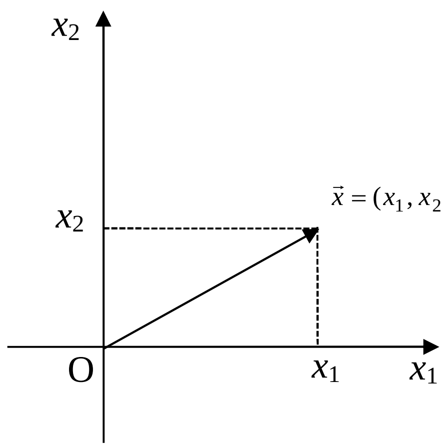
ლექცია 5

4. წრფივი ალგებრული განტოლებები და ვექტორული ალგებრა

4.1. ვექტორები, მატრიცები, დეტერმინანტები. პირველი და მეორე რიგის კონტაქტები ეპიდემიოლოგიაში. რაციონთა მატრიცები

განსაზღვრა 4.1.1. n ნამდვილი რიცხვისგან შედგენილ სიმრავლეს, რომელიც გარკვეული რიგით ჩაწერილია სტრიქონში ან სვეტში, შესაბამისად, ეწოდება *ვექტორ-სტრიქონი* ან *ვექტორ-სვეტი*:

$$\vec{x} \equiv \mathbf{x} := \left(x_1, \cdots, x_n\right), \quad \vec{y} \equiv \mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$



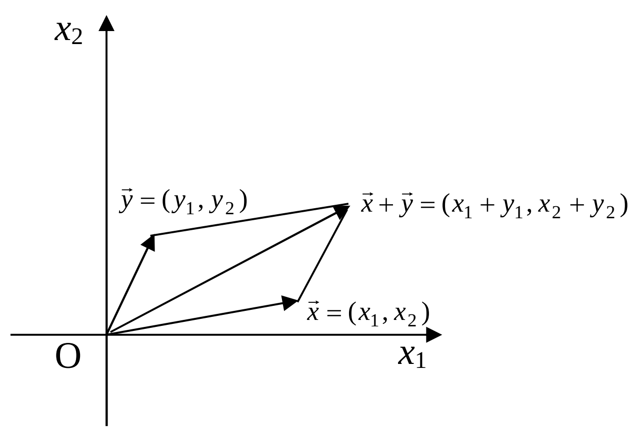
ნახ. 4.1.1

x_i-ს და y_i-ს ეწოდებათ x და y *ვექტორების* i*-ური კომპონენტები*.

ნულებისგან შემდგარ ვექტორს *ნულოვანი ვექტორი* ეწოდება:

$$(0, \cdots, 0), \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ყოველი ორგანზომილებიანი (ორკომპონენტა) $\vec{x} := \left(x_1, x_2\right)$ ვექტორი საკოორდინატო სიბრტყეზე შეიძლება გამოისახოს მოგეზული მონაკვეთით (ისრით) (იხ. ნახ. 4.1.1), რომლის სათავე ემთხვევა კოორდინატთა სისტემის სათავეს, ხოლო ბოლო – $\left(x_1, x_2\right)$ წერტილს.



ნახ. 4.1.2

განსაზღვრა 4.1.2. $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ და $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ *ვექტორების ჯამი* განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით (იხ. ნახ. 4.1.2):

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} := (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n).$$

განსაზღვრა 4.1.3. c სკალარისა და $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ვექტორის ნამრავლი განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$c\vec{x} := (cx_1, \cdots, cx_n).$$

განსაზღვრა 4.1.4. ორი $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ და $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ *ვექტორის სკალარული (შიგა) ნამრავლი* განიმარტება შემდეგი ტოლობით:

$$(\vec{x}, \vec{y}) := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

პითაგორას თეორემის თანახმად (იხ. ნახ. 4.1.1) $\vec{x}$ *ვექტორის სიგრძის* კვადრატი

$$|\vec{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 = (\vec{x}, \vec{x}),$$

ხოლო *სიგრძე* (შეგვეძლო პირდაპირ მიგვეღო კოორდინატთა სისტემის სათავესა და (x_1, x_2) წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით)

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} .$$

ანალოგიური ფორმულაა სამართლიანი n-განზომილებიანი $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ ვექტორისთვის:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} := \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} .$$

განსაზღვრა 4.1.5. *მატრიცი* ეწოდება გარკვეული რიგით დალაგებულ $m \cdot n$ რაოდენობის რიცხვებისგან შედგენილ მართკუთხა ცხრილს, რომელიც m სტრიქონისა და n სვეტისგან შედგება:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ამ რიცხვებს *მატრიცის ელემენტები* ეწოდებათ. a_{ij}-თი აღნიშნულია i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთაზე მდებარე ელემენტი.

