ლექცია 13

3.8.4. *n*-ური რიგის წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლება

n-ური რიგის წრფივ მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებას აქვს

$$l[y(x)] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0,\ a_i = \text{const},\ i = 0,1,\ldots,(n-1), \tag{3.8.11}$$

სახე. მისი ზოგადი ამონახსნი აიგება მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ჩეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ანალოგიურად (იხ. §3.4). ამ შემთხვევაშიც ამონახსნს ვეძებთ

$$y = e^{\lambda x},\ \lambda = \text{const}, \tag{3.8.12}$$

სახით, რასაც

$$F(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.8.13}$$

მახასიათებელ განტოლებამდე მივყავართ, რადგან

$$l\left(e^{\lambda x}\right) = e^{\lambda x}\, F(\lambda).$$

თეორემა 3.8.15. თუ λ (3.8.13) მახასიათებელი განტოლების ამონახსნია, მაშინ (3.8.12) წარმოადგენს (3.8.11) განტოლების ამონახსნს.

თეორემა 3.8.16. თუ (3.8.13) მახასიათებელი განტოლების λ_1, λ_2, …, λ_n ფესვები ერთმანეთისგან განსხვადება, მაშინ

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x},$$

ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია და (3.8.11) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i x},\ C_i = \text{const},$$

სახე.

თეორემა 3.8.17. თუ λ (3.8.13) მახასიათებელი განტოლების k ჯერადობის ფესვია, მაშინ

$$y = x^j e^{\lambda x},\ \ j = 0,1,\ldots,k-1,$$

ფუნქციები (3.8.11) განტოლების ამონახსნებია. თუ λ_i, $i = \overline{1,r}$, ფესვი k_i ჯერადობისაა მაშინ

$$\sum_{i=1}^{r} k_i = n,$$

და (3.8.11) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს

$$y = \sum_{i=1}^{r} P_{k_i-1}(x) e^{\lambda_i x} \tag{3.8.14}$$

სახე, სადაც P_{k_i-1} არის $k_i - 1$ რიგის პოლინომი.

თეორემა 3.8.18. თუ $\lambda = a + ib$ (3.8.13) მახასიათებელი განტოლების k ჯერადობის კომპლექსური ფესვია, მაშინ $x^j e^{ax}\cos bx$, $x^j e^{ax}\sin bx$, $j = 0,1,\ldots,k-1$, ფუნქციები (3.8.11) განტოლების ნამდვილი ამონახსნებია და k ჯერადობის $\lambda = a + ib$, $\overline{\lambda} = a - ib$ ურთიერთშეულლებული მახასიათებელი ფესვების შესაბამის ნაწილს ზოგად ამონახსნში აქვს

$$P_{k-1}(x)e^{ax}\cos bx + Q_{k-1}(x)e^{ax}\sin bx \tag{3.8.15}$$

სახე, სადაც $P_{k-1}(x)$ და $Q_{k-1}(x)$ $k-1$ რიგის პოლინომებია.

შენიშვნა 3.8.19. თუ (3.8.13) მახასიათებელ განტოლებას აქვს როგორც ნამდვილი, ასევე კომპლექსური მარტივი და ჯერადი ფესვები, მაშინ (3.8.11) განტოლების ზოგადი ამონახსნი შედგება (3.8.14) და (3.8.15) სახის წევრებისგან.

განსაზღვრა 3.8.20.

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \,, \quad a_i = \mathrm{const} \,, \quad i = 0,1,\ldots,(n-1) \,,$$

განტოლებას *ეილერის განტოლება* ეწოდება.

თუ მოვახდენთ

$$x = e^t \quad (t = \ln x)$$

ცვლადის გარდაქმნას, მაშინ ეილერის განტოლება დადის მუდმივკოეფიციენტებიან განტოლებაზე. მართლაც, ამაში ადვილად დავრწმუნდებით, თუ ქვემოთ მოყვანილი გამოთვლებით მიღებულ ხაზგასმულ გამოსახულებებს ეილერის განტოლებაში ჩავსვამთ:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \underline{\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}} \,, \tag{3.8.16}$$

ე. ი.

$$xy' = \frac{dy}{dt} \,;$$

ამ უკანასკნელის x-ით გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$xy'' + y' = \frac{d^2 y}{dt^2}\frac{dt}{dx} \,;$$

საიდანაც, (3.8.16)-ის გათვალისწინებით,

$$xy'' = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x} \,;$$

ე. ი.

$$x^2 y'' = \underline{\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}$$

და ა. შ.

დასასრულ, შევნიშნოთ, რომ ეილერის განტოლებას $x = 0$ წერტილში განტოლების რიგის გადაგვარება აქვს. სახელდობრ, ის ნულოვანი რიგის ხდება:

$$a_0 y(0) = 0 \,,$$

საიდანაც, როცა $a_0 \neq 0$, გამომდინარეობს, რომ

$$y(0) = 0 \,.$$