

ლექცია 7

5. ფუნქციები

5.1. ფუნქციები და ბრაშიკები

განსაზღვრა 5.1.1. x ცვლადის *ფუნქცია* არის f წესი, რომელიც x -ის ყოველ მნიშვნელობას უთანადებს ერთადერთ $f(x)$ რიცხვს, რომელსაც y -ით აღნიშნავენ. ყოველივე ამას ჩავეწეროთ შემდეგნაირად:

$$y = f(x). \tag{5.1.1}$$

x -ის ცვლილების X სიმრავლეს *განსაზღვრის არე* ეწოდება, ხოლო y -ის ($f(x)$ -ის) მნიშვნელობათა Y სიმრავლეს – *ფუნქციის მნიშვნელობათა არე*. სხვა სიტყვებით, f ფუნქცია არის X სიმრავლის Y სიმრავლეზე *ასახვა*, რაც შემდეგნაირად აღინიშნება:

$$f: X \rightarrow Y \quad (x \mapsto f(x)). \tag{5.1.2}$$

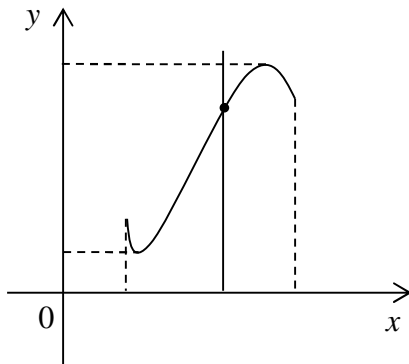
(5.1.1) და (5.1.2) აღნიშვნები ერთსა და იმავე f ფუნქციას (ასახვას) გამოხატავს. x -ს დამოუკიდებელი, ხოლო y -ს დამოკიდებული ცვლადი ეწოდება.

განსაზღვრა 5.1.2. *ფუნქციის გრაფიკი* ეწოდება $(x, f(x))$ დალაგებული წყვილების შესაბამის წერტილთა სიმრავლეს Oxy კოორდინატთა სისტემაში, როცა x გაირბენს თავისი განსაზღვრის მთელ X არეს (სიმრავლეს).

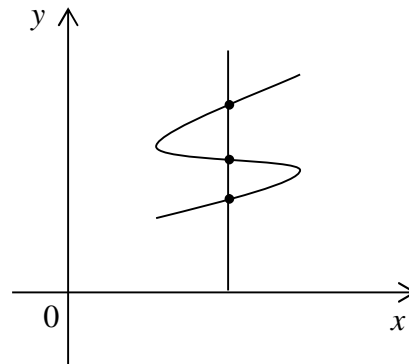
ფუნქციის გრაფიკის მაგალითებია ჩვენ მიერ ადრე განხილული წრფე, წრეწირი და პარაბოლა, რომელთა შესაბამის ფუნქციებს მივიღებთ მათი განტოლებების y -ის მიმართ ამოხსნით:

$$y = kx + b, \quad y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad y = 4px^2, \tag{5.1.3}$$

სადაც k , b და p მუდმივებია (“+” ფესვის წინ შეესაბამება ზედა ნახევარწრეწირს, ხოლო “-“ – ქვედა ნახევარწრეწირს). ფუნქციის განმარტებიდან გამომდინარე, წირი ნახ. 5.1.1-ზე გამოხატავს



ნახ.5.1.1



ნახ.5.1.2

ფუნქციას (რადგან ვერტიკალური წრფე წირს მხოლოდ ერთ წერტილში გადაკვეთს), ხოლო ნახ. 5.1.2-ზე გამოსახული წირი არ გამოხატავს ფუნქციას (რადგან ვერტიკალური წრფე წირს ერთზე მეტ წერტილში გადაკვეთს და ყოველი x -ის შესაბამისი მნიშვნელობა ცალსახად არ იქნება განსაზღვრული; სხვა სიტყვებით, ყოველ x -ს შეესაბამება რამდენიმე, სახელობრ 3, მნიშ-