მოხერხებულობისთვის A მატრიცი მოკლედ ასე ჩაიწერება

$$A = (a_{ij}) = \|a_{ij}\|.$$

ცხადია, ვექტორ-სტრიქონი (ვექტორ-სვეტი) და $1 \times n$ $(n \times 1)$ მატრიცი ერთმანეთს ემთხვევა.

განსაზღვრა 4.1.6. მატრიცს, რომელიც მიიღება მოცემული A მატრიცის სტრიქონების შეცვლით იმავე ნომრის სვეტებით ან პირიქით, ეწოდება *ტრანსპონირებული* და აღინიშნება A^T-თი:

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2i} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

ორ ერთნაირი განზომილების $A = \|a_{ij}\|$ და $B = \|b_{ij}\|$ მატრიცს ტოლი ეწოდება, თუ $a_{ij} = b_{ij}$.

n სტრიქონისა და n სვეტისგან შემდგარ კვადრატულ მატრიცს n*-ური რიგის მატრიცი* ეწოდება. მის a_{ii}, $i = 1,2,\ldots,n$, ელემენტებს *დიაგონალური ელემენტები* ეწოდება. თუ მატრიცის დიაგონალური ელემენტები 1-ის, ხოლო დანარჩენი ელემენტები 0-ის ტოლია, მაშინ მას *იგივური* (*ერთეულოვანი*)I *მატრიცი* ეწოდება.

განსაზღვრა 4.1.7. ერთნაირგანზომილებიანი ორი მართკუთხა $A = \|a_{ij}\|$ და $B = \|b_{ij}\|$ მატრიცის ჯამი და c სკალარისა და $A = \|a_{ij}\|$ მატრიცის ნამრავლი განისაზღვრება

$$A + B := \|a_{ij} + b_{ij}\| \text{ და } cA := \|ca_{ij}\|$$

ტოლობებით.

განსაზღვრა 4.1.8. $m \times n$ განზომილების $A = \|a_{ij}\|$ მატრიცისა და $n \times p$ განზომილების $B = \|b_{ij}\|$ მატრიცის *ნამრავლი* განისაზღვრება

$$C = AB = \|c_{ij}\|$$

ტოლობით, სადაც

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

სხვა სიტყვებით, c_{ij} წარმოადგენს A მატრიცის i-ური სტრიქონისა და B მატრიცის j-ური სვე-ტის სკალარულ ნამრავლს. ცხადია, $AB^T = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right\|$. მართლაც, თუ B^T მატრიცის ზოგად ელემენტს აღვნიშნავთ d_{kj}-თი, მაშინ განსაზღვრა 4.1.8-ის თანახმად,

$$AB^T = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_{kj} \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{jk} \right\|,$$

რადგან $d_{kj} = b_{jk}$.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $(AB)^T = B^T A^T$.

ცხადია, ორი მატრიცის გამრავლება შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა სამრავლის სვეტებისა და მამრავლის სტრიქონების რაოდენობა ერთმანეთს ემთხვევა.

აღსანიშნავია, რომ კვადრატული მატრიცებისთვის სამართლიანია ნამრავლის ასოციაციურობა $(AB)C = A(BC)$, მაგრამ კომუტაციურობა, საზოგადოდ, ირღვევა $AB \neq BA$. მართლაც, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\2&2\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}.$$

მაგრამ

$$\begin{pmatrix}3&3\\2&2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$$

და, ამდენად,

$$AB\neq BA.$$

განსაზღვრა 4.1.9.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

მატრიცის *დეტერმინანტი* შემდეგნაირად აღინიშნება

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$$

და ეწოდება

$$\det A:=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

რიცხვს.

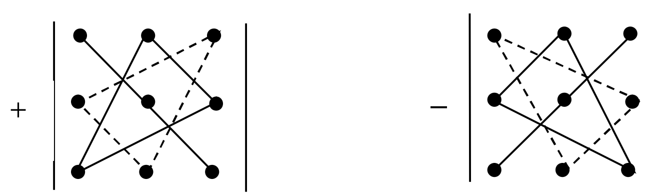
ანალოგიურად, მესამე რიგის

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

დეტერმინანტი ეწოდება

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

რიცხვს, რომელიც გამოითვლება *სამკუთხედის* (იხ. ნახ. 4.1.3) *ან სარუსის* (Sarrus) *წესით* (იხ. ნახ. 4.1.4).



ნახ. 4.1.3.

$$\begin{array}{c|ccc|}+&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\+&a_{21}&a_{22}&a_{23}\\\pm&a_{31}&a_{32}&a_{33}\\\hline-&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\-&a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}+&+&+\\\end{array}\left|\begin{array}{ccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{array}\right|\begin{array}{cc}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{array}\begin{array}{ccc}-&-&-\end{array}$$

ნახ. 4.1.4

განსაზღვრა 4.1.10. n *ელემენტიანი გადანაცვლებები* ეწოდება ერთსა და იმავე n ელემენტისაგან შედგენილ დალაგებულ სიმრავლეებს, ე.ი. ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტთა დალაგებით.

