$

(3.5.8)-ში გამოვთვალოთ ინტეგრალი ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt=N(t,y)\Big|_{t=x_0}^{t=x}=N(x,y)-N(x_0,y)\,. \tag{3.5.9}$$

---

*) **თეორემა 3.5.5**. თუ $M(t,y)$ და მისი კერძო

$$\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}$$

წარმოებული უწყვეტია $x_0\le t\le x$, $c_0\le y\le d_0$ $\left(c<c_0,\,d_0<d\right)$ მართკუთხედზე, მაშინ $[c_0,d_0]$ სეგმენტზე არსებობს

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt$$

წარმოებული და

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt\,.$$

$(3.5.9)$ ჩავსვათ $(3.5.8)$-ში:

$$N(x,y)-N(x_0,y)+c'_1(y)=N(x,y)\,,$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$c'_1(y)=N(x_0,y)\,.$$

აქედან y-ით ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$c_1(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,\tau)d\tau+C\,,\;\; c<y_0<d\,, \tag{3.5.10}$$

სადაც y_0 ნებისმიერი ფიქსირებული, ხოლო C ნებისმიერი მუდმივია. $c_1(y)$-ის $(3.5.10)$ მნიშვნელობას თუ $(3.5.7)$-ში ჩავსვამთ, გვექნება, რომ

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\tau)d\tau+C\,. \tag{3.5.11}$$

ახლა უშუალო დიფერენცირებით (გაწარმოებით) ადვილი დასანახია, რომ აგებული (3.5.11) ფუნქციის სრული დიფერენციალი $(3.5.4)$-ს ემთხვევა. მართლაც, $(3.5.11)$-დან ცხადია, რომ

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y)\,,$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(t,y)}{\partial y}dt+N(x_0,y)$$

$$=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(t,y)}{\partial t}dt+N(x_0,y)=N(x,y)-N(x_0,y)+N(x_0,y)=N(x,y)\,.$$

უკანასკნელ ტოლობებში გამოვიყენეთ $(3.5.5)$.

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ, თუ სრულდება (3.5.5), არსებობს ისეთი $u(x,y)$ ფუნქცია, რომლის სრული დიფერენციალი (3.5.1) განტოლების მარცხენა მხარეა და ის ცხადი (3.5.11) სახით ავაგეთ.

შენიშვნა 3.5.6. ზოგიერთ შემთხვევაში, როცა (3.5.5) პირობა არ სრულდება, შეიძლება მოიძებნოს ისეთი $\mu(x,y)$ მამრავლი, რომ

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

განტოლება იყოს განტოლება სრულ დიფერენციალებში, სხვა სიტყვებით, შესრულდეს ამისთვის აუცილებელი და საკმარისი

$$\frac{\partial \mu(x,y)M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial \mu(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

პირობა. ასეთ $\mu(x,y)$ მამრავლს *მაინტეგრებელი მამრავლი* ეწოდება.