თემა 1. მათემატიკური ფიზიკისა და კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

1. n განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე - **წრფივი** ან **ვექტორული სივრცე** სივრცე **ნამდვილ** ან კომლექსურ რიცხვთა ველზე, სადაც ნებისმიერი n+1 ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია, ანუ

$$\forall \mathbf{X_1, X_2,\ldots, X_n}, \mathbf{X_{n+1}} \in \mathbf{R^n}, \quad \exists \boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n} \in \mathbf{R}$$
$$\mathbf{X_{n+1}} = \boldsymbol{\alpha_1} \mathbf{X_1} + \boldsymbol{\alpha_2} \mathbf{X_2} + \boldsymbol{\alpha_n} \mathbf{X_n}$$

2. Def. - სკალარული ნამრავლი არის **ასახვა** $(\ ,\ ): L \times L \to R$ (ან C) (**L** სივრცის ელემენტების ნებისმიერ წყვილს **(x,y)** შეუსაბამებს ნადვილი **R** (კომპლექსური **C**) რიცხვს) და ეს **ასახვა ერმიტულია,** ანუ ზოგად შემთხვევაში აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომას - $(x,y) = \overline{(y,x)}$, სადაც - $\overline{(y,x)}$ კომპლექსურად შეუღლებული რიცხვია,

შენიშვნა: - როდესაც ასახვა "ნამდვილია" ეს პირობა "კომუტატურობაა"! - უმეტესწილად განიხილება შემთხვევა **მკაცრად დადებითად განსაზღვრულობა, ანუ** $(x,x) > 0 \quad \forall x \in L \quad \& \quad x \neq 0$, ასეთ შემთხვევაში **სკალარული ნამრავლის** საფუძველზე განისაზღვრება **ნორმა!**

3. "მანძილი" ნებისმიერ ორ x და yვექტორს შორის

$$d(x,y) \equiv \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

4. **ბირთვი – $B(X^0, r) = Q_r(X^0) = \{X \in R^n : |X - X^0| < r\}$, რომლის ცენტრია წერტილი X^0 და რადიუსი რიცხვი $r \in R$;**
5. **სფერო – $S(X^0, r) = S_r(X^0) = \{X \in R^n : |X - X^0| = r\}$, რომლის ცენტრია წერტილი X^0 და რადიუსი რიცხვი $r \in R$;**
6. **არე – Ω ბმული ღია სიმრავლე R^n სივრცეში.**

7. **მულტიინდეხი - $a = (a_1, a_2,\ldots,a_n)$, $a_i \in N \cup \{0\}$;** (0.1.2)
8. x ელემენტის α ხარისხი ანუ **ვექტორის ხარისხი R^n სივრცეში**

$$x^\alpha = \left(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \cdots, x_n^{\alpha_n}\right) \tag{0.1.3}$$

9. **მულტიინდექსის მოდული -** $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (0.1.4)

10. **მულტიინდექსის ფაქტორიალი - $a! = a_1! a_2! \ldots a_n!$** (0.1.5)
11. **ჩვეულებრივი და კერძო-წარმოებულები:**

ა. **ჩვეულებრივი წარმოებული** ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის შეფარდების ზღვარი როდესაც არგუმენტის ნაზრდი უსასრულოდ მცირდება!

ბ. **კერძო წარმოებული** (კერძო სემთხვევა) **- ორი ცვლადის ფუნქციის** $f(x_1,x_2)$ **კერძოწარმოებული** x_2 **არგუმენტის მიმართ: "გავყინოთ" პირველი არგუმენტი** $x_1 = x_1^0$, მივიღებთ ერთი ცვლადის ფუქციას x_2 არგუმენტის

მიმართ. ამ ფუნქციის ჩვეულებრივი წარმოებული არის **კერძოწარმოებული x_2 არგუმენტის მიმართ! ანუ**

$$D_2 f(x_1,x_2) \equiv \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \equiv f_{,x_2}(x_1,x_2) \equiv f_{,2}(x_1,x_2) \qquad (0.1.6^*)$$

12. ანალოგიურად განისაზღვრება მრავალი ცვლადის ფუნქციის **კერძო წარმოებული i ური არგუმენტით**

$$D_i f(x_1,...,x_i,...,x_n) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \equiv f_{,x_i}(x) \equiv f_{,i}(x) \qquad (0.1.6)$$

13. **α - რიგის კერძო წარმოებული - ნებისმიერი α მულტიინდექსის შესაბამისი რიგის კერძო წარმოებული ესაა ამ მულტიინდექსის მოდულის რიგის კერძო წარმოებული, რომლის კომპონენტები განსაზღვრავენ კერძო წარმოებულის რიგს შესაბამისი ნომრის არუმეტით, ანუ**

$$D^\alpha f \equiv D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n} f \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n} \qquad (0.1.7)$$

14. **$f \in C^k(\Omega)$ – ფუნქციას Ω არეში ყოველი k ნატურალური რიცხვისათვის** (k-ს ჩათვლით) გააჩნია k-რიგის გლუვი ყველა კერძო წარმოებული;

15. **$f \in L_p(\Omega)$ $p \geq 1$** - ზომადი k-რიგით ინტეგრებადი ფუნქციები ანუ

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \qquad (1.1.1)$$

16. ლოკალურად ინტეგრებადობა , ანუ **$f \in L_{loc}(\Omega)$ ფუნქცია ინტეგრებადია არის ნებისმიერ კომპაქტზე;**

17. **გლუვი** საზღვარის მქონე არე, ანუ **გლუვი არე, Ω - მისი საზღვარი (ზედაპირი, წირი) გლუვია ე.ი. (აღმწერი ფუნქციები გლუვებია);**

18. **სტოქსის თეორემა: თუ Ω** საკმარისად გლუვი არეა და ფუნქციები $U_j(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ მაშინ

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_j(x)}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n U_j(x) \nu_j ds \qquad (1.1.3)$$

სადაც **$\nu \equiv (\nu_1, \ldots, \nu_n)$** მოცემული არის **$\partial\Omega$** საზღვრის ერთეულოვანი გარე ნორმალია და ds – მისი საზღვრის ელემენტია

19. თუ **$U \in L_p(\Omega)$** და **$V \in L_q(\Omega)$**, სადაც $p^{-1} + q^{-1} = 1$, მაშინ ადგილი აქვს **ჰელდერის უტოლობას**

$$\int_\Omega |U(x)||V(x)| dx \leq \left(\int_\Omega |U(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |V(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad ! \qquad (1.1.4)$$

20. **C.B.S. – „კოში - ბუნიაკოვსკი შვარცის“ უტოლობა:** თუ **$U \in L_2(\Omega)$** და **$V \in L_2(\Omega)$**, მაშინ ადგილი აქვს **უტოლობას**

$$\int_{\Omega}|U(x)||V(x)|dx \le \left(\int_{\Omega}|U(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\Omega}|V(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad ! \qquad (1.1.5)$$

კრებადობები

21. { $\varphi_n(X)$} ფუნქციათა მიმდევრობის წერტილოვანი კებადობა: - $\varphi_n \to \varphi$ – ნიშნავს, რომ **თუ $X_0 \in \Omega$,** მაშინ **რიცხვითი მიმდევრობა {$\varphi_n(X_0)$} კრებადია $\varphi(X_0)$ - რიცხვისაკენ,** ანუ

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(X_0) = \varphi(X_0) \quad ! \qquad (1.1.6)$$

22. **{ $\varphi_n(X)$} ფუნქციათა მიმდევრობის თანაბარი კებადობა სიმრავლეზე: $\varphi_n \to\to \varphi$ –** ნიშნავს, რომ ნებისმიერი დადებითი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნომერი $N(\varepsilon)$, რომელიც არაა დამოკიდებული **X** ელემენტზე, რომ ნებისმიერი **$n > N(\varepsilon)$** ნომრისათვის

$$|\varphi_n(\tilde{X}) - \varphi(X)| < \varepsilon! \qquad (1.1.7)$$

23. **{ $\varphi_n(X)$} ფუნქციათა მიმდევრობის სუსტი კებადობა სკალარული ნამრავლის მიმართ: $\varphi_n \to \varphi$ –** ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი ელემენტი, რომ სკალარული ნამრავლი, როგორც რიცხვითი მიმდევრობა კრებადია, ანუ

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi_k(x), v) = (\varphi(x), v)| \qquad (1.1.8)$$

* ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები

ამ თეორიამ განვითარება დაიწყო XVII საუკუნეში როგორც კი გაჩნდა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა (ნიუტონი, ლეიბნიცი, ბერნული, . . .)

ამ თეორიის განვითარებას უკავშირდება გამოყენებითი ხასიათის ამოცანების გამოკვლევა გეომეტრიასა და მექანიკაში. ციურ მექანიკაში გამოკვლევის სრულყოფის გარდა ამ თეორიის გამოყენებით შესაძლებელი გახდა ახალი აღმოჩენების გაკეთება (მაგალითად: ნეპტუნის აღმოჩენა და ორბიტის დადგენა), სამი სხეულის ამოცანის "შესწავლა" და მრავალი სხვ. (ბიოლოგიაში, ქიმიასა და . . .)

** კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები

I. თეორია წარმოიშვა XVIII საუკუნეში ფიზიკის ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანის გამოკვლევისას და უშუალოდ დაუკავშირდა გამოყენებითი ხასიათის ამოცანებს, ძირითადად ფიზიკიდან; შესაბამისად ამ თეორიის დასახელება "მათემატიკური ფიზიკა"! ეილერის, ლაგრანჟის, დალამბერის, ლაპლასის, ფურიეს, მონჟის, ამპერისა და სხვათა გამოკვლევებმა სათავე დაუდო ამ თეორიას და დღესაც

აქტუალურია მათ მიერ დამუშავებული მეთოდები, რომელთა ნაწილს ჩვენ შემოკლებული სახით წარმოვადგენთ კურსში!

II. ეს თეორია ძალზე მჭიდროდაა დაკავშირებული მათემატიკის ყველა დარგთან და მთელი სისრულით იყენებს ამ მიმართულებით მიღებულ უახლესს შედეგებს თავისი ამოცანების გამოკვლევისას, ხოლო თავის მხრივ ძალზე ხშირად სვამს აბსოლუტურად ახალ ამოცანებს სხვა დარგებისათვის ალგებრა, ტოპოლოგია, კომპლექსური ანალიზი და . . !

Def. 24. მოცემულია მრავალი ცვლადის ფუნქცია $F(X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots)$, $k=1,\ldots,m.$, საძიებელი მრავალი ცვლადის ფუნქცია $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და მირებული აღნისვნების თანახმად შესაძლებელია გაკეთდეს ჩანაწერი

$$F(X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots) \equiv F(X_0, u) = 0 \qquad (1.2.1)$$

სადაც $k=1,\ldots,m$

$$\{X_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in R,\ i=1,2,\ldots,n\};$$
$$\{X_1 = \{D^{\alpha}u\}: |\alpha| = 1,\ i=1,2,\ldots,n\};$$
$$\{X_2 = \{D^{\alpha}u\}: |\alpha| = 2,\ i=1,2,\ldots,n\};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\{X_k = \{D^{\alpha}u\}: |\alpha| = k,\ i=1,2,\ldots,n\}$$

Def. 25. (1.2.1) ტოლობას ეწოდება **n** ცვლადის კერძოწარმობულებიანი **m** რიგის დიფერენციალური განტოლება უცნობი **u** ფუნქციის მიმართ !

Def. 26. დიფერენციალური განტოლების კლასიკური ამონახსნი **u -** ნამდვილი ფუნქცია რომელიც:

I. უწყვეტია, ანუ $u \in C(\Omega)$;

II. მისი, (1.2.1) განტოლობაში შემავალი, ყველა კერძო წარმოებულიც უწყვეტია; ე.ი. $D^{\alpha} \in C(\Omega)$; $|\alpha| \leq m$;

III. იგივეობად აქცევს (1.2.1) განტოლებას!

Def. 27. (1.2.1) ერთგვაროვანი განტოლებაა - თუ მისი მარცხენა მხარის ყოველი შესაკრები (წევრი) შეიცავს მამრავლის სახით უცნობ **u** ფუნქციას ან მის რომელიმე წარმოებულს!

Def. 28. (1.2.1) განტოლების "თავისუფალი წვრი" მარცხენა მხარის ის შესაკრებები (წევრები) რომლებიც არ შეიცავენ მამრავლის სახით უცნობ **u** ფუნქციას ან მის წარმოებულს!

Def. 29. (1.2.1) განტოლება ძალზე ხშირად ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$F(X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots) = f(X_0) \qquad (1.2.1^*)$$

როდესაც თავისუფალი წევრი $f(X_0)$ ანუ "მარჯვენა მხარე" ცალკეა გამოყოფილი და წერიაა ტოლობის მარჯვნივ;

Def. 30. "მარჯვენა მხარე" "თავისუფალი წევრი":

a. $f(X_0) \equiv 0$ განტოლება (1.2.1) ერთგვაროვანია;

b. $f(X_0) \neq 0$ განტოლება (1.2.1) არაერთგვაროვანია ;

Def. 31. (1.2.1) წეფივი განტოლებაა თუ $u(X_0)$ და $v(X_0)$ ფუნქციებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$F(X_0,u+v) = F(X_0,u) + F(X_0,v) = 0 \qquad (1.2.2)$$

Def. 32. (1.2.1) განტოლების "მთავარი ნაწილი" მარცხენა მხარის ის წევრები (ნიშნის ჩათვლით) რომლებიც შეიცავენ უცნობ u ფუნქციის უმაღლესი $|\alpha| = m$ რიგის წარმოებულებს!

Def. 33. (1.2.1) განტოლება კვაზიწრფივია - თუ მთავარი ნაწილი წრფივია

მაგალითები:

$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x)$	$u_{,xx} + xu_{,yy} = 0$

*****n ცვლადის, m რიგის წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი სახე**

34. (1.2.1*) და (1.2.2) – თანახმად შეუძლებელია განტოლების წევრები შეიცავდნენ უცნობ u ფუნქციასა და მის წარმოებულების ნამრავლებს ან ამგვარი გამოსახულებების მეორე ან უფრო მაღალ ხარისხებს განტოლება ვეღარ იქნება წრფივი! შესაბამისად განტოლების ზოგადი სახეა

$$F(D,u) \equiv \sum_{0 \le |\alpha| \le m} A_\alpha(X) D^\alpha u(X) = f(x) \qquad (1.2.3)$$

შენიშვნა: 35. $A_\alpha(X)$ "განტოლების კოეფიციენტები" მრავალი ცვლადის მოცემული ფუნქციებია

შენიშვნა: 36. განტოლება (1.2.3) მუდმივ კოეფიციენტებიანია , როდესაც ყველა $A_\alpha(X) \equiv \text{const}$.

$$F_0(\zeta,u) \equiv \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(X) \zeta^\alpha \qquad (1.2.4)$$

სადაც $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)$ და $z_i \in R$ "ნამდვილი ვექტორია"

ორი ცვლადის, მეორე რიგის წრფივი კერძოწარმოებულები-ანი დიფერენციალური განტოლებების ზოგადი სახე

34*. კონკრეტულად როდესაც n=2, m=2, $X \equiv (x_1, x_2) \equiv (x, y)$;

$$F(D,u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(X)\frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} B_i(X)\frac{\partial u(X)}{\partial x_i} + C(X)u(X) = f(x) \qquad (1.2.5)$$

ამ შემთხვევაში მოცემული განტოლების მახასიათებელი ფორმაა მრავალწევრი

$$F_0(\zeta, u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(X)\zeta_i \zeta_j \qquad (1.2.6)$$

სადაც z "ნამდვილი ვექტორია", ანუ $z \equiv (z_1, z_2)$ და $z_i \in R$ და ამ შემთხვევაში მახასიათებელი ფორმა ძალზე წააგავს მეორე რიგის წირების "მთავარ ნაწილს" ანალიზური გეომეტრიიდან?!

კანონიკურ სახეზე მიყვანა

მოვახდინოთ ცვლადთა გარდაქმნა და სიმარტივისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

- **"ძველი ცვლადები" – $X \equiv (x_1, x_2) \equiv (x,y)$;**
- **"ახალი ცვლადები" - $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \equiv (\xi, \eta)$ ან (λ, μ)**

$$\xi = \phi(x,y); \qquad \eta = \psi(x,y); \qquad (1.2.7)$$

შესაძლებელია შექცეული გარდაქმნა - ფუნქციები შებრუნებადია როგორი უნდა იყოს ϕ და ψ ფუნქციები?

ჩავატაროთ მსჯელობა კონკრეტულად ორი ცვლადის, მეორე რიგის წრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის, რომელშიც სპეციალურად გამოყოფილია მთავარი ნაწილი!

$$A_{11}u_{,xx} + 2A_{12}u_{,xy} + A_{22}u_{,yy} + \tilde{F}(x,y,u,u_{,x},u_{,y}) = 0 \qquad (1.2.8)$$

რთული ფუნქციის წარმოებულის განმარტებისა და აღნიშვნების თანახმად

კერძო წარმოებულები ახალ ცვლადებში

$$\begin{aligned}
u_{,x} &= u_{,\xi}\xi_{,x} + u_{,\eta}\eta_{,x} \qquad & u_{,y} &= u_{,\xi}\xi_{,y} + u_{,\eta}\eta_{,y} \\
u_{,xx} &= u_{,\xi\xi}\xi_{,x}^2 + 2u_{,\xi\eta}\xi_{,x}\eta_{,x} + u_{,\eta\eta}\eta_{,x}^2 + u_{,\xi}\xi_{,xx} + u_{,\eta}\eta_{,xx} \qquad (1.2.9) \\
u_{,yy} &= u_{,\xi\xi}\xi_{,y}^2 + 2u_{,\xi\eta}\xi_{,y}\eta_{,y} + u_{,\eta\eta}\eta_{,y}^2 + u_{,\xi}\xi_{,yy} + u_{,\eta}\eta_{,yy}
\end{aligned}$$

$$u_{,xy} = u_{,\xi\xi}\xi_{,x}\xi_{,y} + u_{,\xi\eta}(\xi_{,x}\eta_{,y} + \xi_{,y}\eta_{,x}) + u_{,\eta\eta}\eta_{,x}\eta_{,y} + u_{,\xi}\xi_{,xy} + u_{,\eta}\eta_{,xy}$$

ამგვარად გამოთვლილი მნიშვნელობები ჩავსვათ (1.2.8) განტოლებაში და დავაჯგუფოთ "ერთი ტიპის" წევრები

$$\overline{A}_{11}u_{,\xi\xi} + 2\overline{A}_{12}u_{,\xi\eta} + \overline{A}_{22}u_{,\eta\eta} + \overline{\overline{F}}\left(x, y, u, u_{,\xi}, u_{,\eta}\right) = 0 \qquad (1.2.8^*)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \overline{A}_{11} &= A_{11}\xi_{,x}^2 + 2A_{12}\xi_{,x}\xi_{,y} + A_{22}\xi_{,y}^2 \\ \overline{A}_{12} &= A_{11}\xi_{,x}\eta_{,x} + A_{12}(\xi_{,x}\eta_{,y} + \xi_{,y}\eta_{,x}) + A_{,22}\xi_{,y}\eta_{,y} \\ \overline{A}_{22} &= A_{11}\eta_{,x}^2 + 2A_{12}\eta_{,x}\eta_{,y} + A_{22}\eta_{,y}^2 \end{aligned} \qquad (1.2.10)$$

$$\overline{\overline{F}}\left(x, y, u, u_{,\xi}, u_{,\eta}\right) \equiv \beta_1 u_{,\xi} + \beta_2 u_{,\eta} + \gamma u - \delta(x) \qquad (1.2.11)$$

ახალი ცვლადების ამორჩევა

ვეცადოთ ავარჩიოთ ახალი ცვლადები ისე, რომ (1.0.8*) განტოლების პირველი კოეფიციენტი გახდეს ნული!

$$\overline{A}_{11} = A_{11}z_{,x}^2 + 2A_{12}z_{,x}z_{,y} + A_{22}z_{,y}^2 = 0 \qquad (1.2.12)$$

ანუ მოსაძებნია ისეთი ორი ცვლადის ნამდვილი ფუნქცია z=z(x,y)= ϕ (x,y) რომელიც (1.2.12) განტოლებას დააკმაყოფილებს (რომელიმე კერძო ამონახსნი). შესაბამისად ამგვარი ფუნქციის საშუალებით ჩატარებული ცვლადთა გარდაქმნა (1.2.7) იმის გარანტია, რომ ახალ ცვლადებში (1.2.8*) განტოლების პირველი კოეფიციენტი ნულის ტოლი იქნება!

ლემა 1. თუ z = ϕ(x,y) არის (1.2.12) განტოლების კერძო ამონახსნი, მაშინ წირი ϕ(x,y) = c ≡const. წარმოადგენს

$$A_{11}dy^2 - 2A_{12}dxdy + A_{22}dx^2 = 0 \qquad (1.2.13)$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგად ამონახსნს.

დამტკიცება. რადგან z=ϕ (x,y) არის (1.2.12) განტოლების კერძო ამონახსნი, შესაბამისად სამართლიანია ტოლობა

$$A_{11}\left(\frac{\phi_{,x}}{\phi_{,y}}\right)^2 - 2A_{12}\left(-\frac{\phi_{,x}}{\phi_{,y}}\right) + A_{22} = 0$$

მეორეს მხრივ არაცხადი სახით მოცემული ϕ (x,y) =c ფუნქცია შესაძლოა წარმოდგეს როგორც y = φ(x, c) შესაბამისად

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\phi_{,x}(x,y)}{\phi_{,y}(x,y)}\right]_{y=\varphi(x,c)}$$

ანუ

$$A_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2A_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + A_{22} = \left[A_{11}\left(-\frac{\phi_{,x}}{\phi_{,y}}\right)^2 - 2A_{12}\left(-\frac{\phi_{,x}}{\phi_{,y}}\right) + A_{22}\right]_{y=\varphi(x,c)} = 0$$

ეს უკანასკნელი აჩვენებს ლემა ერთის სამართლიანობას!

ლემა 2. **თუ $\phi(x,y) = c$ არის (1.2.13) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, მაშინ ორი ცვლადის ფუნქცია $z=\phi(x,y)$ წარმოადგენს (1.2.12) განტოლების კერძო ამონახსნს.**

დამტკიცება. **(x_0, y_0)** წერტილზე გავატაროთ წირი **$\phi(x_0, y_0) = c_0$** ანუ **$y_0 = \varphi(x_0, c_0)$**

$$A_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2A_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right) + A_{22} = \left[A_{11}\left(-\frac{\phi_{,x}}{\phi_{,y}}\right)^2 - 2A_{12}\left(-\frac{\phi_{,x}}{\phi_{,y}}\right) + A_{22}\right]_{y=\varphi(x,c_0)} = 0$$

შესაბამისად ყოველი (x_0, y_0) წერტილისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$A_{11}\phi_{,x}^2(x_0,y_0) + 2A_{12}\phi_{,x}(x_0,y_0)\phi_{,y}(x_0,y_0) + A_{22}\phi_{,y}^2(x_0,y_0) = 0$$

ეს უკანასკნელი აჩვენებს ლემის სამართლიანობას!

