ლექცია 2

1.2. ფუნქციის გრაფიკის აგება

ფუნქციის გრაფიკის აგების დიფერენციალური მეთოდი შედგება შემდეგი 9 ნაბიჯისგან:

1. ფუნქციის განსაზღვრის არის პოვნა; ლუწ-კენტობის და პერიოდულობის დადგენა;
2. წყვეტის წერტილების პოვნა; წყვეტის წერტილებში ცალმხრივი ზღვრების გამოთვლა;
3. საკოორდინატო ღერძებთან თანაკვეთის წერტილების პოვნა;
4. უსასრულობაში ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლა;
5. ზრდადობისა და კლებადობის ინტერვალების პოვნა;
6. ფუნქციის გამოკვლევა ექსტრემუმზე;
7. ფუნქციის ზემოთ ამოზნექილობის, ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედების დადგენა; გადა-ღუნვის წერტილების პოვნა;
8. ფუნქციის ასიმპტოტების პოვნა;
9. პირველი რვა პუნქტის გამოყენებით გრაფიკის აგება.

მეთოდის ილუსტრირება მოვახდინოთ შემდეგი ოთხი მარტივი ფუნქციის მაგალითზე:

ა) $y = x$; (1.2.1)

ბ) $y = \dfrac{1}{x}$; (1.2.2)

გ) $y = x^2$; (1.2.3)

დ) $y = \sin x$. (1.2.4)

1. მოვძებნოთ (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4) ფუნქციების *განსაზღვრის არეები.*

ა) $y = x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]-\infty;+\infty[$, ან, რაც იგივეა, $x \in R^1$.

ბ) $y = \dfrac{1}{x}$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი წერტილში R^1-დან, გარდა 0-სა, ე. ი. $x \in]-\infty;0[\bigcup]0;+\infty[$.

გ) $y = x^2$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]-\infty;+\infty[$.

დ) $y = \sin x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]-\infty;+\infty[$.

გავარკვიოთ თითოეული ფუნქციის ლუწ-კენტობა.

ა) $f(x) = x$. განვიხილოთ $f(-x)$.

$f(-x) = -x = -f(x)$, ე. ი. ფუნქცია კენტია.

ბ) $f(x) = \dfrac{1}{x}$. განვიხილოთ

$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$, ე. ი. ფუნქცია კენტია.

გ) $f(x) = x^2$. განვიხილოთ

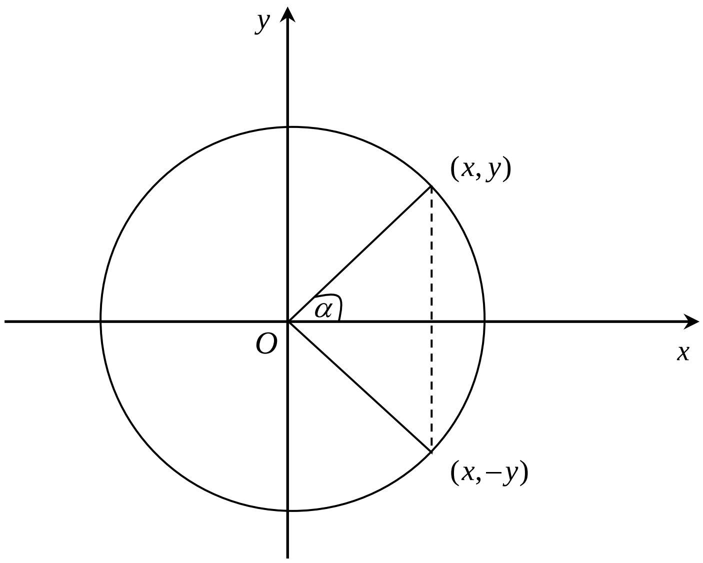
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, ე. ი. ფუნქცია ლუწია.

დ) $f(x) = \sin x$. განვიხილოთ

$f(-x) = \sin(-x)$. (1.2.5)

ნახ. 1.2.1-ზე მოცემულია r-რადიუსიანი წრე. I მეოთხედში გადავზომოთ α რადიანის ტოლი კუთხე. $\sin\alpha$-ს განმარტების თანახმად

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}.$$



ნახ. 1.2.1

ცხადია,

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha .$$

ბოლო ტოლობის ძალით, (1.2.5) ტოლობა შემდეგი სახით გადაიწერება

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x),$$

ე. ი. $y = \sin x$ ფუნქცია კენტია.

შენიშვნა 1.2.1. $y = \sin x$ ფუნქცია I და II მეოთხედებში დადებით მნიშვნელობებს იღებს, ხოლო III და IV მეოთხედებში − უარყოფითს.

პერიოდულობა.

ა) $f(x) = x$.

$f(x+l) = x + l = x$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (1.2.1) ფუნქცია არ არის პერიოდული.

ბ) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(x+l) = \dfrac{1}{x+l} = \dfrac{1}{x}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $l = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ (1.2.2) ფუნქციაც არაპერიოდულია.

გ) ანალოგიურად მტკიცდება, რომ (1.2.3) ფუნქციაც არაპერიოდულია. მართლაც,

$f(x+l) = (x+l)^2 = x^2,\quad x^2 + 2lx + l^2 = x^2,\quad l(2x+l) = 0.$ მაგრამ ეს უკანასკნელი შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = -\dfrac{l}{2}$ და არა ნებისმიერი ნამდვილი x-ისათვის.

დ) (1.2.4) ფუნქცია პერიოდულია და მისი უმცირესი დადებითი პერიოდია 2π. მართლაც, რადგან

$$\sin(2\pi + x) = \sin 2\pi \cos x + \cos 2\pi \sin x = \sin x,$$

ამიტომ 2π წარმოადგენს ერთ-ერთ პერიოდს, რაც ნახ. 1.2.1-დანაც ცხადია. ვაჩვენოთ, რომ ის უმცირესი დადებითი პერიოდია. თუ დავუშვებთ, რომ $0 < l < 2\pi$ პერიოდია, მაშინ

$$\sin(x + l) = \sin x$$

ნებისმიერი x-სთვის, მათ შორის $x = 0$-სთვისაც. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$\sin l = \sin 0 = 0,$$

რაც მართებულია 2π-ზე ნაკლები მხოლოდ ერთი $l = \pi$ მნიშვნელობისთვის. მაგრამ π არ წარმოადგენს $\sin x$-ის პერიოდს, რადგან $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$.

2. გავარკვიოთ ფუნქციის წყვეტის წერტილების საკითხი.

ა) $y = x$ ფუნქციას წყვეტის წერტილები არ გააჩნია.

