ლექცია 11

3.7. ნორმალური სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები

განვიხილოთ ერთი ცვლადის n უცნობი ფუნქციის შემცველი პირველი რიგის n დიფერენციალური განტოლებისგან შემდგარი სისტემა, როცა სისტემის ყოველი განტოლება შეიცავს მხოლოდ თითო, ერთმანეთისგან განსხვავებულ, უცნობი ფუნქციის წარმოებულს და განტოლებები ამოხსნილია ამ წარმოებულების მიმართ, ე. ი.

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \ i = \overline{1,n}, \tag{3.7.1}$$

სისტემა, სადაც t დამოუკიდებელი ცვლადია, ხოლო $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, საძიებელი ფუნქციებია. (3.7.1) განტოლებები არაწრფივია, რადგან F_i ფუნქციები $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, უცნობების მიმართ, საზოგადოდ, არაწრფივი ფუნქციებია.

განსაზღვრა 3.7.1. (3.7.1) განტოლებათა სისტემას ეწოდება *ნორმალური სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა*.

განსაზღვრა 3.7.2. (3.7.1) *სისტემის ამონახსნი* რაიმე $]t_0, T[$ ინტერვალზე (t_0 და T ფიქსირებულია) ეწოდება უწყვეტად დიფერენცირებად (გაწარმოებად) $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, ფუნქციებს, რომლებიც ამ ინტერვალზე აკმაყოფილებენ (3.7.1) სისტემას, ე. ი. მას იგივეობად აქცევენ.

ამოცანა 3.7.3. ვიპოვოთ (3.7.1) სისტემის ისეთი $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს

$$x_i(t_0) = x_{io}, \ i = \overline{1,n}, \tag{3.7.2}$$

საწყის პირობებს, სადაც t_0, x_{io}, $i = \overline{1,n}$, მოცემული რიცხვებია.

განსაზღვრა 3.7.4. (3.7.1), (3.7.2) ამოცანას ეწოდება *კოშის ამოცანა ნორმალური სახის პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისთვის.*

თეორემა 3.7.5. თუ F_i, $i = \overline{1,n}$, ფუნქციები თავიანთი არგუმენტების მიმართ $\Omega \subset R^{n+1}$ არის ჩაკეტვაზე უწყვეტი ფუნქციებია და, გარდა ამისა, $x_1, x_2, ..., x_n$ ცვლადების მიმართ აკმაყოფილებენ *ლიპშიცის*

$$\left| F_i(t, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n) - F_i(t, \tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, ..., \tilde{\tilde{x}}_n) \right| \le \sum_{i=1}^{n} A_i \left| \tilde{x}_i - \tilde{\tilde{x}}_i \right| \tag{3.7.3}$$

პირობას, მაშინ არსებობს $h = const > 0$ ისეთი, რომ (3.7.1), (3.7.2) კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი t_0 წერტილის შემცველ $]t_0 - h, t_0 + h[$ მიდამოში.

განსაზღვრა 3.7.6. თუ ფიქსირებული $t = t_0$-სთვის დავასახელებთ სხვადასხვა საწყის x_{io}, $i = \overline{1,n}$, მნიშვნელობებს, მივიღებთ C_1, …, C_n ნებისმიერ n მუდმივზე დამოკიდებულ

$$x_i = x_i(t, C_1, \ldots, C_n), \ i = \overline{1,n}, \tag{3.7.4}$$

ამონახსნს, რომელსაც (3.7.1) *სისტემის ზოგადი ამონახსნი* ეწოდება.

განსაზღვრა 3.7.7. (3.7.4) ამონახსნს ეწოდება *მდგრადი ამონახსნი*, თუ საწყისი პირობების მცირედი ცვლილება იწვევს ამონახსნის მცირედ ცვლილებას.

განსაზღვრა 3.7.8. (3.7.1) სისტემას ეწოდება *ავტონომიური სისტემა*, თუ F_i, $i = \overline{1,n}$, ფუნქციები უშუალოდ არაა დამოკიდებული t-ზე, ე. ი.

$$F_i = F_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$

განსაზღვრა 3.7.9. თუ (3.7.1) სისტემის ზოგად (3.7.4) ამონახსნს ნებისმიერი მუდმივების მიმართ ამოვხსნით, მივიღებთ, რომ

$$\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i, \ i = \overline{1,n}. \tag{3.7.5}$$

თითოეულს (3.7.5) განტოლებებიდან ეწოდება *პირველი ინტეგრალი*. პირველი ინტეგრალების (3.7.5) ერთობლიობა შეადგენს *ზოგად ინტეგრალს*.

