ლექცია 8

5.2. მიმდევრობები. პროგრესიები. მწკრივები

განსაზღვრა 5.2.1. *მიმდევრობა* ეწოდება ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა $N := \{1,2,\ldots\}$ ან $\{1,2,\ldots,n\}$ სიმრავლე.

განსაზღვრა 5.2.2[*]. მიმდევრობას, რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მიიღება წინა წევრისგან ერთი და იმავე რიცხვის (*არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა*) მიმატებით, *არითმეტიკული პროგრესია* ეწოდება.

განსაზღვრა 5.2.3[**]. მიმდევრობას, რომლის პირველი წევრი არ უდრის ნულს და რომლის ყოველი წევრი, დაწყებული მეორიდან, მიიღება წინა წევრისგან ერთი და იმავე, ნულისგან გან-სხვავებულ რიცხვზე (*გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი*) გამრავლებით, *გეომეტრიული პროგრესია* ეწოდება.

არითმეტიკული პროგრესიის განმარტებიდან გამომდინარე,

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n \tag{5.2.1}$$

მიმდევრობა არითმეტიკულ პროგრესიას წარმოადგენს, თუ

$$a_k = a_{k-1} + d\,,\ \ k = 2,3,\ldots,n\,, \tag{5.2.2}$$

სადაც d-ს *არითმეტიკული პროგრესიის სხვაობა* ეწოდება. (5.2.2)-დან ცხადია,

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_k = a_1 + (k-1)d, \qquad\qquad (5.2.3)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \tag{5.2.4}$$

არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის (5.2.3) ფორმულის მკაცრი დამტკიცება ემყარება *მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს*. ამ მეთოდის არსი მოცემული იყო წინა ლექციაში და შემდეგში მდგომარეობს: თუ რაიმე ფორმულა (მტკიცება) შეიცავს k პარამეტრს და ის სამართლიანია რომელიმე k-სთვის (მაგ., $k = 2$-სთვის) და იქიდან, რომ ვუშვებთ მის სამართლიანობას რაიმე $k > 2$-სთვის, გამომდინარეობს მისი სამართლიანობა $k+1$-სთვის, მაშინ ის სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური k-სთვის (ჩვენს შემთხვევაში $k > 2$-სთვის). (5.2.3) ფორმულა განსაზღვრა 5.2.2-დან გამომდინარე სამართლიანია $k = 2$-სთვის. დავუშვათ მისი

---

[*] არითმეტიკული პროგრესია ეწოდება რიცხვთა ისეთ მიმდევრობას, რომლის მომდევნო და წინა წევრების სხვაობა უცვლელი რჩება.

[**] გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება რიცხვთა ისეთ მიმდევრობას, რომლის მომდევნო და წინა წევრების ფარდობა უცვლელი რჩება.

სამართლიანობა k-სთვის და დავამტკიცოთ მისი სამართლიანობა $k+1$-სთვის. მართლაც, ისევ განმარტებიდან გამომდინარე

$$a_{k+1} = a_k + d\ ,$$

მაგრამ ჩვენ დავუშვით (5.2.3)-ის სამართლიანობა k-სთვის, ამიტომ

$$a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd\ .$$

ე. ი. (5.2.3) სამართლიანია $k+1$-სთვის, რაც, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის თანახმად, იმას ნიშნავს, რომ (5.2.3) სამართლიანია ნებისმიერი $k > 2$-სთვის.