ბ) $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის წყვეტის წერტილია $x = 0$. ვიპოვოთ (1.2.2) ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები წყვეტის წერტილში

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x} = -\infty.$$

(1.2.3) და (1.2.4) ფუნქციებს წყვეტის წერტილები არ გააჩნია.

3. ფუნქციის გრაფიკის x და y ღერძებთან თანაკვეთის წერტილების მოსაძებნად შესაბამისად y და x ცვლადები უნდა გავუტოლოთ ნულს.

ა) $y = x$ ფუნქცია გადის კოორდინატთა სათავეზე, ე. ი. $(0,0)$ წერტილზე.

ბ) $y = \frac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი არ კვეთს საკოორდინატო ღერძებს.

გ) $y = x^2$ ფუნქციის გრაფიკი გადის $(0,0)$ წერტილზე.

დ) $y = \sin x$ ფუნქციის გრაფიკი x ღერძს კვეთს, როცა $\sin x = 0$, ე. ი. $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ წერტილებში, y ღერძს კი – $(0,0)$ წერტილში, რადგან $y = \sin 0 = 0$.

4. *ფუნქციის ყოფაქცევა უსასრულობაში.*

ა) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.

ბ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$.

გ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$.

დ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sin x)$ არ არსებობს.

5. *ზრდადობა-კლებადობის საკითხის დადგენა.*

ა) $f(x) = x$.

$f'(x) = 1 > 0$, ე. ი. ფუნქცია ზრდადია განსაზღვრის მთელ არეზე.

ბ) $f(x) = \frac{1}{x}$.

$f'(x) = \left(x^{-1}\right)' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0$ ნებისმიერი $x \neq 0$-სთვის. ფუნქცია კლებადია თავის განსაზღვრის არეზე.

გ) $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x\begin{cases} > 0, \text{ როცა } x > 0, \text{ ე. ი. ზრდადია, როცა } x \in [0;+\infty[, \\ < 0, \text{ როცა } x < 0, \text{ ე. ი. კლებადია, როცა } x \in]-\infty;0]. \end{cases}$$

დ) $f(x) = \sin x$.

$$f'(x)=\cos x\begin{cases}>0, \text{ I და IV მეოთხედებში, ე. ი. იქ ზრდადია,}\\<0, \text{ II და III მეოთხედებში, ე. ი. იქ კლებადია.}\end{cases}$$

6. *ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოძებნა.*

ა) $f(x)=x$.

$f'(x)=1\neq 0$, ე. ი. $y=x$ ფუნქციას ექსტრემუმის წერტილები არ აქვს.

ბ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\neq 0$, ე. ი. $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციას ექსტრემუმის წერტილები არ აქვს.

გ) $f(x)=x^2$.

$f'(x)=2x=0$, როცა $x=0$.

$x=0$ ექსტრემუმის წერტილია. იმის გასარკვევად, ეს წერტილი მაქსიმუმის წერტილია თუ მინიმუმის, საჭიროა, ვიპოვოთ $f''(x)$:

$$f''(x)=2>0,$$

ე. ი. $x=0$ მინიმუმის წერტილია.

დ) $f(x)=\sin x$.

$f'(x)=\cos x=0$, როცა $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k=0;\pm 1;\pm 2;\ldots$.

განვიხილოთ $f''(x)$:

$$f''(x)=-\sin x\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=-\cos\pi k\begin{cases}<0, \text{ როცა } k=2j,\\>0, \text{ როცა } k=2j+1,\end{cases}\quad j=0;\pm 1;\pm 2;\cdots$$

.

მივიღეთ, რომ $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi j$, $j=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ ფუნქციის მაქსიმუმის $\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi j\right)=1\right]$ წერტილებია, ხოლო $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi(2j+1)$[*], ე. ი. $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi j$,[*] $j=0$, ± 1, $\pm 2,\ldots$, ფუნქციის მინიმუმის $\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi j\right)=-1\right]$ წერტილებია.

7. *ფუნქციის ზემოთ ამოზნექილობა, ქვემოთ ამოზნექილობა; გადაღუნვის წერტილების პოვნა.*

ა) $f(x)=x$.

$f''(x)=0$, ე. ი. $y=x$ ფუნქცია არ არის არც ზემოთ ამოზნექილი და არც ქვემოთ ამოზნექილი.

ბ) $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

$$f''(x)=\left(\frac{1}{x}\right)''=\left(-x^{-2}\right)'=\frac{2}{x^3}\begin{cases}>0, \text{ როცა } x>0,\\<0, \text{ როცა } x<0,\end{cases}$$

ე. ი. $y=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკი $x\in]0;+\infty[$ შუალედში ქვემოთ ამოზნექილია, ხოლო $x\in]-\infty;0[$ შუალედში – ზემოთ ამოზნექილი.

---

[*] წერტილთა ეს სიმრავლეები რომ ერთი და იგივეა, ადვილად დავრწმუნდებით $j=k-1$ ($j,k=0$, ± 1, ± 2, $\ldots$) ჩასმით.

გ) $f(x)=x^2$.

$f''=2>0$, ე. ი. ფუნქციის გრაფიკი ქვემოთ ამოზნექილია.

დ) $f(x)=\sin x$.

$$f''(x)=-\sin x\begin{cases}>0, \text{ III და IV მეოთხედებში,}\\<0, \text{ I და II მეოთხედებში,}\end{cases}$$

ე. ი. ფუნქციის გრაფიკი ქვემოთ ამოზნექილია, როცა $x\in]-\pi+2\pi k, 2\pi k[$, ზემოთ ამოზნექილია, როცა $x\in]2\pi k, \pi(1+2k)[$, $k=0;\pm1;\pm2;\cdots$. ცხადია, რომ

$$f''(\pi k)=-\sin(\pi k)=0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $x=\pi k$ გადაღუნვის წერტილებია.

გამოვთვალოთ გადაღუნვის 0 და π წერტილებში გავლებულ მხებთა მიერ x ღერძთან შედგენილი კუთხეები. წირისადმი გავლებული მხების განტოლების ფორმულიდან შესაბამისად გვექნება

$$y-\sin 0=\sin' 0\cdot(x-0) \text{ და } y-\sin\pi=\sin'\pi\cdot(x-\pi),$$

ე.ი.

$$y=\cos 0\cdot x \text{ და } y=\cos\pi\cdot(x-\pi).$$

საიდანაც $y=x$ და $y=-x+\pi$. მაგრამ, რადგან საკუთხო კოეფიციენტი $tg\alpha=m=f'(x_0)$, ამიტომ $tg\alpha=1$, როცა $x_0=0$, და $tg\alpha=-1$, როცა $x_0=\pi$. შესაბამისად $\alpha=\frac{\pi}{4}$, როცა $x_0=0$, და $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ან რაც იგივეა $\alpha=\frac{3\pi}{4}$, როცა $x_0=\pi$.

