ლექცია 13

8. ბიოლოგიური პროცესების ზოგიერთი დიფერენციალური მოდელი. მარტივი დიფერენციალური განტოლებები

8.1. პოპულაციის რაოდენობის დინამიკის მოდელი

პოპულაციის რაოდენობის დინამიკა (ე. ი. ცოცხალ ინდივიდთა საერთო რაოდენობის ცვლილება პოპულაციაში შობადობისა და სიკვდილიანობის გათვალისწინებით) ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი საკითხია პოპულაციის ეკოლოგიაში. თუ პოპულაციას იზოლირებულად, კვების რესურსებს განუსაზღვრელად, ხოლო ახალი თაობის ნაზრდს ზრდასრულ ინდივიდთა რაოდენობის პროპორციულად ჩავთვლით, მაშინ პოპულაციის რაოდენობის დინამიკა ხასიათდება

$$\frac{d\ x(t)}{dt} = \gamma\ x(t) \tag{8.1.1}$$

დიფერენციალური განტოლებით, სადაც

$$x = x(t)$$

პოპულაციის რაოდენობაა დროის t მომენტში, γ – პროპორციულობის კოეფიციენტი. (8.1.1) წარმოადგენს მარტივი დიფერენციალური განტოლების [რადგან უცნობი ფუნქცია დიფერენციალის (გაწარმოების) ნიშნის ქვეშაა, მას *დიფერენციალური განტოლება* ეწოდება] მაგალითს. ვთქვათ, x_0 პოპულაციის რაოდენობაა საწყის t_0 მომენტში, ე. ი.

$$x(t_0) = x_0 \tag{8.1.2}$$

და ვიპოვოთ პოპულაციის $x(t)$ რაოდენობა დროის $t > t_0$ მომენტში. (8.1.1)-დან გვექნება

$$\frac{1}{x(t)}\frac{d\ x(t)}{dt} = \gamma\,, \text{ ე. ი. } \frac{d\ln x(t)}{dt} = \gamma\,. \tag{8.1.3}$$

ვაინტეგროთ (8.1.3) t_0-დან t-მდე:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\ \ln x(t)}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t} \gamma\ dt\,,$$

საიდანაც

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \gamma \int_{t_0}^{t} dt\,.$$

ცხადია,

$$\ln\frac{x(t)}{x(t_0)} = \gamma(t - t_0)\,.$$

პოტენცირებით და (8.1.2)-ის გათვალისწინებით მივიღეთ, რომ

$$x(t) = x_0\ e^{\gamma(t-t_0)}\,. \tag{8.1.4}$$

(8.1.2) პირობას *საწყისი პირობა* ეწოდება, ხოლო (8.1.1), (8.1.2) ამოცანას – *კოშის*[*)] *ამოცანა*. ამრიგად, ამ უკანასკნელი ამოცანის ამონახსნი ვიპოვეთ (8.1.4) სახით.

[*)] ო. ლ. კოში (1789 – 1857) – ფრანგი მათემატიკოსი.

8.2. ფერხიულსტ-პერლის მოდელი პოპულაციის რაოდენობის დინამიკაში

პოპულაციის დინამიკის უფრო ზუსტ აღწერას იძლევა *ფერხიულსტ-პერლის განტოლება*, რომელიც მიღებულია 1845 წელს. ის ითვალისწინებს პოპულაციაში შიდასახეობათა კონკურენციას, რომელიც პოპულაციის ზრდის სიჩქარეს აფერხებს, რაც ბევრი მიზეზით აიხსნება: ბრძოლით ადგილისა და საკვებისთვის, ინფექციის გავრცელებით და ა. შ.

ამ განტოლებას აქვს

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - \delta x^2$$

სახე, სადაც δ პოპულაციაში შიდაბრძოლის კოეფიციენტია, რომელიც სხვადასხვა პოპულაციისთვის სხვადასხვაა.

8.3. ეპიდემიათა თეორიის დიფერენციალური მოდელი

ვთქვათ, ინფექციის გადაცემის პროცესი ბევრად უფრო სწრაფია, ვიდრე ავადმყოფობის მიმდინარეობა. ჩვენ გვაინტერესებს ინფექციის გადაცემის პროცესის შესწავლა. ვუშვებთ, რომ დაავადებული ინდივიდები კოლონიიდან არ გადიან და ინფექციას ჯანმრთელ ინდივიდებს გადასცემენ.