გამოვთვალოთ (5.2.1) *არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამი.* (5.2.3)-ის თანახმად, ცხადია,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_1 + \left(a_1 + d\right) + \cdots + \left[a_1 + (n-2)d\right] + \left[a_1 + (n-1)d\right]$$

და

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 = \left[a_1 + (n-1)d\right] + \left[a_1 + (n-2)d\right] + \cdots + \left(a_1 + d\right) + a_1\ .$$

წინა ორი ტოლობის შეკრებით, თუ გავითვალისწინებთ (5.2.4)-ს, მივიღებთ, რომ

$$2S_n = \underbrace{\left(a_1 + a_n\right) + \left(a_1 + a_n\right) + \cdots + \left(a_1 + a_n\right)}_{n-\text{ჯერ}} = \left(a_1 + a_n\right)n\ ,$$

საიდანაც გამომდინარეობს *არითმეტიკული პროგრესიის წევრთა ჯამის* შემდეგი ფორმულა

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n\ .$$

ვთქვათ, ახლა (5.2.1) გეომეტრიული პროგრესიაა. მაშინ, განსაზღვრა 5.2.3-დან გამომდინარე,

$$a_k = a_{k-1} \cdot q\ ,\ \ k = 2,3,\ldots,n\ , \qquad (5.2.5)$$

სადაც q-ს *გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი* ეწოდება.

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 q,\\
&a_3 = a_2 q = a_1 q q = a_1 q^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_k = a_1 q^{k-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&a_n = a_1 q^{n-1}.
\end{aligned} \qquad (5.2.6)$$

გეომეტრიული პროგრესიის ზოგადი წევრის (5.2.6) ფორმულა ადვილად მტკიცდება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

გამოვთვალოთ *გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამი.* (5.2.6)-ის თანახმად, ცხადია,

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \qquad (5.2.7)$$

და

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n\ . \qquad (5.2.8)$$

თუ (5.2.7)-ს გამოვაკლებთ წევრ-წევრად (5.2.8)-ს, მივიღებთ, რომ

$$(1-q)S_n = a_1 - a_1 q^n = a_1\left(1 - q^n\right),$$

საიდანაც, როცა $q \neq 1$,

$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}. \tag{5.2.9}$$

თუ $q = 1$, მაშინ

$$S_n = na_1.$$

განვიხილოთ შემდეგი მიმდევრობა:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{n}, \quad \dots . \tag{5.2.10}$$

ის მოკლედ შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$a_n = \frac{1}{n}, \; n \in N.$$

როგორც ეს $(5.2.10)$-დან ჩანს, a_n-ის მნიშვნელობა n-ის ზრდასთან ერთად რაგინდ მცირე ხდება, მაგალითად, თუ $n = 1000\,000$, მაშინ

$$a_n = \frac{1}{1000\,000}$$

და ნულს უახლოვდება. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ $\frac{1}{n}$-ის ზღვარი, როცა n უსასრულობისკენ მიისწრაფვის, ნულის ტოლია, რასაც შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0. \tag{5.2.11}$$

თუ ჩვენ განვიხილავთ მიმდევრობას შემდეგი ზოგადი წევრით

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \;\; (n \in N), \tag{5.2.12}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ n-ის ზრდასთან ერთად a_n 1-თან რაგინდ ახლო მნიშვნელობებს იღებს, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1. \tag{5.2.13}$$

$(5.2.10)$ მიმდევრობის შემთხვევაში ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული რაგინდ მცირე $\pounds > 0$-სთვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი N ნატურალური რიცხვი დამოკიდებული $\pounds$-ზე [ამას ასე ჩავწეროთ $N(\pounds)$], რომ

$$a_n - 0 = \frac{1}{n} - 0 < \pounds, \text{ როცა } n > N(\pounds) > 0. \tag{5.2.14}$$

მართლაც, N-ად შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, რომელიც დააკმაყოფილებს

$$N > \frac{1}{\pounds} \tag{5.2.15}$$

უტოლობას, საიდანაც

$$\pounds > \frac{1}{N} > \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - 0.$$

ეს უკანასკნელი კი $(5.2.14)$-ს ემთხვევა.