Def. (1.2.13) მახასიათებელი განტოლებაა;
Def. მახასიათებელი განტოლების ამონახსნები მახასიათებლებია!

მახასიათებლები

თუ ვიმსჯელებთ (1.2.12) განტოლების ანალოგიურად A_{22} კოეფიციენტის "განულებაცაა" შესაძლებელი. ანუ ლემის თანახმად ამოვხსნათ (1.0.13). თუ $A_{11} \neq 0$ კვადრატული განტოლების ფესვთა ფორმულის თანახმად ამოსახსნელია შემდეგი განტოლებები და შესაბამისად ნაპოვნი იქნება ცვლადთა მახასიათებელი გარდაქმნები!

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{12} + \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{12}}}{A_{11}} \qquad (1.2.14)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A_{12} - \sqrt{A_{12}^2 - A_{11}A_{12}}}{A_{11}} \qquad (1.2.15)$$

ორი ცვლადის, მეორე რიგის წრფივი კერძოწარმოებულები-ანი დიფერენციალური განტოლებების ტიპები

(1.2.13) განტოლების დისკრიმინანტი განსაზღვრავს (1.2.5) განტოლების ტიპს:

$$\begin{aligned} &A_{12}^2 - A_{11}A_{12} > 0 \quad \text{- ჰიპერბოლური ტიპის განტოლება!} \\ &A_{12}^2 - A_{11}A_{12} = 0 \quad \text{- პარაბოლური ტიპის განტოლება !} \\ &A_{12}^2 - A_{11}A_{12} < 0 \quad \text{- ელიფსური ტიპის განტოლება!} \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

შენიშვნა - მარტივი საჩვენებელია, რომ ცვლადთა გარდაქმნის მიუხედავად (1.2.5) განტოლების ტიპი არ იცვლება. ეს იმის შედეგია, რომ

$$\overline{A}_{12}^2 - \overline{A}_{11}\overline{A}_{12} = \left(A_{12}^2 - A_{11}A_{12}\right)J^2 \tag{1.2.17}$$

სადაც

$$J = \xi_{,x}\eta_{,y} - \xi_{,y}\eta_{,x} \tag{1.2.18}$$

ცვლადთა გარდაქმნის იაკობიანია და (1.2.7)–ის თანახმად $\xi=\phi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$.

I. ჰიპერბოლური ტიპის განტოლება - $A_{12}^2 - A_{11}A_{12} > 0$!

(1.2.13) განტოლებას ორი ნამდვილი ფესვი აქვს და შესაბამისად განტოლებას ორი ნამდვილი სხვადასხვა მახასიათებელი გააჩნია ანუ (1.2.14) და (1.2.15) განტოლებების ამონახსნები! ასეთი ცვლადთა გარდაქმნის შედეგად (1.2.5) განტოლების "ახალი" კოეფიციენტები A_{11} , A_{22} ნულებია და შესაბამისად (1.2.8*) განტოლებას შემდეგი კანონიკური (ეილერის ფორმა) სახე აქვს

$$u_{,\xi\eta} = \Phi\left(\xi,\eta,u,u_{,\xi},u_{,\eta}\right) \quad \text{სადაც} \quad \Phi\left(\xi,\eta,u,u_{,\xi},u_{,\eta}\right) = -\frac{\overline{\overline{F}}}{2\overline{A}_{12}} \tag{1.2.8**}$$

კიდევ ერთი კონკრეტული ცვლადთა გარდაქმნის შედეგად (1.2.8*)

$$\xi = \lambda + \mu, \quad \eta = \lambda - \mu$$

ანუ

$$\lambda = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \mu = \frac{\xi - \eta}{2}$$

შესაბამისად ახალ ცვლადებსი ფუნქციის წარმოებულები

$$u_{,\xi} = \frac{1}{2}\left(u_{,\lambda} + u_{,\mu}\right), \quad u_{,\eta} = \frac{1}{2}\left(u_{,\lambda} - u_{,\mu}\right)$$

$$u_{,\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(u_{,\lambda\lambda} - u_{,\mu\mu}\right)$$

და მათი ჩასმა (1.2.18**) გამოსახულებაში გვაძლევს (1.2.5) განტოლების კანონიკურ სახეს (დალამბერის ფორმა)

$$\left(u_{,\lambda\lambda}-u_{,\mu\mu}\right)=4\Phi \qquad (1.2.19)$$

II. პარაბოლური ტიპის განტოლება - $A_{12}^2-A_{11}A_{12}=0$!

(1.2.13) განტოლებას ერთი ნამდვილი ფესვი აქვს და შესაბამისად განტოლებას ერთი ნამდვილი სხვადასხვა მახასიათებელი გააჩნია! მიტომ

$$\overline{A}_{11}=A_{11}\xi_{,x}^2+2A_{12}\xi_{,x}\xi_{,y}+A_{22}\xi_{,y}^2=\left(\sqrt{A_{11}}\xi_{,x}+\sqrt{A_{22}}\xi_{,y}\right)^2=0$$

და $A_{12}=\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{22}}$ ამ ტოლობის გათვალისწინებით

$$\overline{A}_{12}=\left(\sqrt{A_{11}}\xi_{,x}+\sqrt{A_{22}}\xi_{,y}\right)\left(\sqrt{A_{11}}\eta_{,x}+\sqrt{A_{22}}\eta_{,y}\right)=0$$

1. თუ A_{22} ნულია მაშინ განტოლება პირველი რიგის ყოფილა; მეტიც თუ $u_{,x}$ ს კოეფიციენტიც ნულია, მაშინ (1.2.5) - ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებაა!

2. ჩვეულებრივად $u_{,x}$ ს კოეფიციენტი ნული არაა და ამ შემთხვევაში კანონიკური სახეა

$$u_{,\eta\eta}=\Phi\left(\xi,\eta,u,u_{,\xi},u_{,\eta}\right)\equiv-\frac{\overline{\overline{F}}}{A_{22}} \qquad (1.2.20)$$

ან

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}-\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}=f(x)$$

III. ელიფსური ტიპის განტოლება - $A_{12}^2-A_{11}A_{12}<0$

(1.2.13) განტოლებას ორი კომპლექცურად შეუღლებული ფესვი აქვს. შესაბამისად ცვლადთა გარდაქმნა კომპლექსურია და განტოლების სახე ჰიპერბოლურს ჰგავს! საქმე რომ კომპლექსურ ცვლადებთან არ გვქონდეს კიდევ ერთი გარდაქმნა ჩავატაროთ

$$\xi=\lambda+i\mu,\quad \eta=\lambda-i\mu$$

$$\lambda=\frac{\phi+\overline{\phi}}{2},\quad \mu=\frac{\phi-\overline{\phi}}{2i}$$

შესაბამისად ახალ ცვლადებსი კოეფიციენტები

$$\overline{A}_{11}=A_{11}\xi_{,x}^2+2A_{12}\xi_{,x}\xi_{,y}+A_{22}\xi_{,y}^2$$

$$= \left(A_{11}\lambda_{,x}^2 + 2A_{12}\lambda_{,x}\lambda_{,y} + \lambda_{,y}^2\right) - \left(A_{11}\mu_{,x}^2 + 2A_{12}\mu_{,x}\mu_{,y} + A_{22}\mu_{,y}^2\right) +$$
$$+ 2i\left(A_{11}\lambda_{,x}\mu_{,x} + A_{12}\left(\lambda_{,x}\mu_{,y} + \lambda_{,y}\mu_{,x}\right) + A_{22}\lambda_{,y}\mu_{,y}\right) = 0$$

ამ შემთხვევაში კანონიკური სახეა

$$u_{,\xi\eta} = \Phi\left(\xi, \eta, u, u_{,\xi}, u_{,\eta}\right)$$

ოღონდ ამ შემთხვევასი ცვლადები კომპლექსურებია და ნამდვილ ცვლადებში ელიფსური განტოლების კანონიკური სახეა

$$\left(u_{,\lambda\lambda} + u_{,\mu\mu}\right) = \Phi\left(\lambda, \mu, u, u_{,\lambda}, u_{,\mu}\right) \equiv -\frac{\widetilde{F}}{\widetilde{A}_{22}} \qquad (1.2.21)$$

ანალოგიური ალგორითმითაა შესაძლებელი მეორე რიგის განტოლებების კლასიფიკაცია მრავალი ცვლადის შემთხვევაში

ჰიპერბოლური ტიპის განტოლების კანონიკური სახე მეორე რიგისა და n ცვლადის შემთვევში:

$$-u_{,x_1x_1} + u_{,x_2x_2} + \ldots + u_{,x_nx_n} = \Phi \qquad (1.2.22)$$

შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება კი

$$\zeta_1^2 - \zeta_2^2 - \zeta_3^2 \cdots - \zeta_n^2 = 0$$

ულტრაჰიპერბოლური ტიპის განტოლების კანონიკური სახე მეორე რიგისა და n ცვლადის შემთვევაში:

$$\sum_{i=1}^{p} u_{,x_ix_i} - \sum_{i=p+1}^{n} u_{,x_ix_i} = \Phi \qquad (1.2.26)$$

შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება კი

$$\sum_{i=1}^{p} \zeta_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \zeta_i^2 = 0, \qquad (1.2.27)$$

პეტროვსკის აზრით პარაბოლური ტიპის განტოლების კანონიკური სახე მეორე რიგისა და n ცვლადის შემთვევაში

$$u_{,x_1} - \sum_{i=2}^{n} \left(\pm u_{,x_ix_i}\right) = \Phi, \qquad (1.2.28)$$

შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება კი

$$\zeta_1 - \sum_{i=2}^{n} \left(\pm \zeta_i^2\right) = 0$$

პლურიპარაბოლური ტიპის განტოლების კანონიკური სახე მეორე რიგისა და ცვლადის შემთვევაში

$$\sum_{i=1}^{p} u_{,x_ix_i} - \sum_{i=p+1}^{q} u_{,x_ix_i} = \Phi, \quad p < q < n \qquad (1.2.29)$$

შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება კი

$$\sum_{i=1}^{p}\zeta_i^2-\sum_{i=p+1}^{q}\zeta_i^2=0,\quad p<q<n$$

ელიფსური ტიპის განტოლების კანონიკური სახე მეორე რიგისა და n ცვლადის შემთვევაში

$$u_{,x_1x_1}+u_{,x_2x_2}+\ldots+u_{,x_nx_n}=\Phi \tag{1.2.30}$$

შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება კი

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2\cdots+\zeta_n^2=0 \tag{1.2.31}$$

კოვალევსკაიას თეორემა

კოშის ამოცანა

განვიხილოთ განტოლება

$$\frac{\partial^m u(X)}{\partial x_1^m}=F\left(X,u(X),D^\alpha u(X)\right) \tag{1.4.1}$$

სადაც

- $X\equiv(x_1,\ldots,x_N)$ - დამოუკიდებელი ცვლადია;
- F – მოცემული მრავალი ცვლადის ფუნქცია;
- $u(X)\equiv u(x_1,\ldots,x_N)$ – საძიებელი ფუნქცია!
- m – **"გამოყოფილი ცვლადით"** წარმოებულის უმაღლესი რიგი!
- **მულტიინდექსი** $\alpha\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\quad |\alpha|\le m:\alpha_1<m$
- $\hat{X}_0\equiv\left(x_1^0,x_2,\ldots,x_n\right)$ - **"გამოყოფილი ცვლადის"** გარკვეული $x_1=a_0$ მნიშვნელობა

"გამოყოფილი ცვლადის" გარკვეული $x_1=a_0$ მნიშვნელობისათვის მოცემულია ფუნქციისა და მისი წარმოებულების (უმაღლეს რიგამდე) მნიშვნელობები **"საწყისი მონაცემები"** ანუ **"კოშის მონაცემები"!**

$$\left.\frac{\partial^k u(X)}{\partial x_1^k}\right|_{x_1=x_1^0}=\varphi^{(k)}\left(\hat{X}_0\right),\ k=0,1,\ldots,m-1 \tag{1.4.2}$$

Def. **კოშის ამოცანა - ვიპოვოთ ისეთი $u(x)$ ფუნქცია, რომელიც (1.4.1) განტოლებასა და (1.4.2) "საწყისი მონაცემებს" აკმაყოფილებს.**

ანალიზურობა

Def. **n- კომპლექსური ცვლადის $F(z_1,\ldots z_n)$ ფუნქცია ანალიზურია $Z_0=(z^0_1,\ldots z^0_n)$ წერტილის მიდამოში, თუ ის წარმოდგენადია კრებადი მწკრივის სახით საკმარისად მცირე $|Z-Z_0|$ მნიშვნელობებისათვის**

$$F(Z)=\sum_{\alpha} B_{\alpha}(Z-Z_0)^{\alpha} \quad \text{, სადაც} \quad Z\equiv(z_1,z_2,...,z_n),\quad z_i\in C \tag{1.4.3}$$

შენიშვნა - $F(z_1,\dots z_n)$ ფუნქცია ანალიზურია $Z_0=(z^0_1,\dots z^0_n)$ წერტილის მიდამოში ნიშნავს, რომ ამ "წერტილში" მას ნებისმიერი რიგის კერძო წარმოებული გააჩნია და შესაბამისად

$$B_{\alpha}=\frac{1}{\alpha!}\left[D^{\alpha}F(Z)\right]_{Z=Z_0} \tag{1.4.4}$$

კოვალევსკაიას თეორემა

თუ (1.4.1) განტოლებაში შემავალი ფუნქცია F არის ანალიზური $(x^0_1,\dots x^0_n,\varphi^{(0)},\dots D^{\alpha}\varphi^{(0)},\dots)$ წერტილის მიდამოსა, და $\varphi^{(k)}$ ფუნქციები ანალიზურნი არიან $(x^0_2,\dots x^0_n)$ წერტილის მიდამოში, მაშინ (1.4.1) - (1.4.2) კოშის ამოცანის ამონახსნი ანალიზურია $(x^0_1,\dots x^0_n)$ წერტილის მიდამოში, თანაც ის ერთადერთია ანალიზურ ფუნქციათა კლასში!

სიმის თავისუფალი რხევის განტოლება

l სიგრძის ერთგვაროვანი იზოტროპული სიმის (უსისქო, ელასტიური ძაფი) **OX** ღერძზე ძევს და ასრულებს თავისუფალ რხევას **XOU** სიბრტყეში; ***u(x,t)*** არის ***x*** წერტილის გადახრის სიდიდე ***t*** მომენტში, ხოლო ***f(x,t)*** მოქმედი გარე ძალა

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}=f(t,x) \tag{1.3.2}$$

l სიგრძის არერთგვაროვანი იზოტროპული ზამბარა (უსისქო, ელასტიური ძაფი) **OX** ღერძზე ძევს და ასრულებს თავისუფალ რხევას **OX** ღერძის გასწვრივ; ***u(x,t)*** არის ***x*** წერტილის წაგრძელების სიდიდე ***t*** მომენტში, ხოლო ***f(x,t)*** მოქმედი გარე ძალა.

$$u_{,tt}(t,x)-\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)u_{,x}(t,x)\right)=f(t,x) \tag{1.3.3}$$

ერთგვაროვანი იზოტროპული აფსკი (უსისქო, ელასტიური ზედაპირი) **OXY** სიბრტყეში ძევს და ასრულებს თავისუფალ რხევას სიბრტყეში; ***u(x,y,t)*** არის ***t*** მომენტში ***(x,y)*** წერტილის გადახრის სიდიდე, ხოლო ***f(x,y,t)*** მოქმედი გარე ძალა.

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2}\right)=f(t,x,y) \tag{1.3.4}$$

დიფუზიის განტოლება

ერთგვაროვანი იზოტროპული ზედაპირი **OXY** სიბრტყეში ძევს და მასზე ტემპერატურის განაწილება მოცემულია. ***u(x,y,t)*** არის ***t*** მომენტში ***(x,y)*** წერტილში ტემპერატურის სიდიდე, ხოლო ***f(x,y,t)*** გარედან მოწოდებული სითბოს მაჩვენებელია.

$$u_{,t} - a^2 \Delta u = f \qquad \textbf{(1.3.5)}$$

არაერთგვაროვანი იზოტროპული ღერო (უსისქო, ძაფი) **OX** ღერძზე ძევს და მასში ტემპერატურის საწყისი განაწილებაა მოცემული. ***u(x,t)*** არის ***t*** მომენტში ***(x)*** წერტილში ტემპერატურის სიდიდე, ხოლო ***f(x,t)*** გარედან მოწოდებული სითბო!

$$u_{,t}(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)u_{,x}(t,x)\right) = f(t,x) \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

თემა 2

დალამბრის ფორმულა

სიმის თავისუფალი და იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლებები; ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებები და რხევები;

კოშის ამოცანა ერთგვაროვანი სიმის იძულებითი განივი რხევის განტოლებისათვის

- ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების კურსში (მატემატიკური ფიზიკის განტოლებები I) კლასიკური ამოცანა პირველი რიგის განტოლებისათვის ჟღერდა ასე: იპოვნეთ

$$\frac{du(x)}{dt} = f(t,u) \tag{2.0.1}$$

განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ

$$u(t_0) = u_0 \tag{2.0.2}$$

საწყის პირობას !?

- კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების კურსში (მატემატიკური ფიზიკის განტოლებები II) ერთერთი კლასიკური ამოცანა (სიმის თავისუფალი განივი რხევის განტოლებისათვის) ჟღერს ასე: იპოვნეთ

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0 \qquad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \tag{2.1.1}$$

განტოლების ამონახსნი u(x,t) (დალამბერის ფორმა), რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ

$$u(0,x) = \varphi(x) \qquad u_t(0,x) = \psi(x) \tag{2.1.2}$$

საწყის პირობებს (კოშის მონაცემები)!?

I. უსასრულო სიმის თავისუფალი რხევა, დალამბრის მეთოდი

(2.1.1) განტოლების შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებაა

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \tag{2.1.3.}$$

ანუ

$$dx - adt = 0 \qquad \text{და} \qquad dx + adt = 0 \tag{2.1.4.}$$

კვადრატული განტოლების ფესვთა ფორმულის თანახმად ამოსახსნელია შემდეგი განტოლებები და შესაბამისად ნაპოვნი იქნება ცვლადთა მახასიათებელი გარდაქმნები!

მახასიათებლები $C_1 = x - at$ და $C_2 = x + at$ (2.1.5.)

მახასიათებელი ცვლადები $\eta = x - at$ და $\xi = x + at$ (2.1.6.)

შესაბამისად ჰიპერბოლური განტოლებისათვის კანონიკური სახე მახასიათებელ ცვლადებში არის

$$u_{\xi\eta} = 0 \qquad \text{(ეილერის ფორმა)} \qquad (2.1.7.)$$

კანონიკური განტოლების ამოხსნა. წარმოებული ξ არგუმენტით ნულია, შესაბამისად პირველყოფილი არაა დამოკიდებული ამ არგუმენტზე! მეორეს მხრივ ეს ნიშნავს, რომ პირველყოფილი ერთი η ცვლადის ფუქციაა!

$$u_{\eta}(\xi,\eta) = g^*(\eta) \qquad (2.1.8.)$$

"პიველყოფილის პირველყოფილი" შესაძლებელია ჩაიწეროს, როგორც!

$$u(\xi,\eta) = \int g^*(\eta)d\eta + f(\xi)$$

(ეს მსჯელობა შესაძლებელია ჩატარდეს თავიდან η ცვლადისათვის); ამიტომ დალამბერის განტოლების ზოგადი ამონახსნი შესაძლებელია წარმოდგეს, როგორც ორი ერთი ცვლადის ფუნქციის ჯამი.

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) \qquad (2.1.9)$$

ანუ ზოგადი ამონახსნი "საწყის" ცვლადებში!

$$u(x,t) = f(x+at) + g(x-at) \qquad (2.1.9^*)$$

ზოგადი ამონახსნის საშუალებით ჩავწეროთ კოშის მონაცემები (2.1.2) ანუ

$$u(0,x) = f(x) + g(x) = \varphi(x) \quad \text{და} \quad u_{,t}(0,x) = af'(x) - ag'(x) = \psi(x) \qquad (2.1.2^*)$$

შესაბამისად მივიღეთ ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემა, სადაც საძიებელია ***f*** და ***g*** ფუქციები , ხოლო ***φ*** და ***ψ*** ფუნქციები მოცემულია; ანუ

$$f(x) + g(x) = \varphi(x) \qquad \text{და} \qquad f(x) - g(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\tau)d\tau + C$$

შესაბამისად სისტემის ამონახსნებია

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\tau)d\tau + \frac{C}{2} \quad \text{და} \quad g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\tau)d\tau - \frac{C}{2} \qquad (2.1.10)$$

აქედან გამომდინარე საწყისი (2.1.1) - (2.1.2) ამოცანის ამონახნია

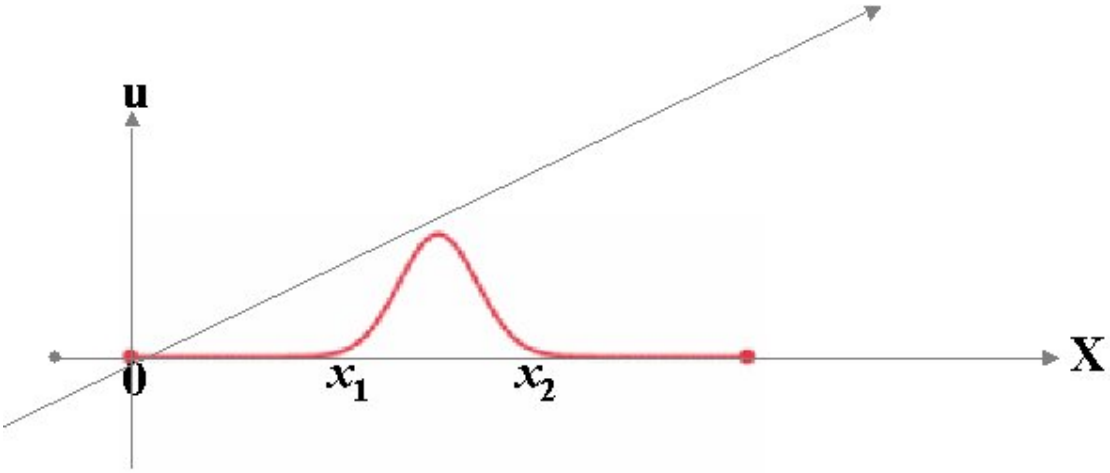
$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at} \psi(\tau)d\tau - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\tau)d\tau\right\}$$

ანუ ადგილი აქვს დალამბერის ფორმულას

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau \qquad (2.1.11)$$

II. ფიზიკური არსი

l სიგრძის ერთგვაროვანი იზოტროპული სიმის (უსისქო, ელასტიური ძაფი) **OX** ღერძზე ძევს და ასრულებს თავისუფალ რხევას **XOU** სიბრტყეში; ***u(x,t)*** არის ***x*** წერტილის გადახრის სიდიდე ***t*** მომენტში

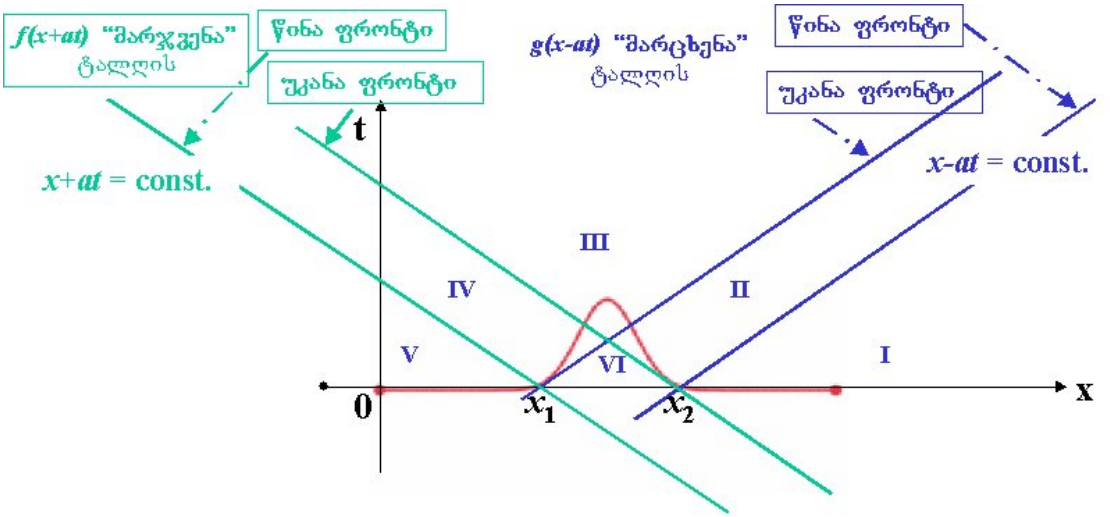


u(x,t) – ტალღა (2.1.9*) არის ***f(x+at)*** **"მარჯვენა"** და ***g(x-at)*** **"მარცხენა"** ტალღის სუპერპოზიცია, რომლებიც ***a*** **"სიჩქარით"** ვრცელდებიან!
ანუ

ა. ***g(x-at)*** **"მარცხენა"** ტალღა მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს ***x-at*** **= const.** მახასიათებლის გასწვრივ!

