# ლექცია 5

## 2. კომპლექსური რიცხვები

### 2.1. კომპლექსური რიცხვის ცნება

მათემატიკის განვითარებამ და მისმა პრაქტიკულმა გამოყენებამ აუცილებელი გახადა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება. მაგალითად,

$$x^2+1=0 \tag{2.1.1}$$

განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არ აქვს. შევეცადოთ, გავაფართოოთ რიცხვის ცნება ისე, რომ (2.1.1) განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნი. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ასეთ გაფართოებას ვუწოდოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე.

**განსაზღვრა 2.1.1.** *კომპლექსური რიცხვები* ფორმალურად შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დალაგებულ რიცხვთა წყვილი $(a,b)$, რომელიც აღინიშნება $z$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$z:=(a,b), \tag{2.1.2}$$

რომლისთვისაც განმარტებულია ტოლობა და ძირითადი არითმეტიკული მოქმედებები: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა.

**განსაზღვრა 2.1.2**. (2.1.2)-ში $a$-ს ეწოდება $z$ *კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი*, ხოლო $b$-ს *წარმოსახვითი ნაწილი* და აღინიშნება შემდეგნაირად: $a=\operatorname{Re} z,\quad b=\operatorname{Im} z$.

**განსაზღვრა 2.1.3.** ვიტყვით, რომ $z=(a,b)$ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლია, ე. ი. $z=0$, თუ $a=0$ და $b=0$.

როცა $b=0$, მაშინ

$$(a,0)=:a, \tag{2.1.3}$$

ე. ი. ნამდვილ რიცხვთა $R$ სიმრავლე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კომპლექსურ რიცხვთა $C$ სიმრავლის ქვესიმრავლე.

**განსაზღვრა 2.1.4.** *ორ კომპლექსურ* $z_1=(a_1,b_1)$ *და* $z_2=(a_2,b_2)$ *რიცხვს ეწოდება ტოლი* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1=a_2$ და $b_1=b_2$.

კომპლექსურ რიცხვებზე განვმარტოთ არითმეტიკული მოქმედებები.

**განსაზღვრა 2.1.5.** *ორი კომპლექსური* $z_1=(a_1,b_1)$ *და* $z_2=(a_2,b_2)$ *რიცხვის ჯამი* ეწოდება შემდეგი სახის კომპლექსურ რიცხვს

$$z=z_1+z_2:=(a_1+a_2,b_1+b_2), \tag{2.1.4}$$

ხოლო *ნამრავლი* ეწოდება $z$ კომპლექსურ რიცხვს, რომელსაც აქვს

$$z=z_1\cdot z_2:=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1) \tag{2.1.5}$$

სახე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ კომპლექსური რიცხვების ჯამს და ნამრავლს აქვს ნამდვილი რიცხვების ჯამისა და ნამრავლის ანალოგიური თვისებები.

**განსაზღვრა 2.1.6.** *ორი* $z_1=(a_1,b_1)$ *და* $z_2=(a_2,b_2)$ *კომპლექსური რიცხვის სხვაობა* ეწოდება ისეთ კომპლექსურ $z$ რიცხვს, რომელსაც დამატებული $z_2$ მოგვცემს $z_1$-ს, $(z+z_2=z_1)$, რაც, (2.1.2)-ის თანახმად, იმას ნიშნავს, რომ $a+a_2=a_1$, $b+b_2=b_1$. აქედან $a=a_1-a_2$, $b=b_1-b_2$ და მივიღებთ, რომ

$$z=z_1-z_2=(a_1-a_2,b_1-b_2). \tag{2.1.6}$$

**განსაზღვრა 2.1.7.** *ორი კომპლექსური* $z_1=(a_1,b_1)$ *და* $z_2=(a_2,b_2)$, $z_2\neq(0,0)$, *რიცხვის ფარდობა (შეფარდება)* ეწოდება ისეთ $z=(a,b)$ კომპლექსურ რიცხვს, რომლის $z_2$-ზე გამრავლებით მივიღებთ $z_1$-ს, ანუ

$$z_1=z\cdot z_2=(a,b)(a_2,b_2)=(aa_2-bb_2,ab_2+a_2b),$$

მეორე მხრივ, $z_1 = (a_1, b_1)$. ვიცით, რომ ორი კომპლექური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ტოლია, ე. ი. მივიღებთ,

$$\begin{cases} aa_2 - bb_2 = a_1\,, \\ ab_2 + a_2 b = b_1\,. \end{cases}$$

ამოვხსნით რა მიღებულ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას $a$ და $b$-ს მიმართ, დავადგენთ, რომ

$$a = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad , \quad b = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი რიცხვი

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right). \tag{2.1.7}$$

**განსაზღვრა 2.1.8.** (0,1) რიცხვს, რომელიც აღინიშნება $i$ სიმბოლოთი, *წარმოსახვითი ერთეული* ეწოდება:

$$(0,1) =: i\,. \tag{2.1.8}$$

თუ ამ რიცხვს გავამრავლებთ თავის თავზე, მაშინ, ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის განმარტების ძალით, გვექნება:

$$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1\,, \text{ ე. ი. } i^2 = -1. \tag{2.1.9}$$

ახლა შევეცადოთ, მოვძებნოთ (2.1.1) განტოლების ამონახსნი კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში. (2.1.1) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x^2 = -1.$$

(2.1.9)-ის თანახმად, რიცხვი, რომლის კვადრატიც უდრის (-1)-ს, არის $i$, ე. ი. თუ გავითვალისწინებთ იმასაც, რომ $-i = (-1)i$ და, ამდენად, $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$, (2.1.1) განტოლების ამონახსნი არის $x = \pm i$.

