ლექცია 12

3.8. მაღალი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

3.8.1. n-ური რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება. არსებობის თეორემა

განსაზღვრა 3.8.1. n-*ური რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება
$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$$
სახის განტოლებას. კერძოდ, თუ ის უცნობი ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულის მიმართაა ამოხსნილი, მას აქვს
$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{3.8.1}$$
სახე.

F და f ფუნქციები შეიძლება x, y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ არგუმენტთაგან რომელიმეზე (ერთზე ან მეტზე) არ იყოს დამოკიდებული.

თეორემა 3.8.2. თუ $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე $\Omega \subset R^{n+1}$ არეში თავისი არგუმენტების ერთობლიობის მიმართ; y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ არგუმენტების მიმართ აკმაყოფილებს *ლიპშიცის*
$$\left| f\left(x, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}\right) - \left(x, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_{n-1}\right) \right|$$
$$\leq K\left(\left|\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}\right| + \left|\tilde{y}_1 - \tilde{\tilde{y}}_1\right| + \cdots + \left|\tilde{y}_{n-1} - \tilde{\tilde{y}}_{n-1}\right|\right),$$
$$K = \text{const}, \ \left(x, \tilde{y}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{n-1}\right) \in \Omega, \ \left(x, \tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_{n-1}\right) \in \Omega,$$
პირობას, მაშინ (3.8.1) განტოლებას
$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \ \cdots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \tag{3.8.2}$$
საწყის პირობებში [ე. ი. (3.8.1), (3.8.2) კოშის ამოცანას], სადაც $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{n-1}\right)$ არის Ω არის რაიმე ფიქსირებული შიგა წერტილი, ექნება ერთადერთი ამონახსნი $\left[x_0 - h, x_0 + h\right]$ სეგმენტზე, სადაც
$$h = \text{const} > 0$$
საკმარისად მცირეა.

დამტკიცება გამომდინარეობს თეორემა 3.7.5-დან, რამდენადაც ახალი საძიებელი y_1, $\ldots$, y_n ფუნქციების
$$y_1 := y(x), \ y_2 := \frac{dy_1}{dx}, \ y_3 := \frac{dy_2}{dx}, \ \ldots, \ y_n := \frac{dy_{n-1}}{dx}$$
ტოლობებით შემოღებით (3.8.1) განტოლება პირველი რიგის ნორმალური სახის
$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \ \ldots, \ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \ \frac{dy_n}{dx} = f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$$
სისტემაზე დაიყვანება. ■

ფიქსირებული $x = x_0$-სთვის რიცხვითი y_0, y_0', $\ldots$, y_0^{n-1} საწყისი მონაცემების ნებისმიერად ცვლილებით მივიღებთ (3.8.1) განტოლების C_1, C_2, $\ldots$, C_n პარამეტრებზე დამოკიდებულ
$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) \tag{3.8.3}$$
ამონახსნს.

განსაზღვრა 3.8.3. (3.8.3) ამონახსნს ეწოდება (3.8.3) განტოლების *ზოგადი ამონახსნი*, თუ C_1, C_2, $\ldots$, C_n პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობების შერჩევით შეიძლება მივიღოთ (3.8.1) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი, რომელიც n-ჯერ უწყვეტად წარმოებადია, ე. ი. C^n კლასიდანაა.

3.8.2. n-ური რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება

n-ური რიგის წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას აქვს

$$L[y(x)]:=y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=q(x) \tag{3.8.4}$$

სახე.

