ლექცია 10

3.6. ბერნულის*) განტოლება

განსაზღვრა 3.6.1.

$$y' = P(x)y + Q(x)y^m \tag{3.6.1}$$

განტოლებას, სადაც m ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ხოლო $P(x)$ და $Q(x)$ მოცემული ფუნქციებია, *ბერნულის განტოლება* ეწოდება.

როცა $m = 0$, მივიღებთ ჩვენ მიერ ადრე გამოკვლეულ წრფივ განტოლებას, ხოლო როცა $m = 1$, მივიღებთ განტოლებას განცალებად ცვლადებში. ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ $m \neq 0{,}1$. მაშინ ბერნულის განტოლება არაწრფივი განტოლება იქნება. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ შეიძლება, ის წრფივ განტოლებაზე დავიყვანოთ. შემოვიღოთ ახალი საძიებელი

$$z := y^{1-m} \tag{3.6.2}$$

ფუნქცია, მაშინ

$$\frac{dz}{dx} = (1-m)y^{-m}y'. \tag{3.6.3}$$

ახლა, თუ (3.6.1)-ის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $(1-m)\,y^{-m}$-ზე, მაშინ (3.6.2)-ისა და (3.6.3)-ის გათვალისწინებით, გვექნება, რომ

$$(1-m)y^{-m}y' = (1-m)P(x)y^{1-m} + (1-m)Q(x)$$

და

$$\frac{dz}{dx} = (1-m)P(x)z + (1-m)Q(x).$$

ეს უკანასკნელი კი ჩვენ მიერ ცხადი სახით ამოხსნილ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას წარმოადგენს [იხ. (3.1.11)].

შენიშვნა 3.6.2. ბერნულის განტოლებაზე უფრო ზოგად, როცა $m = 2$,

$$y' = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x)$$

განტოლებას *რიკატის***) *განტოლება* ეწოდება. თუ $P(x) \equiv 0$, $Q(x) = a = const$, და $R(x) = b$, $b = const$, ცვლადები განცალდება***), ხოლო თუ $R(x) = bx^{-2}$, $b = const$, რიკატის

$$y' = ay^2 + bx^{-2}$$

განტოლების ამონახსნი ელემენტარულ ფუნქციებში იწერება. მართლაც, თუ შემოვიღებთ ახალ საძიებელ ფუნქციას (დამოკიდებულ ცვლადს)

$$y = \frac{1}{z}$$

ტოლობით, რიკატის განტოლება დავა ერთგვაროვან განტოლებაზე [იხ. (3.3.2)], რადგან

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{x^2} \quad \text{და} \quad \frac{dz}{dx} = -a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2.$$

---

*) დ. ბერნული (1700 – 1782) – იტალიელი მათემატიკოსი, მექანიკოსი, ფიზიოლოგი, ექიმი.

**) ი. ფ. რიკატი (1676 – 1754) – იტალიელი მათემატიკოსი.

***) მართლაც,

$$\frac{dy}{dx} = ay^2 + b,$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{ay^2 + b} = dx.$$

3.6.1. ბალანსის მეთოდი

დავუშვათ, Σ ზედაპირით შემოსაზღვრულ Ω მოცულობაში მიმდინარე რაიმე პროცესი ან მოვლენა დროის t მომენტში ადიტიური $G(t)$ სიდიდის მნიშვნელობით ხასიათდება. G სიდიდის ადიტიურობა შემდეგნაირად უნდა გავიგოთ: თუ Ω მოცულობას გავყოფთ ორ ნაწილად $\Omega=\Omega_1+\Omega_2$ და თითოეულ ნაწილში მიმდინარე იგივე პროცესი ან მოვლენა დროის t მომენტში ხასიათდება $G_1(t)$ და $G_2(t)$ სიდიდეების მნიშვნელობებით, მაშინ $G(t)=G_1(t)+G_2(t)$. ამ $G(t)$ სიდიდეს შეიძლება ჰქონდეს მასის, ენერგიის, იმპულსის, რაიმე რეგიონში მოსახლეობის რაოდენობის, საწარმოო ფონდების და ა. შ. შინაარსი. ცხადია, რომ თუ $G(t)$ აღნიშნავს რაიმე რეგიონში მოსახლეობის რაოდენობას, მაშინ Ω წარმოადგენს ამ რეგიონის შესაბამის ზედაპირს, ხოლო Σ-ს ქვეშ ამ ზედაპირის შემომსაზღვრელი წირი იგულისხმება.

ჩვენი მიზანია, გავარკვიოთ, თუ რამ შეიძლება გამოიწვიოს დროთა განმავლობაში $G(t)$ სიდიდის ცვლილება რაიმე ათვლის სისტემის მიმართ ფიქსირებულ (უცვლელ) Ω მოცულობაში და როგორ შეიძლება ამ ცვლილების რიცხვითი მახასიათებლების გამოთვლა.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი. ვთქვათ, Ω რაიმე დასახლებული პუნქტია, Σ კი მისი საზღვარი. მაშინ ამ დასახლებულ პუნქტში მოსახლეობის $G(t)$ რაოდენობის შეცვლის ორი ძირითადი, ერთმანეთისგან განსხვავებული ტიპის მიზეზი არსებობს.

პირველი მიზეზია დასახლებული პუნქტიდან მოსახლეობის გამგზავრება ანუ მისი Σ საზღვრის გადალახვა შიგნიდან და დასახლებულ პუნქტში მოსახლეობის ჩამოსვლა, ანუ Σ საზღვრის გადალახვა გარედან. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, დასახლებულ პუნქტში მოსახლეობის $G(t)$ რაოდენობის ცვლილების ერთი მიზეზია ამ პუნქტის შემომსაზღვრელი Σ წირის გამჭოლი მოსახლეობის „ნაკადების" არსებობა.

მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების მეორე მიზეზია დასახლებულ პუნქტში ადამიანების დაბადება და სიკვდილი. აქაც, თუ სხვა სიტყვებით დავახასიათებთ ამ პროცესს, შეიძლება ვთქვათ, რომ Ω-ს შიგნით მოსახლეობის „წყაროების" მოქმედების შედეგად ხდება რაოდენობრივი ცვლილებები. "წყაროების" ცნებაში ვგულისხმობთ $G(t)$ სიდიდის როგორც „გაჩენას", ისე „გაქრობასაც". ამ „გაჩენისა" და „გაქრობის" კონკრეტული მიზეზები შეიძლება სხვადასხვა იყოს, მაგრამ ამ მიზეზების დეტალური განხილვა ჩვენს მიზანს არ წარმოადგენს.

ამრიგად, Σ ზედაპირით შემოსაზღვრულ Ω მოცულობაში $G(t)$ სიდიდის ცვლილებას ორი სახის პროცესი განაპირობებს: Σ ზედაპირის გამჭოლი $G(t)$ სიდიდის „ნაკადი" და თვით მოცულობაში $G(t)$ სიდიდის „წყაროების" მოქმედება.

როგორც აღვნიშნეთ, საზოგადოდ, შესაძლებელია არსებობდეს როგორც „ნაკადების", ასევე „წყაროების" სხვადასხვა სახეობა. კერძოდ, ზემოთ განხილულ მაგალითში მოსახლეობის რაოდენობის ცვლილების შესახებ როგორც „ნაკადის", ასევე „წყაროების" ორ-ორი სახეობა გვქონდა: „გასვლა" და „შემოსვლა", „დაბადება" და „სიკვდილი". ამ შემთხვევაში მათემატიკური მოდელის შედგენისას გათვალისწინებულ უნდა იქნეს როგორც ნაკადების, ასევე წყაროების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგები.

გადავიდეთ ახლა რაოდენობრივი თანაფარდობების დადგენაზე.

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $G(t)$ ფუნქცია უწყვეტი და წარმოებადია, მაშინ $\dfrac{dG}{dt}$ წარმოებული Ω მოცულობაში G სიდიდის ცვლილების სიჩქარეს, ანუ Ω მოცულობაში დროის ერთეულში G სიდიდის ცვლილებას წარმოადგენს.

$G(t)$ *სიდიდის იმ რაოდენობას, რომელიც ნაკადების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგად გამჭოლი მოძრაობით გაივლის* Σ *ზედაპირს დროის ერთეულში, ვუწოდოთ „*G *სიდიდის ნაკადი" და აღვნიშნოთ იგი* Q *სიმბოლოთი, ხოლო* G *სიდიდის იმ რაოდენობას, რომელიც წყაროების ყველა სახეობის ერთობლივი მოქმედების შედეგად ჩნდება* Ω

მოცულობაში დროის ერთეულში, ვუწოდოთ „G სიდიდის წყაროების სიმძლავრე“ და აღვნიშნოთ ივი F-ით.

ახლა უკვე სირთულეს აღარ წარმოადგენს, შევადგინოთ „ბალანსი“[*)] – Ω მოცულობაში G სიდიდის შემცველობის ცვლილება დროის ერთეულში გავუტოლოთ G სიდიდის ნაკადისა და წყაროების სიმძლავრის ჯამს:

$$\frac{dG}{dt} = Q + F \,. \tag{3.6.4}$$

ამ განტოლებას *ბალანსის განტოლებას* ვუწოდებთ. სწორედ ის წარმოადგენს ბალანსის მეთოდის მათემატიკურ ფორმულირებას.

განვიხილოთ ეკოლოგიის ზოგიერთი მათემატიკური მოდელი, რომელშიც დიფერენციალური განტოლებები იქნება გამოყენებული. ამ შემთხვევაში დროის ცვლილება უწყვეტად ხდება და მათემატიკური მოდელის საშუალებით დროის ნებისმიერ მომენტში ამა თუ იმ პოპულაციის შესახებ დასკვნის გაკეთების საშუალება გვექნება. შევნიშნოთ, რომ მათემატიკური მოდელების აგებისას ჩვენ მიერ ზემოთ აღწერილი ბალანსის მეთოდი იქნება გამოყენებული.

3.6.2. პოპულაციის მალთუსის დიფერენციალური მოდელი

მალთუსის მოდელს საფუძვლად უდევს მარტივი დებულება – პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე t მომენტში ინდივიდების $N(t)$ რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია.

ვთქვათ, $N(t)$ რაიმე პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობას წარმოადგენს t მომენტში. თუ A იმ ინდივიდების რაოდენობაა, რომლებიც დროის ერთეულში იბადებიან, ხოლო B – იმ ინდივიდების რაოდენობა, რომლებიც დროის ერთეულში კვდებიან, მაშინ ბალანსის მეთოდის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არსებობს საკმაოდ სერიოზული საფუძველი იმისთვის, რათა $N(t)$ სიდიდის ცვლილების სიჩქარე განვსაზღვროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლების საშუალებით

$$\frac{dN}{dt} = A - B \,, \tag{3.6.5}$$

სადაც $A = \alpha N$, $B = \beta N$, ხოლო $\alpha = \alpha(t, N)$, $\beta = \beta(t, N)$ შესაბამისად დაბადებისა და სიკვდილიანობის კოეფიციენტებია, რომლებიც ცდით – სტატისტიკურ მონაცემთა გასაშუალებით დგინდება. ამდენად, (3.6.5) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\alpha(t, N) - \beta(t, N)\right] N(t) \,. \tag{3.6.6}$$

თუ $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, ე. ი. თუ α და β კოეფიციენტები მხოლოდ t დროის ცვლადზეა დამოკიდებული, მაშინ, (3.1.10) ფორმულის თანახმად, (3.6.6) განტოლების ამონახსნს აქვს

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \left[\alpha(t) - \beta(t)\right] dt \right) \tag{3.6.7}$$

სახე, სადაც N_0 პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობაა საწყის $t = t_0$ მომენტში.

ნახაზზე (იხ. ნახ. 3.6.1) მოცემულია $N(t)$ ფუნქციის გრაფიკები, როდესაც $\alpha(t) \equiv \alpha_0$, $\beta(t) \equiv \beta_0$, სადაც α_0 და β_0 მუდმივებია (ერთმანეთის მსგავს მრუდეებს საწყისი t_0 მომენტის სხვადასხვა მნიშვნელობა შეესაბამება). ამ შემთხვევაში (3.6.6) განტოლების ამონახსნს

$$N(t) = N_0 \exp\left[(\alpha_0 - \beta_0)(t - t_0)\right]$$

ფუნქცია წარმოადგენს.