ბ. ***f(x+at)*** **"მარჯვენა"** ტალღა მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს ***x+at*** **= const.** მახასიათებლის გასწვრივ!

$[x_1x_2]$ ინტერვალი არის არანულოვანი საწყისი მონაცემების მზიდი. ამ ინტერვალის ბოლოებზე გავლებული მახასიათებლები ექვს უბნად ყოფენ ზედა ნახევარ სიბრტყეს, და ყოველ მათგანს ფიზიკური შინაარსი გააჩნია!

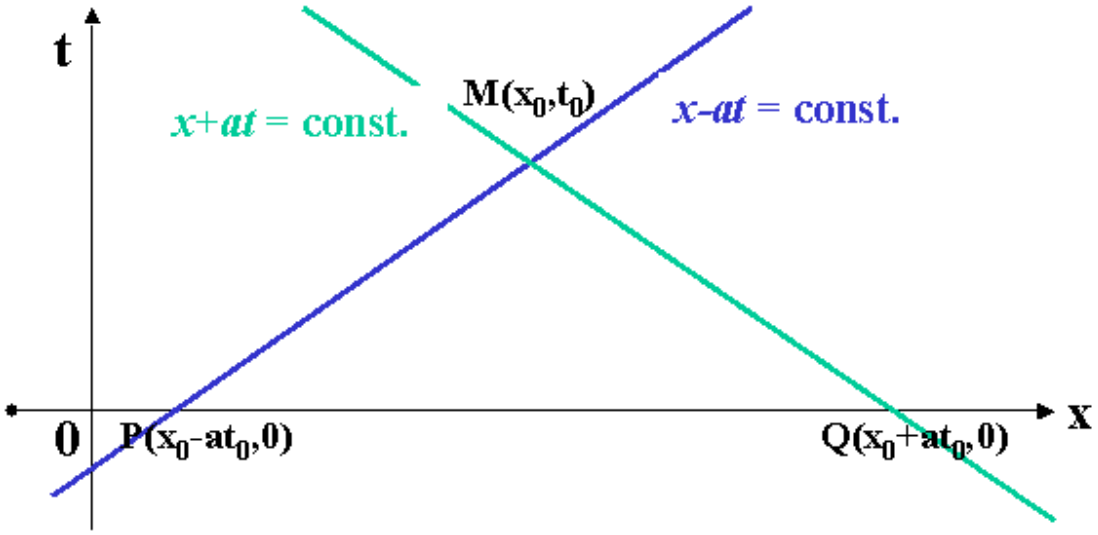


I. – უბანი (x,t) ∈ I მარცხენა ტალღა ჯერ არ მისულა ⇒ **u(x,t)=0;**
II. – უბანი (x,t) ∈ II **ამონახსნს მხოლოდ** მარცხენა ტალღა განსაზღვრავს;

III. – უბანი (x,t) ∈ III **მარჯვენა** და მარცხენა ტალღები აქ უკვე აღარ მოვა ⇒ **u(x,t)=0**;
IV. – უბანი (x,t) ∈ IV **ამონახსნს მხოლოდ** მარჯვენა ტალღა განსაზღვრავს;
V. – უბანი (x,t) ∈ V მარჯვენა ტალღა ჯერ არ მისულა ⇒ **u(x,t)=0;**
VI. – უბანი (x,t) ∈ VI "მახასიათებელი სამკუთხედი" - **ამონახსნს ორივე** - მარჯვენა და მარცხენა ტალღა განსაზღვრავს;

III. მახასიათებელი სამკუთხედი **MPQ**

განვიხილოთ ფიქსირებული წერტილი (x_0,t_0) და ამ წერტილიდან "გამოუშვათ" ორი სხვადასხვა ოჯახის წარმომადგენელი მახასიათებელი. ისინი 0X ღერძს გადაკვეთენ შესაბამისად **P** და **Q** წერტილებში და რადგან ***g(x-at)*** **"მარცხენა"** ტალღა მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს ***x-at* = const.** მახასიათებლის გასწვრივ, ხოლო ***f(x+at)*** **"მარჯვენა"** ტალღა მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს ***x+at* = const.**



მახასიათებლის გასწვრივ! ტალღის სიდიდეს $\mathbf{M(x_0,t_0)}$ წერტილში განსაზღვრავენ მხოლოდ **P** და **Q** წერტილებში საწყისი გადახრები!

$$u(M)=\frac{1}{2}[\varphi(P)+\varphi(Q)]+\frac{1}{2a}\int_{PQ}\psi(\tau)d\tau$$

PQ ინტერვალის გარეთ მოცემული საწყისი მონაცემები ზეგავლენას არ ახდენენ **M** წერტილში ტალღის სიდიდეზე.

IV. არაერთგვაროვანი განტოლება იძულებითი რხევა

იპოვნეთ

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=f(x,t) \qquad -\infty<x<\infty, \quad t\geq 0 \qquad (2.2.1)$$

განტოლების ამონახსნი u(x,t), რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ

$$u(0,x)=\varphi(x) \qquad u_t(0,x)=\psi(x) \tag{2.2.2}$$

საწყის პირობებს (კოშის მონაცემები)!?

დამხმარე ამოცანა ფუნქცია $w_f(x,t;\tau)$, რომელიც არის

$$w_{f,tt}-a^2 w_{f,xx}=0 \qquad -\infty<x<\infty, \quad t>\tau \tag{2.2.3}$$

განტოლების ამონახსნი შემდეგი საწყისი პირობებით

$$w_f(x,\tau;\tau)=0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x,\tau;\tau)=f(x,t), \quad -\infty<x<\infty, \quad t=\tau, \tag{2.2.4}$$

დალამბერის ფორმულის თანახმად არის

$$_f(x,t;\tau)=w_f(x,t-\tau;\tau)=\frac{1}{2}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ (2.1.9) დალამბერის ფორმულა შესაძლოა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$u(x,t)=\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0)+w_\psi(x,t;0) \tag{2.1.11*}$$

სადაც

$$w_\varphi(x,t;0)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi \text{ , და } \quad w_\psi(x,t;0)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \tag{2.2.5} \tag{2.2.6}$$

არიან (2.2.3) - (2.2.4) ამოცანიების ამონახსნები, როდესაც $\tau = 0$ და შესაბამისად $f=\varphi$ ან $f=\psi$.

ლემა. ერთგვაროვანი (2.2.1) - (2.2.2) ამოცანის ამონახსნია

$$u(x,t)=a^2\int_0^t w_f(x,t;\tau)d\tau \tag{2.2.7}$$

დამტკიცება. (2.2.7) გამოსახულების გაწარმოება და (2.2.4) პირობების გათვალისწინება აჩვენებს, რომ:

$$u_{,t}(x,t)=a^2 w_f(x,t;t)+a^2\int_0^t\frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t;\tau)d\tau=a^2\int_0^t\frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t;\tau)d\tau$$

ანუ

$$u_{,tt}(x,t)=a^2\frac{\partial w_f}{\partial t}(x,t;t)+a^2\int_0^t\frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau=a^2\int_0^t\frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau+a^2 f(x,t) \tag{2.2.8}$$

$$u_{,xx}(x,t)=a^2\int_0^t\frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x,t;\tau)d\tau=\int_0^t\frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x,t;\tau)d\tau$$

რაც ამტკიცებს ლემის დებულებას!
შესაბამისად სამართლიანია შემდეგი

თეორემა. არაერთგვაროვანი (2.2.1) - (2.2.2) ამოცანის ამონახსნია

$$u(x,t)=\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x,t;0)+w_\psi(x,t;0)+a^2\int_0^t w_f(x,t;\tau)d\tau \qquad (2.2.9)$$

ანუ

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (2.2.10)$$

V. ნახევრადუსასრულო სიმის თავისუფალი რხევა

- იპოვნეთ

$$u_{tt}(x,t)-a^2u_{xx}(x,t)=0 \qquad 0\le x<\infty,\quad t\ge 0 \qquad (2.3.1)$$

განტოლების ამონახსნი u(x,t) (დალამბერის ფორმა), რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ

$$u(0,x)=\varphi(x) \qquad u_t(0,x)=\psi(x) \qquad (2.3.2)$$

საწყის პირობებსა (კოშის მონაცემები) და ერთერთ სასაზღვრო პირობას!?

$$u(0,t)=\mu(t) \quad t>0 \qquad \text{(ბოლო მართვადია)} \qquad (2.3.3)$$

$$u(0,t)=0 \quad t>0 \qquad \text{(ბოლო დაბმულია)} \qquad (2.3.4)$$

$$u_x(0,t)=0 \quad t>0 \qquad \text{(ბოლო თავისუფალია)} \qquad (2.3.5)$$

დამხმარე ლემა 1: თუ ***φ(x)*** და ***ψ(x)*** კენტი ფუნქციებია $\mathbf{x_0}$ წერტილის მიმართ, მაშინ დასმული ამოცანის ამონახსნი ნულის ტოლია ამ წერტილში დროის ნებისმიერ მომენტში (ეს **წერტილი უძრავია!**)

დამტკიცება ლემა 1: ზოგადობის შენარჩუნებით დაუშვათ $\mathbf{x_0}=0$! და ამ შემთხვევაში ***φ(x)*** და ***ψ(x)***) კენტი ფუნქციებია სათავის მიმართ, ანუ

$$\varphi(x)=-\varphi(-x); \qquad \psi(x)=-\psi(-x);$$

და შესაბამისად (2.1.11) ფორმულაში

$$u(0,t)=\frac{1}{2}[\varphi(at)+\varphi(-at)]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\psi(\xi)d\xi=0.$$

დამხმარე ლემა 2: თუ ***φ(x)*** და ***ψ(x)*** ლუწი ფუნქციებია $\mathbf{x_0}$ წერტილის მიმართ, მაშინ დასმული ამოცანის ამონახსნის წარმოებული **x** არგუმენტით ნულის ტოლია ამ წერტილში (ანუ **“ბოლო თავისუფალია”**!)

დამტკიცება ლემა 2: ზოგადობის შენარჩუნებით დაუშვათ $\mathbf{x_0}=0$! და ამ შემთხვევაში ***φ(x)*** და ***ψ(x)*** ლუწი ფუნქციებია სათავის მიმართ, ანუ

$$\varphi(x)=\varphi(-x); \qquad \psi(x)=\psi(-x);$$

და შესაბამისად (2.1.11) ფორმულაში

$$u_{,x}(0,t)=\frac{1}{2}[\varphi'(at)+\varphi'(-at)]+\frac{1}{2a}[\psi(at)-\psi(-at)]=0$$

დამხმარე ლემების შედეგები სამართლიანია ნებისმიერი ფუქციებისათვის რომელთა წარმოდგენა შესაძლებელია დალამბერის ფორმულის საშუალებით, ამიტომ შესაძლებელია შემდეგი ამოცანების შესწავლა: 1. "ამოცანა დაბმული ბოლოთი"!

დასმული (2.3.1), (2.3.2) , (2.3.4) ამოცანის მაგივრად შეგვიძლია განვიხილოთ **"სახეცვლილი ამოცანა"** (2.1.1), (2.1.2) წარმოსახვითი უსასრულო სიმისათვის და საწყისი მონაცემები კენტი ფუნქციები "ავიღოთ".

$$\Phi(x)\equiv\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases},\qquad \Psi(x)\equiv\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

შემდეგ დალამბერის ფორმულის გამოყენებით, დამხმარე ლემა 1-ისა და გამოთვლების შედეგად დავინახავთ, რომ საწყისი ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi; & t<\dfrac{x}{a},\ x>0\\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(at+x)+\varphi(at-x)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{at+x}\psi(\xi)d\xi; & t>\dfrac{x}{a},\ x>0\end{cases}\qquad(2.3.6)$$

2. "ამოცანა თავისუფალი ბოლოთი"! დასმული (2.3.1), (2.3.2) , (2.3.5) ამოცანის მაგივრად შეგვიძლია განვიხილოთ **"სახეცვლილი ამოცანა"** (2.1.1), (2.1.2) წარმოსახვითი უსასრულო სიმისათვის და საწყისი მონაცემები ლუწი ფუნქციები "ავიღოთ".

$$\Phi(x)\equiv\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases},\qquad \Psi(x)\equiv\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$$

შემდეგ დალამბერის ფორმულის გამოყენებით, დამხმარე ლემა 2-ისა და გამოთვლების შედეგად დავინახავთ, რომ საწყისი ამოცანის ამონახსნს აქვს სახე

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi; & t<\dfrac{x}{a},\ x>0\\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi; & t>\dfrac{x}{a},\ x>0\end{cases}\qquad(2.3.7)$$

თემა 3

ცვლადთა განცალება
ფურიეს მეთოდი

ფიზიკური ამოცანა: **- სასრული სიგრძის სიმის თავისუფალი განივი რხევა რომლის ბოლოები უძრავია**

კოშის ამოცანა სიმის თავისუფალი განივი რხევის განტოლებისათვის

$$u_{,tt} - a^2 u_{,xx} = f(x,t) \tag{2.4.1}$$

საწყისი პირობები $u(0,x) = \varphi(x)$ და $u_{,t}(0,x) = \psi(x)$ (2.4.2)

სასაზღვრო პირობები $u(0,t) = 0$ და $u(l,t) = 0$ (2.4.3)

ამონახსნი ვეძებოთ ცვლადთა განცალების მეთოდით!

ანუ (2.4.1) (2.4.3) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ როგორც:

1. **ორი ერთი ცვლადის ფუნქციის ნამრავლი**

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{2.4.4};$$

2. **ამონახსნი იგივურად ნული არ არის ანუ** $X(x)T(t) \neq 0$!

ა. თავდაპირველად გამოსახულება (2.4.4) ჩავსვათ (2.4.1) განტოლებაში

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2} X(x)T''(t) \tag{2.4.5}$$

რადგან ამონახსნი იგივურად ნული არაა

$$\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} = \frac{1}{a^2}\frac{X(x)T''(t)}{X(x)T(t)} \quad \text{და შესაბამისად} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{2.4.6}$$

(2.4.6) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგარი ფუნქცია მხოლოდ დროით არგუმენტზეა დამოკიდებული, ხოლო მარცხენა სივრცით არგუმენტზე, გამოდის, რომ ტოლობის ორივე მხარეს მუდმივი რიცხვია!

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \equiv \lambda = const. \tag{2.4.6*}$$

წარმოდგენილი ტოლობა იშლება ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(x) \neq 0 \quad \text{და} \quad T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0; \quad T(t) \neq 0 \tag{2.4.7}$$

(2.4.3) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე შესაძლებელია დავწეროთ

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{და} \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

და რადგან ამონახსნი არ შეიძლება იყოს იგივურად ნული შესაბამისად აგილი აქვს შემდეგ საწყისი პირობებს

$$X(0) = 0 \quad \text{და} \quad X(l) = 0 \tag{2.4.8}$$

შტურმი ლიუვილის ამოცანა ვიპოვოთ ისეთი ნამდვილი (კომპლექსური) λ რიხვები (*საკუთრივი რიცხვები*) რომლისთვისაც

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \quad X(x) \neq 0 \quad X(0) = 0 \quad \text{და} \quad X(l) = 0 \tag{2.4.9}$$

(2.4.9) ამოცანას არატრივიალური ამონახსნები გააჩნია შესაბამისად ამოვწეროთ ამონახსნები (*საკუთრივი ფუნქციები*).

ადვილი დასანახია, რომ ცნობილი λ რიცხვისათვის ამოცანა (2.4.9) ტრივიალურია და შესაბამისად გასარჩევია 3 შემთხვევა:

შემთხვევა როდესაც λ=0 - ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა კურსიდან ცნობილია, რომ

$$X''(x)=0; \qquad X(x)\neq 0$$

განტოლების ამონახსნია

$$X(x)=C_1x+C_2 \tag{2.4.10}$$

ფუნქცია და შესაბამისად (2.4.8) საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ რომ ორივე მუდმივი C_1 და C_2 ნულის ტოლია შესაბამისად ამონახნი ტრივიალურია ეს არც შტურმი-ლიუვილის ამოცანას არ თავიდან დასმულ ამოცანას არ "გამოადგება" ამონახსნი არ შეიძლება იყოს იგივურად ნული!

შემთხვევა როდესაც λ<0 - ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა კურსიდან ცნობილია, რომ თუ მახასიათებელ განტოლებას ორი ნამდვილი ფესვი აქვს, მაშინ განტოლების ამონახსნია ფუნქცია

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{2.4.11}$$

ანუ უნდა მოიძებნოს (2.4.11) გამოსახულებაში C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობა (2.4.9) ამოცანის საწყისი მნიშვნელობების გათვალისწინებით? (2.4.8) პირველი საწყისი პირობიდან ჩანს, რომ $C_1 = - C_2$ და შესაბამისად მეორე პირობა

$$X(l)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=C_1e^{\beta}+C_2e^{-\beta}=C\left(e^{\beta}+e^{-\beta}\right)=0$$

სრულდება მხოლოდ მაშინ როდესაც მუდმივი C ნულის ტოლია, რაც შეუძლებელია! ანუ საკუთრივი რიცხვი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი!

შემთხვევა როდესაც λ>0 - ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა კურსიდან ცნობილია, რომ თუ მახასიათებელ განტოლებას კოპლექსური ფესვი აქვს, მაშინ განტოლების ამონახსნია ფუნქცია

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x \tag{2.4.12}$$

მოიძებნოს (2.4.12) გამოსახულებაში C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობა (2.4.9) ამოცანის საწყისი მნიშვნელობების გათვალისწინებით? (2.4.8) პირველი საწყისი პირობიდან ჩანს, რომ

$$X(0)=C_1\cdot 1+C_2\cdot 0=C_1=0$$

და შესაბამისად მეორე პირობა გვაძლევს

$$X(l)=C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0$$

რადგან მუდმივი $C_2\neq 0$ (მაშინ ამონახსნი ტრივიალური იქნება) რცება შემთხვევა როდესაც საკუთრივი რიცხვები შემდეგი განტოლების ამონახსნებია $\sin\sqrt{\lambda}l=0$ ანუ როდესაც $\sqrt{\lambda}=\frac{\pi n}{l}$ და შესაბამისად დავასვნით, რომ

საკუთრივი რიცხვებია $$\lambda=\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \tag{2.4.13}$$

საკუთრივი ფუნქციებია $$X_n(x)=C_2\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{2.4.14}$$

შესაბამისად (2.4.9) ამოცანის არატრივიალური (არანულოვანი) ამონახსნი შესაძლებელია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ თუ **საკუთრივი λ რიცხვები** დადებითნი არიან და მეტიც მათ გააჩნიათ (2.4.13) სახე. **$X_n(x)$ საკუთრივი ფუნქციები** (2.4.14) არსებობს ნებისმიერი ნატურალური ***n*** რიცხვისათვის!

ზოგადი ამონახსნი

(2.4.13) საკუტრივი რიცხვების სემთხვევაში აზრი აქვს განვიხილოთ (2.1.7) ის მეორე განტოლება (დანარჩენ შემთხვევაში საძიებელი ამოცანის ამონახსნი ტრივიალურია). ამ კონკრეტულ შემტხვევაში ამონახსნს გააჩნია სემდეგი სახე

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \qquad (2.4.15)$$

განტოლების საკუთრივი რიცხვებისა და ფუნქციების უსასრულო რაოდენობიდან გმომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვისათვის ფუნქცია

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \right) \sin\frac{\pi n}{l} x$$

(2.4.1) განტოლების ამონახსნია როდესაც მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია! თანაც აკმაყოფილება (2.4.3) სასაზღვრო პირობებს!
ანუ წრფივობიდან გამომდინარე (2.4.1)-(2.4.3) საწყის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at \right) \sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (2.4.16)$$

მწკრივის სახით.

ფურიეს მწკრივები

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l} x \qquad (2.4.17)$$

სადაც (**კოეფიციენტები**)

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi d\xi$$

ნამდვილი მოცემულ ინტერვალზე ინტეგრებადი F(x) ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია "მისკენ":

- **თანაბრად, თუ ის უწყვეტია და შემოსაზღვრული ვარიაციისაა ყოველ ქვეინტერვალზე**
- **0,5[F(x+0)+F(x-0)]-სკენ ყოველ ქვეინტერვალზე სადაც ფუნქცია და მისი პირველი წარმოებული უბან-უბან უწყვეტია, ან აკმაყოფილებს ჟორდანის პირობას (აქვს სასრული ვარიაცია)**

თუ ამ პირობებს აკმაყოფილებენ დასმული ამოცანის კოშის მონაცემებვი (2.4.2) მაშინ შესაძლებელია დავწეროთ ერთის მხრივ რომ

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi \tag{2.4.17}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$$

მაგრამ (2.4.2) საწყისი პირობების თანახმად

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{l}x\,; \tag{2.4.18}$$

$$u_{,t}(x,0)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}aB_n\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{2.4.19}$$

შესაბამისად ორი მწკრივის წევრწევრად შედარებისას ცხადია, რომ შესაბამისი კოეფიციენტები იდენტურია ანუ

$$A_n\equiv\varphi_n \tag{2.4.20}$$

$$B_n\equiv\frac{l}{\pi na}\psi_n \tag{2.4.21}$$

შესაბამისად (2.4.1)-(2.4.3) ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება როგორც უსასრულო მწკრივი და თუ ეს მწკრივი განშლადია ან შესაბამის ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული მაშინ ის მაინც ვერ იქნება დასმული ამოცანის ამონახსნი!!!!! მწკრივის კოეფიციენტები ცალსახად განისაწღვრება საწყისი მონაცემების ფურიე კოეფიციენტებით!

