

ლექცია 4

3. კომპლექსური რიცხვები

3.1. კომპლექსური რიცხვის ცნება

მათემატიკის განვითარებამ და მისმა პრაქტიკულმა გამოყენებამ აუცილებელი გახდა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება. მაგალითად,

$$x^2 + 1 = 0 \quad (3.1.1)$$

განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე ამონახსნი არ აქვს. შევეცადოთ, გავაფართოოთ რიცხვის ცნება ისე, რომ (3.1.1) განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნი. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ასეთ გაფართოებას ეწოდოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე.

განსაზღვრა 3.1.1. კომპლექსური რიცხვები ფორმალურად შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დალაგებულ რიცხვთა წყვილი (a, b) , რომელიც აღინიშნება z სიმბოლოთი, ე. ი.

$$z := (a, b), \quad (3.1.2)$$

რომლისთვისაც განმარტებულია ტოლობა და ძირითადი არითმეტიკული მოქმედებები: შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა.

განსაზღვრა 3.1.2. (3.1.2)-ში a -ს ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი, ხოლო b -ს წარმოსახვითი ნაწილი და აღინიშნება შემდეგნაირად: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

განსაზღვრა 3.1.3. ვიტყვი, რომ $z = (a, b)$ კომპლექსური რიცხვი ნულის ტოლია, ე. ი. $z = 0$, თუ $a = 0$ და $b = 0$.

როცა $b = 0$, მაშინ

$$(a, 0) = a, \quad (3.1.3)$$

ე. ი. ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე შეიძლება განვიხილოთ, როგორც კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლის ქვესიმრავლე.

განსაზღვრა 3.1.4. ორ კომპლექსურ $z_1 := (a_1, b_1)$ და $z_2 := (a_2, b_2)$ რიცხვს ეწოდება ტოლი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1 = a_2$ და $b_1 = b_2$.

კომპლექსურ რიცხვებზე განვმარტოთ არითმეტიკული მოქმედებები.

განსაზღვრა 3.1.5. ორი კომპლექსური $z_1 := (a_1, b_1)$ და $z_2 := (a_2, b_2)$ რიცხვის ჯამი ეწოდება შემდეგი სახის კომპლექსურ რიცხვს

$$z = z_1 + z_2 := (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (3.1.4)$$

ხოლო ნამრავლი ეწოდება z კომპლექსურ რიცხვს, რომელსაც აქვს

$$z = z_1 \cdot z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (3.1.5)$$

სახე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ კომპლექსური რიცხვების ჯამს და ნამრავლს აქვს ნამდვილი რიცხვების ჯამისა და ნამრავლის ანალოგიური თვისებები. ასე რომ, კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს ველს, მაგრამ არადალაგებულს.

განსაზღვრა 3.1.6. ორი $z_1 := (a_1, b_1)$ და $z_2 := (a_2, b_2)$ კომპლექსური რიცხვის სხვაობა ეწოდება ისეთ კომპლექსურ $z := (a, b)$ რიცხვს, რომელსაც დამატებული z_2 მოგვცემს z_1 -ს, ($z + z_2 = z_1$), რაც, (3.1.2)-ის თანახმად, იმას ნიშნავს, რომ $a + a_2 = a_1$, $b + b_2 = b_1$. აქედან $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ და მივიღებთ, რომ

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2). \quad (3.1.6)$$

განსაზღვრა 3.1.7. ორი კომპლექსური $z_1 = (a_1, b_1)$ და $z_2 = (a_2, b_2)$, $z_2 \neq (0, 0)$, რიცხვის ფარდობა (შეფარდება) ეწოდება ისეთ $z = (a, b)$ კომპლექსურ რიცხვს, რომლის z_2 -ზე გამრავლებით მივიღებთ z_1 -ს, ანუ

$$z_1 = z \cdot z_2 = (a, b)(a_2, b_2) = (aa_2 - bb_2, ab_2 + a_2b),$$

მეორე მხრივ, $z_1 = (a_1, b_1)$. ვიცით, რომ ორი კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ტოლია, ე. ი. მივიღებთ,

$$\begin{cases} aa_2 - bb_2 = a_1, \\ ab_2 + a_2b = b_1. \end{cases}$$

ამოვხსნით რა მიღებულ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას a და b -ს მიმართ (იხ. ლექცია 6), დავადგენთ, რომ

$$a = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad b = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ საძიებელი რიცხვი

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right). \quad (3.1.7)$$

განსაზღვრა 3.1.8. $(0,1)$ რიცხვს, რომელიც აღინიშნება i სიმბოლოთი, წარმოსახვითი ერთეული ეწოდება:

$$(0,1) =: i. \quad (3.1.8)$$

თუ ამ რიცხვს გავამრავლებთ თავის თავზე, მაშინ, ორი კომპლექსური რიცხვის ნამრავლის განმარტების ძალით, გვექნება:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1, \quad \text{ე. ი. } i^2 = -1. \quad (3.1.9)$$

ახლა შევეცადოთ, მოვძებნოთ (3.1.1) განტოლების ამონახსნი კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში. (3.1.1) გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x^2 = -1.$$

(3.1.9)-ის თანახმად, რიცხვი, რომლის კვადრატიც უდრის (-1) -ს, არის i , ე. ი. თუ გავითვალისწინებთ იმასაც, რომ $-i := (-1)i$ და, ამდენად, $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$, (3.1.1) განტოლების ამონახსნი არის $x = \pm i$.