[*)] balance – ფრანგულად სასწორს ნიშნავს

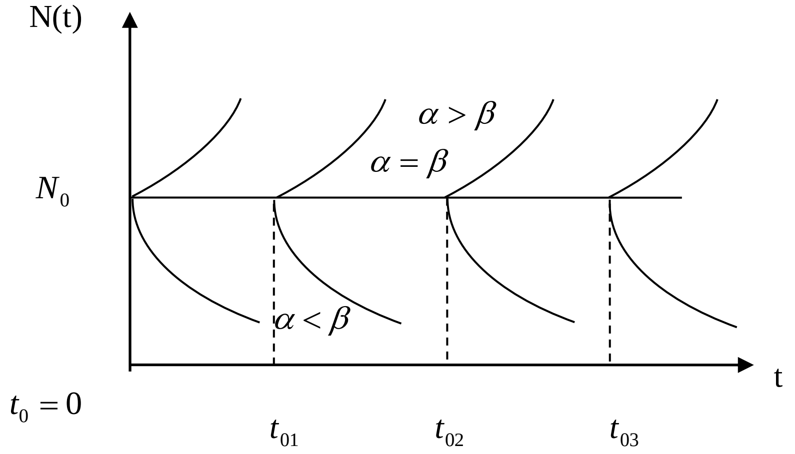
თუ $\alpha_0 = \beta_0$, მაშინ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობა მუდმივია, ე. ი. საწყისი N_0 მნიშვნელობის ტოლია.

თუ $\alpha_0 > \beta_0$, მაშინ $N(t) \to \infty$ ექსპონენციალურად, როდესაც $t \to \infty$.

თუ $\alpha_0 < \beta_0$, მაშინ $N(t) \to 0$ ასევე ექსპონენციალურად, როდესაც $t \to \infty$.

ამ გარემოებამ მალთუსს საშუალება მისცა, გამოეთქვა ეჭვი იმის შესახებ, რომ დედამიწაზე მოსახლეობის მკვეთრი ზრდა მოხდება მისგან გამომდინარე ყველა შედეგით.

თუმცა მოყვანილი მათემატიკური მოდელი უაღრესი გამარტივების გამო არარეალისტურია, მიუხედავად ამისა, ის კარგად აღწერს ბაქტერიების კოლონიებში ინდივიდთა რაოდენობის ზრდის დინამიკას საკვები გარემოს გამოფიტვამდე. ამრიგად, ჩვენ მიერ განხილული მათემატი-



ნახ. 3.6.1

კური მოდელი სამართლიანია გარკვეულ პირობებში – დროის მცირე მონაკვეთში. ამ დასკვნას ზოგიერთი ტიპის ბაქტერიებზე ჩატარებული რეალური ექსპერიმენტების შედეგები ადასტურებს.

ამასთან დაკავშირებით მოვიყვანოთ მათემატიკური მოდელის ერთი საინტერესო მაგალითი. მკვლევარების მიზანი იყო, შეესწავლათ დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის დინამიკა.

ვთქვათ, მოსახლეობის ზრდის სიჩქარე მამაკაცებისა და ქალების რაოდენობის ნამრავლის პროპორციულია (ეს ჰიპოთეზაა, რომელიც ბევრ პრაქტიკულად საინტერესო შემთხვევაში დასტურდება), ე. ი. დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის დინამიკა აღვწეროთ შემდეგი დიფერენციალური განტოლებით:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N_1 \cdot N_2 , \qquad (3.6.8)$$

სადაც $N(t)$ დედამიწაზე მოსახლეობის რაოდენობაა დროის t მომენტში, N_1 და N_2 – შესაბამისად მამაკაცებისა და ქალების რაოდენობა, α – პროპორციულობის გარკვეული კოეფიციენტი.

საკმარისად დიდი სიზუსტით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} N ,$$

მაშინ (3.6.8) მიიღებს რიკატის (იხ. შენიშვნა 3.6.2)

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \frac{N^2}{4} \qquad (3.6.9)$$

განტოლების სახეს.

ვთქვათ, t_0 მომენტში მოსახლეობის რაოდენობაა $N(t_0)$, მაშინ $(3.6.9)$ განტოლების ამონახსნი ამ საწყისი მონაცემით გამოისახება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$N(t)=\frac{4}{\alpha\left(t_f-t\right)}, \qquad (3.6.10)$$

სადაც

$$t_f:=t_0+\frac{4}{\alpha}N^{-1}\left(t_0\right)>t_0 .$$

მართლაც, შემოვიღოთ

$$z=N^{-1} \qquad (3.6.11)$$

აღნიშვნა. მაშინ, რადგანაც

$$\frac{dz}{dt}=-N^{-2}\frac{dN}{dt},$$

$(3.6.9)$ განტოლება შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\frac{dz}{dt}=-\frac{\alpha}{4},$$

საიდანაც t_0-დან t-მდე ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$z(t)-z\left(t_0\right)=-\frac{\alpha}{4}\left(t-t_0\right),$$

ე. ი. $(3.6.11)$-ის გათვალისწინებით,

$$N(t)=\frac{1}{\dfrac{\alpha}{4}\left(t_0-t\right)+\dfrac{1}{N\left(t_0\right)}}=\frac{4}{\alpha\left(t_0-t\right)+4N^{-1}\left(t_0\right)}$$

$$=\frac{4}{\alpha\left[t_0+\dfrac{4}{\alpha}N^{-1}\left(t_0\right)-t\right]}=\frac{4}{\alpha\left(t_f-t\right)}.$$

ამრიგად, $t=t_f$ მომენტში დედამიწაზე მცხოვრებთა რაოდენობა უსასრულო გახდება. t_f „სამყაროს აღსასრულის" დროა. დედამიწის მოსახლეობის სტატისტიკური მონაცემების გათვალისწინებით გამოთვალეს α კოეფიციენტის მნიშვნელობა და დაადგინეს, რომ კატასტროფა მოხდება პარასკევს, 2026 წლის 13 ნოემბერს. მაგრამ კატასტროფა არ მოხდება, რადგან უფრო ზუსტი მეთოდებით დადგენილია, რომ ამ დროისთვის დედამიწის მოსახლეობა 10 მილიარდს მიაღწევს და არა $+\infty$-ს.