მოვითხოვოთ $p_i(x)$, $i=0,1,\ldots,n-1$, და $q(x)$ ფუნქციების უწყვეტობა რაიმე $]a,b[$ ინტერვალზე. $y^{(n)}(x)$-ის გარდა წევრების მარცხენა მხრიდან მარჯვენაში გადატანის შემდეგ (3.8.4) განტოლება მიიღებს (3.8.1) სახეს, ამასთან განტოლების მარჯვენა მხარეს ექნება შემოსაზღვრული წარმოებულები y, y' და $y^{(n-1)}$-ის მიმართ $]a,b[$ ინტერვალში შემავალ ნებისმიერ სეგმენტზე. ე. ი. განტოლების მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობას. ამრიგად, სრულდება 3.8.2 თეორემის ყველა პირობა, სადაც

$$f(x,y,y',...,y^{(n-1)})=-p_{n-1}(x)y^{(n-1)}-\cdots-p_1(x)y'-p_0(x)y+q(x).$$

ამიტომ (3.8.4), (3.8.2) კოშის ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

განსაზღვრა 3.8.4. ნებისმიერ L ოპერატორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$L[Cy(x)]=CL[y(x)],\ \ C=\text{const}\,,$$

და

$$L[y_1(x)+y_2(x)]=L[y_1(x)]+L[y_2(x)],$$

ეწოდება წრფივი ოპერატორი.

თეორემა 3.8.5. (3.8.4) განტოლების მარცხენა მხარით განსაზღვრული L დიფერენციალური ოპერატორი წრფივია.

დამტკიცება ცხადია.

ჯერ განვიხილოთ (3.8.4) განტოლების შესაბამისი

$$L[y(x)]=0 \tag*{$(3.8.4)_0$}$$

ერთგვაროვანი განტოლება.

თეორემა 3.8.6. $(3.8.4)_0$ განტოლების ამონახსნების ნებისმიერი წრფივი კომბინაცია ასევე წარმოადგენს $(3.8.4)_0$ განტოლების ამონახსნს.

დამტკიცება. თუ $y_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, ფუნქციები $(3.8.4)_0$ განტოლების ამონახსნებია, მაშინ

$$L[y_i(x)]=0\,,\ \ i=\overline{1,k}\,.$$

აქედან გამომდინარე, L ოპერატორის წრფივობის გამო ცხადია, რომ

$$L\left[\sum_{i=1}^{k}C_iy_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{k}L[C_iy_i(x)]=\sum_{i=1}^{k}C_iL[y_i(x)]=0\,.$$

განსაზღვრა 3.8.7. რაიმე ინტერვალზე განსაზღვრულ

$$\varphi_i(x)\,,\ \ i=\overline{1,n}\,, \tag{3.8.5}$$

ფუნქციებს წრფივად დამოკიდებული ეწოდება, თუ მოიძებნება ისეთი C_i, $i=\overline{1,n}$, მუდმივები, რომელთა შორის არის ნულისაგან განსხვავებულებიც და მათი წრფივი კომბინაცია მთელ ინტერვალზე ნულის ტოლია:

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\cdots+C_n\varphi_n(x)\equiv 0\,. \tag{3.8.6}$$

თუ ასეთი მუდმივების მოძებნა შეუძლებელია, ე. ი. (3.8.6) სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა $C_i=0$, $i=\overline{1,n}$, მაშინ მათ *წრფივად დამოუკიდებელი* ეწოდება.

განსაზღვრა 3.8.8. თუ (3.8.5) ფუნქციებს აქვს $(n-1)$ რიგამდე (ჩათვლით) წარმოებულები, მაშინ

$$W(x)=W\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)\right]:=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს ეწოდა *ვრონსკის*[*)] *დეტერმინანტი.*

თეორემა 3.8.9. თუ (3.8.5) ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

დამტკიცება. რადგან (3.8.5) ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია, მოიძებნება ერთდროულად ნულის არატოლი $C_i \neq 0$, $i=\overline{1,n}$, ისეთი მუდმივები, რომ შესრულდება (3.8.6). (3.8.6) ტოლობის $(n-1)$ რიგამდე გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} &C_1\varphi_1'(x)+C_2\varphi_2'(x)+\cdots+C_n\varphi_n'(x)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &C_1\varphi_1^{(n-1)}(x)+C_2\varphi_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n\varphi_n^{(n-1)}(x)=0. \end{aligned} \tag{3.8.7}$$

(3.8.6), (3.8.7) სისტემა ფიქსირებული x-სთვის C_i-ების მიმართ წარმოადგენს ერთგვაროვან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას, რომელსაც არატრივიალური ამონახსნი აქვს. ამისთვის კი აუცილებელია სისტემის დეტერმინანტი, რომელიც სწორედ ვრონსკის დეტერმინანტია, ნულის ტოლი იყოს.