ამონახნის ფიზიკური ინტერპრეტაცია

მდგარი ტალღა

(2.4.1)-(2.4.3) ამოცანის (2.4.16) ამონახსნის ერთი შეხედვით უმარტივესი გარდაქმნა, ანუ სხვანაირად ჩაწერა

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{\pi n}{l}at+B_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x=\vartheta_n\cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x \tag{2.5. 1}$$

სადაც

$$\frac{\pi n}{l}a\delta_n\equiv-arctg\frac{B_n}{A_n} \tag{2.5. 2}$$

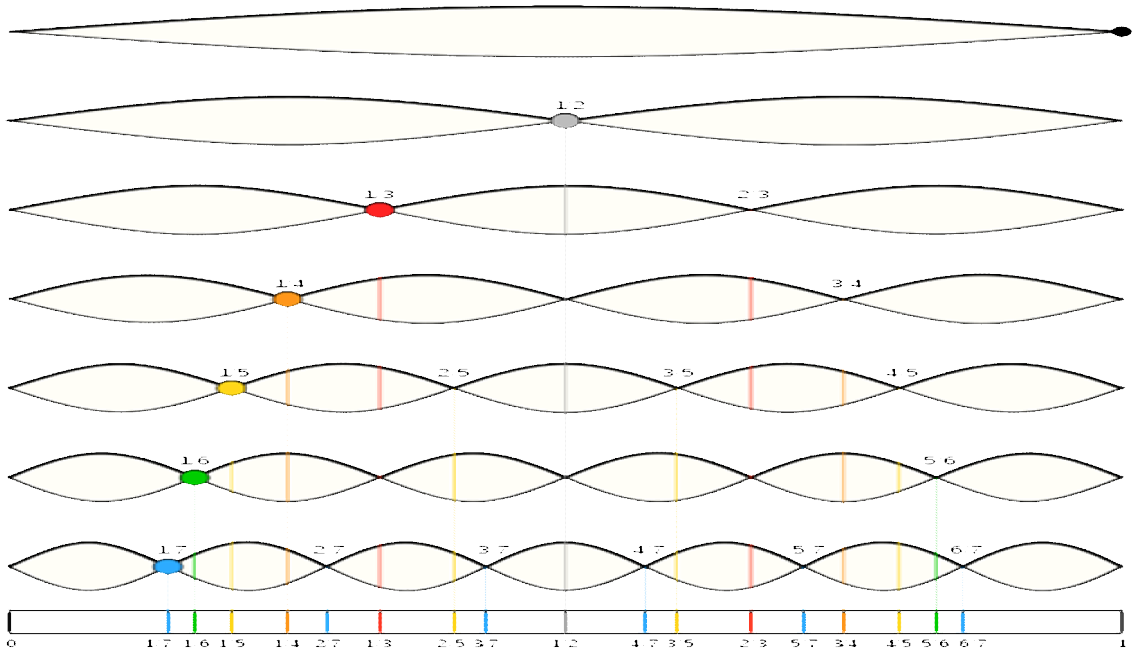
და

$$\vartheta_n\equiv\sqrt{A_n^2+B_n^2} \tag{2.5. 3}$$

იძლევა საშუალებას ვთქვათ, რომ შესასწავლი სიმის ყოველი ფიქსირებული $\mathbf{x_0}$ წერტილი ასრულებს (2.5. 1) ჰარმონიულ რხევას თავისათვის დამახასიათებელი ამპლიტუდით

$$u_n(x_0,t)=\vartheta_n\cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$u_n(x,t)=\sqrt{\varphi_n^2+\frac{\psi_n^2}{a^2\pi^2n^2}}\left[\cos\frac{\pi n}{l}a\left(t-\frac{l}{a\pi n}arctg\frac{\psi_n}{a\pi n\varphi_n}\right)\right]\sin\frac{\pi n}{l}x$$



ამპლიტუდა $\vartheta_n \sin\frac{\pi n}{l}x_0$ (2.5. 4)

კვანძები ამპლიტუდა ნოლია! **x = ml/n** *(m=1,2,. . ., n-1)* (2.5. 4)

გადახრა მაქსიმალურია **x = (2m+1)l/2n** *(m=1,2,. . ., n-1)* (2.5. 5)

შენიშვნა: 1. დროის იმ ***t*** მომენტში როდესაც $\mathbf{cosw_n(t+\delta_n) = \pm 1}$ სიმის გადახრა მაქსიმალურია ხოლო მისი მყისიერი სიჩქარე ნულის ტოლია;
2. დროის იმ ***t*** მომენტში როდესაც $\mathbf{cosw_n(t+\delta_n) = 0}$ სიმის გადახრა მინიმალურია, ხოლო მისი მყისიერი სიჩქარე მაქსიმალური;
3. სიმის ყველა წერტილის რხევის სიხშირე ერთნაირია და მათ სიმის რხევის **n**-ური საკუთრივი სიხშირეები ეწოდებათ:

$$\mathbf{w_n = \frac{apn}{l}} \quad (2.5.\ 7)$$

3ა. განივი რხევის შემთხვევაში **n**-ური საკუთრივი სიხშირეების სახეა

$$\omega_n \equiv \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (2.5.\ 8)$$

რხევა მდგარი ტალღების "ჯამი"

ჩვეულებრივად სიმის რხევა აღიქმება, როგორც იმ მდგარი ტალღების **"მატივი ტონები"-**ს სუპერპოზიცია "ზედდება", რომლებიც შედიან ამონახსნში!
ასეთი "დაშლა" არ არის მხოლოდ აბსტრაქტული მათემატიკური მეთოდის შედეგი!

- **"მატივი ტონები"-**ს მიღება შესაძლებელია რეზონატორების საშუალებით!

➢ “ტონის სიმაღლე”- დამოკიდებულია მისი განმსაზღვრელი რხევის სიხშირეზე;
➢ “ტონის ძალა”-ს განსაზღვრავს მისი შესაბამისი ენერგია (ამპლიტუდა);
➢ გარკვეული ფიზიკური მონაცემების მქონე სიმს გააჩნია ყველაზე “დაბალი ტონი” **“ძირითადი ტონი”** !
➢ დანარჩენ ტონებს **“ობერტონები”** ეწოდება!
➢ გამოცემული ხმის **“ტემბრი”** განისაზღვრება ობერტონებისა და მათი შესაბამისი ჰარმონიკების ენერგიების განაწილებით!

$$E_n = \omega_n^2 M \frac{A_n^2 + B_n^2}{4} = \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4}$$

➢ ძირიტადი ტონი და ტემბრი განისაზღვრება რხევის **გამომწვევი** საშუალებებით ანუ (2.4.20) და (2.4.21)
➢ თუ რხევის პროცესში მყოფ სიმს შევეხებით ზუსტად შუა წერტილში მაშინ მისი ხმა მკვეთრად შეიცვლება (ოქტავაშია ტავის ტონთან). ეს მეთოდი ხშირად გამოიყენება ვიოლინოზე, გიტარაზე და სხვა სიმებიან საკრავებზე დაკვრისას მას **“ფლაჟოლეტი”** ეწოდება!

მეცნიერულად ეს უმარტივესი გასაგებია - **შევეხეთ რა შუა წერტილს “ჩავაქრეთ” ყველა მდგარი ტალრა, რომელსაც ამ წერტილში არ გააჩნია კვანძი!** ანუ რხევაში ((2.4.16) ამონახსნში) დარჩა მხოლოდ ლუწი ჰარმონიკები და მათ შორის უმდაბლესი ახლა $\mathbf{w_2}$ სიხშირეა!
➢ თუ შევეხებით სიმს სიგრძის “1/3 ზე” მაშინ ძირიტადი ტონი გაიზრდება სამჯერ! დაჩება მხოლოდ “სამის ჯერადი” ჰარმონიკები

მერსენის კანონები

1. ერთნაირი სიმკვრივისა და ერთნაირი დაჭიმულობის სიმის რხევის პერიოდი მისი სიგრძის პროპორციულია!
2. მოცემული სიგრძის სიმებისათვის რხევის პერიოდი დაჭიმულობიდან კვადრატული ფესვის უკუპროპორციულია!
3. მოცემული სიგრძისა და დაჭიმულობის სიმებისათვის რხევის პერიოდი წრფივი სიმკვრივის კვადრატული ფესვის პროპორციულია!

მართკუთხედის ფორმის მემბრანის თავისუფალი რხევა

XOY სიბრტყეში ძევს მართკუთხედის ფორმის მემბრანა (თხელი უსისქო დრეკადი მასალა) მისი წონასწორული მდგომარეობიდან გადახრის მაჩვენებელია საძიებელი ფუნქცია

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.3.\ 4^*)$$

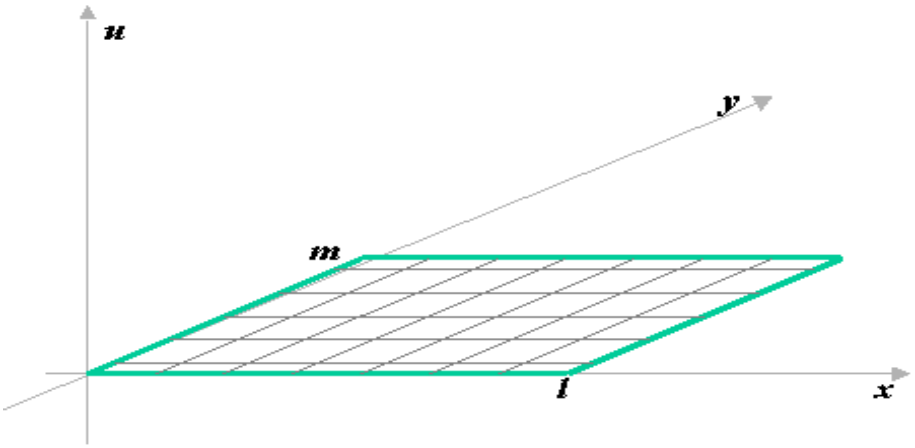
$$u(t,0,y) = u(t,l,y) = u(t,x,0) = u(t,x,l) = 0 \qquad (2.5.\ 10)$$

$$u(0,x,y) = \varphi(x,y) \quad \text{და} \quad u_{,t}(0,x,y) = \psi(x,y) \qquad (2.5.\ 11)$$

(1.3.4*),(2.5.10), (2.5.11) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ როგორც:

$$u(t,x,y) = X(x)Y(y)T(t) \qquad (2.5.9)$$

1. სამი ერთი ცვლადის ფუნქციის ნამრავლი (2.5.9);
2. ამონახსნი იგივურად ნული არ არის $X(x)Y(y)T(t) \neq 0$



ჩავსვათ (2.5.9) გამოსახულება განტოლებაში და შემდეგ ტოლობა გავყოთ ამ გამოსახულებაზე. თუ ჩავატარებთ სიმის "ანალოგიურ" მსჯელობას

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0 \qquad (2.5.12) \qquad X(0)=X(l)=0 \qquad (2.5.13)$$

$$Y''(y)+\mu^2 Y(y)=0 \qquad (2.5.12^*) \qquad Y(0)=Y(m)=0 \qquad (2.5.13^*)$$

$$T''(t)+a^2(\lambda^2+\mu^2)T(t)=0 \qquad (2.5.12^{**})$$

საკუთრივი რიცხვები

$$\lambda_k=(k\pi/l) \quad \text{და} \quad \mu_n=(n\pi/m) \qquad (2.5.14)$$

საკუთრივი ფუნქციები

$$X_k(x)=\sin(k\pi x/l) \quad \text{და} \quad Y_n(x)=\sin(n\pi y/m) \qquad (2.5.15)$$

მემბრანის რხევის საკუთრივი სიხშირეები

$$\omega^2_{k,n}=\pi^2a^2[(k/l)^2+(n/m)^2] \qquad (2.5.16)$$

მემბრანის საკუთრივი რხევები

$$u_{k,n}(x,y,t)=\sin(k\pi x/l)\sin(n\pi y/m)\,[a_{k,n}\cos(\omega^2_{k,n}t)+b_{k,n}\sin(\omega^2_{k,n}t)] \qquad (2.5.17)$$

ამონახსნი თუ კრებადია მწკრივი

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[a_{k,n}\cos(\omega^2_{k,n}t)+b_{k,n}\sin(\omega^2_{k,n}t)]\sin(\pi\frac{kx}{l})\sin(\pi\frac{ny}{m})$$

მემბრანის ყოველი (x,y) წერტილი ასრულებს მარტივ ჰარმონიულ რხევას, რომლის ამპლიტუდა და სიხშირე (2.5.17) ფორმულით მოიცემა! ძირითადი ტონია (2.5.16) თუ k=n=1

$$\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2}=0 \qquad (1.3.\ 4^*)$$

$$u(0, r,\theta) =\varphi (r) \qquad \text{და} \qquad u_{,t}(0, r,\theta) = \psi (r) \qquad (2.5.\ 18)$$

$$u(t,x,y)|_{r = R} = 0 \qquad (2.5.\ 19)$$

წრიული მემბრანის შემთხვევაში (1.3.4) განტოლების ამონახსნი ჩამაგრებული კიდითა და მხოლოდ რადიუსზე დამოკიდებული საწყისი პირობებით ვეძებოთ როგორც:

$$u(t,r,q)= R(r)Q(\theta)T(t) \qquad (2.5.20)$$

1. ორი ერთი ცვლადის ფუნქციის ნამრავლი (2.5.20);
2. ამონახსნი იგივურად ნული არ არის $R(r)\ T(t) \neq 0$
3. საკუთრივი რიცხვებისა და საკუთრივი ფუნქციების პოვნა დადის ბესელის ფუნქციების ფესვების პოვნაზე ანუ

$$R''(r)+r^{-1} R'(r)+ l^2 R'(r) = 0$$

საკუთრივი რიცხვები

$$\lambda_k= \mu_k R^{-1}$$

საკუთრივი ფუნქციები

$$R(r)=J_0(\lambda_k r)$$

მემბრანის საკუთრივი რხევები

$$u_{k,n}(x,y,t)= [a_k cos\ (\lambda_k\ a\ t) + b_k sin\ (\lambda_k\ a\ t)]J_0(\lambda_k r)$$

თემა 4

პარაბოლური ტიპის განტოლებები

სასრული სიგრძის სიმისში სითბოს წრფივი გავრცელება

ფურიეს კანონი: ***თუ სხეულის ტემპერატურა არათანაბარია,მასში წარმოიქმნება სითბური ნაკადები, რომლებიც მიმართულნი არიან უბნებიდან სადაც ტემპერატურა მაღალია უბნებისაკენ სადაც ტემპერატურა გაბალია!***

ფიზიკური ამოცანა: - **სიმში სითბოს წრფივი განაწილება (დიფუზია)!**
საძიებელი ფუნქცია u(x,t) ტემპეტარურა სიმის **x** წერტილში და **t** მომენტში;
მარჯვენა მხარე ***f(x,t)*** სიმის **x** წერტილში და **t** მომენტში გარედან მიწოდებული ან წართმეული ტემპერატურა!

$$u_{,t} - a^2 u_{,xx} = f(x,t) \qquad (3.1.1)$$

მარჯვენა მხარე $f(x,t)=0$ **- სიმს გარედან დამატებით ტემპერატურა არც მიეწოდება და არც აკლდება!**

საწყისი პირობა (**ტემპერატურის *საწყისი განაწილება***) $u(0,x)=\varphi(x)$ (3.1.2)

სასაზღვრო პირობები (***ტემპერატურა ბოლოებზე***)

$$u(0,t)=\mu(t) \quad \text{და} \quad u(l,t)=\lambda(t) \qquad (3.1.3)$$

ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები - სიმის ბოლოებზე: $x=0$ და $x=l$ წრტილებში დროის ყოველ მოცემულ t მომენტში უზრუნველყოფილია შესაბამისად ნულოვანი ტემპერატურა!?

ამოცანა - **ერთგვაროვანი სიმისათვის სითბოს წრფივი გავრცელების ამოცანა ბოლოებზე** ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებია- !
ანუ

$$u_{,t} - a^2 u_{,xx} = 0 \qquad (3.1.1^*)$$

მარჯვენა მხარე $f(x,t)=0$ **- სიმს გარედან დამატებით ტემპერატურა არც მიეწოდება და არც აკლდება!**

საწყისი პირობა (**ტემპერატურის *საწყისი განაწილება***) $u(0,x)=\varphi(x)$ (3.1.2)

სასაზღვრო პირობები (***ტემპერატურა ბოლოებზე***)

$$u(0,t)=0 \quad \text{და} \quad u(l,t)=0 \qquad (3.1.3^*)$$

ამონახსნი ვეძებოთ ცვლადთა განცალების მეთოდით!
ანუ (3.1.1*) (3.1.3*) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ როგორც:

1. **ორი ერთი ცვლადის ფუნქციის ნამრავლი**

$$u(x,t)=X(x)T(t) \qquad \textbf{(3.1.4);}$$

2. **ამონახსნი იგივურად ნული არ არის ანუ** $X(x)T(t)\neq 0$!

ა. თავდაპირველად გამოსახულება (3.1.4) ჩავსვათ (3.1.1*) განტოლებაში

$$X''(x)T(t)=\frac{1}{a^2}X(x)T'(t) \qquad (3.1.5)$$

რადგან ამონახსნი იგივურად ნული არაა

$$\frac{X''(x)T(t)}{X(x)T(t)} = \frac{1}{a^2}\frac{X(x)T'(t)}{X(x)T(t)} \quad \text{და შესაბამისად} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} \tag{3.1.6}$$

(3.1.6) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგარი ფუნქცია მხოლოდ დროით არგუმენტზეა დამოკიდებული, ხოლო მარცხენა სივრცით არგუმენტზე, გამოდის, რომ ტოლობის ორივე მხარეს მუდმივი რიცხვია!

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} \equiv \lambda = const. \tag{3.1.6*}$$

წარმოდგენილი ტოლობა იშლება ორ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \qquad X(x) \neq 0 \quad \text{და} \quad T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0; \qquad T(t) \neq 0 \tag{2.4.7}$$

(3.1.3*) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე შესაძლებელია დავწეროთ

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{და} \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

და რადგან ამონახსნი არ შეიძლება იყოს იგივურად ნული შესაბამისად აგილი აქვს შემდეგ საწყისი პირობებს

$$X(0) = 0 \qquad \text{და} \qquad X(l) = 0 \tag{2.4.8}$$

(სიტუაცია ანალოგიურია სიმის რხევის განტოლების შემთხვევისა თემა–2–2)

შტურმი ლიუვილის ამოცანა ვიპოვოთ ისეთი ნამდვილი (კომპლექსური) λ რიხვები (*საკუთრივი რიცხვები*) რომლისთვისაც

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \qquad X(x) \neq 0 \qquad X(0) = 0 \qquad \text{და} \qquad X(l) = 0 \tag{2.4.9}$$

(2.4.9) ამოცანას არატრივიალური ამონახსნები გააჩნია შესაბამისად ამოვწეროთ ამონახსნები (*საკუთრივი ფუნქციები*).

ადვილი დასანახია, რომ ცნობილი λ რიცხვისათვის ამოცანა (2.4.9) ტრივიალურია და შესაბამისად გასარჩევია 3 შემთხვევა:

შემთხვევა როდესაც $\lambda=0$ - ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა კურსიდან ცნობილია, რომ

$$X''(x) = 0; \qquad X(x) \neq 0$$

განტოლების ამონახსნია

$$X(x) = C_1 x + C_2 \tag{2.4.10}$$

ფუნქცია და შესაბამისად (2.4.8) საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ რომ ორივე მუდმივი C_1 და C_2 ნულის ტოლია შესაბამისად ამონახნი ტრივიალურია ეს არც შტურმი-ლიუვილის ამოცანას არ თავიდან დასმულ ამოცანას არ "გამოადგება" ამონახსნი არ შეიძლება იყოს იგივურად ნული!

შემთხვევა როდესაც $\lambda<0$ - ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა კურსიდან ცნობილია, რომ თუ მახასიათებელ განტოლებას ორი ნამდვილი ფესვი აქვს, მაშინ განტოლების ამონახსნია ფუნქცია

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{2.4.11}$$

ანუ უნდა მოიძებნოს (2.4.11) გამოსახულებაში C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობა (2.4.9) ამოცანის საწყისი მნიშვნელობების გათვალისწინებით? (2.4.8) პირველი საწყისი პირობიდან ჩანს, რომ $C_1 = - C_2$ და შესაბამისად მეორე პირობა

$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = C_1 e^{\beta} + C_2 e^{-\beta} = C\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right) = 0$$

სრულდება მხოლოდ მაშინ როდესაც მუდმივი C ნულის ტოლია, რაც შეუძლებელია! ანუ საკუთრივი რიცხვი არ შეიძლება იყოს უარყოფითი!

შემთხვევა როდესაც λ>0 - ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა კურსიდან ცნობილია, რომ თუ მახასიათებელ განტოლებას კოპლექსური ფესვი აქვს, მაშინ განტოლების ამონახსნია ფუნქცია

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \qquad (2.4.12)$$

მოიძებნოს (2.4.12) გამოსახულებაში C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობა (2.4.9) ამოცანის საწყისი მნიშვნელობების გათვალისწინებით?
(2.4.8) პირველი საწყისი პირობიდან ჩანს, რომ

$$X(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1 = 0$$

და შესაბამისად მეორე პირობა გვაძლევს

$$X(l) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$$

რადგან მუდმივი $C_2 \neq 0$ (მაშინ ამონახსნი ტრივიალური იქნება) რცება შემთხვევა როდესაც საკუთრივი რიცხვები შემდეგი განტოლების ამონახსნებია $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$ ანუ როდესაც $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l}$ და შესაბამისად დავასვნით, რომ

საკუთრივი რიცხვებია $$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \qquad (2.4.13)$$

საკუთრივი ფუნქციებია $$X_n(x) = C_2 \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (2.4.14)$$

შესაბამისად (2.4.9) ამოცანის არატრივიალური (არანულოვანი) ამონახსნი შესაძლებელია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ თუ **საკუთრივი λ რიცხვები** დადებითნი არიან და მეტიც მათ გააჩნიათ (2.4.13) სახე. **$X_n(x)$ საკუთრივი ფუნქციები** (2.4.14) არსებობს ნებისმიერი ნატურალური ***n*** რიცხვისათვის!

