ლექცია 1

1. ფუნქციები და მათი გრაფიკების აგების დიფერენციალური მეთოდი

1.1. ზოგიერთი ცნება და თეორემა კალკულუსიდან

გავიხსენოთ შემდეგი ცნებები და თეორემები კალკულუსიდან:

განსაზღვრა 1.1.1. ვთქვათ, $x \in R$, სადაც R ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა, x ცვლადის f *ფუნქცია* ეწოდება წესს, რომელიც x ცვლადის რაიმე მნიშვნელობას უთანადებს $y \in R$ ცვლადის ერთადერთ მნიშვნელობას. $X \subset R$ სიმრავლეს, საიდანაც მნიშვნელობებს იღებს x ცვლადი, ფუნქციის *განსაზღვრის არე* ეწოდება. $Y \subset R$ სიმრავლეს, საიდანაც მნიშვნელობებს იღებს f ფუნქცია, *მნიშვნელობათა არე* ეწოდება.

განსაზღვრა 1.1.2. f ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის X არე სიმეტრიულია რიცხვითი ღერძის სათავის მიმართ, ეწოდება *ლუწი ფუნქცია*, თუ ნებისმიერი $x \in X$-სთვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$f(-x) = f(x),$$

ხოლო თუ ნებისმიერი $x \in X$-სთვის სრულდება

$$f(-x) = -f(x)$$

ტოლობა, მაშინ ფუნქციას ეწოდება *კენტი ფუნქცია*.

განსაზღვრა 1.1.3. R სიმრავლეზე განსაზღვრულ f ფუნქციას ეწოდება *პერიოდული ფუნქცია* $l \neq 0$ პერიოდით, თუ ნებისმიერი $x \in R$-სთვის მართებულია

$$f(x+l) = f(x)$$

ტოლობა.

ცხადია, თუ l არის $y = f(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ ამ ფუნქციის პერიოდი იქნება აგრეთვე $2l,\ 3l,\ \ldots,\ kl,\ k \in N$ (N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა). დავამტკიცოთ ეს, მაგალითად, $2l$-სთვის

$$f(x+2l) = f\big((x+l)+l\big) = f(x+l) = f(x).$$

თუ l არის $y = f(x)$ ფუნქციის პერიოდი, მაშინ $(-l)$-იც არის ამ ფუნქციის პერიოდი. მართლაც,

$$f(x+(-l)) = f(x-l) = f\big((x-l)+l\big) = f(x).$$

ე. ი. მივიღეთ, რომ

$$f\big(x+(-l)\big) = f(x),$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $(-l)$ ფუნქციის პერიოდია.

ფუნქციის გამოკვლევის დროს მნიშვნელოვანია ამ ფუნქციის *მინიმალური დადებითი პერიოდის* მოძებნა.

განსაზღვრა 1.1.4. ვიტყვით, რომ f *ფუნქციის ზღვარი* x_0 *წერტილში არის* A, თუ ის განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, თვით ამ წერტილისა, და ნებისმიერი რაგინდ მცირე დადებითი ε რიცხვისთვის მოიძებნება ε-ზე დამოკიდებული δ დადებითი რიცხვი, ისეთი, რომ

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon, \text{ როცა } 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta.$$

ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

თუ ფუნქცია განსაზღვრულია რაიმე შუალედში, მაშინ შეიძლება ლაპარაკი ფუნქციის ზღვარზე შუალედის ყველა წერტილში, გარდა შუალედის ბოლო წერტილებისა, რადგან შუალედის ბოლო წერტილებისთვის არ არსებობს ორმხრივი მიდამო, სადაც ფუნქცია განსაზღვრული იქნება. ასეთ შემთხვევაში განიხილავენ ე. წ. ცალმხრივ ზღვრებს.

განსაზღვრა 1.1.5. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ *ფუნქციის მარცხენა ზღვარი* a წერტილში, თუ ის განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მარცხენა მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, თვით ამ წერტილისა, და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა

$$0 < a - x < \delta,$$

სრულდება

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

უტოლობა. ამ შემთხვევაში ვწერთ

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

განსაზღვრა 1.1.6. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ *ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი* a წერტილში, თუ ის განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მარჯვენა მიდამოში, გარდა, შესაძლებელია, თვით ამ წერტილისა, და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ, როცა

$$0 < x - a < \delta,$$

სრულდება

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

უტოლობა. ამ შემთხვევაში ვწერთ

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A.$$

განსაზღვრა 1.1.7. A *რიცხვს ეწოდება* $f(x)$ *ფუნქციის ზღვარი, როცა* $x \to +\infty$, თუ ის განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი x-სთვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $c > 0$ რიცხვი, რომ, როცა $x > c$, სრულდება უტოლობა

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

და ვწერთ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

განსაზღვრა 1.1.8. ვიტყვით, რომ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, თუ ის განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ მცირე უარყოფითი x-სთვის და ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $c < 0$ რიცხვი, რომ, როცა $x < c$, სრულდება

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

უტოლობა.