ანალოგიურად, $(5.2.12)$ მიმდევრობის შემთხვევაშიც ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული რაგინდ მცირე $\pounds > 0$-სთვის ყოველთვის მოიძებნება ისეთი $N(\pounds)$ ნატურალური რიცხვი, რომ

$$a_n - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n} < £ .$$

როგორც ეს ადვილი მისახვედრია, N იმავე უტოლობას უნდა აკმაყოფილებდეს, რასაც წინა შემთხვევაში.

განსაზღვრა 5.2.4. ზოგად შემთხვევაში (ცხადია, ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობებისგან შემდგარი მიმდევრობები), ჩვენ ვიტყვით, რომ A რიცხვი არის a_n *მიმდევრობის ზღვარი*, როცა n მიისწრაფვის უსასრულობისკენ, რასაც შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

თუ ნებისმიერი წინასწარ დასახელებული რაგინდ მცირე $£ > 0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი $N(£)$, რომ

$$|a_n - a| < £ \text{ , როცა } n > N(£) .$$

საიდანაც გამომდინარეობს მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა. მართლაც,

$$\| a_n | - | a \| \le |a_n - a| < £$$

აქედან

$$- £ < | a_n | - | a | < £$$

და

$$| a | - £ < | a_n | < | a | + £ \text{ , როცა } n > N(£)$$

(შევნიშნოთ, რომ $| a | - £ > 0$ რადგან $£ > 0$ რაგინდ მცირეა). ამიტომ ნებისმიერი $n \in N$ -სთვის

$$| a_n | < \max\{ | a | + £, | a_1 |, ..., | a_n | \} =: M,$$

$$| a_n | > \min\{ | a | - £, | a_1 |, ..., | a_n | \} =: m.$$

რადგან სასრული რაოდენობის რიცხვებს შორის ყოველთვის შეიძლება შევარჩიოთ მაქსიმალური და მინიმალური ($\max\{\cdots\}$ და $\min\{\cdots\}$, შესაბამისად, აღნიშნავს ფიგურულ ფრჩხილებს შორის მითითებულ რიცხვებს შორის მაქსიმალურს და მინიმალურს).

სამართლიანია მიმდევრობების ზღვრების შემდეგი თვისებები:

თუ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b ,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = ab;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} b_n}{\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{b}{a}.$$

უკანასკნელ შემთხვევაში, ცხადია, a და რომელიღაც n-დან დაწყებული a_n არ უნდა იყოს ნულის ტოლი.

ეს თვისებები გამომდინარეობს, შესაბამისად, შემდეგი უტოლობებიდან:

1. $\left|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)\right| = \left|(a_n - a) \pm (b_n - b)\right| \le |a_n - a| + |b_n - b|$;
2. $\left|a_n b_n - ab\right| = \left|a_n b_n - ab_n + ab_n - ab)\right| \le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$;

3. $$\left|\frac{b_n}{a_n}-\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b_n\ a - a_n\ b}{a_n\ a}\right| = \frac{|b_n\ a - ab + ab - a_n\ b|}{|a_n|\,|a|} \le \frac{|(b_n-b)a|}{|a_n|\,|a|} + \frac{|(a-a_n)\,b|}{|a_n|\,|a|}$$
$$= \frac{|b_n-b|\,|\,a\,|}{|a_n|\,|a|} + \frac{|a-a_n|\,|\,b\,|}{|a_n|\,|a|} \le \frac{1}{m}\,|b_n-b| + \frac{|b|}{m\,|a|}\,|a_n-a|\,.$$

განსაზღვრა 5.2.5. ვიტყვით, რომ

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \left(\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty\right),$$

თუ ნებისმიერი რაგინდ დიდი $A>0$ რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი N, რომ

$$a_n > A \ \ (a_n < -A), \text{ როცა } n > N\,.$$

განსაზღვრა 5.2.6.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{5.2.16}$$

გამოსახულებას *მწკრივი* ეწოდება.

განსაზღვრა 5.2.7. (5.2.16) *მწკრივის კერძო ჯამი* ეწოდება

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

გამოსახულებას.