თეორემა 3.8.10. თუ $(3.8.4)_0$ განტოლების $y_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, ამონახსნები წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ამონახსნების განსაზღვრის მთელ ინტერვალზე ნულისგან განსხვავებულია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. ინტერვალის რაიმე x_0 წერტილში

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}=0. \tag{3.8.8}$$

დავწეროთ წრფივ ერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა, რომლის დეტერმინანტიც (3.8.8) ვრონსკის დეტერმინანტს ემთხვევა:

$$\begin{aligned} &y_1(x_0)z_1+y_2(x_0)z_2+\cdots+y_n(x_0)z_n=0,\\ &y_1'(x_0)z_1+y_2'(x_0)z_2+\cdots+y_n'(x_0)z_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y_1^{(n-1)}(x_0)z_1+y_2^{(n-1)}(x_0)z_2+\cdots+y_n^{(n-1)}(x_0)z_n=0. \end{aligned} \tag{3.8.9}$$

[*)] ი. მ. ვრონსკი (ნამდვილი გვარი – ჰიონე; ცნობილია აგრეთვე როგორც ჰიონე-ვრონსკი, 1776 – 1853) – პოლონელი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი-მისტიკოსი.

რადგან ერთგვაროვანი (3.8.9) სისტემის (3.8.8) დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ამიტომ მას არატრივიალური ამონახსნიც აქვს:

$$z_i = \alpha_i,\ i = \overline{1,n} \text{ (ყველა } \alpha_i \text{ არ არის ნულის ტოლი).}$$

შევადგინოთ

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$$

ფუნქცია. როგორც $(3.8.4)_0$ განტოლების ამონახსნების წრფივი კომბინაცია, ის თვით იქნება $(3.8.4)_0$ განტოლების ამონახსნი, რომელიც, (3.8.9)-ის გამო, დააკმაყოფილებს

$$\widetilde{y}^{(i)}(x_0) = 0,\ i = 0,1,\ldots,(n-1),$$

საწყის პირობებს. მაგრამ, ერთი მხრივ, ამ საწყის პირობებს აკმაყოფილებს $Y \equiv 0$ ამონახსნიც; ხოლო მეორე მხრივ, $(3.8.4)_0$ განტოლებისთვის კოშის ამოცანას (იხ. თეორემა 3.8.2) ერთადერთი ამონახსნი აქვს, ამიტომ $\widetilde{y}(x) \equiv 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) = 0.$$

ამდენად, $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, ფუნქციები წრფივად დამოკიდებულია, რაც ჩვენს დაშვებას ეწინააღმდეგება და, ამდენად, თეორემა დამტკიცებულია. ■

განსაზღვრა 3.8.11. $(3.8.4)_0$ განტოლების n წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთა სისტემას *ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა* ეწოდება.

შედეგი 3.8.12. იმისთვის, რომ $(3.8.4)_0$ განტოლების n ამონახსნი ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემას შეადგენდეს, აუცილებელი და საკმარისია მათი ვრონსკის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავდებოდეს.

დამტკიცება. აუცილებლობა თეორემა 3.8.10-დან გამომდინარეობს. ვაჩვენოთ საკმარისობა. ვთქვათ, ამონახსნთა შესაბამისი ვრონსკის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია. თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, ე. ი. იმას, რომ ამონახსნები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ, თეორემა 3.8.9-ის თანახმად, ვრონსკის დეტერმინანტი ნულის ტოლი იქნება. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს საკმარისობას.