თეორემა 4.1.11. n ელემენტიან გადანაცვლებათა რაოდენობა $n!$ *)-ის ტოლია.

დამტკიცება. თეორემას ვამტკიცებთ მათემატიკური ინდუქციით ყველა $n \geq 2$ რიცხვისათვის. როცა $n = 2$ გვექნება შემდეგი 2 გადანაცვლება: 1, 2 და 2, 1. ამდენად, რადგან $2! = 1 \cdot 2$, თეორემა დამტკიცებულია, როცა $n = 2$. დავუშვათ, რომ თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური $n \geq 2$ რიცხვისათვის და ამ დაშვების საფუძველზე დავამტკიცოთ თეორემა $(n+1)$-სათვის. ამოვწეროთ $n+1$ ელემენტიანი ყველა გადანაცვლება, რომლებშიც პირველი ელემენტია რიცხვი 1. ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა ინდუქციის დაშვების ძალით იქნება $n!$, რადგანაც ადგილს იცვლიან მხოლოდ $2,3,...,n,n+1$ რიცხვები, რომელთა რაოდენობა n-ია. ახლა ამოვწეროთ ყველა $n+1$ ელემენტიანი გადანაცვლება, რომლებშიაც პირველი ელემენტია რიცხვი 2. ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა კვლავ იქნება $n!$, რადგანაც ადგილს იცვლიან მხოლოდ 1, 3, . . . , $n+1$ რიცხვები, მათი რაოდენობა კი n-ია. განვაგრძოთ ეს პროცესი. ბოლოს, ამოვწეროთ ყველა $n+1$ ელემენტიანი გადანაცვლება, რომლებშიც პირველი ელემენტი არის რიცხვი $n+1$. ასეთ გადანაცვლებათა რაოდენობა აგრეთვე იქნება $n!$, რადგან ადგილს იცვლიან მხოლოდ 1, 2, . . . , n რიცხვები. ამრიგად, სულ მივიღებთ $(n+1)n! = (n+1)!$ გადანაცვლებას.

■

განსაზღვრა 4.1.12. n-ური რიგის A მატრიცის n-ური რიგის *დეტერმინანტი* ეწოდება $n!$ წევრის ჯამს, სადაც: ყოველი წევრი A მატრიცის n ელემენტის ნამრავლია, ამასთან, მატრიცის ყოველი სტრიქონიდან და ყოველი სვეტიდან დეტერმინანტის წევრში თანამამრავლად აღებულია ერთი და მხოლოდ ერთი ელემენტი; დეტერმინანტის წევრი აიღება „+“ ან „-“ ნიშნით იმისდა მიხედვით, თანამამრავლების სვეტების (სტრიქონების) ნომრებისგან შედგენილი მიმდევრობა ნატურალურ რიცხვთა $1,2,\ldots,n$ მიმდევრობისგან წევრთა ლუწი რაოდენობის რიცხვჯერ გადასმით (ტრანსპოზიციით) მიიღება თუ კენტით, როცა თანამამრავლები დალაგებულია სტრიქონების (სვეტების) ნომრების ზრდის მიხედვით 1-დან n-მდე.

შემოვიღოთ ლევი-ჩივიტას**)

$$\text{¢}^{i_1 \ldots i_n}_{1 \ldots n} = \in^{i_1 \ldots i_n} = \in_{i_1 \ldots i_n} = \text{¢}^{1 \ldots n}_{i_1 \ldots i_n}$$

სიმბოლოები. ისინი +1-ის (შესაბამისად -1-ის) ტოლია, თუ ინდექსთა $i_1, \ldots, i_n$ მიმდევრობა მიიღება ნატურალურ რიცხვთა $1,2,\ldots,n$ მიმდევრობის წევრთა ლუწი (შესაბამისად კენტი) რაოდენობის რიცხვჯერ გადასმით; სხვა შემთხვევაში (ე. ი. როცა ინდექსებიდან ორი ინდექსი მაინცაა ერთმანეთის ტოლი) ისინი ნულის ტოლია.

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ ეს სიმბოლოები ნულისგან განსხვავებულია, მაშინ მისი ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმისას ისინი ნიშანს იცვლიან. მაგალითად,

$$\in^{i_1 \ldots i_l \ldots i_k \ldots i_n} = -\in^{i_1 \ldots i_k \ldots i_l \ldots i_n} \tag{4.1.1}$$

ამ ტოლობაში გადასმულია i_k და i_l ინდექსები, ხოლო სხვა ინდექსები თავის ადგილზეა დატოვებული.

