ლექცია 7

3.2. პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება განცალებად ცვლადებში

განვიხილოთ

$$\frac{dy}{dx} = A(x)B(y) \tag{3.2.1}$$

განტოლება, სადაც $A(x)$ არის x-ის უწყვეტი ფუნქცია, ხოლო $B(y) \neq 0$ y-ის უწყვეტი ფუნქცია, შესაბამისად, $]a,b[$ და $]c,d[$ ინტერვალებზე.

განსაზღვრა 3.2.1. (3.2.1) სახის განტოლებას ეწოდება დიფერენციალური *განტოლება განცალებად ცვლადებში.*

თუ (3.2.1) განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ dx-ზე და გავყოფთ $B(y)$-ზე, მივიღებთ, რომ

$$\frac{dy}{B(y)} = A(x)dx. \tag{3.2.2}$$

რადგან

$$\frac{1}{B(y)} \text{ და } A(x)$$

უწყვეტი ფუნქციებია, არსებობს მათი

$$b(y) = \int \frac{dy}{B(y)} \text{ და } a(x) = \int A(x)dx$$

ანტიწარმოებულები. ასე რომ, (3.2.2) შეიძლება ჩავწეროთ

$$db(y) = da(x)$$

სახით. ორი ფუნქციის (აქ y განხილულია, როგორც x-ის ფუნქცია) დიფერენციალების ტოლობიდან კი გამომდინარეობს, რომ თვით ეს ფუნქციები მუდმივი შესაკრებით განსხვავდებიან, ე. ი.

$$\int \frac{dy}{B(y)} = \int A(x)dx + C, \quad C = const,$$

რომელიც შეიძლება

$$F(x, y) = C \tag{3.2.3}$$

არაცხადი სახით გადავწეროთ, სადაც

$$F(x, y) := \int \frac{dy}{B(y)} - \int A(x)dx.$$

(3.2.3)-ს ეწოდება (3.2.1) განტოლების *ზოგადი ინტეგრალი.* გეომეტრიულად ზოგადი ინტეგრალი წარმოადგენს სიბრტყეზე წირების ერთპარამეტრიან (პარამეტრით C) ოჯახს. მათ ჩვენ დიფერენციალური განტოლების *ინტეგრალურ წირებს* ვუწოდებთ. *ინტეგრალური წირი ამონახსნის გრაფიკია.* C პარამეტრისთვის სხვადასხვა მნიშვნელობების მინიჭებით ვიღებთ განტოლების ყველა ამონახსნს, გარდა, შესაძლებელია, განსაკუთრებული ამონახსნისა. იმავე ტერმინოლოგიას ვიყენებთ უფრო ზოგადი

$$y' = f(x, y) \tag{3.2.4}$$

განტოლებისთვისაც. სახელდობრ, მის ზოგად ამონახსნს და ზოგად ინტეგრალს აქვთ შესაბამისად

$$y = \varphi(x, C) \text{ და } \Phi(x, y, C) = 0$$

სახე. შევნიშნოთ, რომ (3.2.4) განტოლება განსაზღვრავს სიბრტყეში მიმართულებას, ხოლო ინტეგრალური წირის ყოველ წერტილში მხებს განტოლებით განსაზღვრული მიმართულება აქვს.

მაგალითი 3.2.2. განვიხილოთ

$$\frac{dy}{dx} = xy\,, \quad y \neq 0\,, \tag{3.2.5}$$

განტოლება. (3.2.5)-ის ორივე მხარის y-ზე გაყოფისა და dx-ზე გამრავლების შედეგად მივიღებთ, რომ

$$\frac{dy}{y} = xdx\,. \tag{3.2.6}$$

(3.2.6)-ის ინტეგრება (ზემოთ მითითებული აზრით) მოგვცემს (3.2.5)-ის ზოგად ამონახსნს, რომელსაც აქვს

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{\frac{x^2}{2}+c} \quad \Rightarrow \quad y = \pm e^{\frac{x^2}{2}+c} \tag{3.2.7}$$

