ლექცია 12

7. ინტეგრალი

7.1. ინტეგრალის ცნება. ფართი

შემოვიღოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება 6.1 პარაგრაფში შემოღებული ცნებისგან განსხვავებული ფორმით.

განსაზღვრა 7.1.1. $f \geq 0$ *ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი* $[a,b]$ სეგმენტზე, რომელიც

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f$$

სახით ჩაიწერება, წარმოადგენს იმ ფიგურის ფართს, რომელიც შემოსაზღვრულია

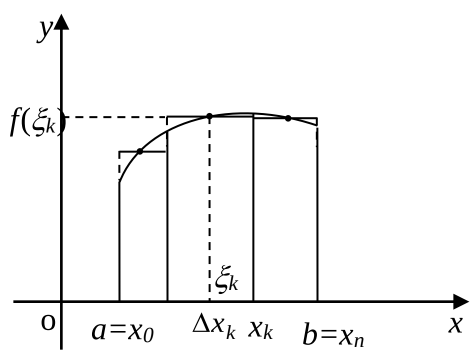
$$y = f(x)$$

ფუნქციის გრაფიკით და

$$y = 0,\quad x = a \quad \text{და} \quad x = b$$

წრფეებით (იხ. ნახ. 7.1.1). აღნიშნული ფიგურის ფართს შეიძლება მივუახლოვდეთ ნახაზზე დახაზული მართკუთხედების ფართების ჯამის ზღვრის სახით, როცა მართკუთხედების მაქსიმალური სიგანე ნულისკენ მიისწრაფის:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\substack{(\max \Delta x_k) \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \,. \qquad (7.1.1)$$



ნახ. 7.1.1

ეს ზღვარი დამოკიდებული არ უნდა იყოს ქვეინტერვალებად დაყოფაზე და ξ_k წერტილების შერჩევაზე. თუ არსებობს (7.1.1) ზღვარი, f ფუნქციას $[a,b]$-ზე ინტეგრებადი ფუნქცია ეწოდება.

თუ

$$f(x) = c = \text{const}\,,$$

რადგან მართკუთხედის ფართობი მისი სიგრძისა და სიგანის ნამრავლის ტოლია, ცხადია,

$$\int_a^b c dx = c(b-a)\,.$$

განსაზღვრა 7.1.2. f ფუნქციის დადებითობა ჩვენ მხოლოდ ფართის ცნებასთან მიმართებაში თვალსაჩინოებისთვის მოვითხოვეთ. (7.1.1) ტოლობით *განსაზღვრული ინტეგრალის* ცნების გამოყენება მაშინაც შეიძლება, როცა f ფუნქცია უარყოფით მნიშვნელობებს იღებს.

განსაზღვრა 7.1.3. თუ $a > b$, მაშინ

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx\,.$$

თეორემა 7.1.4. ვთქვათ, f და g ფუნქციები ინტეგრებადია $[a,b]$-ზე და c მუდმივია, მაშინ:

1. $\int_a^b cf = c\int_a^b f$;

2. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

3. $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, სადაც $c \in]a,b[$;

4. $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$;

5. თუ $f \le g$ და $a < b$, მაშინ $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

განსაზღვრული ინტეგრალის ყველა ეს თვისება ადვილად მტკიცდება რიმანის*) ინტეგრალის ზემოთ მოყვანილი განმარტებიდან გამომდინარე.

შედეგი 7.1.5. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა $[a,b]$-ზე, მაშინ

$$(b-a)\min_{a\le x\le b} f(x) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a)\max_{a\le x\le b} f(x) .$$

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ 7.1.4 თეორემის მე-5 თვისებას, სადაც

$$g \equiv \max_{a\le x\le b} f(x) =: c = \text{const} ,$$

მივიღებთ, რომ

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b c dx = c(b-a) .$$

ანალოგიურად მიიღება ქვემოდან შეფასება.