როგორც აღვნიშნეთ, $(3.6.6)$ განტოლება კარგად აღწერს ზოგიერთ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ზრდის დინამიკას დროის მცირე მონაკვეთში. ამის შემდეგ ამ პროცესზე გავლენას ახდენს საკვები რესურსების ნაკლებობა, რაც მათემატიკურ მოდელს შესამჩნევად ცვლის. ამ შემთხვევაში შეიძლება პოპულაციაში გარკვეულ დონეზე ინდივიდთა რაოდენობის სტაბილიზაცია მოხდეს, ან ეს რაოდენობა შეიძლება რეგულარულ ან არარეგულარულ ფლუქტუაციებს განიცდიდეს, ან ეს რაოდენობა შეიძლება შემცირდეს.

ისეთი პოპულაციის ყოფაქცევა, რომელშიც ინდივიდთა რაოდენობა გარკვეულ მდგრად დონეზე სტაბილიზირდება, ხშირად აღიწერება შემდეგი ლოჯისტიკური განტოლების საშუალებით:

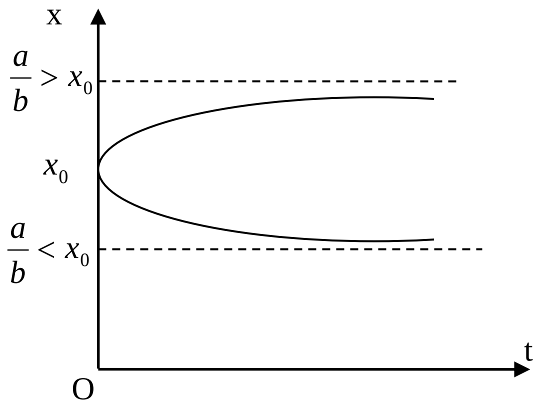
$$\frac{dx}{dt}=ax-bx^2, \qquad (3.6.12)$$

სადაც $x=x(t)$ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობაა t მომენტში, ხოლო $a>0$, $b>0$ გარკვეული ცდისეული მუდმივები. $(3.6.12)$ განტოლება ბერნულის $(3.6.1)$ განტოლებისა და რიკატის (იხ. შენიშვნა 3.6.2) განტოლების კერძო შემთხვევაა.

(3.6.12) განტოლება წარმოადგენს უმარტივეს დიფერენციალურ განტოლებას, რომელსაც შემდეგი ორი მნიშვნელოვანი თვისება გააჩნია:

1) x-ს მცირე მნიშვნელობებისთვის (3.6.12) განტოლების ამონახსნი უახლოვდება (3.6.6) განტოლების ამონახსნს და აქვს ექსპონენციალური ხასიათი.

2) t-ს ზრდასთან ერთად $x(t)$ მონოტონურად უახლოვდება გარკვეულ მუდმივ მნიშვნელობას, რაც პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის სტაბილიზაციას ასახავს.



ნახ. 3.6.2

განვიხილოთ კოშის ამოცანა (3.6.12) განტოლებისთვის

$$x(t_0) = x_0, \tag{3.6.13}$$

სადაც x_0 პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობაა t_0 მომენტში.

ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ, რომ (3.6.12), (3.6.13) ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$x(t) = \frac{\frac{a}{b} x_0}{x_0 + \left(\frac{a}{b} - x_0\right) e^{-a(t-t_0)}}. \tag{3.6.14}$$

აქედან ჩანს, რომ, როდესაც $t \to \infty$, მაშინ პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობა $x(t) \to \frac{a}{b}$.

ამასთან შესაძლებელია ორი შემთხვევა: $\frac{a}{b} > x_0$ და $\frac{a}{b} < x_0$. განსხვავება ამ ორ შემთხვევას შორის კარგად ჩანს ნახ. 3.6.2-ზე (აქ განხილულია შემთხვევა, როდესაც $t_0 = 0$).

შევნიშნოთ, რომ (3.6.12) განტოლება და, მაშასადამე, (3.6.14) ფუნქცია საკმაოდ კარგად აღწერს ზოგიერთი ტიპის ბაქტერიის პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის ცვლის დინამიკას საწყის ეტაპზე (მაგ., კულტურაში საფუარის უჯრედების ცვლილების დინამიკას).

3.6.3. ეპიდემიოლოგიის უმარტივესი მათემატიკური მოდელები

ისტორიიდან ცნობილია ფაქტები, როდესაც სხვადასხვა ეპიდემიური დაავადებისგან (ქოლერა, შავი ჭირი, გრიპი და სხვა) მრავალი ადამიანი იღუპებოდა. იმისთვის, რომ ეფექტურად ვებრძოლოთ ამ დაავადებათა გავრცელებას, საჭიროა, წინასწარ განისაზღვროს, თუ რა შედეგი მოჰყვება დაავადების საწინააღმდეგო ღონისძიებებს, ე. ი. საჭიროა მოხდეს სხვადასხვა ღონისძიების ჩატარების შედეგად ავადმყოფთა რაოდენობის დინამიკის პროგნოზი-

რება. აქედან გამომდინარე, მივდივართ ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნის აუცილებლობამდე, რომელიც დაავადების გავრცელების გარკვეული პროგნოზირების საშუალებას იძლევა.

სიმარტივისთვის ჯერ განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც არაფერი კეთდება ამა თუ იმ ეპიდემიის გავრცელების წინააღმდეგ, ე. ი. მოვახდინოთ ეპიდემიის გავრცელების ბუნებრივი პროცესის პროგნოზირება.