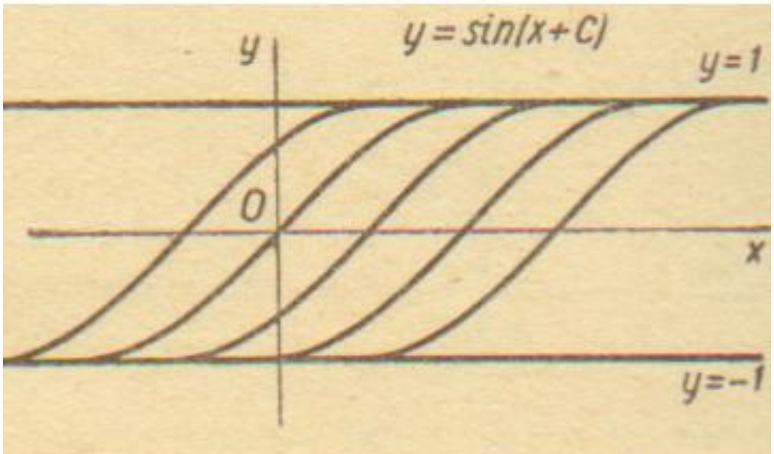
სახე.

მაგალითი 3.2.3.

$$y' = \sqrt{1-y^2}$$

განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს

$$y = \sin(x+C)\,, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x + C \leq \frac{\pi}{2}\,,$$



ნახ. 3.2.1

სახე*). შესაბამისი ინტეგრალური წირები წარმოადგენენ სინუსოიდების ნაჭრების ოჯახს, ხოლო მათი $y=1$ და $y=-1$ მომვლებები – განსაკუთრებულ ამონახსნებს (იხ. ნახ. 3.2.1). ეს მაგალითი იმას გვიჩვენებს, რომ დიფერენციალურ განტოლებას, გარდა ზოგადი ამონახსნისა, შეიძლება გააჩნდეს *განსაკუთრებული ამონახსნებიც*, რომელსაც ზოგადი ამონახსნი არ შეიცავს.

შებრუნებული ამოცანა 3.2.4. ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლება, რომლის ზოგადი ინტეგრალია

$$\Phi(x, y, C) = 0\,. \tag{3.2.8}$$

*) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \arcsin y = x + C \quad \Rightarrow \quad y = \sin(x+C)\,.$

გავაწარმოოთ (3.2.8) x-ის მიმართ*)

$$\Phi'_x(x,y,C)+\Phi'_y(x,y,C)y'=0. \tag{3.2.9}$$

(3.2.8), (3.2.9) სისტემიდან C პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ იმ

$$F(x,y,y')=0$$

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას, რომლის ზოგად ინტეგრალს (3.2.8) წარმოადგენს.

მაგალითი 3.2.5. ვიპოვოთ ის დიფერენციალური განტოლება, რომელსაც აკმაყოფილებს

$$y^2=2Cx \tag{3.2.10}$$

განტოლებით მოცემული პარაბოლების ოჯახი.

(3.2.10) განტოლების x-ის მიმართ გაწარმოებით გვექნება

$$2yy'=2C. \tag{3.2.11}$$

(3.2.11) ტოლობის ორივე მხარის (3.2.10) ტოლობის შესაბამის მხარეებზე გაყოფით C ნებისმიერი მუდმივი გამოირიცხება და მივიღებთ საძიებელ დიფერენციალურ

$$2\frac{y'}{y}=\frac{1}{x},$$

ე. ი.

$$2xy'-y=0$$

განტოლებას.