ზოგადი ამონახსნი

(2.4.13) საკუთრივი რიცხვების სემთხვევაში აზრი აქვს განვიხილოთ (2.1.7) ის მეორე განტოლება (დანარჩენ შემთხვევაში საძიებელი ამოცანის ამონახსნი ტრივიალურია). ამ კონკრეტულ შემტხვევაში ამონახსნს გააჩნია სემდეგი სახე

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t} \qquad (3.1.10)$$

განტოლების საკუთრივი რიცხვებისა და ფუნქციების უსასრულო რაოდენობიდან გმომდინარე შეგვიძლია დავასკვნმათ, რომ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისთვისათვის ფუნქცია

$$u_n(x,t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t} \sin\frac{\pi n}{l}x$$

(3.1.1*) განტოლების ამონახსნია როდესაც მარჯვენა მხარე ნულის ტოლია! თანაც აკმაყოფილება (3.1.3*) სასაზღვრო პირობებს!
ანუ წრფივობიდან გამომდინარე (3.1.1*)-(3.1.3*) საწყის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი უნდა ვეძებოთ

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (3.1.11)$$

მწკრივის სახით.

ფურიეს მწკრივები

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (2.4.17)$$

სადაც (**კოეფიციენტები**)

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi$$

ნამდვილი მოცემულ ინტერვალზე ინტეგრებადი F(x) ფუნქციის ფურიეს მწკრივი კრებადია "მისკენ":

- **თანაბრად, თუ ის უწყვეტია და შემოსაზღვრული ვარიაციისაა ყოველ ქვეინტერვალზე**
- **0,5[F(x+0)+F(x-0)]-სკენ ყოველ ქვეინტერვალზე სადაც ფუნქცია და მისი პირველი წარმოებული უბან-უბან უწყვეტია, ან აკმაყოფილებს ჟორდანის პირობას (აქვს სასრული ვარიაცია)**

თუ ამ პირობებს აკმაყოფილებენ დასმული ამოცანის კოშის მონაცემებვი (2.4.2) მაშინ შესაძლებელია დავწეროთ ერთის მხრივ რომ

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x \qquad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi \qquad (2.4.17)$$

მაგრამ (2.4.2) საწყისი პირობების თანახმად

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x; \qquad (2.4.18)$$

შესაბამისად ორი მწკრივის წევრწევრად შედარებისას ცხადია, რომ შესაბამისი კოეფიციენტები იდენტურია ანუ

$$C_n\equiv\varphi_n \qquad (3.1.13)$$

შესაბამისად (3.1.1*)-(3.1.3*) ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება როგორც უსასრულო მწკრივი და თუ ეს მწკრივი განშლადია ან შესაბამის ფუნქციას არ გააჩნია წარმოებული მაშინ ის მაინც ვერ იქნება დასმული ამოცანის ამონახსნი!!!!! მწკრივის კოეფიციენტები ცალსახად განისაწღვრება საწყისი მონაცემების ფურიე კოეფიციენტებით!

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi\right]e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$u(x,t)=\int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right]\varphi(\xi)d\xi$$

(3.1.1*) - (3.1.3*) ამოცანის ამონახსნი წარმოვადგინოთ "სრულად" და შევცვალოთ ინტეგრებისა და აჯამვის მიმდევრობა (ეს შესაძლეველია მწკრივის თანაბრადკრებადობის გამო!). შემოვიღოთ აღნიშვნა:

მყისიერი წერტილოვანი წყაროს ფუნქცია

$$G(x,\xi,t)\equiv\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}\xi$$

შესაბამისად ამონახსნი წარმოდგება ინტეგრალური სახით

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi$$

სიმში სითბოს წრფივი განაწილება (დიფუზია) არაერთგვაროვანი განტოლების შემთხვევა

$$u_{,t}-a^2u_{,xx}=f(x,t) \qquad (3.1.1)$$

მარჯვენა მხარე *f(x,t)=0* **- სიმს გარედან დამატებით ტემპერატურა არც მიეწოდება და არც აკლდება!**

საწყისი პირობა (**ტემპერატურის *საწყისი განაწილება***) $u(0,x)=0$ (3.1.2*)

სასაზღვრო პირობები (***ტემპერატურა ბოლოებზე***)

$u(0,t)=0$ და $u(l,t)=0$ (3.1.3*)

ამონახსნი ვეძებოით შემდეგი სახით

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x \qquad (3.2.4)$$

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,\quad \text{სადაც}\quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{\pi n}{l}\xi d\xi \qquad (3.2.5)$$

(3.2.4) გამოსახულება ჩავსვათ (3.1.1) განტოლებაში და გადავიტანოთ ერთ მხარეს

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2u_n(t)+\dot{u}_n(t)-f_n(t)\right\}\sin\frac{\pi n}{l}x=0 \qquad (3.2.6)$$

(3.2.6) გამოსახულება ნულია თუ ყველა კოეფიციენტი ნულია! ანუ

$$\dot{u}_n(t)=-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2u_n(t)+f_n(t) \qquad (3.2.7)$$

და (3.2.2.) პირობის თანახმად

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x=0,\quad \text{სადაც}\quad u_n(0)=0 \qquad (3.2.8)$$

(3.2.7.) ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისა და (3.2.8) საწყისი პირობის შესაბამისი ამონახსნი

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau \qquad (3.2.9)$$

(3.2.9) გამოსახულება იძლევა იმის საფუძველს, რომ

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f_n(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.2.10)$$

და (3.2.2.) პირობის თანახმად

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3.2.11)$$

ამონახსნი მწკრივის სახით

$$u_{,x_1}-\sum_{i=2}^{n}\left(\pm u_{,x_i x_i}\right)=0,$$

წარმოდგენილი განტოლების ამონახსნი შესაძლებელია ჩავწეროთ ნწკრივის სახით

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{x_n^k}{(k)!}\Delta^k\tau(x_1,\ldots,x_{n-1})\right]$$

როდესაც ***t*** ნებისმიერი უსასრულოდ გლუვი ფუნქციაა და მწკრივი და მისი წევრწევრად ორჯერ ***xi*** (*i=1,...,n-1*) და ერთხელ ***xn*** არგუმენტებით გაწარმოებით მირებული მწკრივები თანაბრადკრებადნი არიან, მაშინ ფუნქცია (3.2.12) წარმოადგენს (1.2.28) განტოლების ამონახსნს!

მაქსიმუმის პრინციპი

თუ u(x,t) ჩაკეტილ [0,l]X[0,T] მართკუთხედში განსაზღვრული და უწყვეტი ფუნქციაა, რომელიც (3.1.1*) განტოლებას აკმაყოფილებს 0< x < l და 0 < t £ T წერტილებში, მაშინ ის თავის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობას აღწევს ან საწყის მომენტში (t=0) ან საზღვრის წერტილებში (x=0, x=l)

ფიზიკური არსი

თუ ღეროს შიგნით არ არსებობს სითბური წყარო და **საწყის მომენტში** ან **საზღვრის წერტილებში** ტემპერეტურის მაჩვენებელი არ აღემატება **M** სიდიდეს, მაშინ ღეროს შიგნით შეუძლებელია წარმოიქმნას **M-** ზე ტემპერატურა.

დამტკიცება: დაუშვათ რომელიმე შიგა (x_0,t_0) წერტილში მიიღწევა უფრო დიდი მნიშველობა $u(x_0,t_0)=M+\varepsilon$თუ ეს ასეა და ესაა მაქსიმალური მაშინ დროით პირველი წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო მეორე წარმოებული არადადებითი, ანუ ვერ სრულდება ტოლობა (3.1.1*). რჩება ერთი შემთხვევა როდესაც ყველაფერი ნულია. შეიძლება მოიძებნოს წერტილი სადაც ტოლობა (3.1.1*) არ სრულდება! (იხილე [4 თ.III, § 1, პ.5 გვ. 195])

ერთადერთობის თეორემა

თუ $u_1(x,t)$ და $u_2(x,t)$ ჩაკეტილ $[0,l]X[0,T]$ მართკუთხედში განსაზღვრული და უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც (3.1.1) განტოლებას აკმაყოფილებს $0< x < l$ და $0 < t \le T$ წერტილებში, საწყის მომენტში (t=0) (3.1.2) და საზღვრის წერტილებში (x=0, x=l) (3.1.3) პირობებს აკმაყოფილებენ მაშინ ისინი იგივურად ტოლნი არიან!

დამტკიცება: განვიხილოთ სხვაობა

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

რადგან ორივე ფუქცია უწყვეტია, მათი სხვაობაც უწყვეტია; განტოლება (3.1.1) წრფივია და შესაბამისად ფუნქცია $v(x,t)$ (3.1.1*) განტოლების ამონახსნია თანაც:

$$v(x,0) = 0; \quad v(0,t) = 0 \quad \text{და} \quad v(l,t) = 0$$

მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად

$$v(x,t) \equiv 0$$

ანუ

$$u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$$

ფიზიკური არსი

ერთნაირ პირობებში სითბოს განაწილება სხვადასხვანაირად ვერ მოხდება!

შედეგი 1 ***მაჟორანტა***

თუ $u_1(x,t)$ და $u_2(x,t)$ ჩაკეტილ $[0,l]X[0,T]$ მართკუთხედში განსაზღვრული და უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც (3.1.1) განტოლებას აკმაყოფილებს $0< x < l$ და $0 < t \le T$ წერტილებში, საწყის მომენტში (t=0) (3.3.2) და საზღვრის წერტილებში (x=0, x=l) (3.3.1) ერთი მეტია მეორეზე, მაშინ ეს უტოლობა სამართლიანია მთელ მართკუთხედში!

ანუ თუ

$$u_1(0,t) \le u_2(0,t) \quad \text{და} \quad u_1(l,t) \le u_2(l,t) \tag{3.3.1}$$

$$u_1(x,0) \le u_2(x,0) \tag{3.3.2}$$

მაშინ

$$u_1(x,t) \le u_2(x,t) \tag{3.3.3}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ სხვაობა

$$v(x,t) = u_2(x,t) \quad u_1(x,t).$$

განტოლება (3.1.1) წრფივია და შესაბამისად ფუნქცია $v(x,t)$ (3.1.1*) განტოლების ამონახსნია თანაც:

$$v(x,0) \ge 0; \quad v(0,t) \ge 0 \quad \text{და} \quad v(l,t) \ge 0$$

მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად

$$v(x,t) \ge 0$$

ანუ მას ვერ ექნება უარყოფითი მინიმუმი!

ფიზიკური არსი

ერთნაირ პირობებში უფრო ცხელი უფრო ნელა გაცივდება!

შედეგი 2

თუ $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ და $u_3(x,t)$ ჩაკეტილ [0,*l*]X[0,T] მართკუთხედში განსაზღვრული და უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც (3.1.1) განტოლებას აკმაყოფილებს $0< x < l$ და $0 < t \le T$ წერტილებში, **საწყის მომენტში (*t*=0)** (3.3.2*) **და საზღვრის წერტილებში** ($x=0, x=l$) (3.3.1*) ერთი მეტია მეორეზე, მაშინ ეს უტოლობა სამართლიანია მთელ მართკუთხედში!

$$u1(x,t) \le u2(x,t) \le u3(x,t) \qquad (3.3.3^*)$$

თეორემა 3. უწყვეტი დამოკიდებულება

თუ $u1(x,t)$, $u2(x,t)$ *ჩაკეტილ [0,l] X[0,T] მართკუთხედში განსაზღვრული და უწყვეტი ფუნქციებია, რომლებიც (3.1.1) განტოლებას აკმაყოფილებს* $0< x < l$ *და* $0 < t £ T$ *წერტილებში, საწყის მომენტში (t=0) და საზღვრის წერტილებში (x=0, x=l) ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას*

$$|u_1(0,t) - u_2(0,t)| \le \varepsilon; \quad \text{და} \quad |u_1(l,t) - u_2(l,t)| \le \varepsilon \qquad (3.3.4)$$

$$|u_1(x,0) - u_2(x,0)| \le \varepsilon \qquad (3.3.4^*)$$

მაშინ ეს უტოლობა მთელ მართკუტხედში სრულდება

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon \qquad (3.3.5)$$

ფიზიკური არსი

ერთნაირ პირობებში თავიდან მცირე განსხვავება მერეც მცირეა!

მათემატიკური არსი

- ამონახსნი უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის და სასაზღვრო პირობებზე!
- საწყის და სასაზღვრო პირობების მცირე შეშფოთება ამონახსნის მცირე შეშფოთებას იწვევს!

ერთადერთობის თეორემა

თუ $u_1(x,t)$ *და* $u_2(x,t)$ *მთელ ნახევარსივრცეში* ($-\infty < x < \infty$ *და* $0 < t <\infty$) *წერტილებში განსაზღვრული, უწყვეტი და* ***შემოსაზღვრული*** *ფუნქციებია, რომლებიც (3.1.1*) განტოლებას აკმაყოფილებენ და* ***საწყის მომენტში (t=0)*** *(3.3.6)* ***ტოლნი არიან მთელ ღერძზე,*** *მაშინ ისინი* ***იგივურად ტოლნი არიან!***

დამტკიცება: განვიხილოთ სხვაობა $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ის (3.1.1*) განტოლების ამონახსნია, საწყისი პირობა ნულია $v(x,0) = 0$ და თანაც მთელ არეში შემოსაზღვრულია

$$|v(x,t)| = |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| < 2M$$

ავაგოთ დამხმარე ფუნქცია

$$V(x,t) = 4M(at^2 + x^2/2) / L^2 \qquad (3.3.7)$$

ის უწყვეტია, (3.1.1*) განტოლების ამონახსნია და თანაც

$$V(x,0) \ge |v(x,0)| = 0,$$

$$V(\pm L,t) \ge 2M \ge |v(\pm L,t)| \qquad (3.3.8)$$

შემოსაზღვრულ არეში სამართლიანია მაქსიმუმის პრინციპი:

$$- 4M(at^2 + x^2/2) / L^2 \le v(x,t) \le 4M(at^2 + x^2/2)$$

როდესაც $L \to \infty$ მაშინ $v(x,t) \equiv 0$!

ერთგვაროვანი სიმისათვის სითბოს წრფივი გავრცელების სხვა ამოცანები

II. (3.1.1*), (3.1.2) და (3.1.3)$_s$ და **სიმის *x=l* ბოლოდან *ν(t)* წესით "ორგანიზებული სითბური ნაკადია", ანუ გაედინება (შეედინება)**

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \nu(t) \qquad (3.4.1)$$

III. (3.1.1*), (3.1.2) და (3.1.3)$_a$ და **სიმის *x=l* ბოლო და გარემო ნიუტონის კანონის შესაბამისად θ *(t)* წესით "აწარმოებს სითბოს გაცვლას"!**

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \lambda\left[u(l,t) - \theta(t)\right] \qquad (3.4.2)$$

IV. (3.1.1*), (3.1.2) და (3.1.3)$_a$ და **სიმის *x=l* ბოლოდან θ *(t)*** ტემპერატურიან გარემოში **ბოლცმანის კანონის შესაბამისად "წარმოებს სითბოს გამოსხივება"!**

$$k\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \sigma\left[u^4(l,t) - \theta^4(t)\right] \qquad (3.4.3)$$

V. ერთგვაროვანი სიმისათვის სითბოს წრფივი გავრცელების ამოცანა სასაზღვრო პირობის გარეშე - (3.1.1*), (3.1.2) ***სიმი ძალზე გრძელია და შესაბამისად სასაზღვრო პირობების გავლენა ამონახსნზე ძალზე უმნიშვნელოა! მათემატიკური ამოცანა - სიმის ბოლოები "უსასრულობაშია"!***

VI. ერთგვაროვანი სიმისათვის სითბოს წრფივი გავრცელების ამოცანა საწყისი პირობის გარეშე (3.1.1), (3.1.3)
"პროცესი" ძალზე დიდი ხანია მიმდინარეობს და შესაბამისად სასაწყისი პირობის გავლენა ამონახსნზე ძალზე უმნიშვნელოა! მათემატიკური ამოცანა - სიმის ბოლოებზე სასაზღვრო მხოლოდ პირობებით ვიპოვნოთ შემოსაზღვრული ამონახსნი! (მაგალითად (3.1.3))

მაგალითი: სიმი ნახევრად უსასრულოა და ბოლოზე $\mu(t) = A\cos\omega t = Ae^{i\omega t}$

ამოხსნა ვეძებოთ როგორც

$$u(x,t) = e^{ax+bt} \qquad (3.4.3)$$

$a = b\,a^{-2} \equiv i\,w\,a^{-2}$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\frac{(1+i)}{2}$$

$$\alpha = \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right]$$

$$u(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + i\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)} \tag{3.4.4}$$

ამ ფუნქციის ნამდვილი ნაწილია

$$u(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right) \tag{3.4.5}$$

მხოლოდ მინუს ნიშნიანი ამონახსნია შემოსაზღვრული!

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}\cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right) \tag{3.4.6}$$

დედამიწა და სითბური პერიოდულობა

დედამიწის ზედაპირზე აშკარად გამოკვეთილი პერიოდული, დღეღამური და წლიური პერიოდული სითბური ზემოქმედება დაიმზირება!
ამონახსნის ანალიზიდან ჩანს, რომ ნიადაგში:

1. სიღრმის გაზრდით სითბოს ცვალებადობის ამპლიტუდა ექსპონენციალურად მცირდება, ანუ ზედაპირული გავლენა უმნიშვნელოა! "თუ სიღრმე არითმეტიკული პროგრესიით იზრდება ამპლიტუდა გეომეტრიული პროგრესიით მცირდება " ფურიეს პირველი კანონი!

2. ნიადაგში ტემპერატურული ცვლილებები $\delta = \frac{x}{a\sqrt{2\omega}}$ ფაზის ძვრით ხდება;

ანუ "ტემპერატურული მაქსიმუმების (მინიმუმების) "დაგვიანება" სიღრმის პროპორციულია" ფურიეს მეორე კანონი!

3. ნიადაგში სითბოს შეღწევის სიღრმე დამოკიდებულია ზედაპირზე ტემპერატურის ცვლილების პერიოდზე. ორი სხვადასხვა T_1 და T_2 პერიოდს სხვადასხვა სიღრმე x_1 და x_2 შეესაბამება, რომლებზეც ერთნაირი თერმული ფარდობითი ცვლილება ხდება; "რაც უფრო მცირეა პერიოდი მით უფრო მცირეა სიღრმე" ფურიეს მესამე კანონი! ანუ $x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}x_1$!

ამოხსნა ვეძებოთ როგორც $\boldsymbol{u(x,t)=X(x)\,e^{-i\omega t}}$ (3.4.7)

$$X'' + \frac{i\omega}{a^2}X = 0 \tag{3.4.8}$$

$$\mathbf{X(0)=A,} \qquad \mathbf{X(}l\mathbf{)=0} \tag{3.4.9}$$

$$\hat{u}(x,t) = A\frac{\sin(l-x)}{\sin\gamma l}e^{-i\omega t} \tag{3.4.10}$$

ამ ფუნქციის ნამდვილი ნაწილია

$$\mathbf{u(}x\mathbf{,}t\mathbf{)=X1(}x\mathbf{)\cos}\,w\,t\,\mathbf{+iX2(}x\mathbf{)\sin}\,w\,t$$

თემა 4-1.

ლაპლასის განტოლება

ჰარმონიული ფუნქციები

$$\Delta_n u(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (4.1.1)$$

ლაპლასის ოპერატორი - ლაპლასიანი

$$\Delta_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \qquad (4.1.1)$$

ჰარმონიული ფუნქციები - ლაპლასის განტოლება ამონახსნები

ნიუტონ-ლეიბნიცის ფორმულა

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

და ნაწილობითი ინტეგრაციის ფორმულა თუ $f(x) = u(x)v(x)$

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

სტოქსის ფორმულა - ნაწილობითი ინტეგრაციის განზოგადება ნებისმიერი განზომილების მქონე გლუვი საზღვრის მქონე სემოსაზღვრული არისათვის

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\nu_i d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} u(x)dx$$

- n=1 - ნაწილობითი ინტეგრაციის ფორმულა;
- n=2 გრინის ფორმულა;
- n=3 გაუს-ოსტროგრადსკის ფორმულა.

განვიხილოთ შემოსაზღვრული, გლუვი Ω არე და მასზე განსაზღვრული ორი $u(x)$ და $v(x)$ "საკმარისად" გლუვი ფუნქცია. მაშინ სტოქსის თეორემის თანახმად სამართლიანია თანადობა (4.1.2).

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} v(x)dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x)\nu_i d\sigma - \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx \qquad (4.1.2)$$

შემდეგ განვიხილოთ $u(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის x_i კერძო წარმოებული არგუმენტით (i=1,…,n) შედეგად ტოლობა სამართლიანია ნებისმიერი i სათვის, ამიტომ დავწეროთ ის ყველა შესაძლო i ნომრისათვის და ავჯამოთ, შემდეგ შეუცვალოთ ადგილები $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს და მივიღებთ

გრინის I ფორმულას

$$\int_{\Omega}\Delta u(x)v(x)dx=\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)\nu_i d\sigma-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx$$

ანუ (4.1.3)

$$\int_{\Omega}\Delta v(x)u(x)dx=\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}u(x)\nu_i d\sigma-\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}dx$$

გრინის I ფორმულის ორი ტოლობა (4.1.3) ერთმანეთს გამოვაკლოთ და მივიღებთ

გრინის II ფორმულას

$$\int_{\Omega}[\Delta u(x)v(x)-\Delta v(x)u(x)]dx=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}v(x)-\frac{\partial v(x)}{\partial\nu}u(x)\right]d\sigma \qquad (4.1.4)$$

ნათელია თუ რატომაა არის Ω არის სიგლუვე მოთხოვნილი! წინააღმდეგ შემთხვევაში გაუგებარია (ვერ განისაზღვრება) ნორმალით წარმოებული საზღვრის ნებისმიერ წერტილში!