ნიადაგში წყლის ინფილტრაცია — ფილიპსის მოდელი. პირობების ფართო დიაპაზონში,

$$y = a + bx^{-1/2} \tag{7.1.2}$$

სახის ფუნქცია ნიადაგში წყლის ინფილტრაციის y სიჩქარეს აკავშირებს x დროსთან (Philips, 1957-1958). ატმოსფერული ნალექები წარმოადგენს სითხეს თხევად ან მყარ მდგომარეობაში (წვიმა, თოვლი, ჰიდრომეტეორიტები და ა. შ.) მოსულს ღრუბლებიდან ან დალექილს ჰაერიდან მიწის ზედაპირზე და საგნებზე. ის იზომება მოსული წყლის ფენის სისქით მილიმეტრებში (მმ). წყლის ნიადაგში ინფილტრაციის სიჩქარე იზომება მმ/სთ-ში. კონკრეტულ სიტუაციაში (7.1.2) დამოკიდებულების გამოყენება დამოკიდებულია მინიმალურ სიჩქარეზე რითაც წყალი ჟონავს ნიადაგში ამ უკანასკნელის სრულად გაჯერებამდე. ეს მინიმალური სიჩქარე (7.1.2) ფორმულაში წარმოდგენილია a მუდმივით, რომელიც თავის მხრივ დამოკიდებულია ნიადაგის ტიპზე. მეორე წევრი (7.1.2)-ის მარჯვენა მხარეში მიუთითებს იმაზე, რომ ინფილტრაციის სიჩქარის ცვლილება შეიძლება გამოვხატოთ ინფილტრაციის დაწყების მომენტიდან განვლილი დროის მონაკვეთისა (უფრო ზუსტად, $x^{-\frac{1}{2}}$-ის) და b მუდმივის ნამრავლით, რომელიც ახასიათებს ნიადაგის ტენიანობის**) ხარისხს. თუ ინფილტრაციის დაწყების მომენტისათვის ნიადაგი წყლით თითქმის გაჯერებულია, მაშინ ეს წევრი ძალზე მცირე იქნება, რადგან, როცა $b = 0$, ჩვენ გვექნება ინფილტრაციის სიჩქარე წყლით გაჯერებული ნიადაგის პირობებში.

---

*) გ. ფ. ბ. რიმანი (1826 — 1866) — გერმანელი მათემატიკოსი.

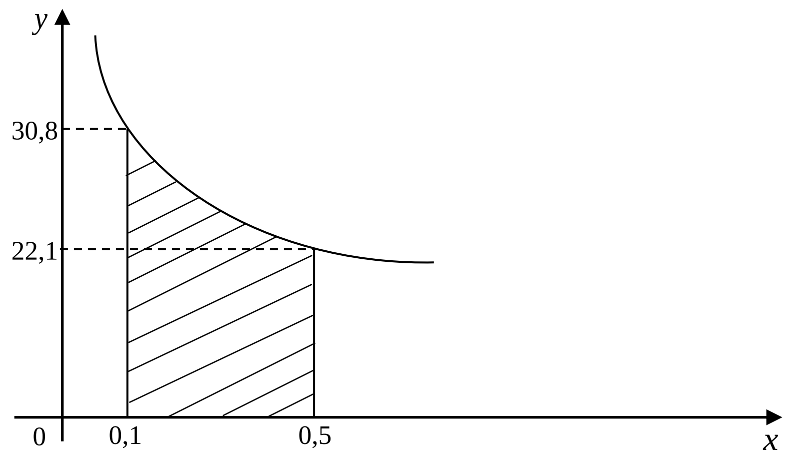
**) ტენიანობას ახასიათებენ ტენშემცველობით — წყლის რაოდენობით, რომელიც მოდის მასალის მშრალი ნაწილის ერთეულ მასაზე.