ვნელობა, მაშინ, როდესაც ფუნქციის ცნება მოითხოვს, რომ x -ს y -ის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა შეესაბამებოდეს.*)

(5.1.3) ფუნქციები წარმოადგენს ფუნქციის გამჭვირვალე მაგალითებს, რამდენადაც ისინი ერთი ფორმულით არიან წარმოდგენილი. თავდაპირველად მათემატიკოსები მხოლოდ ასეთ ფუნქციებს განიხილავდნენ. ფუნქციის მაგალითია აგრეთვე

$$y = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია,} \\ 0, & \text{როცა } x \text{ ირრაციონალურია,} \end{cases}$$

ტოლობებით მოცემული დირიხლეს**)) ფუნქცია, რომლის გრაფიკული წარმოდგენა შეუძლებელია.

განსაზღვრა 5.1.3. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და განაყოფი შესაბამისად ეწოდება

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x) \text{ და } \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0,$$

ფუნქციებს.

განსაზღვრა 5.1.5. $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციების რთული ფუნქცია (ფუნქციების კომპოზიცია) ეწოდება

$$f(g(x)) \equiv (f \circ g)(x)$$

ფუნქციას, რომელიც მიიღება $f(x)$ -ის გამოსახულებაში ყველგან x -ის ნაცვლად $g(x)$ -ის ჩასმით.

აღქმისთვის შეიძლება უფრო მარტივი იყოს რთული ფუნქციის შემდეგი წარმოდგენა: თუ გვაქვს

$$z = f(y) \text{ და } y = g(x)$$

ფუნქციები, მაშინ

$$z = f(g(x)) = h(x)$$

წარმოადგენს რთულ ფუნქციას. ცხადია, რთული ფუნქციის განმარტება გულისხმობს, რომ პირველი ფუნქციის განსაზღვრის არე ემთხვევა მეორე ფუნქციის მნიშვნელობათა არეს (სიმრავლეს).

განსაზღვრა 5.1.5. ფუნქციას ეწოდება:

- ზრდადი, თუ $f(x_1) < f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$;
- არაკლებადი, თუ $f(x_1) \leq f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$;
- კლებადი, თუ $f(x_1) > f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$;
- არაზრდადი, თუ $f(x_1) \geq f(x_2)$, როცა $x_1 < x_2$.

ფუნქციას მკაცრად მონოტონური ეწოდება, თუ ის ზრდადი ან კლებადია, და – მონოტონური, როცა ის არაკლებადი ან არაზრდადია.

განსაზღვრა 5.1.6. ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ

$$f(-x) = f(x),$$

*) ვთქვათ, $y = f(x)$ ფუნქცია ისეთია, რომ x -ის განსხვავებულ მნიშვნელობებს y -ის განსხვავებული მნიშვნელობები შეესაბამება. თუ y -ს შევუსაბამებთ ისეთ x -ს, რომლისთვისაც სრულდება $y = f(x)$, მაშინ მივიღებთ წესს, რომელიც მოგვცემს ფუნქციას, რომელსაც f ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია ეწოდება. ის აღინიშნება f^{-1} სიმბოლოთი და $x = f^{-1}(y)$.

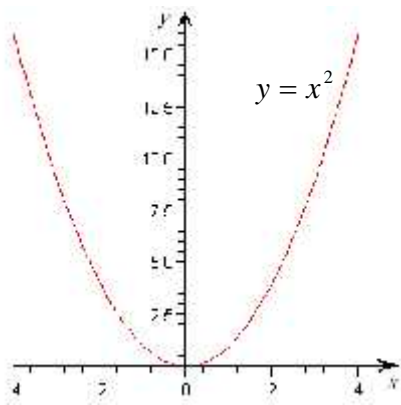
**) პ. გ. ლ. დირიხლე (1805 – 1859) – გერმანელი მათემატიკოსი.