ცხადია, მათემატიკური მოდელი ეპიდემიის გავრცელებაზე სხვადასხვა ფაქტორის გავლენას უნდა ითვალისწინებდეს. მაგალითად, გათვალისწინებული უნდა იყოს ის კანონები, რომელთა მიხედვითაც ხდება ამა თუ იმ ვირუსის გამრავლება, ცალკეული ადამიანის იმუნიტეტი ამა თუ იმ დაავადების მიმართ, ინფექციის მატარებელი ადამიანების შეხვედრის ალბათობა ჯანმრთელ ადამიანებთან და მრავალი სხვა ფაქტორი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეპიდემიის ასე თუ ისე სრული მოდელი უნდა შეიცავდეს იმ კვლევის შედეგებს, რომელსაც მეცნიერების სულ ცოტა ოთხი დარგი მაინც აწარმოებს, კერძოდ, მიკრობიოლოგია, მედიცინა, ფარმაკოლოგია და სოციალური ფსიქოლოგია.

რადგან ჩვენი მიზანი მხოლოდ საილუსტრციო მოდელის შედგენაა, ამიტომ მათემატიკური მოდელის შედგენისას ბევრ ფაქტორს არ გავითვალისწინებთ. ამის მიუხედავად, ასეთი უხეში მოდელის საშუალებითაც კი შეიძლება ეპიდემიის გავრცელების მექანიზმის აღწერა მის გარკვეულ ეტაპზე.

ამრიგად, განვიხილოთ ადამიანების ჯგუფი, რომელიც N ინდივიდისგან შედგება. ვთქვათ, $t=0$ მომენტში ამ ჯგუფში მოხვდა ავადმყოფი ადამიანი (ინფექციის წყარო). ვიგულისხმოთ, რომ ამ ჯგუფისგან არც ერთი ავადმყოფის ჩამოშორება (მაგ., კარანტინის საშუალებით) არ ხდება, ასევე არ არის არც გამოჯანმრთელებისა და არც სიკვდილის შემთხვევები. ასეთი დაშვებები სრულიად ბუნებრივია ეპიდემიის დაწყებიდან დროის მცირე ინტერვალის განმავლობაში. ჩავთვალოთ აგრეთვე, რომ ნებისმიერი ადამიანი ინფექციის წყაროდ ითვლება მაშინვე, როდესაც ის დაავადდება.

აღვნიშნოთ t მომენტში დაავადებული ადამიანების რაოდენობა $x(t)$ სიმბოლოთი, ხოლო ჯერჯერობით ჯანმრთელი ადამიანების რაოდენობა – $y(t)$ სიმბოლოთი. ცხადია, ჩვენი დაშვებების პირობებში t-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის სამართლიანია

$$x(t)+y(t)=N \tag{3.6.15}$$

ტოლობა. როდესაც $t=0$, მაშინ $x(0)=1$.

ცხადია, დაავადებული ადამიანების რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე დამოკიდებულია ავადმყოფი და ჯანმრთელი ადამიანების შეხვედრაზე, ე. ი. შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ეს სიჩქარე $x(t)\cdot y(t)$ ნამრავლის პროპორციულია. ამ დაშვების საფუძველზე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x(t)y(t)$$

ან, თუ (3.6.15) ტოლობას გავითვალისწინებთ, ბერნულის

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x(N-x) \tag{3.6.16}$$

განტოლება, სადაც $\alpha>0$ გარკვეული მუდმივია. მიღებული დიფერენციალური განტოლებისთვის განვიხილოთ კოშის ამოცანა

$$x(0)=1 \tag{3.6.17}$$

საწყისი პირობით.

(3.6.16), (3.6.17) წარმოადგენს ეპიდემიის გავრცელების უმარტივეს მოდელს, რომლის საშუალებითაც დროის ნებისმიერ t მომენტში დაავადებული ადამიანების რაოდენობის განსაზღვრა შეიძლება.

ამოვხსნათ ეს ამოცანა. ამ მიზნით შემოვიღოთ

$$U(t)=\frac{1}{x(t)}$$

აღნიშვნა, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\frac{dU}{dt}=-\frac{1}{x^2(t)}\frac{dx}{dt}.$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობას გავითვალისწინებთ, (3.6.16) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით ჩავწეროთ:

$$\frac{dU}{dt}=-\alpha NU+\alpha, \qquad (3.6.18)$$

რადგან $x(0)=1$, ამიტომ $U(0)=1$.

ადვილად შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ $U(0)=1$ საწყისი პირობების გათვალისწინებით (3.6.18) განტოლების ამონახსნს წარმოადგენს შემდეგი ფუნქცია:

$$U(t)=\frac{N-1}{N}e^{-\alpha Nt}+\frac{1}{N},$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$x(t)=\frac{N}{(N-1)e^{-\alpha Nt}+1}. \qquad (3.6.19)$$

მართლაც, თუ გამოვიყენებთ (3.1.13) ფორმულას, გვექნება, რომ

$$U(t)=e^{-\alpha N\int_0^t dt}\left(c+\int_0^t \alpha e^{\alpha N\int_0^t d\tau}dt\right)=e^{-\alpha Nt}\left(c+\alpha\int_0^t e^{\alpha Nt}dt\right)$$

$$=e^{-\alpha Nt}\left(c+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha N}\int_0^t de^{\alpha Nt}\right)=e^{-\alpha Nt}\left[c+\frac{1}{N}\left(e^{\alpha Nt}-1\right)\right].$$

აქ ჩავსვათ $t=0$ და დავაკმაყოფილოთ საწყისი პირობა, მაშინ

$$U(0)=c=1.$$

ამრიგად,

$$U(t)=e^{-\alpha Nt}\left(1+\frac{e^{\alpha Nt}}{N}-\frac{1}{N}\right)=\frac{N-1}{N}e^{-\alpha Nt}+\frac{1}{N}.$$

საიდანაც, რადგან

$$x(t)=\frac{1}{U(t)},$$

გამომდინარეობს (3.6.19).

გავაანალიზოთ მიღებული ფორმულა. t-ს ზრდასთან ერთად წილადის მნიშვნელი მცირდება, ე. ი. $x(t)$ იზრდება. ეს შეესაბამება ჩვენს ვარაუდს, რომ ავადმყოფთა რაოდენობა შეიძლება მხოლოდ გაიზარდოს.