განსაზღვრა 1.1.9. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა a წერტილისა, და ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი B-სთვის მოიძებნება ისეთი $\delta > 0$ დამოკიდებული B-ზე, რომ

$$f(x) > B,$$

როცა

$$0 < |x - a| < \delta.$$

განსაზღვრა 1.1.10. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\right),$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი x-სთვის და ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი B-სთვის მოიძებნება ისეთი საკმარისად დიდი დადებითი A დამოკიდებული B-ზე, რომ

$$f(x) > B \quad \left(f(x) < -B\right),$$

როცა

$$x > A.$$

განსაზღვრა 1.1.11. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\right),$$

თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი რაგინდ მცირე უარყოფითი x-სთვის და ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი B-სთვის მოიძებნება ისეთი საკმარისად დიდი დადებითი A დამოკიდებული B-ზე, რომ

$$f(x) > B \quad \left(f(x) < -B\right),$$

როცა

$$x < -A.$$

განსაზღვრა 1.1.12. $y = f(x)$ *ფუნქციის წარმოებული* x_0 წერტილში განიმარტება

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) := \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}$$

ტოლობით, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და არსებობს მარჯვენა მხარეში მითითებული ზღვარი, სადაც

$$\Delta y_0 := f(x) - f(x_0)$$

ფუნქციის ნაზრდია, ხოლო

$$\Delta x_0 := x - x_0$$

– *არგუმენტის ნაზრდი*. სხვა სიტყვებით:

თუ არსებობს x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარი, როცა არგუმენტის ნაზრდი ნულისკენ მიისწრაფის, მას ამ წერტილში ფუნქციის წარმოებული ეწოდება.

მოვიყვანოთ ფუნქციათა ჯამის, სხვაობის, ნამრავლისა და ფარდობის წარმოებულის ფორმულები:

$$(u + \mathrm{v})' = u' + \mathrm{v}', \ (u - \mathrm{v})' = u' - \mathrm{v}', \ (u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + \mathrm{v}'u, \ \left(\frac{u}{\mathrm{v}}\right)' = \frac{u'\mathrm{v} - \mathrm{v}'u}{\mathrm{v}^2},$$

ამასთან ბოლო ტოლობაში იგულისხმება, რომ $\mathrm{v} \neq 0$.

ქვემოთ მოყვანილია *ზოგიერთი ფუნქციის წარმოებულისა და ინტეგრალების ცხრილი* (დამტკიცების გარეშე):

$\frac{dx^n}{dx} = (x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
$\frac{de^x}{dx} = (e^x)' = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c,$
$\frac{da^x}{dx} = (a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$
$\frac{d\ln x}{dx} = (\ln x)' = \frac{1}{x}, \ x > 0$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c, \quad x > 0$
$\frac{d\sin x}{dx} = (\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + c,$
$\frac{d\cos x}{dx} = (\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c,$
$\frac{dtgx}{dx} = (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c,$
$\frac{dctgx}{dx} = (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c,$

$\frac{d\arcsin x}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c=-\arccos x+c$
$\frac{d\arccos x}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\frac{d\,arctgx}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+c=-arcctg+c$
$\frac{d\,arcctgx}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$	
	$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+c,\quad \lvert x\rvert<1$

განსაზღვრა 1.1.13. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *ზრდადი* რაიმე ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალის ნებისმიერი $x_1<x_2$ წერტილებისთვის მართებულია

$$f(x_1)<f(x_2)$$

უტოლობა.

განსაზღვრა 1.1.14. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *კლებადი* რაიმე ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალის ნებისმიერი $x_1<x_2$ წერტილებისთვის მართებულია

$$f(x_1)>f(x_2)$$

უტოლობა.