ხოლო კენტი, თუ

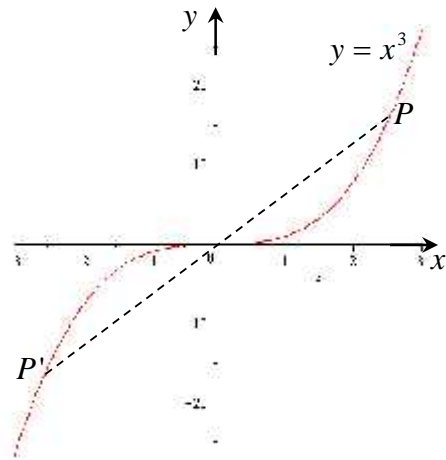
$$f(-x) = -f(x)$$

ყველა x -ისთვის, სადაც ფუნქცია განსაზღვრულია. ამასთან ორივე შემთხვევაში იგულისხმება, რომ $f(x)$ -სთან ერთად $f(-x)$ -იც განსაზღვრულია. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $f(x)$ განსაზღვრული უნდა იყოს სიმეტრიულ $]-a, a[$ ინტერვალზე (ღიაზე ან ჩაკეტილზე).

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი ორდინატა y ღერძის სიმეტრიულია (იხ. ნახ. 5.1.3). კენტი ფუნქციის გრაფიკი კოორდინატა O სათავის სიმეტრიულია (იხ. ნახ. 5.1.4). ეს უკანასკნელი იმას ნიშნავს, რომ თუ P წერტილი ეკუთვნის გრაფიკს, მაშინ გრაფიკს ეკუთვნის P' წერტილიც, რომელიც P და O წერტილების შემაერთებელ წრფეზე მდებარეობს, ამასთან O წერტილი PP' სეგმენტის (მონაკვეთის) ცენტრია, ე.ი. თანაბრადაა დაშორებული სეგმენტის P და P' ბოლო წერტილებიდან.

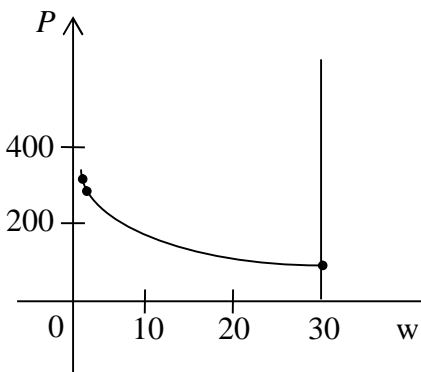


ნახ. 5.1.3



ნახ. 5.1.4

განსაზღვრა 5.1.7. $y = x^r$, $r \in R^1$, სახის ფუნქციას ხარისხოვანი ფუნქცია ეწოდება, სადაც x ფუძეა, ხოლო r – ხარისხის მაჩვენებელი. ამ ფუნქციას ბიოლოგიაში მოდელირებისას მრავალი გამოყენება აქვს. მაგალითად, ალტმანისა და დიტმერის*) მიერ დადგენილი შემდეგი მიახლოებითი ფორმულა



ნახ.5.1.5

$$P = 200w^{-\frac{1}{4}},$$

რომელიც ძუძუმწოვრების P პულსს (გულის შეკუმშვათა რაოდენობას წუთში) წარმოადგენს როგორც w წონის (კგ-ში) ფუნქციას. როგორც ვხედავთ, მცირეწონიანი ცხოველების პულსი უფრო მაღალია, ვიდრე მძიმეწონიანი ცხოველების (იხ. ნახ. 5.1.5).

განსაზღვრა 5.1.8. $y = a^x$, $a = \text{const} > 0$, სახის ფუნქციას მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება, სადაც a ფუ-

*) P. L. Altmann, D. M. Dittmer, eds. (1964) Biology Data Book. Federation of American Societies for Experimental Biology, pp. 234-235.