8. ასიმპტოტების პოვნა.

ა) (1.2.1) ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტები არ აქვს. მართლაც,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}1=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}(x-x)=0.$$

კვლავ მივიღეთ $y=x$ ფუნქცია, რომლის ასიმპტოტასაც ვეძებთ. მაგრამ ასიმპტოტა არ შეიძლება გრაფიკს კვეთდეს (როცა წირის წერტილი უსასრულობაში მიისწრაფის), მით უფრო ემთხვეოდეს.

ბ) (1.2.2) ფუნქციის გრაფიკის ჰორიზონტალური ასიმპტოტაა $y=0$, ვერტიკალური ასიმპტოტა კი – $x=0$; დახრილი ასიმპტოტები არ გააჩნია. მართლაც,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

ამრიგად, ასიმპტოტაა $y=0\cdot x+0=0$. ეს უკანასკნელი კი ჰორიზონტალური ასიმპტოტაა. რადგან $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=+\infty$ და $\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to-}\frac{1}{x}=-\infty$, ამიტომ $x=0$-ს, ე.ი., y ღერძი ვერტიკალური ასიმპტოტაა.

გ) (1.2.3) ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტები არ აქვს. მართლაც,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty.$$

რადგან k სასრული უნდა იყოს, დახრილი და ჰორიზონტალური ასიმპტოტები არ არსებობს. ვინაიდან $y=x^2$ ფუნქცია მთელ ღერძზე განსაზღვრული, არც ვერტიკალური ასიმპტოტა არ არსებობს.

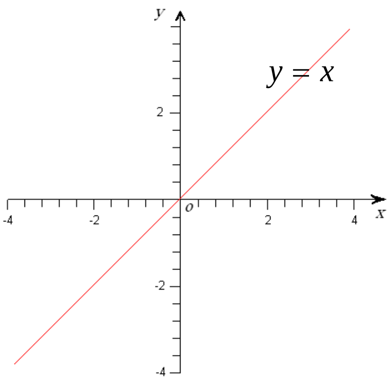
დ) (1.2.4) ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტები არ აქვს. მართლაც,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=0;$$

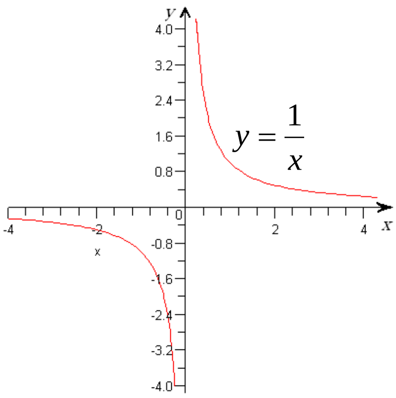
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}(\sin x-0\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$$

ეს უკანასკნელი კი არ არსებობს. ამრიგად, დახრილი და ჰორიზონტალური ასიმპტოტა არ არსებობს. რადგან $\sin x$ მთელ ღერძზე განსაზღვრული, ამიტომ ვერტიკალური ასიმპტოტაც არ არსებობს.

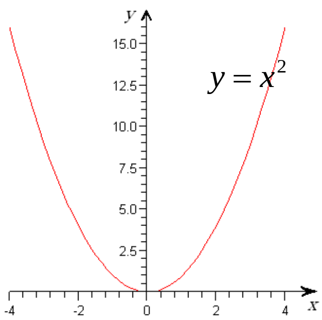
9. *გრაფიკის აგება* (იხ. ნახ. 1.2.2 –1.2.5).



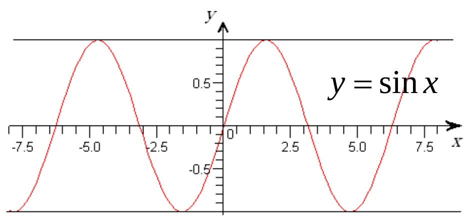
ნახ. 1.2.2



ნახ. 1.2.3



ნახ. 1.2.4



ნახ. 1.2.5

1.3. ხარისხოვანი ფუნქცია

განსაზღვრა 1.3.1.

$$y = x^n \tag{1.3.1}$$

სახის ფუნქციას, სადაც $n \in R$, *ხარისხოვანი ფუნქცია* ეწოდება.

შენიშვნა 1.3.2. ცხადია, როცა $n = 0$, (1.3.1) ფუნქცია $y = 1$ სახეს მიიღებს და მისი გრაფიკი x ღერძის პარალელური წრფეა. $n = 1$ შემთხვევა გამოკვლეული გვაქვს 1.2 პარაგრაფში. ამიტომ (1.3.1) ფუნქციის გამოკვლევისას ვიგულისხმებთ, რომ $n \neq 0, 1$.

განვიხილოთ შემდეგი 4 შემთხვევა

I. $|n| = 2k$, $k = 1,2,3, \ldots$.

II. $|n| = 2k - 1$, $k = 2,3, \ldots$ ან $n = -1$.

III. $|n| = \dfrac{l}{k}$, სადაც k და l ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვებია, ამასთან k კენტი რიცხვია.*)

IV. $|n| = \dfrac{l}{k}$, სადაც k და l ურთიერთმარტივი ნატურალური რიცხვებია, ამასთან k ლუწი რიცხვია.

შევისწავლოთ (1.3.1) ფუნქციის თვისებები თითოეულ შემთხვევაში.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არის პოვნა.

I, II და III შემთხვევაში $x \in]-\infty, +\infty[$, როცა $n > 0$, და $x \in]-\infty, 0[\bigcup]0, +\infty[$, როცა $n < 0$.

IV შემთხვევაში $x \in [0, +\infty[$, როცა $n > 0$, და $x \in]0, +\infty[$, როცა $n < 0$.

ლუწ-კენტობის საკითხის დადგენა.

I. $$f(-x) = (-x)^n = \begin{cases} (-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k} = f(x), & \text{როცა } n > 0, \\ (-x)^{-2k} = (-1)^{-2k} x^{-2k} = x^{-2k} = f(x), & \text{როცა } n < 0, \end{cases}$$

ე. ი. ფუნქცია ლუწია.

II. $$f(-x) = (-x)^n = \begin{cases} (-x)^{2k-1} = (-1)^{2k-1} x^{2k-1} = -x^{2k-1} = -f(x), & \text{როცა } n > 0, \\ (-x)^{-(2k-1)} = (-1)^{-(2k-1)} x^{-(2k-1)} = -x^{-(2k-1)} = -f(x), & \text{როცა } n < 0, \end{cases}$$

ე. ი. ფუნქცია კენტია.

