ლექცია 6

3. დიფერენციალური განტოლებები

3.1 პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები. ბაქტერიების გამრავლების ამოცანა. რადიუმის დაშლის ამოცანა

ამოცანა 3.1.1. ვთქვათ, მატერიალურმა წერტილმა, რომელიც x ღერძის გასწვრივ მოძრაობს, $t = t_0$ მომენტისთვის გაიარა x_0 მანძილი. მისი სიჩქარე დროის ყოველ t მომენტში დავახასიათოთ $f(t)$ ფუნქციით. ვიპოვოთ მატერიალური წერტილის მიერ t დროში გავლილი $x(t) \in C^1\left(\left]t_0, t\right[\right)$ მანძილი.

როგორც ვიცით, განვლილი $x(t)$ მანძილის t-თი წარმოებული არის დროის t მომენტში მყისიერი სიჩქარე, ე. ი.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t). \tag{3.1.1}$$

ამოცანა 3.1.2. ბაქტერიების გამრავლების ამოცანა.

B-თი აღვნიშნოთ ბაქტერიების რაოდენობა. მისი დროით წარმოებული ახასიათებს ბაქტერიების გამრავლებას და წარმოადგენს გამრავლების სიჩქარეს. ექსპერიმენტით დადგენილია, რომ ბაქტერიების გამრავლება, თუ გამრავლების ხელშემშლელი რაიმე პირობები არ არსებობს, მათ რაოდენობაზეა დამოკიდებული და გარკვეულ პირობებში ეს დამოკიდებულება პირდაპირ პროპორციულია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{dB(t)}{dt} = cB(t) \tag{3.1.2}$$

სახით, სადაც $c > 0$ მუდმივი პროპორციულობის კოეფიციენტია, რომელიც გარემოზეა დამოკიდებული. ვიპოვოთ ბაქტერიების $B(t) \in C^1\left(\left]t_0, t\right[\right)$ რაოდენობა დროის ნებისმიერ t მომენტში, თუ ცნობილია მათი B_0 რაოდენობა დროის $t = t_0$ მომენტში.

ამოცანა 3.1.3. განვიხილოთ რადიუმის დაშლის ამოცანა.

ექსპერიმენტით დადგენილია, რომ რადიუმის დაშლის სიჩქარე დაშლამდე ნივთიერების რაოდენობის პროპორციულია. ვთქვათ, R ნივთიერების რაოდენობაა. რადიუმის დაშლის სიჩქარე დროის მოცემულ t მომენტში ტოლია ნივთიერების R რაოდენობის t დროით წარმოებულის, ე. ი. $\dfrac{dR}{dt}$-სი. ამიტომ რადიუმის დაშლის ამოცანა შემდეგ

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \tag{3.1.3}$$

განტოლებაზე დაიყვანება, სადაც $k > 0$ პროპორციულობის კოეფიციენტია. „ $-$ “ ნიშანი აღებულია იმის გამო, რომ t დროის ზრდასთან ერთად ნივთიერების რაოდენობა მცირდება. ვიპოვოთ რადიუმის $R(t) \in C^1\left(\left]t_0, t\right[\right)$ რაოდენობა დროის ნებისმიერ t მომენტში, თუ ცნობილია მისი R_0 რაოდენობა დროის $t = t_0$ მომენტში.

განსაზღვრა 3.1.4. განტოლებას, რომელიც უცნობი (საძიებელი) ფუნქციის წარმოებულებს შეიცავს, ეწოდება *დიფერენციალური განტოლება*, ხოლო წარმოებულების უმაღლეს რიგს – *დიფერენციალური განტოლების რიგი.*

(3.1.1) – (3.1.3) განტოლებები პირველი რიგის წრფივი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებია.

განსაზღვრა 3.1.5. *დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ეწოდება* ფუნქციას, რომელიც მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებაში ჩასმით მას იგივეობად აქცევს.

განსაზღვრა 3.1.6. (3.1.1), (3.1.2) ან (3.1.3) სახის დიფერენციალური განტოლების *ზოგადი ამონახსნი ეწოდება* ისეთ ფუნქციათა ოჯახს, რომელიც, გარდა t ცვლადისა, დამოკიდებულია ერთ ნებისმიერ მუდმივზეც და რომლის განტოლებაში ჩასმით იგივეობას მივიღებთ.

პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს უამრავი ამონახსნი, რომლებსაც მივიღებთ, თუ მის ზოგად ამონახსნში შემავალ მუდმივს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას მივანიჭებთ. ამ გზით მიღებულ ამონახსნებს მოცემული განტოლების *კერძო ამონახსნები* ეწოდება.

ამოვხსნათ ჩვენ მიერ დასმული ამოცანები.

ამოცანა 3.1.1-ის ამოხსნა. ვთქვათ, $f(t)$ ფუნქცია განსახილველ ინტერვალზე ინტეგრებადია. (3.1.1) განტოლება ამოიხსნება უშუალო ინტეგრებით

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau + c, \quad c = const. \tag{3.1.4}$$

(3.1.4) არის (3.1.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რადგან ის ნებისმიერ მუდმივ შესაკრებს შეიცავს.

ვიპოვოთ (3.1.1) განტოლების ისეთი $x(t)$ ამონახსნი, რომელიც $t=t_0$ მომენტში აკმაყოფილებს

$$x(t_0)=x_0 \tag{3.1.5}$$

პირობას.

თუ (3.1.4)-ში t-ს ნაცვლად ჩავსვამთ t_0-ს, მივიღებთ

$$x_0 = x(t_0)=\int_{t_0}^{t_0} f(\tau)d\tau + c = c.$$

(3.1.5) პირობას საწყისი პირობა ეწოდება.

განსაზღვრა 3.1.7. ამოცანას, როცა ვეძებთ დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს საწყისი პირობის გათვალისწინებით, *კოშის ამოცანა* ეწოდება.

ცხადია, (3.1.1), (3.1.5) ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც ჩაიწერება

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} f(t)dt + x_0$$

სახით.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, (3.1.1)-ში $f(t)=1$, მაშინ (3.1.1), (3.1.5) ამოცანის ამონახსნს ექნება

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} dt + x_0 = (t-t_0)+x_0$$

სახე.

ამოცანა 3.1.2-ის ამოხსნა. (3.1.2) განტოლების ორივე მხარე გავყოთ B-ზე და გავამრავლოთ dt-ზე, მივიღებთ

$$\frac{dB}{B}=cdt.$$

უკანასკნელი ტოლობის ინტეგრების შედეგად მივიღებთ [იხ. ქვემოთ (3.2.2)]:

$$\int\frac{dB}{B}=\int cdt + a,\ \ a=const \ \Rightarrow\ \ln B = ct + a \ \Rightarrow\ B(t)=e^{ct+a}=be^{ct}, \tag{3.1.6}$$

სადაც $b := e^{a}$.

(3.1.6) არის (3.1.2) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რადგან ის ნებისმიერ მუდმივ b მამრავლს შეიცავს.

დავსვათ კოშის ამოცანა: ვიპოვოთ $(3.1.2)$ განტოლების ისეთი $B(t)$ ამონახსნი, რომელიც დააკმაყოფილებს

$$B(t_0) = B_0 \tag{3.1.7}$$

საწყის პირობას.

ამოცანა ამოხსნილი იქნება, თუ $(3.1.2)$ განტოლების ზოგად $(3.1.6)$ ამონახსნში b-ს ისე შევარჩევთ, რომ შესრულდეს $(3.1.7)$ პირობა. ამისთვის $(3.1.6)$-ში ჩავსვათ $t = t_0$ და გავითვალისწინოთ $(3.1.7)$:

$$B_0 = B(t_0) = be^{ct_0} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{B_0}{e^{ct_0}}.$$

ამრიგად, $(3.1.2)$, $(3.1.7)$ კოშის ამოცანის ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$B(t) = \frac{B_0}{e^{ct_0}} e^{ct} = B_0 e^{c(t-t_0)}.$$

ამოცანა 3.1.3-ის ამონახსნი ანალოგიურად მიიღება და მას

$$R = R_0 e^{-k(t-t_0)}$$

სახე ექნება, სადაც

$$R_0 = R(t_0).$$

განსაზღვრა 3.1.8. განვიხილოთ

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = 0 \tag{3.1.8}$$

განტოლება, სადაც $A(t)$ მოცემული, განსახილველ ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქციაა, $x(t)$ საძიებელი ფუნქციაა. $(3.1.8)$ სახის განტოლებას, რომელიც საძიებელ ფუნქციას და მის პირველი რიგის წარმოებულს წრფივად (ე. ი. პირველ ხარისხში) შეიცავს, *პირველი რიგის წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება.

