ლექცია 14

4. კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები

4.1. შესავალი

ბუნების მოვლენათა მათემატიკური მოდელების აგებას, როგორც წესი, კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების გამოკვლევამდე მივყავართ.

განსაზღვრა 4.1.1.

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right) = 0 \tag{4.1.1}$$

ტოლობას, სადაც F მოცემული ფუნქციაა, x და y დამოუკიდებელი ცვლადებია, ეწოდება *კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება* u ორი დამოუკიდებელი ცვლადის საძიებელი ფუნქციის მიმართ.

განსაზღვრა 4.1.2. (4.1.1) განტოლებაში საძიებელი ფუნქციის წარმოებულის მაქსიმალურ რიგს ამ *განტოლების რიგი* ეწოდება.

განსაზღვრა 4.1.3. თუ განტოლებაში u და მისი ყველა რიგის წარმოებული წრფივად შედის, მაშინ (4.1.1) განტოლებას *წრფივი განტოლება* ეწოდება.

განსაზღვრა 4.1.4. $u(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება (4.1.1) განტოლების ამონახსნი Ω არეში, თუ მას აქვს k რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი კერძო წარმოებულები Ω არის ყველა წერტილში და იქ (4.1.1) განტოლებას იგივეობად აქცევს.

4.2. პირველი რიგის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება

განვიხილოთ შემდეგი *პირველი რიგის წრფივი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლება*

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4.2.1}$$

და შესაბამისი

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} \tag{4.2.2}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება.

ვთქვათ, (4.2.2) განტოლების ზოგად ინტეგრალს აქვს

$$\Phi(x,y) = c$$

სახე. ბოლო ტოლობის ორივე მხარის დიფერენცირებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = 0 . \tag{4.2.3}$$

თუ (4.2.2)-დან განვსაზღვრავთ dx-ს, ჩავსვამთ (4.2.3)-ში და მიღებულ ტოლობას $Q(x,y)$-ზე გავამრავლებთ, გვექნება

$$P(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 . \tag{4.2.4}$$

(4.2.4)-ისა და (4.2.1)-ის შედარებით ვასკვნით, რომ $\Phi(x,y)$ (4.2.1) განტოლების ამონახსნია, მაგრამ $\Phi(x,y)$ არ მოიცავს (4.2.1) განტოლების ყველა ამონახსნის სიმრავლეს. მართლაც, განვიხილოთ $\Psi(\Phi(x,y)) \in C^1$ ფუნქცია და დავამტკიცოთ, რომ

$$u(x,y) = \Psi(\Phi(x,y)) \tag{4.2.5}$$

(4.2.1) განტოლების ამონახსნია. ჩავსვათ (4.2.5) ფუნქცია (4.2.1) განტოლების მარცხენა მხარეში და გავითვალისწინოთ (4.2.4), მაშინ

$$P(x,y)\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial y}=\Psi'_{\Phi}\left(P(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)=0,$$

ე. ი. (4.2.5) წარმოადგენს (4.2.1) განტოლების ამონახსნს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (4.2.5) არის (4.2.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ის (4.2.1) განტოლების ნებისმიერ

$$z=\aleph(x,y)$$

ამონახსნს შეიცავს. მართლაც, თუ განვიხილავთ

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0\,,$$

$$P\frac{\partial\aleph}{\partial x}+Q\frac{\partial\aleph}{\partial y}=0$$

ტოლობებს, რომლებიც (4.2.1) განტოლების განხილვის არის ნებისმიერ წერტილში იგივურად სრულდება, როგორც სისტემას P და Q ფუნქციების მიმართ, მაშინ მისი დეტერმინანტი

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\aleph}{\partial x} & \dfrac{\partial\aleph}{\partial y}\end{vmatrix}\equiv 0\,. \qquad (4.2.6)$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში მივიღებდით, რომ

$$P\equiv 0\,,\ \ Q\equiv 0$$

და (4.2.1) განტოლება არ გვექნებოდა. (4.2.6) კი იმას ნიშნავს, რომ $\aleph$ არის Φ–ს რაიმე f ფუნქცია:

$$\aleph(x,y)=f\left[\Phi(x,y)\right].$$

ეს კი იმაზე მიუთითებს, რომ (4.2.5) ზოგადი ამონახსნია.

ანალოგიურად ხდება

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (4.2.7)$$

განტოლების ამოხსნა.