თეორემა 3.8.13. $(3.8.4)_0$ განტოლების ყოველი ამონახსნი შეიძლება მის ფუნდამენტურ ამონახსნთა წრფივი კომბინაციის სახით წარმოვადგინოთ.

დამტკიცება. ვთქვათ, $y = \varphi(x)$ $(3.8.4)_0$ განტოლების რაიმე ამონახსნია. განვიხილოთ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომლის დეტერმინანტია ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემის ვრონსკის დეტერმინანტი x_0 წერტილში, ხოლო მარჯვენა მხარეები $\varphi(x)$ ფუნქციის და მისი წარმოებულების მნიშვნელობებია x_0 წერტილში:

$$\begin{aligned} &y_1(x_0)z_1 + y_2(x_0)z_2 + \cdots + y_n(x_0)z_n = \varphi(x_0), \\ &y_1'(x_0)z_1 + y_2'(x_0)z_2 + \cdots + y_n'(x_0)z_n = \varphi'(x_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_1^{(n-1)}(x_0)z_1 + y_2^{(n-1)}(x_0)z_2 + \cdots + y_n^{(n-1)}(x_0)z_n = \varphi^{(n-1)}(x_0). \end{aligned} \tag{3.8.10}$$

რადგან (3.8.10) სისტემის დეტერმინანტი ნულისგან განსხვავებულია, ამიტომ მას აქვს ერთადერთი არატრივიალური ამონახსნი:

$$z_i = \alpha_i,\ i = \overline{1,n}.$$

მაშინ

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$$

იქნება $(3.8.4)_0$ განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც, $(3.8.10)$-ის თანახმად, აკმაყოფილებს კოშის იმავე საწყის პირობებს, რასაც $\varphi(x)$ ამონახსნი. კოშის ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თანახმად

$$\varphi(x) \equiv \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x).$$

შენიშვნა 3.8.14. თუ $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ n-ური რიგის $(3.8.4)_0$ ერთგვაროვანი განტოლების ფუნდამენტურ ამონახსნთა სისტემაა, მაშინ

$$y_0(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x),$$

სადაც $C_i \in]-\infty,+\infty[$ ნებისმიერი მუდმივებია (პარამეტრებია), წარმოადგენს $(3.8.4)_0$ განტოლების ზოგად ამონახსნს. ადვილი მისახვედრია, რომ $(3.8.4)$ განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს

$$y(x) = y_0(x) + y^*(x)$$

სახე, სადაც $y^*(x)$ $(3.8.4)$ არაერთგვაროვანი განტოლების რაიმე კერძო ამონახსნია.

არაერთგვაროვანი $(3.8.4)$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იგება ერთგვაროვანი $(3.8.4)_0$ განტოლების ზოგად ამონახსნში შემავალი ნებისმიერი მუდმივების ვარიაციით მსგავსად იმისა, როგორც ეს პირველი რიგის წრფივი არაერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევაში გავაკეთეთ [იხ. $(3.1.11)$].

ცხადია, რომ

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x)$$

განტოლების ამონახსნი შეიძლება მივიღოთ, როგორც

$$L[y] = f_1(x) \text{ და } L[y] = f_2(x)$$

განტოლებების ამონახსნების ჯამი.

3.8.3. განტოლების რიგის დაწევა

$(3.8.4)_0$ განტოლების რიგი ერთით დაიწევს, თუ მოვახდენთ

$$y' = yu(x)$$

ჩასმას, თუმცა $u(x)$-ისთვის მიღებული განტოლება უკვე, საზოგადოდ, წრფივი არ იქნება.

თუ ცნობილია $(3.8.4)_0$ განტოლების რაიმე $\varphi(x) \neq 0$ ამონახსნი, მაშინ

$$y = \varphi(x)\int u(x)dx$$

ჩასმით $(3.8.4)_0$ განტოლება $u(x)$-ის მიმართ $(n-1)$ რიგის განტოლებაზე დაიყვანება.