ლექცია 4

1.8. ფურიეს[*)] ტრიგონომეტრიული მწკრივები.

განსაზღვრა 1.8.1.

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nx+B_n\sin nx\right) \tag{1.8.1}$$

სახის მწკრივს, სადაც

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \tag{1.8.2}$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, \tag{1.8.3}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, \tag{1.8.4}$$

$f(x)$ *ფუნქციის ტრიგონომეტრიული მწკრივი*, ხოლო A_n, $n=0,1,2,\dots$, B_n, $n=1,2,\dots$, კოეფიციენტებს *ფურიეს კოეფიციენტები* ეწოდება.

***თეორემა* 1.8.2**. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე, გარდა, შესაძლებელია, სასრული რაოდენობის პირველი გვარის წყვეტის წერტილებისა [ე. ი. წყვეტის x_0 წერტილში არსებობს $f(x_0-0)$ მარცხენა და $f(x_0+0)$ მარჯვენა ზღვარი და $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$] და აქვს ექსტრემუმის (მაქსიმუმისა და მინიმუმის) წერტილების სასრული რაოდენობა, მაშინ (1.8.1) ტრიგონომეტრიული მწკრივი $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილში მისკენ კრებადია, წყვეტის წერტილში იღებს

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$$

მნიშვნელობას, ხოლო სეგმენტის $-\pi$ და π ბოლო წერტილებში –

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$$

მნიშვნელობას.

$[-\pi,\pi]$ სეგმენტს მიღმა $f(x)$ ფუნქცია და მისი შესაბამისი (1.8.1) ტრიგონომეტრიული მწკრივი შეიძლება 2π პერიოდით გავაგრძელოთ. ასეთი გაგრძელება მოგვცემს მთელ ღერძზე უწყვეტ ფუნქციას, თუ $f(x)$ უწყვეტია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე (ეს ასე ჩაიწერება: $f(x)\in C[-\pi,\pi]$) და $\pm\pi$ წერტილებში იღებს ტოლ მნიშვნელობებს.

ამ თეორემის დამტკიცება ჩვენი კურსის მიზნებს სცილდება.

***ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა* 1.8.3**. თუ $f(x),g(x)\in C^1[a,b]$ (ე. ი. f და g ფუნქციებს $[a,b]$ სეგმენტზე უწყვეტი პირველი რიგის წარმოებულები აქვს და, აქედან გამომდინარე, უწყვეტი ფუნქციებია $[a,b]$-ზე), მაშინ

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x). \tag{1.8.5}$$

დამტკიცება. მართლაც, ნიუტონ[**)]-ლაიბნიცის[***)] ფორმულის თანახმად,

---

[*)] ჟ. ბ. ჟ. ფურიე (1768 – 1830) – ფრანგი მათემატიკოსი.

[**)] ი. ნიუტონი (1643 – 1727) – ინგლისელი ფიზიკოსი და მათემატიკოსი.

$$f(x)g(x)\Big|_a^b=\int_a^b d\big[f(x)g(x)\big]=\int_a^b\big[g(x)df(x)+f(x)dg(x)\big]$$
$$=\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)\,. \qquad (1.8.6)$$

ახლა, თუ (1.8.6) ტოლობიდან მისი მარჯვენა მხარის პირველ შესაკრებს განვსაზღვრავთ, მივიღებთ (1.8.5)-ს.

თეორემა 1.8.4. თუ $f\in C^2\left[-\pi,\pi\right]$ (ე. ი. f-ს აქვს მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი წარმოებულები), $f(\pi)=f(-\pi)$ და $f'(\pi)=f'(-\pi)$, მაშინ (1.8.1) ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $\left[-\pi,\pi\right]$ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$M:=\max_{[-\pi,\pi]}\left|f''(x)\right|.$$