(3.7.1) სისტემას შეიძლება ჰქონდეს უამრავი პირველი ინტეგრალი. იმისთვის, რომ მივიღოთ ზოგადი ინტეგრალი, საჭიროა, ვიპოვოთ n დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალი, ე. ი. ისეთი, რომელთა ამოხსნა შეიძლება x_1, x_2, $\ldots$, x_n-ის მიმართ. ამისთვის კი, არაცხადი ფუნქციის არსებობის თეორემის თანახმად, (3.5.7) სისტემის შესაბამისი იაკობიანი

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}\neq 0\,.$$

პირველი ინტეგრალების საშუალებით სისტემის ინტეგრება განსაკუთრებით მოსახერხებელია, როცა სისტემა სიმეტრიული ფორმითაა ჩაწერილი.

გადავწეროთ (3.7.1) სისტემა შემდეგი სახით:

$$\frac{dx_i}{F_i}=\frac{dt}{1}\,,\ \ i=\overline{1,n}\,,$$

ან გაშლილი სახით:

$$\frac{dx_1}{F_1}=\frac{dx_2}{F_2}=...=\frac{dx_n}{F_n}=\frac{dt}{1}\,. \qquad (3.7.6)$$

თუ შემოვიღებთ

$$x_{n+1}:=t$$

აღნიშვნას, მაშინ შეიძლება, (3.7.1) სისტემა შემდეგი *სიმეტრიული ფორმით* გადაიწეროს:

$$\frac{dx_1}{F_1}=\frac{dx_2}{F_2}=...=\frac{dx_n}{F_n}=\frac{dx_{n+1}}{F_{n+1}}\,,$$

სადაც, განსახილველ შემთხვევაში, $F_{n+1}=1$.

პირველი ინტეგრალების მოსაძებნად გამოიყენება *ინტეგრებად კომბინაციათა მეთოდი*. მის არსს გავეცნოთ კონკრეტულ მაგალითზე.

მაგალითი 3.7.10. განვიხილოთ

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y} \qquad (3.7.7)$$

სისტემა. პროპორციების ცნობილი თვისების[*)] თანახმად, თუ პროპორციის პირველ წევრს გამოვაკლებთ მეორეს და პირველს გამოვაკლებთ მესამეს, მივიღებთ შემდეგ ტოლ სიდიდეებს:

$$\frac{dx-dy}{y-x}=\frac{dx-dz}{z-x}\,,\ \text{ე. ი.}\ \ \frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{d(x-z)}{x-z}\,.$$

აქედან ინტეგრებით გვექნება

$$\ln|x-y|=\ln|x-z|+\ln|C_1|\,,$$

საიდანაც

---

*) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Rightarrow\frac{a}{c}-1=\frac{b}{d}-1\ \Rightarrow\ \frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d}\ \Rightarrow\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}\,.$

ანალოგიურად, $\frac{a-e}{b-f}=\frac{e}{f}$ და, საბოლოოდ, $\frac{a-c}{b-d}=\frac{a-e}{b-f}\,.$

$$\left|\frac{x-y}{x-z}\right| = |C_1|,$$

ე.ი.,

$$\frac{x-y}{x-z} = \pm C_1$$

და, C_1-ის ნებისმიერობის გამო,

$$\frac{x-y}{x-z} = C_1 . \tag{3.7.8}$$

ანალოგიურად, თუ მეორეს გამოვაკლებთ მესამეს, მივიღებთ

$$\frac{x-y}{y-z} = C_2 . \tag{3.7.9}$$

მაგრამ (3.7.8) და (3.7.9) პირველი ინტეგრალები დამოუკიდებელი არაა. მართლაც,

$$\frac{\partial\left(\frac{x-y}{x-z}, \frac{x-y}{y-z}\right)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{x-z} & \frac{-(y-z)-(x-y)}{(y-z)^2} \\ \frac{x-y}{(x-z)^2} & \frac{x-y}{(y-z)^2} \end{vmatrix} = \frac{y-x}{(x-z)(y-z)^2} - \frac{(x-y)(z-x)}{(y-z)^2(x-z)^2}$$

$$= \frac{(y-x)(x-z)-(x-y)(z-x)}{(x-z)^2(y-z)^2} = 0 ,$$

როცა $x \neq z$, $y \neq z$. მაშასადამე, (3.7.8) და (3.7.9) პირველი ინტეგრალები დამოკიდებელია.