საინტერესოა, გამოვიკვლიოთ, თუ როგორ იცვლება დაავადებული ადამიანების რაოდენობის ზრდის სიჩქარე. ამ საკითხის შესასწავლად უნდა გამოვიკვლიოთ $\frac{d^2x}{dt^2}$ სიდიდე.

(3.6.19)-ის ორჯერ გაწარმოებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\alpha N^2(N-1)e^{-\alpha Nt}}{\left[(N-1)e^{-\alpha Nt}+1\right]^2}$$

$$=\frac{-\alpha^2N^3(N-1)e^{-\alpha Nt}\left[(N-1)e^{-\alpha Nt}+1\right]^2+2\alpha^2N^3(N-1)^2e^{-2\alpha Nt}\left[(N-1)e^{-\alpha Nt}+1\right]}{\left[(N-1)e^{-\alpha Nt}+1\right]^4}.$$

$$=\frac{\alpha^2N^3(N-1)\left[(N-1)e^{-2\alpha Nt}-e^{-\alpha Nt}\right]}{\left[(N-1)e^{-\alpha Nt}+1\right]^3}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0\,,\ \text{როდესაც}^{*)}\ \ t=\frac{\ln(N-1)}{\alpha N}\,;$$

$$\text{თუ}\ \ t\in\left[0,\frac{\ln(N-1)}{\alpha N}\right],\ \text{მაშინ}\ \ \frac{d^2x}{dt^2}>0\,;$$

$$\text{თუ}\ \ t\in\left[\frac{\ln(N-1)}{\alpha N},+\infty\right],\ \text{მაშინ}\ \ \frac{d^2x}{dt^2}<0\,.$$

ამრიგად, $\dfrac{dx}{dt}$ ფუნქცია, რომელიც ავადმყოფთა რაოდენობის ზრდის სიჩქარეს გამოხატავს, $t=\dfrac{\ln(N-1)}{\alpha N}$ მომენტამდე იზრდება, ხოლო შემდეგ იკლებს. ეს შედეგი, უხეში მათემატიკური მოდელის მიუხედავად, საკმაოდ კარგად ეთანხმება ექსპერიმენტულ მონაცემებს, განსაკუთრებით ეპიდემიის საწყის ეტაპზე.

ახლა განვიხილოთ ეპიდემიის სხვა მათემატიკური მოდელი, რომელშიც ზოგიერთი ისეთი ფაქტორის გათვალისწინება ხდება, რომელსაც ეპიდემიის ჩვენ მიერ განხილული უმარტივესი (და როგორც აღვნიშნეთ, უხეში) მოდელი არ ითვალისწინებდა.

დავუშვათ, რომ რაიმე პოპულაცია, რომელიც N ინდივიდისგან შედგება, სამ ჯგუფად იყოფა. პირველ ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც მოცემულ მომენტში ჯანმრთელები არიან, მაგრამ არ აქვთ იმუნიტეტი გარკვეული დაავადების მიმართ, ე. ი. არსებობს იმის გარკვეული ალბათობა, რომ ისინი დაავადდებიან. ასეთი ინდივიდების რაოდენობა t მომენტში აღვნიშნოთ $S(t)$ სიმბოლოთი. მეორე ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც აღებულ მომენტში ავად არიან და, მაშასადამე, ინფექციის გამავრცელებლად ითვლებიან. მათი რაოდენობა t მომენტში აღვნიშნოთ $I(t)$ სიმბოლოთი. დაბოლოს, მესამე ჯგუფს მივაკუთვნოთ ინდივიდები, რომლებიც არ არიან ავად და ამავე დროს აქვთ იმუნიტეტი ამ დაავადების მიმართ. მათი რაოდენობა აღვნიშნოთ $R(t)$ სიმბოლოთი. ე. ი.

$$S(t)+I(t)+R(t)=N\,. \tag{3.6.20}$$

დავუშვათ, რომ იმ შემთხვევაში, როდესაც დაავადებულთა $I(t)$ რიცხვი გარკვეულ I^* ფიქსირებულ რიცხვს გადააჭარბებს, ე. ი. $I(t)>I^*$, იწყება ეპიდემიის პროცესი, ე. ი. მათ შეუძლიათ დააავადონ ის ინდივიდები, რომელთაც ამ დაავადების მიმართ იმუნიტეტი არ აქვთ. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გარკვეულ მომენტამდე შესაძლებელია დააავადებულ ინდივიდთა იზოლაცია (მაგ., კარანტინის საშუალებით) და რომ საწყის ეტაპზე დაავადება გარკვეული, მცირერიცხოვანი ჯგუფის შიგნით მიმდინარეობს. დაავადების ამ ეტაპს მათემატიკურ მოდელში არ აღვწერთ.

ჩავთვალოთ, რომ $I(t)>I^*$ და იმუნიტეტის არმქონე ჯანმრთელი ინდივიდების ჯგუფში დაავადების გამო ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე ამ ჯგუფში მყოფი ინდივიდების რაოდენობის პროპორციულია. ამ დაშვებების შედეგად მივიღებთ

$$\frac{dS}{dt}=\begin{cases}-\alpha S,\ \text{თუ}\ I(t)>I^*,\\ 0,\ \text{თუ}\ I(t)\le I^*,\end{cases} \tag{3.6.21}$$

დიფერენციალურ განტოლებას.