(1.8.3)-ში მოვახდინოთ ნაწილობრივი ინტეგრება და გავითვალისწინოთ, რომ დიფერენციალი

$$df(x)=f'(x)dx,$$

მაშინ

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)d\sin nx=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left[f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdf(x)\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\left[0-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nxdx\right]=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)d\cos nx$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[f'(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdf'(x)\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[f'(\pi)\cos n\pi-f'(-\pi)\cos(-n\pi)-\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nxdx\right] \qquad (1.8.7)$$
$$=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nxdx,$$

რადგან

$$f'(\pi)=f'(-\pi)\ \text{ და }\ \cos n\pi=\cos(-n\pi)\,.$$

ანალოგიურად, რადგან $f(\pi)=f(-\pi)$, გვექნება

$$B_n=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nxdx. \qquad (1.8.8)$$

(1.8.7)-დან და (1.8.8)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\left|A_n\cos nx\right|\le\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}2\pi M=\frac{2M}{n^2},$$
$$\left|B_n\sin nx\right|\le\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}2\pi M=\frac{2M}{n^2}\,.$$

საიდანაც

$$\left|A_n\cos nx+B_n\sin nx\right|\le\frac{4M}{n^2},\ \ n=1,2,\ldots. \qquad (1.8.9)$$

როგორც ეს მაგალითი 1.6.13-ის განხილვისას ვნახეთ, მწკრივი, რომლის ზოგადი წევრია

***) გ. ვ. ლაიბნიცი (1646 – 1716) – გერმანელი ფილოსოფოსი-იდეალისტი, მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და გამომგონებელი.

$$\frac{1}{n^2},$$

კრებადია. ამდენად, კრებადი იქნება $4M$ მუდმივზე (ე. ი. სიდიდეზე, რომელიც n-ზე არ არის დამოკიდებული) გამრავლებული

$$\frac{4M}{n^2}$$

ზოგადი წევრის მქონე მწკრივიც. მაშინ, (1.8.9)-ის გამო, შედარების 1.6.5 პრინციპის თანახმად, $[-\pi,\pi]$-ზე თანაბრად კრებადი იქნება (1.8.1) მწკრივიც.

თეორემა 1.8.5. თუ $f(x)$ $[-\pi,\pi]$-ზე კენტი ფუნქციაა, ე. ი.

$$f(-x)=-f(x), \tag{1.8.10}$$

მაშინ

$$A_n=0,\ \ n=0,1,\dots. \tag{1.8.11}$$

ხოლო თუ ლუწია, ე. ი.

$$f(-x)=f(x), \tag{1.8.12}$$

მაშინ

$$B_n=0,\ \ n=1,2,\dots. \tag{1.8.13}$$

დამტკიცება. მართლაც, (1.8.2)-დან და (1.8.10)-დან გვექნება, რომ

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(-x)d(-x)+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{\pi}^{0}f(t)dt+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]=\frac{1}{2\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}f(t)dt+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right]=0.$$

ამ გამოთვლებში ჩვენ კვადრატულ ფრჩხილებში მოყვანილ პირველ ინტეგრალში ჯერ გამოვიყენეთ (1.8.10) ფორმულა, შემდეგ მოვახდინეთ

$$-x=t$$

ჩასმა (საინტეგრაციო ცვლადის შეცვლა) და გავითვალისწინეთ, რომ

$$\int_{\pi}^{0}f(t)dt=-\int_{0}^{\pi}f(t)dt.$$

შევნიშნოთ, რომ, ფაქტობრივად, დავამტკიცეთ ზოგადი ფაქტი: *სიმეტრიულ საზღვრებში კენტი ფუნქციიდან აღებული ინტეგრალი ნულის ტოლია.*

როცა $f(x)$ კენტი ფუნქციაა, კოსინუსის ლუწობის გამო, $f(x)\cos nx$ ფუნქციაც კენტი იქნება და მისგან სიმეტრიულ საზღვრებში აღებული ინტეგრალიც ნულის ტოლია, ე. ი.

$$A_n=0,\ \ n=1,2,\dots.$$

ანალოგიურად, როცა $f(x)$ ლუწია, $f(x)\sin nx$ ფუნქცია, სინუსის კენტობის გამო, კენტია და (1.8.4)-დან გვექნება, რომ

$$B_n=0,\ \ n=1,2,\dots.$$

შედეგი 1.8.6. თუ $f(x)$ $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე კენტი ფუნქციაა, მის ფურიეს მწკრივს აქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx$$

სახე (ე. ი. მხოლოდ სინუსების მწკრივად იშლება), ხოლო როცა $f(x)$ ლუწია, მის ფურიეს მწკრივს აქვს

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$$

სახე (ე. ი. მხოლოდ კოსინუსების მწკრივად იშლება).

