ლექცია 8

3.4. მეორე რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით

განსაზღვრა 3.4.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0 \qquad (3.4.1)$$

სახის განტოლებას, სადაც a_1, a_0 მუდმივებია, ეწოდება *მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით.*

ვეძებოთ (3.4.1) განტოლების ამონახსნი

$$y=e^{\lambda x}, \ \lambda=const, \qquad (3.4.2)$$

სახით. ცხადია,

$$\frac{dy}{dx}=\lambda e^{\lambda x}, \ \frac{d^2y}{dx^2}=\lambda^2e^{\lambda x}. \qquad (3.4.3)$$

(3.4.2)-ის და (3.4.3)-ის გათვალისწინებით, (3.4.1)-დან მივიღებთ, რომ

$$\lambda^2e^{\lambda x}+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0e^{\lambda x}=0 .$$

ვინაიდან $e^{\lambda x}\neq 0$, ამიტომ შეგვიძლია ბოლო განტოლების ორივე მხარის $e^{\lambda x}$-ზე შეკვეცა, რაც მოგვცემს

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0 . \qquad (3.4.4)$$

(3.4.4) ალგებრულ განტოლებას ეწოდება (3.4.1) დიფერენციალური განტოლების *მახასიათებელი განტოლება.*

(3.4.4) არის კვადრატული განტოლება λ-ს მიმართ, ამ განტოლების დისკრიმინანტი

$$D=a_1^2-4a_0.$$

განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

1) $D>0$. ამ შემთხვევაში (3.4.4) განტოლებას აქვს ორი განსხვავებული ნამდვილი

$$\lambda_1=\frac{-a_1+\sqrt{D}}{2} \ \text{ და } \ \lambda_2=\frac{-a_1-\sqrt{D}}{2}$$

ამონახსნი. ცხადია, e^{λ_1x} და e^{λ_2x} (3.4.1)-ის ამონახსნები იქნება.

განსაზღვრა 3.4.2. რაიმე ინტერვალზე განსაზღვრულ ორ $\varphi_1(x)$ და $\varphi_2(x)$ ფუნქციას ეწოდება *წრფივად დამოკიდებული*, თუ არსებობს ისეთი ორი c_1 და c_2 რიცხვი, რომ განხახილველ ინტერვალზე

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)\equiv 0, \qquad (3.4.5)$$

როცა $c_1^2+c_2^2\neq 0.$ თუ (3.4.5) სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $c_1=c_2=0$, მაშინ φ_1 და φ_2-ს ეწოდება *წრფივად დამოუკიდებელი.*

e^{λ_1x} და e^{λ_2x} წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ (3.4.1)-ის ზოგადი ამონახსნი (იხ. §3.8), როცა $D>0$, ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}. \qquad (3.4.6)$$

2) $D=0$. ამ შემთხვევაში (3.4.4) განტოლების ფესვები ერთმანეთს ემთხვევა

$$\lambda=\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a_1}{2}. \qquad (3.4.7)$$

(3.4.1) განტოლების ერთი ამონახსნი იქნება $e^{\lambda t}$, ხოლო მეორე $xe^{\lambda x}$. მართლაც, თუ ჩავსვამთ ბოლო გამოსახულებას (3.4.1)-ში, მივიღებთ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(xe^{\lambda x}\right)+a_1\frac{d}{dx}\left(xe^{\lambda x}\right)+a_0xe^{\lambda x}=2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}+a_1e^{\lambda x}+$$
$$+a_1\lambda xe^{\lambda x}+a_0xe^{\lambda x}=(2\lambda+a_1)e^{\lambda x}+x(\lambda^2+a_1\lambda+a_0)e^{\lambda x}=0,$$

რადგან, (3.4.7)-დან გამომდინარე, $2\lambda+a_1=-2\cdot\frac{a_1}{2}+a_1=0$, ხოლო (3.4.4) ტოლობის ძალით $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$.

$e^{\lambda x}$ და $xe^{\lambda x}$ წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, ამიტომ (3.4.1)-ის ზოგადი ამონახსნი ასე ჩაიწერება

$$y=c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}. \tag{3.4.8}$$

3) $D<0$. ამ შემთხვევაში, რადგან

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2}=\frac{-a_1\pm i\sqrt{-D}}{2}=-\frac{a_1}{2}\pm i\frac{\sqrt{-D}}{2},$$

(3.4.4)-ს აქვს ორი ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური ამონახსნი, რომლებიც ჩაიწერებიან

$$\lambda_1=\alpha+i\beta \quad \text{და} \quad \lambda_2=\alpha-i\beta$$

სახით, სადაც $\alpha:=-\frac{a_1}{2}$, $\beta:=\frac{\sqrt{-D}}{2}\neq 0$, რადგან $-D>0$. (3.4.1)-ის წრფივად დამოუკიდებე-ლი ამონახსნები იქნება $e^{(\alpha+i\beta)x}$ და $e^{(\alpha-i\beta)x}$.

ეილერის [იხ. (1.7.10)]

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$$

ფორმულის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

რამდენადაც (3.4.1) განტოლება ნამდვილკოეფიციენტებიანია, ამიტომ კომპლექსური ამონახ-სნის არსებობიდან გამომდინარეობს, რომ მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, ე. ი.