განსაზღვრა 5.2.8. (5.2.16) *მწკრივის* S *ჯამი* ეწოდება

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

ზღვარს. თუ S სასრულია, მწკრივს კრებადი ეწოდება, ხოლო თუ $S=\pm\infty$, ან საერთოდ არ არსებობს, მწკრივს განშლადი ეწოდება.

ახლა, ვთქვათ, $|q|<1$, მაშინ (5.2.10) მიმდევრობის განხილვის ანალოგიური მსჯელობით ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0\,.$$

მართლაც, ექვივალენტურია შემდეგი მტკიცებები:

$$\left|q^n\right| < |q|^n < \pounds \quad \Leftrightarrow \quad n\lg|q\,| < \lg\pounds \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\lg\pounds}{\lg|q\,|}\,.$$

ახლა, თუ $N(\pounds) := \left[\dfrac{\lg\pounds}{\lg|q|}\right]$, მაშინ $\left|q^n\right| < \pounds$, როცა $n > N(\pounds)$, ე.ი., $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით კი, თუ ჩვენ განვიხილავთ აბსოლუტური სიდიდით უსას-რულოდ კლებად

$$a_1,\ \ a_2 = a_1q,\ \ a_3 = a_1q^2,\ \ldots,\ \ a_n = a_1q^{n-1},\ \ldots \tag{5.2.17}$$

გეომეტრიულ პროგრესიას, (5.2.9) ტოლობაში ზღვარზე $(n\to\infty)$ გადასვლით მივიღებთ უსასრულოდ კლებადი (5.2.17) გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + \cdots$$

ჯამის, რომელიც მწკრივს წარმოადგენს, გამომსახველ შემდეგ ფორმულას:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\cdot 0 = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ზღვრის ის თვისებები, რომ სხვაობის ზღვარი ზღვართა სხვაობის, ხოლო ნამრავლი თანამამრავლთა ზღვრების ნამრავლის ტოლია.

მიმდევრობების ზღვრების გამოთვლის დროს სასარგებლოა შემდეგი ორი ზღვრის ცოდნა:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0\,,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0\,.$$

ნეპერის e რიცხვი განიმარტება, როგორც შემდეგი ზღვარი

$$e:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

მწკრივის კრებადობის დ'ალამბერის*) კრიტერიუმი (ნიშანი) ზღვრული ფორმით 5.2.10. თუ არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=q\,,$$

მაშინ (5.2.16) მწკრივი კრებადია, როცა $q<1$; განშლადია, როცა $q>1$; დამატებით გამოკვლევას საჭიროებს, როცა $q=1$.

მწკრივის კრებადობის კოშის) კრიტერიუმი ზღვრული ფორმით 5.2.11**. თუ არსებობს

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q\,,$$

მაშინ (5.2.16) მწკრივი კრებადია, როცა $q<1$; განშლადია, როცა $q>1$; დამატებით გამოკვლევას საჭიროებს, როცა $q=1$.

მწკრივების შედარების თეორემა 5.2.12. ვთქვათ, გვაქვს ორი დადებით წევრებიანი

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{5.2.18}$$

და

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \tag{5.2.19}$$

მწკრივი. თუ, დაწყებული რომელიმე ნომრიდან (ვთქვათ, როცა $n>N$), სრულდება

$$a_n\le b_n$$

უტოლობა, მაშინ (5.2.19) მწკრივის კრებადობიდან გამომდინარეობს (5.2.18) მწკრივის კრებადობა, ხოლო (5.2.18) მწკრივის განშლადობიდან გამომდინარეობს (5.2.19) მწკრივის განშლადობა.