III. დადებითი n-ებისთვის გვექნება

$$f(-x) = (-x)^{\frac{l}{k}} = \begin{cases} \left[(-x)^l\right]^{\frac{1}{k}} = \left[(-1)^l x^l\right]^{\frac{1}{k}} = \left[x^l\right]^{\frac{1}{k}} = x^{\frac{l}{k}} = f(x), \\ \text{როცა } l \text{ ლუწია, ე. ი. ფუნქცია ლუწია,} \\ \left[(-x)^l\right]^{\frac{1}{k}} = \left[(-1)^l x^l\right]^{\frac{1}{k}} = \left[(-1) x^l\right]^{\frac{1}{k}} = (-1)^{\frac{1}{k}} x^{\frac{l}{k}} \\ = -x^{-\frac{l}{k}} = -f(x), \text{ როცა } l \text{ კენტია, ე. ი.} \\ \text{ფუნქცია კენტია.} \end{cases}$$

უარყოფითი n-ებისთვის კი ანალოგიურად გვექნება

$$f(-x) = (-x)^{-\frac{l}{k}} = \begin{cases} x^{-\frac{l}{k}} = f(x), \text{ როცა } l \text{ ლუწია, ე. ი. ფუნქცია ლუწია,} \\ -x^{-\frac{l}{k}} = -f(x), \text{ როცა } l \text{ კენტია, ე. ი. ფუნქცია კენტია.} \end{cases}$$

*) აქ და შემდეგში წვრილად დაბეჭდილი ტექსტი პირველი წაკითხვისას შეიძლება გამოვტოვოთ.

IV. ამ შემთხვევაში ფუნცია არც ლუწია და არც კენტი, რადგან განსაზღვრის არე არ არის სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ხარისხოვანი ფუნქცია არ არის პერიოდული ფუნქცია.

შენიშვნა 1.3.3. რადგან ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია y ღერძის მიმართ, ხოლო კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, სიმარტივისთვის (1.3.1) ფუნქციის მონოტონურობის შუალედებს და ჩაზნექილობა-ამოზნექილობის საკითხებს შევისწავლით დადებითი x-ებისთვის (უარყოფითი $x<0$-სთვის შეგვიძლია სიმეტრიულობა გამოვიყენოთ).

2. ფუნქციის წყვეტის წერტილების პოვნა.

(1.3.1) ფუნქციას წყვეტის წერტილები შეიძლება ჰქონდეს მხოლოდ მაშინ, როცა $n<0$.

I. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-2k} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} x^{-2k} = +\infty$.

II. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-(2k-1)} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} x^{-(2k-1)} = -\infty$.

III. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-l/k} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} x^{-l/k} = \begin{cases} +\infty, \text{ როცა } l \text{ ლუწია,} \\ -\infty, \text{ როცა } l \text{ კენტია.} \end{cases}$

IV. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-l/k} = +\infty.$

3. ღერძებთან თანაკვეთის წერტილების პოვნა.

როცა $n>0$, ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე. უარყოფითი n-სთვის ფუნქციის გრაფიკი არ კვეთს არც x და არც y ღერძს.

4. ყოფაქცევა უსასრულობაში.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \lim_{x\to\pm\infty} x^{\pm 2k} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\pm|x|\right)^{\pm 2k} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\pm 1\right)^{\pm 2k}|x|^{\pm 2k} = \lim_{x\to\pm\infty}|x|^{\pm 2k}$$

I.
$$= \begin{cases} +\infty, \text{ როცა } n = 2k > 0, \\ 0, \text{ როცა } n = -2k < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = \lim_{x\to\pm\infty} x^{\pm(2k-1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\pm|x|\right)^{\pm(2k-1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\pm 1\right)^{\pm(2k-1)}|x|^{\pm(2k-1)}$$

II.
$$= \begin{cases} \pm\infty, \text{ როცა } n = 2k-1 > 0, \\ 0, \text{ როცა } n = -(2k-1) < 0. \end{cases}$$

III. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{როცა } n>0, \\ 0, & \text{როცა } n<0, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{როცა } n>0 \text{ და } l \text{ ლუწია,} \\ -\infty, & \text{როცა } n>0 \text{ და } l \text{ კენტია,} \\ 0, & \text{როცა } n<0. \end{cases}$

IV. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{როცა } n>0, \\ 0, & \text{როცა } n<0. \end{cases}$

5. მონოტონურობის შუალედების დადგენა.

ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული

$$y' = nx^{n-1}.$$

ცხადია, დადებითი x-ებისთვის $y'>0$, მხოლოდ მაშინ, როცა n დადებითია, ე. ი. ფუნქცია $]0,+\infty[$-შუალედში ზრდადია ნებისმიერი $n>0$-სთვის, ხოლო უარყოფითი n-ებისთვის ფუნქცია კლებადია (უარყოფითი x-ებისთვის ზრდადობა-კლებადობის საკითხის დასადგენად გავითვალისწინოთ შენიშვნა 1.3.3.).

6. ექსტრემუმის წერტილების პოვნა.

ექსტრემუმის წერტილების მოსაძებნად საჭიროა ისეთი წერტილების მოძებნა, სადაც ფუნქციის წარმოებული ნულს უდრის. რადგან $n \neq 0,1$, ამიტომ

$$y' = nx^{n-1}\begin{cases}\neq 0, \text{ როცა } n<1,\\ = 0 \text{ დანარჩენი } n\text{-ებისთვის, როცა } x=0.\end{cases}$$

მივიღეთ, რომ ხარისხოვან ფუნქციას, როცა $n<1$, ექსტრემუმის წერტილი არ გააჩნია, ხოლო როცა $n>1$, $x=0$ შეიძლება ექსტრემუმის (მინიმუმის ან მაქსიმუმის) წერტილი იყოს.

რადგან

$$y'' = n(n-1)x^{n-2},$$

I. $y''(0)>0$, როცა $n=2$, ე. ი. $x=0$ მინიმუმის წერტილია, ხოლო როცა $n=4,6,\ldots$, მაშინ $y''(0)=0$ და დამატებითი გამოკვლევაა საჭირო (იხ. ქვემოთ მე-7 პუნქტი).

II. $y''(0)=0$, რადგან განსახილველ შემთხვევაში $n=3,5,\ldots$, ამიტომ დამატებითი გამოკვლევაა საჭირო (იხ. ქვემოთ მე-7 პუნქტი).

III. თუ გამოვრიცხავთ $k=1$, $l=2$ შემთხვევას, რადგან ის I შემთხვევაში განვიხილეთ, $y''(0)$ ან ნულია, ან უსასრულობა და საჭირო ხდება დამატებითი გამოკვლევა (იხ. ქვემოთ მე-7 პუნქტი).

