ლექცია 15

4.3. მეორე რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები

განვიხილოთ მეორე რიგის რამდენიმე ტიპური განტოლება.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{4.3.1}$$

განტოლება, სადაც a კოეფიციენტი ფიზიკური მოსაზრებებით დგინდება, აღწერს სიმის $u(x,t)$ განივ რხევებს და მას *სიმის რხევის განტოლება* ეწოდება.

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

განტოლებას ეწოდება *ლაპლასის*) განტოლება*, განტოლების მარცხენა მხარეში მდგარ ოპერატორს კი – ლაპლასის ოპერატორი.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

განტოლებას, სადაც a კოეფიციენტი ფიზიკური მოსაზრებებიდან დგინდება, ხოლო $u(x,t)$ ტემპერატურას აღნიშნავს, *სითბოგამტარობის განტოლება* ეწოდება.

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

განტოლებას, სადაც $\hbar$ *პლანკის**) მუდმივია*, m – კვანტური ნაწილაკის მასა, $V(x_1, x_2)$ – გარე ძალოვანი ველის, რომელშიც ეს ნაწილაკი მოძრაობს, პოტენციალი, ხოლო $\psi(x_1, x_2, t)$ ამ ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია, *შრედინგერის***) განტოლება* ეწოდება.

(4.3.1) განტოლებისთვის დავსვათ შემდეგი

საწყის-სასაზღვრო ამოცანა 4.3.1. ვთქვათ, ვიხილავთ l სიგრძის სიმის (ე. ი. $0 \le x \le l$) განივ რხევებს, როცა საწყის $t = 0$ მომენტში ვიცით მისი საწყისი ფორმა და საწყისი სიჩქარე:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l]; \tag{4.3.2}$$

ხოლო ბოლოები ჩამაგრებულია:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{4.3.3}$$

ვეძებთ (4.3.1) განტოლების

$$u(x,t) \in C^2(]0,l[\times]0,+\infty[) \cap C([0,l]\times[0,+\infty[), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C([0,l]x[0,+\infty[),$$

ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს (4.3.2) საწყის პირობებს და (4.3.3) სასაზღვრო პირობებს.

ამოცანას ვხსნით *ფურიეს მეთოდით*, რომელსაც აგრეთვე *ცვლადთა განცალების მეთოდს* უწოდებენ. ვთქვათ,

$$a = \text{const}.$$

ამონახსნი ვეძებოთ

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.3.4}$$

*) პ. ს. ლაპლასი (1749 – 1827) – ფრანგი ასტრონომი, მათემატიკოსი და ფიზიკოსი.
**) მ. კ. ე. ლ. პლანკი (1858 – 1947) – გერმანელი ფიზიკოს-თეორეტიკოსი.
***) ე. შრედინგერი (1887 – 1961) – ავსტრიელი ფიზიკოსი.

ნამრავლის სახით, სადაც $X(x)$ და $T(t)$ ფუნქციები ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ (4.3.4) ფორმულით მოცემულმა $u(x,t)$-მ დააკმაყოფილოს (4.3.1) განტოლება და (4.3.2), (4.3.3) პირობები.

თუ (4.3.4)-ს ჩავსვამთ (4.3.1)-ში, მივიღებთ

$$X(x)T''(t)-a^2X''(x)T(t)=0,$$

ე. ი.

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\text{const}=-\lambda^2,$$

საიდანაც გვექნება შემდეგი ორი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით:

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \tag{4.3.5}$$

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0. \tag{4.3.6}$$

როგორც ეს §3.4-ში ვნახეთ, (4.3.5) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x,\ \ A,B=\text{const}, \tag{4.3.7}$$

სახე.

A და B მუდმივების სათანადოდ შერჩევით შევეცადოთ (4.3.3) სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებას. იმისთვის, რომ

$$u(0,t)=X(0)T(t)=0,\ \ u(l,t)=X(l)T(t)=0$$

ტოლობები შესრულდეს, საჭიროა

$$X(0)=0,\ \ X(l)=0. \tag{4.3.8}$$

მათგან პირველი, (4.3.7)-ის გათვალისწინებით, გვაძლევს, რომ

$$X(0)=A\cos 0+B\sin 0=A=0,$$

ე. ი.

$$X(x)=B\sin\lambda x,$$

თუ ამ უკანასკნელს გამოვთვლით, როცა $x=l$-ს და ჩავსვავთ (4.3.8)-ის მეორეში, მივიღებთ

$$X(l)=B\sin\lambda l=0. \tag{4.3.9}$$

(4.3.9), არანულოვანი B-სთვის, შესრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\lambda l=n\pi,\ \ n=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

ე. ი. როცა

$$\lambda=\frac{n\pi}{l}. \tag{4.3.10}$$

საკმარისია დავკმაყოფილდეთ $n=1,2,\dots,$ მნიშვნელობებით. ასე რომ, ჩვენ ვიპოვეთ (4.3.5) განტოლების ამონახსნთა უსასრულო რაოდენობა:

$$X_n(x)=K_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\ \ K_n=\text{const},\ \ n=1,2,\dots, \tag{4.3.11}$$

რომელიც აკმაყოფილებს

$$X_n(0)=0,\ \ X_n(l)=0,$$

პირობებს*).