შევნიშნოთ, რომ მეორე პირველი ინტეგრალი, რომელიც (3.7.8)-თან ერთად ქმნის დამოუკიდებელ პირველ ინტეგრალთა სისტემას, არის

$$(x-y)^2(x+y+z) = C_2 . \tag{3.7.10}$$

ამის დასამტკიცებლად (3.7.7) ტოლი უსასრულოდ მცირე სიდიდეები გავუტოლოთ ახალი t დამოუკიდებელი ცვლადის dt დიფერენციალს

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = dt .$$

მაშინ, ცხადია,

$$dx = (y+z)\,dt , \quad dy = (z+x)\,dt , \quad dz = (x+y)\,dt . \tag{3.7.11}$$

შევკრიბოთ ეს ტოლობები:

$$d(x+y+z) = 2(x+y+z)\,dt . \tag{3.7.12}$$

(3.7.11)-ის პირველ ტოლობას გამოვაკლოთ მეორე ტოლობა:

$$d(x-y) = -(x-y)\,dt . \tag{3.7.13}$$

(3.7.12) და (3.7.13)-დან, შესაბამისად, მივიღებთ, რომ

$$\frac{d(x+y+z)}{x+y+z} = 2\,dt , \text{ ე. ი. } d\ln|x+y+z| = 2\,dt$$

და

$$-\frac{d(x-y)}{(x-y)} = dt , \text{ ე. ი. } -d\ln|x-y| = dt .$$

აქედან

$$d\ln|x+y+z| = -2d\ln|x-y| .$$

მაშასადამე,

$$\ln|x+y+z| = -2\ln|x-y| + \ln|C_2| .$$

საიდანაც

$$\ln\left[(x-y)^2|x+y+z|\right] = \ln|C_2| .$$

მაშინ

$$(x-y)^2|x+y+z|=|C_2|, \quad \text{ე.ი.}, \quad (x-y)^2(x+y+z)=\pm C_2$$

და, საბოლოოდ, C_2-ის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ $(3.7.10)$ პირველ ინტეგრალს.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ $(3.7.8)$ და $(3.7.10)$ პირველი ინტეგრალები დამოკიდებული არ არის, მართლაც,

$$\frac{\partial\left(\dfrac{x-z}{x-y},(x-y)^2(x+y+z)\right)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} \dfrac{x-z}{(x-y)^2} & -2(x-y)(x+y+z)+(x-y)^2 \\ -\dfrac{1}{x-y} & (x-y)^2 \end{vmatrix}$$

$$=x-z-2(x+y+z)+x-y=-3z-3y=-3(y+z)\neq 0\,,$$

როცა $y\neq -z$.

3.7.1. „მტაცებელი – მსხვერპლის“ მათემატიკური მოდელი

3.6.2 პარაგრაფში ჩვენ განხილვის ობიექტად ავიღეთ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობა და შევეცადეთ, შეგვექმნა რომელიმე ერთი ცალკეული პოპულაციის განვითარების მათემატიკური მოდელი იმ პირობით, რომ პოპულაცია იზოლირებულია.

ახლა გადავდგათ შემდეგი ნაბიჯი და უფრო მეტად დავუახლოვდეთ რეალურ სიტუაციას.

განვიხილოთ ორი სახეობის ურთიერთქმედება. შევისწავლოთ ორი „იზოლირებული“ პოპულაციის განვითარების დინამიკა სხვადასხვა ფაქტორების გათვალისწინებით.