განსაზღვრა 1.1.15. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *არაკლებადი (არაზრდადი)* რაიმე ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალის ნებისმიერი $x_1<x_2$ წერტილებისთვის მართებულია

$$f(x_1)\le f(x_2)\quad \left(f(x_1)\ge f(x_2)\right)$$

უტოლობა.

თეორემა 1.1.16. თუ $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული რაიმე ინტერვალის ყოველ წერტილში დადებითია (არაუარყოფითია), მაშინ f ფუნქცია ზრდადია (არაკლებადია) ამ ინტერვალზე.

თეორემა 1.1.17. თუ $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული რაიმე ინტერვალის ყოველ წერტილში უარყოფითია (არადადებითია), მაშინ ფუნქცია კლებადია (არაზრდადია) ამ ინტერვალზე.

განსაზღვრა 1.1.18. ვთქვათ, f ფუნქციის განსაზღვრის არეა X და $x_0\in X$ წერტილს ეწოდება ამ ფუნქციის *ლოკალური მაქსიმუმის წერტილი*, თუ მოიძებნება x_0 წერტილის ისეთი δ მიდამო $]x_0-\delta,x_0+\delta[$, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისთვის სრულდება

$$f(x)\le f(x_0)$$

უტოლობა.

განსაზღვრა 1.1.19. $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არის x_0 წერტილს ეწოდება ამ ფუნქციის *ლოკალური მინიმუმის წერტილი*, თუ მოიძებნება x_0 წერტილის ისეთი δ მიდამო $]x_0-\delta,x_0+\delta[$, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილიათვის სრულდება

$$f(x)\ge f(x_0)$$

უტოლობა.

თეორემა 1.1.20*). თუ x_0 წერტილი $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილია (ე. ი. ისეთი წერტილი, რომელშიც ფუნქცია აღწევს ლოკალურ მინიმუმს ან მაქსიმუმს) და ამ წერტილში არსებობს წარმოებული, მაშინ ეს წარმოებული 0-ის ტოლია:

---

*) ამ თეორემას ფერმას თეორემა ეწოდება. პ. ფერმა (1601-1665) ფრანგი მათემატიკოსი.

$$f'(x_0)=0\,.$$

თეორემა 1.1.21. თუ $y=f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მეორე რიგამდე ჩათვლით წარმოებული და სრულდება

$$f'(x_0)=0\,,\quad f''(x_0)<0\,,$$

პირობები, მაშინ x_0 წერტილი ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილია.

თეორემა 1.1.22. თუ $y=f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია მეორე რიგამდე ჩათვლით წარმოებული და სრულდება

$$f'(x_0)=0\,,\quad f''(x_0)>0$$

პირობები, მაშინ x_0 წერტილი ფუნქციის მინიმუმის წერტილია.

განვიხილოთ ორი ამოცანა ქიმიიდან.

ნახშირბადოქსიდის დაჟანგვის მაქსიმალური სიჩქარის განსაზღვრა. ვთქვათ, საჭიროა, დავადგინოთ ჟანგბადის ოპტიმალური კონცენტრაცია*), რომლის დროსაც აირთა ნარევში (ნახშირჟანგი და ჟანგბადი) შემავალი ნახშირბადის (II) ოქსიდის დაჟანგვის სიჩქარე მაქსიმალურია. შესაბამისი რეაქციის განტოლება ასე იწერება:

$$2\mathrm{CO}+\mathrm{O}_2\to 2\mathrm{CO}_2\,. \tag{1.1.1}$$

ჩავთვალოთ, რომ მოცემულ პირობებში პროცესი შეუქცევადია. მაშინ, ცნობილია, რომ *მოქმედ მასათა კანონის* თანახმად, (1.1.1) რეაქციის სიჩქარე აღიწერება

$$v=kx^2y \tag{1.1.2}$$

ფორმულით, სადაც x CO-ს კონცენტრაციაა, y – O_2-ის, ხოლო $k>0$ რეაქციის სიჩქარის მუდმივაა (იგი დამოკიდებული არაა მორეაგირე კომპონენტთა კონცენტრაციაზე).