(2.1.5)-ის, (2.1.3)-ის და (2.1.8)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$i \cdot b = (0,1)(b,0) = (0-0, b+0) = (0,b)\,.$$

აქედან კი

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib\,.$$

შემდგომში კომპლექსური $z = (a,b)$ რიცხვისთვის ვისარგებლებთ $z = a + ib$ წარმოდგენით, რომელსაც *კომპლექსური რიცხვის ალგებრული სახე* ეწოდება. კომპლექსური რიცხვის ასეთი წარმოდგენა და ის გარემოება, რომ $i^2 = -1$, საშუალებას გვაძლევს, $i$ სიმბოლოზე ვიმოქმედოთ ისე, როგორც რიცხვზე.

ახალ აღნიშვნებში (2.1.4) – (2.1.7) შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)\,,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)\cdot(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)\,,$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)\,,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\,, \quad z_2 = a_2 + ib_2 \neq 0\,.$$

**განსაზღვრა 2.1.9.** $\bar{z} = a - bi$ სახის კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $z = a + ib$ *კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული.*

ცხადია, სამართლიანია $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ ტოლობა.

ადვილი შესამოწმებელია კომპლექსური რიცხვების შემდეგი თვისებები:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2\,,$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2\,,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \quad z_2 \neq 0 = 0 + i0 = (0,0),$$

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

**შენიშვნა 2.1.10.** ორი კომპლექსური რიცხვის შეფარდების გამოთვლის დროს მოხერხებულია მნიშვნელისა და მრიცხველის მნიშვნელის შეუღლებულ რიცხვზე გამრავლება:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

## 2.2. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული წარმოდგენა

განვიხილოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე და დავუკავშიროთ იგი სიბრტყის წერტილებს.

განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის აბსცისთა ღერძი შევუსაბამოთ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს, ხოლო ორდინატთა ღერძი – წარმოსახვით ნაწილს. ასეთი კოორდინატთა სისტემის ყოველი $M(a,b)$ წერტილი (*აფიქსი*) შევუსაბამოთ კომპლექსურ $z = a + bi$ რიცხვს. ცხადია, ეს შესაბამისობა ცალსახაა და საკოორდინატო სისტემა სიბრტყეში წარმოქმნის *კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეს.*

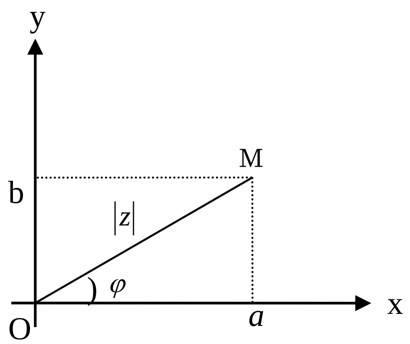
**განსაზღვრა 2.2.1.** $z = a + bi$ *კომპლექსური რიცხვის მოდული* (აღინიშნება $r$-ით ან $|z|$-ით) ეწოდება მანძილს კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეზე $z$ წერტილიდან სათავემდე (იხ. ნახ. 2.2.1).

ცხადია,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

ადვილი დასანახია, რომ ნამდვილი $z = a + 0i$ რიცხვის მოდული ემთხვევა $a$ რიცხვის აბსოლუტურ სიდიდეს. მართლაც,

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$




ნახ. 2.2.1.

**განსაზღვრა 2.2.2.** $z \neq 0$ *კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი* (აღინიშნება ასე $\varphi$ ან $\arg z$) ეწოდება საკოორდინატო სიბრტყეზე $z$ წერტილისა და სათავის შემაერთებელ წრფესა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძის დადებით მიმართულებას შორის კუთხეს. $\varphi$ კუთხის ათვლის დადებით მიმართულებად მიღებულია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულება.

ნახ. 2.2.1-დან ცხადია, რომ, სინუსისა და კოსინუსის განმარტების თანახმად,

$$a = r\cos\varphi \quad \text{და} \quad b = r\sin\varphi,$$

ამდენად,

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2.2.1)$$

(2.2.1) ჩანაწერს ეწოდება *კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული წარმოდგენა.*

თუ გამოვიყენებთ *ეილერის* $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ *ფორმულას,* (2.2.1) შეიძლება ჩავწეროთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის საშუალებით

$$z = re^{i\varphi}$$

სახით.

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით ჩაწერილი ორი კომპლექსური

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ და } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

რიცხვი. სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\left[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right],$$

$$\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (2.2.2)$$

სადაც $n \in N$, $N$ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

(2.2.2) ფორმულას *მუავრის*[*)] *ფორმულა* ეწოდება.

[*)] ა. დე მუავრი (1667 – 1754) – ინგლისელი მათემატიკოსი.