სხვადასხვა სახეობის ორ პოპულაციას შორის ურთიერთქმედების მექანიზმები შეიძლება სამ კატეგორიად დავყოთ:

ა) ***კონკურენცია***, როდესაც ერთი სახეობის განვითარება მეორის განვითარებაზე დამთრგუნველ ზეგავლენას ახდენს.

ბ) ***კომენსალიზმი***, როდესაც ერთი სახეობა მეორის განვითარების სტიმულირებას ახდენს.

გ) ***მტაცებლობა***, როდესაც ერთი სახეობა („მტაცებელი“) მეორე სახეობით („მსხვერპლით“) იკვებება და, მაშასადამე, მისი რაოდენობის შემცირებას იწვევს, ხოლო „მსხვერპლი“ ხელს უწყობს „მტაცებლების“ რაოდენობის ზრდას.

ჩვენს მიზანს არ შეადგენს სახეობათა ურთიერთქმედების ამ მექანიზმების დეტალური განხილვა. შევეცდებით, მათემატიკური მოდელის საშუალებით აღვწეროთ ისეთი ორი სახეობის პოპულაციის განვითარების დინამიკა, რომლებიც ერთმანეთთან „მტაცებელი – მსხვერპლის“ პრინციპით ურთიერთქმედებენ.

მათემატიკური მოდელის შედგენისას ვიგულისხმებთ, რომ მსხვერპლს ყოველთვის აქვს საშუალება, იპოვოს საკვები, ხოლო ყოველი შეხვედრისას მტაცებელი აუცილებლად კლავს მსხვერპლს, რომელიც მისი ერთადერთი საკვებია. ცხადია, რომ ამ დაშვების შედეგად მივიღებთ საკმაოდ „იდეალიზებულ“ მოდელს, რომლის გამოყენებაც მხოლოდ ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება, თუმცა ამ მოდელის საშუალებით ბევრი საინტერესო, პრაქტიკოსთვის მნიშვნელოვანი დასკვნის გაკეთებაა შესაძლებელი.

თუ ამ სიტუაციას განვიხილავთ, ცხადი გახდება, რომ მტაცებლების რაოდენობა მანამ იმატებს, სანამ მათ საკმარისად აქვთ საკვები, ე. ი. სანამ მსხვერპლი საკმარისი რაოდენობითაა. ბოლოს და ბოლოს დადგება მომენტი, როდესაც მტაცებლების ზეგავლენით მსხვერპლის რაოდენობა საკმარისად შემცირდება, ამ დროს მტაცებლებს საკვები არ ეყოფათ და დაიწყება მათი რაოდენობის შემცირება. ეს იქამდე მიგვიყვანს, რომ მტაცებლების რაოდენობის შემცირების გამო დაიწყება მსხვერპლის რაოდენობის მატება. ეს კვლავ მისცემს სტიმულს მტაცებლების რაოდენობის ზრდას და ა. შ. ციკლი კვლავ განმეორდება. „მტაცებელი – მსხვერპლის“ ტიპის ურთიერთქმედება საკმაოდ ხშირად გვხვდება სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანის შესწავლისას. პრობლემის აქტუალურობის გამო მისი შესწავლა ბოლო პერიოდში როგორც ეკოლოგიის, ისე სხვა დარგის მეცნიერების, მათ შორის მათემატიკოსთა, ყურადღების ცენტრში მოექცა.

აღვნიშნოთ $x = x(t)$ და $y = y(t)$-თი შესაბამისად მტაცებლისა და მსხვერპლის რაოდენობა t მომენტში. იმისთვის, რომ ჩამოვაყალიბოთ მათემატიკური მოდელი, რომელიც გარკვეულ მიახლოებაში პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების დინამიკას აღწერს, გავაკეთოთ რამდენიმე დაშვება, რაც ამოცანას გაამარტივებს. ჯერ ერთი, დავუშვათ, რომ იმ შემთხვევათა რაოდენობა, როდესაც მტაცებელი მსხვერპლს კლავს, დამოკიდებულია მათ შეხვედრათა სიხშირეზე. ჩავთვალოთ, რომ ეს სიდიდე xy ნამრავლის პროპორციულია. მეორე, უგულებელვყოთ ის დრო, რომელიც მტაცებელს მსხვერპლის შესაჭმელად სჭირდება. რაც შეეხება ბუნებრივი შობადობისა და სიკვდილის პირობებში პოპულაციის რაოდენობის ცვლილებას, ის (3.6.12) სახის ლოჯისტიკური განტოლებების საშუალებით აღვწეროთ.