ვთქვათ, მოცემული ადგილისათვის (7.1.2)-ს აქვს

$$y = 15 + 5x^{-1/2} \tag{7.1.3}$$

სახე. მისი საშუალებით შეიძლება ინფილტრაციის სიჩქარის გამოთვლა დროის ნებისმიერ მომენტში (სიჩქარე გამოთვლილია მეათედის სიზუსტით):

x=	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	სთ
y=	30,8	26,2	22,1	20,0	18,5	17,2	მმ/სთ



ნახ. 7.1.2.

ფართი $y = 15 + 5x^{-1/2}$ წირის ქვეშ შემოსაზღვრული $y = 0,\ x = 0{,}1$ და $x = 0{,}5$ წრფეებით

წყლის საერთო რაოდენობა (Q), რომელიც იჟონება ნიადაგში დროის გარკვეულ შუალედში, გრაფიკულად წარმოადგენს იმ გეომეტრიული ნაკვთის ფართს, რომელიც შემოსაზღვრულია (7.1.3) წირით, აბცისთა ღერძით და დროის ინტერვალის საზღვრებით აბცისათა ღერძზე (უფრო ზუსტად, მათზე y ღერძის პარალელურად გავლებული წრფეებით). (Q) სიდიდის განზომილებაა

$$\frac{\text{მმ}}{\text{სთ}}\,\text{სთ} = \text{მმ}$$

ვთქვათ, უნდა გამოვთვალოთ ნიადაგში ჩაჟონილი წყლის საერთო რაოდენობა დროის]0,1;0,5[ინტერვალში. ე.ი. ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ ნახ. 7.1.2-ზე დაშტრიხული ფართის ფართობი, რომელიც, როგორც ეს ამ პარაგრაფში ვნახეთ, შემდეგი ინტეგრალის

$$\int_{0.1}^{0.5}(15+5x^{-1/2})dx = \int_{0.1}^{0.5}15dx + \int_{0.1}^{0.5}5x^{-1/2}dx = 15\cdot 0{,}4 + 5\cdot\left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_{0,1}^{0,5} = 6 + 10\left(\sqrt{0{,}5}-\sqrt{0{,}1}\right)$$

$$= 6 + 10\left(0{,}7071067 - 0{,}3162277\right) = 6 + 10\cdot 0{,}390879 = 9{,}90879 \ (\text{მმ})$$

ტოლია (ფესვები ამოღებულია მეათმილიონედის სიზუსტით).

7.2. კალკულუსის ძირითადი თეორემა

თეორემა 7.2.1. თუ f უწყვეტი ფუნქციაა ღია ინტერვალზე, რომელიც $[a,b]$ სეგმენტს შეიცავს, მაშინ:

1. $$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = f(b);\qquad (7.2.1)$$

2. თუ $f(x) = F'(x)$, მაშინ $$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).\qquad (7.2.2)$$

(7.2.2) ფორმულას *ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა* ეწოდება, რომელიც 7.1 პარაგრაფში განსაზღვრული ინტეგრალის განმარტებად მივიღეთ. $F(x)$ ფუნქციას, როგორც ეს 7.1 პარაგრაფში იყო აღნიშნული, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველყოფილი, პრიმიტიული ფუნქცია. მას უწოდებენ აგრეთვე ანტიწარმოებულს ან *განუსაზღვრელ ინტეგრალს* და წერენ $\int f(x)dx$ ფორმითაც.

დამტკიცება. წარმოებულის ცნების შესაბამისად

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta b\to 0}\frac{\int_a^{b+\Delta b} f - \int_a^b f}{\Delta b} = \lim_{\Delta b\to 0}\frac{\int_a^{b+\Delta b} f + \int_b^a f}{\Delta b} = \lim_{\Delta b\to 0}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f}{\Delta b}.\qquad (7.2.3)$$

ვთქვათ, $\Delta b > 0$, მაშინ, 7.1.5 შედეგის თანახმად,

$$\Delta b \min_{b\le x\le b+\Delta b} f(x) \le \int_b^{b+\Delta b} f(x)dx \le \Delta b \max_{b\le x\le b+\Delta b} f(x),$$