ზოგადი ამონახსნის მოსაძებნად $(3.1.8)$ განტოლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A(t)x(t). \tag{3.1.9}$$

$(3.1.9)$-ის ორივე მხარე გავყოთ $x(t)$-ზე და გავამრავლოთ dt-ზე, ცხადია

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = -A(t)dt,$$

საიდანაც ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ

$$\ln|x(t)| = -\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + c, \text{ სადაც } c = const.$$

აქედან, პოტენცირებით გვექნება,

$$|x(t)| = e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + c} = e^c e^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}.$$

ამდენად,

$$x(t) = Ce^{-\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}, \text{ სადაც } C := \pm e^c = const. \tag{3.1.10}$$

ნიშანი „+“ ან „-“ $(3.1.10)$-ში აიღება იმისდა მიხედვით, $x(t) > 0$ თუ $x(t) < 0$, როცა $t > t_0$.

$(3.1.10)$ არის $(3.1.8)$-ის ზოგადი ამონახსნი.

განსაზღვრა 3.1.9.

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = f(t) \tag{3.1.11}$$

დიფერენციალურ განტოლებას, სადაც $f(t)$ მოცემული, განსახილველ ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქციაა, *პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლება* ეწოდება. $f(t)$ ფუნქციას

განტოლების *მარჯვენა მხარე* ეწოდება (თუ $f(t) \equiv 0$, მაშინ, ცხადია, (3.1.11) წარმოადგენს ერთგვაროვან განტოლებას).

მუდმივის ვარიაციის მეთოდის გამოყენებით ვიპოვოთ (3.1.11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს: (3.1.10)-ში ჩავთვალოთ, რომ C არის t-ს ფუნქცია და $C(t)$ შევარჩიოთ ისე, რომ (3.1.10)-მა დააკმაყოფილოს (3.1.11). ამისთვის (3.1.10), სადაც $C = C(t)$, ჩავსვათ (3.1.11)-ში:

$$\frac{d}{dt}\left[C(t)e^{-\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}\right] + A(t)C(t)e^{-\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau} = f(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{-\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau} - C(t)e^{-\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}A(t) + A(t)C(t)e^{-\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau} = f(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = f(t)e^{\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau} \quad \Rightarrow \quad C(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)e^{\int_{t_0}^{s}A(\tau)d\tau}ds + c, \quad c = const. \quad (3.1.12)$$

თუ (3.1.10)-ში (3.1.12)-ს შევიტანთ, მივიღებთ (3.1.11) განტოლების შემდეგ *ზოგად ამონახსნს*

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}\left[\int_{t_0}^{t} f(s)e^{\int_{t_0}^{s}A(\tau)d\tau}ds + c\right]. \quad (3.1.13)$$

c მუდმივის განსასაზღვრავად უნდა განვიხილოთ კოშის ამოცანა, რომელსაც (3.1.11), (3.1.5) სახე ექნება. (3.1.5)-ის გათვალისწინებით, (3.1.13)-დან გვექნება, რომ

$$x_0 = x(t_0) = c\,. \quad (3.1.14)$$

თუ (3.1.14) ტოლობით განსზღვრულ c-ს მნიშვნელობას (3.1.13)-ში ჩავსვამთ, მივიღებთ (3.1.11), (3.1.5) კოშის ამოცანის

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau}\left[\int_{t_0}^{t} f(s)e^{\int_{t_0}^{s}A(\tau)d\tau}ds + x_0\right]$$

ამონახსნს, რომელიც ერთადერთია.