(3.6.6) სახის ლოჯისტიკური განტოლების საშუალებით მივიღებთ, რომ ორივე პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილება აღიწერება შემდეგი პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საშუალებით:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t), \tag{3.7.14}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = cy(t) - d\,x(t)y(t), \tag{3.7.15}$$

სადაც a, b, c და d გარკვეული დადებითი მუდმივებია.

(3.7.14), (3.7.15) განტოლებები პირველად გამოყვანილ იქნა 1925 წელს და ცნობილია *ლოტკა*[*)]*-ვოლტერას*[**)] განტოლებების სახელწოდებით.

აქ გათვალისწინებულია ის გარემოება, რომ მსხვერპლის არარსებობის შემთხვევაში მტაცებელთა რაოდენობა ბუნებრივი სიკვდილის გამო იკლებს (მათ საკვები არ აქვთ) და ამიტომ ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე x სიდიდის პროპორციულია პროპორციულობის უარყოფითი კოეფიციენტით. მსხვერპლის საკმაო რაოდენობით არსებობის შემთხვევაში $\left(y > \frac{a}{b}\right)$, მტაცებელთა რაოდენობა იზრდება. ანალოგიურად, მტაცებლების არარსებობის შემთხვევაში მსხვერპლთა რაოდენობა იმატებს და ამ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე y სიდიდის პროპორციულია პროპორციულობის დადებითი კოეფიციენტით (აქ, ისევე როგორც ადრე, ვგულისხმობთ, რომ მსხვერპლის საკვების რაოდენობა შემოსაზღვრული არ არის). ამავე დროს, თუ არსებობენ საკმაო რაოდენობის მტაცებლები $\left(x > \frac{c}{d}\right)$, მაშინ მსხვერპლის რაოდენობა იკლებს.

ამოცანა ჯერჯერობით მთლიანად დასმული არ არის, უნდა იყოს ცნობილი საწყის $t = t_0$ მომენტში თითოეულ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობა. ამრიგად, (3.7.14), (3.7.15) განტოლებებს უნდა დაემატოს ე. წ. საწყისი პირობები

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{3.7.16}$$

სადაც x_0 და y_0 მოცემული დადებითი რიცხვებია.

(3.7.14)-(3.7.16) ამოცანა წარმოადგენს კოშის ამოცანას პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისთვის. შევნიშნოთ, რომ §3.6.2-ში განხილული კოშის ამოცანებისგან განსხვავებით არ არსებობს ამ ამოცანის ამონახსნის ანალიზური წარმოდგენა. ამ ამოცანის ამონახსნი შეიძლება მიღებულ იქნეს მხოლოდ რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. რაც შეეხება (3.7.14)-(3.7.16) კოშის ამოცანის ამონახსნის არსებობას და ერთადერთობას, იგი გამომდინარეობს თეორემა 3.7.5-დან, რადგან (3.7.14), (3.7.15) სისტემის მარჯვენა მხარეები y-ის მიმართ ლიპშიცის პირობას აკმაყოფილებს.

შევეცადოთ, გამოვიკვლიოთ (3.7.14)-(3.7.16) ამოცანა და დავადგინოთ კავშირი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს შორის. ამ მიზნით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

[*)] ა.ჯ. ლოტკა (1880-1949), ამერიკელი ბიოფიზიკოსი (დაიბადა უკრაინაში)

[**)] ვ. ვოლტერა (1860-1940), იტალიელი მათემატიკოსი

$$\tau = ct\,,\ \ \alpha = \frac{a}{c}\,,\ \ U(\tau) = \frac{d}{c}x\left(\frac{\tau}{c}\right),\ \ V(\tau) = \frac{b}{a}y\left(\frac{\tau}{c}\right).$$

ამ აღნიშვნების შემდეგ, რადგან

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c}{d}\frac{dU}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{c^2}{d}\frac{dU}{dt}, \quad -ax = -\frac{a\,c}{d}U(\tau), \quad bxy = \frac{ac}{d}U(\tau)\,V(\tau);$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{b}\frac{dV}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{ac}{b}\frac{dV}{dt}, \quad cy = \frac{a\,c}{b}V(\tau), \quad -dxy = \frac{ac}{b}U(\tau)\,V(\tau),$$

(3.7.14)-(3.7.15) დიფერენციალური განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{dU}{d\tau} = \alpha U(V-1)\,,\ \ \frac{dV}{d\tau} = V(1-U)\,, \tag{3.7.17}$$

სადაც $\alpha > 0$.