შესაბამის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას სიმეტრიული ფორმით აქვს

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (4.2.8)$$

სახე. მისი ზოგადი ამონახსნი მოიცემა ორი დამოუკიდებელი

$$\Psi_1(x,y,z)=C_1 \ \text{ და }\ \Psi_2(x,y,z)=C_2$$

პირველი ინტეგრალით. მაშინ

$$u=\Psi_1(x,y,z) \ \text{ და }\ u=\Psi_2(x,y,z) \qquad (4.2.9)$$

ფუნქციები აკმაყოფილებს (4.2.7) განტოლებას, რომლის ზოგად ამონახსნს აქვს

$$u=\Psi\left[\Psi_1(x,y,z),\Psi_2(x,y,z)\right] \qquad (4.2.10)$$

სახე, სადაც Ψ ორი ცვლადის ნებისმიერი დიფერენცირებადი ფუნქციაა.

უშუალო დიფერენცირებით და dx, dy, dz-ის, (4.2.8)-ის ძალით, მათი პროპორციული P, Q, R ფუნქციებით შეცვლით, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ (4.2.9) ფუნქციები (4.2.7) განტოლებას აკმაყოფილებს. მართლაც,

$$\frac{\partial\,\Psi_\alpha(x,y,z)}{\partial\,x}dx+\frac{\partial\,\Psi_\alpha(x,y,z)}{\partial\,y}dy+\frac{\partial\,\Psi_\alpha(x,y,z)}{\partial\,z}dz=0,\quad \alpha=1,2,$$

საიდანაც

$$P(x,y,z)\frac{\partial\,\Psi_\alpha(x,y,z)}{\partial\,x}+Q(x,y,z)\frac{\partial\,\Psi_\alpha(x,y,z)}{\partial\,y}+R(x,y,z)\frac{\partial\,\Psi_\alpha(x,y,z)}{\partial\,z}=0,\quad \alpha=1,2,$$

ასევე უშუალო გაწარმოებით დავრწმუნდებით, რომ (4.2.10) აკმაყოფილებს (4.2.7) განტოლებას. მართლაც,

$$P\left(\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_1}\frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\,x}+\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_2}\frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\,x}\right)+Q\left(\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_1}\frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\,y}+\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_2}\frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\,y}\right)+R\left(\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_1}\frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\,z}+\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_2}\frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\,z}\right)=$$

$$=\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_1}\left(P\frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\,x}+Q\frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\,y}+R\,\frac{\partial\,\Psi_1}{\partial\,z}\right)+\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,\Psi_1}\left(P\frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\,x}+Q\frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\,y}+R\,\frac{\partial\,\Psi_2}{\partial\,z}\right)=0.$$

ის, რომ (4.2.10) ზოგადი ამონახსნია, იქიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ φ (4.2.7) განტოლების რაიმე ამონახსნია,

$$P\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0\,,$$

$$P\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}+Q\frac{\partial\Psi_1}{\partial y}+R\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}=0\,,$$

$$P\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}+Q\frac{\partial\Psi_2}{\partial y}+R\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}=0$$

სისტემას არატრივიალური P, Q, R ამონახსნი აქვს. ამიტომ

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial z}\end{vmatrix}\equiv 0\,,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ φ არის Ψ_1-ის და Ψ_2-ის რაიმე f ფუნქცია:

$$\varphi(x,y,z)=f\left[\Psi_1(x,y,z),\Psi_2(x,y,z)\right].$$

ამრიგად, (4.2.10) ნებისმიერ

$$u=\varphi(x,y,z)$$

ამონახსნს შეიცავს.

ბოლოს განვიხილოთ არაერთგვაროვანი არაწრფივი

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \tag{4.2.11}$$

განტოლება.

ვთქვათ,

$$V(x,y,z)=0 \tag{4.2.12}$$

განტოლებას აკმაყოფილებს (4.2.11) განტოლების

$$z=z(x,y)$$

ამონახსნი, ამასთან

$$V_z^{'}\neq 0\,.$$

მაშინ, რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად,

$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,\;\;\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0\,,$$

საიდანაც

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{V_x^{'}}{V_z^{'}}\,,\;\;\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{V_y^{'}}{V_z^{'}}\,. \tag{4.2.13}$$

(4.2.13)-ის (4.2.11)-ში ჩასმისა და მიღებულის $V_z^{'}$-ზე გამრავლების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$P(x,y,z)\frac{\partial V}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial V}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial V}{\partial z}=0\,. \qquad (4.2.14)$$

როგორც (4.2.7) განტოლების შესწავლისას, აქაც დავადგენთ, რომ

$$V=\Psi\left[\Psi_1(x,y,z),\Psi_2(x,y,z)\right], \qquad (4.2.15)$$

სადაც

$$\Psi_1(x,y,z)=C_1 \quad \text{და} \quad \Psi_2(x,y,z)=C_2$$

წარმოადგენს

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$$

განტოლების დამოუკიდებელ პირველ ინტეგრალებს.

(4.2.12)-ისა და (4.2.15)-ის ძალით,

$$\Psi\left[\Psi_1(x,y,z),\Psi_2(x,y,z)\right]=0$$

წარმოადგენს (4.2.11) განტოლების ზოგად ინტეგრალს.