დეტერმინანტის ზემოთ მოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარე, ცხადია,

---

*) $n!$ (n ფაქტორიალი) ნიშნავს 1-დან n-ამდე ნატურალური რიცხვების ნამრავლს, ე. ი.

$$n! := 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

ამასთან ვთვლით, რომ $0! = 1$.

**) ლევი-ჩივიტა ტულიო (1873 – 1941) – იტალიელი მათემატიკოსი და მექანიკოსი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \in^{i_1 \dots i_n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \in^{i_1 \dots i_n} a_{1 i_1} \dots a_{n i_n} . \qquad (4.1.2)$$

განსაზღვრა 4.1.13. $|A|$ დეტერმინანტის რომელიმე ელემენტის *მინორი* ეწოდება დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება იმ სტრიქონისა და სვეტის ამოშლით, რომლებსაც მოცემული ელემენტი ეკუთვნის.

$|A|$ დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის მინორს აღნიშნავენ M_{ik} სიმბოლოთი.

განსაზღვრა 4.1.14. $|A|$ დეტერმინანტის a_{ik} ელემენტის *ალგებრული დამატება* ეწოდება მის მინორს, გამრავლებულს $(-1)^{i+k}$-ზე. მას აღნიშნავენ A_{ik} სიმბოლოთი, ე. ი.

$$A_{ik} := (-1)^{i+k} M_{ik} .$$

ნებისმიერი რიგის დეტერმინანტს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

დეტერმინანტი:

1) არ შეიცვლება, თუ მის სტრიქონებს შესაბამისი სვეტებით შევცვლით, ე. ი. ტრანსპონირებული დეტერმინანტები ტოლია;
2) იცვლის ნიშანს, თუ ადგილს შევუცვლით ორ სტრიქონს ან ორ სვეტს;
3) გამრავლდება c-ზე, თუ მის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გავამრავლებთ c-ზე, ე. ი. რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ;
4) ნულის ტოლია, თუ რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტები პროპორციულია, კერძოდ ტოლია;
5) თუ მისი რომელიმე სტრიქონი (სვეტი) შედგება ორი შესაკრების ჯამისგან, ორი დეტერმინანტის ჯამის ტოლია, რომელთაგან ერთ-ერთში ჯამის ნაცვლად პირველი შესაკრებია, ხოლო მეორეში – მეორე;
6) არ შეიცვლება, თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს მივუმატებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე;
7) რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მათ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამის ტოლია; კერძოდ, ნულის ტოლია, თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ნულია.

მე-7 თვისებას ეწოდება *დეტერმინანტის დაშლა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მიხედვით.*

ეს უკანასკნელი მე-3 რიგის დეტერმინანტისთვის სტრიქონის მიმართ ასე ჩაიწერება

$$|A| := \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij} , \quad i = 1,2,3 ,$$

ან გაშლილი სახით:

$$\begin{cases} |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}; \\ |A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}; \\ |A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{cases}$$

დეტერმინანტის დაშლა ხელსაყრელია იმ სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მიმართ, რომელიც მეტ ნულს შეიცავს.

შენიშვნა 4.1.15. რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია.

ყველა ეს თვისება მტკიცდება (4.1.2) ფორმულის გამოყენებით.

პირველი თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს (4.1.2)-დან.

მეორე თვისების დამტკიცება. დეტერმინანტში ორი სტრიქონის (სვეტის) ადგილების შეცვლა (4.1.2) ტოლობაში ლევი-ჩივიტას სიმბოლოებში გამოიწვევს ორი ინდექსის შესაბამისად გადასმას, რაც (4.1.1)-ის თანახმად, დეტერმინანტის ნიშნის შეცვლას ნიშნავს.

მესამე თვისების დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ პირველი სტრიქონის (სვეტის) a_{1i_1} $(a_{i_1 1})$, $i_1 = 1,2,...,n,$ ელემენტებს ვამრავლებთ c-ზე. მაშინ a_{1i_1}-ის ($a_{i_1 1}$-ის), $i_1 = 1,2,...,n,$ ნაცვლად პირველ სტრიქონში (სვეტში) ca_{1i_1} $(ca_{i_1 1})$, $i_1 = 1,2,...,n,$ ელემენტები გვექნება. ამიტომ, (4.1.2)-ის ძალით, მიღებული დეტერმინანტი

$$|B| = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \in^{i_1 i_2 \cdots i_n} c\, a_{1i_1} a_{1i_2} \cdots a_{1i_n} = c\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \in^{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{1i_1} a_{1i_2} \cdots a_{1i_n} = c|A|,$$

რადგან c აჯამვის $i_1, i_2, ..., i_n$ ინდექსებზე არ არის დამოკიდებული. ეს თვისება, ანალოგიურად, დამტკიცდება სვეტის c-ზე გამრავლების შემთხვევაშიც.