ნალექების (იხ. §7.1-ის ბოლო ნაწილი) **დაგროვება წყლის რეზერვუარში**. დაგროვების პროცესი შეიძლება წარმოვადგინოთ ცხრილის ფორმით რიცხვითი მიმდევრობის სახით, რომლის წევრებიც აღნიშნავენ რეზერვუარის ტევადობის წლიურ შემცირებას. ვთქვათ, რეზერვუარის აშენების დასრულების მომენტისათვის (ნულოვანი წელი) მასში დაგროვილი ნალექების რაოდენობა a მ^3-ია და ყოველ შემდეგ წელს რეზერვუარში ილექება d მ^3 ნალექი. 5 წლის შემდეგ რეზერვუარში დაგროვილი ნალექები მთლიანობაში

$$a+d+d+d+d+d=a+5d\text{ -ს}$$

ტოლია; ათი წლის შემდეგ $a+10d$ -ს ტოლი იქნება და ა.შ. ამდენად, მივიღეთ არითმეტიკული პროგრესია d სხვაობით:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ldots.$$

ამ პროგრესიას არითმეტიკული პროგრესია იმიტომ ეწოდება, რომ მისი ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან მისგან თანაბრად დაშორებულ წევრთა საშუალო არითმეტიკულია:

---

*) ჟ. ლ. დ'ალამბერი (1717 – 1783) – ფრანგი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი.

**) ო. ლ. კოში (1789 – 1857) – ფრანგი მათემატიკოსი.

$$P_m = \frac{P_{m+k} + P_{m-k}}{2}.$$

თუ x-ით აღვნიშნავთ წელს, ხოლო y-ით დაგროვილ ნალექებს, მაშინ იმავე პროცესს აღწერს

$$y = dx + a \tag{5.2.20}$$

წრფივი ფუნქცია, როცა x იღებს მთელ მნიშვნელობებს. თუ $d = 2$ და $a = 1$, მაშინ ჩვენი მაგალითისათვის მივიღებთ

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

პროგრესიას. იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ (5.2.20) წრფივ ფუნქციაში ჩავსვამთ

$$x = 0, 1, 2, \ldots$$

მნიშვნელობებს.

თუ დავუშვებთ, რომ ნულოვან წელს რეზერვუარის ტევადობა იყო 100 ერთეული და ნალექების დაგროვების პროცესი აღიწერება

$$y = 2x + 1$$

ფუნქციით, მაშინ რეზერვუარის ტევადობის პროცენტული შემცირება პირველ წელს შეადგენს

$$\frac{2}{99}100 \approx 2{,}02\%,$$

მეორე წელს

$$\frac{2}{97}100 \approx 2{,}06\%$$

და ა.შ. (იხ. ცხრილი 5.2.1). ზოგად ფორმულას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{2}{100 - 2\,(x-1) - 1}100\ \%, \quad x = 1,2,\ldots,49.$$

ცხრილი 5.2.1

რეზერვუარის ტევადობა ნალექის დაგროვების მუდმივი წლიური სიჩქარისა და ტევადობის ზრდადი პროცენტული შემცირების პირობებში (ბოლო სტრიქონში მე-2-დან მე-6 სვეტის ჩათვლით პროცენტები მოცემულია მეასედის სიზუსტით)

წელი - x	0	1	2	3	4	5	6
დაგროვილი ნალექები y	1	3	5	7	9	11	13
რეზერვუარის ტევადობა (100 - y)	99	97	95	93	91	89	87
ტევადობის აბსოლუტური შემცირება	1	2	2	2	2	2	2
ტევადობის პროცენტული შემცირება	1	2.02	2.06	2.11	2.15	2.20	2.25

ყოველ მომდევნო წელს ტევადობის პროცენტული შემცირება ისე იზრდება რომ 49-ე წელს

$$\frac{2}{100 - 2 \times 48 - 1}100 = 66{,}67\%$$

შეადგენს, ხოლო 50-ე წლის დამთავრებამდე ის გაივსება (ვინაიდან დარჩენილი 1მ^3-ის შევსებას ერთ წელზე ნაკლები დასჭირდება, რადგან სრულ ერთ წელიწადში ილექება 2მ^3). სხვა სიტყვებით, ამ მონენტისათვის რეზერვუარის საერთო ტევადობა შემცირდება 100%-ით.