ვთქვათ, a ინფიცირებულთა რაოდენობაა, ხოლო n არაინფიცირებულთა რაოდენობა საწყისი მომენტისთვის;

$$x = x(t)$$

– არაინფიცირებულთა რაოდენობა, ხოლო

$$y = y(t)$$

ინფიცირებულთა რაოდენობაა დროის t მომენტისთვის. ცხადია, ყველა მომენტისთვის $0 \le t \le T$ *) შუალედიდან ადგილი აქვს

$$x + y = n + a\,. \tag{8.3.1}$$

ტოლობას.

რადგანაც ინფექცია ინფიცირებულთა და არაინფიცირებულთა შეხვედრის დროს გადაეცემა, ამიტომ არაინფიცირებულთა რაოდენობა შეხვედრათა რაოდენობის, ე. ი. xy ნამრავლის პროპორციულად კლებულობს. ამიტომ არაინფიცირებულთა რაოდენობის შემცირების სიჩქარე

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy\,, \tag{8.3.2}$$

სადაც $\beta > 0$ პროპორციულობის კოეფიციენტია. (8.3.1)-დან განვსაზღვროთ y-ის მნიშვნელობა და ჩავსვათ (8.3.2)-ში, მივიღებთ

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n + a - x)\,.$$

*) $[0,T]$ შუალედი ერთი თაობის სიცოცხლის ხანგრძლივობაზე ნაკლები უნდა იყოს.

8.4. პოპულაციის მალთუსის დიფერენციალური მოდელი

მალთუსის მოდელს საფუძვლად უდევს მარტივი დებულება – პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობის ცვლილების სიჩქარე t მომენტში ინდივიდების $N(t)$ რაოდენობის პირდაპირპროპორციულია.

ვთქვათ, $N(t)$ რაიმე პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობას წარმოადგენს t მომენტში. თუ A იმ ინდივიდების რაოდენობაა, რომლებიც დროის ერთეულში იბადებიან, ხოლო B – იმ ინდივიდების რაოდენობა, რომლებიც დროის ერთეულში კვდებიან, მაშინ ბალანსის მეთოდის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ არსებობს საკმაოდ სერიოზული საფუძველი იმისთვის, რათა $N(t)$ სიდიდის ცვლილების სიჩქარე შემდეგი

$$\frac{dN}{dt} = A - B \tag{8.4.1}$$

დიფერენციალური განტოლების საშუალებით განვსაზღვროთ, სადაც

$$A = \alpha N\,,\quad B = \beta N\,,$$

ხოლო

$$\alpha = \alpha(t,N)\,,\quad \beta = \beta(t,N)$$

შესაბამისად დაბადებისა და სიკვდილიანობის კოეფიციენტებს წარმოადგენენ. (8.4.1) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\alpha(t,N) - \beta(t,N)\right]N(t)\,. \tag{8.4.2}$$

8.5. „მტაცებელი – მსხვერპლის“ მათემატიკური მოდელი

§8.4-ში არსებით ცვლადად მივიღეთ ამა თუ იმ პოპულაციაში ინდივიდების რაოდენობა და შევეცადეთ, შეგვექმნა რომელიმე ერთი ცალკეული პოპულაციის განვითარების მათემატიკური მოდელი იმ პირობით, რომ პოპულაცია იზოლირებულია.

ახლა გადავდგათ შემდეგი ნაბიჯი და უფრო მეტად დავუახლოვდეთ რეალურ სიტუაციას.

განვიხილოთ ორი სახეობის ურთიერთქმედება. შევისწავლოთ ორი „იზოლირებული“ პოპულაციის განვითარების დინამიკა სხვადასხვა ფაქტორების გათვალისწინებით.

სხვადასხვა სახეობის ორ პოპულაციას შორის ურთიერთქმედების მექანიზმები შეიძლება სამ კატეგორიად დავყოთ:

ა) **კონკურენცია**, როდესაც ერთი სახეობის განვითარება დამთრგუნველ ზეგავლენას ახდენს მეორის განვითარებაზე;

ბ) **კომენსალიზმი**, როდესაც ერთი სახეობა მეორის განვითარების სტიმულირებას ახდენს;

გ) **მტაცებლობა**, როდესაც ერთი სახეობა („მტაცებელი“) მეორე სახეობით („მსხვერპლით“) იკვებება და, მაშასადამე, მისი რაოდენობის შემცირებას იწვევს, ხოლო „მსხვერპლი“ ხელს უწყობს „მტაცებლების“ რაოდენობის ზრდას.