თუ $F(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-L,L]$ სეგმენტზე, მაშინ

$$x = \frac{\pi}{L}t \quad \left(t = \frac{L}{\pi}x\right) \tag{1.8.14}$$

ცვლადთა გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ x-ის $f(x) = F\left(\frac{L}{\pi}x\right)$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრული იქნება $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე, რადგან, $(1.8.14)$-ის ძალით, $t=-L$ მნიშვნელობას შეესაბამება $x=-\pi$ მნიშვნელობა, ხოლო $t=L$ მნიშვნელობას – $x=\pi$ მნიშვნელობა. ამდენად, მის შესაბამის ფურიეს მწკრივს ექნება (1.8.1) სახე. ახლა, თუ t ცვლადს (1.8.14) ტოლობით დავუბრუნდებით, დავასკვნით, რომ $F(t)$ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიულ მწკრივს $[-L,L]$ სეგმენტზე ექნება

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{L}t + B_n \sin\frac{n\pi}{L}t\right) \tag{1.8.15}$$

სახე, სადაც

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(t)dt\,, \tag{1.8.16}$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\cos\frac{n\pi\, t}{L}dt\,,\ \ n=1,2,\ldots, \tag{1.8.17}$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\sin\frac{n\pi\, t}{L}dt\,,\ \ n=1,2,\ldots. \tag{1.8.18}$$

მართლაც, (1.8.15) მიიღება (1.8.1)-დან, თუ იქ (1.8.14)-ს ჩავსვამთ. (1.8.16) – (1.8.18) მიიღება

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{L}{\pi}x\right)dx\,,\ \ A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{L}{\pi}x\right)\cos nxdx\,,$$
$$n=1,2,\ldots,$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{L}{\pi}x\right)\sin nxdx\,,\ \ n=1,2,\ldots,$$

გამოსახულებებიდან, თუ ბოლო ინტეგრალებში (1.8.14) ჩასმას მოვახდენთ:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} F(t)d\frac{\pi}{L}t = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(t)dt\,,\quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} F(t)\cos\frac{n\pi}{L}td\frac{\pi}{L}t = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\cos\frac{n\pi}{L}tdt\,,$$
$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\sin\frac{n\pi}{L}td\frac{\pi}{L}t = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(t)\sin\frac{n\pi}{L}tdt\,.$$

შენიშვნა 1.8.7. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[-\pi,\pi]$ სეგმენტზე, სასრული რაოდენობის მაქსიმუმებსა და მინიმუმებს აღწევს და სეგმენტის ბოლოებში ტოლ მნიშვნელობებს იღებს, მაშინ, თეორემა 1.8.2-ის თანახმად,

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos nx + B_n \sin nx\right),\ \ x\in[-\pi,\pi], \tag{1.8.19}$$

სადაც კოეფიციენტებს აქვთ (1.8.2)-(1.8.4) სახე.

ახლა, ვთქვათ, სრულდება $(1.8.19)$ ტოლობა რაიმე A_n, $n=0,1,2,\ldots$; B_n, $n=1,2,\ldots$, კოეფიციენტებისთვის და მწკრივი თანაბრად კრებადია. მაშინ $(1.8.19)$ მწკრივის შემოსაზღვრულ $\cos mx$, $m=0,1,2,\ldots$, $(|\cos mx| \le 1)$ ფუნქციაზე გამრავლების შემდეგ კვლავ თანაბრად კრებად მწკრივს მივიღებთ. თეორემა 1.6.8-ის ძალით, შეიძლება მისი წევრ-წევრა ინტეგრება და ინტეგრალების ჯამი ჯამის ინტეგრალის ტოლი იქნება:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = A_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + B_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right). \tag{1.8.20}$$