გამოვსახოთ რეაქციის კომპონენტების კონცენტრაცია მოცულობით პროცენტებში. მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ

$$y=100-x\,.$$

y-ის ამ მნიშვნელობის (1.1.2) ფორმულაში შეტანით მივიღებთ:

$$v=kx^2(100-x)=k\left(100x^2-x^3\right).$$

ექსტრემუმის შესაძლო წერტილების პოვნის მიზნით (იხ. თეორემა 1.1.20), ამ ფუნქციის პირველი რიგის წარმოებული ნულს გავუტოლოთ:

$$\frac{dv}{dx}=k\left(200x-3x^2\right)=0\,. \tag{1.1.3}$$

ამოვხსნათ

$$k\left(200x-3x^2\right)=0$$

განტოლება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $k\neq 0$, მივიღებთ x-ის ორ მნიშვნელობას: $x_1=0$, $x_2=\dfrac{200}{3}\approx 66{,}7\%$. ამოცანის ქიმიური შინაარსიდან გამომდინარე, საინტერესოა მეორე მნიშვნელობა. ამის მკაცრად დასასაბუთებლად გავიხსენოთ, რომ ფუნქციის მაქსიმუმს შეესაბამება პირობა $\dfrac{d^2v}{dx^2}<0$, მინიმუმს – $\dfrac{d^2v}{dx^2}>0$. (1.1.3)-ის გაწარმოებით მივიღებთ

---

*) რაიმე ნივთიერების მასობრივი (შესაბამისად მოცულობითი) *კონცენტრაცია* ნარევში ეწოდება ნივთიერების მასის (შესაბამისად მოცულობის) შეფარდებას ნაერთის მასასთან (შესაბამისად მოცულობასთან). *კონცენტრაცია მოცულობით პროცენტებში* ეწოდება ნივთიერების მოცულობის პროცენტულ შეფარდებას ნაერთის მოცულობასთან, ე. ი. ის გვაძლევს პასუხს კითხვაზე: აღებული ნივთიერების მოცულობა მთელი ნაერთის მოცულობის რამდენ პროცენტს შეადგენს?

$$\frac{d^2v}{dx^2} = k(200 - 6x).$$

ცხადია, როცა $x = x_1 = 0$, მაშინ

$$\frac{d^2v}{dx^2} > 0,$$

ე. ი. ამ დროს სიჩქარე მინიმალურია, თუ $x = x_2 = 66{,}7\%$, მაშინ

$$\frac{d^2v}{dx^2} < 0,$$

ე. ი. ამ დროს სიჩქარე მაქსიმალურია.

თუ $x = 66{,}7\%$, მაშინ ჟანგბადის კონცენტრაცია

$$y = 100 - 66{,}7 = 33{,}3\%.$$

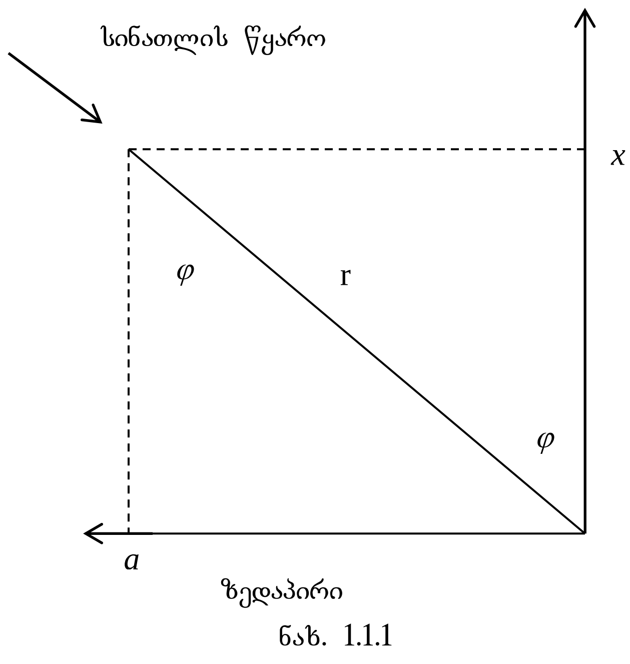
ამგვარად, ნახშირბადის (II) ოქსიდის დაჟანგვის სიჩქარე მაქსიმალურია, როცა ჟანგბადის შემცველობა აირთა ნარევის 33,3%-ს შეადგენს.

ფოტოქიმიური პროცესებისთვის მაქსიმალური განათებულობის დადგენა. მთელი რიგი ქიმიური რეაქციების წარმართვისთვის იყენებენ სინათლეს (ფოტოქიმია). ხშირად დღის წესრიგში დგება ამოცანა — რა x სიმაღლეზე უნდა მოთავსდეს სარეაქციო სისტემიდან (ჭურჭლიდან) სინათლის წყარო, რომ მისი განათებულობა მაქსიმალური იყოს.