დავუშვათ, რომ იმ ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე, რომლებიც დაავადებულთა ჯგუფს მიეკუთვნებიან, მაგრამ გამოჯანმრთელდნენ, პროპორციულია ამ ჯგუფში ინდივიდების რაოდენობისა და βI-ს ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ აგრეთვე, რომ იმუნიტეტის არმქონე ინდივიდი ბოლოს და ბოლოს ავადდება და თვითონ ხდება ინფექციის გამავრცელებელი (ე. ი. ასეთი ინდივიდი მეორე ჯგუფში გადადის), ამიტომ ინფექციის გამავ-

---

*) მართლაც, $(N-1)e^{-2\alpha Nt}-e^{-\alpha Nt}=0 \Rightarrow (N-1)e^{-2\alpha Nt}=e^{-\alpha Nt} \Rightarrow N-1=e^{\alpha Nt} \Rightarrow \ln(N-1)=\alpha Nt\,.$

რცელებელთა რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე დამოკიდებულია დროის ერთეულში დაავადებულ და გამოჯანმრთელებულ ინდივიდთა რაოდენობის სხვაობაზე. ამრიგად,

$$\frac{dI}{dt}=\begin{cases}\alpha S-\beta I, \text{ თუ } I(t)>I^*,\\ -\beta I, \text{ თუ } I(t)\le I^*.\end{cases} \qquad (3.6.22)$$

(3.6.21) და (3.6.22) განტოლებებში პროპორციულობის $\alpha>0$ და $\beta>0$ კოეფიციენტებს შესაბამისად ვუწოდოთ დაავადებისა და გამოჯანმრთელების კოეფიციენტები.

დაბოლოს, თუ ჩავთვლით, რომ გამოჯანმრთელებული ინდივიდები იმუნიტეტს იძენენ, მაშინ ჯანმრთელი ინდივიდების (რომლებსაც ამ დაავადების მიმართ იმუნიტეტი გააჩნიათ) რაოდენობის ცვლილება შეიძლება შემდეგი განტოლებით აღვწეროთ:

$$\frac{dR}{dt}=\beta I\,. \qquad (3.6.23)$$

მივიღეთ (3.6.21)-(3.6.23) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა (იხ. §3.7). განვიხილოთ კოშის ამოცანა ამ განტოლებათა სისტემისთვის (თითოეულ ჯგუფში ინდივიდთა რაოდენობა საწყის მომენტში):

$$S(0)=S_0\,,\;\; I(0)=I_0\,,\;\; R(0)=R_0\,. \qquad (3.6.24)$$

(3.6.21)-(3.6.24) ამოცანა ეპიდემიის გავრცელების მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს გარკვეულ შეზღუდვებში, რომელთა შესახებაც ზემოთ გვქონდა ლაპარაკი. ცხადია, რომ ამ განტოლებებიდან შეგვიძლია ნებისმიერი შევცვალოთ (3.6.20) განტოლებით. კერძოდ, თუ ამოვხსნით (3.6.21) და (3.6.22) განტოლებებს, $R(t)$ შეგვიძლია მივიღოთ (3.6.20)-დან.

მსჯელობის სიმარტივისთვის დავუშვათ, რომ საწყის ეტაპზე აღებულ პოპულაციაში არ არიან ინდივიდები, რომლებსაც გარკვეული დაავადების მიმართ იმუნიტეტი აქვთ, ე. ი. $R_0=0$. ამ დაშვების შედეგად იმუნიტეტს ის ინდივიდები იძენენ, რომლებიც ავადმყოფობის შემდეგ გამოჯანმრთელდებიან. ასევე დავუშვათ, რომ დაავადებისა და გამოჯანმრთელების კოეფიციენტები ერთმანეთის ტოლია: $\alpha=\beta$ (შევნიშნოთ, რომ თუ $\alpha\ne\beta$, ეს მსჯელობაში რაიმე გართულებას არ გამოიწვევს).

განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

I. ვთქვათ, $I(0)\le I^*$. ჩვენი დაშვების თანახმად ამ დროს პოპულაციაში შემავალ ინდივიდებს დაავადება არ გადაეცემათ. ამ შემთხვევაში

$$\frac{dS}{dt}=0\,,$$

რის საფუძველზეც (3.6.20) ტოლობის და

$$R(0)=R_0=0$$

პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$S(t)=S_0=N-I_0\,.$$

ეს მოდელი იმ სიტუაციას აღწერს, როდესაც ყველა დაავადებული ინდივიდი გამოჯანმრთელებულია. ამ შემთხვევაში (3.6.22) მიიღებს

$$\frac{dI}{dt}=-\alpha I$$

სახეს, საიდანაც, ცვლადთა განცალებით და (3.6.24) საწყისი პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ, რომ

$$I(t)=I_0e^{-\alpha t}\,,$$

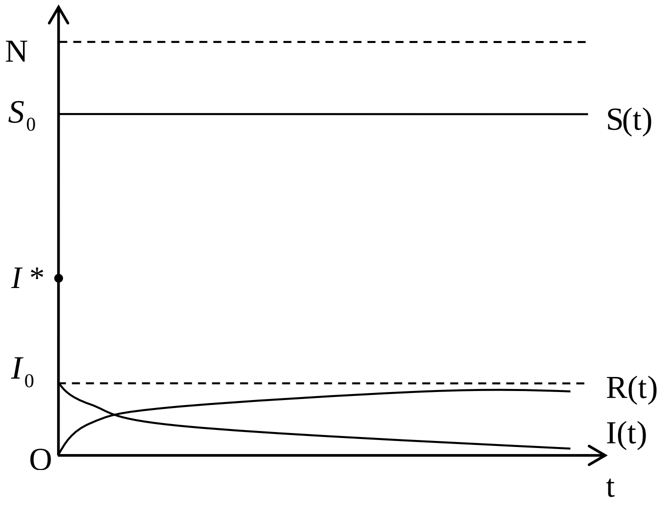
$$R(t)=N-S(t)-I(t)=I_0\left(1-e^{-\alpha t}\right).$$

ნახ. 3.6.3-ზე გრაფიკულად არის გამოხატული ინდივიდების რაოდენობის ცვლილება სამივე ჯგუფში.