ქე, ხოლო x – ხარისხის მაჩვენებელი. ის გვხვდება, მაგალითად, მალთუსის^{*)} დისკრეტული მოდელის ანალიზისას. ვთქვათ, n -ით აღნიშნულია ათწლეულის ნომერი რაიმე დროიდან (მაგალითად, 1790 წლიდან), ხოლო P_n -ით – მოსახლეობის რაოდენობა n -ურ ათწლეულში. მალთუსმა მოგვცა მოსახლეობის რაოდენობის განსაზღვრის შემდეგი მოდელი: მოცემულ ათწლეულში მოსახლეობის რაოდენობა მიიღება წინა ათწლეულში მოსახლეობის რაოდენობაზე ამ უკანასკნელისა და r საშუალო ზრდის კოეფიციენტის (ტემპის) ნამრავლის დამატებით. მათემატიკურად ეს მოდელი ასე ჩაიწერება:

$$P_{n+1} = P_n + rP_n = (1+r)P_n. \tag{5.1.4}$$

ზრდის r ტემპი აშშ-ში 1790 წლიდან 1860 წლამდე 0,349-ის ტოლი იყო. (5.1.4)-დან ცხადია,

$$\begin{aligned} P_1 &= (1+r)P_0, \\ P_2 &= (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0, \\ &\dots\dots\dots \\ P_n &= (1+r)P_{n-1} = (1+r)^2 P_{n-2} = \dots = (1+r)^n P_0. \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

ამრიგად,

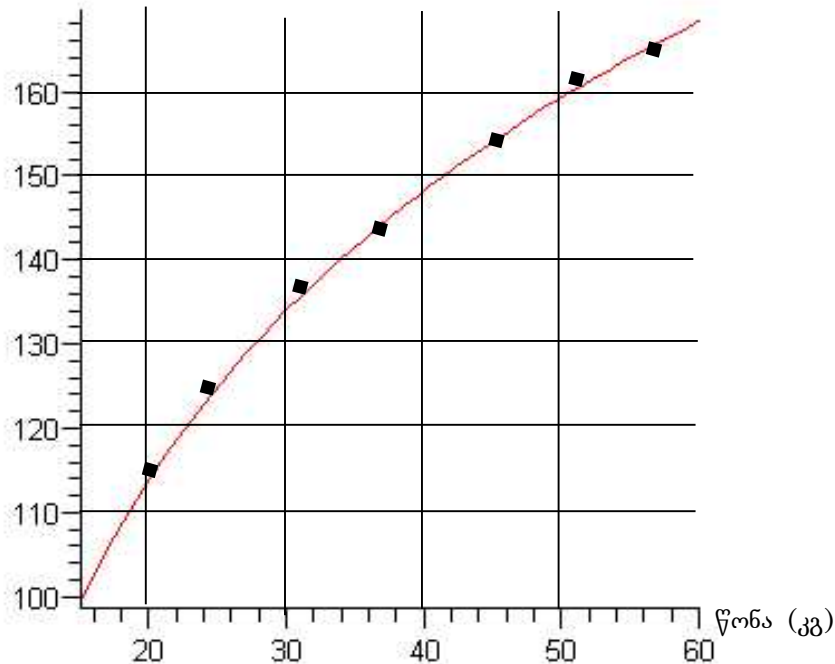
$$P_n = (1+r)^n P_0, \tag{5.1.6}$$

რაც იმაზე მიუთითებს, რომ მოსახლეობა იზრდება როგორც მაჩვენებლიანი ფუნქცია.

(5.1.6) ფორმულა შეიძლება უფრო მკაცრად დამტკიცდეს მათემატიკური ინდუქციის პრინციპის გამოყენებით, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს:

A მტკიცება, დამოკიდებული n ნატურალურ პარამეტრზე (ე. ი. მას $A(n)$ სახე აქვს),

სიმაღლე (სმ)



ნახ. 5.1.6

^{*)} თ. რ. მალთუსი (1768 – 1834) – იბგლისელი ეკონომისტი, ძღვდელი.