სფერულ და ევკლიდურ კოორდინატთა სისტემა

$x=r\cos\phi\cos\vartheta$ $y=r\cos\phi\sin\vartheta$ $z=r\sin\phi$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\vartheta=arctg\frac{y}{x}$ $\phi=arctg\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial x}$	$\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\right)+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\left(\frac{-y}{P^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial\phi}\left(\frac{-xz}{\mathrm{Pr}^2}\right)$
$\frac{\partial u}{\partial y}$	$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial y}$	$\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y}{r}\right)+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\left(\frac{x}{P^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial\phi}\left(\frac{-yz}{\mathrm{Pr}^2}\right)$
$\frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial z}$	$\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{z}{r}\right)+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}(0)+\frac{\partial u}{\partial\phi}\left(\frac{P}{r^2}\right)$
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\vartheta}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+$ $+2\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\phi}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$	
	$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2}\frac{y^2}{P^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\frac{(xz)^2}{P^2r^4}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\vartheta}\left(\frac{-xy}{r^3}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\phi}\left(\frac{-x^2z}{\mathrm{Pr}^3}\right)+$ $+2\frac{\partial^2 u}{\partial\phi\partial\vartheta}\left(\frac{xyz}{\mathrm{Pr}^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\left(\frac{2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial\phi}\left(\frac{-zP^2r^2+2zx^2P^2+zx^2r^2}{r^4P^3}\right)$	

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \vartheta}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \phi}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+$ $+2\frac{\partial^2 u}{\partial \phi\partial \vartheta}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$
	$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\frac{x^2}{P^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\frac{(yz)^2}{P^2 r^4}+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \vartheta}\left(\frac{xy}{r^3}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \phi}\left(\frac{-y^2 z}{\mathrm{Pr}^3}\right)+$ $+2\frac{\partial^2 u}{\partial \phi\partial \vartheta}\left(\frac{-xyz}{\mathrm{Pr}^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{r^2-y^2}{r^3}\right)+\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\left(\frac{-2xy}{r^4}\right)+\frac{\partial u}{\partial \phi}\left(\frac{-zP^2r^2+2zy^2P^2+zy^2r^2}{r^4P^3}\right)$
$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \vartheta}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \phi}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+$ $+2\frac{\partial^2 u}{\partial \phi\partial \vartheta}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}+\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}+\frac{\partial u}{\partial \phi}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$
	$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{z^2}{r^2}+0+\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\frac{P^2}{r^4}+0+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \phi}\left(\frac{zP}{r^3}\right)+$ $+0+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)+0+\frac{\partial u}{\partial \phi}\left(\frac{-2zP}{r^4}\right)$
Δu	$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}\left(\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\frac{1}{r^2}+0+0+$ $+0+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\right)+0+\frac{\partial u}{\partial \phi}\left(\frac{-\sin\phi}{r^2\cos\phi}\right)$

ლაპლასის ოპერატორი სფერულ კოორდინატთა სისტემაში

$$\Delta_3 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\cos^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\phi}{r^2\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \qquad (4.1.5)$$

n-განზომილებიან სივრცეშიცაა შესაძლებელი ამგვარი გადასვლა და საინტერესოა რომ ცალკეა შესაძლებელი გამოიყოს ოპერატორის ნაწილი, რომელიც მხოლოდ რადიუსზეა დამოკიდებული!

$$\Delta u \equiv \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2}+\frac{(n-1)}{\rho}\frac{du(\rho)}{d\rho}=0 \qquad (4.1.5^*)$$

ძალზე საინტერესო თვისებები გააჩნია ლაპლასის განტოლების სფერულ-სიმეტრიულ ამონახსნებს! ანუ ამონახსნებს, რომლებიც მხოლოდ რადიუსზე ანუ მანძილზე არიან დამოკიდებულნი!

ამგვარი ამონახსნები ჩვეულებრივი (4.1.5*) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს წარმოადგენენ. უშუალო შემოწმებით შესაძლებელია

დავრწმუნდეთ, რომ წარმოდგენილ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს წარმოადგენენ შემდეგი სახის ფუნქციები

$$E_n\left(x,x^0\right)\equiv E_n\left(\left|x-x^0\right|\right)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln\left|x-x^0\right|, & n=2\\ \dfrac{\left|x-x^0\right|^{2-n}}{(n-2)\omega_n}, & n\geq 3\end{cases} \tag{4.1.6}$$

სადაც $\left|x-x^0\right|\equiv\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_i^0\right)^2}$;

ფუნდამენტური ამონახსნი

მარტივი შესამჩნევია, რომ (4.1.6) ფუნქციები ყველგან ჰარმონიულნი არიან გარდა $x=x^0$ წერტილისა. ამ წერტილში ეს ფუნქცია "განსაზღვრულიც" კი არ არის.

ფუნქცია $E_3(x,x^0)$ ჰარმონიულია ($\Delta_3E_3(x,x^0)=0$) ყველგან, გარდა $x=x^0$ წერტილისა, სადაც ის ხდება უსასრულობა. მუდმივი მამრავლის სიზუსტით ის ემთხვევა წერტილოვანი e მუხტის ველს, როდესაც ეს მუხტი x^0 წერტილშია მოთავსებული. ამ ველის პოტენციალი $e/r\equiv e/|x-x^0|$ -ის ტოლია.

ფუნქცია $E_2(x,x^0)$ ჰარმონიულია ($\Delta_2E_2(x,x^0)=0$) ყველგან გარდა $x=x^0$ წერტილისა, სადაც ის ხდება უსასრულობა. მუდმივი მამრავლის სიზუსტით ის ემთხვევა ცილინდრის დამუხტული ღერძის e მუხტის ველს, რომლის პოტენციალი $2e\ln(|x-x^0|^{-1})$ -ის ტოლია, სადაც e – სიგრძის ერთეულზე გადათვლილი მუხტის სიმკვრივეა!

ფუნქციის წარმოდგენა პოტენციალების საშუალებით

დაუშვათ $u(x)\in C^2(\Omega)$. Ω არიდან ამოვჭრათ $Q(x^0,\varepsilon)$ ბირთვი (x^0 – ცენტრი, ε-რადიუსი), შესაბამისად $S(x^0,\varepsilon)$ – სფეროა.

$\Omega\setminus Q\left(x^0,\varepsilon\right)$ არეში დავწეროთ გრინის მეორე ფორმულა (4.1.4), სადაც ერთი ფუნქცია არის ფუნდამენტური ამონახსნი ანუ $E_3(x,x^0)$ (*განსაკუთრებულობა მოცილებულია*) , ხოლო მეორე მოცემული $u(x)$ ფუნქციაა.

დავწეროთ გრინის მეორე ფორმულა, სადაც $v(x)\equiv E_3(x,x^0)$ არეში (4.1.4) გრინის მეორე ფორმულის თანახმად სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\int\limits_{\Omega\setminus Q_\varepsilon^{x^0}}\left(E\left(x,x^0\right)\Delta u(x)-u(x)\Delta E\left(x,x^0\right)\right)dx=$$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left(E\left(x,x^0\right)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}-u(x)\frac{\partial E\left(x,x^0\right)}{\partial\nu}\right)d\sigma+\int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}}\left(E\left(x,x^0\right)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu'}-u(x)\frac{\partial E\left(x,x^0\right)}{\partial\nu'}\right)d\sigma$$

სადაც ν - არის ერთეულოვანი გარე ნორმალია, ხოლო ν' მასში ეფსილონ რადიუსის მქონე სფეროს შიგა (ზოგადად არისათვის გარე) ერთეულოვანი ნორმალია!

შევაფასოთ ტოლობის მარჯვენა მხარის მესამე წევრი, ანუ

$$\left|\int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu'}d\sigma\right| \le |E(\varepsilon)|\omega_n\varepsilon^{n-1}\max_{S_\varepsilon^{x^0}}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial \nu'}\right| \le C_1|E(\varepsilon)|\varepsilon^{n-1} \qquad (4.1.7)$$

სადაც C_1 - არ არის დამოკიდებული ε სიდიდეზე.

$$|E(\varepsilon)|\varepsilon^{n-1} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

შესაბამისად ეს წევრი "ქრება"!

უშუალო გამოთვლიდან ჩანს, რომ სფეროზე წერტილებში სამართლიანია ტოლობა

$$\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu'} = \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად

$$\int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} u(x)d\sigma = \omega_n\varepsilon^{n-1}u(x^\varepsilon) \quad \text{სადაც } x^\varepsilon \in S_\varepsilon^{x^0}$$

შესაბამისად ეფსილონისაგან მიუხედავად

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} -\left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu'}\right)d\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n}\int\limits_{S_\varepsilon^{x^0}} u(x)d\sigma = u(x^0) \qquad (4.1.8)$$

შესაბამისად თუ გავითვალისეინებთ იმასაც, რომ $E_3(x, x^0)$ ჰარმონიულია და მივასწრაფებთ ეფსილონს ნულისაკენ მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $u(x)\in C^2(\Omega)$ ფუნქციის მნიშვნელობა x^0 წერტილში შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma + \int\limits_{\Omega} E(x,x^0)\Delta u(x)dx \qquad (4.1.9)$$

ეს ფორმულა იძლევა საშუალებას წარმოვადგინოთ ჰარმონიული ფუნქცია არის ნებისმიერ შიგა x^0 წერტილში არის საზღვარზე მისი მნიშვნელობისა და მისი ნორმალით წარმოებულის მნიშვნელობის საშუალებით!

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma \qquad (4.1.9^*)$$

შესაბამისად თუ ცნობილია, რომ მოცემული $u(x)\in C^2(\Omega)$ ფუნქცია პუასონის განტოლების

$$\Delta_3 u = f(x)$$

ამონახსნია, მაშინ მისი მნიშვნელობა x^0 წერტილში შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$u(x^0) = \int\limits_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma + \int\limits_{\Omega} E(x,x^0)f(x)dx \qquad (4.1.10)$$

ეს ფორმულა იძლევა საშუალებას წარმოვადგინოთ ფუნქცია არის ნებისმიერ შიგა x^0 წერტილში არის საზღვარზე მისი მნიშვნელობისა და მისი ნორმალით წარმოებულის მნიშვნელობისა და მოცემული *f(x)* ფუნქციის საშუალებით!

მოცულობითი პოტენციალი ნიუტონის პოტენციალი

$$u_0(x^0)=\begin{cases}\int\limits_{\Omega}\dfrac{A_0(x)}{|x-x^0|^{n-2}}dx, & n\geq 3\\ \int\limits_{\Omega}A_0(x)\ln\left(|x-x^0|\right)dx, & n=2\end{cases} \tag{4.1.11}$$

ამგვარი სახის გამოსახულებას მოცულობითი პოტენციალი ან ნიუტონის პოტენციალი ეწოდება!

$A_0(x)$ – პოტენციალის სიმკვრივეა!

$A_0(x)$ სიმკვრივის მქონე სივრცეში განაწილებული მასების ან მუხტების მიერ შექმნილი ნიუტონის ან კულონის პოტენციალი!

$u_0(x^*)$ ფუნქცია ჰარმონიულია ყველგან $x^*\in R^n\setminus\Omega$, ყოველი $x^0\in R^n\setminus\Omega$, როდესაც $A_0(x)\in C(\Omega)$

მარტივი ფენის პოტენციალი

$$u_1(x^0)=\begin{cases}\int\limits_{\partial\Omega}\dfrac{A_1(x)}{|x-x^0|^{n-2}}d\sigma, & n\geq 3\\ -\int\limits_{\partial\Omega}A_1(x)\ln\left(|x-x^0|\right)d\sigma, & n=2\end{cases} \tag{4.1.12}$$

ამგვარი სახის გამოსახულებას მარტივი ფენის პოტენციალი ეწოდება!

$A_1(x)$ – პოტენციალის სიმკვრივეა!

$A_1(x)$ სიმკვრივის მქონე ზედაპირზე განაწილებული მასების ან მუხტების მიერ შექმნილი ნიუტონის ან კულონის პოტენციალი!

$u_1(x^*)$ ფუნქცია ჰარმონიულია ყველგან $x^*\in R^n\setminus\partial\Omega$ ყოველი $x^0\in R^n\setminus\partial\Omega$, როდესაც $A_1(x)\in C(\partial\Omega)$.

ორმაგი ფენის პოტენციალი

$$u_2(x^0)=\begin{cases}\int\limits_{\partial\Omega}A_2(x)\dfrac{\partial\left(|x-x^0|^{2-n}\right)}{\partial\nu}d\sigma, & n\geq 3\\ -\int\limits_{\partial\Omega}A_2(x)\dfrac{\partial\left(\ln|x-x^0|\right)}{\partial\nu}d\sigma, & n=2\end{cases} \tag{4.1.13}$$

ამგვარი სახის გამოსახულებას ორმაგი ფენის პოტენციალი ეწოდება!

$A_2(x)$ – მომენტის სიმკვრივეა!

$u_2(x^*)$ ფუნქცია ჰარმონიულია ყველგან $x^*\in R^n\setminus\partial\Omega$ ყოველი $x^0\in R^n\setminus\partial\Omega$, როდესაც $A_2(x)\in C(\partial\Omega)$.

I სასაზღვრო ამოცანა - დირიხლეს ამოცანა
ლაპლასის განტოლებისათვის
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

იპოვეთ ჰარმონიული Ω არეში $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ კლასის ფუნქცია თუ მოცემულია მისი მნიშვნელობა $\partial\Omega$ საზღვარზე;
სადაც $\varphi(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $\partial\Omega$ საზღვარზე!

$$\Delta u = 0 \tag{4.1.1}$$
$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \tag{4.2.1}$$

II სასაზღვრო ამოცანა - ნეიმანის ამოცანა
ლაპლასის განტოლებისათვის
Carl Gottfried Neumann (1832 - 1925)

იპოვეთ ჰარმონიული Ω არეში $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ კლასის ფუნქცია თუ მოცემულია მისი $\partial\Omega$ საზღვარის ყოველ წერტილში ნორმალის მიმართულებით წარმოებულის მნიშვნელობა?
სადაც $\psi(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $\partial\Omega$-ზე

$$\Delta u = 0 \tag{4.1.1}$$
$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \psi(x) \tag{4.2.2}$$

III სასაზღვრო ამოცანა - რობენის ამოცანა
ლაპლასის განტოლებისათვის
Victor Gustave Robin (1855-1897)

იპოვეთ ჰარმონიული Ω არეში $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ კლასის ფუნქცია თუ მოცემულია მისი $\partial\Omega$საზღვარის ყოველ წერტილში გამოსახულება (6.2. 3) სადაც $a(x)$ და $b(x)$ მოცემული ფუნქციებია.
სადაც $\phi(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა $\partial\Omega$-ზე

$$\Delta u = 0 \tag{4.1.1}$$
$$\left[\alpha(x)u(x)+\beta(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]_{\partial\Omega} = \phi(x) \tag{4.2.3}$$

IIIა სასაზღვრო ამოცანა - შერეული ამოცანა
კერძო შემთხვევა
Vladimir Andreevich Steklov 1864 –1926

იპოვეთ ჰარმონიული Ω არეში $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ კლასის ფუნქცია თუ მოცემულია მისი $\partial\Omega_1$ საზღვარის ნაწილის ყოველ წერტილში ფუნქციის, ხოლო $\partial\Omega_2$ ნაწილზე მიმართულებით წარმოებულის მნიშვნელობები
სადაც $\phi(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა Ω-ზე

$$\Delta u = 0 \tag{4.1.1}$$
$$[u(x)]_{\partial\Omega_1} = \phi(x)\ , \qquad \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]_{\partial\Omega_2} = \phi(x) \tag{4.2.3*}$$

გაუსის თეორემა სითბური ნაკადის შესახებ - თუ *u(x)* ჰარმონიული Ω არეში $C^2(\Omega)$ კლასის ფუნქციაა და არის საზღვარი Ω საკმარისად გლუვია, მაშინ

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma = 0 \qquad (4.3.1)$$

დამტკიცება - დავწეროთ გრინის მეორე ფორმულა (4.1.4), სადაც *u(x)* მოცემული ჰარმონიული ფუნქციაა, ხოლო *ν(x)*≡1 მაშინ ტოლობაში სემავალი ოთხი წევრისაგან რჩება ერთი დანარჩენის ნულია, შესაბამისად თეორემა დამტკიცებულია!

თეორემის ფიზიკური არსი I

თუ *u(x)* ჰარმონიულია - ერთგვაროვან იზოტროპულ გარემოში ტემპერატურის სტაციონარული განაწილებაა! (4.3.1) - მუდმივი მამრავლის სიზუსტით ∂Ω საზღვარზე *ν* ნორმალის მიმართულებით გადადინებული სითბოს ნაკადის გამოსახულებაა

თეორემის ფიზიკური არსი იმაშია, რომ ერთგვაროვან იზოტროპულ გარემოში ტემპერატურის სტაციონარული განაწილებისას ∂Ωსაზღვარზე *ν* ნორმალის მიმართულებით გადადინებულიული სითბოს ნაკადი ნულის ტოლია!

პირიქითა თეორემა** - *Ωარის ყოველ ჩაკეტილ კონტურზე (ზედაპირზე) u(x) ფუნქციისათვის სრულდება (4.3.1) ტოლობა, მაშინ u(x) ჰარმონიულია!!!*

შენიშვნა 1

თუ *Q(x)* ერთმანეთში ჩალაგებული ბირთვებია *Ω* არეში, მაშინ (4.3.1)-ის თანახმად $E(x, x^0)$ - ფუნქციისათვის *Q(x)* \ *Q(x)* – არეში

$$\int_{S_{\rho_1}^{x^0}}\left(\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu}\right)d\sigma = \int_{S_{\rho_2}^{x^0}}\left(\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu}\right)d\sigma \qquad (4.3.2)$$

ეს ნიშნავს, რომ x^0 შესაძლებელია განხილულ იქნეს როგორც სითბოს გამოცემის წყარო ერთგვაროვან იზოტროპულ გარემოში $E(x, x^0)$ ტემპერატურის განაწილებით, რომლის ჯამურად გამოსცემული ტემპერატურის რაოდენობა ერთია ანუ

$$\int_{S_{\rho}^{x^0}}\left(\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu}\right)d\sigma = 1 \qquad (4.3.3)$$

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა სფეროზე II

ბირთვში ჰარმონიული ფუნქცია თუ უწყვეტია ამ ბირთვში მისი საზღვრის ჩათვლით. მაშინ ცენტრში მისი მნიშვნელობა სფეროზე მისი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულია (ω_n-ერთეულოვანი სფეროს ზედაპირის ფართობია) ; ანუ

$$u(x^0) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}\int_{S_R^{x^0}} u(x)d\sigma \qquad (4.3.4)$$

დამტკიცება: ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა (4.1.9) როდესაც W ბირთვია R რადიუსითა და ცენტით x^0 წერტილში!

$$u(x^0)=\int\limits_{S_R^{x^0}}\left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu}-E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma$$

სფეროზე r რადიუსითა და ცენტით x^0 წერტილში, მეორე წევრი

$$\int\limits_{S_R^{x^0}}\left(E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma=\int\limits_{S_R^{x^0}}\left(E(\rho)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma=E(\rho)\int\limits_{S_R^{x^0}}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma=0\,!$$

მეორეს მხრივ შევნიშნავ რა , რომ სფეროზე r რადიუსითა და ცენტით x^0 წერტილში

$$\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu'}=\frac{\rho^{1-n}}{\omega_n}$$

და

$$u(x^0)=\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int\limits_{S_\rho^{x^0}}u(x)d\sigma \qquad (4.3.5)$$

პირიქითა თეორემა** - *თუ არის ყოველი შიგა წერტილში u(x) ფუნქციისათვის სრულდება (4.3.4) ტოლობა, მაშინ u(x) ჰარმონიულია!!!*

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა ბირთვზე III

ბირთვში ჰარმონიული ფუნქცია თუ უწყვეტია ამ ბირთვში მისი საზღვრის ჩათვლით. მაშინ ცენტრში მისი მნიშვნელობა სფეროზე მისი მნიშვნელობების საშუალო არითმეტიკულია (k_n-ერთეულოვანი სფეროს მოცულობაა) ; ანუ

$$u(x^0)=\frac{1}{\kappa_n R^n}\int\limits_{Q_R^{x^0}}u(x)dx \qquad (4.3.6)$$

დამტკიცება: გავამრავლოთ ტოლობა (6.3.5) $\omega_n r^{n-1}$-ზე და ვაინტეგროთ ნულიდან R-მდე, მივიღებთ რომ

$$u(x^0)\int\limits_0^R\omega_n\rho^{n-1}d\rho=\int\limits_0^R\left(\int\limits_{S_\rho^{x^0}}u(x)d\sigma\right)d\rho \qquad (4.3.7)$$

რადგან

$$\int\limits_0^R\omega_n\rho^{n-1}d\rho=\kappa_n R^n$$

და

$$\int\limits_0^R\left(\int\limits_{S_\rho^{x^0}}u(x)d\sigma\right)d\rho=\int\limits_{Q_\rho^{x^0}}u(x)dx$$

პირიქითა თეორემა** - *არის ყოველი შიგა წერტილში u(x) ფუნქციისათვის სრულდება (4.3.7) ტოლობა, მაშინ u(x) ჰარმონიულია!!!*

საშუალო მნიშვნელობის ზოგადი თეორემა ბირთვზე IV

ბირთვში ჰარმონიული ფუნქცია თუ უწყვეტია ამ ბირთვში მისი საზღვრის ჩათვლით, ხოლო $\varphi(r)$ უწყვეტი ფუნქციაა $0 \le \rho \le R$ მონაკვეთზე და თუ

$$F(R) \equiv \int_{Q_R^{x^0}} \varphi\left(\left|x - x^0\right|\right) dx \neq 0$$

მაშინ

$$u\left(x^0\right) = \frac{\int_{Q_R^{x^0}} u(x)\varphi\left(\left|x - x^0\right|\right) dx}{\int_{Q_R^{x^0}} \varphi\left(\left|x - x^0\right|\right) dx} \qquad (4.3.7^*)$$

დამტკიცება: (4.3.4) ტოლობა გავამრავლოთ $\omega_n \rho^{n-1} \varphi(r)$ – ზე და ვაინტეგროთ $0 \le \rho \le R$ მონაკვეთზე.

$$u\left(x^0\right)\int_0^R F(\rho)\omega_n \rho^{n-1} d\rho = \int_0^R \left(\int_{S_R^{x^0}} u(x)F(\rho) d\sigma \right) d\rho = \int_{Q_R^{x^0}} u(x)\varphi\left(\left|x - x^0\right|\right) dx$$

შენიშვნა II. გასაშუალოების ბირთვი

თუ $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ და მანძილი Ω_ε -ის ნებისმიერი წერტილიდან არის $\partial\Omega$ საზღვრამდე ε. მაშინ Ω_ε არეში ამ ჰარმონიული ფუნქციის საშუალო $u^h(x)$ ფუნქცია როდესაც $h < \varepsilon$ ემთხვევა ანუ სამართლიანია ტოლობა

$$u\left(x^0\right) = u^h\left(x^0\right) \equiv \int_{Q_R^{x^0}} u(x) w_h\left(\left|x - x^0\right|\right) dx \qquad (4.3.8)$$

სადაც:

1. $\omega_h(x) \in C^\infty(R^n)$, $h > 0$;
2. $\omega_h(x) = 0$, $|x| > h$;
3. $\omega_h(x) \not\equiv 0$, $x \in R^n$;
4. $\int_{Q_R^{x^0}} w_h\left(\left|x - x^0\right|\right) dx = 1$

$$u^h(x) \to u(x), \text{ როდესაც } h \to 0$$

ჰარმონიული ფუნქცია ნებისმიერი Ω არის შიგა წერტილში უსასრულოდ გლუვია! ანუ მას ნებისმიერი რიგის წარმოებული გააჩნია!

მაქსიმუმის პრინციპი VI

არეში ჰარმონიული ფუნქცია თუ უწყვეტია ამ არეში მისი საზღვრის ჩათვლით და თუ M ამ ფუნქციის მაქსიმუმია; მაშინ თუ ეს მნიშვნელობა არის შიდა წერტილში ($u(x^0) = M$, $x^0 \in \partial\Omega$) მიიღწევა ეს ფუნქცია იგივურად მუდმივია ანუ ($u(x) \not\equiv M$, $\forall x \in \Omega$)!