ნახ. 1.1.1-ზე მოყვანილია ამოცანის პირობის შესაბამისი სქემა (იგულისხმება, რომ განათების არე (ზედაპირი) სხივების პერპენდიკულარული არაა). ცნობილია ფორმულა, რომლის მიხედვითაც განათებულობა

$$J = \frac{k}{r^2}\cos\varphi, \tag{1.1.4}$$

სადაც $k > 0$ პროპორციულობის კოეფიციენტია, r მანძილი სინათლის წყაროსა და ობიექტს,



ნახ. 1.1.1

რომელიც რაიმე ზედაპირზე დევს, შორის, φ — სინათლის სხივის დაცემის კუთხე.

ნახ. 1.1.1-დან ცხადია, რომ

$$r^2 = a^2 + x^2$$

და

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს (1.1.4) ფორმულაში, გვექნება:

$$J = \frac{k}{a^2 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = kx\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}}. \tag{1.1.5}$$

დავაფიქსიროთ a $(a > 0)$ და x ვცვალოთ 0-დან $+\infty$-მდე. x-ის მნიშვნელობათა შორის უნდა ვიპოვოთ ისეთი, რომლისთვისაც $J(x)$ უდიდესია. მაქსიმუმის წერტილის საპოვნელად, თეორემა 1.1.21-ის თანახმად, უნდა განვიხილოთ

$$\frac{dJ(x)}{dx} = 0,$$

ე. ი.

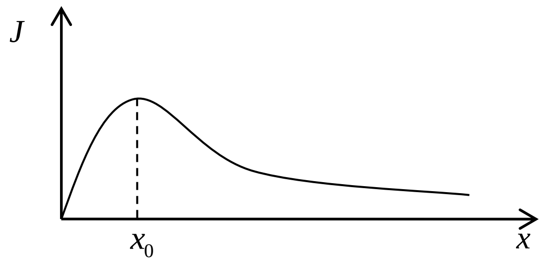
$$\frac{dJ(x)}{dx} = k\left[\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 3x^2\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{5}{2}}\right] = 0$$

განტოლება. რადგან $k \neq 0$ და $a^2 + x^2 \neq 0$, ამიტომ $\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{5}{2}}$-ზე გამრავლების შემდეგ მივიღებთ

$$a^2 + x^2 - 3x^2 = 0, \text{ ე. ი. } 2x^2 = a^2$$

კვადრატულ განტოლებას, რომლის დადებითი ფესვია:

$$x_0 = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx \frac{a}{1{,}414} \approx 0{,}707a. \tag{1.1.6}$$



ნახ. 1.1.2

შევნიშნოთ, რომ, როგორც ეს (1.1.5)-დან გამომდინარეობს,

$$J(0) = 0 \text{ და } \lim_{x \to +\infty} J(x) = 0,$$

ხოლო $]0,+\infty[$ ინტერვალზე $J(x)$ დადებითია.

ვინაიდან (1.1.6) ფორმულით განსაზღვრული x_0 არის x-ის ერთადერთი მნიშვნელობა, სადაც წარმოებული 0-ის ტოლია, ცხადია, რომ x_0 მაქსიმუმის წერტილია (იხ. ნახ. 1.1.2).

როდესაც

$$x = x_0,$$

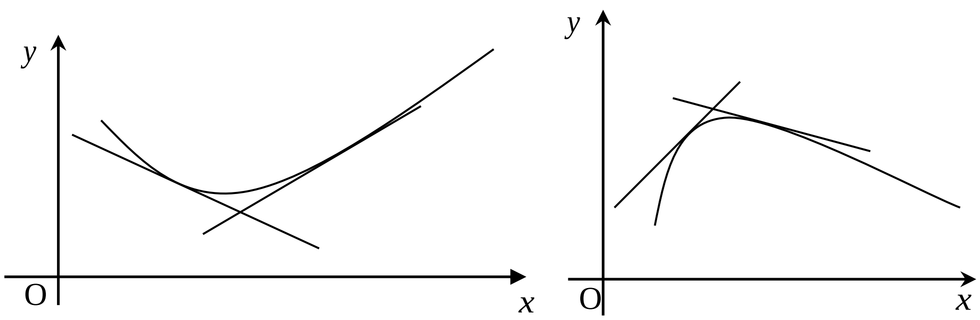
როგორც ეს (1.1.6)-დან გამომდინარეობს,

$$\text{tg}\varphi = \frac{a}{x_0} = \sqrt{2}.$$

მაშასადამე, განათებულობა უდიდესია, როდესაც დაცემის კუთხის ტანგენსი $\sqrt{2}$-ის ტოლია. ეს კი მაშინ ხდება, როცა

$$\varphi = \text{arctg}\sqrt{2} \approx 55^\circ.$$

განსაზღვრა 1.1.23. ფუნქციას ეწოდება *ქვემოთ ამოზნექილი* (*ზემოთ ამოზნექილი*) რაიმე ინტერვალზე, თუ ამ ინტერვალიდან აღებულ ნებისმიერი აბსცისის მქონე წერტილში ფუნქცი-