ჩვენს მიზანს არ შეადგენს სახეობათა ურთიერთქმედების ამ მექანიზმების დეტალური განხილვა. შევეცდებით, მათემატიკური მოდელის საშუალებით აღვწეროთ ისეთი ორი სახეობის პოპულაციის განვითარების დინამიკა, რომლებიც ერთმანეთთან „მტაცებელი – მსხვერპლის“ პრინციპით ურთიერთქმედებენ.

მათემატიკური მოდელის შედგენისას ვიგულისხმებთ, რომ რომ მსხვერპლს ყოველთვის აქვს საკვების მოპოვების საშუალება, ხოლო ყოველი შეხვედრისას მტაცებელი აუცილებლად კლავს

მსხვერპლს, რომელიც მისი ერთადერთი საკვებია. ცხადია, რომ ამ დაშვების შედეგად მივიღებთ საკმაოდ „იდეალიზებულ“ მოდელს, რომლის გამოყენებაც მხოლოდ ზოგიერთ შემთხვევაში შეიძლება, თუმცა ამ მოდელის საშუალებით შესაძლებელია ბევრი საინტერესო, პრაქტიკისთვის მნიშვნელოვანი დასკვნის გაკეთება.

თუ ამ სიტუაციას განვიხილავთ, ცხადი გახდება, რომ მტაცებლების რაოდენობა მანამ იმატებს, სანამ მათ საკმარისად აქვთ საკვები, ე. ი. სანამ მსხვერპლი საკმარისი რაოდენობითაა. ბოლოს და ბოლოს დადგება მომენტი, როდესაც მტაცებლების ზეგავლენით მსხვერპლის რაოდენობა იმდენად შემცირდება, რომ მტაცებლებს საკვები არ ეყოფათ და დაიწყება მათი რაოდენობის შემცირება. ეს იქამდე მიგვიყვანს, რომ მტაცებლების რაოდენობის შემცირების გამო დაიწყება მსხვერპლის რაოდენობის მატება. ეს კვლავ მისცემს სტიმულს მტაცებლების რაოდენობის ზრდას და ა. შ. ციკლი კვლავ განმეორდება. „მტაცებელი – მსხვერპლის“ ტიპის ურთიერთქმედება საკმაოდ ხშირად გვხვდება სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანის შესწავლისას. პრობლემის აქტუალურობის გამო მისი შესწავლა ბოლო პერიოდში როგორც ეკოლოგიის, ისე სხვა დარგის მეცნიერების, მათ შორის მათემატიკოსთა, ყურადღების ცენტრში მოექცა.

აღვნიშნოთ

$$x = x(t)\text{-თი და } y = y(t)\text{-თი},$$

შესაბამისად, მტაცებლისა და მსხვერპლის რაოდენობა t მომენტში. იმისთვის, რომ ჩამოვაყალიბოთ მათემატიკური მოდელი, რომელიც გარკვეულ მიახლოებაში აღწერს პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილების დინამიკას, გავაკეთოთ რამდენიმე დაშვება, რომლებიც ამოცანას გაამარტივებენ. ჯერ ერთი, დავუშვათ, რომ იმ შემთხვევათა რაოდენობა, როდესაც მტაცებელი მსხვერპლს კლავს, დამოკიდებულია მათ შეხვედრათა სიხშირეზე. ჩავთვალოთ, რომ ეს სიდიდე xy ნამრავლის პროპორციულია. მეორე, უგულებელვყოთ ის დრო, რომელიც მტაცებელს მსხვერპლის შესაჭმელად სჭირდება. რაც შეეხება ბუნებრივი შობადობისა და სიკვდილიანობის პირობებში პოპულაციის რაოდენობის ცვლილებას, ის (8.4.2) სახის ლოჯისტური განტოლებების საშუალებით აღვწეროთ.

(8.4.2) სახის ლოჯისტური განტოლებების საშუალებით მივიღებთ, რომ ორივე პოპულაციაში ინდივიდთა რაოდენობის ცვლილება აღიწერება შემდეგი

$$\frac{dx}{dt} = -ax + bxy, \tag{8.5.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = cy - d\,xy \tag{8.5.2}$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საშუალებით, სადაც a, b, c და d გარკვეული დადებითი მუდმივებია.

(8.5.1) და (8.5.2) განტოლებები პირველად გამოყვანილ იქნა 1925 წ. და ცნობილია *ლოტკა*[*)]*-ვოლტერას*[**)] განტოლებების სახელწოდებით.

[*)] ა.ჯ. ლოტკა (1880-1949) – ამერიკელი ბიოფიზიკოსი (დაიბადა უკრაინაში)

[**)] ვ. ვოლტერა (1860 – 1940) – იტალიელი მათემატიკოსი.