მეოთხე თვისების დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ტოლობის შემთხვევა. მოვახდინოთ ამ ორი სტრიქონის (სვეტის) ტრანსპოზიცია. მაშინ, ერთი მხრივ, მეორე თვისების თანახმად, დეტერმინანტი ნიშანს შეიცვლის, ხოლო მეორე მხრივ, რადგან სტრიქონები (სვეტები) ერთი და იგივეა, მათი ტრანსპოზიციით დეტერმინანტი არ შეიცვლება. ე.ი.,

$$|A| = -|A|,$$

აქედან

$$2|A| = 0$$

და

$$|A| = 0\,.$$

საიდანაც პროპორციული ელემენტების შემთხვევა, ცხადია, მე-3 თვისებიდან გამომდინარე.

მეხუთე თვისების დამტკიცება. ცხადია,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{l1} + a''_{l1} & a'_{l2} + a''_{l2} & \cdots & a'_{ln} + a''_{ln} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_l=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \in^{i_1 i_2 \ldots i_l \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots (a'_{li_l} + a''_{li_l}) \cdots a_{ni_n}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_l=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \in^{i_1 i_2 \ldots i_l \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a'_{li_l} \cdots a_{ni_n} + \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_l=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \in^{i_1 i_2 \ldots i_l \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a''_{li_l} \cdots a_{ni_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{l1} & a'_{l2} & \cdots & a'_{ln} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a''_{l1} & a''_{l2} & \cdots & a''_{ln} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება სვეტის შემთხვევაშიც.

მეექვსე თვისების დამტკიცება. მე-5 და მე-4 თვისებიდან გამომდინარეობს მე-6 თვისება.

მეშვიდე თვისების დამტკიცება. $(4.1.2)$-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{l-1}=1}^{n}\sum_{i_l=1}^{n}\sum_{i_{l+1}=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\in^{i_1\ldots i_{l-1}i_l i_{l+1}\ldots i_n} a_{1i_1}\cdots a_{l-1i_{l-1}}a_{li_l}a_{l+1i_{l+1}}\cdots a_{ni_n} \\ &= \sum_{i_l=1}^{n}a_{li_l}\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{l-1}=1}^{n}\sum_{i_{l+1}=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\in^{i_1\ldots i_{l-1}i_l i_{l+1}\ldots i_n} a_{1i_1}\cdots a_{l-1i_{l-1}}a_{l+1i_{l+1}}\cdots a_{ni_n} = \sum_{i_l=1}^{n}a_{li_l}A_{li_l},\ l=1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

რითაც მივიღეთ დეტერმინანტის დაშლის ფორმულა l-ური $(l=1,2,\ldots,n)$ სტრიქონის ელემენტების მიმართ. ანალოგიურად, მივიღებთ l-ური $(l=1,2,\ldots,n)$ სვეტის მიმართ დეტერმინანტის დაშლის

$$|A|=\sum_{i_l=1}^{n}a_{i_l l}A_{i_l l},\ \ l=1,2,\ldots,n$$

ფორმულას. აქედან, ცხადია, რომ

$$|A|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\ a_{ik}A_{ik}$$

იმაში, რომ A_{il} a_{il} ელემენტის ალგებრული დამატებაა ადვილად დავრწმუნდებით შემდეგი მსჯელობით. ვთქვათ, $|A|$ დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ყველა ელემენტი, გარდა a_{11}-ისა, ნულის ტოლია. მაშინ $(4.1.3)$-დან გვექნება

$$|A|=a_{11}A_{11}=a_{11}M_{11}$$

და, რადგანაც a_{11} ელემენტის მინორი მის ალგებრულ დამატებას ემთხვევა, A_{11} a_{11} ელემენტის ალგებრული დამატებაა. ვთქვათ, ახლა i-ურ სტრიქონში მხოლოდ a_{ik} ელემენტი არ არის ნულის ტოლი:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

თუ ამ დეტერმინანტში მოვახდენთ i-ური და i-1 სტრიქონების ტრანსპოზიციას, შემდეგ მიღებული i-1 და i-2 სტრიქონების ტრანსპოზიციას და ა.შ. მიღებული მეორე და პირველი

სტრიქონების ტრანსპოზიციას, მაშინ i-ური სტრიქონი გადავა პირველ სტრიქონში და მეორე თვისების ძალით, გვექნება:

$$|A| = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i\text{-ური სტრიქონი})$$

თუ ახლა k-ურ სვეტს თანდათანობითი გადაადგილებით პირველ სვეტად მოვათავსებთ, კვლავ მეორე თვისების ძალით მივიღებთ:

$$|A| = (-1)^{(i-1)+(k-1)} \begin{vmatrix} a_{ik} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1k} & a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,k} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,k} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,k} & a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (i\text{-ური სტრიქონი})$$