ნახ. 1.1.3

ის გრაფიკისადმი გავლებული მხები ფუნქციის გრაფიკის ქვემოთ (ზემოთ) არის მოთავსებული (იხ. ნახ. 1.1.3).

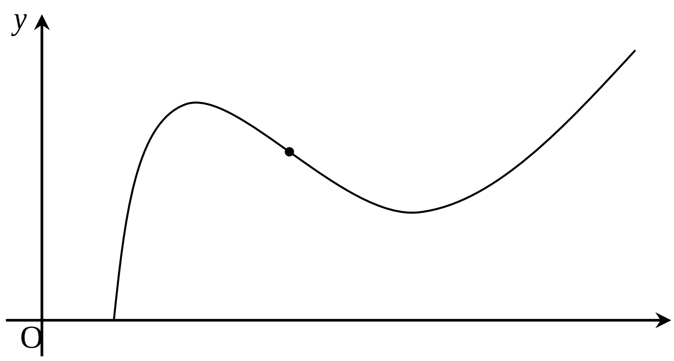
თეორემა 1.1.24. თუ მოცემულ ინტერვალზე (შუალედზე) f ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული და ეს წარმოებული დადებითია (უარყოფითია) ამ ინტერვალზე, მაშინ ფუნქცია ქვემოთ ამოზნექილია (ზემოთ ამოზნექილია) ამ შუალედზე.

განსაზღვრა 1.1.25. ფუნქციის *გადაღუნვის წერტილი* ეწოდება წერტილს, რომელიც ფუნქციის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედებს განაცალკევებს (იხ. ნახ. 1.1.4).

თეორემა 1.1.26. თუ f ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული x_0 წერტილის მახლობლობაში, ამასთან

$$f''(x_0) = 0$$

და f''-ს x_0 წერტილის მარცხენა და მარჯვენა მიდამოში სხვადასხვა ნიშანი აქვს, მაშინ

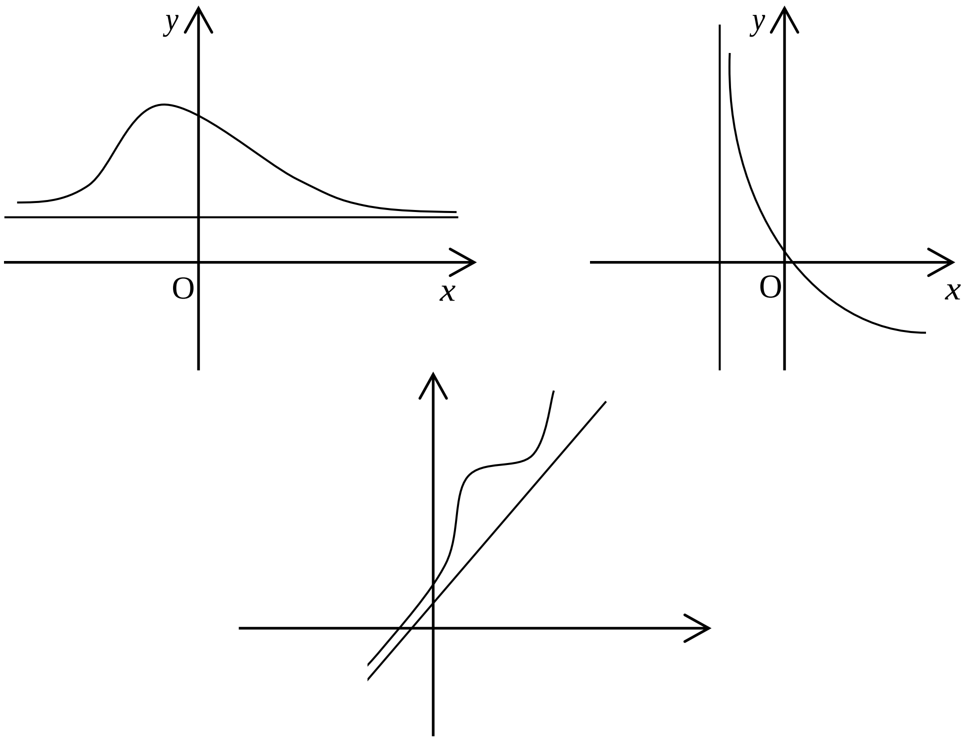


ნახ. 1.1.4

$(x_0, f(x_0))$ წერტილი ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია.