IV. $x=0$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილია დადებითი n-ებისთვის.

7. ფუნქციის ქვემოთ ამოზნექილობა - ზემოთ ამოზნექილობის საკითხის დადგენა.

I. $y''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0$, როცა $x\neq 0$, ნებისმიერი n-სთვის ($|n|=2k$, $k=1,2,3,\ldots$), რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკი ქვემოთ ამოზნექილია და ამდენად, $x=0$ წერტილი მინიმუმის წერტილია, როცა $n=4,6,\ldots$, ისევე როგორც $n=2$ შემთხვევაში, რომელიც ადრე განვიხილეთ.

II. $$y''(x)=n(n-1)x^{n-2}\begin{cases}>0, \text{ როცა } x>0, \text{ ფუნქციის გრაფიკი ქვემოთ ამოზნექილია,}\\ <0, \text{ როცა } x<0, \text{ ფუნქციის გრაფიკი ზემოთ ამოზნექილია,}\end{cases}$$

ამდენად, $x=0$ წერტილი ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია.

III. რადგან

$$y''(x)=\frac{l}{k}\left(\frac{l}{k}-1\right)x^{\frac{l}{k}-2}\begin{cases}<0, \text{ როცა } \left(\frac{l}{k}>1, l \text{ კენტია და } x<0\right),\\ \text{ან } \left(\frac{l}{k}<1,\ x>0\right), \text{ ან } \left(\frac{l}{k}<1, l \text{ ლუწია}\right);\\ >0, \text{ როცა } \left(\frac{l}{k}>1, l \text{ ლუწია}\right),\\ \text{ან } \left(\frac{l}{k}>1,\ x>0\right), \text{ ან } \left(\frac{l}{k}<1, l \text{ კენტია და } x<0\right),\end{cases}$$

როცა $\left(\frac{l}{k}>1,\ l \text{ კენტია და } x<0\right)$, ან $\left(\frac{l}{k}<1,\ x>0\right)$, ან $\left(\frac{l}{k}<1,\ l \text{ ლუწია}\right)$,

მაშინ ფუნქციის გრაფიკი ზემოთ ამოზნექილია, ხოლო

როცა $\left(\frac{l}{k}>1,\ l \text{ ლუწია}\right)$, ან $\left(\frac{l}{k}>1,\ x>0\right)$, ან $\left(\frac{l}{k}<1,\ l \text{ კენტია და } x<0\right)$ – ქვემოთ ამოზნექილია.

IV. რადგან ამ შემთხვევაში $x>0$, ამიტომ

$$y''(x)=n(n-1)x^{n-2}\begin{cases}>0, \text{ როცა } n>1 \text{ ან } n<0, \text{ ე.ი., ფუნქციის გრაფიკი ქვემოთ ამოზნექილია;}\\ <0, \text{ როცა } 0<n<1, \text{ ე.ი., ფუნქციის გრაფიკი ზემოთ ამოზნექილია.}\end{cases}.$$

8. ასიმპტოტების პოვნა.

რადგან ოთხივე შემთხვევაში (I-IV)

$$\lim_{x\to 0} x^n = \pm\infty, \text{ როცა } n<0,$$

ამიტომ y ღერძი $(x=0)$ ვერტიკალური ასიმპტოტაა.

ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტა:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-1} = \begin{cases} +\infty, \text{ როცა } n>1; \\ 0, \text{ როცა } n<1, \end{cases}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - 0x) = \lim_{x\to+\infty} x^n = 0, \text{ როცა } n<0^{*)}.$$

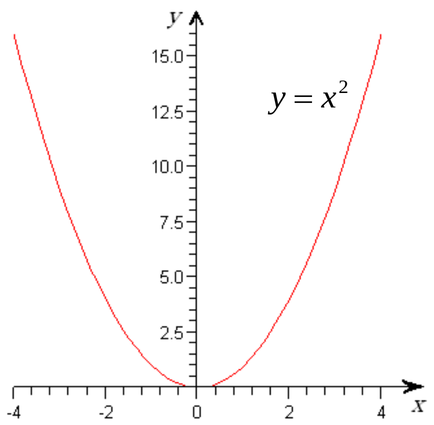
ამიტომ $y=0$ წრფე, ე. ი. x ღერძი წარმოადგენს ჰორიზონტალურ ასიმპტოტას, როცა $n<0$.

ამრიგად, უარყოფითი n-სთვის (1.3.1) ფუნქციის ასიმპტოტებია $y=0$ და $x=0$.

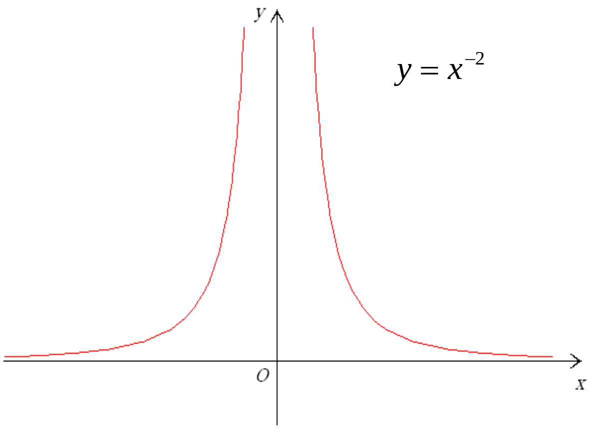
9. ფუნქციის გრაფიკის აგება.

ზემოთ ჩატარებული ანალიზიდან გამომდინარე, საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი გრაფიკები (იხ. ნახ. 1.3.1 – 1.3.8, აგებულია კომპიუტერის გამოყენებით).

I.

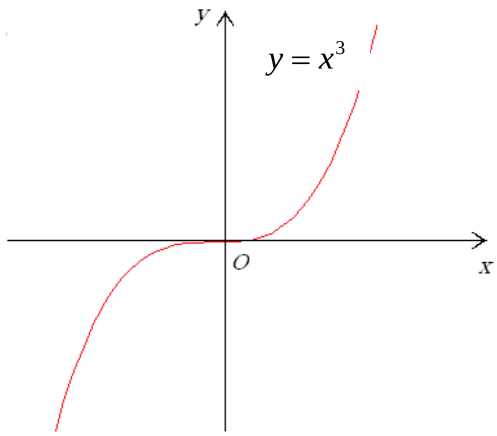


ნახ. 1.3.1

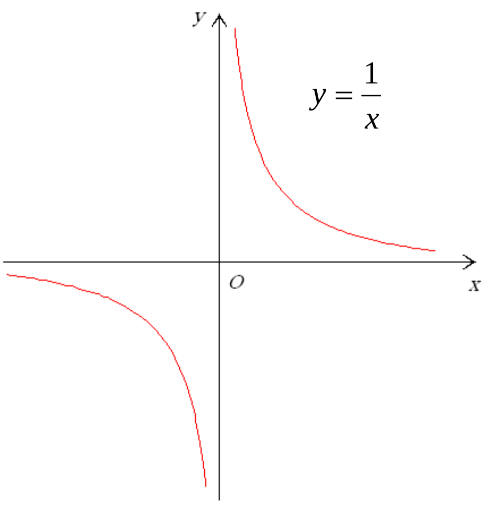


ნახ. 1.3.2

II.