ჩავთვალოთ, რომ რეზერვუარის საწყისი ტევადობა 100 ერთეულია, ხოლო ნალექების დაგროვების წლიური პროცენტული შემცირება წინა წელთან შედარებით მუდმივია და შეადგენს წინა წლის ტევადობის 25%-ს (ე.ი. წინა წელთან შედარებით ნარჩენი (დარჩენილი) ტევადობა

იქნება წინა წლის ტევადობის 75%). 5.2.2 ცხრილში მოცემულია ტევადობის შემცირების სურათი პირველი 6 წლის განმავლობაში.

ცხრილი 5.2.2.

რეზერვუარის ტევადობა ყოველწლიური პროცენტული შემცირების მუდმივობისა და აბსოლუტური მნიშვნელობის შემცირების პირობებში
(მე-3-დან მე-6 სვეტის ჩათვლით პროცენტები მოცემულია მეასედების სიზუსტით)

წელი - x	0	1	2	3	4	5	6
დარჩენილი ტევადობა	100	75	56,25	42,19	31,64	23,73	17,80
ყოველწლიური შემცირება	0	25	18,75	14,06	10,55	7,91	5.93

თუ საწყის ტევადობას აღვნიშნავთ a-თი (ცხრილში $a=100$), ხოლო ყოველი წლისათვის ნარჩენი (დარჩენილი) ტევადობის პროცენტულ ცვლილებას q-თი (ცხრილში $q=75$) მივიღებთ

$$100,\ 100\cdot(0,75),\ 100\cdot(0,75)\cdot(0,75),\ 100\cdot(0,75)\cdot(0,75)\cdot(0,75),\ ...,$$

ე,ი., საზოგადოდ,

$$b, bq, bq^2, bq^3, \ldots \tag{5.2.21}$$

გეომეტრიულ პროგრესიას. ამ პროგრესიას გეომეტრიული პროგრესია იმიტომ ეწოდება, რომ მისი ყოველი წევრი დაწყებული მეორედან მისგან თანაბრად დაშორებული წევრების საშუალო გეომეტრიულია:

$$S_m = \sqrt{S_{m+k}S_{m-k}}\ .$$

როგორც ეს ზემოთ ვნახეთ, არითმეტიკულ პროგრესიას (5.2.20) წრფივი ფუნცია შეესაბამებოდა. ანალოგიურად, გეომეტრიულ პროგრესიას შეესაბამება

$$y = bq^x \tag{5.2.22}$$

მაჩვენებლიანი ფუნქცია. მართლაც, თუ (5.2.22)-ში x-ს მივანიჭებთ 0,1,2,3, ... მნიშვნელობებს მივიღებთ (5.2.21) გეომეტრიულ პროგრესიას.

გრუნტის ნაწილაკების კლასიფიკაცია. ნიადაგმცოდნეობასა და პეტროგრაფიაში გრუნტის ნაწილაკების ზომების მიხედვით კლასიფიკაციისათვის გამოიყენება ¨ (ფი) სკალა. ¨ სკალა შეესაბამება ნაწილაკის (მმ-ებში) გამოსახული დიამეტრის მინუს ნიშნით აღებულ ლოგარითმს 2-ის ფუძით. სკალის შესაბამისად ხდება ნიმუშების სიტყვიერი დახასიათება: მსხვილმარცვლოვანი და წვრილმარცვლოვანი ქვიშა, უხეში თიხა და ა.შ. (იხ. ცხრილი 5.2.3). სიტყვიერ აღწერას ერთობ შეზღუდული გამოყენება აქვს, განსაკუთრებით მაშინ, როცა ნაწილაკები ძალზე მცირე ზომისაა, რადგან ამ შემთხვევაში ნაწილაკის ზომის მცირე ცვლილების დროს მთავარ როლს თამაშობს სრულიად სხვა ფიზიკური კანონები. ¨ სკალა (დაწყებული საშუალო თიხით და დამთავრებული კაჭარით) დაფუძნებულია არითმეტიკულ პროგრესიაზე, როცა $a=9$ და $d=-1$. ასე რომ, მისი წევრების მნიშვნელობა მცირდება და ზომების კლასების შესაბამისი მიმდევრობითი ინტერვალები იწყება 9-ით, 8-ით, 7-ით და ა.შ. დიამეტრის (მმ-ებში) შესაბამისი გრადაცია წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას $(b=0,00195$ და $q=2)$, რომლის წევრების მნიშვნელობებიც იზრდება. ამისათვის დამატებით საჭირო იქნება წვრილი კენჭები დავყოთ ოთხ, ხოლო მსხვილი კენჭები — ორ კლასად.