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{და} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{3.4.9}$$

ასევე მისი ამონახსნები იქნება. მართლაც,

$$\frac{d^2e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)}{dx^2}+a_1\frac{d\,e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)}{dx}+a_0e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)$$
$$=\frac{d^2e^{\alpha x}\cos\beta x}{dx^2}+a_1\frac{d\,e^{\alpha x}\cos\beta x}{dx}+a_0\,e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$\pm i\left(\frac{d^2e^{\alpha x}\sin\beta x}{dx^2}+a_1\frac{d\,e^{\alpha x}\sin\beta x}{dx}+a_0\,e^{\alpha x}\sin\beta x\right)=0.$$

აქედან, რადგან კომპლექსური რიცხვი (ფუნქცია) ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ნულის ტოლია

$$\frac{d^2e^{\alpha x}\cos\beta x}{dx^2}+a_1\frac{d\,e^{\alpha x}\cos\beta x}{dx}+a_0\,e^{\alpha x}\cos\beta x=0$$

და

$$\frac{d^2e^{\alpha x}\sin\beta x}{dx^2}+a_1\frac{d\,e^{\alpha x}\sin\beta x}{dx}+a_0\,e^{\alpha x}\sin\beta x=0.$$

რადგან (3.4.9) ამონახსნებიც წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ (3.4.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნება

$$y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{3.4.10}$$

სახე.

კოშის ამოცანა 3.4.3. ვეძებთ (3.4.1) განტოლების ისეთი ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ საწყის პირობებს

$$y(x_0)=y_0,\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=y_1. \tag{3.4.11}$$

განვიხილოთ კოშის ამოცანა (3.4.1) განტოლებისთვის, როცა $D>0$. თუ (3.4.6)-ს ჩავსვამთ (3.4.11)-ში, c_1 და c_2 მუდმივების განსასაზღვრავად მივიღებთ

$$\begin{cases} c_1e^{\lambda_1x_0}+c_2e^{\lambda_2x_0}=y_0, \\ c_1\lambda_1e^{\lambda_1x_0}+c_2\lambda_2e^{\lambda_2x_0}=y_1, \end{cases} \tag{3.4.12}$$

სისტემას, საიდანაც, კრამერის ფორმულების გამოყენებით, მივიღებთ, რომ

$$c_1=\frac{(\lambda_2y_0-y_1)e^{\lambda_2x_0}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x_0}},\quad c_2=\frac{(y_1-\lambda_1y_0)e^{\lambda_1x_0}}{(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x_0}}.$$

ანალოგიურად განიხილება დანარჩენი ორი შემთხვევა. როცა $D=0$, (3.4.12) სისტემის ნაცვლად გვექნება [იხ (3.4.8)]

$$\begin{cases} c_1e^{\lambda x_0}+c_2x_0e^{\lambda x_0}=y_0, \\ c_1\lambda e^{\lambda x_0}+c_2(1+\lambda x_0)e^{\lambda x_0}=y_1 \end{cases} \tag{3.4.13}$$

სისტემა, ხოლო როცა $D<0$, რადგან [იხ (3.4.10)]

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=c_1\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta c_1e^{\alpha x}\sin\beta x+c_2\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+c_2\beta e^{\alpha x}\cos\beta x\\ &=c_1e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x)+c_2e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x+\beta\cos\beta x),\end{aligned}$$

გვექნება

$$\begin{cases} c_1e^{\alpha x_0}\cos\beta x_0+c_2e^{\alpha x_0}\sin\beta x_0=y_0, \\ c_1e^{\alpha x_0}(\alpha\cos\beta x_0-\beta\sin\beta x_0)+c_2e^{\alpha x_0}(\alpha\sin\beta x_0+\beta\cos\beta x_0)=y_1 \end{cases} \tag{3.4.14}$$

სისტემა. ცხადია, (3.4.13) სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x_0} & x_0e^{\lambda x_0} \\ \lambda e^{\lambda x_0} & (1+\lambda x_0)e^{\lambda x_0} \end{vmatrix}=(1+\lambda x_0)e^{2\lambda x_0}-\lambda x_0e^{2\lambda x_0}=e^{2\lambda x_0},$$

ხოლო (3.4.14) სისტემის დეტერმინანტი

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} e^{\alpha x_0}\cos\beta x_0 & e^{\alpha x_0}\sin\beta x_0 \\ e^{\alpha x_0}(\alpha\cos\beta x_0-\beta\sin\beta x_0) & e^{\alpha x_0}(\alpha\sin\beta x_0+\beta\cos\beta x_0) \end{vmatrix}\\ &=e^{2\alpha x_0}(\alpha\sin\beta x_0\cos\beta x_0+\beta\cos^2\beta x_0)-e^{2\alpha x_0}(\alpha\cos\beta x_0\sin\beta x_0-\beta\sin^2\beta x_0)\\ &=e^{2\alpha x_0}\beta(\cos^2\beta x_0+\sin^2\beta x_0)=\beta e^{2\alpha x_0}.\end{aligned}$$

სამივე შემთხვევაში სისტემის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია. c_1-ის და c_2-ის მნიშვნელობებს ორ უკანასკნელ შემთხვევაშიც კრამერის ფორმულებით დავითვლით.