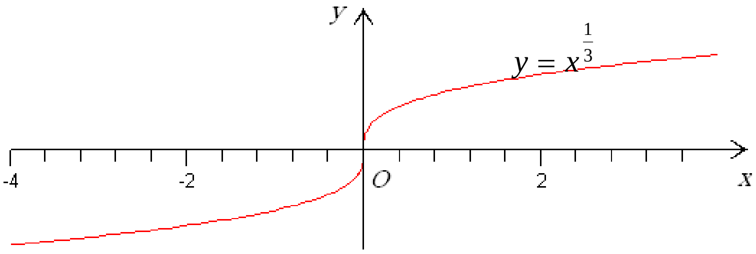
ნახ. 1.3.3



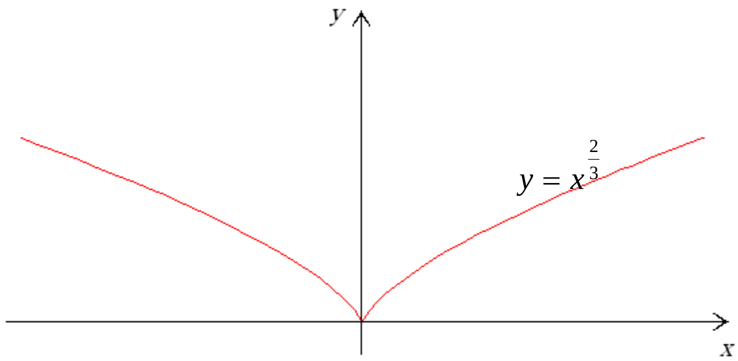
ნახ. 1.3.4

*) როგორც ტრივიალური შემთხვევა, $n=0$ თავიდანვე გამოვრიცხეთ.

III.

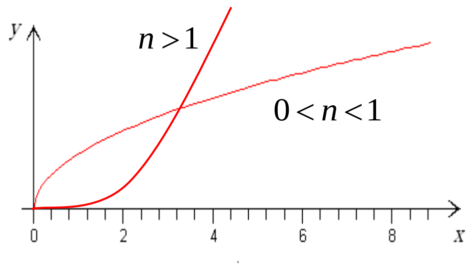


ნახ. 1.3.5

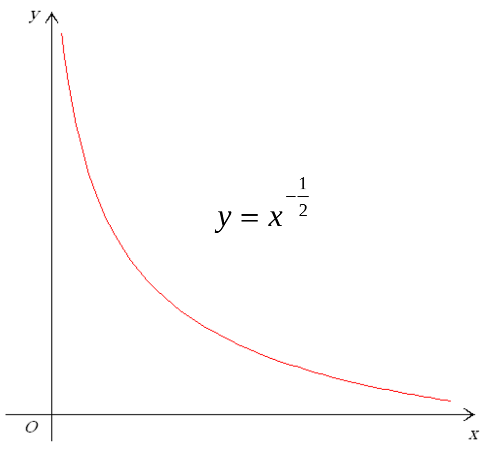


ნახ. 1.3.6

IV.



ნახ. 1.3.7



ნახ. 1.3.8

I შემთხვევაში, როცა $n = 2k \quad (k = 1,2,3,\ldots)$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.1-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას.

I შემთხვევაში, როცა $n = 2k \quad (k = -1,-2-,3,\ldots)$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.2-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას.

II შემთხვევაში, როცა $n = 2k+1 \quad (k = 1,2,3,\ldots)$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.3-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას.

II შემთხვევაში, როცა $n = -(2k+1) \quad (k = 1,2,3,\ldots)$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.4-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას.

III შემთხვევაში, როცა l კენტია და $n = \frac{l}{k} > 1$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.3-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას;

III შემთხვევაში, როცა l ლუწია და $n = \frac{l}{k} > 1$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.1-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას;

III შემთხვევაში, როცა $n < 0$ და l კენტია, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.4-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას;

III შემთხვევაში, როცა $n < 0$ და l ლუწია, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.2-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას;

III შემთხვევაში, როცა l კენტია და $0 < \frac{l}{k} < 1$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.5-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას;

III შემთხვევაში, როცა l ლუწია და $0 < \frac{l}{k} < 1$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.6-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას.

IV შემთხვევაში, როცა $n > 1$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკს აქვს $y = x^{\frac{3}{2}}$ ფუნქციის გრაფიკის ფორმა, ხოლო როცა $0 < n < 1$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ ფუნქციის გრაფიკის ფორმა (იხ. ნახ. 1.3.7).

IV შემთხვევაში, როცა $n < 0$, ხარისხოვანი ფუნქციის გრაფიკის ფორმა ემთხვევა ნახ. 1.3.8-ზე მოყვანილი გრაფიკის ფორმას.

1.4. მაჩვენებლიანი ფუნქცია

განსაზღვრა 1.4.1.

$$y = a^x$$

სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$, $a \neq 1$, *მაჩვენებლიანი ფუნქცია* ეწოდება.

შევისწავლოთ მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებები.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არის პოვნა.

$y = a^x$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]-\infty,+\infty[$.

გავარკვიოთ ფუნქციის ლუწ-კენტობის საკითხი. რადგან

$$f(-x) = a^{-x} \begin{cases} \neq -f(x), \\ \neq f(x), \end{cases}$$

ამიტომ f ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

ფუნქციის პერიოდულობის გასარკვევად l-ის მიმართ უნდა ამოვხსნათ

$$a^{x+l} = a^x$$

განტოლება. a ფუძით გალოგარითმების შემდეგ მივიღებთ

$$x + l = x.$$

ცხადია, ამ განტოლებას l–ის მიმართ ნულისაგან განსხვავებული ამონახსნი არ აქვს, ე. ი. ფუნქცია არაპერიოდულია.

2. ფუნქციის წყვეტის წერტილების პოვნა.

ფუნქციას წყვეტის წერტილები არ აქვს.