---

*)(4.3.8) პირობებს ვერ დავაკმაყოფილებდით, თუ $-\lambda^2$-ის ნაცვლად λ^2-ს ავიღებდით. მართლაც, თუ $\lambda\neq0$, მაშინ (4.3.5) განტოლების ზოგად ამონახსნს ექნებოდა

$$X(x)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}$$

სახე (იხ. §3.4). თუ მას (4.3.8) პირობებში ჩავსვამთ, მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა

$$A+B=0$$

$$e^{\lambda l}A+e^{-\lambda l}B=0$$

ჩავსვათ λ-ს (4.3.10) მნიშვნელობა (4.3.6)-ში:

$$T''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T(t)=0\,,\ \ n=1,2,\dots. \qquad (4.3.12)$$

(4.3.7)-ის მსგავსად, (4.3.12) განტოლებების ზოგად ამონახსნებს აქვთ

$$T_n(t)=C_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+D_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\,,\ \ n=1,2,\dots, \qquad (4.3.13)$$

სახე.

(4.3.11) და (4.3.13) ჩავსვათ (4.3.4)-ში, გვექნება

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\,,\ \ n=1,2,\dots, \qquad (4.3.14)$$

სადაც

$$A_n:=K_nC_n\,,\ \ B_n:=K_nD_n\,.$$

რადგან (4.3.1) განტოლება წრფივი და ერთგვაროვანია, ამიტომ (4.3.14) ამონახსნთა ნებისმიერი n რაოდენობის ჯამი და ამ ჯამის ზღვარი, როცა $n\to+\infty$, ე. ი.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (4.3.15)$$

მწკრივი იქნება (4.3.1) განტოლების ამონახსნი. ამისთვის კი უნდა შესრულდეს პირობები (იხ. ქვემოთ შენიშვნა 4.3.2), რომლებიც უზრუნველყოფენ (4.3.15) მწკრივის ორჯერ, x-ით და t-თი, გაწარმოების შესაძლებლობას.

(4.3.15) ამონახსნი ნებისმიერი A_n, B_n მუდმივებისთვის აკმაყოფილებს (4.3.3) სასაზღვრო პირობებს. შევარჩიოთ ეს მუდმივები ისე, რომ დაკმაყოფილდეს (4.3.2) საწყისი პირობები. (4.3.2)-დან პირველ საწყის პირობაში (4.3.15)-ის ჩასმა გვაძლევს

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)\,. \qquad (4.3.16)$$

იმისთვის, რომ (4.3.16) შესრულდეს, საჭიროა, რომ $\varphi(x)$ აკმაყოფილებდეს სინუსების მიმართ ფურიეს კრებად მწკრივად გაშლის პირობებს, მაშინ A_n იქნება მისი ფურიეს კოეფიციენტი:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\ \ n=1,2,\dots. \qquad (4.3.17)$$

ახლა (4.3.15) გავაწარმოოთ t-ს მიმართ და მიღებული

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-A_n\sin\frac{n\pi a}{l}t+B_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

გამოსახულება ჩავსვათ (4.3.2)-დან მეორე საწყის პირობაში:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)\,.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\psi(x)$ აკმაყოფილებს სინუსების მიმართ ფურიეს მწკრივად გაშლის პირობებს, გვექნება, რომ $\dfrac{n\pi a}{l}B_n$ მისი ფურიეს კოეფიციენტია და

სისტემას A და B-ს მიმართ, რომლის დეტერმინანტიც $e^{-\lambda l}-e^{\lambda l}\neq 0$, ვინაიდან $\lambda\neq 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $A=B=0$, რადგან სისტემა ერთგვაროვანია და მივედით ტრივიალურ (ნულოვან) $X(x)\equiv 0$ ამონახსნამდე. როცა $\lambda=0$, მაშინ $X''(x)=0$, საიდანაც $X(x)=Ax+B$. თუ ახლა შევეცდებით (4.3.8) პირობების დაკმაყოფილებას, მივიღებთ, რომ $A\cdot 0+B=0$, ე. ი. $B=0$ და $A\cdot l=0$, ე. ი. $A=0$.

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\,,\quad n=1,2,\ldots. \qquad (4.3.18)$$

ამრიგად, დასმული ამოცანის ამონახსნს აქვს (4.3.15) სახე, სადაც A_n და B_n განსაზღვრულია (4.3.17) და (4.3.18) ფორმულებით.

შენიშვნა 4.3.2. ჩვენ მიერ ამოცანა ფორმალურად იყო ამოხსნილი, რადგან (4.3.15) მწკრივს ფორმალურად ვაწარმოებდით. ეს ქმედებები სამართლიანი იქნება, თუ მოვითხოვთ, რომ:

1. $\varphi(x)$ ფუნქციას ჰქონდეს უწყვეტი წარმოებულები მეორე რიგამდე ჩათვლით, მესამე რიგის წარმოებული იყოს უბან-უბან უწყვეტი და

$$\varphi(0)=\varphi(l)\,,\quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0\,;$$

2. $\psi(x)$ ფუნქცია იყოს უწყვეტად დიფერენცირებადი, ჰქონდეს უბან-უბან უწყვეტი მეორე რიგის წარმოებული და

$$\psi(0)=\psi(l)\,.$$