დამტკიცებულად ითვლება, თუ სამართლიანია $A(1)$, და $A(n)$ -ის სამართლიანობიდან გამომდინარეობს $A(n+1)$ -ის სამართლიანობა.

მართლაც, ის, რომ (5.1.6) სამართლიანია $n=1$ -სთვის, ცხადია (5.1.5)-დან. ახლა დავუშვათ მისი სამართლიანობა n -სთვის, ე. ი. ვუშვებთ (5.1.6)-ის სამართლიანობას და ვაჩვენოთ, რომ ის სამართლიანი იქნება $(n+1)$ -ისთვისაც. (5.1.4) და (5.1.6)-დან ნათელია, რომ

$$P_{n+1} = (1+r)P_n = (1+r)(1+r)^n P_0 = (1+r)^{n+1} P_0.$$

განსაზღვრა 5.1.9. მოცემული A დადებითი რიცხვის ლოგარითმი $a > 0$ ($a \neq 1$) დადებითი ფუძით (აღინიშნება შემდეგნაირად: $\log_a A$) ეწოდება ისეთ b რიცხვს, რომელშიც ახარისხებულ a ფუძე გვაძლევს მოცემულ A რიცხვს ($A = a^b$, $\log_a A = b$, $\lg A := \log_{10} A$, $\ln A := \log_e A$, სადაც $e \approx 2,7$ ნეპერის რიცხვია).

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$1. a^{\log_a A} = A; \quad 2. \log_a 1 = 0, \quad 3. \log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B,$$

$$4. \log_a \left(\frac{A}{B} \right) = \log_a A - \log_a B, \quad 5. \log_a A^d = d \log_a A,$$

$$6. \log_a \sqrt[m]{A} = \frac{1}{m} \log_a A, \quad 7. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

სადაც a, b, c, A, B დადებითი რიცხვებია, d ნამდვილი რიცხვია, ხოლო m – ნატურალური რიცხვი, ამასთან $a \neq 1$, $c \neq 1$. მართლაც, პირველი გამომდინარეობს განმარტებიდან; მეორე ცხადია, რადგან ყოველი ნულისგან განსხვავებული რიცხვი ნულ ხარისხში ერთის ტოლია; მესამე გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან: განმარტების თანახმად,

$$A = a^{\log_a A}, \quad B = a^{\log_a B},$$

რომელთა გამრავლებით მივიღებთ

$$AB = a^{\log_a A} a^{\log_a B} = a^{\log_a A + \log_a B},$$

საიდანაც a ფუძით გალოგარითმებით გვექნება

$$\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B;$$

მეოთხე დამტკიცდება ანალოგიურად; მეხუთე გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან:

$$A = a^{\log_a A},$$

ტოლობის ორივე მხარე ავიყვანოთ d ხარისხში, მივიღებთ

$$A^d = a^{d \log_a A},$$

საიდანაც a ფუძით გალოგარითმებით გვექნება

$$\log_a A^d = d \log_a A;$$

მეექვსე მეხუთის კერძო შემთხვევაა $\left(d = \frac{1}{m} \right)$;

მეშვიდე გამომდინარეობს შემდეგი მსჯელობიდან: გავალოგარითმოთ c ფუძით

$$b = a^{\log_a b},$$

მივიღებთ

$$\log_c b = \log_a b \log_c a,$$

საიდანაც

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$\log_a x$ სახის ფუნქციას (ის განსაზღვრულია, როცა $x > 0$) *ლოგარითმული ფუნქცია* ეწოდება.

ბავშვებში H სიმაღლესა (სმ-ში) და w წონას (კგ-ში) შორის კავშირი მოიცემა (იხ. ნახ. 5.1.6)

$$H(w) = 49,5 \ln w - 34,14$$

ფორმულით. ეს ფორმულა მიღებულია აშშ-ში 5-დან 13 წლამდე გოგონებზე დაკვირვების შედეგად.