თუ გავითვალისწინებთ

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

ფორმულებს, ნებისმიერი ნატურალური ან ნულის ტოლი m და n-ისათვის მივიღებთ, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx + \frac{1}{n+m}\int_{-\pi}^{\pi} d\sin(n+m)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx = \begin{cases} 0, \text{ როცა } n \neq m, \\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi, \text{ როცა } n = m \neq 0. \end{cases} \tag{1.8.21}$$

ანალოგიურად,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, \text{ როცა } n \neq m, \\ \pi, \text{ როცა } n = m \neq 0. \end{cases} \tag{1.8.22}$$

გარდა ამისა,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0, \tag{1.8.23}$$

რადგან $\sin nx \cos mx$ ნამრავლი x ცვლადის მიმართ კენტი ფუნქციაა, როცა $n \neq 0$, ხოლო როცა $n = 0$ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ნულის ტოლია.

თუ $m > 0$, (1.8.20)-დან, (1.8.21)-ისა და (1.8.23)-ის თანახმად,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = A_m \pi, \text{ როცა } n = m,$$

რადგან

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} d\sin mx = \frac{1}{m}[\sin m\pi - \sin(-m\pi)] = \frac{1}{m}(0-0) = 0$$

[ეს უკანასკნელი უშუალოდ გამომდინარეობს (1.8.21)-დანაც, როცა $n = 0$ და $m > 0$].
ე. ი.

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx.$$

თუ $m = 0$, (1.8.20)-დან, (1.8.21)-ისა და (1.8.23)-ის თანახმად, გამომდინარეობს, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0 dx = A_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 dx = 2\pi A_0,$$

საიდანაც

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

თუ $(1.8.19)$-ის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $\sin mx$, $m=1,2,\ldots$ $(|\sin mx|\le 1)$, შემოსაზღვრულ ფუნქციაზე, მიღებულს $-\pi$-დან π-მდე ვაინტეგრებთ და გავითვალისწინებთ $(1.8.22)$ და $(1.8.23)$ ფორმულებს, გვექნება, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx = B_m\pi \ , \quad \text{როცა} \quad n=m,$$

რადგან

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx dx = -\frac{1}{m}\int_{-\pi}^{\pi} d\cos mx = -\frac{1}{m}\left[\cos m\pi-\cos(-m\pi)\right] = -\frac{1}{m}[(-1)^m-(-1)^m]=0$$

[ეს უკანასკნელი უშუალოდ გამომდინარეობს, აგრეთვე, როგორც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის კენტობიდან, ასევე $(1.8.23)$-დან, როცა $m=0$ და $n>0$].

ამდენად,

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx .$$

ამრიგად, როგორც მოსალოდნელი იყო, ფურიეს კოეფიციენტებისთვის მივიღეთ $(1.8.2)$ – $(1.8.4)$ ფორმულები.

განსაზღვრა 1.8.8. $[a,b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ინტეგრებად ფუნქციათა

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x),... \tag{1.8.24}$$

სისტემას ეწოდება *ორთოგონალური სისტემა*, თუ

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx \begin{cases} = 0, & \text{როცა} \quad m\ne n, \\ \ne 0, & \text{როცა} \quad m=n. \end{cases}$$

თუ ამასთან

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1,$$

მას *ორთონორმირებული სისტემა* ეწოდება.

განსაზღვრა 1.8.9. თუ $(1.8.24)$ სისტემა ორთოგონალურია,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x)$$

სახის მწკრივს, სადაც

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}$$

ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისი ფურიეს მწკრივი, ხოლო α_n კოეფიციენტებს ფურიეს კოეფიციენტები $(1.8.24)$ ორთოგონალური სისტემის მიმართ. აქ ვგულისხმობთ, რომ $f(x)\varphi_n(x)$ ინტეგრებადია.