ე.ი. მივიღეთ წინა შემთხვევაში განხილული დეტერმინანტი; ამრიგად,

$$|A| = (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = a_{ik} A_{ik} .$$

■

4.1.15 შენიშვნის დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} .$$

განვიხილოთ აგრეთვე დამხმარე

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

დეტერმინანტი, რომლის i-ური და j-ური სტრიქონები ერთნაირია, ხოლო დანარჩენი სტრიქონები, გარდა j-ურისა, იგივეა რაც $|A|$-ში. მე-4 თვისების ძალით, $|A_1| = 0$. მეორე მხრივ, მე-7 თვისების თანახმად, თუ $|A_1|$-ს დავშალით j-ური სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მი-ვიღებთ

$$|A_1| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \quad (\text{შევნიშნოთ, რომ } |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} A_{jk} = 0\,),$$

რადგანაც $|A_1|$ დეტერმინანტის j-ური სტრიქონის a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება ემთხვევა $|A|$ დეტერმინანტის j-ური სტრიქონის a_{jk} ელემენტის A_{jk} ალგებრულ დამატებას. ანალოგიურად, გვექნება:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0. \qquad \blacksquare$$

განსაზღვრა 4.1.16. კვადრატულ A მატრიცს ეწოდება *გადაგვარებული*, თუ მისი $|A|$ დე-ტერმინანტი ნულის ტოლია, წინააღმდეგ შემთხვევაში A მატრიცს ეწოდება *არაგადაგვარებული.*

განსაზღვრა 4.1.17. არაგადაგვარებული A მატრიცის *შებრუნებული* A^{-1} მატრიცი ეწოდება მატრიცს, რომელიც აკმაყოფილებს

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ტოლობებს, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცია.

მე-3 რიგის დეტერმინანტისათვის, დეტერმინანტების მე-7 თვისებისა და შენიშვნა 4.1.15-ის გამოყენებით ადვილად დავასკვნით, რომ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix},$$

სადაც A_{ik} არის a_{ik} ელემენტის ალგებრული დამატება.

განსაზღვრა 4.1.18.

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

მატრიცს A მატრიცის *მიკავშირებული მატრიცი* ეწოდება.

n-ური რიგის მატრიცის შებრუნებული მატრიცის წარმოდგენა ანალოგიურია.

თუ $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$ და $\vec{b} := (b_1, b_2, b_3)$ მოცემული ვექტორებია, მაშინ $\vec{a}$ ვექტორის *ვექტორული ნამრავლი* $\vec{b}$ -ზე გამოითვლება

$$\vec{a} \times \vec{b} := \{(a_2 b_3 - b_2 a_3); (a_3 b_1 - b_3 a_1); (a_1 b_2 - b_1 a_2)\}$$

ფორმულით.

ეს ფორმულა მე-2 რიგის დეტერმინანტების მეშვეობით შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$\vec{a} \times \vec{b} := \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$ და $\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$ ვექტორების, სადაც $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ შესაბამისად x_1, x_2, x_3 ღერძების მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორები – ორტებია, *ვექტორული ნამრავლის* პოვნა მოხერხებულია შემდეგი

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ფორმულის გამოყენებით, თუ "დეტერმინანტს" დავშლით პირველი სტრიქონის ელემენტების მიმართ.

განსაზღვრა 4.1.19. n-ური რიგის $\|a_{ij}\|$ მატრიცს ეწოდება *სიმეტრიული (ანტისიმეტრიული)*, თუ $a_{ij} = a_{ji}$ $(a_{ij} = -a_{ji})$ $j = 1,2,\ldots,n$.

მატრიცების გამოყენების თვალსაზრისით განვიხილოთ *ეპიდემიოლოგიაში პირველი და მეორე რიგის კონტაქტების ამოცანა.* ვთქვათ, 3 ადამიანი დაავადდა ინფექციური დაავადებით და მიმდინარეობს 6 ადამიანისგან შემდგარი ჯგუფის გამოკითხვა ავადმყოფთა (პირველ) ჯგუფთან კონტაქტების დადგენის მიზნით. გარდა ამისა, ხდება 7 ადამიანისგან შემდგარი მესამე ჯგუფის გამოკითხვა მათი მეორე ჯგუფთან კონტაქტების თვალსაზრისით. ამასთან, იგულისხმება, რომ პირველი და მესამე ჯგუფში შემავალ პირთა შეხვედრა გამორიცხულია. შემოვიღოთ 3×6 განზომილების $A = \|a_{ij}\|$ მატრიცი შემდეგნაირად: თუ მეორე ჯგუფის j-ურ ადამიანს ჰქონდა კონტაქტი პირველი ჯგუფის i-ურ ადამიანთან, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ $a_{ij} = 1$, წინააღმდეგ შემთხვევაში (ე. ი. მათ კონტაქტი არ ჰქონიათ) ჩავთვალოთ, რომ $a_{ij} = 0$. ანალოგიურად შემოვიღოთ 6×7 განზომილების $B = \|b_{ij}\|$ მატრიცი და ჩავთვალოთ, რომ $b_{ij} = 1$, თუ მესამე ჯგუფის j-ურ ადამიანს ჰქონდა კონტაქტი მეორე ჯგუფის i-ურ ადამიანთან, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ჩავთვალოთ, რომ $b_{ij} = 0$. ეს ორი მატრიცი აღწერს პირველი რიგის კონტაქტებს ჯგუფებს შორის. მაგალითად, ვთქვათ, A და B მატრიცებს აქვთ შემდეგი სახე