II. ვთქვათ, $I(0)>I^*$. ამ შემთხვევაში იარსებებს $0\le t\le T$ ინტერვალი, სადაც შესრულებული იქნება $I(t)>I^*$ უტოლობა. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $t\in[0,T[$, მაშინ ავად-

მყოფობა გავრცელდება იმ ინდივიდებზე, რომლებსაც ამ დაავადების მიმართ იმუნიტეტი არ აქვთ. მაშინ (3.6.21) განტოლებიდან, ცვლადთა განცალებით და (3.6.24) საწყისი პირობის გათვალისწინებით, გამომდინარეობს, რომ

$$S(t) = S_0 e^{-\alpha t}, \text{ თუ } 0 \le t < T. \quad (3.6.25)$$



ნახ. 3.6.3

ჩავსვათ $S(t)$-ს (3.6.25) გამოსახულება (3.6.22) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dI}{dt} + \alpha I = \alpha S_0 e^{-\alpha t}.$$

ამ განტოლების ორივე მხარე გავამრავლოთ $e^{\alpha t}$-ზე:

$$\frac{d}{dt}\left(Ie^{\alpha t}\right) = \alpha S_0.$$

ამ ტოლობის ინტეგრებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$Ie^{\alpha t} = \alpha S_0 t + C,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$I(t) = Ce^{-\alpha t} + \alpha S_0 t e^{-\alpha t}.$$

თუ გავითვალისწინებთ $I(0) = I_0$ საწყის პირობას, მაშინ $C = I_0$-ს და საბოლოოდ მივიღებთ:

$$I(t) = \left(I_0 + \alpha S_0 t\right)e^{-\alpha t}, \text{ თუ } 0 \le t < T. \quad (3.6.26)$$

ცხადია, რომ უპირველეს ყოვლისა უნდა დავადგინოთ T-ს მნიშვნელობა, აგრეთვე – დროის ის $t_{\max}$ მომენტი, როდესაც დაავადებულ ინდივიდთა რაოდენობა მაქსიმალურია.

პირველ კითხვაზე პასუხის გაცემა მნიშვნელოვანია იმდენად, რამდენადაც T მომენტში დაავადების შემდგომი გავრცელება შეწყდება. თუ განვიხილავთ (3.6.26) გამოსახულებას, მაშინ ჩვენ მიერ ზემოთ გამოთქმული მოსაზრების გამო $t = T$ მომენტში სამართლიანია

$$I(T) = \left(I_0 + \alpha S_0 T\right)e^{-\alpha T} = I* \quad (3.6.27)$$

ტოლობა. მივიღეთ T-ს მიმართ არაწრფივი განტოლება.

იმისთვის, რომ პასუხი გავცეთ მეორე კითხვას, ე. ი. დავადგინოთ $t_{\max}$-ის მნიშვნელობა, განვიხილოთ $I(t)$-ს (3.6.26) გამოსახულება. თუ $t_{\max}$-წერტილში $I(t)$ ფუნქცია თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას აღწევს, მაშინ ამ წერტილში უნდა შესრულდეს მაქსიმუმის აუცილებელი პირობა, ე. ი.

$$\frac{dI}{dt} = \left[\alpha S_0 - \alpha I_0 - \alpha^2 S_0 t\right] e^{-\alpha t} = 0$$

ტოლობა, საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$t_{\max} = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \frac{I(0)}{S(0)}\right]. \tag{3.6.28}$$

$t_{\max}$ მართლაც მაქსიმუმის წერტილია, რადგან სრულდება მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი

$$\left.\frac{d^2 I}{dt^2}\right|_{t_{\max}} = -\alpha^2 S_0 e^{-\alpha t_{\max}} - \alpha\left[\alpha S_0 - \alpha I_0 - \alpha^2 S_0 t_{\max}\right] e^{-\alpha t_{\max}} = -\alpha^2 S_0 e^{-\alpha t_{\max}} < 0$$

პირობა.

როდესაც $t \geq T$, ე.ი. $I(t) \leq I^*$, ინფექციის გავრცელება შეწყდება და (3.6.22) განტოლების ამონახსნი

$$I(T) = I^* \tag{3.6.29}$$

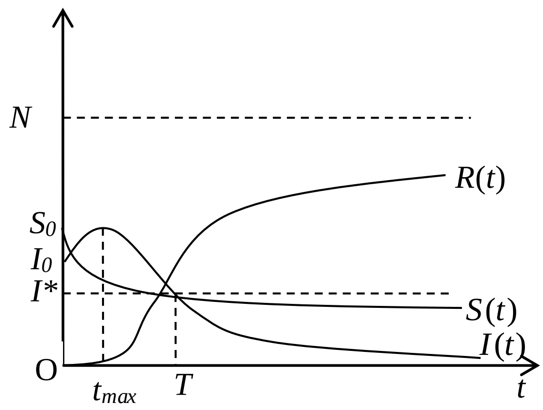
საწყისი პირობით, როცა $\alpha = \beta$, იქნება:

$$I(t) = I^* e^{-\alpha(t-T)}. \tag{3.6.30}$$

მართლაც, ცვლადთა განცალებით და T-დან t-მდე ინტეგრებით მივიღებთ, რომ

$$\frac{d\ln I(t)}{dt} = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \int_T^t \frac{d\ln I(t)}{dt} dt = -\alpha \int_T^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln I(t) - \ln I(T) = -\alpha(t-T)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\frac{I(t)}{I(T)} = -\alpha(t-T) \quad \Rightarrow \quad \frac{I(t)}{I(T)} = e^{-\alpha(t-T)} \quad \Rightarrow \quad I(t) = I(T)e^{-\alpha(t-T)},$$



ნახ. 3.6.4

საიდანაც, თუ გავითვალისწინებთ (3.6.29) საწყის პირობას, გამომდინარეობს (3.6.30).

ნახაზზე (იხ. ნახ. 3.6.4) გრაფიკულად არის გადმოცემული ინდივიდთა რაოდენობის ცვლის დინამიკა თითოეულ ჯგუფში.

ცხადია, რომ შეიძლება ანალოგიურად იქნეს განხილული შემთხვევები, როდესაც $R_0 \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

შევნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ განხილული ეპიდემიის გავრცელების მათემატიკური მოდელი რამდენადმე გამარტივებულად აღწერს რეალურ სიტუაციას, რადგან იგი ზოგიერთ მნიშვნელოვან ფაქტორს არ ითვალისწინებს. თუმცა, როგორც ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარება გვიჩვენებს, ეს გამარტივებული მოდელიც საკმაოდ კარგ წარმოდგენას იძლევა ინფექციური დაავადებების გავრცელების მექანიზმზე.