განსაზღვრა 1.1.27. რაიმე წირის *ასიმპტოტა* ეწოდება ისეთ წრფეს, რომელიც ამ წირს უსაზღვროდოდ უახლოვდება, მაგრამ მას არ კვეთს, როცა წირის წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფის.

ასიმპტოტა შეიძლება იყოს ჰორიზონტალური, ვერტიკალური და დახრილი (იხ. ნახ. 1.1.5).



ნახ. 1.1.5

მათემატიკურად მკაცრია შემდეგი განსაზღვრება: $y=f(x)$ წირის, რომელსაც უსასრულო შტო აქვს, ასიმპტოტა ეწოდება $y=kx+b$ წრფეს, თუ მანძილი $(x,f(x))$ წერტილსა და $y=kx+b$ წრფეს შორის მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $(x,f(x))$ წერტილი წირის გასწვრივ უსასრულობისკენ მიისწრფის. მანძილი წერტილიდან წრფემდე ეწოდება ამ წერტილიდან წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეს.

განსაზღვრა 1.1.28. თუ

$$\lim_{x\to a\pm} f(x)=+\infty \quad \text{ან} \quad \lim_{x\to a\pm} f(x)=-\infty ,$$

მაშინ $x=a$ წრფეს $y=f(x)$ ფუნქციის *ვერტიკალური ასიმპტოტა* ეწოდება.

განსაზღვრა 1.1.29. $y=kx+b$ წრფეს ეწოდება $y=f(x)$ ფუნქციის *დახრილი* $(k\neq 0)$ ან *ჰორიზონტალური* $(k=0)$ *ასიმპტოტა*, თუ $y=f(x)$ ფუნქცია, როცა $x\to\pm\infty$ (ე. ი. $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის, შესაბამისად, მარცხენა ან მარჯვენა მიდამოში) შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$f(x)=kx+b+\gamma(x)$$

სახით, სადაც $\gamma(x)$ რაიმე ფუნქციაა ისეთი, რომ

$$\lim_{x\to\pm\infty}\gamma(x)=0 .$$

დახრილი და ჰორიზონტალური ასიმპტოტის მოსაძებნად უნდა განვიხილოთ შემდეგი ნაბიჯები

$$1)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k\ ,\ \ 2)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=b\ .$$

თეორემა 1.1.30. თუ არსებობს სასრული k და b, მაშინ არსებობს $y=kx+b$ ასიმპტოტა.

განსაზღვრა 1.1.31 $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უსასრულოდ მცირე ფუნქცია (სიდიდე)*, როცა $x\to a$ (a შეიძლება იყოს უსასრულოდ დაშორებული წერტილი), თუ

$$\lim_{x\to a} f(x)=0 .$$

$y = f(x)$ ფუნქციას ეწოდება *უსასრულოდ დიდი ფუნქცია (სიდიდე)*, როცა $x \to a$, თუ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty .$$

თეორემა 1.1.32 (***ლოპიტალის*[*)] *წესი***). ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციის შეფარდების ზღვარი ტოლია ამ ფუნქციების წარმოებულების შეფარდების ზღვრის, თუ ეს უკანასკნელი არსებობს, ე. ი.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ როცა } \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ და } \lim_{x\to a} g(x) = 0 .$$

შენიშვნა 1.1.33. მიუხედავად იმისა, $\lim_{x\to a} f(x)$ სასრულია თუ უსასრულო, ლოპიტალის წესი სამართლიანია მაშინაც, როცა

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty \text{ ან } \lim_{x\to a} g(x) = -\infty .$$

ხშირად ლოპიტალის წესის გამოყენება მოხერხებულია $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 სახის განუზღვრელობების გასახსნელად.

[*)] გ. ფ. ა. ლოპიტალი (1661-1704) – ფრანგი მათემატიკოსი.