3. ღერძებთან თანაკვეთის წერტილების პოვნა.

ფუნქციის გრაფიკის y ღერძთან გადაკვეთის წერტილის მოსაძებნად ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობა $x=0$ წერტილში:

$$f(0)=a^0=1,$$

ე. ი. ფუნქციის გრაფიკი y ღერძს კვეთს $(0,1)$ წერტილში. ფუნქციის გრაფიკი x ღერძს არ კვეთს, მართლაც, $a^x>0$ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის.

4. ყოფაქცევა უსასრულობაში.

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, \text{ როცა } a>1,\\ 0, \text{ როცა } 0<a<1.\end{cases}\quad \lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{cases}0, \text{ როცა } a>1,\\ +\infty, \text{ როცა } 0<a<1.\end{cases}$$

5. ზრდადობა-კლებადობის საკითხის გარკვევა.

$$y'(x)=\left(a^x\right)'=a^x\ln a\begin{cases}>0, \text{ როცა } a>1,\\ <0, \text{ როცა } 0<a<1.\end{cases}$$

ფუნქცია ზრდადია, თუ $a>1$, კლებადია, თუ $0<a<1$.

6. ექსტრემუმის წერტილების პოვნა.

ფუნქციას ექსტრემუმის წერტილები არ გააჩნია, რადგან

$$y'(x)=a^x\ln a\neq 0, \text{ როცა } a\neq 1.$$

7. ფუნქციის ქვემოთ ამოზნექილობა - ზემოთ ამოზნექილობის საკითხის დადგენა.

დავადგინოთ მეორე რიგის წარმოებულის ნიშნები

$$y''(x)=a^x\ln^2 a>0,$$

ე. ი. $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკი ქვემოთ ამოზნექილია.

8. ასიმპტოტების პოვნა.

მაჩვენებლიან ფუნქციას ვერტიკალური ასიმპტოტა არ აქვს, რადგან ის უწყვეტია, როცა $x\in R$. ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტა, თუ ასეთი არსებობს. განვიხილოთ შემდეგი ზღვრები:

ა)

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{1}=\begin{cases}+\infty, \text{ როცა } a>1,\\ 0, \text{ როცა } 0<a<1.\end{cases}$$

ე. ი. როცა $0<a<1$, ფუნქციას აქვს ჰოროზონტალური ასიმპტოტა $y=0$, რადგან ამ შემთხვევაში $k=0$ და

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

ბ)

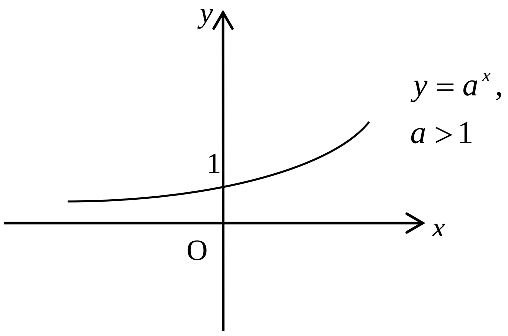
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x\ln a}{1}=\begin{cases}0, \text{ როცა } a>1,\\ +\infty, \text{ როცა } 0<a<1.\end{cases}$$

როცა $a>1$, ფუნქციას აქვს ჰოროზონტალური ასიმპტოტა $y=0$, რადგან ამ შემთხვევაში $k=0$ და

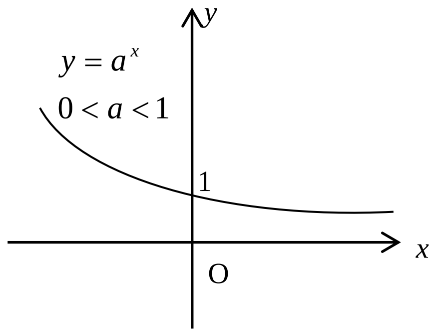
$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

9. ფუნქციის გრაფიკის აგება.

ზემოთ ჩატარებული ანალიზიდან გამომდინარე, გრაფიკებს აქვთ ქვემოთ მოყვანილი სახე (იხ. ნახ. 1.4.1, 1.4.2, აგებულია კომპიუტერის გამოყენებით).



ნახ. 1.4.1



ნახ. 1.4.2

1.5. ლოგარითმული ფუნქციები

განსაზღვრა 1.5.1.

$$y = \log_a x \qquad (1.5.1)$$

სახის ფუნქციას, სადაც $a > 0$ და $a \neq 1$, ეწოდება *ლოგარითმული ფუნქცია*.

განსაზღვრა 1.5.2. x რიცხვის ლოგარითმი a ფუძით ეწოდება ისეთ y რიცხვს, რომელშიც უნდა ავახარისხოთ a, რომ მივიღოთ x, ე. ი. (1.5.1)-დან გამომდინარეობს

$$x = a^y, \ \ a > 0\,. \qquad (1.5.2)$$

შენიშვნა 1.5.3. (1.5.2) და (1.5.1) ურთიერთშებრუნებული ფუნქციებია.

შევისწავლოთ (1.5.1) ფუნქციის თვისებები და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

1. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $x \in]0, +\infty[$.

ფუნქციის განსაზღვრის არე არ არის სიმეტრიული კოორდინატთა სათავის მიმართ, ამიტომ (1.5.1) არც ლუწია და არც კენტი.

გავარკვიოთ პერიოდულობის საკითხი. განვიხილოთ ტოლობა

$$\log_a (x + l) = \log_a x\,.$$

ცხადია, რომ უკანასკნელი ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $l = 0$, ე. ი. ფუნქცია არაპერიოდულია. მართლაც, პოტენცირებით მივიღებთ, რომ $x + l = x$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $l = 0$.

2. ყოფაქცევა წყვეტის წერტილებში.

მარტივი საჩვენებელია, რომ

$$\lim_{x \to 0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{როცა } a > 1, \\ +\infty, & \text{როცა } 0 < a < 1. \end{cases}$$

3. ღერძებთან თანაკვეთის წერტილების პოვნა.

ფუნქციის გრაფიკი y ღერძს არ კვეთს, რადგან ფუნქცია $x = 0$ წერტილში განსაზღვრული არ არის.

x ღერძთან თანაკვეთის წერტილის მოსაძებნად ამოვხსნათ განტოლება

$$\log_a x = 0 \Rightarrow x = a^0 = 1\,.$$

(1.5.1) ფუნქციის გრაფიკი x ღერძს კვეთს ღერძის $x=1$ წერტილში.