ე. ი. Δb-ზე გაყოფის შემდეგ,

$$\min_{b\le x\le b+\Delta b} f(x) \le \frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} \le \max_{b\le x\le b+\Delta b} f(x).\qquad (7.2.4)$$

თუ (7.2.4)-ში Δb-ს ნულისკენ მივასწრაფებთ, მივიღებთ, რომ

$$f(b) \le \lim_{\Delta b\to 0+}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} \le f(b)$$

საიდანაც

$$\lim_{\Delta b\to 0+}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} = f(b).\qquad (7.2.5)$$

როცა $\Delta b < 0$, მაშინ (7.2.4)-ის ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$(-\Delta b)\min_{b+\Delta b\le x\le b} f(x) \le \int_{b+\Delta b}^{b} f(x)dx \le (-\Delta b)\max_{b+\Delta b\le x\le b} f(x),$$

საიდანაც, $(-\Delta b)$-ზე გაყოფისა და 7.1.3 განსაზღვრის გათვალისწინებით, გამომდინარეობს, რომ

$$\min_{b+\Delta b\le x\le b} f(x) \le \frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b} = \frac{\int_{b+\Delta b}^{b} f(x)dx}{-\Delta b} \le \max_{b+\Delta b\le x\le b} f(x).$$

აქედან, Δb-ს ნულისკენ მისწრაფების შემდეგ, მივიღებთ

$$\lim_{\Delta b\to 0-}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b}=f(b). \tag{7.2.6}$$

რადგან მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები ტოლია, ამიტომ არსებობს

$$\lim_{\Delta b\to 0}\frac{\int_b^{b+\Delta b} f(x)dx}{\Delta b}=f(b). \tag{7.2.7}$$

(7.2.3)-დან და (7.2.7)-დან გამომდინარეობს (7.2.1).

თუ (7.2.1)-ს გამოვიყენებთ, გვექნება, რომ $\forall x\in[a,b]$-სთვის

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)-\int_a^x f(t)dt\right)=F'(x)-\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)-f(x)=0\,.$$

ცნობილია, რომ თუ რაიმე ინტერვალზე ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, მაშინ ეს ფუნქცია რაიმე C მუდმივის ტოლია*). ამიტომ

$$F(x)-\int_a^x f(t)dt=C\,. \tag{7.2.6}$$

თუ ამ უკანასკნელში ჩავსვამთ

$$x=a\,,$$

მივიღებთ, რომ

$$F(a)-\int_a^a f(t)dt=C\,,$$

საიდანაც

$$C=F(a)\,. \tag{7.2.7}$$

ამდენად, (7.2.6)-დან და (7.2.7)-დან დავასკვნით, რომ

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)\,. \tag{7.2.8}$$

თუ (7.2.8)-ში ჩავსვამთ

$$x=b\,,$$

ცხადია,

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)\,.$$

რაც ემთხვევა (7.2.2)-ს, რადგან ადვილი მისახვედრია, რომ ინტეგრალის მნიშვნელობა საინტეგრაციო ცვლადზე დამოკიდებული არ არის.

---

*) ამის მკაცრად დასამტკიცებლად უნდა გამოვიყენოთ ლაგრანჟის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის შესახებ, რომელიც ჩვენი კურსით გათვალისწინებული არ არის. თუმცა მექანიკური მოსაზრებით ის ცხადია. მართლაც, თუ $s=f(t)$ გამოხატავს მატერიალური წერტილის მოძრაობას წრფის გასწვრივ, ამასთან მისი სიჩქარე, როცა $t\ge t_0$, იგივურად ნულის ტოლია $v=f'(t)\equiv 0$, მაშინ, როცა $t\ge t_0$, წერტილი ადგილზეა გაჩერებული და საწყის O წერტილამდე s მანძილი დროის ყოველ მომენტში არ იცვლება, ე.ი., მუდმივია.