დამტკიცება: x^0- წერტილით ცენტრში ავიღოთ ბირთვი რადიუსით R, ისე რომ ის სრულად მოთავსდეს არეში. ამ ბირთვში ავარჩიოთ წერტილი x'-ისეთი, რომ

$u(x')\neq M$ (წინაღმდეგ შემთხვევაში ფუნქცია ამ ბირთვში მუდმივის და მსჯელობას სხვა წერტილიდან გავაგრძელებთ!). შედეგად გამოდის, რომ არსებობს $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ბირთვი ცენტრით x'-წერტილში რადიუსით $r>0$, რომლის x წერტილებისათვის ელთათვისაც $u(x)< u(x^0)-\varepsilon$. მაშინ ბირთვში საშუალო მნიშვნელობის თეორემის (4.3.6)-თანახმად

$$u(x^0)=\frac{1}{\kappa_n R^n}\left(\int\limits_{Q_R^{x^0}\setminus Q_\rho^{x'}} u(x)dx+\int\limits_{Q_\rho^{x'}} u(x)dx\right)\le\frac{1}{\kappa_n R^n}\left[M\left(\kappa_n R^n-\kappa_n\rho^n\right)+\left(M-\varepsilon\right)\kappa_n\rho^n\right]$$

შესაბამისად

$$M\equiv u(x^0)<M-\frac{\varepsilon\rho^n}{R^n}$$

მიღებული წინააღმდეგობა გვაჩვენებს, რომ $u(x')=M$!
ნებისმიერი x'- წერტილი შევაერთოთ რაიმე ტეხილით x^0 წერტილთან ისე რომ ტეხილის ყველა წერტილი იყოს Ω არის შიგა წერტილი. ამ ტეხილის წვეროებზე ავაგოთ ბირთვები ისეთი რადიუსებით, რომ ისინი არიდან არ გავიდნენ. ზემოთ თქმულიდან გამოდის, რომ $u(x')=M$! რადგან წერტილი ნებისმიერი იყო , შესაბამისად $u(x)=M$

თეორემა. არეში ჰარმონიული ფუნქცია თუ უწყვეტია ამ არეში მისი საზღვრის ჩათვლით და თუ m ამ ფუნქციის მინიმუმია; მაშინ თუ ეს მნიშვნელობა არის შიდა წერტილში ($u(x^0)=m$, $x^0\in\partial\Omega$)) მიიღწევა ეს ფუნქცია იგივურად მუდმივია ანუ ($u(x)\equiv m$, $\forall x\in\Omega$)!
დამტკიცება: განვიხილოთ $-u(x)$ და გავიმეოროთ მისთვის წინა დამტკიცება!

ზოგადი თეორემა VIII*

არეში ჰარმონიული ფუნქცია თუ უწყვეტია ამ არეში მისი საზღვრის ჩათვლით და თუ ის არ არის მუდმივი; მაშინ ნებისმიერ არის შიგა წერტილისათვის სამართლიანია, რომ

$$\min_{\partial\Omega}u(x)<u(x)<\max_{\partial\Omega}u(x) \qquad (4.3.9)$$

დამტკიცება: უშუალოდ გამოდის VI და VII თეორემებიდან!

შენიშვნა III: ლაპლასის განტოლებისათვის დირიხლეს ერთგვაროვან ამოცანას ერთადერთი (ნულოვანი) ამონახსნი აქვს !!!!!!!!!!! ანუ თუ

$$u(x)\big|_{\partial\Omega}=0 \qquad (4.2.1)$$

მაშინ თვით ამონახსნი, მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად, იგივურად ნულია!

ლემა 1 - თუ მოცემულია Ω არეში $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ კლასის ფუნქცია და

$$\Delta u(x)\ge 0 \qquad (4.3.10)$$

მაშინ

$$u(x)<\max_{\partial\Omega}u(x) \qquad (4.3.11)$$

ანდა თუ

$$\Delta u(x)\le 0 \qquad (4.3.10^*)$$

მაშინ

$$\min_{\partial\Omega} u(x) < u(x) \qquad (4.3.11^*)$$

(4.3.11)-ის დამტკიცება: დაუშვათ რომ u(x)>0 მთელს არეში (საწინააღმდეგო შემთხვევაში დაუმატოთ "საკმარისად დიდი" მუდმივი); u(x)+C>0 აგრეთვე აკმაყოფილებს ლემის პირობებს! დაუშვათ

$$u(x) = v(x)\left(1-\varepsilon|x|^2\right)$$

სადაც ε > 0 იმდენად მცირეა, რომ მთელ Ω არეში $\left(1-\varepsilon|x|^2\right) > 0$!

$$\Delta u(x) \equiv \left(1-\varepsilon|x|^2\right)\Delta v(x) - 4\varepsilon\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} - 2\varepsilon n v \geq 0 \qquad (4.3.12)$$

თუ $v(x)$ ღებულობს უდიდეს მნიშვნელობას $x^0 \in \Omega$ წერტილში მაშინ:

1. $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x_j} = 0$, j= 1,...,n;

2. $\dfrac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2} \leq 0$, j= 1,...,n;

მაგრამ მეორეს მხრივ - $\left(1-\varepsilon|x|^2\right)\Delta v(x) - 4\varepsilon\sum_{j=1}^{n} x_j \dfrac{\partial v(x)}{\partial x_j} - 2\varepsilon n v < 0$!!!!

ეს ნიშნავს, რომ რაც დაუშვით სწორი არაა! ანუ

$$v(x) < \max_{\partial\Omega} v(x)$$

რაც იგივეა, რომ ნებისმიერი მცირე ეფსილონისათვის

$$u(x)\left(1-\varepsilon|x|^2\right)^{-1} \leq \max_{\partial\Omega}\left[u(x)\left(1-\varepsilon|x|^2\right)^{-1}\right]$$

და თუ ეფსილონს მივასწრაფებთ ნულისაკენ მივირებთ სასურველ შედეგს!

(4.3.11*)-ის დამტკიცება: განვიხილოთ - u(x) და წინა შედეგის გათვალისწინებით და გავიხსენებთ, რომ

$$-u(x) \leq \max_{\partial\Omega}[-u(x)]$$

თუ ამ უტოლობას 1 ზე გავამრავლებთ, მაშინ

$$u(x) \geq -\max_{\partial\Omega}[-u(x)] = \min_{\partial\Omega} u(x)$$

ლემა 2 - $u(x) \in C\left(\overline{Q}_R^{x^0}\right)$, დაუშვათ სფროს რომელიმე x' წერტილში მიიღწევა *u(x) ≠const.* ჰარმონიული ფუნქციის მინიმუმი და γ მიმართულება მახვილ კუთხეს ადგენს ν გარე ნორმალის ვექტორთან, მაშინ ამ წერტილში

$$\frac{\partial u(x')}{\partial \gamma} < 0$$

დირიხლეს ამოცანის ერთადერთობისა და სასაზღვრო პირობებზე უწყვეტად დამოკიდებულების თეორემა

შემოსაზღვრულ არეში პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანის კლასიკური u(x) ამონახსნი ერთადერთია და ის უწყვეტადაა დამოკიდებული სასაზღვრო პირობებზე!

$$\Delta u = f(x) \qquad (4.1.1^*)$$

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \qquad (4.2.1)$$

დამტკიცება: დაუშვათ $u_1(x)$ და $u_2(x)$ ამოცანის ორი ამონახსნია. განვიხილოთ მათი სხვაობა

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

რადგან ორივე ფუქცია უწყვეტია, მათი სხვაობაც უწყვეტია; განტოლება (4.1.1*) წრფივია და შესაბამისად ფუნქცია $v(x)$ ჰარმონიულია (ანუ (4.1.1) განტოლების ამონახსნია თანაც ის საზღვარზე ყველგან ნულის ტოლია, ამიტომ მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად : $v(x) \equiv 0$ ანუ

$$u_1(x) \equiv u_2(x)!$$

თუ შემოსაზღვრული არის $\partial\Omega$ საზღვარზე სამართლიანია უტოლობა

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon \qquad (4.3.14)$$

მაშინ ეს უტოლობა სამართლიანია მთელს Ω არეში

- ამონახსნი უწყვეტადაა დამოკიდებული საწყის და სასაზღვრო პირობებზე!
- საწყის და სასაზღვრო პირობების მცირე შეშფოთება ამონახსნის მცირე შეშფოთებას იწვევს

აპრიორული შეფასებები პუასონის განტოლების ამონახსნისათვის

შემოსაზღვრულ არეში პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანის კლასიკური $u(x)$ ამონახსნისათვის სამართლიანია უტოლობა

$$\min_{\partial\Omega} u - M_1 \sup_{\Omega}|f| \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u + M_1 \sup_{\Omega}|f| \qquad (4.3.15)$$

სადაც M_1 მხოლოდ Ω არეზეა დამოკიდებული:

ნეიმანის ამოცანის ერთადერთობისა და უწყვეტად დამოკიდებულების თეორემა

შემოსაზღვრულ არეში პუასონის განტოლებისათვის ნეიმანის ამოცანის კლასიკური $u(x)$ ამონახსნი ერთადერთია მუდმივი შესაკრების სიზუსტით და ის უწყვეტადაა დამოკიდებული სასაზღვრო პირობებზე!

$$\Delta u = f(x) \qquad (4.1.1^*)$$

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \psi(x) \qquad (4.2.2)$$

დამტკიცება: დაუშვათ $u_1(x)$ და $u_2(x)$ ამოცანის ორი ამონახსნია. განვიხილოთ მათი სხვაობა

$$v(x) = u_1(x) - u_2(x)$$

რადგან ორივე ფუქცია უწყვეტია, მათი სხვაობაც უწყვეტია; განტოლება (4.1.1*) წრფივია და შესაბამისად ფუნქცია $v(x)$ ჰარმონიულია (ანუ (4.1.1) განტოლების ამონახსნია თანაც ის საზღვარზე ყველგან მუდმივის ტოლია, ამიტომ მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად : $v(x) \equiv$ const. ანუ

$$u1(x) \equiv u2(x) + \text{const.}$$

შემოსაზღვრულ არეში პუასონის განტოლებისათვის ნეიმანის ამოცანის კლასიკური $u(x)$ ამონახსნის არსებობის შემთხვევაში, არსებობს ისეთი მხოლოდ არეზე დამოკიდებული მუდმივები C და M , რომ

$$|u(x) - C| \leq M \max_{\partial\Omega}|\psi| \qquad (4.3.16)$$

რობენის ამოცანის ერთადერთობისა და უწყვეტად დამოკიდებულების თეორემა შემოსაზღვრულ არეში თუ $u(x)$ ჰარმონიული ფუნქციაა რობენის სასაზღვრო პირობით, და თუ $a(x) \geq a_0$=const. > 0 , მაშინ Ω არეში

$$|u(x)| \leq \frac{1}{a_0} \max_{\partial\Omega} |\psi| \qquad (4.3.17)$$

ადამარის მაგალითი - არაკორექტული ამოცანა

კოშის ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის არაკორექტულია!

$$\Delta u = \Delta v = 0 \qquad (4.1.1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = 0 \qquad v(x,0) = \varphi(x) = 0 \qquad (4.3.18)$$

$$u_y(x,0) = \psi(x) = \sin(nx)/n \qquad v_y(x,0) = \psi(x) = 0 \qquad (4.3.19)$$

სასაზღვრო პირობებს შორის სხვაობა, როდესაც n დიდია ძალზე მცირეა, მაგრამ ამონახსნებს შორის სხვაობა რაგინდ დიდი ხდება!

$$u(x,y) = ch(ny)\cdot\sin(nx)/n \qquad \text{და} \qquad v(x,y) = 0 \qquad (4.3.20)$$

- ამონახსნი ცალსახად განისაზღვრება კოშის მონაცემებით!
- ამონახნი უწყვეტად არ არის დამოკიდებული კოშის საწყის პირობებზე!

თემა 4 2

გრინის ფუნქცია
"დირიხლეს ამოცანა"

განვიხილოთ *u(x)* ფუნქცია, რომელიც პუასონის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანის გლუვი ამონახსნია Ω არეში. (4.1.9)-ის თანახმად სამართლიანია წარმოდგენა, სადაც $E(x,x^0)$ ფუნდამენტური ამონახსნია (4.1.6)!

$$\Delta u(x) = f(x) \qquad u \in C^2(\overline{\Omega}) \tag{1.2.2}$$

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \tag{4.2.1}$$

$$E_n(x,x^0) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-x^0|, & n=2 \\ \dfrac{|x-x^0|^{2-n}}{(n-2)\omega_n}, & n\geq 3 \end{cases} \tag{4.1.6}$$

$$u(x^0) = \int_\Omega f(x)E(x,x^0) + \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma \tag{4.1.19}$$

განვიხილოთ $g(x,x^0)$ ფუნქცია, რომელიც ჰარმონიულია $\forall x^0 \in \Omega$ წერთილისათვის Ω არეში. (4.1.9*)-ის თანახმად

$$\Delta g(x,x^0) = 0 \tag{4.1.1}$$

$$g(x,x^0)\big|_{\partial\Omega} = -E(x,x^0)\big|_{\partial\Omega} \tag{4.4.0}$$

$$0 = \int_\Omega f(x)g(x,x^0) + \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial g(x,x^0)}{\partial \nu} - g(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma \tag{4.1.19*}$$

შევკრიბოთ (4.1.9) და (4.1.9*) და

$$u(x^0) = \int_\Omega f(x)\big(E(x,x^0) + g(x,x^0)\big) + \int_{\partial\Omega} u(x)\left[\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} + \frac{\partial g(x,x^0)}{\partial \nu}\right]d\sigma \tag{4.4.1}$$

დირიხლეს ამოცანის გრინის ფუნქცია ლაპლასის განტოლებისათვის

$$G(x,x^0) \equiv E(x,x^0) + g(x,x^0) \tag{4.4.2}$$

1. გრინის ფუნქცია ჰარმონიულია $\forall x^0 \in \Omega$ პარამეტრისათვის.

$$\Delta G(x,x^0) = 0 \tag{4.4.3}$$

2. გრინის ფუნქცია ნულის ტოლია საზღვარზე $\forall x^0 \in \Omega$ პარამეტრისათვის.

$$G(x,x^0)=0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad and \quad \forall x^0 \in \Omega \tag{4.4.4}$$

3. გრინის ფუნქცის $g(x,x^0)$ ნაწილი ცალსახად განისაზღვრება (4.4.0) სასაზღვრო პირობით.

დამტკიცება: დაუშვათ ამონახსნი ორია $g_1(x,x^0)$ და $g_2(x,x^0)$. მაშინ მათი სხვაობა ჰარმონიული ფუნქციაა და საზღვარზე ის ნულის ტოლია შესაბამისად (4.3.9) "მაქსიმუმის" პრინციპის თანახმად ის იგივურად ნულია, შესაბამისად ორი ამონახსნი სინამდვილეში ერთია!

$$\Delta\left[g_1(x,x^0)-g_2(x,x^0)\right]=0$$

$$\left[g_1(x,x^0)-g_2(x,x^0)\right]_{\partial\Omega}=0$$

დირიხლეს ამოცანის გრინის ფუნქცია პუასონის განტოლებისათვის

$$u(x^0)=\int_\Omega f(x)G(x,x^0)dx+\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}d\sigma \tag{4.4.5}$$

მოცემული არისათვის $G(x,x^0)$ გრინის ფუნქციის ცხადი სახით აგება საშუალებას გვაძლევს ცხადი სახით ჩავწეროთ მოცემულ არეში დირიხლეს ამოცანის ამონახსნი პუასონის (ლაპლასის) განტოლებისათვის

გრინის ფუნქცია სიმეტრიულია

4.გრინის ფუნქცია სიმეტრიულია ნებისმიერი $\forall x^0, x^1 \in \Omega$ წერტილებისათვის

$$G(x^1,x^0) = G(x^0,x^1) \tag{4.4.6}$$

დამტკიცება: Ω არიდან ამოვაგდოთ ორი ε-რადიუსის სფერო (იმდენად მცირე, რომ ამ რადიუსის ბირთვები ცენტრებით x^1 და x^0 წერტილებში მთლიანად შედიან Ω არეში);

$$\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus(Q_\varepsilon(x^0)\cup Q_\varepsilon(x^1)).$$

$u(x) = G(x,x^1)$ ჰარმონიულია Ω_ε არეში და $v(x) = G(x,x^0)$ ჰარმონიულია Ω_ε არეში

$$u(x) = v(x)=0 \quad \text{საზღვარზე } \partial\Omega$$

შესაბამისად გრინის მეორე ფორმულის თანახმად ცხადია, რომ

$$\int_\Omega\left[\Delta u(x)v(x)-\Delta v(x)u(x)\right]dx=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}v(x)-\frac{\partial v(x)}{\partial \nu}u(x)\right]d\sigma \tag{4.4.7}$$

ν- სფეროების ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორია, შესაბამისად სამართლიანია წარმოდგენები:

$$u(x) = E(x,x^1) + g(x,x^1) \qquad \text{და} \qquad v(x) = E(x,x^0) + g(x,x^0)$$

ε- მივასწრაფოდ ნულისაკენ და მივიღებთ სასურველ ტოლობას!

$$v(x^1) = u(x^0) \qquad \text{ანუ} \quad G(x^1,x^0) = G(x^0,x^1).$$

გრინის ფუნქციის ფიზიკური არსი

გრინის ფუნქცია - $G(x,x^0)$ იძლევა Ω არეში ტემპერატურის სტაციონალურ განაწილებას როდესაც არის $\partial\Omega$ საზღვარზე ტემპერატურა ნულის ტოლია და x^0 წერტილში მოთავსებულია ერთიანის ტოლი სითბოს რაოდენობის გამომფრქვევი წყარო!

4ა. გრინის ფუნქცია - $G(x,x^0)$ იძლევა Ω არეში ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალს რომელიც გააჩნია x^0 წერტილში მოთავსებულ ელექტრულ მუხტს რომლის პოტენციალი არის $\partial\Omega$ საზღვარზე ნულის ტოლია.

5. Ω არეში გრინის ფუნქციის პოვნა ნიშნავს, Ω არის გარეთ მუხტების ისეთი განაწილების პოვნას, რომ ერთობლივად ამ და x^0 წერტილში მოთავსებულმა ელექტრულმა მუხტებმა მოგვცეს ისეთი ელექტროსტატიკური ველი, რომლის პოტენციალი არის $\partial\Omega$ საზღვარზე ნულის ტოლი.

გრინის ფუნქცია "დ" სიმეტრიულია

4.გრინის ფუნქცია სიმეტრიულია ნებისმიერი $\forall x^0, x^1 \in \Omega$ წერტილებისათვის

$$G(x^1,x^0) = G(x^0,x^1) \tag{4.4.6}$$

დამტკიცება: Ω არიდან ამოვაგდოთ ორი ε-რადიუსის სფერო (იმდენად მცირე, რომ ამ რადიუსის ბირთვები ცენტრებით x^1 და x^0 წერტილებში მთლიანად შედიან Ω არეში);

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (Q_\varepsilon(x^0) \cup Q_\varepsilon(x^1)).$$

$u(x) = G(x,x^1)$ ჰარმონიულია Ω_ε არეში და $v(x) = G(x,x^0)$ ჰარმონიულია Ω_ε არეში

$$u(x) = v(x) = 0 \quad \text{საზღვარზე } \partial\Omega$$

შესაბამისად გრინის მეორე ფორმულის თანახმად ცხადია, რომ

$$\int_\Omega [\Delta u(x) v(x) - \Delta v(x) u(x)] dx = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} v(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial \nu} u(x) \right] d\sigma \tag{4.4.7}$$

ν- სფეროების ნორმალის ერთეულოვანი ვექტორია, შესაბამისად სამართლიანია წარმოდგენები:

$$u(x) = E(x,x^1) + g(x,x^1) \qquad \text{და} \qquad v(x) = E(x,x^0) + g(x,x^0)$$

ε- მივასწრაფოდ ნულისაკენ და მივიღებთ სასურველ ტოლობას!

$$v(x^1) = u(x^0) \qquad \text{ანუ} \quad G(x^1,x^0) = G(x^0,x^1).$$

გრინის ფუნქცია
“ნეიმანის ამოცანა”

განვიხილოთ $u(x)$ ფუნქცია, რომელიც პუასონის განტოლებისათვის ნეიმანის ამოცანის გლუვი ამონახსნია Ω არეში. (4.1.9)-ის თანახმად სამართლიანია წარმოდგენა, სადაც $E(x,x^0)$ ფუნდამენტური ამონახსნია (4.1.6)!

$$\Delta u(x) = f(x) \qquad u \in C^2(\overline{\Omega}) \tag{1.2.2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \overline{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = \psi(x) \tag{4.2.2}$$

$$u(x^0) = \int_\Omega f(x)E(x,x^0) + \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \nu} - E(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma \tag{4.1.19}$$

განვიხილოთ $q(x,x^0)$ ფუნქცია, რომელიც ჰარმონიულია $\forall x^0 \in \Omega$ წერთილისათვის Ω არეში. (4.1.9*)-ის თანახმად

$$\Delta q(x,x^0) = 0 \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\partial q(x,x^0)}{\partial \overline{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial E(x,x^0)}{\partial \overline{\nu}}\Big|_{\partial\Omega} \tag{4.4.0*}$$

$$0 = \int_\Omega f(x)g(x,x^0) + \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial q(x,x^0)}{\partial \nu} - q(x,x^0)\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)d\sigma \tag{4.1.19*}$$

შევკრიბოთ (4.1.9) და (4.1.9*) და

$$u(x^0) = \int_\Omega f(x)\big(E(x,x^0) + q(x,x^0)\big) + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(x)}{\partial \overline{\nu}}\big[E(x,x^0) + q(x,x^0)\big]d\sigma \tag{4.4.1*}$$

ნეიმანის ამოცანის გრინის ფუნქცია ლაპლასის განტოლებისათვის

$$G(x,x^0) \equiv E(x,x^0) + q(x,x^0) \tag{4.4.2}$$

1. გრინის ფუნქცია ჰარმონიულია $\forall x^0 \in \Omega$ პარამეტრისათვის.

$$\Delta G\left(x, x^0\right) = 0 \tag{4.4.3}$$

2. გრინის ფუნქცია ნულის ტოლია საზღვარზე $\forall x^0 \in \Omega$ პარამეტრისათვის.

$$\frac{\partial G\left(x, x^0\right)}{\partial \bar{\nu}} = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad and \quad \forall x^0 \in \Omega \tag{4.4.4*}$$

3. გრინის ფუნქცის $q(x,x^0)$ ნაწილი განისაზღვრება (4.4.0*) სასაზღვრო პირობით მუდმივი შესაკრების სიზუსტით.