ამ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას დაემატება

$$U(\tau_0) = U_0\,,\ \ V(\tau_0) = V_0 \tag{3.7.18}$$

საწყისი პირობები, სადაც

$$\tau_0 = ct_0\,,\ \ U_0 = \frac{d}{c}x_0\,,\ \ V_0 = \frac{b}{a}y_0\,.$$

დასმული ამოცანების ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე, შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ (3.7.17), (3.7.18) ამოცანის დადებით ამონახსნებს.

(3.7.17) განტოლებათა სისტემა შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$\frac{dU}{d\tau} = -\alpha U + \alpha UV\ ,\ \ \frac{dV}{d\tau} = V - UV\ . \tag{3.7.19}$$

(3.7.19) სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ α-ზე და შემდეგ ეს განტოლებები შევკრიბოთ:

$$\frac{dU}{d\tau} + \alpha\frac{dV}{d\tau} = -\alpha U + \alpha V\ . \tag{3.7.20}$$

ამის შემდეგ (3.7.19) განტოლებათა სისტემა შემდეგი სახით გადავწეროთ:

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{d\tau} = -\alpha + \alpha V\ ,\ \ \frac{1}{V}\frac{dV}{d\tau} = 1 - U$$

ან რაც იგივეა

$$\frac{d\ln U}{d\tau} = -\alpha + \alpha V\ ,\ \ \frac{d\ln V}{d\tau} = 1 - U\ . \tag{3.7.21}$$

(3.7.21) სისტემის მეორე განტოლება გავამრავლოთ α-ზე და მივუმატოთ პირველს, მივიღებთ:

$$\frac{d\ln U}{d\tau} + \alpha\frac{d\ln V}{d\tau} = \alpha V - \alpha U\ .$$

ეს უკანასკნელი გამოვაკლოთ (3.7.20) განტოლებას, რის შემდეგადაც გვექნება:

$$\frac{dU}{d\tau} + \alpha\frac{dV}{d\tau} - \frac{d\ln U}{d\tau} - \frac{d\ln V^{\alpha}}{d\tau} = 0\,.$$

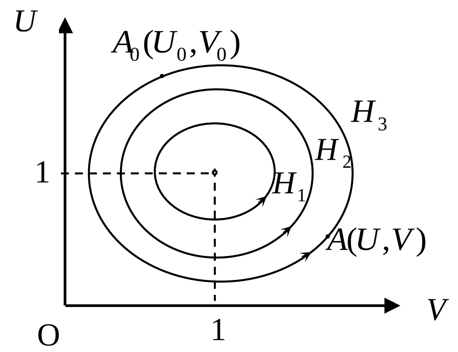
ვაინტეგროთ ეს განტოლება τ_0-დან τ-მდე, მივიღებთ:

$$U + \alpha V - \ln\left(UV^{\alpha}\right) = H\ , \tag{3.7.22}$$

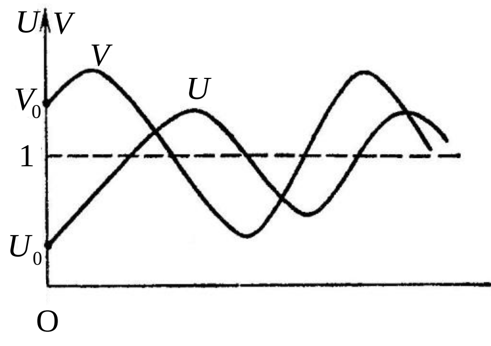
სადაც

$$H = U_0 + \alpha V_0 - \ln\left(U_0 V_0^{\alpha}\right).$$

(3.7.22) საშუალებას იძლევა, ავაგოთ მისი შესაბამისი წირები H-ის სხვადასხვა მნიშვნელობისთვის: H_1, H_2, H_3 (იხ. ნახ. 3.7.1).