ცხრილი 5.2.3.

ნაწილაკების ზომის ¨ სკალა

აღწერა	დიამეტრი მმ-ში	¨ ერთეული
კაჭარი	256-ზე მეტი	-8-ზე ნაკლები
კენჭი მსხვილი	256 – 64	-8-დან -6-მდე
კენჭი წვრილი	64 – 4	-6-დან -2-მდე
ხრეში	4 – 2	-2-დან -1-მდე
ქვიშა უხეში	2 – 1	-1-დან -0-მდე
ქვიშა მსხვილი	1 – 0.5	0 – 1
ქვიშა საშუალო	0.5 – 0.25	1 – 2
ქვიშა წვრილი	0.25 – 0.125	2 – 3
ქვიშა წმინდა	0.125 – 0.0625	3 – 4
შლამი უხეში	0.0625 – 0.0312	4 – 5
შლამი საშუალო	0.0312 – 0.0156	5 – 6
შლამი წმინდა	0.0156 – 0.0078	6 – 7
შლამი ძალიან წმინდა	0.0078 – 0.0039	7 – 8
თიხა უხეში	0.0039 – 0.00195	8 – 9
თიხა საშუალო	0.00195 – 0.00098	9 – 10

¨ -სა და დიამეტრს შორის მიმართება შეიძლება გამოვსახოთ

$$¨ = dx + a$$

ფუნქციით, სადაც x $(x = 0,1,2,3,\ldots)$ გამოხატავს ნაწილაკის დიამეტრის ცვლილებას ერთი კლასიდან მეორეში გადასვლისას. ასე, რომ ჩვენ შემთხვევაში

$$¨ = 9 - x, \qquad (5.2.23)$$

ნაწილაკის D დიამეტრი

$$D = bq^x = 0{,}00195 \cdot 2^x .$$

აქედან გალოგარითმებით (10-ის ფუძით) მივიღებთ

$$\lg D = \lg 0{,}00195 + x \lg 2 .$$

საიდანაც, რადგან მეასიათასედის სიზუსტით (მიახლოებითია პირველი ტოლობა)

$$\log_2 0{,}00195 = \log_2 0{,}0019531... = \log_2 \frac{1}{512} = \log_2 2^{-9} = -9 ,$$

$$x = \frac{\lg D}{\lg 2} - \frac{\lg 0{,}00195}{\lg 2} = \frac{\lg D}{\lg 2} - \frac{\dfrac{\log_2 0{,}00195}{\log_2 10}}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 10}} = \frac{\lg D}{\lg 2} + 9.$$

თუ ამ უკანასკნელს ჩავსვამთ (5.2.23)-ში და გავითვალისწინებთ იმას, რომ

$$\log_2 D = \frac{\lg D}{\lg 2},$$

გვექნება

$$¨ = -\frac{\lg D}{\lg 2} = -\log_2 D. \qquad (5.2.24)$$

შევნიშნოთ, რომ (5.2.24) ფორმულა ჩვენ მივიღეთ მეასიათასედის სიზუსტით.