3.3. პირველი რიგის ერთგვაროვანი განტოლება

განსაზღვრა 3.3.1. პირველი რიგის

$$\frac{dy(x)}{dx}=\varphi(x,y) \tag{3.3.1}$$

დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება *ერთგვაროვანი*, თუ $\varphi(x,y)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც თავისი არგუმენტების შეფარდების ფუნქცია**), ე. ი. თუ

$$\frac{dy(x)}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),\ \ x\neq 0. \tag{3.3.2}$$

თუ შემოვიღებთ

$$t:=\frac{y}{x} \tag{3.3.3}$$

აღნიშვნას, მაშინ (3.3.1) სახის განტოლება დაიყვანება (3.2.1) სახის განტოლებაზე. მართლაც, (3.3.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

---

*) ჩვენ აქ გამოვიყენებთ მრავალი ცვლადის რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს. სახელდობრ, თუ $u=f(x,y)$ და $x=x(t)$, $y=y(t)$ და ყველა ეს ფუნქცია წარმოებადია თავისი ცვლადების მიმართ, შესაბამისად, რაიმე არესა და ინტერვალზე, მაშინ

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad \text{კერძოდ, თუ} \qquad t=x, \qquad \frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

ამ უკანასკნელს u ფუნქციის x-ით *სრული წარმოებული* ეწოდება.

**) ვთქვათ $\xi>0$. $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ ფინქციას ეწოდება λ რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, თუ $\varphi(\xi x_1,\xi x_2,...,\xi x_n)=\xi^\lambda\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$. რადგან $\varphi(\xi x,\xi y)=f\left(\frac{\xi y}{\xi x}\right)=f\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(x,y)$, $\varphi(x,y)$ ფუნქცია ნულოვანი ($\lambda=0$) რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციაა, ამიტომ ეწოდება (3.1.1) განტოლებას ერთგვაროვანი. ამ ტიპის ერთგვაროვანი განტოლება უნდა განვასხვავოთ იმ ერთგვაროვანი განტოლებისაგან, რომელსაც ერთგვაროვანი ეწოდება მისი მარჯვენა მხარის ნულთან ტოლობის გამო.

$$y = tx$$

და

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(tx)}{dx} = t\frac{dx}{dx} + x\frac{dt}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}. \qquad (3.3.4)$$

(3.3.1)-დან, (3.3.2)-ისა და (3.3.3)-ის თანახმად, გვექნება, რომ

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t) \quad \text{ანუ} \quad x\frac{dt}{dx} = f(t) - t,$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x},$$

რომლის ინტეგრება მოგვცემს

$$\int \frac{dt}{f(t)-t} = \ln|x| + c, \quad c = const, \qquad (3.3.5)$$

გამოსახულებას, საიდანაც ვიპოვით t-ს, როგორც x-ის ფუნქციას. მისი $y = xt$ ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ (3.3.1) განტოლების ზოგად ამონახსნს.

(3.3.5)-ში იგულისხმება, რომ $f(t) \neq t$. იმ შემთხვევაში, როცა $f(t) = t$, (3.3.1) განტოლებას აქვს

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad (3.3.6)$$

სახე, რომელსაც მარტივად ამოვხსნით ცვლადთა განცალების მეთოდით. მართლაც,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln|x| + \ln C_1 \;\; (C_1 > 0) \;\Rightarrow\; \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln C_1 \;\Rightarrow\; \frac{y}{x} = \pm C_1 =: C_2 \;\Rightarrow\; y = C_2 x,$$

$$C_2 \neq 0.$$

მეორე მხრივ, $y = 0$ (3.3.6) განტოლების ამონახსნია, რაშიც უშუალოდ განტოლებაში ჩასმით შეიძლება დავრწმუნდეთ. ამდენად, ზოგად ამონახსნს აქვს

$$y = Cx, \quad C \in R^1,$$

სახე. ცხადია, ინტეგრალური წირები ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სისტემის სათავეზე გამავალ წრფეებს წარმოადგენენ.

მაგალითი 3.3.2. განვიხილოთ

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \qquad (3.3.7)$$

განტოლება.

ცხადია, $f(t) = t^2 + t$. (3.3.5)-ის ძალით მივიღებთ, რომ

$$\int \frac{dt}{t^2} = \ln|x| + c \Rightarrow -\frac{1}{t} = \ln|x| + c \Rightarrow -\frac{x}{y} = \ln|x| + c \Rightarrow y = -\frac{x}{\ln|x| + c}. \qquad (3.3.8)$$

(3.3.8) წარმოადგენს (3.3.7) განტოლების ზოგად ამონახსნს.