ნახ. 3.7.1



ნახ. 3.7.2

როგორც ვხედავთ, (U,V) სიბრტყეზე მივიღებთ ჩაკეტილ წირთა ოჯახს. დავუშვათ, რომ (U_0, V_0) საწყისი მონაცემები მოცემულია A წერტილის ტრაექტორიაზე, რომელიც $H = H_3$ მნიშვნელობას შეესაბამება. ვთქვათ, A_0 წერტილი შეესაბამება საწყის მნიშვნელობებს, მაშინ, როგორც ეს ნახ. 3.7.1-დან ჩანს $U_0 > 1$ და $V_0 < 1$. (3.7.17) სისტემის პირველი განტოლება გვიჩვენებს, რომ საწყის ეტაპზე U ცვლადი იკლებს. ანალოგიური თვისება გააჩნია V ცვლადსაც. შემდეგ, როდესაც U მიიღებს მნიშვნელობას $U=1$, მაშინ $\frac{dV}{d\tau}=0$. შემდეგ, τ-ს ცვლილების გარკვეულ შუალედში, V ცვლადი ზრდას იწყებს, ხოლო U ცვლადი კლებას აგრძელებს. როდესაც V მიიღებს მნიშვნელობას $V=1$, მაშინ $\frac{dU}{d\tau}=0$ და ამ მომენტიდან დაიწყებს ზრდას U ცვლადიც და ა. შ. რადგან $A(U,V)$ წერტილი ჩაკეტილ ტრაექტორიაზე მოძრაობს, ეს იმას ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემის $U(\tau)$ და $V(\tau)$ ამონახსნი პერიოდულ ფუნქციებს წარმოადგენს, ამასთან რხევა ორივე პოპულაციაში ($U(\tau)$ და $V(\tau)$ ფუნქციების საშუალებით აღიწერება პოპულაციებში ინდივიდთა რაოდენობა) სხვადასხვა ფაზაში ხდება. მოვიყვანოთ $U(\tau)$ და $V(\tau)$ ფუნქციების ტიპური გრაფიკი იმ შემთხვევაში, როდესაც $V_0 > 1$, $U_0 < 1$, $\tau_0 = 0$ (იხ. ნახ. 3.7.2).

შევნიშნოთ, რომ რადგან მტაცებლების საკვების რაოდენობა შემოსაზღვრულია (ეს რაოდენობა მსხვერპლის რაოდენობით განისაზღვრება), ამიტომ მტაცებლების პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის აღწერისთვის მიზანშეწონილია (3.6.12) ლოჯისტიკური განტოლების გათვალისწინება. მაშინ ორი პოპულაციის ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილება „მტაცებელი – მსხვერპლის“ ტიპის ურთიერთქმედების შემთხვევაში აღიწერება შემდეგ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საშუალებით:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 + cxy, \quad \frac{dy}{dt} = ey - dxy,$$

სადაც a, b, c, d, e გარკვეული დადებითი მუდმივებია, ხოლო $x(t)$ და $y(t)$ კვლავ შესაბამისად მტაცებლისა და მსხვერპლის რაოდენობას გამოსახავს t მომენტში.

ცხადია, რომ ჩვენ მიერ მოყვანილი მათემატიკური მოდელები ორი პოპულაციის ურთიერთქმედების მექანიზმს გარკვეულ, საკმარისად მკაცრი შეზღუდვების პირობებში აღწერს. უფრო ზუსტი მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად მრავალი სხვა ფაქტორი (მაგ., პოპულაციის ინდივიდთა ასაკი, გამრავლების სეზონურობა, ის, რომ მტაცებელი ყოველი შეხვედრისას ვერ ახერხებს მსხვერპლის დაჭერას და ა. შ.) უნდა იქნეს გათვალისწინებული. ცხადია, ამ ფაქ-

ტორების გათვალისწინება მათემატიკური მოდელს საკმაოდ გაართულებს, მაგრამ სამაგიეროდ უფრო კარგად აღწერს რეალურ სიტუაციას.