დამტკიცება: დაუშვათ ამონახსნი ორია $q_1(x,x^0)$ და $q_2(x,x^0)$. მაშინ მათი სხვაობა ჰარმონიული ფუნქციაა და საზღვარზე მისი ნორმანიტ წარმოებული ნულის ტოლია !

$$\Delta\left[q_1\left(x, x^0\right) - q_2\left(x, x^0\right)\right] = 0$$

$$\left.\frac{\partial\left[g_1\left(x, x^0\right) - g_2\left(x, x^0\right)\right]}{\partial \bar{\nu}}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

ნეიმანის ამოცანის გრინის ფუნქცია პუასონის განტოლებისათვის

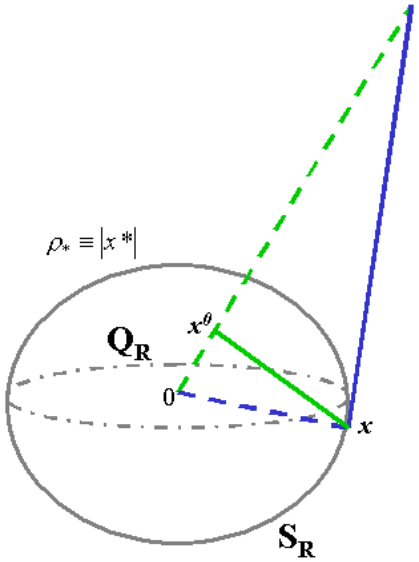
$$u\left(x^0\right) = \int_{\Omega} f(x) G\left(x, x^0\right) dx + \int_{\partial\Omega} \psi(x) G\left(x, x^0\right) d\sigma \tag{4.4.5*}$$

გრინის ფუნქცია “დ” I ბირთვისათვის n=3

არეკვლის მეთოდი

ამ არისათვის $G(x,x^0)$ გრინის ფუნქციის ასაგებად საჭიროა შევარჩიოთ ბირთვს გარეთ ისეთი “დამუხტული წერტილი”, რომ ამ მუხტებით შექმნილი ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი ნულის ტოლი იყოს ამ ბირთვის სფეროზე. x^0 წერტილისათვის ასეთი წერტილია x^1 ეგრეთ წოდებული ინვერსიული (სფეროს მიმართ სიმეტრიული) წერტილი გრინის ფუნციის სახეა

$$G\left(x, x^0\right) = E\left(x, x^0\right) - E\left(\frac{\rho}{R} x, \frac{\rho}{R} x^1\right)$$



ინვერსია და აღნიშვნები

1. მანძილი x^0 წერტილიდან სათავემდე - $\rho \equiv |x^0|$;
2. მანძილი $x^1 \equiv x^*$ ინვერსიული წერტილიდან სათავემდე - $\rho_* \equiv |x^*|$;
3. მანძილი x^0 და საზღვრის x წერტილებს შორის - $r \equiv |x - x^0|$;
4. მანძილი x^* და საზღვრის x წერტილებს შორის - $r_* \equiv |x - x^*|$;
5. საზღვრის x წერტილიდან ცენტრამდე R;
6. ინვერსიულობის პირობა -

$$\rho\rho_* = R^2; \tag{4.4.8}$$

შევამოწმოთ, რომ (4.4.9) არის გრინის ფუნქცია, ანუ ჰარმონიული ყველგან $x^1 x^0$ და $x, x^0 \in Q_R$ და საზღვარზე ის ნულის ტოლია ($x^0 \in Q_R$ და $x \in S_R$)!

განვიხილოთ ორი სამკუთხედი $0x^0x$ და $0xx^1$, როდესაც $x \in S_R$ და ვაჩვენოთ, რომ ისინი მსგავსებია!?

2.1 მათ საერთო კუთხე $\angle\, x0x^0$ აქვთ

2.2 ინვერსიულობის გამო (4.4.8)

ანუ $|Ox^0| \,/\, |Ox| = |Ox| \,/\, |Ox^1|$ ე.ი $$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_*} = \frac{r}{r_*} \tag{4.4.10}$$

შესაბამისი გვერდები პროპორციულია კერძოთ ამ კონკრეტულ შემთხვევაში :

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi|x - x^0|} - \frac{R}{4\pi|x^0||x - x^1|}$$

$$G(x,0) = \frac{1}{4\pi|x|} - \frac{1}{4\pi R}$$

ლაპლასის განტოლებისათვის დირიხლეს ამოცანის ამონახსნი გრინის ფუნქციის აგების შედეგად გამოისახება შემდეგი სახით

$$u(x^0)=\int_{S_R^0}\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\varphi(x)d\sigma \tag{4.4.11}$$

შევეცადოთ გამოვთვალოთ ეს ინტეგრალი ბირთვისათვის და ამისათვის გამოვთვალოთ გამოსახულება

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0}=E'\left(\left|x-x^0\right|\right)\frac{\partial\left|x-x^0\right|}{\partial \nu}-E'\left(\frac{\rho}{R}\left|x-x^1\right|\right)\frac{\rho}{R}\frac{\partial\left|x-x^1\right|}{\partial \nu} \tag{4.4.12}$$

რადგან სფეროზე $r=\frac{\rho}{R}r_*$, ამიტომ

$$E'\left(\left|x-x^0\right|\right)_{S_R^0}=E'\left(\frac{\rho}{R}\left|x-x^1\right|\right)\Big|_{S_R^0}$$

შესაბამისად (4.4.12) დან

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0}=E'\left(\left|x-x^0\right|\right)\left[\frac{\partial\left|x-x^0\right|}{\partial \nu}-\frac{\rho}{R}\frac{\partial\left|x-x^1\right|}{\partial \nu}\right] \tag{4.4.13}$$

$$\frac{\partial\left|x-x^0\right|}{\partial \nu}=\cos\beta_0 \qquad\qquad \frac{\partial\left|x-x^1\right|}{\partial \nu}=\cos\beta_* \tag{4.4.14}$$

$0x^0x$ სამკუთხედიდან $\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos\beta_0$;

$0x^1x$ სამკუთხედიდან $\rho_*^2=R^2+r_*^2-2Rr_*\cos\beta_*$;

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0}=E'(r)\frac{R^2-\rho^2}{Rr} \tag{4.4.15}$$

სადაც

$$E'(r)=\frac{1}{\omega_n}r^{1-n} \tag{4.4.16}$$

ანუ

$$\left.\frac{\partial G(x,x^0)}{\partial \nu}\right|_{S_R^0}=\frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-\rho^2}{r^n}$$

ამგვარად (4.4.11) შესაძლებელია ჩავწეროთ

$$u(x^0)=\frac{1}{\omega_n R}\int_{S_R^0}\frac{R^2-\rho^2}{r^n}u(x)d\sigma \tag{4.4.17}$$

ანუ

$$u(x^0)=\frac{R^2-\rho^2}{\omega_n R}\int_{S_R^0}\frac{\varphi(x)d\sigma}{\left(\rho^2+R^2-2R\rho\cos\gamma\right)^{n/2}} \tag{4.4.18}$$

ჰარნაკის უტოლობა

ბირთვში ჰარმონიული *u(x)* ფუნქცია უწყვეტია ბირთვის ჩაკეტვაზე და თანაც ის არაუარყოფითია. მაშინ ბირთვის ნებისმიერ შიგა x^0 წერტილში სამართლიანია უტოლობა:

$$\frac{R^{n-2}(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1}}u(0)\le u(x_0)\le\frac{R^{n-2}(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1}}u(0) \qquad (4.4.19)$$

დამტკიცება: დირიხლეს ამოცანის ამონახსნი ერთადერთია, ამიტომ და $0x^0x$ სამკუთხედიდან → $R - r \le \rho \le R + r$

$$\frac{R^2-\rho^2}{(R+\rho)^n}\le\frac{R^2-\rho^2}{r^n}\le\frac{R^{n-2}}{(R-\rho)^n}$$

ფუნქცია *u(x)* არაუარყოფითია და

$$\frac{1}{\omega_n R}\frac{(R-\rho)}{(R+\rho)^{n-1}}\int_{S_R^0}u(x)d\sigma\le u(x^0)\le\frac{1}{\omega_n R}\frac{(R+\rho)}{(R-\rho)^{n-1}}\int_{S_R^0}u(x)d\sigma \qquad (4.4.20)$$

გრინის ფუნქცია I ნახვარსიბრტყისათვის $x_2>0$

$$G(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(|x-x^0|\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\left(|x-\bar{x}|\right) \qquad (4.5.1)$$

აგება და დამტკიცების სრული ვერსია იხ ლექციების სრულ ვერსიაში (თემა–4–2);

გრინის ფუნქცია I ნახვარსივრცისათვის $x_3>0$

$$G(x,x_0)=\frac{1}{4\pi|x-x^0|}-\frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|} \qquad (4.5.2)$$

აგება და დამტკიცების სრული ვერსია იხ ლექციების სრულ ვერსიაში (თემა–4–2);

გრინის ფუნქცია I მეოთხედი სიბრტყისათვის
$x_1>0$, $x_2>0$

$$G(x,x_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(|x-x^0|\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\left(|x-\bar{x}|\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\left(|x-x'|\right)+\frac{1}{2\pi}\ln\left(|x-\bar{x}'|\right) \qquad (4.5.3)$$

აგება და დამტკიცების სრული ვერსია იხ ლექციების სრულ ვერსიაში (თემა–4–2);

გრინის ფუნქცია I $x_2>0$, $x_3>0$ ორწახნაგა კუთხისათვის

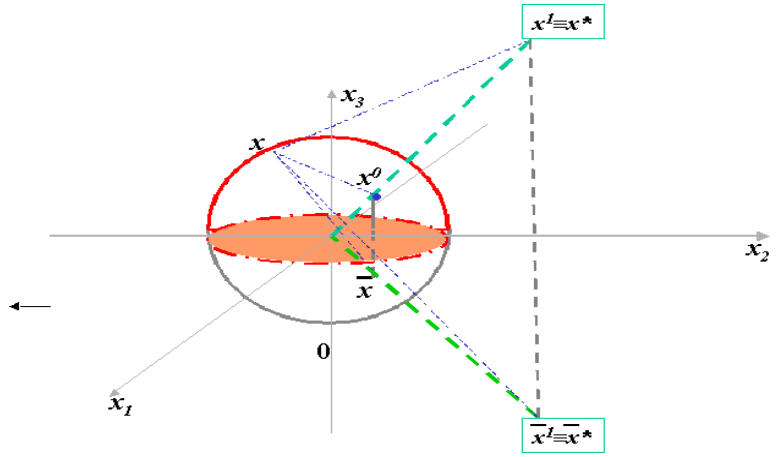
$$G(x,x_0)=\frac{1}{4\pi|x-x^0|}-\frac{1}{4\pi|x-\bar{x}|}-\frac{1}{4\pi|x-x'|}-\frac{1}{4\pi|x-\bar{x}'|} \qquad (4.5.4)$$

აგება და დამტკიცების სრული ვერსია იხ ლექციების სრულ ვერსიაში (თემა–4–2);

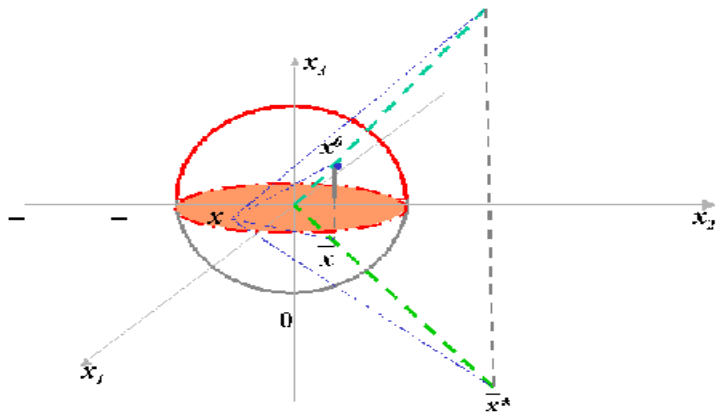
გრინის ფუნქცია ნახევარსფეროსათვის

$$G(x,x_0)=\frac{1}{4\pi\left|x-x^0\right|}-\frac{R}{4\pi\left|x^0\right|\left|x-x^*\right|}-\frac{1}{4\pi\left|x-\bar{x}\right|}-\frac{R}{4\pi\left|x^0\right|\left|x-\bar{x}^*\right|} \qquad (4.5.6)$$

დამტკიცება: I. x^* წერტილი x^0 წერტილის სფეროს მიმართ ინვერსიულია, დანარჩენი ორი მათი სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული. შესაბამისად (4.5.6) გამოსახულება ნულის ტოლია როდესაც $x\in\partial\Omega\,(x_3>0)!$ რადგან გამოსახულების ოთხივე წევრი დამოკიდებულია მანძილებზე და შესაბამისად ერთმანეთს გააბათილებენ პირველი და მესამე; მეორე და მეოთხე წევრები)



II. x^* წერტილი x^0 წერტილის სფეროს მიმართ ინვერსიულია, დანარჩენი ორი მათი სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული. შესაბამისად (4.5.6) გამოსახულება ნულის ტოლია როდესაც $x\in\partial\Omega\,(x_3=0)!$ რადგან გამოსახულების ოთხივე წევრი დამოკიდებულია მანძილებზე (სამკუთხედები $x^*x\,x^*$ და $x^0\,x\,x$ ტოლფერდაა და შესაბამისად ერთმანეთს გააბათილებენ პირველი და მეორე; მესამე და მეოთხე წევრები)



გრინის ფუნქცია II ნახვარსივრცისათვის $x_3 > 0$

$$G(x, x_0) = \frac{1}{4\pi|x - x^0|} + \frac{1}{4\pi|x - \bar{x}|} \tag{4.5.7}$$

აგება და დამტკიცების სრული ვერსია იხ ლექციების სრულ ვერსიაში (თემა–4–2).

ცვლადთა განცალება

დასმულია დირიხლეს ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის წრეში; ანუ წრის რადიუსია H და

$$\Delta u = 0 \ ; \qquad u \in C^2(\overline{\Omega}) \ \text{წრეში} \tag{4.2.1}$$

$$u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \tag{4.2.2}$$

გადავწეროთ ლაპლასის ოპერატორი პოლარულ კოორდინატებში

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\vartheta^2} = 0 \tag{4.6.1}$$

და ვეძებოთ ამონახსნი ცვლადთა განცალებით ანუ როგორც ნამრავლი

$$u(r,\theta) = \mathrm{R}(r)\Phi(\theta) \neq 0 \tag{4.6.0}$$

(4.6.1) განტოლებაში ჩასმა და (4.6.0) ზე გაყოფა (ნული არაა) გვაძლევს, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial \rho}\right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

და შესაბამისად იწერება ორი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლება

$$\Phi^{2}(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0, \qquad \Phi(\theta) \neq 0 \tag{4.6.2}$$

$$\rho^{2}R^{2}(\rho r) + \rho^{2}R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \quad R(\rho) \neq 0 \tag{4.6.3}$$

შევნიშნოთ, რომ (2.4.9) შტურმი ლიუვილის ამოცანა სახეცვლილია და ინტერვალის ბოლოებზე ნულოვანი პირობები შეიცვლება პერიოდულობით

2.4.9	(4.6.2)
$X''(x)+\lambda X(x)=0; \qquad X(x)\neq 0$	$\Phi^{2}(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0, \qquad \Phi(\theta) \neq 0$
$X(0)=X(l)=0$	$\Phi(\theta) = \Phi(2\pi + \theta)$

ცხადია, რომ (4.6.2) ამონახსნის პერიოდულობა შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც საკუთრივი რიცხვი $\lambda = n^2$ ($n \in N$), ანუ საკუთრივი ფუნქციები

$$\Phi_k(\vartheta) = A_k \cos\sqrt{\lambda}\vartheta + B_k \sin\sqrt{\lambda}\vartheta \qquad \text{ანუ}$$
$$\Phi_k(\vartheta) = A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta \tag{4.6.4}$$

(4.6.3) ამონახსნი $R(\rho)$ ვეძებოთ კონკრეტულად $R(\rho) = \rho^m$ სახით; ჩასმა გადვარწმუნებს, რომ $m^2 = n^2$, ანუ $m = \pm n$

$$R(\rho) = C\rho^{n} + D\rho^{-n} \tag{4.6.5}$$

დასმული ამოცანისათვის ცხადია ამონახსნი უნდა ვეძებოთ მხოლოდ ისეთი ამონახსნები, როდესაც $D=0$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში ამონახსნს სათავეში განსაკუთრებული წერტილი ექნება, ანუ $u(0,\theta) = R(0)\Phi(\theta) \neq 0$ და აქ ის არ არის *ჰარმონიული!* ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$u(\rho,\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{k}\left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right) \tag{4.6.6}$$

A_n და B_n კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ სასაზღვრო ფუნქციის ფურიეს მწკრივად წარმოდგენა

$$u(H,\vartheta)=\sum_{k=0}^{\infty}H^k\left(A_k\cos k\vartheta+B_k\sin k\vartheta\right)=\varphi(\vartheta) \qquad (4.6.7)$$

მოცემული სასაზღვრო ფუნქცია მხოლოდ კუთხიდანაა დამოკიდებული და შესაბამისად ფურიეს მწკრივად გაშლის შემდეგ

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)d\theta\,; \qquad \alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\cos k\theta d\theta\,; \qquad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)\sin k\theta d\theta$$

და შესაბამისად

$$\varphi(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos k\vartheta+\beta_k\sin k\vartheta\right) \qquad (4.6.8)$$

შესაბამისად ამონახსნის კოეფიციენტები განისაზღვრება სასაზღვრო პირობის ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტებით:

$A_0 = a_0/2$ $\qquad$ $A_k = \alpha_k/H^k$ $\qquad$ $B_k = \beta_k/H^k$

ამონახსნის სახეა:

$$u(\rho,\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{H}\right)^k\left(\alpha_k\cos k\vartheta+\beta_k\sin k\vartheta\right) \qquad (4.6.9)$$

ჰოლომორფული ფუნქცია

$$f(z)\equiv f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y) \qquad (4.6.10)$$

- თუ *f(z)* ჰოლომორფულია, მაშინ *u(x,y)* და *v(x,y)* იმავე არეში ჰარმონიული ფუქციებია!
- თუ ნამდვილი *u(x,y)* ფუნქცია ჰარმონიულია ცალადბმულ არეში, მაშინ მოიძებნება ისეთი ჰარმონიული ფუნქცია *v(x,y)* (*შეუღლებული*), რომ *u(x,y) +i v(x,y)* ამავე არეში ჰოლომორფული ფუნქცია იქნება.
- თუ არე მრავლადბმულია, მაშინ საზოგადოდ (4.6.9) ჯამი მრავალსახა ფუნქციაა!
- z^n ჰოლომორფული ფუნქციაა ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის ნებისმიერ შემოსაზღვრულ (სასრულ) არეში;

  მაგალითად: Re (z^n) და Im (z^n);
- ხოლო თუ n უარუფითი მთელი რიცხვია მაშინ ეს ფუნქცია ნებისმიერ ისეთ არეში ჰოლომორფული ფუნქციაა, რომელიც არ შეიცავს კოორდინატთა სათავის რაგინდ მცირე მიდამოს!

  მაგალითად: Re (z^{-n}) და Im (z^{-n});
- $z = \rho e^{i\theta}$ - *(ρ, θ)* პოლარული კოორდინატებია პოლუსით სათავეში.

$$\mathrm{Re}\,(z^n) = \rho^n \cos\theta, \qquad \mathrm{Im}\,(z^n) = \rho^n \sin\theta, \qquad n > 0 \qquad (4.6.11)$$

$$\mathrm{Re}\,(z^{-n}) = \rho^{-n} \cos\theta, \qquad \mathrm{Im}\,(z^{-n}) = \rho^{-n} \sin\theta, \qquad n < 0 \qquad (4.6.12)$$

- აბელის თეორემის თანახმად ცნობილია (4.6.9) მწკრივის კრებადობის პირობა (მათზე ჩვენ აქ არ გავჩერდებით);

მაგალითისათვის თუ საზღვარზე მოცემული ფუნქცია 2p-პერიოდულია, აბსოლუტურად უწყვეტია და მას კვარდატით ინტეგრებადი პირველი რიგის წარმოებულები გააჩნია! შესაბამისად (4.6.8) ფურიეს კოეფიციენტებისა და (4.6.11) მწკრივების სახის გათვალისწინებით შესაძლებელია დავწეროთ, რომ ამონახსნი

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{R^k}\cos k(\omega-\theta)\right]d\omega \qquad (4.6.13)$$

- მტკიცდება, რომ ეს მართლაც სამართლიანია როდესაც $\rho < R$;

$$z = \rho e^{i\theta}; \qquad \zeta = R\,e^{i\omega}; \qquad \rho = |\,\zeta - z\,|$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{R^k}\cos k(\omega-\theta) = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\zeta^k} = \mathrm{Re}\frac{z}{\zeta - z}$$

ადგილი აქვს შვარცის ფორმულას

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\frac{z}{\zeta - z}d\omega = \mathrm{Re}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\varphi(\omega)\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (4.6.14)$$

დამატებით თუ შევნიშნავთ, რომ

$$\mathrm{Re}\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \mathrm{Re}\frac{(\zeta + z)(\zeta - z)}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - \rho^2}{r^2}$$

დავინახავთ, რომ ასეც შესაძლებელია (4.4.17) ან (4.4.18) პუასონის ინტეგრალის მიღება!

ცვლადთა განცალება გარე ამოცანა

დასმულია დირიხლეს ამოცანა ლაპლასის განტოლებისათვის წრის გარე არეში; ანუ წრის რადიუსია H და ფუნქცია ჰარმონიულია უსასრულო არეში წრის გარეთ?

A_n და B_n კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის ანალოგიური მსჯელობითა და სასაზღვრო პირობის თანახმად

$$u(\rho,\vartheta)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}\left(A_k\cos k\varphi+B_k\sin k\varphi\right) \qquad \text{(ზოგადი სახე)} \qquad (4.6.15)$$

$$u(\rho,\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{H}{\rho}\right)^{k}\left(\alpha_k\cos k\vartheta+\beta_k\sin k\vartheta\right) \qquad (4.6.16)$$

ესაა მხოლოდ ფორმალური ამონახსნები და საჭიროა დამტკიცება, რომ მწკრივები კრებადი და წვრწევრად გაწარმოებადნი და საზღვრის ჩათვლით უწყვეტნი არიან!

საჭიროა დამატებითი პირობა

$$u(x)\to 0, \quad \text{როდესაც} \quad x\to\infty \qquad (4.6.17)$$

- (4.6.17) პირობა ($n>2$) აუცილებელია, ის ამონახსნის ერთადერთობას უზრუნველყოფს!

მაგალითი: Ω წრეა და წრეწირზე $\varphi = const.= \varphi_0$ და არ სრულდება *(4.6.17), მაშინ არის ორი ფუნქცია:*

$$u_1(x)=\varphi_0 \qquad \text{და} \qquad u_2(x)=\varphi_0 R/|x|$$

და ნებისმიერი ფუნქცია

$$\forall u\,(x)=\alpha u1(x)+\beta u2(x), \quad \text{სადაც } \alpha+\beta=1$$

ყველა ეს ფუნქცია (4.1.1), (4.2.1) ამოცანის ამონახსნია ბირთვის გარე არეში , შესაბამისად ამონახსნი არაა ერტადერთი!

ერთადერთობის დამტკიცება: ორი სხვადასხვა ამონახსნის სხვაობა $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ ნულოვან პირობებს აკმაყოფილებს საზღვარზე და ნულისაკენ მიისწარფის უსასრულო წერტილის მიდამოში. (4.6.10)-დან გამოდის, რომ ნებისმიერი მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი R^*- დიდი რადიუსი, რომ

$$|u\,(x)|<\varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad |x|>R^*$$

ორ სფეროს შორის მოთავსებულ არეში მაქსიმუმის პრინციპის თანახმად $|u\,(x)|<e$, მაგრამ e ნებისმიერია. ამიტომ

$$u\,(x)\equiv 0$$