4. ყოფაქცევა უსასრულობაში.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია განსაზღვრულია $x\in]0,+\infty[$ შუალედში, ე. ი. განსახილველი გვაქვს მხოლოდ ზღვარი, როცა $x\to+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty, & \text{როცა } a>1,\\ -\infty, & \text{როცა } 0<a<1.\end{cases}$$

5. ზრდადობა-კლებადობის საკითხის დადგენა.

ვიპოვოთ ფუნქციის წარმოებული და დავადგინოთ მისი ნიშანი.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\begin{cases}>0, & \text{როცა } a>1,\\ <0, & \text{როცა } 0<a<1.\end{cases}$$

ეს უკანასკნელი გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\ln a>0$, როცა $a>1$, და $\ln a<0$, როცა $0<a<1$. ამიტომ, როცა $a>1$, ფუნქცია ზრდადია, ხოლო, როცა $0<a<1$, ფუნქცია კლებადია.

6. ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების პოვნა.

ექსტრემუმის წერტილების მოსაძებნად ფუნქციის წარმოებული უნდა გავუტოლოთ ნულს. რადგან,

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\neq 0,$$

ამიტომ ფუნქციას ექსტრემუმის წერტილები არ აქვს.

7. ფუნქციის ზემოთ ამოზნექილობის და ქვემოთ ამოზნექილობის შუალედების მოსაძებნად ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული

$$y''=\left(\frac{1}{x\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\left(x^{-1}\right)'=-\frac{1}{x^2\ln a}\begin{cases}<0, & \text{როცა } \ln a>0, \text{ ე. ი. როცა } a>1,\\ >0, & \text{როცა } \ln a<0, \text{ ე. ი. როცა } 0<a<1.\end{cases}$$

(1.5.1) ფუნქციის გრაფიკი ზემოთ ამოზნექილია, თუ $a>1$, და ქვემოთ ამოზნექილია, თუ $0<a<1$.

8. ასიმპტოტების პოვნა.

ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტების არსებობისთვის უნდა არსებობდეს შემდეგი ორი ზღვარი:

$$k:=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{და} \quad b:=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

ჩვენს შემთხვევაში, ლოპიტალის წესის გამოყენებით,

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x\ln a}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln a}=0,$$

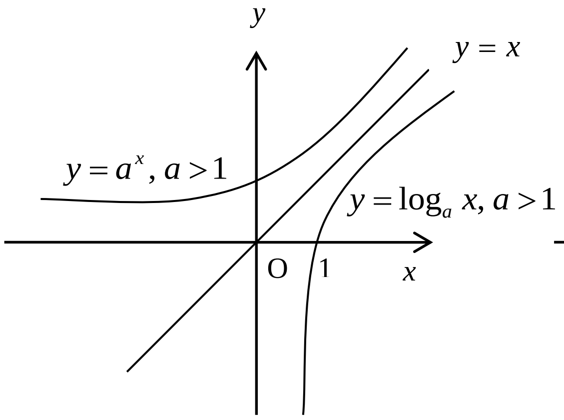
$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\log_a x=\begin{cases}+\infty, & \text{როცა } a>1,\\ -\infty, & \text{როცა } 0<a<1,\end{cases}$$

ე. ი. ფუნქციას დახრილი ასიმპტოტები არ აქვს.

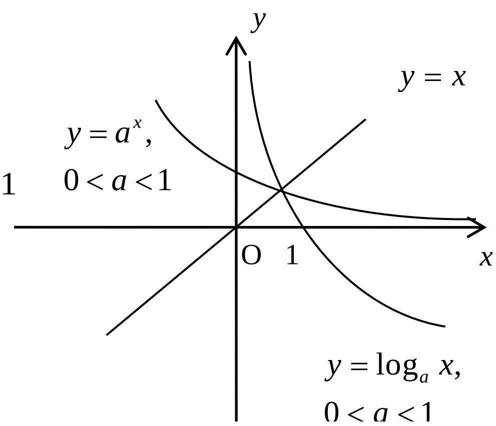
მე-2 პუნქტიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ვერტიკალური ასიმპტოტა $x=0$.

9. ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.

ზემოთ დადგენილი თვისებებიდან გამომდინარე, (1.5.1) ფუნქციის გრაფიკს აქვს ნახ. 1.5.1-სა და ნახ. 1.5.2-ზე მითითებული სახე.



ნახ. 1.5.1



ნახ. 1.5.2

შენიშვნა 1.5.4. 1.5.1 და 1.5.2 ნახაზებიდან ჩანს, რომ $y=\log_a x$ ფუნქციის გრაფიკი $y=x$ ღერძის მიმართ $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკის სიმეტრიულია.

შენიშვნა 1.5.5. ლოგარითმი შემოღებული იყო ნეპერის[*)] მიერ 1614 წელს. *ნატურალური ლოგარითმული ფუნქცია* $x \mapsto \ln x$ ეწოდება ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\ln 1 = 0\,; \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}\,, \text{ როცა } \; x > 0\,. \tag{1.5.3}$$

ასეთი ფუნქციის არსებობა და ერთადერთობა გამომდინარეობს კალკულუსის ძირითადი თეორემიდან და მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}\,, \text{ როცა } \; x > 0\,. \tag{1.5.4}$$

მართლაც, (1.5.4) ტოლობის მარჯვენა მხარის x-ით გაწარმოება, კალკულუსის ძირითადი თეორემის თანახმად, გვაძლევს

$$\frac{1}{x}\text{-ს,}$$

ე. ი. სრულდება (1.5.3) პირობებიდან მეორე. (1.5.3)-დან პირველი პირობის შესრულებაში კი ადვილად დავრწმუნდებით (1.5.4)-ში x-ის ნაცვლად 1-ის ჩასმით. მართლაც,

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0\,.$$

ლოგარითმი ნებისმიერი დადებითი $a \neq 1$-სთვის განიმარტება

$$\log_a x := \frac{\ln x}{\ln a}$$

ტოლობით.

შევნიშნოთ, რომ

$$\ln x := \log_e x\,,$$

სადაც e ნეპერის რიცხვია, რომელიც ირაციონალური რიცხვია და მიახლოებით

$$e \approx 2{,}718\,.$$

[*)] ჯ. ნეპერი (ნეიპირი, 1550 – 1617) – შოტლანდიელი მათემატიკოსი.

a^x სიმბოლოს აზრი, როცა x რაციონალური რიცხვია, განისაზღვრება ახარისხებისა და ფესვის ამოღების ოპერაციებით. როცა x ირაციონალური და, საერთოდ, როცა x ნამდვილი რიცხვია, მას განვსაზღვრავთ როგორც ერთადერთ რიცხვს, რომლის ნატურალური ლოგარითმი $x\ln a$-ს ტოლია, ე. ი.

$$\ln a^x = x\ln a\,.$$