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

განსახილველ შემთხვევაში $a_{24} = 1$ ნიშნავს, რომ მეორე ჯგუფის მეოთხე ადამიანს ჰქონდა კონ-ტაქტი პირველი ჯგუფის მეორე ავადმყოფთან. $b_{33} = 0$ ნიშნავს, რომ მესამე ჯგუფის მესამე ადამიანს არ ჰქონია კონტაქტი მეორე ჯგუფის მესამე ადამიანთან.

თუ ჩვენ გვაინტერესებს არაპირდაპირი კონტაქტები (ე. წ. მეორე რიგის კონტაქტები), ე. ი. მესამე ჯგუფის ადამიანების კონტაქტები პირველი ჯგუფის სამ ავადმყოფთან, მაშინ პასუხს მივიღებთ A და B მატრიცების გამრავლებით:

$$C = \left\| c_{ij} \right\| = AB .$$

ელემენტი

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{6} a_{ik} b_{kj}$$

გვაძლევს მესამე ჯგუფის j-ური ადამიანის პირველი ჯგუფის i-ურ ავადმყოფთან არაპირდაპირი კონტაქტების რიცხვს. ჩვენს შემთხვევაში

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c_{23} ელემენტი გვიჩვენებს, რომ მესამე ჯგუფის მესამე ადამიანს ჰქონდა მეორე რიგის 2 კონ-ტაქტი პირველი ჯგუფის მეორე ავადმყოფთან. შევნიშნოთ, რომ მესამე ჯგუფის მეექვსე ადამიანს პირველი ჯგუფის პირველ, მეორე და მესამე ავადმყოფთან ჰქონდა შესაბამისად 1, 1 და 2 მეორე რიგის კონტაქტი, ე. ი. პირველი ჯგუფის ავადმყოფებთან, საერთო ჯამში, ჰქონდა $1+1+2=4$ მეორე რიგის კონტაქტი. მესამე ჯგუფის მეხუთე ადამიანს კი მეორე რიგის კონტაქტები ავადმყოფებთან საერთოდ არ ჰქონია.

რაციონთა მატრიცები. ვთქვათ, საკვები შეიცავს ცხოველის სიცოცხლისთვის აუცილებელ ნივთიერებას, მაგალითად, A ვიტამინს[*] და $\sim_i$-თი აღვნიშნავთ ამ ვიტამინის რაოდენობას 1 კგ i-ურ საკვებში $(i = 1,2,\ldots,n)$. მაშინ ვექტორ-სტრიქონი

$$\vec{a} := (\sim_1, \sim_2, \ldots, \sim_n)$$

იძლევა ვიტამინის განაწილებას საკვებების მიხედვით. ვთქვათ, ცხოველი ჭამს პირველი საკვების x_1 კგ-ს, მე-2 საკვების x_2 კგ-ს და ა.შ. n-ური საკვების x_n კგ-ს. როგორ გამოვთვალოთ A ვიტამინის რაოდენობა, რომელსაც ცხოველი დღეში იღებს?

ცხადია, ამისთვის საკმარისია, $\vec{a}$ ვექტორი სკალარულად გავამრავლოთ $\vec{x} := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ვექტორზე

$$(\vec{a}, \vec{x}) = \sim_1 x_1 + \sim_2 x_2 + \cdots + \sim_n x_n .$$

სკალარული ნამრავლი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც მატრიცთა ნამრავლის კერძო შემთხვევა, როგორც $1 \times n$ განზომილებიანი a მატრიცის გამრავლება $n \times 1$ განზომილებიანი

[*] ვიტამინები არის სხვადასხვა ქიმიური ბუნების ორგანულ ნაერთთა ჯგუფი. ვიტამინების ერთეულია მგ/კგ (მილიგრამი კილოგრამში).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

მატრიცზე. მატრიცთა გამრავლების წესის გამოყენებით გვექნება

$$(\sim_1, \sim_2, ..., \sim_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = (\sim_1 x_1 + \sim_2 x_2 + \cdots + x_n \sim_n).$$

მარჯვენა ნაწილში მივიღეთ ერთელემენტიანი მატრიცი, ე.ი., რიცხვი. მისი ელემენტის სიდიდე გვიჩვენებს A ვიტამინის რაოდენობას, რასაც ცხოველი ერთ დღეში მიიღებს.