(3.1.5)-ის, (3.1.3)-ის და (3.1.8)-ის გავითვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$i \cdot b = (0,1)(b,0) = (0 - 0, b + 0) = (0, b).$$

აქედან კი

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + ib.$$

შემდგომში კომპლექსური $z = (a, b)$ რიცხვისთვის ვისარგებლებთ $z = a + ib$ წარმოდგენით, რომელსაც *კომპლექსური რიცხვის ალგებრული სახე* ეწოდება. კომპლექსური რიცხვის ასეთი წარმოდგენა და ის გარემოება, რომ $i^2 = -1$, საშუალებას გვაძლევს, i სიმბოლოზე ვიმოქმედოთ ისე, როგორც რიცხვზე.

ახალ აღნიშვნებში (3.1.4) – (3.1.7) შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad z_2 = a_2 + ib_2 \neq 0.$$

განსაზღვრა 3.1.9. $\bar{z} = a - bi$ სახის კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული.

ცხადია, სამართლიანია $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ ტოლობა.

ადვილი შესამოწმებელია კომპლექსური რიცხვების შემდეგი თვისებები:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}, \quad z_2 \neq 0 = 0 + i0 = (0,0),$$

$$\overline{\overline{z}} = z.$$

შენიშვნა 3.1.10. ორი კომპლექსური რიცხვის შეფარდების გამოთვლის დროს მოხერხებულია მნიშვნელისა და მრიცხველის მნიშვნელის შეუღლებულ რიცხვზე გამრავლება:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}.$$

3.2. კომპლექსური რიცხვის ტრიბონომეტრიული წარმოდგენა

განვიხილოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყე და დავუკავშიროთ იგი სიბრტყის წერტილებს.

განვიხილოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომლის აბსცისთა ღერძი შევუსაბამოთ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს, ხოლო ორდინატთა ღერძი – წარმოსახვით ნაწილს. ასეთი კოორდინატთა სისტემის ყოველი $M(a,b)$ წერტილი (აფიქსი) შევუსაბამოთ კომპლექსურ $z = a + bi$ რიცხვს. ცხადია, ეს შესაბამისობა ცალსახაა და საკოორდინატო სისტემა სიბრტყეში წარმოქმნის კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეს.

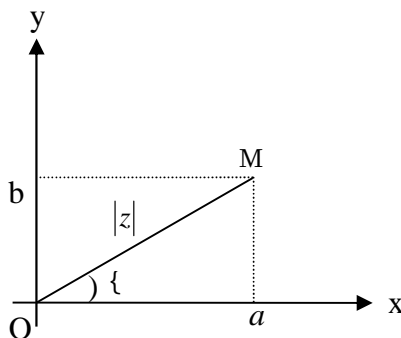
განსაზღვრა 3.2.1. $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის მოდული (აღინიშნება r -ით ან $|z|$ -ით) ეწოდება მანძილს კომპლექსურ რიცხვთა სიბრტყეზე z წერტილიდან სათავემდე (იხ. ნახ. 3.2.1).

ცხადია,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

ადვილი დასანახია, რომ ნამდვილი $z = a + 0i$ რიცხვის მოდული ემთხვევა a რიცხვის აბსოლუტურ სიდიდეს. მართლაც,

$$|z| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|.$$



ნახ. 3.2.1.

განსაზღვრა 3.2.2. $z \neq 0$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი (აღინიშნება ასე ϕ ან $arg z$)*) ეწოდება საკოორდინატო სიბრტყეზე z წერტილისა და სათავეს შემაერთებელ წრფესა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძის დადებით მიმართულებას შორის კუთხეს. ϕ კუთხის ათვლის დადებით მიმართულებად მიღებულია საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულება.

*) ცხადია, $z := (a, b)$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ϕ -სთან ერთად $\phi + 2fk$ -ცაა, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ამდენად, კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი ამ რიცხვით ცალსახად არ განისაზღვრება.

ნახ. 3.2.1-დან ცხადია, რომ, სინუსისა და კოსინუსის განმარტების თანახმად,

$$a = r \cos \{ \text{ და } b = r \sin \{ ,$$

ამდენად,

$$z = a + ib = r(\cos \{ + i \sin \{). \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) ჩანაწერს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული წარმოდგენა.

თუ გამოვიყენებთ ეილერის $e^{i\{}$ = $\cos \{ + i \sin \{$ ფორმულას, (3.2.1) შეიძლება ჩავწეროთ მაჩვენებელიანი ფუნქციის საშუალებით

$$z = r e^{i\{}$$

სახით. აქ e ე.წ. ნეპერის^{*)} რიცხვია, რომელიც მეთედის სიზუსტით 2,7-ის ტოლია და არაერთხელ შეგვხვდება შემდეგ ლექციებში.

განვიხილოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით ჩაწერილი ორი კომპლექსური

$$z_1 = r_1 (\cos \{_1 + i \sin \{_1) \text{ და } z_2 = r_2 (\cos \{_2 + i \sin \{_2)$$

რიცხვი. სამართლიანია შემდეგი ფორმულები:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [(\cos(\{_1 + \{_2) + i \sin(\{_1 + \{_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\{_1 - \{_2) - i \sin(\{_1 - \{_2)],$$

$$[r(\cos \{ + i \sin \{)]^n = r^n (\cos n\{ + i \sin n\{), \quad (3.2.2)$$

სადაც $n \in N$, N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა.

(3.2.2) ფორმულას მუავრის^{**) ფორმულა ეწოდება.}

^{*)} ჯონ ნეპერი (1550-1617) – შოტლანდიელი მათემატიკოსი.

^{**) ა. დე მუავრი (1667 – 1754) – ინგლისელი მათემატიკოსი.}