ახლა განვიხილოთ უფრო რთული შემთხვევა. ვთქვათ, გვაინტერესებს სამი A, B, C ვიტამინის ცხოველის მიერ მიღების საკითხი. ვთქვათ, $3 \times n$ განზომილებიანი

$$M = \begin{pmatrix} \sim_1 & \sim_2 & \cdots & \sim_n \\ {}_1 & {}_2 & \cdots & {}_n \\ \text{¥}_1 & \text{¥}_2 & \cdots & \text{¥}_n \end{pmatrix}$$

მატრიცი გვიჩვენებს საკვებში ვიტამინების რაოდენობას. ყოველი სტრიქონი შეესაბამება ცალკეულ ვიტამინს, ხოლო ყოველი სვეტი – ცალკეულ საკვებს. ამრიგად, პირველი საკვების 1 კგ შეიცავს $\sim_1$ რაოდენობის A ვიტამინს, ${}_1$ რაოდენობის B ვიტამინს, ¥_1 რაოდენობის C ვიტამინს და ა. შ. ვთქვათ, X მატრიცი-სვეტი დღე-ღამეში საკვების მოხმარების მაჩვენებელია. რომ გავიგოთ ცხოველის მიერ დღე-ღამეში მიღებული ვიტამინების რაოდენობა, უნდა ვიპოვოთ M და X მატრიცების ნამრავლი.

$$MX = \begin{pmatrix} \sim_1 & \sim_2 & \cdots & \sim_n \\ {}_1 & {}_2 & \cdots & {}_n \\ \text{¥}_1 & \text{¥}_2 & \cdots & \text{¥}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sim_1 x_1 + \sim_2 x_2 + ... + \sim_n x_n \\ {}_1 x_1 + {}_2 x_2 + ... + {}_n x_n \\ \text{¥}_1 x_1 + \text{¥}_2 x_2 + ... + \text{¥}_n x_n \end{pmatrix}.$$

მივიღეთ მატრიცი-სვეტი, რომლის I ელემენტი არის A ვიტამინის, II ელემენტი – B ვიტამინის და III ელემენტი – C ვიტამინის საერთო რაოდენობა, რასაც ცხოველი დღე-ღამეში იღებს.

განსაზღვრა 4.1.20. ამოვარჩიოთ n-ური რიგის Δ დეტერმინანტის k სტრიქონი და k სვეტი, $1 \le k \le n-1$; განვიხილოთ დეტერმინანტი, რომლის ელემენტებიც ამორჩეული სტრიქონებისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებია. მიღებულ დეტერმინანტს Δ დეტერმინანტის *k-ური რიგის M მინორი*[*)] *ეწოდება.* თუ ამოვშლით ამორჩეულ k სტრიქონს

[*)] k-ური, $1 \le k \le \min\{m-1, n-1\}$ ($\min\{\cdots\}$ აღნიშნავს მინიმალურს ფიგურულ ფრჩხილებში მითითებულ სიდიდეებს შორის), რიგის მინორი ანალოგიურად განიმარტება $m \times n$ მატრიცისათვის და ის

და k სვეტს, მაშინ დარჩენილ $n-k$ რიგის დეტერმინანტს *k-ური რიგის მინორის $\tilde{M}$ დამატებითი მინორი ეწოდება.*

განსაზღვრა 4.1.21. M მინორის *ალგებრული დამატება ეწოდება* $A:=(-1)^s \tilde{M}$ სიდიდეს, სადაც s არის M მინორში ნაწილობრივ შემავალი Δ დეტერმინანტის სტრიქონებისა და სვეტების ნომრების ჯამი.

ლაპლასის თეორემა. თუ n-ური რიგის Δ დეტერმინანტში ამოვარჩევთ k სტრიქონს (k სვეტს), მაშინ ამორჩეულ k სტრიქონში (k სვეტში) მოთავსებული ყველა k-ური რიგის მინორის სათანადო ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი Δ დეტერმინანტის ტოლია.

რადგან $k=1$-სთვის ლაპლასის თეორემა სამართლიანია (იხ. დეტერმინანტების მე-7 თვისება), ნებისმიერი k-სათვის ის შეიძლება დამტკიცდეს მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

ეწოდება დეტერმინანტს, რომელიც შედგება მატრიციდან ამორჩეული k სტრიქონისა და k სვეტის გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან.